



**T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

ÖRTÜ TABANLI KABA KÜME TEORİSİ

Elif ACAR

BURDUR, 2020

**T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

ÖRTÜ TABANLI KABA KÜME TEORİSİ

Elif ACAR

**Doç. Dr. Sadık BAYHAN
Doç. Dr. Ayşegül ALTAY UĞUR**

BURDUR, 2020

YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY FORMU

Elif ACAR tarafından **Doç. Dr. Sadık BAYHAN** ve **Doç. Dr. Ayşegül ALTAY UĞUR** yönetiminde hazırlanan “**Örtü Tabanlı Kaba Küme Teorisi**” başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Savunma Tarihi: 28/09 /2020

Unvan, Ad ve SOYAD giriniz (Başkan)
Kurumu giriniz.....(İmza)

Unvan, Ad ve SOYAD giriniz (Jüri Üyesi)
Kurumu giriniz.....(İmza)

Unvan, Ad ve SOYAD giriniz (Jüri Üyesi)
Kurumu giriniz.....(İmza)

Unvan, Ad ve SOYAD giriniz (Jüri Üyesi)
Kurumu giriniz.....(İmza)

Unvan, Ad ve SOYAD giriniz (Jüri Üyesi)
Kurumu giriniz.....(İmza)

ONAY

Bu Tez, Enstitü Yönetim Kurulu’nun _____ Tarih ve _____ Sayılı Kararı ile Kabul Edilmiştir.

(İmza)

.....
Unvan, Ad ve SOYAD giriniz

Müdür
Fen Bilimleri Enstitüsü

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum **“Örtü Tabanlı Kaba Küme Teorisi”** başlıklı bu tezin;

- Kendi çalışmam olduğunu,
- Sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi,
- Bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi,
- Kullandığım verilerde değişiklik yapmadığımı,
- Tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı,
- Bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı,

bildirir, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

28 / 09 / 2020

(İmza)

Elif ACAR

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana her açıdan yol gösteren, karşılaştığım her zorlukta destek olan ve çalışmamı titizlikle takip eden çok değerli danışman hocalarım Doç. Dr. Sadık BAYHAN ve Doç. Dr. Ayşegül ALTAY UĞUR'a sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans eğitimim boyunca yardım ve desteğini benden hiç esirgemeyen, bilgi birikimi ve tecrübeleriyle bana yol gösteren Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü Öğretim Üyesi Doç. Dr. Ülkü BAYHAN'a teşekkür ederim.

Eğitim hayatım boyunca maddi manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme de sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Eylül, 2020

Elif ACAR

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ŞEKİL DİZİNİ	iii
ÇİZELGE DİZİNİ	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	v
ÖZET	viii
SUMMARY	ix
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR VE ÖNERMELER	5
3. BAĞINTI TABANLI KABA KÜMELER	9
3.1. Bilgi Sistemleri, Karar Sistemleri ve Ayırtedilemezlik Bağıntısı	9
3.2. Kaba Küme Teorisi	12
3.3. Belirsizliğin Sınıflandırılması ve Yaklaşımın Doğruluğu	17
3.4. Özelliklerin İndirgenmesi	20
4. ÖRTÜ TABANLI KABA KÜMELER	23
5. ÖRTÜ TABANLI KABA KÜMELERİN BEŞ TÜRÜ VE BAĞINTI TABANLI KABA KÜMELER ARASINDAKİ İLİŞKİLER	32
5.1. Örtü Tabanlı Kaba Kümelerin Beş Türü	32
5.2. Örtü Tabanlı Kaba Kümelerin Birinci Türü ve Bağıntı Tabanlı Kaba Kümeler Arasındaki İlişkiler	36
5.3. Örtü Tabanlı Kaba Kümelerin İkinci Türü ve Bağıntı Tabanlı Kaba Kümeler Arasındaki İlişkiler	40
5.4. Örtü Tabanlı Kaba Kümelerin Üçüncü Türü ve Bağıntı Tabanlı Kaba Kümeler Arasındaki İlişkiler	44
5.5. Örtü Tabanlı Kaba Kümelerin Dördüncü Türü İçin Bağıntı Tabanlı Kaba Kümelerin Temsilcisi	48
5.6. Örtü Tabanlı Kaba Kümelerin Beşinci Türü ve Bağıntı Tabanlı Kaba Kümeler Arasındaki İlişkiler	49
5.7. Aynı Örtü Tabanlı Yaklaşım Operatörlerini Üreten İki Farklı Örtü İçin Koşullar	55
5.8. Örtü Tabanlı Kaba Kümeler Arasındaki İlişkiler	57
6. ÖRTÜ TABANLI KABA KÜMELER İLE İLGİLİ UYGULAMALAR	66
6.1. Yaklaşım Operatörlerinin Aksiyomatik Karakterizasyonları ile İlgili Problemler	66
6.2. Örtü Bilgi Sistemleri ve Bağıntı Bilgi Sistemlerinin Birleştirici Özellik İndirgemeleri	67
7. SONUÇ	73
KAYNAKLAR	74
ÖZGEÇMİŞ	77

ŞEKİL DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 3.1. Küme yaklaşımları	14
Şekil 4.1. Örtü yaklaşım uzayı	30



ÇİZELGE DİZİNİ

	Sayfa
Tablo 3.1. Bilgi sistemi.....	10
Tablo 3.2. Karar sistemi.....	11
Tablo 3.3. Karar sistemi.....	15
Tablo 3.4. Bölüm kümeleri ve ayrışmalar	15
Tablo 3.5. $X = \{h_1, h_2, h_3\}$ kümesi için alt yaklaşım, üst yaklaşım, sınır bölgesi ve negatif bölge	16
Tablo 3.6. $X = \{h_1, h_2, h_3\}$ kümesi için alt yaklaşım, üst yaklaşım, sınır bölgesi ve tamlık değeri	19
Tablo 3.7. Karar sistemi.....	21
Tablo 3.8. Bölüm kümeleri ve ayrışmalar	22
Tablo 4.1. Bir küme ve tümleyeni için değerler	26
Tablo 4.2. İki küme ve kesişimleri için değerler	27
Tablo 4.3. İki küme ve birleşimleri için değerler	27
Tablo 4.4. Bir küme ve bu kümeyi kapsayan bir küme için değerler	28
Tablo 5.1. Örtüden elde edilen bağıntıların sağladığı özellikler.....	54
Tablo 5.2. Evrensel kümedeki elemanların değerleri	65
Tablo 6.1. Fiyat değerlendirme sonuçları	69
Tablo 6.2. Renk değerlendirme sonuçları	70
Tablo 6.3. Yapı değerlendirme sonuçları.....	70
Tablo 6.4. Çevre değerlendirme sonuçları.....	71
Tablo 6.5. $S = (U, E)$ bilgi sistemi.....	71

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathcal{A}$	: Küme ailesi
$\underline{apr}$	: Pawlak alt yaklaşım operatörü
$\underline{apr}(X)$	: X kümesinin Pawlak alt yaklaşımı
$\overline{apr}$	: Pawlak üst yaklaşım operatörü
$\overline{apr}(X)$	: X kümesinin Pawlak üst yaklaşımı
$Bn(X)$	: X kümesinin sınırına yaklaşan kümelerin ailesi
$BND(X)$	: X kümesinin sınır bölgesi
$CORE(B)$	: B kümesinin çekirdeği
$\mathcal{C}(R)$	: R bağıntısından elde edilen örtü
$\mathcal{C}_*(X)$	: X kümesinin $\mathcal{C}$ örtüsüne göre alt yaklaşım kümelerinin ailesi
$\underline{\mathcal{C}}(X)$	: X kümesinin $\mathcal{C}$ örtüsüne göre alt yaklaşımı
$\mathcal{C}^*(X)$	: X kümesinin $\mathcal{C}$ örtüsüne göre üst yaklaşım kümelerinin ailesi
$\overline{\mathcal{C}}(X)$	: X kümesinin $\mathcal{C}$ örtüsüne göre üst yaklaşımı
f_a	: Bilgi fonksiyonu
$FH_{\mathcal{C}}$	: Birinci örtü tabanlı üst yaklaşım operatörü
$FL_{\mathcal{C}}$	: Birinci örtü tabanlı alt yaklaşım operatörü
$IND(B)$	: B -ayırteçilemezlik bağıntısı
$(i) \Rightarrow (ii)$	: (i) varsa (ii) vardır
$(i) \Leftarrow (ii)$	: (ii) varsa (i) vardır
$(i) \Leftrightarrow (ii)$	: (i) ve (ii) birbirine denktir
$i : \Leftrightarrow ii$	: Eşitliğin sol tarafındaki ifade (i), eşitliğin sağ tarafındaki ifade (ii) ile tanımlanmıştır
$LH_{\mathcal{C}}$	: Beşinci örtü tabanlı üst yaklaşım operatörü
$LL_{\mathcal{C}}$	: Beşinci örtü tabanlı alt yaklaşım operatörü
$Md(x)$	: x elemanının minimal tanımlayıcısı
$md(x)$	: x elemanının yakın dostları
$NEG(X)$	: X kümesinin negatif bölgesi
$POS(X)$	: X kümesinin pozitif bölgesi
$\mathcal{P}(U)$	: U kümesinin kuvvet kümesi
$R(\mathcal{C})$	: $\mathcal{C}$ örtüsünden elde edilen bağıntı

$RED(B)$	: B kümesinin tüm indirgenmiş kümelerinin ailesi
$reduct(\mathcal{C})$	: $\mathcal{C}$ örtüsünün indirgemesi
$RH_{\mathcal{C}}$	: Dördüncü örtü tabanlı üst yaklaşım operatörü
$RL_{\mathcal{C}}$	: Dördüncü örtü tabanlı alt yaklaşım operatörü
$R_p(x)$	: x elemanının R bağıntısına göre öncül komşuluklarının kümesi
$R_s(U, \mathcal{C})$	: $\mathcal{C}$ örtüsü tarafından üretilen tüm kaba kümelerin ailesi
$R_s(x)$	: x elemanının R bağıntısına göre ardıl komşuluklarının kümesi
$SH_{\mathcal{C}}$	: İkinci örtü tabanlı üst yaklaşım operatörü
$SL_{\mathcal{C}}$	: İkinci örtü tabanlı alt yaklaşım operatörü
$st(x, \mathcal{C})$	: x elemanının $\mathcal{C}$ örtüsüne göre ayırtedilemez komşuluğu
$S = (U, V)$	: Bilgi sistemi
$S = (U, V \cup \{d\})$	: Karar sistemi
$TH_{\mathcal{C}}$	: Üçüncü örtü tabanlı üst yaklaşım operatörü
$TL_{\mathcal{C}}$	: Üçüncü örtü tabanlı alt yaklaşım operatörü
$(U, \mathcal{C})$	: Örtü yaklaşım uzayı
(U, R)	: Pawlak yaklaşım uzayı
U/R	: Bölüm kümesi
$U \setminus X$	: X kümesinin U evrensel kümesine göre tümleyeni
(U, Δ)	: Örtü bilgi sistemi
$[x]$	: x elemanının denklik sınıfı
$ X $	: X kümesinin eleman sayısı
X_*	: X kümesinin örtüye göre sınırı
$X_{\mathcal{C}}$	: X kümesi tarafından $\mathcal{C}$ örtüsüne göre belirlenen kaba küme
$(x)_{\mathcal{C}}$	: x elemanının $\mathcal{C}$ örtüsüne göre komşuluğu
$X \times Y$	: X ve Y kümelerinin Kartezyen çarpımı
$X \cup Y$	: X ve Y kümelerinin birleşimi
$X \cap Y$	: X ve Y kümelerinin kesişimi
$X \subseteq Y$	: X kümesi, Y kümesinin alt kümesidir
$X \not\subseteq Y$	: X kümesi, Y kümesinin alt kümesi değildir
$X \supseteq Y$	: X kümesi, Y kümesini kapsar
$X \setminus Y$	: X kümesinin Y kümesinden farkı
$\cup \mathcal{A}$	: Küme ailesinin birleşimi
$\alpha(X)$	: X kümesinin tamlık değeri

$\in$	: Elemanıdır
$\notin$	: Elemanı değildir
$=$	: Eşittir
$\neq$	: Eşit değildir
$\leq$	: Küçüktür veya eşittir
$\emptyset$	: Boş küme
$\wedge$	: Ve
$\exists$	: Vardır
$\forall$	: Her
:	: Öyle ki
$\triangle$	: Örtü ailesi
$\square$	: Kanıtların sonu bu sembol ile belirtilecektir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Örtü Tabanlı Kaba Küme Teorisi

Elif ACAR

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Sadık BAYHAN

II. Danışman: Doç. Dr. Ayşegül ALTAY UĞUR

Eylül, 2020

Kaba küme teorisinin başlangıcı nesneler ve nesnelere ait özellikleri ilişkilendiren bilgi sistemleri olarak bilinir. Aynı özelliklere sahip olan nesneler birbirlerinden ayırt edilemez. Ayırt edilemez nesne ikilileri nesneler kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı tanımlar. Her nesnenin özelliklere bağlı denklik sınıflarının kümesi nesneler kümesinin bir ayrışımını oluşturur. Elde edilen ayrışım evrensel kümenin özel bir örtüsüdür ve bu durum bilimsel araştırmalarda kısıtlayıcı olabilmektedir. Bilimsel çalışmaları daha geniş bir alana yayabilmek için ayrışımın bir genelleştirilmesi olan örtü kavramı verilmiştir. Böylece örtü tabanlı kaba küme teorisinin temelleri atılmıştır. Örtü tabanlı kaba küme teorisi; bilinen klasik kaba küme teorisinin sınırlarını aşmaktadır. Bu tez çalışmasının amacı bağıntı tabanlı kaba kümeler ve örtü tabanlı kaba kümeler arasındaki ilişkileri incelemektir.

Anahtar Kelimeler: Kaba küme, alt ve üst yaklaşım, örtü

SUMMARY

M. Sc. Thesis

Covering Based Rough Set Theory

Elif ACAR

**Burdur Mehmet Akif Ersoy University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

**Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Sadık BAYHAN
Co-Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ayşegül ALTAY UĞUR**

September, 2020

The beginning of the rough set theory is known as information systems that relate objects and their properties. Objects that have the same properties are indiscernible from each other. The indiscernible object pairs define an equivalence relation on the set of objects. The set of equivalence classes depending on the properties of each object creates a partition of the set of objects. The partition obtained is a special cover of the universal set and this situation may be restrictive in scientific research. The concept of covering, which is a generalization of partition, is given in order to spread scientific studies to a wider area. Thus, the foundations of the covering based rough set theory are laid. Covering based rough set theory; transcends the limits of the conventional classical set theory. The purpose of this thesis is; to examine the element based, particle based and subsystem based definitions and properties of the approach operators with the concept of covering and to reveal the relationships between them.

