



T.C.

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ORTOGONAL QUASI METRİK UZAYLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İLKER KARA

HAZİRAN

İLKER KARA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAZİRAN 2024

ORTOGONAL QUASI METRİK UZAYLAR

İlker KARA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman

Doç. Dr. Nurcan BİLGİLİ GÜNGÖR

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HAZİRAN 2024

Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

İlker KARA tarafından hazırlanan “Ortogonal Quasi Metrik Uzaylar” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Nurcan BİLGİLİ GÜNGÖR

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Başkan: Doç. Dr. Hakan ŞAHİN

Matematik Anabilim Dalı, Bursa Teknik Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Tahir COŞGUN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 26/06/2024

Juri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

İlker KARA

26.06.2024

ORTOGONAL QUASI METRİK UZAYLAR
(Yüksek Lisans Tezi)

İlker KARA

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
HAZİRAN -2024

ÖZET

Bu tez çalışmasında, öncelikle ortogonal metrik uzay ve quasi metrik uzay yapısı birlikte düşünülerek ortogonal quasi metrik uzay yapısı elde edilmiştir. Sonrasında ise bu yapı üzerinde tanımlı öz dönüşümler için bazı uygun büzülme koşulları sağlandığında sabit noktalarının varlığı ve tekliği incelenmiştir. Çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde ortogonal uzaylar ve sabit nokta teoremlerinin literatür özeti verilmiştir. İkinci bölümde bu çalışma için gerekli ön bilgiler, tanımlar ve teoremlere değinilmiştir. Üçüncü bölümde yeni tanımlanan ortogonal quasi metrik uzaylarda elde ettiğimiz sabit nokta teoremleri, uyarılar ve bu teoremlerinin zayıf büzülme yardımıyla Volterra-İntegral denklemlere uygulanması ele alınmıştır. Son bölümde ise elde ettiğimiz tüm sonuçlar bir özet halinde verilmiştir.

Sayfa Adedi
Anahtar Kelimeler
Danışman

: 22
: ortogonal quasi metrik uzaylar, zayıf büzülme dönüşümü, sabit nokta teoremleri, ortogonal metrik uzaylar
: Doç. Dr. Nurcan BİLGİLİ GÜNGÖR

ORTHOGONAL QUASI METRIC SPACE

(M. Sc. Thesis)

İlker KARA

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June-2024

ABSTRACT

In this thesis study, firstly orthogonal metric space and quasi metric space structure were considered together and orthogonal quasi metric space structure was obtained. Afterwards, the existence and uniqueness of fixed points were examined when some appropriate contraction conditions were met for the self mappings defined on this structure. The study consists of four chapters. In the first chapter, a summary of the literature on orthogonal spaces and fixed point theorems is given. In the second section, the preliminaries, definitions and theorems necessary for this study are mentioned. In the third section, we discuss the fixed point theorems and caveats we obtained for the newly defined orthogonal quasi metric spaces and their application to Volterra-integral equations with the help of weakly contraction. In the last section we summarize all our results.

Page Number

: 22

Keywords

: orthogonal quasi metric spaces, weakly contractive mapping, fixed point theorems,, orthogonal metric spaces

Supervisor

: Doç. Dr. Nurcan BİLGİLİ GÜNGÖR

ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR

Tez dönemim boyunca bilgisini, desteğini, sabrını ve ilgisini eksik etmeyen çok kıymetli hocam

Doç. Dr. Nurcan BİLGİLİ GÜNGÖR'e

sonsuz teşekkürü bir borç bilirim. Aynı zamanda lisans ve yüksek lisans dönemimde benden desteklerini esirgemeyen çok kıymetli hocalarım Prof. Dr. Adem BAYAR, Doç. Dr. Hakan ŞAHİN ve Dr. Öğr. Üyesi Tahir COŞGUN'a çok teşekkür ederim. Eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi destekleri için başta canım annem Fatma KARA'ya ve kıymetli aileme ve her kararımda daima yanımda olan çok kıymetli dostum Umutkan YÜKSEL'e çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ VE LİTERATÜR ÖZETİ	1
2. MATERYAL VE YÖNTEM	3
3. BULGULAR VE TARTIŞMA	8
4. SONUÇ	19
KAYNAKLAR	20
ÖZGEÇMİŞ	22

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
(K, d)	Metrik Uzay
$(K, \perp, d)$	Ortogonal Metrik Uzaylar
$(K, \perp, \tau)$	Ortogonal Quasi Metrik Uzay
(K, τ)	Quasi Metrik Uzay
$\perp$	Diklik Bağıntısı

1. GİRİŞ VE LİTERATÜR ÖZETİ

Banach daralma ilkesi ilk olarak 1922 yılında Banach (Banach, 1922) tarafından verilmiştir. Verildiği günden bugüne kadar birçok matematikçi bu daralma ilkesine çeşitli özellikler ekleyerek yeni teoremler bulmaya devam etmiştir. 1969 yılında Kannan (Kannan, 1969) yaptığı çalışmasında uzayın tamlık koşulunu kaldırmış ve farklı koşullar altında Banach teoreminde olduğu gibi benzer sonuçlar elde etmiştir. 1974 yılında Ciric (Ciric, 1974) Banach ve Kannan'ın teoremlerinde kullandıkları fonksiyonlar için verdikleri bağıntıları genişleterek ve teoremden kullandığı dönüşümlere göre tamlık tanımını uzayda tanımlayarak yeni sonuçlar elde etmiştir.

Quasi metrik uzaylar ilk olarak 1931 yılında Wilson (Wilson, 1931) tarafından verilmiş ve Niemytzki (Niemytzki, 1931) tarafından bir metrik uzayı tanımlayan aksiyomlar ve metrikleştirilebilirlik ile birlikte çalışılmıştır. Albert (Albert, 1941) ve Stoltenberg (Stoltenberg, 1969) de bu uzaylar üzerinde quasi metrik uzaylar adı altında çalışmışlardır, Ribeiro (Ribeiro, 1943) ise bu uzayı zayıf metrik uzaylar olarak adlandırmıştır.

Kelly (Kelly, 1963) ve Patty (Patty, 1967) bitopolojik uzaylar üzerine yaptıkları çalışmalarda bu uzayları incelemişlerdir.

Khan ve arkadaşları (Khan, Swaleh, & Sessa, 1984) mesafe değiştiren fonksiyonları tanıtmış ve metrik uzayda sabit nokta problemlerini çözmek için kullanmışlardır. 2012 yılında Jleli ve Samet (Jleli & S., 2012) mesafe değiştiren fonksiyonları kullanarak quasi metrik uzaylarda bazı sabit noktaların varlığını kanıtlamışlardır.