Keywords: Rough set, lower and upper approximation, covering

1. GİRİŞ

Küme matematiğin en temel kavramlarından biridir. Klasik küme teorisindeki temel düşünce üyelik yani eleman olmasıdır. Bir kümede yer alan nesneler o kümenin elemanı, yer almayan nesneler ise o kümenin elemanı değildir olarak adlandırılır ve bu durumu ifade etmek için üyelik fonksiyonu kullanılır. Üyelik fonksiyonu evrensel kümeden, $\{0,1\}$ kümesine tanımlı bir fonksiyondur. Bir küme verildiğinde bir nesne o kümenin ya elemanıdır ya da değildir. Bir nesne için kümenin elemanı olma ya da olmama durumu dışında üçüncü durum söz konusu değildir. Bu iki değerli mantığın olağan bir sonucudur. Günlük yaşantımızda karşılaşılan bazı durumların; iki değerli klasik mantık kapsamı içinde ifade edilmesinde güçlük yaşanması doğaldır. Örneğin; yakın kavramı kişiden kişiye değişir, kesinlik içermez ve muğlaktır. Bu ve buna benzer durumları ifade etmenin yolu; Zadeh tarafından temelleri atılan belirtsiz küme yaklaşımıyla açılmıştır. Zadeh'in belirtsiz küme kavramıyla, bir nesnenin bir kümeye ait ya da üye olması derecelendirilerek; klasik mantığın sınırları iki değerli olmaktan çıkıp $[0,1]$ kapalı aralığına taşınmıştır. Bir başka ifadeyle, üyelik fonksiyonu evrensel kümeden $[0,1]$ kapalı aralığında değerler alabilen biçime dönüştürülerek belirsizlik derecelendirme yoluyla giderilmiştir. Böylece bir nesnenin diğer bir nesneye yakın olma derecesinin 0.7 olmasından söz edilebilir.

Eksik bilgi problemi yani belirsizlik, filozoflar, mantıkçılar ve matematikçiler tarafından uzun bir süredir ele alınmaktadır. Belirsizliğin nasıl anlaşılacağı ve manipüle edileceği sorununa yönelik birçok yaklaşım vardır. Bu yaklaşımlardan biri belirtsiz küme olarak bilimsel dizinde yer almıştır.

Belirsizliğin matematiksel temellere dayalı bir diğer yaklaşımı, kaba küme teorisi içinde gelişimini sürdürmektedir. Kaba küme teorisinin temelleri 1980'li yılların başlarında Polonyalı Bilim insanı Pawlak tarafından atılmıştır. Pawlak'ı bu teoriyi oluşturmaya götüren en önemli neden; tutarsız, yetersiz ve eksik veriden bilginin nasıl elde edileceği düşüncesidir. İlk olarak bilgi sistemi olarak adlandırılan tablolarla çalışan Pawlak, nesneler ve nesnelerin sahip olduğu özellikleri bir tabloya yerleştirir. Bu yöntemle bilgi sistemini oluşturan nesneler ve özelliklerin eşleştirilerek somut olarak gösterilmesi sağlanmış olur. Bir bilgi sisteminde aynı özelliklere sahip olan nesneler birbirlerinden ayırt edilemez. Bu tür nesne ikilileri nesneler kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı oluşturur. Ayırt edilemezlik olarak adlandırılan bu özel bağıntı evrensel kümenin bir ayrışımını oluşturur. Bu ayrışım denklik

sınıflarının özel bir ailesidir ve aynı zamanda evrensel kümenin de bir örtüsüdür. Aynı denklik sınıfında yer alan nesneler aynı özellikleri taşıdıklarından birbirlerinden ayırt edilmesi olanaklı değildir. Pawlak kaba küme yaklaşımı, evrensel kümenin kesin olmayan bilgiyle donatılmış bir altkümesini daha kesin bilgiyle donatılan iki küme ile tanımlama esasına dayanır. Örneğin; hastalardan oluşan bir evrensel kümenin, yüksek ateşi bulunan hastalardan oluşan bir alt kümesini ele alalım. Bu kümenin alt yaklaşımı kesinlikle yüksek ateşi bulunan hastalardan oluşurken, üst yaklaşımı yüksek ateşi olması muhtemel hastalardan meydana gelir. Yüksek ateş bilgisine dayanarak, sadece üst yaklaşım ile alt yaklaşım farkı içinde yer alan hastalar üzerinde fazladan bir muayene daha yapılması gerekir. Bir bilgi sisteminde görünmeyen ya da gizli kalmış bilgiler yer alabilir. Bu nitelikteki bilgilerin ortaya çıkarılması kaba küme teorisinin kapsamı içinde yer almaktadır. Bunlara ek olarak, gereksiz ya da tekrarlanan bilgilerin çıkarılarak indirgeme yapılması da kaba kümeler yardımıyla yapılır. Makine öğrenmesi, veri madenciliği, yapay zeka, uzman sistemler, biyoinformatik, tıp ve sosyal bilimlerin teorinin uygulama alanları olarak sayılabilir. Kaba küme teorisine yaklaşım; aksiyomatik, yapısal ya da kavramsal ve anlamsal yaklaşım olmak üzere üç başlık altında incelenir. Bu yaklaşımlar arasındaki temel farkı, yaklaşım operatörlerinin üstlendiği işlev belirlemektedir. Aksiyomatik yaklaşımın temel elemanlarını yaklaşım operatörleri ve cebirsel yapıları oluşturur. Verilen bir kümeye yaklaşımın hangi operatörlerle uygun olacağı üzerinde durulur. Yapısal ya da kavramsal başlığı altında yer alan yaklaşımda yaklaşım operatörleri; bağıntılar, evrensel kümenin ayrışımı, evrensel kümenin örtüsü, örgüler, Boole cebirleri ve komşuluklar gibi temel yapılar kullanılır. Anlamsal yaklaşımın özünü ise, kaba küme teorisinde yer alan kavramların anlamını özümleme oluşturmaktadır. Bu yönüyle düşünüldüğünde, bir tablo ya da çizelge ile verilen bilgi-karar sistemi kullanılarak tanımlanabilir kümelerin belirlenmesi sağlanmış olur. Tanımlanabilir kümelerle ilgili olarak, bu yöndeki gelişmelerle yaklaşım operatörleri elde edilir. Yukarıda kısaca verilen üç yaklaşım içinde, yapısal yaklaşımın hem uygulama hem de kaba küme teorisi için oldukça uygun olduğu bilinmektedir. Bu tez çalışmasında ağırlıklı olarak yapısal yaklaşıma yer verilecektir.

Yapısal olarak kaba küme teorisi incelendiğinde, teorisinin iki önemli doğrultuda genişlemesini sürdürdüğü görülmektedir. Bunlar bağıntı tabanlı kaba kümeler ve örtü tabanlı kaba kümeler olarak bilinir. Literatürde örtü tabanlı kaba küme teorisinde kaba kümelerin farklı türleri tanımlanarak özellikleri incelenmiştir. Zakowski (Zakowski, 1983) ilk defa Pawlak kaba küme modelini özel bir örtü olan ayrışımından örtüye genelleştirmiştir. Alt ve üst yaklaşım operatörleri, Pawlak tarafından verilen tanımların doğal bir genellemesi olarak

verilmiştir. Pawlak alt ve üst yaklaşım operatörleri bir dual çift oluşturmalarına karşın, genelleştirilmiş alt ve üst yaklaşım operatörleri bilinen küme tümlleme işlemine göre bir dual çift oluşturmazlar. Aynı zamanda genelleştirilmiş alt ve üst yaklaşım operatörleri, Pawlak alt ve üst yaklaşım operatörlerinin sağladığı çarpımsallık, toplamsallık ve monotonluk özelliklerini de sağlamamaktadır.

Örtü tabanlı yaklaşım uzayında bir nesnenin komşuluğunun Pawlak yaklaşım uzayındaki karşılığı o nesnenin denklik sınıfıdır. O halde denklik sınıfının genelleştirilmesi ardıl ya da öncül komşuluklar biçimine dönüşür. Pawlak yaklaşım uzayında ardıl ve öncül komşuluklar aynı anlama gelmektedir. Bazı komşuluk operatörleri örtü tabanlı olarak tanımlanmıştır (Yao ve Yao, 2012). Örtü tabanlı yaklaşım uzayında dual olmayan alt ve üst yaklaşım operatörlerinin farklı türleri Yang ve Li (Yang ve Li, 2010) tarafından ayrıntılı olarak incelenmiştir. Zhao (Zhao, 2016), örtü tabanlı yaklaşım operatörlerini topoloji yönüyle ele almış; örtüden indirgenen topolojiyi tanımlayarak yedi çift dual operatörü incelemiştir. Samanta ve Chakraborty (Samanta ve Chakraborty, 2009; Samanta ve Chakraborty, 2011) örtü tabanlı yaklaşım uzayında yaklaşım operatörleri ile aralarındaki ilişkiler üzerine çalışan araştırmacılar arasında yer almaktadır. Diker ve Uğur (Diker ve Uğur, 2012) doku uzayları ile örtü tabanlı kaba kümeler arasındaki ilişkileri ortaya koymuşlardır.

Örtü tabanlı kaba küme teorisinin incelendiği bu tez çalışması yedi bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünden sonra, ikinci bölümde tez çalışması boyunca gereksinim duyulan kavram ve önermelere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, bağıntı tabanlı kaba kümeleri ayrıntılı olarak sunabilmek için bilgi sistemleri, karar sistemleri ve özel bir denklik bağıntısı olan ayırt edilemezlik bağıntısı tanımlanmıştır. Pawlak yaklaşım uzayı, alt ve üst yaklaşım operatörleri, bu yaklaşımların evrensel kümeyi ayırdığı bölgelerin tanımları verilmiştir. Kaba küme kavramı üzerinde durularak, yaklaşım operatörlerinin sağladığı temel özellikler ve aralarındaki ilişkiler sunulmuştur. Bunlara ek olarak; belirsizliğin sınıflandırılması, bir kümenin tamlık değeri, indirgeme ve çekirdek kavramlarına yer verilerek aralarındaki ilişkiler yine bu bölümde incelenmiştir. Dördüncü bölümde bağıntı tabanlı kaba kümelerin örtü tabanlı kaba kümelere genelleştirilmesi üzerinde durulmuştur. Örtü, örtü yaklaşım uzayı, bir elemanın minimal tanımlayıcısı, örtü tabanlı alt ve üst yaklaşım operatörleri, bir kümenin sınırı gibi kavramlara yer verilmiştir. Örtü tabanlı alt ve üst yaklaşım operatörlerinin sağladığı özellikler sunulduktan sonra, bağıntı tabanlı alt ve üst yaklaşım operatörleri tarafından sağlanan ancak örtü tabanlı alt ve üst yaklaşım operatörlerinin sağlamadığı özellikler ve bu özelliklerin sağlanması için gerek ve yeter

koşullar ayrıntılı olarak verilmiştir. Çalışmanın beşinci bölümünde, örtü tabanlı kaba kümelerin beş türü ile bağıntı tabanlı kaba kümeler arasındaki ilişkiler incelenmiş ve bu beş türün sağladığı özellikler gösterilmiştir. Bu bağlamda, öncelikle bir elemanın ayırt edilemez komşuluğu ve komşuluğu kavramları verildikten sonra örtü tabanlı alt ve üst yaklaşım operatörlerinin beş çifti sunulmuştur. Bu operatör çiftlerinin dual çift oluşturdıkları kanıtlanmıştır. Her bir türe karşılık örtüden elde edilen bağıntılar ve sağladığı özellikler incelendikten sonra bu bilgiler bir tablo ile verilmiştir. İki farklı örtünün aynı örtü tabanlı yaklaşım operatörlerini üretmesi için gerekli koşullar incelenmiştir. Bağıntı tabanlı kaba kümeler kapsamında örtü tabanlı kaba kümelerin birbirleri ile olan ilişkileri üzerinde durularak beşinci bölüm tamamlanmıştır. Altıncı bölümün içeriğinde ise, yaklaşım operatörlerinin aksiyomatik karakterizasyonları ile ilgili problemlere yer verilmiştir. Örtü bilgi sistemleri ve bağıntı bilgi sistemlerinin birleştirici özellik indirgemeleri incelenmiştir. Son bölümde ise çalışma değerlendirilerek sonuçlara yer verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE ÖNERMELER

Bu bölümde çalışma boyunca gerekli olan kavram ve önermelere yer verilmiştir.

Tanım 2.1 I herhangi bir küme olsun. I kümesinin her bir $i \in I$ elemanı için bir X_i kümesi varsa, bütün bu X_i kümelerinin topluluğu olan $\{X_i : i \in I\}$ kümesine bir küme ailesi denir ve kısaca $\mathcal{A} = \{X_i\}_{i \in I}$ şeklinde gösterilir (Özer vd., 1994).

Tanım 2.2 Bir U kümesinin tüm altkümelerinin oluşturduğu küme ailesine, U kümesinin kuvvet kümesi denir ve $\mathcal{P}(U)$ simgesi ile gösterilir (Özer vd., 1994).

Tanım 2.3 Aşağıdaki özelliklere sahip bir $\mathcal{A} = \{X_i \subseteq U : i \in I\}$ ailesine U kümesinin bir ayrışımı denir (Özer vd., 1994).

- i. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(U)$,
- ii. $\emptyset \notin \mathcal{A}$,
- iii. $(i, j \in I) \wedge (i \neq j) \Rightarrow X_i \cap X_j = \emptyset$,
- iv. $U = \bigcup \mathcal{A}$ (ya da $U = \bigcup_{i \in I} X_i$).

Örnek 2.1 $U = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi ve U kümesinin $X_1 = \{a, b\}$, $X_2 = \{c\}$, $X_3 = \{d, e\}$ altkümeleri verilsin. $\{X_1, X_2, X_3\}$ küme ailesi U kümesinin bir ayrışımıdır.

Tanım 2.4 Boş olmayan herhangi U ve V kümeleri verilsin. $x \in U$ ve $y \in V$ olmak üzere bütün (x, y) sıralı ikililerinin kümesine U ve V kümelerinin kartezyen çarpımı ya da dik çarpımı adı verilir. U ve V kümelerinin kartezyen çarpımı $U \times V$ simgesi ile gösterilir ve

$$U \times V = \{(x, y) : x \in U \text{ ve } y \in V\}$$

dir (Özer vd., 1994).

Tanım 2.5 U ve V boş olmayan iki küme olsun. $U \times V$ kümesinin her R alt kümesine U kümesinden V kümesine bir ikili bağıntı denir. Özel olarak $U = V$ olarak alınırsa R ye U kümesi üzerinde bir bağıntı denir ve kısaca $R \subseteq U \times U$ şeklinde gösterilir. x elemanının R bağıntısı yoluyla y elemanı ile ilişkili olması xRy gösterimi ile ifade edilir (Özer vd., 1994).

Tanım 2.6 Bir $R \subseteq U \times U$ bağıntısı verilsin (Yao, 1998).

- i. Bir $x \in U$ elemanının ardıl komşulukları $\{y \in U : xRy\}$ kümesi olarak tanımlanır ve $R_s(x)$ ile gösterilir.
- ii. Bir $x \in U$ elemanının öncül komşulukları $\{y \in U : yRx\}$ kümesi olarak tanımlanır ve $R_p(x)$ ile gösterilir.

Örnek 2.2 $U = \{a, b, c, d\}$ kümesi ve bu küme üzerinde bir $R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (d, b), (d, c)\}$ bağıntısı verilsin. Her $x \in U$ elemanının ardıl komşulukları $R_s(a) = \{a, b\}$, $R_s(b) = \{c\}$, $R_s(c) = \emptyset$ ve $R_s(d) = \{b, c\}$ dir. Her $x \in U$ elemanının öncül komşulukları $R_p(a) = \{a\}$, $R_p(b) = \{a, d\}$, $R_p(c) = \{b, d\}$, $R_p(d) = \emptyset$ olarak elde edilir.

Tanım 2.7 U kümesi üzerinde bir R bağıntısı verilsin. R bağıntısı sahip olduğu özelliklere göre aşağıdaki gibi adlandırılır (Yao, 1998).

- i. Her $x \in U$ için xRx ise R bağıntısı yansımalıdır.
- ii. Her $x, y \in U$ için $xRy \Rightarrow yRx$ ise R bağıntısı simetriktir.
- iii. Her $x, y, z \in U$ için $(xRy \text{ ve } yRz) \Rightarrow xRz$ ise R bağıntısı geçişlidir.
- iv. Her $x \in U$ için xRy olacak biçimde bir $y \in U$ varsa R bağıntısı serialdir.
- v. Her $x \in U$ için yRx olacak biçimde bir $y \in U$ varsa R bağıntısı ters serialdir.