Ortogonal küme ve ortogonal metrik uzay kavramı ilk olarak 2014 yılında tanımlanmıştır. Gordji ve arkadaşları (Baghani, Gordji, & Ramezani, 2016) Banach sabit nokta teoreminin ortogonal metrik uzayda bir genellemesini kanıtlamışlardır ve elde edilen sonuçları adi diferansiyel denklemlerin çözümünün varlığını kanıtlamak için kullanılmışlardır. 2015 yılında Ramezani (Ramezani, 2015) genelleştirilmiş konveks daralmaları tanımlamıştır ve bazı sonuçlar elde etmiştir ve elde ettiği sonuçları göstermiştir. Gordji ve Habibi (Eshaghi Gordji & Habibi, 2017) genelleştirilmiş ortogonal metrik uzaylarda adi diferansiyel denklemler için Cauchy probleminin sabit noktasına ilişkin varlık ve teklik teoremini kanıtlamışlardır. Aynı yıl Ramezani ve Baghani (Ramezani & Hamid., 2017) güçlü ortogonal küme ve güçlü ortogonal metrik uzaylar kavramlarını ve Banach büzülme prensibi ve Walter teoreminin bir genellemesini çalışmışlardır.

Razavi ve Masiha (Razavi & Masiha., 2018), 2018 yılında ortogonal metrik uzayda bazı orijinal kavramları tanıtarak adi diferansiyel denklemlerin çözümünün varlığını ve tekliğini

kanıtlamışlardır.

Gordji ve Habibi (Eshaghi Gordji & Habibi, 2017) 2019 yılında, ortogonal metrik uzayda sabit nokta teoremi aracılığıyla birinci dereceden diferansiyel denklemlerin çözümünün varlığı ve tekliği için yeni ve basit bir kanıt vermişlerdir. Güngör ve Türkoğlu (Bilgili Gungor & Turkoglu, 2019) 2019 yılında mesafe değıştiren fonksiyon kavramı ile yeni sabit nokta sonuçları elde etmişlerdir.



2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1 Tanım K boş kümeden farklı bir küme olsun. K üzerinde tanımlı bir metrik, her $k_1, k_2, k_3 \in K$ için

- (a) $d(k_1, k_2) \geq 0$
- (b) $d(k_1, k_2) = 0 \Leftrightarrow k_1 = k_2$
- (c) $d(k_1, k_2) = d(k_2, k_1)$
- (d) $d(k_1, k_3) \leq d(k_1, k_2) + d(k_2, k_3)$

özelliklerini sağlayan bir

$$d : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonudur. Eğer d , K üzerinde bir metrik ise o zaman (K, d) çiftine bir metrik uzay denir.

Örnek K boş kümeden farklı herhangi bir küme olmak üzere $k_1, k_2 \in K$ için

$$d(k_1, k_2) = \begin{cases} 0, & k_1 = k_2 \text{ ise} \\ 1, & k_1 \neq k_2 \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlı d fonksiyonu K üzerinde bir metrik tanımlar. Bu metriğe ayrık metrik adı verilir. Bu örnek ile birlikte boş kümeden farklı her küme üzerinde bir metrik tanımlanabileceği görülmüş olur.

Örnek $K = \mathbb{R}$ olmak üzere $k_1, k_2 \in K$ için

$$d(k_1, k_2) = |k_1 - k_2|$$

ile tanımlı d metriği K kümesi üzerinde bir metrik uzaydır.

2.2 Tanım (K, d) bir metrik uzay olsun. $k_0 \in K$ ve $r > 0$ bir reel sayı olsun.

$$B(k_0; r) = \{k \in K : d(k_0, k) < r\}$$

$$B[k_0; r] = \{k \in K : d(k_0, k) \leq r\}$$

$$S(k_0; r) = \{k \in K : d(k_0, k) = r\}$$

kümelerine sırasıyla r yarıçaplı ve k_0 merkezli açık yuvar, kapalı yuvar ve yuvar yüzeyi adı verilir.

2.3 Tanım Bir (K, d) metrik uzayında bir dizi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinden (K, d) metrik uzayı içine tanımlı bir fonksiyondur. Bu çalışma boyunca (K, d) uzayındaki diziler için $\{k_n\}$ notasyonu kullanılacaktır.

2.4 Tanım (K, d) metrik uzayında bir dizi $\{k_n\}$ bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n > N$ için

$$d(k_n, k) < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa $\{k_n\}$ dizisine $k \in K$ ye yakınsıyor denir ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = k$$

ile gösterilir.

2.1 Yardımcı Teorem $\{k_n\}$, (K, d) metrik uzayında yakınsak bir dizi olsun. O zaman

(a) $k = \lim_{n \rightarrow \infty} k_n$ tektir

(b) $\{k_n\}$ nin herhangi bir alt dizisi de k 'ya yakınsar

(c) $\{k_n\}$ sınırlıdır.

2.5 Tanım Bir (K, d) metrik uzayında bir dizi $\{k_n\}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $m, n > N$ için

$$d(k_n, k_m) < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $\{k_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir.

2.2 Teorem Bir (K, d) metrik uzayında

(a) her yakınsak dizi bir Cauchy dizisidir

(b) her Cauchy dizisi sınırlıdır.

2.3 Teorem Eğer bir (K, d) metrik uzayı içindeki noktaların bir Cauchy dizisi yakınsak bir alt dizisi içerirse o zaman dizi, alt dizinin yakınsadığı elemana yakınsar.

2.6 Tanım Her Cauchy dizisinin yakınsak olduğu bir metrik uzaya tam metrik uzay denir.

Örnek Herhangi bir (K, d) ayrık metrik uzayı tamdır.

2.7 Tanım K boş kümeden farklı bir küme ve $t : K \rightarrow K$ bir fonksiyon olsun.

$$tk = k$$

eşitliğini sağlayan $k \in K$ elemanına t nin bir sabit noktası denir. Aşağıda örneklerle gözlemleyebiliriz ki $t : K \times K$ ile tanımlanan bir t fonksiyonunun herhangi bir sabit noktası olmayabilir veya bir sabit noktası olabilir ya da birden çok sabit noktası olabilir.

Örnek

$t(k) = 2k - 3$ ile tanımlı $t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $k = 3$ gibi tek bir sabit noktası vardır.

$t(k) = k^2 + 2k + 4$ ile tanımlı $t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun hiç sabit noktası yoktur.

$t(k) = k$ ile tanımlı $t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun sonsuz çoklukta sabit noktası vardır.

2.8 Tanım (K, d) bir metrik uzay ve $t : K \rightarrow K$ bir dönüşüm olmak üzere, her $k_1, k_2 \in K$ için

$$d(tk_1, tk_2) \leq \beta d(k_1, k_2)$$

olacak şekilde $0 \leq \beta < 1$ sabiti varsa t ye bir büzülme dönüşümü denir.

2.4 Teorem (K, d) tam metrik uzay ve $t : K \rightarrow K$ bir büzülme dönüşümü olmak üzere

(a) t dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır

(b) Keyfi bir $k_0 \in K$ noktası için $\{t^n k_0\}$ iterasyon dizisi t dönüşümünün bu sabit noktasına yakınsar.

2.9 Tanım K boş kümeden farklı bir küme ve $\perp \subseteq K \times K$ bir ikili bağıntı olmak üzere, eğer " $\perp$ " bağıntısı

$$\exists k_0 \in K; (\forall k_1 \in K, k_0 \perp k_1) \text{ veya } (\forall k_1 \in K, k_1 \perp k_0)$$

koşulunu sağlıyorsa bu bağıntıya diklik bağıntısı K kümesinde bu bağıntı ile birlikte ortogonal küme denir ve $(K, \perp)$ ile gösterilir. Bu koşulu sağlayan k_0 elemanına ortogonal eleman denir.

Örnek $K = [0, \infty)$ kümesi üzerinde $k_0 k_1 \in \{k_0, k_1\}$ şeklinde tanımlı $k_0 \perp k_1$ bağıntısına göre ortogonal eleman $k_0 = 0$ veya $k_0 = 1$ dir. Bu durumda $(K, \perp)$ ortogonal kümedir.

Örnek $K = [2, \infty)$ olsun. $k_0 \leq k_1$ şeklinde tanımlı $k_0 \perp k_1$ bağıntısına göre $k_0 = 2$ alınır

$(K, \perp)$ kümesi ortogonal küme olur.

2.10 Tanım $(K, \perp)$ bir ortogonal küme olmak üzere, $k_1, k_2 \in K$ ortogonal elemanları için $k_1 \perp k_2$ veya $k_2 \perp k_1$ oluyorsa bu elemanlara ortogonal bağlantılı elemanlar denir.

2.11 Tanım $(K, \perp)$ ortogonal kümesindeki $\{k_n\}$ dizisi

$$(\forall n \in \mathbb{N}, k_n \perp k_{n+1}) \text{ veya } (\forall n \in \mathbb{N}, k_{n+1} \perp k_n)$$

durumlarından birini sağlıyorsa $\{k_n\}$ dizisine ortogonal dizi denir.

2.12 Tanım $(K, \perp)$ bir ortogonal küme ve (K, d) bir metrik uzay olmak üzere $(K, \perp, d)$ üçlüsüne ortogonal metrik uzay adı verilir.

2.13 Tanım $(K, \perp, d)$ bir ortogonal metrik uzay ve $t : K \rightarrow K$ bir dönüşüm olsun. K da her $\{k_n\}$ dizisi için $k_n \rightarrow k$ iken $t(k_n) \rightarrow t(k)$ oluyorsa t dönüşümüne $k \in K$ noktasında ortogonal sürekli denir. t dönüşümü her $k \in K$ noktasında ortogonal sürekli ise t dönüşümü ortogonal sürekli, denir.

2.14 Tanım $(K, \perp, d)$ bir ortogonal metrik uzay olmak üzere, K daki her ortogonal Cauchy dizisi yakınsak ise $(K, \perp, d)$ ye ortogonal tam metrik uzay denir.

2.15 Tanım $(K, \perp)$ bir ortogonal küme olmak üzere $t : K \rightarrow K$ dönüşümü için

$$k_1 \perp k_2 \Rightarrow tk_1 \perp tk_2$$

oluyorsa t dönüşümüne ortogonalılığı koruyan dönüşüm denir.

2.16 Tanım Aşağıda verilen koşulları sağlayan $\alpha : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonuna mesafe değiştiren fonksiyon denir.

(a) α fonksiyonu alttan yarı sürekli azalmayandır,

(b) $\alpha(k) = 0 \Leftrightarrow k = 0$.

Şimdi mesafe değiştiren fonksiyonlar yardımıyla elde edilen bazı önemli sabit nokta teoremlerini inceleyeceğiz.

2.5 Teorem (K, d) bir tam metrik uzay ve $\alpha : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ mesafe değiştiren fonksiyon olmak üzere, (K, d) tam metrik uzayı üzerinde tanımlanmış bir t dönüşümü, her $k_1, k_2 \in K$

ve $0 < c < 1$ için

$$\alpha(d(tk_1, tk_2)) \leq c\alpha(d(k_1, k_2))$$

koşulunu sağlıyorsa, t dönüşümünün tek bir sabit noktası vardır.

2.6 Teorem (K, d) tam metrik uzay ve $\alpha : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ mesafe değiştiren fonksiyon olmak üzere, (K, d) tam metrik uzayı üzerinde tanımlanmış bir t dönüşümü, her $k_1, k_2 \in K$ için

$$d(tk_1, tk_2) \leq d(k_1, k_2) - \alpha(d(k_1, k_2))$$

koşulunu sağlıyorsa, t dönüşümünün tek bir sabit noktası vardır.

2.7 Teorem (K, d) tam metrik uzay, $\alpha : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ve $\beta : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ mesafe değiştiren fonksiyonlar olmak üzere, (K, d) tam metrik uzayı üzerinde tanımlanmış bir t dönüşümü, her $k_1, k_2 \in K$ için

$$\alpha(d(tk_1, tk_2)) \leq \alpha(d(k_1, k_2)) - \beta(d(k_1, k_2))$$

koşunu sağlıyorsa, t dönüşümünün tek bir sabit noktası vardır.

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

3.1 Tanım K boş küme olmayan bir küme olmak üzere, K üzerinde tanımlı negatif olmayan reel değerli bir τ fonksiyonu her $k_1, k_2, k_3 \in K$ için aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa τ fonksiyonuna quasi metrik, (K, τ) ikilisine quasi metrik uzay denir.

$$(a) \quad \tau(k_1, k_2) = \tau(k_2, k_1) \Leftrightarrow k_1 = k_2$$

$$(b) \quad \tau(k_1, k_2) \leq \tau(k_1, k_3) + \tau(k_3, k_2).$$

Burada dikkat edilirse $k_1 \neq k_2$ için $\tau(k_1, k_2) \neq \tau(k_2, k_1)$ olur. Buda durum τ fonksiyonunun simetriği özelliği olmadığı anlamına gelir.

3.2 Tanım $(K, \perp)$ ortogonal bir küme ve τ , K kümesi üzerinde quasi metrik olmak üzere $(K, \perp, \tau)$ üçlüsüne ortogonal quasi metrik uzay denir.

Şimdi bu uzay üzerinde birkaç örnek verelim.

Örnek $K = \mathbb{Z}^+$ bir küme, $\tau : K \times K \rightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyon, $\perp$, K üzerinde bir ortogonal bağıntısı $k_1 \perp k_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 \in \{k_1, k_2\}$ olmak üzere

$$\tau(k_1, k_2) = \begin{cases} 0, & k_1 = k_2 \\ k_2^{-1}, & k_1 > k_2 \text{ ise } k_1 \text{ çift } k_2 \text{ tek} \\ 1, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

ise τ , K kümesi üzerinde bir quasi metriktir ve $(K, \perp, \tau)$ ortogonal quasi metrik uzaydır.

Örnek $K = \mathbb{R}$ bir küme, $\tau : K \times K \rightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyon, $\perp$, K üzerinde bir ortogonallik bağıntısı $k_1 \perp k_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = k_1$ olmak üzere

$$\tau(k_1, k_2) = \begin{cases} k_2 - k_1, & k_1 \leq k_2 \\ 1, & k_1 > k_2 \end{cases}$$

ise τ , K kümesi üzerinde bir quasi metriktir ve $(K, \perp, \tau)$ ortogonal quasi metrik uzaydır.

3.3 Tanım $(K, \perp, \tau)$ ortogonal quasi metrik uzay, $\{k_n\}$ ise K üzerinde ortogonal bir dizi ve $k_0 \in K$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau(k_n, k_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau(k_0, k_n) = 0 \quad (4.1)$$

oluyorsa $\{k_n\}$ ortogonal dizisi k_0 noktasına yakınsar.