Yukarıda tanımları verilen bağıntı türleri için aşağıdaki denklikler verilebilir:

- i. R yansımalıdır : $\Leftrightarrow \forall x \in U$ için $x \in R_s(x)$ dir.
- ii. R simetriktir : $\Leftrightarrow \forall x, y \in U$ için $y \in R_s(x) \Rightarrow x \in R_s(y)$ dir.
- iii. R geçişlidir : $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in U$ için $[y \in R_s(x) \wedge z \in R_s(y)] \Rightarrow z \in R_s(x)$ dir.
- iv. R serialdir : $\Leftrightarrow \forall x \in U$ için $R_s(x) \neq \emptyset$ dir.
- v. R ters serialdir : $\Leftrightarrow \forall x \in U$ için $R_p(x) \neq \emptyset$ dir.

Örnek 2.3 $U = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde tanımlı bazı bağıntılar aşağıdaki gibidir.

- i. $R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$ bağıntısı yansımalıdır.
- ii. $R_2 = \{(a, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b)\}$ bağıntısı simetriktir.
- iii. $R_3 = \{(a, b), (b, c), (a, c)\}$ bağıntısı geçişlidir.
- iv. $R_4 = \{(a, b), (b, a), (c, a)\}$ bağıntısı serialdir.
- v. $R_5 = \{(a, a), (a, b), (b, c)\}$ bağıntısı ters serialdir.

Tanım 2.8 U kümesi üzerinde verilen bir R bağıntısının yansımaya, simetri ve geçişme özellikleri varsa, denklik bağıntısı olarak adlandırılır (Özer vd., 1994).

Örnek 2.4 $U = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde verilen $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, c), (c, a)\}$ bağıntısı yansımaya, simetrik ve geçişli olduğundan bir denklik bağıntısıdır.

Tanım 2.9 U kümesi üzerinde bir R denklik bağıntısı ve bir $x \in U$ elemanı verilsin. R bağıntısına göre x elemanı ile ilişkili olan tüm elemanların oluşturduğu kümeye x in denklik sınıfı denir ve

$$[x] = \{y \in U : xRy\}$$

olarak ifade edilir.

U kümesi üzerinde R denklik bağıntısının denklik sınıflarından oluşan $\{[x] : x \in U\}$ kümeler ailesine bölüm kümesi denir ve U/R ile gösterilir (Özer vd., 1994).

Örnek 2.5 $U = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde bir $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}$ bağıntısı verilsin. R bağıntısı yansımaya, simetrik ve geçişli olduğundan bir denklik bağıntısıdır.

Önerme 2.1 R, U kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. R nin bölüm kümesi $U/R, U$ kümesinin bir ayrışımıdır (Özer vd., 1994).

Önerme 2.2 Bir denklik bağıntısının farklı denklik sınıfları ikişer ikişer ayrıktır (Özer vd., 1994).

Önerme 2.3 $\mathcal{A} = \{X_i\}_{i \in I}$ küme ailesi U nun bir ayrışımı olsun. X_i kümelerinden her biri birer denklik sınıfı olacak biçimde U üzerinde bir denklik bağıntısı vardır (Özer vd., 1994).

Örnek 2.6 $U = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi verilsin. $X_1 = \{a, b\}$, $X_2 = \{c\}$, $X_3 = \{d, e\}$ olmak üzere $\{X_1, X_2, X_3\}$ küme ailesi U kümesinin bir ayrışımıdır. O halde ayrışımı oluşturan her küme birer denklik sınıfı olacak biçimde U kümesi üzerinde R denklik bağıntısı $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, b), (b, a), (d, e), (e, d)\}$ olarak elde edilir. Ayrıca $[a] = [b] = X_1$, $[c] = X_2$, $[d] = [e] = X_3$ olduğu kolayca görülür.

Tanım 2.10 U bir küme ve $\mathcal{P}(U)$ kuvvet kümesi üzerinde $L : \mathcal{P}(U) \rightarrow \mathcal{P}(U)$ ve $H : \mathcal{P}(U) \rightarrow \mathcal{P}(U)$ operatörleri verilsin. L ve H operatörleri, her $X \subseteq U$ altkümesi için

i. $L(X) = U \setminus (H(U \setminus X))$

ii. $H(X) = U \setminus (L(U \setminus X))$

eşitliklerini sağlıyorsa dual operatör olarak adlandırılır. L ve H operatörleri dual ise, (L, H) ikilisine bir dual çift adı verilir (Yao, 1996).



3. BAĞINTI TABANLI KABA KÜMELER

Eksik bilgi problemi, filozoflar, mantıkçılar ve matematikçiler tarafından uzun bir süredir ele alınmaktadır. Günümüzde bilgisayar mühendisliğinde özellikle yapay zeka alanında çok önemli bir konu haline gelmiştir. Kaba küme teorisi Polonyalı bilgisayar bilimcisi Zdzislaw Pawlak tarafından, 1982 yılında, bilgi eksikliğine yani belirsizliğe yeni bir matematiksel yaklaşım olarak ortaya koyulmuştur. Kaba küme teorisi, uzman sistemler için muhakeme ve bilgi çıkarımında kullanılan matematiksel bir yöntemdir. Bulanık kümelerde olduğu gibi, kaba küme teorisi de kesin sınırlamaları kabul etmeyen bir yapıdadır. Kaba küme yaklaşımı eksik, yetersiz ve belirsiz bilgileri düzenleyerek veri analizi için uygun hale getirmektedir. Kaba küme yaklaşımı ilk olarak bilgi sistemleriyle başlar. Bir bilgi sistemi en basit anlamda bir veri tablosudur. Bu tablonun satırları nesneler, sütunları özellikler ve girdileri de nesnelerin özellikler altındaki bilgileridir.

3.1. Bilgi Sistemleri, Karar Sistemleri ve Ayırtedilemezlik Bağıntısı

Tanım 3.1.1 Nesnelerin sonlu bir kümesi U ve özelliklerin sonlu bir kümesi V olmak üzere $S = (U, V)$ ikilisine bir bilgi sistemi adı verilir. Bir $S = (U, V)$ bilgi sisteminde V_a , $a \in V$ özelliği için bir değer kümesi olmak üzere, her bir nesneye V_a kümesinden bir değer karşılık getiren bir f_a fonksiyonuna bilgi fonksiyonu adı verilir ve

$$\begin{aligned} f_a : U &\rightarrow V_a \\ x &\mapsto f_a(x) \end{aligned}$$

biçiminde gösterilir (Pawlak, 1982).

Bu çalışma boyunca U evrensel kümesi, aksi belirtilmediği sürece sonlu olarak varsayılacaktır.

Örnek 3.1.1

Tablo 3.1. Bilgi sistemi (Suraj, 2004)

Nesneler	Özellikler	
	<i>Yaş</i> (<i>Y</i>)	<i>Yürüme Performansı</i> (<i>YP</i>)
x_1	16 – 30	50
x_2	16 – 30	0
x_3	31 – 45	1 – 25
x_4	31 – 45	1 – 25
x_5	46 – 60	26 – 49
x_6	16 – 30	26 – 49
x_7	46 – 60	26 – 49

Tablo 3.1 de verilen $S = (U, V)$ bilgi sisteminde; $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ kümesi hastaları ve $V = \{Y, YP\}$ kümesi de hastaların sahip olduğu özellikleri göstermektedir. Tablo 3.1 incelendiğinde x_3 ve x_4 ile x_5 ve x_7 hastalarının tam olarak aynı özellik değerlerini aldığı görülmektedir. Bu hastalar verilen özellikler kullanıldığında ikişer ikişer ayırt edilemezdir. $S = (U, V)$ bilgi sisteminin özellikler kümesinin boş olmayan bütün altkümeleri için ayrışımalar aşağıdaki gibidir (Suraj, 2004).

$$B_1 = \{Y\} \subseteq V, U/B_1 = \{\{x_1, x_2, x_6\}, \{x_3, x_4\}, \{x_5, x_7\}\},$$

$$B_2 = \{YP\} \subseteq V, U/B_2 = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3, x_4\}, \{x_5, x_6, x_7\}\},$$

$$B_3 = \{Y, YP\} \subseteq V, U/B_2 = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3, x_4\}, \{x_5, x_7\}, \{x_6\}\}.$$

Tanım 3.1.2 Bir deney ya da araştırma ile elde edilen bilgi sisteminin doğal olarak bir çıktısının olması beklenir. Çıktı ayırt edici bir özellik olup deney ya da araştırma için karar olarak adlandırılır. Karar özelliği birkaç değer alabilir.

Bir karar sistemi $d \notin V$ bir karar özelliği olmak üzere $S = (U, V \cup \{d\})$ ile gösterilen bir bilgi sistemidir (Suraj, 2004).

Örnek 3.1.2

Tablo 3.2. Karar sistemi

Nesneler	Koşullu Özellikler		Karar Özelliği
	<i>Yaş (Y)</i>	<i>Yürüme Performansı (YP)</i>	<i>Yürüebilme (YB)</i>
x_1	16 – 30	50	<i>Evet</i>
x_2	16 – 30	0	<i>Hayır</i>
x_3	31 – 45	1 – 25	<i>Hayır</i>
x_4	31 – 45	1 – 25	<i>Evet</i>
x_5	46 – 60	26 – 49	<i>Hayır</i>
x_6	16 – 30	26 – 49	<i>Evet</i>
x_7	46 – 60	26 – 49	<i>Hayır</i>

Örnek 3.1.1 de Tablo 3.1 ile verilen bilgi sistemine değer kümesi $\{Evet, Hayır\}$ olan bir karar özelliği (*Yürüebilme*) eklenmiştir. Bu şekilde oluşturulan bir karar sistemi örneği Tablo 3.2 de verilmiştir. Tablo 3.2 incelendiğinde x_3 ve x_4 ile x_5 ve x_7 hastalarının aynı özelliklere sahip olmalarına karşın x_3 ve x_4 hastalarının farklı karar özellik değerlerine sahip olduğu görülmektedir. Şimdi de *Yürüebilme* karar değeri "*Evet*" olan hastaların kümesini $X = \{x \in U : YB(x) = Evet\}$ ile ve *Yürüebilme* karar değeri "*Hayır*" olan hastaların kümesini $Y = \{x \in U : YB(x) = Hayır\}$ ile gösterelim. Bu durumda $X = \{x_1, x_4, x_6\}$ ve $Y = \{x_2, x_3, x_5, x_7\}$ olarak elde edilir (Suraj, 2004).

Bir karar tablosu bir deney ya da araştırma hakkındaki bütün bilgileri bulundurur. Bir tablo bazı özelliklerin tekrar edilmesi nedeniyle gereksiz yere büyük olabilir (Pawlak, 1982).

Tanım 3.1.3 $S = (U, V)$ bir bilgi sistemi ve $B \subseteq V$ olsun. $IND(B) = \{(x, x') \in U \times U : \forall a \in B \text{ için } a(x) = a(x')\}$ bağıntısına *B-ayırtdilemezlik bağıntısı* denir.

Ayrıca bu bağıntı denklik bağıntısı olma koşullarını sağladığından bir denklik bağıntısıdır. Eğer $(x, x') \in IND(B)$ ise x ve x' nesneleri B kümesindeki özelliklerle birbirinden ayırt edilemez. $x \in U$ elemanının *B-ayırtdilemezlik bağıntısına göre denklik sınıfı*; $[x]_B = \{y \in U : xIND(B)y\}$ kümesidir. B kümesinin tüm denklik sınıflarından oluşan kümeye de U kümesinin *B özelliklerine göre ayrışımı* denir (Pawlak, 1982; Suraj, 2004).

Örnek 3.1.3 Örnek 3.1.1 de Tablo 3.1 ile verilen bilgi sistemini inceleyelim. Bunun için V özellikler kümesinin boş olmayan $\{Y\}$, $\{YP\}$ ve $\{Y, YP\}$ alt kümelerini göz önüne alalım. Her bir alt küme için ayırtedilemezlik bağıntıları aşağıdaki gibidir (Suraj, 2004).

$$\begin{aligned} IND(\{Y\}) &= \{\{x_1, x_2, x_6\}, \{x_3, x_4\}, \{x_5, x_7\}\}, \\ IND(\{YP\}) &= \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3, x_4\}, \{x_5, x_6, x_7\}\}, \\ IND(\{Y, YP\}) &= \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3, x_4\}, \{x_5, x_7\}, \{x_6\}\}. \end{aligned}$$

3.2. Kaba Küme Teorisi

Kaba küme kavramı belirsizliği ifade etmek amacıyla matematiksel temellere dayanan bir yaklaşım olarak Polonyalı bilim insanı Pawlak tarafından verilmiştir. Pawlak kaba küme yaklaşımının başlangıcı bilgi sistemlerine kadar uzanır. Bir bilgi sistemi; nesneler kümesi ile özelliklerden oluşan küme arasındaki ilişkinin bir tabloyla ifade edilmesi olarak tanımlanabilir. Pawlak kaba küme yaklaşımının temelini denklik bağıntısı oluşturur. Kaba küme teorisinin amacı; var olan veriyle belirlenemeyen kümelerin yaklaşımda bulunarak tanımlanması ilkesine dayanmaktadır. Bir bilgi sistemi ve özelliklerin bir B altkümesi verildiğinde, B -ayırtedilemezlik bağıntısı $IND(B)$ 'nin U kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olduğunu ve bu bağıntının denklik sınıflarının U kümesinin bir ayrışımını oluşturduğunu bilmekteyiz. Bu ayrışımaya ait her küme B kümesinin elemanları ile kesin olarak belirlenebilir. B -ayırtedilemezlik bağıntısının denklik sınıflarının bir birleşimi olarak yazılabilen her $X \subseteq U$ altkümesi, kesin olarak belirlenebilir. Bir bilgi sisteminde kesin olarak belirlenemeyen kümeleri tanımlamak için kaba küme yaklaşımlarına ihtiyaç vardır. Kaba küme teorisinin temel amacı ayırtedilemezlik bağıntısı kullanılarak yaklaşımların oluşturulmasıdır. Ayırtedilemezlik bağıntısı kullanılarak bir kümenin yaklaşımları matematiksel olarak ifade edilebilir. Bilgi sistemlerinde görünmeyen ya da gizli kalmış bilginin alt ve üst yaklaşımlar kullanılarak açığa çıkarılması da teorisinin amaçları arasında yer almaktadır.

Tanım 3.2.1 R , U kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. (U, R) ikilisine Pawlak yaklaşım uzayı ya da kısaca Pawlak uzayı adı verilir (Pawlak, 1982).

Şimdi de bir $X \subseteq U$ alt kümesinin alt yaklaşımı ve üst yaklaşımının tanımlarını verelim.

Tanım 3.2.2 (U, R) bir Pawlak uzayı ve $X \subseteq U$ olsun.

$$\underline{apr}_R : \mathcal{P}(U) \rightarrow \mathcal{P}(U)$$

$$X \mapsto \underline{apr}_R(X) = \{x \in U : [x] \subseteq X\}$$

olarak tanımlanan $\underline{apr}_R$ dönüşümüne alt yaklaşım operatörü, $\underline{apr}_R(X)$ kümesine de X kümesinin alt yaklaşımı denir. $\underline{apr}_R(X)$ kümesi kesinlikle X kümesine ait nesnelerden oluşur (Pawlak, 1982).