Uyarı Ortogonal quasi metrik uzayda yakınsak olan ortogonal bir dizinin tek bir limiti

vardır. Gerçekten $(K, \perp, \tau)$ ortogonal quasi metrik uzay ve $\{k_n\} \subseteq K$ yakınsak ortogonal bir dizi olsun. $\{k_n\}$ ortogonal dizisinin $k_1, k_2 \in K$ olacak şekilde iki farklı noktaya yakınsadığını kabul edelim. Bu durumda

$$0 \leq \tau(k_1, k_2) \leq \tau(k_1, k_n) + \tau(k_n, k_2), \quad \forall k_n \in \mathbb{R}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $n \rightarrow \infty$ limit alınır

$$0 \leq \tau(k_1, k_2) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \tau(k_1, k_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} \tau(k_n, k_2)$$

elde edilir. Benzer şekilde k_1 ve k_2 elemanları yer değiştirilerek ispat yapılabilir. Buradan $\{k_n\}$ ortogonal dizisinin yakınsadığı $k_1 = k_2$ olacak şekilde tek bir nokta vardır.

Uyarı $(K, \perp, \tau)$ ortogonal quasi metrik uzayda $\{k_n\}$ ortogonal dizisi, k_0 noktasına yakınsıyorsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau(k_n, k_1) = \tau(k_0, k_1), \quad \forall k_1 \in K \quad (4.2)$$

elde edilir. Yani ortogonal quasi metrik uzayda τ birinci değişkene göre sürekli bir dönüşümdür. Bu durum $\tau(k_n, k_1) \leq \tau(k_n, k_0) + \tau(k_0, k_1)$ ve $\tau(k_0, k_1) \leq \tau(k_0, k_n) + \tau(k_n, k_1)$ şeklinde gösterilebilir. Bu nedenle

$$\tau(k_0, k_1) - \tau(k_0, k_n) \leq \tau(k_n, k_1) \leq \tau(k_n, k_0) + \tau(k_0, k_1), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

elde edilir.

3.4 Tanım $(K, \perp, \tau)$ ortogonal quasi metrik uzay ve $\{k_n\}$ ortogonal bir dizi olmak üzere, $\{k_n\}$ ortogonal dizisinin ortogonal sol-Cauchy olması için gerek ve yeter koşul $\varepsilon > 0$ için pozitif bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı var ve her $n \geq m > N$ için $\tau(k_n, k_m) < \varepsilon$ olmalıdır.

3.5 Tanım $(K, \perp, \tau)$ ortogonal quasi metrik uzay ve $\{k_n\}$ ortogonal bir dizi olmak üzere, $\{k_n\}$ ortogonal dizisinin ortogonal sağ-Cauchy olması için gerek ve yeter koşul $\varepsilon > 0$ için pozitif bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı var ve her $m \geq n > N$ için $\tau(k_n, k_m) < \varepsilon$ olmalıdır.

3.6 Tanım $(K, \perp, \tau)$ ortogonal quasi metrik uzay ve $\{k_n\}$ ortogonal bir dizi olmak üzere, $\{k_n\}$ ortogonal dizisinin ortogonal Cauchy olması için gerek ve yeter koşul $\varepsilon > 0$ için pozitif bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı var ve her $m, n > N$ için $\tau(k_n, k_m) < \varepsilon$ olmalıdır.

3.7 Tanım $(K, \perp, \tau)$ ortogonal quasi metrik uzay olmak üzere

(a) $(K, \perp, \tau)$ uzayının ortogonal sol-tam uzay olması için gerek ve yeter koşul, her ortogonal sol-Cauchy dizisinin yakınsak olmasıdır;

- (b) $(K, \perp, \tau)$ uzayının ortogonal sağ-tam uzay olması için gerek ve yeter koşul her ortogonal sağ-Cauchy dizisinin yakınsak olmasıdır;
- (c) $(K, \perp, \tau)$ uzayının ortogonal tam uzay olması için gerek ve yeter koşul her ortogonal Cauchy dizisinin yakınsak olmasıdır.

3.8 Tanım $(K, \perp, \tau)$ ortogonal quasi metrik uzay ve $\alpha : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ olmak üzere $\alpha^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ şartını sağlayan sürekli bir fonksiyon ve $t : K \rightarrow K$ bir dönüşüm olmak üzere, her $k_1, k_2 \in K$ ortogonal bağlantılı elemanları için

$$\tau(tk_1, tk_2) \leq \tau(k_1, k_2) - \alpha(\tau(k_1, k_2))$$

özellikliğini sağlıyorsa t dönüşümüne ortogonal zayıf büzülme dönüşüm denir.

3.9 Tanım $(K, \perp, \tau)$ ortogonal quasi metrik uzay olmak üzere $t : K \rightarrow K$ dönüşümü her $k_1, k_2 \in K$ ortogonal elemanları için $k_1 \perp k_2$ iken $tk_1 \perp tk_2$ şartını sağlıyorsa t dönüşümüne ortogonalılığı koruyan dönüşüm denir.

3.10 Tanım $(K, \perp, \tau)$ ortogonal quasi metrik uzay ve $t : K \rightarrow K$ bir dönüşüm ve $k_0 \in K$ olmak üzere, eğer t dönüşümü K daki her $\{k_n\}$ ortogonal dizisi için $\{k_n\} \rightarrow k_0$ iken $t(k_n) \rightarrow t(k_0)$ özelliğini sağlıyorsa t dönüşümüne ortogonal süreklidir denir.

Şimdi aşağıda uyarılar kısmında bazı durumlar örnek verilerek incelenecektir.

Uyarı Her zayıf büzülme dönüşümünün ortogonal zayıf büzülme dönüşüm olduğunu görmek kolaydır. Aşağıda ki örnekte bu ifadenin karşınının her zaman doğru olmadığını gösterelim.

Örnek $K = \mathbb{R}$ ve $\perp$ bağıntısı K kümesi üzerinde tanımlı bir ortogonalite bağıntısı, $k_1 \perp k_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = k_1$ ve $\tau : K \times K \rightarrow [0, \infty)$ ortogonal quasi metrik uzay

$$\tau(k_1, k_2) = \begin{cases} k_2 - k_1, & k_1 \leq k_2 \text{ ise} \\ 1, & k_1 > k_2 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. t dönüşümünü

$$t(k_3) = \begin{cases} 0, & k_3 < 0 \text{ ise} \\ \frac{k_3}{2}, & 0 \leq k_3 < 1 \text{ ise} \\ \frac{1}{2}, & k_3 > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

ve mesafe değiştiren γ fonksiyonunu $\gamma : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $\gamma(\alpha) = \frac{\alpha}{3}$ şeklinde tanımlayalım. Bu

şartlar altında t dönüşümü ortogonal zayıf büzülme dönüşümdür. Şimdi bunu tüm durumları inceleyerek gösterelim. $k_1 \perp k_2$ olduğunu kabul edelim. O halde $k_1 k_2 = k_1$, $k_1 = 0$ iken $k_2 \in \mathbb{R}$ veya $k_2 = 1$ iken $k_1 \in \mathbb{R}$ olur.

Durum 1. Eğer $k_1 = 0, k_2 \in \mathbb{R}$ ise

$$(a) \ k_2 \geq 0 \Rightarrow \tau(0, k_2) = k_2$$

(a)₁ Eğer $0 \leq k_2 < 1$ ise bu durumda

$$\tau(tk_1, tk_2) = t(0, \frac{k_2}{2}) = \frac{k_2}{2} \leq k_2 - \gamma(k_2) = k_2 - \frac{k_2}{3}$$

(a)₂ Eğer $k_2 \geq 1$ ise bu durumda

$$\tau(tk_1, tk_2) = t(0, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \leq k_2 - \gamma(k_2) = \frac{2k_2}{3}$$

$$(b) \ k_2 < 0 \Rightarrow \tau(0, k_2) = 1$$

$$\tau(tk_1, tk_2) = \tau(0, 0) = 0 \leq 1 - \gamma(1) = \frac{2}{3}$$

Durum 2. Eğer $k_2 = 1, k_1 \in \mathbb{R}$

$$(a) \ k_1 \leq 1 \Rightarrow \tau(k_1, 1) = 1 - k_1$$

(a)₁ Eğer $0 \leq k_1 \leq 1$ ise bu durumda

$$\tau(tk_1, tk_2) = \tau(\frac{k_1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{k_1}{2} \leq \frac{2(1 - k_1)}{3}$$

(a)₂ Eğer $k_1 < 0$ ise bu durumda

$$\tau(tk_1, tk_2) = \tau(0, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \leq \frac{2(1 - k_1)}{3}$$

$$(b) \text{ Eğer } k_1 > 1 \Rightarrow \tau(k_1, 1) = 1$$

$$\tau(tk_1, tk_2) = \tau(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 0 \leq 1 - \gamma(1) = 1 - \frac{1}{3}$$

elde edilir. Buda t dönüşümünün ortogonal zayıf büzülme dönüşümü olduğunu gösterir. Ancak zayıf büzülme dönüşümü değildir. Örneğin $k_1 = 2$ ve $k_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ reel sayıları için

$$\tau(tk_1, tk_2) = \tau(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}) = 1$$

ve

$$\tau(k_1, k_2) = \tau(2, \frac{\sqrt{2}}{2}) = 1$$

elde edilir. Buradan açıkça görülür ki

$$\tau(tk_1, tk_2) = 1 \not\leq 1 - \gamma(1) = 1 - \frac{1}{3}.$$

Uyarı Her sürekli dönüşüm ortogonal sürekli dönüşümdür fakat karşısı her zaman doğru değildir. Aşağıda aksine bir örnek verelim.

Örnek $K = [0, 1]$, $\perp$ bağıntısı $k_1, k_2 \in K$ elemanları için $k_1 \perp k_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = k_1$ şartını sağlayan ortogonalite bağıntısı, $\tau : K \times K \rightarrow [0, \infty)$ quasi metriği ve t dönüşümünü sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$t(k_1, k_2) = \begin{cases} k_1 - k_2, & k_2 \leq k_1 \text{ ise} \\ 2(k_2 - k_1), & k_2 > k_1 \text{ ise} \end{cases}$$

$$t(k_3) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & 0 \leq k_3 < \frac{1}{2} \text{ ise} \\ \frac{k_1}{6}, & \frac{1}{2} \leq k_3 \leq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

Bu t dönüşümü $K = [0, 1]$ kümesinde üzerinde sürekli değildir. Ancak t dönüşümü $K = [0, 1]$ kümesi üzerinde ortogonal sürekli bir fonksiyondur. Gerçekten de $\{k_n\}$ keyfi bir ortogonal dizi ve $k_n \rightarrow k_1$ olacak şekilde $k_1 \in K$ elemanı olsun. Bu durumda $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır ve $n \in \mathbb{N}$ için $n \geq n_0$ şartını sağlayan $n \in \mathbb{N}$ için $k_n = 0$ veya $k_n = 1$ elde edilir. Bu durumda $k_1 = 0$ veya $k_1 = 1$ olduğu açıktır. O halde $tk_n \rightarrow tk_1$ elde edilir.

3.1 Teorem $(K, \perp, \tau)$ ortogonal tam quasi metrik uzay, $\perp$ bağıntısı geçişmeli diklik bağıntısı, $t : K \rightarrow K$ ortogonalite koruyan ve ortogonal zayıf büzülme şartını sağlayan bir dönüşüm olmak üzere, eğer herhangi bir ortogonal $k \in K$ ortogonal elemanı için $t^n(k)$ iterasyon dizisinin yakınsadığı bir $k^* \in K$ var ve t dönüşümü bu $k^* \in K$ noktasında ortogonal sürekli ise o zaman k^* noktası t dönüşümünün bir sabit noktasıdır.

Kanıt $(K, \perp)$ ortogonal bir küme olduğundan tanım gereği ortogonal bir elemanı vardır. Genelliği bozmadan $k_0 \in K$ şeklinde ortogonal bir eleman seçebiliriz. $\{k_n\} = t(k_{n-1}) = t^n k_0$ olmak üzere $\{k_n\}$ bir dizi olsun. t dönüşümü ortogonalite koruduğundan $\{k_n\}$ ortogonal bir dizidir. Eğer en az bir $n \in \mathbb{N}$ elemanı için $k_n = k_{n+1}$ şartı sağlanırsa o zaman $k_{n+1} = tk_n = k_n$ olur ve buradan k_n noktası t dönüşümünün bir sabit noktasıdır.

Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ için $k_n \neq k_{n+1}$ olduğunu varsayalım. t dönüşümü ortogonalite koruyan ve ortogonal zayıf büzülme olduğundan her $n \geq 1$ için

$$\tau(k_n, k_{n+1}) \leq \tau(k_{n-1}, k_n) - \gamma(\tau(k_{n-1}, k_n)) \quad (4.3)$$

elde edilir. Bunun anlamı $\{\tau(k_n, k_{n+1})\}$ pozitif sayılarda azalan bir dizidir. O zaman $n \rightarrow \infty$ için $\tau(k_n, k_{n+1}) \rightarrow s$ olacak şekilde bir $s \geq 0$ vardır. Bu durumda (4.3) denkleminde $n \rightarrow \infty$ alınırsa $\gamma(s) = 0$ olur yani $s = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau(k_n, k_{n+1}) = 0 \quad (4.4)$$

elde edilir. Önceki bölümlerde vermiş olduğumuz lemma kurallarına göre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau(k_{n+1}, k_n) = 0 \quad (4.5)$$

elde edilir. Şimdi $\{k_n\}$ ortogonal dizisinin $(K, \perp, \tau)$ ortogonal quasi metrik uzayda ortogonal Cauchy dizisi olduğunu göstereyim. Bunun için sırasıyla ortogonal sol-Cauchy ve ortogonal sağ-Cauchy olduğunu göstereceğiz. Kabul edelim ki $\{k_n\}$ bir ortogonal sol-Cauchy dizisi olmasın. O halde $n_r > m_r > r$ olacak şekilde k_n nin k_{n_r} ve k_{m_r} alt dizilerini bulabileceğimiz $\varepsilon > 0$ vardır ve tüm r ler için $\tau(k_{n_r}, k_{m_r}) \geq \varepsilon$ olur. Ayrıca m_r ye karşılık gelen n_r yi bulmak için yukarıdaki eşitsizliği sağlayacak şekilde seçebiliriz. O halde tüm r ler için $\tau(k_{n_r} - 1, k_{m_r}) < \varepsilon$ olur. Öte yandan