Tanım 3.2.3 (U, R) bir Pawlak uzayı ve $X \subseteq U$ olsun.

$$\overline{apr}_R : \mathcal{P}(U) \rightarrow \mathcal{P}(U)$$

$$X \mapsto \overline{apr}_R(X) = \{x \in U : [x] \cap X \neq \emptyset\}$$

olarak tanımlanan $\overline{apr}_R$ dönüşümüne üst yaklaşım operatörü, $\overline{apr}_R(X)$ kümesine de X kümesinin üst yaklaşımı denir. $\overline{apr}_R(X)$ kümesi X kümesinde bulunması muhtemel nesnelerden oluşur (Pawlak, 1982).

Tanım 3.2.2 ve Tanım 3.2.3 de kullanılan R alt indisi, karışıklığa neden olmadığı sürece kullanılmayacaktır.

Bir $X \subseteq U$ alt kümesine ait alt ve üst yaklaşımlar U evrensel kümesini; sınır bölgesi $BND(X)$, pozitif bölge $POS(X)$ ve negatif bölge $NEG(X)$ olmak üzere üçe ayırmaktadır. Bu kavramlara ilişkin tanımları verelim.

Tanım 3.2.4 (U, R) bir Pawlak uzayı ve $X \subseteq U$ olsun. $BND(X) = \overline{apr}(X) \setminus \underline{apr}(X)$ kümesine X kümesinin sınır bölgesi denir. Bir kümenin sınırı evrensel kümenin kararsız bölgesidir. Yani X kümesinde veya $U \setminus X$ kümesinde olduğu kesin olarak bilinemeyen nesnelerden oluşur (Pawlak, 1982).

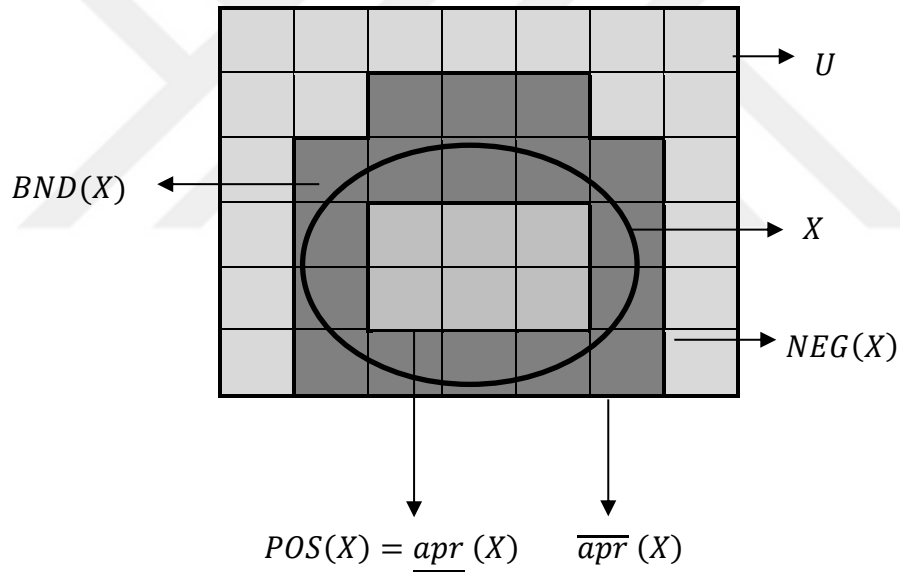
Tanım 3.2.5 (U, R) bir Pawlak uzayı ve $X \subseteq U$ olsun. $POS(X) = \underline{apr}(X)$ kümesine X kümesinin pozitif bölgesi denir ve kesinlikle X kümesine ait nesnelerden oluşur (Pawlak, 1982).

Tanım 3.2.6 (U, R) bir Pawlak uzayı ve $X \subseteq U$ olsun. $NEG(X) = U \setminus \overline{apr}(X)$ kümesine X kümesinin negatif bölgesi denir ve kesinlikle X kümesinde bulunmayan nesnelerden oluşur (Pawlak, 1982).

Yukarıda verilen küme yaklaşımı tanımları bilgi tanecikleri olarak da adlandırılan denklik sınıfları cinsinden ifade edilebilir (Pawlak, 1982; Suraj, 2004).

- ✓ Bir kümenin alt yaklaşımı, kümeye tamamen dahil olan tüm taneciklerin birleşimidir.
- ✓ Bir kümenin üst yaklaşımı, kümeye kesişimleri boş olmayan tüm taneciklerin birleşimidir.
- ✓ Bir kümenin sınırı, kümenin üst yaklaşımı ile alt yaklaşımının farkıdır.
- ✓ Bir kümenin negatif bölgesi evrensel küme ile kümenin üst yaklaşımının farkıdır.

Yukarıda tanımlanan küme yaklaşımları Şekil 3.1’de grafiksel olarak gösterilmiştir.



Şekil 3.1. Küme yaklaşımları

Örnek 3.2.1

Tablo 3.3. Karar sistemi (Thivagar vd., 2012)

Hastalar	<i>Sık İdrara Çıkma (S)</i>	<i>Kilo Kaybı (K)</i>	<i>Artan Açlık (A)</i>	<i>Diyabet (D)</i>
h_1	Evet	Evet	Hayır	Evet
h_2	Evet	Hayır	Evet	Evet
h_3	Evet	Hayır	Hayır	Evet
h_4	Hayır	Evet	Evet	Hayır
h_5	Hayır	Evet	Hayır	Hayır
h_6	Hayır	Hayır	Evet	Hayır

Yukarıda verilen Tablo 3.3 bir karar sistemidir. $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ kümesi hastaları, $X = \{x: D(x) = Evet\} = \{h_1, h_2, h_3\}$ kümesi diyabet tanısı konulan hastaları, $B = \{S, K, A\}$ kümesi de belirtileri göstermektedir.

Aşağıda verilen Tablo 3.4'te $B = \{S, K, A\}$ belirtiler kümesinin tüm alt kümelerinin ayrışimleri verilmiştir.

Tablo 3.4. Bölüm kümeleri ve ayrışimler (Bayhan vd., 2019)

Bölüm Kümesi	Ayrışimler
$IND(\{S, K, A\})$	$\{\{h_1\}, \{h_2\}, \{h_3\}, \{h_4\}, \{h_5\}, \{h_6\}\}$
$IND(\{S, K\})$	$\{\{h_1\}, \{h_2, h_3\}, \{h_4, h_5\}, \{h_6\}\}$
$IND(\{S, A\})$	$\{\{h_1, h_3\}, \{h_2\}, \{h_4, h_6\}, \{h_5\}\}$
$IND(\{K, A\})$	$\{\{h_1, h_5\}, \{h_3\}, \{h_2, h_6\}, \{h_4\}\}$
$IND(\{S\})$	$\{\{h_1, h_2, h_3\}, \{h_4, h_5, h_6\}\}$
$IND(\{K\})$	$\{\{h_1, h_4, h_5\}, \{h_2, h_3, h_6\}\}$
$IND(\{A\})$	$\{\{h_1, h_3, h_5\}, \{h_2, h_4, h_6\}\}$

Aşağıda verilen Tablo 3.5'te her belirti altkümesi için alt ve üst yaklaşım, sınır bölgesi ve negatif bölgesi toplu olarak verilmiştir.

Tablo 3.5. $X = \{h_1, h_2, h_3\}$ kümesi için alt yaklaşım, üst yaklaşım, sınır bölgesi ve negatif bölge (Bayhan ve Acar, 2019)

Belirti Altkümeleri	$\underline{apr}$ Alt Yaklaşım	$\overline{apr}$ Üst Yaklaşım	BND Sınır Bölgesi	NEG Negatif Bölgesi
$\{S, K, A\}$	$\{h_1, h_2, h_3\}$	$\{h_1, h_2, h_3\}$	$\emptyset$	$\{h_4, h_5, h_6\}$
$\{S, K\}$	$\{h_1, h_2, h_3\}$	$\{h_1, h_2, h_3\}$	$\emptyset$	$\{h_4, h_5, h_6\}$
$\{S, A\}$	$\{h_1, h_2, h_3\}$	$\{h_1, h_2, h_3\}$	$\emptyset$	$\{h_4, h_5, h_6\}$
$\{K, A\}$	$\{h_3\}$	$\{h_1, h_2, h_3, h_5, h_6\}$	$\{h_1, h_2, h_5, h_6\}$	$\{h_4\}$
$\{S\}$	$\{h_1, h_2, h_3\}$	$\{h_1, h_2, h_3\}$	$\emptyset$	$\{h_4, h_5, h_6\}$
$\{K\}$	$\emptyset$	$\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$	$\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$	$\emptyset$
$\{A\}$	$\emptyset$	$\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$	$\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$	$\emptyset$

Önerme 3.2.1 (U, R) bir Pawlak uzayı ve $X \subseteq U$ olsun. Aşağıda verilen eşitlikler sağlanır (Pawlak, 1982).

- $\underline{apr}(X) = \cup\{[x] \in U/R : [x] \subseteq X\}.$
- $\overline{apr}(X) = \cup\{[x] \in U/R : [x] \cap X \neq \emptyset\}.$

Tanım 3.2.7 (U, R) bir Pawlak uzayı ve $X \subseteq U$ olsun (Pawlak, 1982).

- $BND(X) = \emptyset$ yani, $\underline{apr}(X) = \overline{apr}(X)$ ise X kümesine tanımlanabilir (kesin) küme adı verilir.
- $BND(X) \neq \emptyset$ yani, $\underline{apr}(X) \neq \overline{apr}(X)$ ise X kümesine kaba küme adı verilir.

Örnek 3.2.2

- Örnek 3.1.2’de Tablo 3.2 ile verilen karar sisteminde; Nesneler kümesi $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$, *Yürüyebilme* karar değeri "*Evet*" olan hastaların kümesi $X = \{x: YB(x) = Evet\} = \{x_1, x_4, x_6\}$ ve $B = \{Y, YP\}$ özellik alt kümesi için ayırtedilemezlik bağıntısı $IND(\{Y, YP\}) = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3, x_4\}, \{x_5, x_7\}, \{x_6\}\}$ dır. X kümesinin alt yaklaşımı $\underline{apr}(X) = \{x_1, x_6\}$ ve X kümesinin üst yaklaşımı $\overline{apr}(X) = \{x_1, x_3, x_4, x_6\}$ şeklindedir. Buradan $BND(X) = \{x_3, x_4\} \neq \emptyset$ olduğundan X kümesi bir kaba kümedir.

- ii. Örnek 3.2.1’de Tablo 3.3 ile verilen karar sisteminde; Nesneler kümesi $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$, *Diyabet* karar değeri "*Evet*" olan hastaların kümesi $X = \{x: D(x) = \text{Evet}\} = \{h_1, h_2, h_3\}$ ve $B = \{S, K, A\}$ belirti altkümesi için ayırtedilemezlik bağıntısı $IND(\{S, K, A\}) = \{\{h_1\}, \{h_2\}, \{h_3\}, \{h_4\}, \{h_5\}, \{h_6\}\}$ dır. X kümesinin alt yaklaşımı $\underline{apr}(X) = \{h_1, h_2, h_3\}$ ve X kümesinin üst yaklaşımı $\overline{apr}(X) = \{h_1, h_2, h_3\}$ şeklinde elde edilir. $BND(X) = \emptyset$ olduğundan X kümesi tanımlanabilir. Bir başka ifadeyle, X kümesi $IND(\{S, K, A\})$ ayrışımına ait kümelerin bir birleşimi olarak yazılabilir.

Önerme 3.2.2 (U, R) bir Pawlak uzayı ve $X \subseteq U$ olsun (Pawlak, 1982).

- i. $\underline{apr}(X)$ kümesi X kümesinin kapsadığı en büyük tanımlanabilir kümedir.
- ii. $\overline{apr}(X)$ kümesi X kümesini kapsayan en küçük tanımlanabilir kümedir.

Önerme 3.2.3 (U, R) bir Pawlak uzayı ve $X, Y \subseteq U$ olsun. Alt ve üst yaklaşım operatörlerine ilişkin özellikler aşağıda verilmiştir (Pawlak, 1982).

($U \setminus X$ kısaca $-X$ olarak gösterilecektir.)

1. $\underline{apr}(X) \subseteq X \subseteq \overline{apr}(X)$,
2. $\underline{apr}(U) = \overline{apr}(U) = U$,
3. $\underline{apr}(\emptyset) = \overline{apr}(\emptyset) = \emptyset$,
4. $\overline{apr}(\overline{apr}(X)) = \underline{apr}(\underline{apr}(X)) = \overline{apr}(X)$ (idempotentlik),
5. $\underline{apr}(\underline{apr}(X)) = \overline{apr}(\overline{apr}(X)) = \underline{apr}(X)$ (idempotentlik),
6. $\overline{apr}(X \cup Y) = \overline{apr}(X) \cup \overline{apr}(Y)$ (toplamsallık),
7. $\underline{apr}(X \cap Y) = \underline{apr}(X) \cap \underline{apr}(Y)$ (çarpımsallık),
8. $\overline{apr}(X) = -\underline{apr}(-X)$ (dualite),
9. $\underline{apr}(X) = -\overline{apr}(-X)$ (dualite),
10. $X \subseteq Y \Rightarrow \overline{apr}(X) \subseteq \overline{apr}(Y) \wedge \underline{apr}(X) \subseteq \underline{apr}(Y)$ (monotonluk).

3.3. Belirsizliğin Sınıflandırılması ve Yaklaşımın Doğruluğu

Bir küme yaklaşımlar yardımı ile aşağıda verilen tanımlar ile karakterize edilebilir (Suraj, 2004).

Tanım 3.3.1 (U, R) bir Pawlak uzayı ve $X \subseteq U$ olsun.

- i. U kümesindeki elemanlardan X kümesine ait olanların bazılarına ve $U \setminus X$ kümesine ait olanların bazılarına karar verebiliyorsak X kümesi kabaca tanımlanabilir.

$$X \text{ kümesi kabaca tanımlanabilir. : } \Leftrightarrow \underline{apr}(X) \neq \emptyset \wedge \overline{apr}(X) \neq U$$

- ii. U kümesindeki elemanlardan $U \setminus X$ kümesine ait olanların bazılarına karar verebiliyorsak ve herhangi bir elemanın X kümesine ait olup olmadığına karar veremiyorsak X kümesi içsel tanımlanamazdır.

$$X \text{ kümesi içsel tanımlanamazdır. : } \Leftrightarrow \underline{apr}(X) = \emptyset \wedge \overline{apr}(X) \neq U$$

- iii. U kümesindeki elemanlardan X kümesine ait olanların bazılarına karar verebiliyorsak ve herhangi bir elemanın $U \setminus X$ kümesine ait olup olmadığına karar veremiyorsak X kümesi dışsal tanımlanamazdır.

$$X \text{ kümesi dışsal tanımlanamazdır. : } \Leftrightarrow \underline{apr}(X) \neq \emptyset \wedge \overline{apr}(X) = U$$

- iv. U kümesindeki elemanlardan herhangi bir elemanın X kümesine veya $U \setminus X$ kümesine ait olup olmadığına karar veremiyorsak X kümesi bütünüyle tanımlanamazdır.

$$X \text{ kümesi bütünüyle tanımlanamazdır. : } \Leftrightarrow \underline{apr}(X) = \emptyset \wedge \overline{apr}(X) = U$$

Bir Pawlak uzayında bir kümenin kaba olması, kümenin sınırının boş kümeden farklı olmasıyla karakterize edilmektedir. Kümenin sınırının boş küme olması ise kümenin tanımlanabilir olmasını ifade etmektedir. Sınır kümesinin eleman sayısı arttıkça, kümenin kesin olarak belirlenen eleman sayısı azalacaktır. Bu durum kümenin elemanlarına ait bilginin belirsizliğinin derecesinin artmasına neden olacaktır (Pawlak, 1991).