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq \tau(k_{n_r}, k_{m_r}) \leq \tau(k_{n_r}, k_{n_r} - 1) + \tau(k_{n_r} - 1, k_{m_r}) \\ &< \tau(k_{n_r}, k_{n_r} - 1) + \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra (4.5) denkleminde $r \rightarrow \infty$ alırsak

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \tau(k_{n_r}, k_{m_r}) = \varepsilon$$

elde edilir. Kabbullerimizden dolayı

$$\tau(k_{n_r} - 1, k_{m_r} - 1) \leq \tau(k_{n_r} - 1, k_{n_r}) + \tau(k_{n_r}, k_{m_r}) + \tau(k_{m_r}, k_{m_r} - 1)$$

ve

$$\tau(k_{n_r}, k_{m_r}) \leq \tau(k_{n_r}, k_{n_r} - 1) + \tau(k_{n_r} - 1, k_{m_r} - 1) + \tau(k_{m_r} - 1, k_{m_r})$$

eşitsizliklerini elde ederiz. Bu eşitsizliklerde $r \rightarrow \infty$ alırsak (4.4), (4.5) ve (4.6) denklemlerini kullanarak

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \tau(k_{n_r} - 1, k_{m_r} - 1) = \varepsilon \quad (4.7)$$

elde ederiz. Şimdi t nin ortogonal zayıflığını ve $\perp$ bağıntısının geçişme özelliğini kullanarak

tüm r ler için

$$\begin{aligned}\tau(k_{n_r}, k_{m_r}) &= \tau(t_{n_r} - 1, t_{m_r} - 1) \\ &\leq \tau(k_{n_r} - 1, k_{m_r} - 1) - \gamma(\tau(k_{n_r} - 1, k_{m_r} - 1))\end{aligned}$$

elde ederiz. Yukarıda verdiğimiz eşitsizliklerde $r \rightarrow \infty$ alırsak (4.6) ve (4.7) kullanıp

$$\varepsilon \leq \varepsilon - \gamma(\varepsilon)$$

elde ederiz. Bu da $\varepsilon = 0$ olduğu anlamına gelir, ki bu durum $\varepsilon > 0$ durumu ile çelişir. Dolayısıyla $\{k_n\}$ ortogonal bir sol-Cauchy dizisidir. Benzer şekilde $\{k_n\}$ nin ortogonal bir sağ-Cauchy dizisi olduğunu gösterebiliriz. O zaman $\{k_n\}$, $(K, \perp, \tau)$ ortogonal quasi metrik uzayında bir ortogonal Cauchy dizisidir. Bu durumda $k^* \in K$ vardır ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau(k_n, k^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau(k^*, k_n) = 0.$$

Şimdi t dönüşümü ortogonal sürekli olduğundan $k^* \in K$ elemanının t dönüşümünün sabit noktası olduğunu gösterilebilir. t dönüşümünün $k^* \in K$ da ortogonal sürekli olduğunu kabul edelim. O halde

$$k^* = \lim_{n \rightarrow \infty} k_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} tk_n = tk^*$$

elde edilir. Dolayısıyla $k^* \in K$, t dönüşümünün sabit bir noktasıdır. Şimdi $k^* \in K$ sabit noktasının tekliğini inceleyelim. Kabul edelim ki t dönüşümünün k^* ve l^* gibi iki farklı sabit noktası olsun. O halde

Durum 1. Eğer t dönüşümünün ortogonal zayıflığını kullanırsak k^* ve l^* ortogonal bağlantılı elemanlar olur, o halde

$$\tau(k^*, l^*) = \tau(tk^*, tl^*) \leq \tau(k^*, l^*) - \gamma(\tau(k^*, l^*))$$

çelişkisi elde edilir. O halde $k^* = l^*$ olacak şekilde tek bir sabit noktası vardır.

Durum 2. Eğer dönüşümün tek bir sabit noktası yoksa kümeden alınan $k \in K$ ortogonal elemanı için

$$[(k \perp k^*) \wedge (k \perp l^*)] \vee [(k^* \perp k) \wedge (l^* \perp k)]$$

ve t dönüşümü altında

$$[(t^n k \perp t^n k^*) \wedge (t^n k \perp t^n l^*)] \vee [(t^n k^* \perp t^n k) \wedge (t^n l^* \perp t^n k)]$$

elde edilir. Şimdi τ nun üçgen eşitsizliğini ve t dönüşümünün zayıf büzülme özelliğini kul-

lanarak

$$\begin{aligned}
\tau(k^*, l^*) &= \tau(tk^*, tl^*) \\
&\leq \tau(tk^*, tk_{n+1}) + \tau(tk_{n+1}, tl^*) \\
&\leq \tau(k^*, k_{n+1}) - \gamma(\tau(k^*, k_{n+1})) \\
&\quad + \tau(k_{n+1}, l^*) - \gamma(\tau(k_{n+1}, l^*))
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte $n \rightarrow \infty$ alınırsa $k^* = l^*$ olduğu görülür. Böylece k^* t dönüşümünün tek bir sabit noktasıdır. $\square$

Her $\alpha > 0$ ve $0 < m < 1$ için $\gamma(\alpha) = (1 - m) \cdot \alpha$ alınırsa 4.1 Teoreminden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç $(K, \perp, \tau)$ ortogonal tam quasi metrik uzay, $\perp$ bağıntısı geçişmeli bir diklik bağıntısı ve $t : K \rightarrow K$ ortogonalliği koruyan bir dönüşüm olmak üzere, $k_1, k_2 \in K$ ortogonal bağlantılı iki eleman ve $m \in (0, 1)$ için

$$\tau(tk_1, tk_2) \leq m \cdot \tau(k_1, k_2)$$

eşitsizliğini sağlandığını varsayalım. O halde $k_1 \in K$ ortogonal elemanı için $t^n(k_1)$ iterasyon dizisinin yakınsadığı $k^* \in K$ vardır. Eğer t dönüşümü $k^* \in K$ noktasında ortogonal sürekli ise o zaman $k^* \in K$ noktası t dönüşümünün tek bir sabit noktasıdır.

Örnek $K = [0, 1)$ bir küme ve $\tau : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$

$$t(k_1, k_2) = \begin{cases} k_1 - k_2, & k_1 > k_2 \text{ ise} \\ 0, & k_1 \leq k_2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $\perp$ bağıntısı geçişmeli diklik bağıntısı ve bu bağıntı üzerinde $k_1 \perp k_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 \leq k_1$ ikili bağıntısını tanımlayalım. O halde $(K, \perp)$ ortogonal kümedir ve τ K üzerinde quasi metrik uzaydır. O halde $(K, \perp, \tau)$ ortogonal quasi metrik uzaydır. Bu uzayda herhangi bir ortogonal Cauchy dizisi yakınsaktır. Gerçekten $\{k_n\}$ K içinde keyfi bir ortogonal Cauchy dizisi ise, o zaman $\{k_n\}$ nin her $n \in \mathbb{N}$ için $\{k_{n_r}\}$ alt dizisi vardır. $k_{n_r} = c$ olacak şekilde $c \in K$ sabit sayısı var ve $\{k_{n_r}\}$ alt dizisi bu noktaya yakınsar, bir dizinin alt dizisi yakınsak ise kendide yakınsaktır. Bu nedenle $(K, \perp, \tau)$ ortogonal tam quasi metrik uzaydır. Ortogonalliği koruyan $t : K \rightarrow K$ dönüşümü $t(k) = \frac{k}{2}$ şeklinde tanımlayalım. O halde aşağıdaki durumları inceleyelim.

Durum 1. $k_1 = 0$ için $k_2 \in K$ ise $t(k_1) = 0$ ve $t(k_2) = \frac{k_2}{2}$ olur. O halde $t(k_1) \perp t(k_2)$ elde edilir.

Durum 2. $k_1 \in K$ ve $0 \leq k_2 < 1$ olsun, o halde $t(k_1) = \frac{k_1}{2}$ ve $t(k_2) = \frac{k_2}{2}$ elde edilir, o halde

$t(k_1) \perp t(k_2)$ olur.

$\gamma : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, her $\alpha \geq 0$ için $\gamma(\alpha) = \frac{\alpha}{3}$ olacak şekilde $\alpha^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ özelliğini sağlayan sürekli bir fonksiyon olsun. Ayrıca t ortogonal zayıf bir dönüşümdür. Gerçektende ortogonal bağlantılı herhangi $k_1, k_2 \in K$ elemanları için $k_1 k_2 \leq k_1$ veya $k_1 k_2 \leq k_2$ elde edilir. Genelliği bozmaksızın $k_1 k_2 \leq k_1$ bağıntısını seçelim. O halde iki durumu incelememiz gerekir.

Durum 1.

(a) $k_1 = 0$ ve $k_2 = 0$ için

$$\begin{aligned}\tau(tk_1, tk_2) &\leq \tau(k_1, k_2) - \gamma(\tau(k_1, k_2)) \\ \tau(0, 0) &\leq \tau(0, 0) - \gamma(\tau(0, 0))\end{aligned}$$

(b) $k_1 = 0$ ve $0 < k_2 < 1$ için

$$\begin{aligned}\tau(tk_1, tk_2) &\leq \tau(k_1, k_2) - \gamma(\tau(k_1, k_2)) \\ \tau(0, \frac{k_2}{2}) &\leq \tau(0, k_2) - \gamma(\tau(0, k_2))\end{aligned}$$

Durum 2.

(a) $0 < k_1 < 1$ için $k_2 = 0$

$$\tau(tk_1, tk_2) \leq \tau(k_1, k_2) - \gamma(\tau(k_1, k_2))\tau(\frac{k_1}{2}, 0) \leq \tau(k_1, 0) - \gamma(\tau(k_1, 0))$$

(b) $0 < k_1 < 1$ ve $0 < k_2 < 1$

$$\begin{aligned}\tau(tk_1, tk_2) &\leq \tau(k_1, k_2) - \gamma(\tau(k_1, k_2)) \\ \tau(\frac{k_1}{2}, \frac{k_2}{2}) &\leq \tau(k_1, k_2) - \gamma(\tau(k_1, k_2))\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece 4.1 Teorem ifadesindeki tüm hipotezler sağlanır. O halde t dönüşümünün $0 \in K$ olacak şekilde tek bir sabit noktası vardır.

Şimdi 4.1 Teorem ifadesindeki t dönüşümünün süreklilik şartı yerine başka bir şart ekleyerek aşağıdaki teoremi elde edebiliriz.

3.2 Teorem $(K, \perp, \tau)$ ortogonal tam quasi metrik uzay, $\perp$ bağıntısı geçişmeli bir diklik bağıntısı ve $t : K \rightarrow K$ ortogonallığı koruyan bir ortogonal zayıf büzülme olsun. O halde herhangi bir ortogonal $k \in K$ elemanı için $t^n(k)$ iterasyon dizisinin yakınsadığı bir $k^* \in K$ noktası vardır. Ayrıca eğer $\{k_n\}$ ortogonal dizisi $k \in K$ noktasına yakınsarsa, her $n \in \mathbb{N}$ için k_n ve $k^* \in K$ ortogonal bağlantılı iki eleman olur. Bu durumda k^* , t dönüşümünün tek bir sabit noktası olur.

Kanıt 4.1 Teoreminin ispatında olduğu gibi, $k^* \in K$ için $\{k_n\} = \{tk\}$ ortogonal dizisi yakınsaktır. Şimdi teoremin varsayımı nedeniyle her n sayısı için $k_n = t_n(k)$ elemanı ile $k^* \in K$ elemanı ortogonal bağlantılıdır. O halde t nin zayıf büzülmesini ve τ dönüşümünün üçgen eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned}\tau(tk^*, k^*) &\leq \tau(tk^*, t^{n+1}k) + \tau(t^{n+1}k, k^*) \\ &\leq \tau(k^*, t^n k) - \gamma(\tau(k^*, t^n k)) + \tau(t^{n+1}k, k^*) - \gamma(\tau(t^{n+1}k, k^*))\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $n \rightarrow \infty$ alınırsa $tk^* = k^*$ elde edilir. Bu da k^* noktasının t dönüşümünün sabit noktası olduğu anlamına gelir.

Sabit noktanın tekliği, 4.1 Teoreminin ispatındakine benzer şekilde yapılabilir. $\square$

Şimdi ise tanımlamış olduğumuz ortogonal quasi metrik uzaylarda, ifade ve ispatını vermiş olduğumuz sabit nokta teoremlerinin Volterra integral denklemlerine uygulamasını verelim:

Örnek $r \in C([0, 1], \mathbb{R})$ ($[0, 1]$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı tüm sürekli fonksiyonlar, $T : [0, 1]^2 \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ve $v : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ sürekli dönüşümler olmak üzere

$$T(k_1) = \int_0^{k_1} T(k_1, k_2, r(k_2)) + v(k_1) \quad (4.8)$$

Volterra İntegral denkleminin tek bir sabit noktası olduğunu göstereceğiz.

3.3 Teorem $m \in (0, 1)$, her $r \in C([0, 1], \mathbb{R})$ ve her $k_2 \in [0, 1]$ için

$$|T(k_1, k_2, r(k_2))| \leq m \cdot \sup |r(k_2)| - |v(k_1)|$$

eşitsizliği sağlamıyorsa, o halde Volterra-İntegral denkleminin tek bir sabit noktası vardır.