Bir kaba küme aşağıdaki şekilde sayısal olarak karakterize edilebilir. Burada $|X|$ ile X kümesinin eleman sayısı ifade edilecektir.

Tanım 3.3.2 (U, R) bir Pawlak uzayı ve $X \subseteq U$ olsun.

$$\alpha(X) = \frac{|\underline{apr}(X)|}{|\overline{apr}(X)|}$$

ifadesi ile verilen $\alpha(X)$ sayısına X kümesinin tamlık değeri denir (Pawlak, 1991).

$|\underline{apr}(X)| \leq |\overline{apr}(X)|$ olduğu göz önüne alınırsa aşağıdaki özellikler sağlanır (Pawlak, 1991; Lashin, 2005).

- i. $0 \leq \alpha(X) \leq 1$ olduğu açıktır.
- ii. $\alpha(X) = 1$ ise X kümesi tanımlanabilir.
- iii. $\alpha(X) < 1$ ise X kümesi kaba kümedir.
- iv. X kümesinin belirsizlik ölçüsü $\pi(X) = 1 - \alpha(X)$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 3.3.1 ve Tanım 3.3.2 kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.3.1 (U, R) bir Pawlak uzayı ve $X \subseteq U$ olsun.

- i. $0 < \alpha(X) \leq 1$ ise X kümesi kabaca tanımlanabilir veya X kümesi dışsal tanımlanamazdır.
- ii. $\alpha(X) = 0$ ise X kümesi içsel tanımlanamazdır veya X kümesi bütünüyle tanımlanamazdır.

Örnek 3.3.1 Örnek 3.2.1’de Tablo 3.3 ile verilen karar sisteminin her belirti altkümesi için alt ve üst yaklaşım, sınır bölgesi ve tamlik değeri aşağıda verilen Tablo 3.6’da hesaplanmıştır (Bayhan ve Acar, 2019).

Tablo 3.6. $X = \{h_1, h_2, h_3\}$ kümesi için alt yaklaşım, üst yaklaşım, sınır bölgesi ve tamlik değeri

Belirti Altkümeleri	$\underline{apr}$ Alt Yaklaşım	$\overline{apr}$ Üst Yaklaşım	BND Sınır	α Tamlik Değeri
$\{S, K, A\}$	$\{h_1, h_2, h_3\}$	$\{h_1, h_2, h_3\}$	$\emptyset$	1
$\{S, K\}$	$\{h_1, h_2, h_3\}$	$\{h_1, h_2, h_3\}$	$\emptyset$	1
$\{S, A\}$	$\{h_1, h_2, h_3\}$	$\{h_1, h_2, h_3\}$	$\emptyset$	1
$\{K, A\}$	$\{h_3\}$	$\{h_1, h_2, h_3, h_5, h_6\}$	$\{h_1, h_2, h_5, h_6\}$	1/5
$\{S\}$	$\{h_1, h_2, h_3\}$	$\{h_1, h_2, h_3\}$	$\emptyset$	1
$\{K\}$	$\emptyset$	$\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$	$\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$	0
$\{A\}$	$\emptyset$	$\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$	$\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$	0

$X = \{x: D(x) = \text{evet}\} = \{h_1, h_2, h_3\}$ kümesi verilsin. $B_1 = \{S, K, A\}$ özellik alt kümesi için $\underline{apr}(X) = \{h_1, h_2, h_3\}$ ve $\overline{apr}_{B_1}(X) = \{h_1, h_2, h_3\}$ olur. Buradan $\alpha(X) = \frac{|\underline{apr}(X)|}{|\overline{apr}(X)|} = \frac{3}{3} = 1$ elde edilir. Bu durumda X kümesi B_1 özellik alt kümesine göre tanımlanabilir. $B_2 = \{K, A\}$ özellik alt kümesi için $\underline{apr}(X) = \{h_3\}$ ve $\overline{apr}_{B_2}(X) = \{h_1, h_2, h_3, h_5, h_6\}$ dir. Böylece $\alpha(X) = \frac{|\underline{apr}(X)|}{|\overline{apr}(X)|} = \frac{1}{5}$ olur. O halde X kümesi B_2 özellik alt kümesine göre bir kaba kümedir. Sonuç olarak X kümesi için $B_1 = \{S, K, A\}$ kümesi $B_2 = \{K, A\}$ kümesinden daha karakteristiktir yani daha doğru bir yaklaşım sağlar.

3.4. Özelliklerin İndirgenmesi

Bir karar tablosunun bir deney ya da araştırma hakkındaki bütün bilgileri bulundurduğuna ve çizelgenin bazı özelliklerin tekrar edilmesi nedeniyle gereksiz yere büyük olabileceğine değinmiştik.

Karar tablosunda, sınıflandırmayı koruyarak gereksiz ya da tekrarlanan özellikler kaldırılabilir. İndirgeme olarak adlandırılan bu yöntemle, bilgi kaybına yol açmadan en az ya da en ekonomik sınıflandırma yapılabilir.

Tanım 3.4.1 $S = (U, V)$ bir bilgi sistemi, $B \subseteq V$ ve $a \in B$ olsun (Pawlak, 1982; Suraj, 2004).

- i. $IND(B) = IND(B \setminus \{a\})$ ise a özelliği, B özellikler kümesi için vazgeçilebilir bir elemandır.
- ii. $IND(B) \neq IND(B \setminus \{a\})$ ise a özelliği, B özellikler kümesi için vazgeçilemez (ihmal edilemez) bir elemandır.
- iii. Her $a \in B$ elemanı için a , B kümesinde vazgeçilemez bir eleman ise yani, B bütün elemanları vazgeçilemez olan bir küme ise B kümesi bağımsızdır.
- iv. $B' \subset B$ alt kümesi bağımsız ve $IND(B') = IND(B)$ ise B' kümesine B kümesinin indirgenmiş denir. B kümesinin tüm indirgenmiş kümelerinin ailesi $RED(B)$ ile gösterilir.

Tanım 3.4.2 $S = (U, V)$ bir bilgi sistemi ve $B \subseteq V$ olsun. B kümesinin tüm vazgeçilemez elemanlarının kümesine B kümesinin çekirdeği denir ve $CORE(B)$ ile gösterilir (Pawlak, 1982; Suraj, 2004).

Çekirdek ve indirgeme kavramları arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir.

$$CORE(B) = \cap RED(B)$$

Çekirdeği oluşturan elemanlardan hiçbirisi sınıflandırmanın gücünü etkilemeden çıkartılamaz. Bu özelliği ile çekirdek, özelliklerin en önemli altkümesidir.

Örnek 3.4.1

Tablo 3.7. Karar sistemi (Güneş, 2010)

	<i>Eğitim (E)</i>	<i>Sicil (S)</i>	<i>Deneyim (D)</i>	<i>Puan (P)</i>	<i>Yönetici (Y)</i>
x_1	Lisans	Orta	Hayır	C	Hayır
x_2	Lisans	İyi	Hayır	A	Evet
x_3	Yüksek Lisans	İyi	Evet	B	Evet
x_4	Yüksek Lisans	İyi	Hayır	B	Hayır
x_5	Doktora	Çok İyi	Evet	A	Evet
x_6	Lisans	Orta	Hayır	C	Hayır
x_7	Doktora	Çok İyi	Evet	A	Evet

$U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ kümesi yönetici pozisyonuna başvuran adaylar, $V = \{E, S, D, P\}$ ise adaylara ilişkin özellikler kümesi olmak üzere, bir $S = (U, V)$ karar sistemi Tablo 3.7 de verilmiştir. V özellikler kümesinin tüm alt kümelerine karşılık gelen ayrışimler Tablo 3.8 de yer almaktadır.

Tablo 3.8. Bölüm kümeleri ve ayrışımalar

Bölüm Kümesi	Ayrışımalar
$IND(\{E, S, D, P\})$	$\{\{x_1, x_6\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5, x_7\}\}$
$IND(\{E, S, D\})$	$\{\{x_1, x_6\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5, x_7\}\}$
$IND(\{E, S, P\})$	$\{\{x_1, x_6\}, \{x_2\}, \{x_3, x_4\}, \{x_5, x_7\}\}$
$IND(\{E, D, P\})$	$\{\{x_1, x_6\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5, x_7\}\}$
$IND(\{S, D, P\})$	$\{\{x_1, x_6\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5, x_7\}\}$
$IND(\{E, S\})$	$\{\{x_1, x_6\}, \{x_2\}, \{x_3, x_4\}, \{x_5, x_7\}\}$
$IND(\{E, D\})$	$\{\{x_1, x_2, x_6\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5, x_7\}\}$
$IND(\{E, P\})$	$\{\{x_1, x_6\}, \{x_2\}, \{x_3, x_4\}, \{x_5, x_7\}\}$
$IND(\{S, D\})$	$\{\{x_1, x_6\}, \{x_2, x_4\}, \{x_3\}, \{x_5, x_7\}\}$
$IND(\{S, P\})$	$\{\{x_1, x_6\}, \{x_2\}, \{x_3, x_4\}, \{x_5, x_7\}\}$
$IND(\{D, P\})$	$\{\{x_1, x_6\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5, x_7\}\}$
$IND(\{E\})$	$\{\{x_1, x_2, x_6\}, \{x_3, x_4\}, \{x_5, x_7\}\}$
$IND(\{S\})$	$\{\{x_1, x_6\}, \{x_2, x_3, x_4\}, \{x_5, x_7\}\}$
$IND(\{D\})$	$\{\{x_1, x_2, x_4, x_6\}, \{x_3, x_5, x_7\}\}$
$IND(\{P\})$	$\{\{x_1, x_6\}, \{x_2, x_5, x_7\}, \{x_3, x_4\}\}$

$V = \{E, S, D, P\}$ özellikler kümesinin alt kümeleri arasında ayrışımaları $IND(\{E, S, D, P\})$ ye eşit olan dört küme vardır. Bunlar $\{E, S, D\}$, $\{E, D, P\}$, $\{S, D, P\}$ ve $\{D, P\}$ kümeleridir. Fakat $\{D, P\} \subset \{E, D, P\} \setminus \{E\} = \{S, D, P\} \setminus \{S\}$ olduğundan $\{E, D, P\}$ ve $\{S, D, P\}$ kümeleri bağımsız değildir. Bu nedenle $\{E, S, D, P\}$ kümesinin indirgemesi olamazlar. $\{E, S, D\}$ ve $\{D, P\}$ bağımsız kümelerdir ve $IND(\{E, S, D\}) = IND(\{D, P\}) = IND(\{E, S, D, P\})$ olduğundan $\{E, S, D, P\}$ kümesinin indirgemeleridir. O halde $V = \{E, S, D, P\}$ özellikler kümesinin çekirdeği $CORE(\{E, S, D, P\}) = \{E, S, D\} \cap \{D, P\} = \{D\}$ olarak elde edilir.

4. ÖRTÜ TABANLI KABA KÜMELER

Pawlak yaklaşım uzayının temelini denklik bağıntısı oluşturur. Denklik bağıntısı evrensel kümeyi denklik sınıflarına ayırır. Her bir tanecik denklik sınıfı olarak düşünülür. Ayrıca denklik sınıflarının ailesi evrensel kümenin bir ayrışımıdır. Bu ayrışım denklik bağıntısı tarafından indirgenen özel bir örtüdür ve uygulamalarda sınırlayıcı olmaktadır. Bu sorunu aşmak için; ayrışım örtü kavramına genelleştirilerek, örtü tabanlı kaba küme teorisinin temelleri atılmıştır.

Tanım 4.1 U kümesinin alt kümelerinin bir ailesi $\mathcal{C}$ olsun. Eğer $\emptyset \notin \mathcal{C}$ ve $\bigcup \mathcal{C} = U$ eşitliği sağlanıyorsa, $\mathcal{C}$ ailesine U kümesinin bir örtüsüdür denir (Bonikowski vd., 1998).

Tanım 4.2 U kümesinin bir örtüsü $\mathcal{C}$ olsun. $(U, \mathcal{C})$ ikilisine bir örtü yaklaşım uzayı denir (Xu ve Zhang, 2007).

Tanım 4.3 $(U, \mathcal{C})$ bir örtü yaklaşım uzayı ve $x \in U$ olsun.

$$Md(x) = \{K \in \mathcal{C} : x \in K \wedge (\forall S \in \mathcal{C}, x \in S \wedge S \subseteq K \implies S = K)\}$$

ailesine x elemanının minimal tanımlayıcısı denir (Bonikowski vd., 1998).

Örnek 4.1 $U = \{a, b, c, d\}$ olmak üzere, $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\}$ örtüsü verilsin. Her $x \in U$ elemanının minimal tanımlayıcıları $Md(a) = \{\{a\}\}$, $Md(b) = \{\{a, b\}, \{b, c, d\}\}$, $Md(c) = \{\{b, d, c\}\}$ ve $Md(d) = \{\{b, c, d\}\}$ dir.

Tanım 4.4 $(U, \mathcal{C})$ bir örtü yaklaşım uzayı olsun. U kümesi üzerinde bir $\approx_{\mathcal{C}}$ denklik bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlanır (Bonikowski vd., 1998).

$$\forall x, y \in U \text{ için } x \approx_{\mathcal{C}} y: \iff Md(x) = Md(y)$$

Bu bağıntının denklik sınıflarının ailesi U kümesinin bir ayrışımıdır.

Örnek 4.2 $U = \{a, b, c, d\}$ olmak üzere, $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\}$ örtüsü ile $(U, \mathcal{C})$ örtü yaklaşım uzayı verilsin.

$Md(a) = \{\{a\}\}$, $Md(b) = \{\{a, b\}, \{b, c, d\}\}$, $Md(c) = \{\{b, d, c\}\} = Md(d)$ dir. O halde $c \approx_{\mathcal{C}} d$ dir. Böylece $U/\approx_{\mathcal{C}} = \{\{a\}, \{b\}, \{c, d\}\}$ elde edilir.

Teorem 4.1 $(U, \mathcal{C})$ bir örtü yaklaşım uzayı olsun. Her $X \subseteq U$ kümesi ve her $x \in X$ elemanı için aşağıdaki denklik geçerlidir (Bonikowski vd., 1998).

$$x \in X \Leftrightarrow Md(x) = \{K \in \mathcal{C} : X \subseteq K \wedge (\forall S \in \mathcal{C}, X \subseteq S \wedge S \subseteq K \Rightarrow S = K)\}$$

Bir örtü yaklaşım uzayında, herhangi bir kümenin yaklaşımı fikrini anlamlı bir hale getirmek için aşağıdaki tanımları verelim.

Tanım 4.5 $(U, \mathcal{C})$ bir örtü yaklaşım uzayı ve $X \subseteq U$ olsun. $\mathcal{C}_*(X) = \{K \in \mathcal{C} : K \subseteq X\}$ ailesi X 'in alt yaklaşım kümelerinin ailesidir. $\underline{\mathcal{C}}(X) = \cup \mathcal{C}_*(X)$ kümesine X 'in alt yaklaşımı denir (Bonikowski vd., 1998).

Tanım 4.6 $(U, \mathcal{C})$ bir örtü yaklaşım uzayı ve $X \subseteq U$ olsun. $X_*^* = X \setminus \underline{\mathcal{C}}(X)$ kümesine X 'in sınırı denir. $Bn(X) = \{Md(x) : x \in X_*^*\}$ ailesine de X 'in sınırına yaklaşan kümelerin ailesi adı verilir (Bonikowski vd., 1998).

Tanım 4.7 $(U, \mathcal{C})$ bir örtü yaklaşım uzayı ve $X \subseteq U$ olsun. $\mathcal{C}^*(X) = \mathcal{C}_*(X) \cup Bn(X)$ ailesi X 'in üst yaklaşım kümelerinin ailesidir. $\overline{\mathcal{C}}(X) = \cup \mathcal{C}^*(X)$ kümesine X 'in üst yaklaşımı denir (Bonikowski vd., 1998).

Tanım 4.8 $(U, \mathcal{C})$ bir örtü yaklaşım uzayı ve $X \subseteq U$ olsun. $\mathcal{C}_*(X) = \mathcal{C}^*(X)$ eşitliği sağlanıyorsa, X tanımlanabilir kümedir. $\mathcal{C}_*(X) \neq \mathcal{C}^*(X)$ ise X kaba küme olarak adlandırılır (Bonikowski vd., 1998).

Önerme 4.1 $(U, \mathcal{C})$ bir örtü yaklaşım uzayı ve $X \subseteq U$ olsun. $\mathcal{A} = \{\underline{\mathcal{C}}(X), X_*^*\}$ ailesi X kümesinin bir ayrışımıdır (Bonikowski vd., 1998).

Kanıt: Tanım 4.6'dan $X_*^* \cup \underline{\mathcal{C}}(X) = X$ ve $X_*^* \cap \underline{\mathcal{C}}(X) = \emptyset$ olduğu kolayca görülür. O halde $\mathcal{A}$ ailesi X kümesinin bir ayrışımıdır. $\square$

Tanım 4.9 $(U, \mathcal{C})$ bir örtü yaklaşım uzayı ve $X \subseteq U$ olsun. X kümesinin $\mathcal{A} = \{\underline{\mathcal{C}}(X), X_*^*\}$ ayrışımına X 'in yaklaşım ayrışımı adı verilir (Bonikowski vd., 1998).

Örnek 4.3 $U = \{a, b, c, d\}$ olmak üzere, $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\}$ örtüsü verilsin. $X = \{a, b, c\} \subseteq U$ olsun. Öncelikle X 'in alt yaklaşım kümelerinin ailesi $\mathcal{C}_*(X) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ olur. O halde X 'in alt yaklaşımı $\underline{\mathcal{C}}(X) = \{a, b\}$ dir. X 'in sınırı $X_*^* = \{c\}$ dir. Ayrıca X kümesinin sınırının minimal tanımlayıcısı $Md(c) = \{\{b, c, d\}\}$ olduğundan X 'in sınırına yaklaşan kümelerin ailesi $Bn(X) = \{\{b, c, d\}\}$ dir. Böylece X 'in üst yaklaşım kümelerinin ailesi $\mathcal{C}^*(X) = \{\{a\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\}$ olur ve X kümesinin üst yaklaşımı $\overline{\mathcal{C}}(X) = \{a, b, c, d\}$ olarak elde edilir. $\mathcal{C}_*(X) = \{\{a\}, \{a, b\}\} \neq \{\{a\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\} = \mathcal{C}^*(X)$ olduğundan X kümesi kaba kümedir. X 'in yaklaşım ayrışımı $\mathcal{A} = \{\{a, b\}, \{c\}\}$ ailesidir.

Uyarı 4.1 Örtü üst yaklaşımının diğer bir doğal tanımı da $\mathcal{C}^\#(X) = \bigcap \{K \in \mathcal{C} : X \subseteq K\}$ şeklinde düşünülebilir (Xu ve Zhang, 2007). Fakat bu tanım daha önce Tanım 4.8'de verilen $\overline{\mathcal{C}}(X)$ örtü üst yaklaşımına eşit değildir. Örneğin $U = \{a, b, c, d\}$ kümesi ve $\mathcal{C} = \{\{a, b\}, \{a, c, d\}\}$ örtüsü verilsin. $X = \{a\}$ olsun. O halde $\mathcal{C}^\#(X) = \{a, b\} \cap \{a, c, d\} = \{a\}$ dir. Ancak Tanım 4.6 gereğince $\mathcal{C}_*(X) = \emptyset$ ve $\underline{\mathcal{C}}(X) = \emptyset$ dir. Tanım 4.7 gereğince $X_*^* = \{a\}$ olduğundan $Md(a) = \{\{a, b\}, \{a, c, d\}\}$ olur ve $Bn(X) = U$ eşitliği elde edilir. Böylece Tanım 4.8'den $\overline{\mathcal{C}}(X) = U$ olur. Sonuç olarak $\mathcal{C}^\#(X) = \{a\} \neq U = \overline{\mathcal{C}}(X)$ dir.

Önerme 4.2 $(U, \mathcal{C})$ bir örtü yaklaşım uzayı olsun. Her $X, Y \subseteq U$ için aşağıda verilen özellikler sağlanır (Zakowski, 1983; Bonikowski vd., 1998).

- i. $\mathcal{C}_*(\emptyset) = \mathcal{C}^*(\emptyset) = \emptyset$,
- ii. $\mathcal{C}_*(U) = \mathcal{C}^*(U) = \mathcal{C}$,
- iii. $\mathcal{C}_*(X) \subseteq \mathcal{C}^*(X)$,
- iv. $\underline{\mathcal{C}}(X) \subseteq X \subseteq \overline{\mathcal{C}}(X)$,
- v. $\mathcal{C}_*(\underline{\mathcal{C}}(X)) = \mathcal{C}_*(X) = \mathcal{C}^*(\underline{\mathcal{C}}(X))$,
- vi. $\underline{\mathcal{C}}(\underline{\mathcal{C}}(X)) = \underline{\mathcal{C}}(X) \wedge \overline{\mathcal{C}}(\overline{\mathcal{C}}(X)) = \overline{\mathcal{C}}(X)$ (idempotent),
- vii. $X \subseteq Y \Rightarrow \mathcal{C}_*(X) \subseteq \mathcal{C}_*(Y) \wedge \underline{\mathcal{C}}(X) \subseteq \underline{\mathcal{C}}(Y)$ (monotonluk),
- viii. $\mathcal{C}_*(X_*^*) = \emptyset = \underline{\mathcal{C}}(X_*^*)$,
- ix. $Bn(X) = Bn(X_*^*) = \mathcal{C}^*(X_*^*)$,
- x. $\{K \in \mathcal{C} : K \subseteq \underline{\mathcal{C}}(X)\} = \mathcal{C}_*(X)$.
Her $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(U)$ ailesi için
- xi. $\bigcup \{\underline{\mathcal{C}}(X) : X \in \mathcal{A}\} \subseteq \underline{\mathcal{C}}(\bigcup \mathcal{A})$,

- xii. $\cap\{\mathcal{C}_*(X) : X \in \mathcal{A}\} = \mathcal{C}_*(\cap\mathcal{A}),$
- xiii. $\cup\{\mathcal{C}_*(X) : X \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{C}_*(\cup\mathcal{A}).$
Her $x \in U$ için
- xiv. $\mathcal{C}_*({x}) \neq \emptyset \Leftrightarrow {x} \in \mathcal{C},$
- xv. $\mathcal{C}^*({x}) = Md(x),$
- xvi. $\cap Md(x) = \cap\{K \in \mathcal{C} : x \in K\},$
- xvii. ${x} \in \mathcal{C}^*(X) \Rightarrow {x} \in \mathcal{C}_*(X).$

Uyarı 4.2 Pawlak alt ve üst yaklaşımlarının bağıntı tabanlı özellikleri aşağıda verilmiştir. Bu özellikler örtü tabanlı alt ve üst yaklaşımlar için sağlanmaz (Xu ve Zhang, 2007).

- i. $\underline{\mathcal{C}}(-X) = -\overline{\mathcal{C}}(X) \wedge \overline{\mathcal{C}}(-X) = -\underline{\mathcal{C}}(X)$ (dualite),
- ii. $\underline{\mathcal{C}}(X \cap Y) = \underline{\mathcal{C}}(X) \cap \underline{\mathcal{C}}(Y)$ (çarpımsallık),
- iii. $\overline{\mathcal{C}}(X \cup Y) = \overline{\mathcal{C}}(X) \cup \overline{\mathcal{C}}(Y)$ (toplamsallık),
- iv. $X \subseteq Y \Rightarrow \overline{\mathcal{C}}(X) \subseteq \overline{\mathcal{C}}(Y)$ (monotonluk).

Örnek 4.4 $U = \{a, b, c, d\}$ olmak üzere, $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\}$ örtüsü ile $(U, \mathcal{C})$ bir örtü yaklaşım uzayı verilsin.

- i. Bir $X = \{c\}$ kümesi ile tümleyeninin alt yaklaşım kümelerinin ailesi, alt yaklaşımı, sınırı, sınırına yaklaşan kümelerin ailesi, üst yaklaşım kümelerinin ailesi ve üst yaklaşımı Tablo 4.1’de verilmiştir.

Tablo 4.1. Bir küme ve tümleyeni için değerler

$X = \{c\}$	$-X = \{a, b, d\}$
$\mathcal{C}_*(X) = \emptyset$	$\mathcal{C}_*(-X) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$
$\underline{\mathcal{C}}(X) = \emptyset$	$\underline{\mathcal{C}}(-X) = \{a, b\}$
$X_*^* = \{c\}$	$(-X)_*^* = \{d\}$
$Md(c) = \{\{b, c, d\}\}$	$Md(d) = \{\{b, c, d\}\}$
$Bn(X) = \{\{b, c, d\}\}$	$Bn(-X) = \{\{b, c, d\}\}$
$\mathcal{C}^*(X) = \{\{b, c, d\}\}$	$\mathcal{C}^*(-X) = \{\{a\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\}$
$\overline{\mathcal{C}}(X) = \{b, c, d\}$	$\overline{\mathcal{C}}(-X) = \{a, b, c, d\}$

Tablo 4.1 incelendiğinde $\underline{C}(-X) = \{a, b\} \neq \{a\} = -\overline{C}(X)$ olduğu görülür. Burada $X = \{a, b, d\}$ alınırsa $-X = \{c\}$ olur. $\overline{C}(-X) = \{b, c, d\} \neq \{c, d\} = -\underline{C}(X)$ elde edilir.

- ii. $X = \{a, b\}$, $Y = \{b, c, d\}$ kümeleri ve kesişimlerinin alt yaklaşım kümelerinin ailesi ve alt yaklaşımı Tablo 4.2’de verilmiştir.

Tablo 4.2. İki küme ve kesişimleri için değerler

$X = \{a, b\}$	$Y = \{b, c, d\}$	$X \cap Y = \{b\}$
$\mathcal{C}_*(X) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$	$\mathcal{C}_*(Y) = \{\{b, c, d\}\}$	$\mathcal{C}_*(X \cap Y) = \emptyset$
$\underline{C}(X) = \{a, b\}$	$\underline{C}(Y) = \{b, c, d\}$	$\underline{C}(X \cap Y) = \emptyset$

Tablo 4.2 incelendiğinde $\underline{C}(X \cap Y) = \emptyset \neq \{b\} = \underline{C}(X) \cap \underline{C}(Y)$ çarpımsallık özelliğinin sağlanmadığı görülür.

- iii. $X = \{a\}$, $Y = \{b\}$ kümeleri ve birleşimlerinin alt yaklaşım kümelerinin ailesi, alt yaklaşımı, sınırı, sınırına yaklaşan kümelerin ailesi, üst yaklaşım kümelerinin ailesi ve üst yaklaşımı Tablo 4.3’te verilmiştir.

Tablo 4.3. İki küme ve birleşimleri için değerler

$X = \{a\}$	$Y = \{b\}$	$X \cup Y = \{a, b\}$
$\mathcal{C}_*(X) = \{\{a\}\}$	$\mathcal{C}_*(Y) = \emptyset$	$\mathcal{C}_*(X \cup Y) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$
$\underline{C}(X) = \{a\}$	$\underline{C}(Y) = \emptyset$	$\underline{C}(X \cup Y) = \{a, b\}$
$X_*^* = \emptyset$	$Y_*^* = \{b\}$	$(X \cup Y)_*^* = \emptyset$
	$Md(b) = \{\{a, b\}, \{b, c, d\}\}$	
$Bn(X) = \emptyset$	$Bn(Y) = \{\{a, b\}, \{b, c, d\}\}$	$Bn(X \cup Y) = \emptyset$
$\mathcal{C}^*(X) = \{\{a\}\}$	$\mathcal{C}^*(Y) = \{\{a, b\}, \{b, c, d\}\}$	$\mathcal{C}^*(X \cup Y) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$
$\overline{C}(X) = \{a\}$	$\overline{C}(Y) = \{a, b, c, d\}$	$\overline{C}(X \cup Y) = \{a, b\}$

Tablo 4.3’e göre $\overline{C}(X \cup Y) = \{a, b\} \neq \{a, b, c, d\} = \overline{C}(X) \cup \overline{C}(Y)$ toplamsallık özelliği sağlanmaz.

- iv. Bir $X = \{b\}$ kümesi ile bu kümeyi kapsayan bir $Y = \{a, b\}$ kümesinin alt yaklaşım kümelerinin ailesi, alt yaklaşımı, sınırı, sınırına yaklaşan kümelerin ailesi, üst yaklaşım kümelerinin ailesi ve üst yaklaşımı Tablo 4.4'te verilmiştir.

Tablo 4.4. Bir küme ve bu kümeyi kapsayan bir küme için değerler

$X = \{b\}$	$Y = \{a, b\}$
$\mathcal{C}_*(X) = \emptyset$	$\mathcal{C}_*(Y) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$
$\underline{\mathcal{C}}(X) = \emptyset$	$\underline{\mathcal{C}}(Y) = \{a, b\}$
$X_*^* = \{b\}$	$Y_*^* = \emptyset$
$Md(b) = \{\{a, b\}, \{b, c, d\}\}$	
$\text{Bn}(X) = \{\{a, b\}, \{b, c, d\}\}$	$\text{Bn}(Y) = \emptyset$
$\mathcal{C}^*(X) = \{\{a, b\}, \{b, c, d\}\}$	$\mathcal{C}^*(Y) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$
$\overline{\mathcal{C}}(X) = \{a, b, c, d\}$	$\overline{\mathcal{C}}(Y) = \{a, b\}$

Tablo 4.4 incelendiğinde $X \subseteq Y$ olduğu halde $\overline{\mathcal{C}}(X) = \{a, b, c, d\} \not\subseteq \{a, b\} = \overline{\mathcal{C}}(Y)$ olduğu görülür.

Şimdi Uyarı 4.2'de verilen ii., iii. ve iv. özelliklerinin örtü yaklaşım uzaylarında hangi koşullar altında sağlanacağına ilişkin karakterizasyonlar verilecektir.

Tanım 4.10 U kümesinin bir örtüsü $\mathcal{C}$ olsun. Her $x \in U$ için $|Md(x)| = 1$ oluyorsa, $\mathcal{C}$ örtüsüne tekli örtü adı verilir (Zhu, 2009).

Örnek 4.5 (Zhu, 2009)

- $U = \{a, b, c, d\}$ olmak üzere $\mathcal{C} = \{\{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}\}$ örtüsü verilsin. U kümesinin elemanlarının minimal tanımlayıcıları $Md(a) = \{\{a, b\}\}$, $Md(b) = \{\{a, b\}\}$, $Md(c) = \{\{a, b, c\}\}$, $Md(d) = \{\{a, b, c, d\}\}$ dir. Her $x \in U$ için $|Md(x)| = 1$ olduğundan $\mathcal{C}$ tekli örtüdür.
- $U = \{a, b, c, d\}$ olmak üzere $\mathcal{C} = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c, d\}\}$ örtüsünü ele alalım. $a \in U$ elemanının minimal tanımlayıcısı $Md(a) = \{\{a, b\}, \{a, c\}\}$ dir. $|Md(a)| = 2$ olduğundan $\mathcal{C}$ tekli örtü değildir.