Kanıt $K = C([0, 1], \mathbb{R})$ kümesi üzerinde, her $s \in [0, 1]$ için

$$r \perp v \Leftrightarrow r(k_1)v(k_2) \geq 0$$

ortogonal ilişkisini ele alalım. O halde dikkat edilirse $(K, \perp)$ ortogonal kümedir çünkü her $r \in K$ için $v(s) = 0$ vardır. Her $k_1 \in [0, 1]$ için $r(k_1)v(k_2) = 0$ kabul edelim. Her $r, v \in K$ için

$$t(r, v) = \begin{cases} \|r\|_\infty, & r \neq v \\ 0, & r = v \end{cases}$$

olsun. O halde $(K, \perp, \tau)$ ortogonal tam quasi metrik uzaydır ve $\perp$ bağıntısı geçişmeli diklik

bağıntısıdır. $t : K \rightarrow K$ dönüşümü her $r \in K$ ve $s \in [0, 1]$ için

$$tr(k_1) = \int_0^{k_1} T(k_1, k_2, r(k_2)) dk_2 + v(k_1)$$

şeklinde tanımlansın. t nin sabit noktasının varlığını göstermek için t nin ortogonallığı koruduğunu göstermeliyiz. Her $k_1, k_2 \geq 0$, $m \in (0, 1)$ ve $\gamma(k_1, k_2) = (1 - m) \cdot (k_1 + k_2)$ için

$$\tau(tr, tv) \leq \tau(r, v) - \gamma(\tau(r, v)) \quad (4.9)$$

eşitsizliğini yazalım. Buradan

$$(tr)(k_1) = \int_0^{k_1} T(k_1, k_2, r(k_2)) dk_2 + v(k_1) \geq 0$$

ve

$$(tv)(k_1) = \int_0^{k_1} T(k_1, k_2, v(k_2)) dk_2 + v(k_1) \geq 0$$

elde edilir. Buda $t(r) \perp t(v)$ anlamına gelir yani t dönüşümü ortogonallığı koruyan dönüşümdür. Eğer $t(r) = t(v)$ ise (4.9) eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Eğer $t(r) \neq t(v)$ ise

$$\begin{aligned} |tr(k_1)| &= \left| \int_0^{k_1} T(k_1, k_2, r(k_2)) dk_2 + v(k_1) \right| \\ &\leq \int_0^{k_1} |T(k_1, k_2, r(k_2))| dk_2 + |v(k_1)| \\ &\leq \int_0^{k_1} m \cdot \sup_{s \in [0, 1]} |r(k_2)| + |v(k_2)| \\ &= m \cdot \tau(r, v) = \tau(r, v) - \gamma(\tau(r, v)). \end{aligned}$$

Yukarıda elde ettiğimiz sonuç gösteriyor ki

$$\|t(r)\|_\infty = \sup_{k_1 \in [0, 1]} |tr(k_1)| \leq \tau(r, v) - \gamma(\tau(r, v))$$

elde edilir. Daha sonra $r, v \in K$ için

$$\tau(tr, tv) \leq \tau(r, v) - \gamma(\tau(r, v))$$

sonucuna ulaşılır. O halde 4.1 Teoreminin tüm hipotezleri karşılanır ; bu nedenle t dönüşümünün bir sabit noktası vardır. Bu ise Volterra-İntegral denkleminin tek bir sabit noktası olduğu anlamına gelir. $\square$

4. SONUÇ

Ortogonal metrik uzay üzerinde tanımlanan dönüşümlerin sabit noktalarının varlığı ve tekliği son yıllarda yaygın olarak çalışılmaktadır. Bu dönüşümlerin sabit noktalarının varlığı ve tekliğinden yararlanılarak bazı integral denklemlerin çözümünün varlığı ve tekliği de uygulamalı bilim dallarında oldukça popüler hale gelmiştir. Yapılan literatür taramasında ortogonal kümelerin metrik uzaylara ve metrik uzayların çeşitli alt uzaylarına uygulandığı görülmüştür.

Bu tez çalışmasında metrik dönüşümünün simetri koşulu kaldırılmış ve bu dönüşümleri çeşitli ortogonal bağıntılarla donatarak ortogonal quasi metrik uzay kavramı tanımlanmıştır. Bu çalışmada öncelikle verilecek ortogonal quasi metrik uzay üzerinde tanımlı ortogonal zayıf büzülme dönüşümü kullanılarak bazı sabit nokta sonuçları elde edilmiştir. Daha sonra her zayıf büzülmenin ortogonal zayıf büzülme olduğu ancak karşınının her zaman doğru olmadığı aksine bir örnek verilerek gösterilmiştir. Daha sonra sürekli bir dönüşümün sabit noktasının varlığı ve tekliği çeşitli koşullar sağlanarak ispatlanmış, bir sonraki adımda süreklilik koşulu kaldırılarak sürekli olmayan bir dönüşümün en az bir noktası için sabit noktasının varlığı ve tekliği gösterilmiştir. Gerekli koşulları sağlayan ortogonal quasi metrik uzay üzerinde bir dönüşüm tanımlanarak ele alınan Volterra-İntegral denkleminde uygulanmıştır.

KAYNAKLAR

- Albert, G. E. (1941). A note on quasi-metric spaces. *Bulletin Of The American Mathematical Society*, 47(6), 479-482.
- Baghani, H., Gordji, M. E., & Ramezani, M. (2016). Orthogonal sets: The axiom of choice and proof of a fixed point theorem. *Journal Of Fixed Point Theory And Applications*, 18(3), 465-477.
- Banach, S. (1922). Sur les op ´erations dans les ensembles abstraits et leur application aux ´equations Int ´egrales. *Fundamenta Mathematicae*, 3(1), 133-181.
- Bilgili Gungor, N., & Turkoglu, D. (2019). Fixed point theorems on orthogonal metric spaces via altering distance functions. *AIP Conference Proceedings*, 2183.
- Ciric, L. B. (1974). A generalization of banach’s contraction principle. *Proceedings Of The American Mathematical Society*, 45(2), 267-273.
- Eshaghi Gordji, M., & Habibi, H. (2017). Fixed point theory in generalized orthogonal metric space. *Journal Of Linear And Topological Algebra*, 6(3), 251-260.
- Jleli, M., & S., B. (2012). Remarks on g-metric spaces and fixed point theorems. *Fixed Point Theory And Applications*, 2012(1), 1-7.
- Kannan, R. (1969). Some results on fixed points—ii. *The American Mathematical Monthly*, 76(4), 405-408.
- Kelly, J. (1963). Bitopological spaces. *Proceedings Of The London Mathematical Society*, 3(1), 71-89.
- Khan, M. S., Swaleh, M., & Sessa, S. (1984). Fixed point theorems by altering distances between the points. *Bulletin Of The Australian Mathematical Society*, 30(1), 1-9.
- Niemytzki, V. (1931). Uber die axiome des metrischen raumes. *Mathematische Annalen*, 104(1), 666-671.
- Patty, C. W. (1967). Bitopological spaces. *Duke Mathematical Journal*, 34(3), 387-391.
- Ramezani, M. (2015). Orthogonal metric space and convex contractions. *International Journal Of Nonlinear Analysis And Applications*, 6(2), 127-132.
- Ramezani, M., & Hamid., B. (2017). Contractive gauge functions in strongly orthogonal metric spaces. *International Journal Of Nonlinear Analysis And Applications*, 8(2), 13-28.
- Razavi, S. S., & Masiha., H. P. (2018). Some fixed point results on new generalization of metric spaces by orthogonal property with applications for some ordinary differential equations.”. *Journal Of Mathematical Analysis*, 9(1), 29-37.
- Ribeiro, H. (1943). Sur les espaces ‘a m ´etrique faible. *Portugaliae Mathematica*, 4(1), 21-40.
- Stoltenberg, R. A. (1969). On quasi-metric spaces. *Duke Mathematical Journal*, 36(1),

65-71.

Wilson, W. A. (1931). On quasi-metric spaces. *American Journal Of Mathematics*, 53(3), 675-684.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı-Soyadı : İlker KARA

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