Teorem 4.2 U kümesinin bir örtüsü $\mathcal{C}$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir (Zhu, 2009).

- i. $\mathcal{C}$ örtüsü teklidir.
- ii. Her $K_1, K_2 \in \mathcal{C}$ için $K_1 \cap K_2$ kesişimi $\mathcal{C}$ örtüsünün sonlu sayıdaki elemanlarının birleşimi olarak yazılabilir.

Teorem 4.3 $(U, \mathcal{C})$ bir örtü yaklaşım uzayı ve $X, Y \subseteq U$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir (Zhu ve Wang, 2006).

- i. $\underline{\mathcal{C}}(X \cap Y) = \underline{\mathcal{C}}(X) \cap \underline{\mathcal{C}}(Y)$ dir.
- ii. Her $K_1, K_2 \in \mathcal{C}$ için $K_1 \cap K_2$ kesişimi $\mathcal{C}$ örtüsünün sonlu sayıdaki elemanlarının birleşimi olarak yazılabilir.

Sonuç 4.1 $(U, \mathcal{C})$ bir örtü yaklaşım uzayı ve $X, Y \subseteq U$ olsun. $\underline{\mathcal{C}}(X \cap Y) = \underline{\mathcal{C}}(X) \cap \underline{\mathcal{C}}(Y)$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{C}$ örtüsünün tekli örtü olmasıdır (Zhu, 2009).

Kanıt: Teorem 4.2 ve Teorem 4.3 kullanılarak açıkça görülür. $\square$

Önerme 4.3 $(U, \mathcal{C})$ bir örtü yaklaşım uzayı ve $X, Y \subseteq U$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir (Zhu ve Wang, 2006).

- i. $\bar{\mathcal{C}}(X \cup Y) = \bar{\mathcal{C}}(X) \cup \bar{\mathcal{C}}(Y)$ dir.
- ii. Her $K_1, K_2 \in \mathcal{C}$ için $K_1 \cap K_2$ kesişiminin $\mathcal{C}$ örtüsünün sonlu sayıdaki elemanlarının birleşimi olarak yazılabilir.

Sonuç 4.2 $(U, \mathcal{C})$ bir örtü yaklaşım uzayı ve $X, Y \subseteq U$ olsun. $\bar{\mathcal{C}}(X \cup Y) = \bar{\mathcal{C}}(X) \cup \bar{\mathcal{C}}(Y)$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{C}$ örtüsünün tekli örtü olmasıdır (Zhu, 2009).

Kanıt: Teorem 4.2 ve Önerme 4.3'ün doğal bir sonucudur. $\square$

Önerme 4.4 $(U, \mathcal{C})$ bir örtü yaklaşım uzayı ve $X, Y \subseteq U$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir (Zhu, 2009).

- i. $X \subseteq Y \Rightarrow \bar{\mathcal{C}}(X) \subseteq \bar{\mathcal{C}}(Y)$ dir.
- ii. Her $K_1, K_2 \in \mathcal{C}$ için $K_1 \cap K_2$ kesişiminin $\mathcal{C}$ örtüsünün sonlu sayıdaki elemanlarının birleşimi olarak yazılabilir.

Sonuç 4.3 $(U, \mathcal{C})$ bir örtü yaklaşım uzayı ve $X, Y \subseteq U$ olsun. $X \subseteq Y \Rightarrow \bar{\mathcal{C}}(X) \subseteq \bar{\mathcal{C}}(Y)$ önermesinin sağlanması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{C}$ örtüsünün tekli örtü olmasıdır (Zhu, 2009).

Kanıt: Teorem 4.2 ve Önerme 4.4 birleştirilerek kolayca elde edilir. $\square$

Şimdi kaba küme tanımını örtü kavramına bağlı olarak verelim.

Tanım 4.11 $(U, \mathcal{C})$ bir örtü yaklaşım uzayı ve $X, Y \subseteq U$ olsun. $\mathcal{P}(U)$ üzerinde bir $\sim_{\mathcal{C}}$ denklik bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlansın (Bonikowski vd., 1998).

$$X \sim_{\mathcal{C}} Y : \Leftrightarrow \mathcal{C}_*(X) = \mathcal{C}_*(Y) \wedge \mathcal{C}^*(X) = \mathcal{C}^*(Y)$$

X kümesinin denklik sınıfı aşağıdaki gibi tanımlanır.

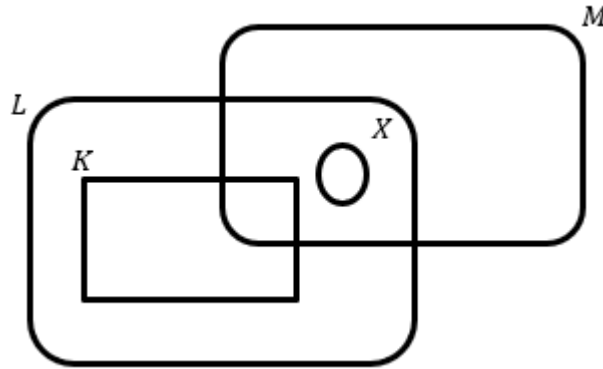
$$X_{\mathcal{C}} = [X] = \{Y \subseteq U : X \sim_{\mathcal{C}} Y\}$$

$X_{\mathcal{C}}$ ailesine X tarafından belirlenen kaba küme adı verilir.

$\mathcal{C}$ örtüsü tarafından üretilen tüm kaba kümelerin ailesini $R_s(U, \mathcal{C})$ ile gösterelim. O halde

$$R_s(U, \mathcal{C}) = \{X_{\mathcal{C}} : X \subseteq U\} \text{ dir.}$$

Örnek 4.6 $(U, \mathcal{C})$ bir örtü yaklaşım uzayı olsun (Bonikowski vd., 1998).



Şekil 4.1. Örtü yaklaşım uzayı

Şekil 4.1'deki gibi $U = K \cup L \cup M$ olmak üzere, U kümesinin bir $\mathcal{C} = \{K, L, M\}$ örtüsü verilsin. $X \subseteq (L \cap M) \setminus K$ ve $X \neq \emptyset$ olsun. O halde $\mathcal{C}_*(X) = \emptyset$, $Bn(X) = \{L, M\}$ ve $\mathcal{C}^*(X) =$

$\{L, M\}$ dir. Böylece X tarafından belirlenen kaba küme $X_{\mathcal{C}} = \{Y \subseteq U : Y \cap K = \emptyset \wedge Y \cap L \neq \emptyset \wedge Y \cap M \neq \emptyset\}$ olur.

Sonuç 4.4 $\mathcal{C}$ örtüsü U kümesinin bir ayrışımı olmak üzere, $(U, \mathcal{C})$ örtü yaklaşım uzayında her $X, Y \subseteq U$ için

$$X \sim_{\mathcal{C}} Y : \Leftrightarrow \underline{\mathcal{C}}(X) = \underline{\mathcal{C}}(Y) \wedge \overline{\mathcal{C}}(X) = \overline{\mathcal{C}}(Y) \text{ ve}$$

$$\underline{\mathcal{C}}(X) = \bigcup \{K \in \mathcal{C} : K \subseteq X\}, \overline{\mathcal{C}}(X) = \bigcup \{K \in \mathcal{C} : K \cap X \neq \emptyset\}$$

olur. Bu durum Pawlak anlamında yaklaşıma karşılık gelir (Bonikowski vd., 1998).

Sonuç 4.4 ile verilen kaba kümelerin yapısı bilgisayar bilimleri uygulamaları açısından tatmin edici değildir. Çünkü nesnelerin özellikleri hakkındaki bilgiyi dikkate almaz. Nesnelerin özellikleri hakkındaki bilgiyi kullanmamak Pawlak anlamında ayırtedilemez olarak kabul edilen bir kümenin $(U, \mathcal{C}_1)$ ve $(U, \mathcal{C}_2)$ uzaylarında küme ailelerinin farklı alt yaklaşımlarının ve üst yaklaşımlarının olduğu durumlara yol açabilir.

Örnek 4.7 $U = \{a, b, c, d\}$ kümesi, $\mathcal{C}_1 = \{\{a\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\}$ ve $\mathcal{C}_2 = \{\{a\}, \{b\}, \{a, c, d\}\}$ örtüleri verilsin. $\mathcal{C}_1$ örtüsüne göre her $x \in U$ için minimal tanımlayıcılar $Md(a) = \{\{a\}\}$, $Md(b) = \{\{a, b\}, \{b, c, d\}\}$, $Md(c) = \{\{b, c, d\}\}$ ve $Md(d) = \{\{b, c, d\}\}$ dir. O halde $c \approx_{\mathcal{C}_1} d$ dir. Böylece $U/\approx_{\mathcal{C}_1} = \{\{a\}, \{b\}, \{c, d\}\}$ elde edilir. $\mathcal{C}_2$ örtüsüne göre her $x \in U$ için minimal tanımlayıcılar $Md(a) = \{\{a\}\}$, $Md(b) = \{\{b\}\}$, $Md(c) = \{\{a, d, c\}\}$ ve $Md(d) = \{\{a, d, c\}\}$ dir. O halde $c \approx_{\mathcal{C}_2} d$ dir. Böylece $U/\approx_{\mathcal{C}_2} = \{\{a\}, \{b\}, \{c, d\}\}$ elde edilir. Fakat $X = \{a, c, d\} \subseteq U$ kümesi için $\underline{\mathcal{C}}_1(X) = \{a\} \neq \{a, c, d\} = \underline{\mathcal{C}}_2(X)$ ve $\overline{\mathcal{C}}_1(X) = \{a, b, c, d\} \neq \{a, c, d\} = \overline{\mathcal{C}}_2(X)$ olur.

5. ÖRTÜ TABANLI KABA KÜMELERİN BEŞ TÜRÜ VE BAĞINTI TABANLI KABA KÜMELER ARASINDAKİ İLİŞKİLER

Kaba küme teorisi, bilgi sistemlerinde belirsizlikle başa çıkmak için önemli bir matematiksel tekniktir. Bağıntı tabanlı kaba kümeler ve örtü tabanlı kaba kümeler, klasik kaba kümelerin iki önemli genelleştirilmesidir. Bu bölümde örtü tabanlı kaba kümelerin beş türü verilmiş ve bağıntı tabanlı kaba kümelerle aralarındaki ilişkiler incelenmiştir. İlk olarak örtü tabanlı kaba kümelerin beş türü ve bağıntı tabanlı kaba kümeler arasında denklikler belirlendi. Daha sonra iki farklı örtünün aynı yaklaşım operatörlerini oluşturabilmesi için gerekli koşullar incelendi. Ayrıca örtü tabanlı kaba kümelerin farklı türlerinin eşit olması için bazı gerek ve yeter koşullar verildi.

5.1. Örtü Tabanlı Kaba Kümelerin Beş Türü

Alt ve üst yaklaşım operatörleri ardıl komşuluklar yardımı ile tanımlanabilir.

Tanım 5.1.1 U kümesi üzerinde bir R bağıntısı verilsin ve $X \subseteq U$ olsun.

$$\underline{apr}_R : \mathcal{P}(U) \rightarrow \mathcal{P}(U), \underline{apr}_R(X) = \{x \in U : R_s(x) \subseteq X\}$$

olarak tanımlanan $\underline{apr}_R$ dönüşümüne alt yaklaşım operatörü, $\underline{apr}_R(X)$ kümesine de X in alt yaklaşımı denir (Yao, 1998).

Tanım 5.1.2 U kümesi üzerinde bir R bağıntısı verilsin ve $X \subseteq U$ olsun.

$$\overline{apr}_R : \mathcal{P}(U) \rightarrow \mathcal{P}(U), \overline{apr}_R(X) = \{x \in U : R_s(x) \cap X \neq \emptyset\}$$

ile verilen $\overline{apr}_R$ dönüşümüne üst yaklaşım operatörü, $\overline{apr}_R(X)$ kümesine de X in üst yaklaşımı adları verilir (Yao, 1998).

Tanım 5.1.3 U kümesinin bir örtüsü $\mathcal{C}$ ve $x \in U$ olsun (Zhu ve Wang, 2007; Zhang ve Luo, 2013).

- i. $\mathcal{C}_x = \{K \in \mathcal{C} : x \in K\}$ olmak üzere $\cup \mathcal{C}_x$ kümesine x elemanının ayırtedilemez komşuluğu denir ve $st(x, \mathcal{C})$ ile gösterilir.
- ii. $\cap \mathcal{C}_x$ kümesine x elemanının komşuluğu denir ve $(x)_{\mathcal{C}}$ ile gösterilir.
- iii. $\cup Md(x)$ kümesine x elemanının yakın dostları (close friends) denir ve $md(x)$ ile gösterilir.
- iv. Her $K \in \mathcal{C}$ ve $x \in K$ için $K \subseteq md(x)$ ise, $\mathcal{C}$ örtüsüne noktasal örtülmüştür denir.

Tanım 5.1.4 U kümesinin bir örtüsü $\mathcal{C}$ olsun. $\mathcal{C}$ örtüsünün herhangi bir K elemanı $\mathcal{C}$ içindeki diğer elemanların birleşimi şeklinde ifade edilebiliyorsa K ya $\mathcal{C}$ örtüsünün indirgenebilir elemanı, aksi taktirde indirgenemez elemanıdır denir. $\mathcal{C}$ örtüsünün bütün elemanları indirgenemezse $\mathcal{C}$ ye indirgenemez örtü, aksi taktirde indirgenebilir örtü adı verilir (Zhang ve Luo, 2013).

Tanım 5.1.5 U kümesinin bir örtüsü $\mathcal{C}$ olsun. $\mathcal{C}$ örtüsünün tüm indirgenebilir elemanları silinerek ya da çıkarılarak elde edilen indirgenemez örtüye $\mathcal{C}$ örtüsünün indirgemesi denir ve $reduct(\mathcal{C})$ ile gösterilir (Zhang ve Luo, 2013).

Örnek 5.1.1 $U = \{a, b, c, d\}$ olmak üzere, $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\}$ örtüsü verilsin. Öncelikle $x \in U$ olmak üzere, x elemanının minimal tanımlayıcıları $Md(a) = \{\{a\}\}$, $Md(b) = \{\{a, b\}, \{b, c, d\}\}$, $Md(c) = \{\{b, c, d\}\}$ ve $Md(d) = \{\{b, c, d\}\}$ olur. Şimdi her $x \in U$ elemanının ayırtedilemez komşuluğu olan $st(x, \mathcal{C})$ kümelerini belirleyelim. O halde $st(a, \mathcal{C}) = \{a, b\}$, $st(b, \mathcal{C}) = \{a, b, c, d\}$, $st(c, \mathcal{C}) = \{b, c, d\}$ ve $st(d, \mathcal{C}) = \{b, c, d\}$ dir. Ayrıca komşulukları da $(a)_c = \{a\}$, $(b)_c = \{b\}$, $(c)_c = \{b, c, d\}$ ve $(d)_c = \{b, c, d\}$ şeklinde ifade edilir. Verilen $\mathcal{C}$ örtüsüne göre, x elemanının yakın dostları $md(a) = \{a\}$, $md(b) = \{a, b, c, d\}$, $md(c) = \{b, c, d\}$ ve $md(d) = \{b, c, d\}$ olurlar. $|Md(b)| = 2$ olduğundan $\mathcal{C}$ örtüsü tekli değildir. $\mathcal{C}$ örtüsü noktasal örtülmemiştir. Gerçekten; $a \in \{a, b\}$ ve $\{a, b\} \in \mathcal{C}$ olmasına karşın $\{a, b\} \notin md(a)$ dir. Son olarak, $\mathcal{C}$ örtüsündeki her eleman indirgenemez olduğundan $\mathcal{C}$ örtüsü indirgenemezdir, yani $reduct(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ sağlanır.

Önerme 5.1.1 U kümesinin bir örtüsü $\mathcal{C}$ olsun. Herhangi $x, y \in U$ için aşağıdaki özellikler geçerlidir (Zhang ve Luo, 2013).

- i. $x \in (y)_c \Rightarrow (x)_c \subseteq (y)_c$,
- ii. $x \in st(y, \mathcal{C}) \Leftrightarrow y \in st(x, \mathcal{C})$,
- iii. $(x)_c = \cap Md(x)$.

Kanıt:

- i. $x \in (y)_c \Rightarrow x \in \cap \{K \in \mathcal{C} : y \in K\}$
 $\Rightarrow \forall K \in \mathcal{C} : y \in K \text{ için } x \in K \text{ dır.}$
 $\Rightarrow \cap \{S \in \mathcal{C} : x \in S\} \subseteq \cap \{K \in \mathcal{C} : y \in K\}$
 $\Rightarrow (x)_c \subseteq (y)_c$

$$\begin{aligned}
\text{ii. } x \in st(y, \mathcal{C}) &\Rightarrow x \in \bigcup \{K \in \mathcal{C} : y \in K\} \\
&\Rightarrow \exists K \in \mathcal{C} : y \in K \wedge x \in K \\
&\Rightarrow K \subseteq \bigcup \{S \in \mathcal{C} : x \in S\} \\
&\Rightarrow y \in \bigcup \{S \in \mathcal{C} : x \in S\} \\
&\Rightarrow y \in st(x, \mathcal{C})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y \in st(x, \mathcal{C}) &\Rightarrow y \in \bigcup \{K \in \mathcal{C} : x \in K\} \\
&\Rightarrow \exists K \in \mathcal{C} : x \in K \wedge y \in K \\
&\Rightarrow K \subseteq \bigcup \{S \in \mathcal{C} : y \in S\} \\
&\Rightarrow x \in \bigcup \{S \in \mathcal{C} : y \in S\} \\
&\Rightarrow x \in st(y, \mathcal{C})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{iii. } y \in (x)_c &\Leftrightarrow y \in \bigcap \{K \in \mathcal{C} : x \in K\} \\
&\Leftrightarrow \forall K \in \mathcal{C} : x \in K \text{ için } y \in K \text{ dır.} \\
&\Leftrightarrow y \in \bigcap \{M \in \mathcal{C} : x \in M \wedge (\forall S \in \mathcal{C}, x \in S \text{ ve } S \subseteq M \Rightarrow S = M)\} \\
&\Leftrightarrow y \in \bigcap Md(x) \quad \square
\end{aligned}$$

Tanım 5.1.6 $\mathcal{C}$, U 'nun bir örtüsü olsun. Örtü tabanlı üst ve alt yaklaşım operatörlerinin beş çifti her $X \subseteq U$ için aşağıdaki gibi tanımlanır (Zhang ve Luo, 2013).

$$\begin{aligned}
\text{i. } FH_{\mathcal{C}} : \mathcal{P}(U) &\rightarrow \mathcal{P}(U) \\
X &\mapsto FH_{\mathcal{C}}(X) = \{x \in U : (x)_c \cap X \neq \emptyset\} \\
FL_{\mathcal{C}} : \mathcal{P}(U) &\rightarrow \mathcal{P}(U) \\
X &\mapsto FL_{\mathcal{C}}(X) = \{x \in U : (x)_c \subseteq X\}, \\
\text{ii. } SH_{\mathcal{C}} : \mathcal{P}(U) &\rightarrow \mathcal{P}(U) \\
X &\mapsto SH_{\mathcal{C}}(X) = \bigcup \{(x)_c : x \in X\} \\
SL_{\mathcal{C}} : \mathcal{P}(U) &\rightarrow \mathcal{P}(U) \\
X &\mapsto SL_{\mathcal{C}}(X) = \{x \in U : \forall u [x \in (u)_c \Rightarrow u \in X]\}, \\
\text{iii. } TH_{\mathcal{C}} : \mathcal{P}(U) &\rightarrow \mathcal{P}(U) \\
X &\mapsto TH_{\mathcal{C}}(X) = \bigcup \{K : K \in \mathcal{C}, K \cap X \neq \emptyset\} = \bigcup \{st(x, \mathcal{C}) : x \in X\} \\
TL_{\mathcal{C}} : \mathcal{P}(U) &\rightarrow \mathcal{P}(U) \\
X &\mapsto TL_{\mathcal{C}}(X) = \{x : \forall K \in \mathcal{C}, x \in K \Rightarrow K \subseteq X\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{iv. } RH_{\mathcal{C}} : \mathcal{P}(U) &\rightarrow \mathcal{P}(U) \\
X &\mapsto RH_{\mathcal{C}}(X) = \bigcup \{md(x) : x \in X\} \\
RL_{\mathcal{C}} : \mathcal{P}(U) &\rightarrow \mathcal{P}(U) \\
X &\mapsto RL_{\mathcal{C}}(X) = U \setminus (RH_{\mathcal{C}}(U \setminus X)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{v. } LH_{\mathcal{C}} : \mathcal{P}(U) &\rightarrow \mathcal{P}(U) \\
X &\mapsto LH_{\mathcal{C}}(X) = \bigcup \{(x)_{\mathcal{C}} : (x)_{\mathcal{C}} \cap X \neq \emptyset, x \in U\} \\
LL_{\mathcal{C}} : \mathcal{P}(U) &\rightarrow \mathcal{P}(U) \\
X &\mapsto LL_{\mathcal{C}}(X) = U \setminus (LH_{\mathcal{C}}(U \setminus X)).
\end{aligned}$$

Örnek 5.1.2 $U = \{a, b, c, d\}$ olmak üzere, $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\}$ örtüsü verilsin.

$X = \{a, b, c\}$ kümesi için;

$$\begin{aligned}
FH_{\mathcal{C}}(X) &= \{a, b, c, d\}, FL_{\mathcal{C}}(X) = \{a, b\}, SH_{\mathcal{C}}(X) = \{a, b, c, d\}, SL_{\mathcal{C}}(X) = \{a\}, \\
TH_{\mathcal{C}}(X) &= \{a, b, c, d\}, TL_{\mathcal{C}}(X) = \{a\}, RH_{\mathcal{C}}(X) = \{a, b, c, d\}, RL_{\mathcal{C}}(X) = \{a\}, LH_{\mathcal{C}}(X) = \\
&\{a, b, c, d\}, LL_{\mathcal{C}}(X) = \{a\} \text{ olur.}
\end{aligned}$$

Önerme 5.1.2 U kümesinin bir örtüsü $\mathcal{C}$ olmak üzere, Tanım 5.1.6’da verilen örtü tabanlı yaklaşım operatörleri birer dual çift oluştururlar (Zhang ve Luo, 2013).

Kanıt: Tanım 5.1.6’da (iv) ve (v) ile verilen örtü tabanlı yaklaşım operatörlerinin dual çift oluşturdukları kolayca görülür. Sadece diğerlerinin gösterilmesi yeterlidir.

$$\begin{aligned}
\text{i. } U \setminus (FH_{\mathcal{C}}(U \setminus X)) &= U \setminus \{x \in U : (x)_{\mathcal{C}} \cap (U \setminus X) \neq \emptyset\} \\
&= U \setminus \{x \in U : \exists u \in (x)_{\mathcal{C}}, u \in (U \setminus X)\} \\
&= \{x \in U : \forall u \in (x)_{\mathcal{C}}, u \notin (U \setminus X)\} \\
&= \{x \in U : \forall u \in (x)_{\mathcal{C}} \Rightarrow u \in X\} \\
&= \{x \in U : (x)_{\mathcal{C}} \subseteq X\} \\
&= FL_{\mathcal{C}}(X).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ii. } U \setminus (SH_{\mathcal{C}}(U \setminus X)) &= U \setminus \{x : \exists u \in (U \setminus X), x \in (u)_{\mathcal{C}}\} \\
&= U \setminus \{x : \exists u \in (U \setminus X), x \in (u)_{\mathcal{C}}\} \\
&= \{x \in U : \forall u \in U, x \in (u)_{\mathcal{C}} \Rightarrow u \notin (U \setminus X)\} \\
&= \{x \in U : \forall u \in U, x \in (u)_{\mathcal{C}} \Rightarrow u \in X\} \\
&= SL_{\mathcal{C}}(X).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{iii. } U \setminus (TH_{\mathcal{C}}(U \setminus X)) &= U \setminus \{x : \exists K \in \mathcal{C}, K \cap (U \setminus X) \neq \emptyset, x \in K\} \\
&= \{x \in U : \forall K \in \mathcal{C}, x \in K \Rightarrow K \cap (U \setminus X) = \emptyset\} \\
&= \{x \in U : \forall K \in \mathcal{C}, x \in K \Rightarrow K \subseteq X\} \\
&= TL_{\mathcal{C}}(X). \quad \square
\end{aligned}$$

5.2. Örtü Tabanlı Kaba Kümelerin Birinci Türü ve Bağntı Tabanlı Kaba Kümeler Arasındaki İlişkiler

Tanım 5.2.1 U kümesinin bir örtüsü $\mathcal{C}$ olsun. U kümesi üzerinde bir $R^F(\mathcal{C})$ bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlanır (Xu ve Wang, 2005). Her $x, y \in U$ için

$$xR^F(\mathcal{C})y: \Leftrightarrow y \in (x)_{\mathcal{C}}.$$

Karışıklık olmadıkça $R^F(\mathcal{C})$ yerine kısaca $R(\mathcal{C})$ yazılacaktır.

Önerme 5.2.1 Tanım 5.2.1’de verilen $R(\mathcal{C})$ bağıntısı yansılmalı ve geçişlidir (Zhang ve Luo, 2013).

Kanıt: İlk önce $R(\mathcal{C})$ bağıntısının yansılmalı olduğunu gösterelim. Her $x \in U$ için $x \in (x)_{\mathcal{C}}$ olduğundan $xR(\mathcal{C})x$ olur. O halde $R(\mathcal{C})$ bağıntısı yansılalıdır. Şimdi de $R(\mathcal{C})$ bağıntısının geçişli olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\text{Herhangi } x, y, z \in U \text{ için } xR(\mathcal{C})y \wedge yR(\mathcal{C})z &\Rightarrow y \in (x)_{\mathcal{C}} \wedge z \in (y)_{\mathcal{C}} \\
&\Rightarrow (y)_{\mathcal{C}} \subseteq (x)_{\mathcal{C}} \wedge z \in (y)_{\mathcal{C}} \text{ (Önerme 5.1.1)} \\
&\Rightarrow z \in (x)_{\mathcal{C}} \\
&\Rightarrow xR(\mathcal{C})z
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $R(\mathcal{C})$ bağıntısı geçişlidir. $\square$

Aşağıda verilen teorem; $\mathcal{C}$ örtüsü ve $R(\mathcal{C})$ bağıntısından elde edilen kaba kümelerin aynı olduğunu ifade etmektedir. Yine aynı teoremden örtü tabanlı yaklaşım operatörlerinin birinci çiftinin, yansılmalı ve geçişli olan bir bağıntıdan elde edilen bağıntı tabanlı yaklaşım operatörleri gibi davrandığını öğreniyoruz.

Teorem 5.2.1 U kümesinin bir örtüsü $\mathcal{C}$ olsun. Her $X \subseteq U$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

- i. $\overline{apr}_{R(\mathcal{C})}(X) = FH_{\mathcal{C}}(X),$
- ii. $\underline{apr}_{R(\mathcal{C})}(X) = FL_{\mathcal{C}}(X)$ dir (Xu ve Wang, 2005).

Kanıt:

- i. Herhangi $x \in U$ için $x \in \overline{apr}_{R(\mathcal{C})}(X) \Leftrightarrow R(\mathcal{C})_s(x) \cap X \neq \emptyset$
- $$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \exists y \in U : y \in R(\mathcal{C})_s(x) \cap X \\ &\Leftrightarrow \exists y \in U : y \in R(\mathcal{C})_s(x) \wedge y \in X \\ &\Leftrightarrow \exists y \in U : xR(\mathcal{C})y \wedge y \in X \\ &\Leftrightarrow \exists y \in U : y \in (x)_c \wedge y \in X \\ &\Leftrightarrow \exists y \in U : y \in (x)_c \cap X \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow x \in FH_c(X) \end{aligned}$$

sağlanır. O halde $\overline{apr}_{R(\mathcal{C})}(X) = FH_c(X)$ dir.

- ii. Örtü tabanlı yaklaşım operatörlerinin birinci türü arasındaki dualite gereğince $\overline{apr}_{R(\mathcal{C})}(X) = FL_c(X)$ eşitliği kolayca elde edilir. $\square$

Önerme 5.2.1 ve Teorem 5.2.1 gereğince; örtü tabanlı yaklaşım operatörlerinin birinci türünün, yansımali ve geçişli olan bir bağıntıdan elde edilen bağıntı tabanlı yaklaşım operatörleri ile değiştirilebileceği bilgisine ulaşıyoruz.

Bir bağıntı verildiğinde örtüye dönüştürülebilir. Gerçekten, R bağıntısı ters serial olarak alınırsa, $\{R_s(x) : x \in U\}$ ailesi bir örtüdür.

Tanım 5.2.2 R , U üzerinde ters serial bir bağıntı olsun. $\mathcal{C}^F(R)$ örtüsü aşağıdaki gibi tanımlanır (Xu ve Wang, 2005).

$$\mathcal{C}^F(R) = \{R_s(x) : x \in U\}$$

Karışıklık olmadıkça $\mathcal{C}^F(R)$ yerine kısaca $\mathcal{C}(R)$ gösterimi kullanılacaktır.

Genellikle, R bağıntısı ve $\mathcal{C}(R)$ örtüsünden indirgenen bağıntı tabanlı kaba kümeler ve örtü tabanlı kaba kümeler aynı değildir.

Örnek 5.2.1 $U = \{a, b, c\}$ olmak üzere, $R = \{(a, b), (a, c), (b, a), (c, a), (c, b)\}$ bağıntısı verilsin. Öncelikle $x \in U$ olmak üzere, x elemanının öncül komşulukları $R_p(a) = \{b, c\}$, $R_p(b) = \{a, c\}$ ve $R_p(c) = \{a\}$ olur. Her $x \in U$ için $R_p(x) \neq \emptyset$ olduğundan R ters serial bir bağıntıdır. Şimdi her $x \in U$ elemanının ardıl komşuluklarını belirleyelim. $R_s(a) = \{b, c\}$, $R_s(b) = \{a\}$ ve $R_s(c) = \{a, b\}$ dir. O halde $\mathcal{C}(R) = \{\{b, c\}, \{a\}, \{a, b\}\}$ olur. Her $x \in$

U elemanının $\mathcal{C}(R)$ örtüsüne göre komşulukları $(a)_{\mathcal{C}(R)} = \{a\}$, $(b)_{\mathcal{C}(R)} = \{b\}$ ve $(c)_{\mathcal{C}(R)} = \{b, c\}$ dir. Sonuç olarak $\overline{apr}_R(\{a\}) = \{b, c\} \neq \{a\} = FH_{\mathcal{C}(R)}(\{a\})$ olur.

Teorem 5.2.2 R, U üzerinde yansımali ve geçişli bir bağıntı ise, her $X \subseteq U$ için

- i. $\overline{apr}_R(X) = FH_{\mathcal{C}(R)}(X)$,
- ii. $\underline{apr}_R(X) = FL_{\mathcal{C}(R)}(X)$ dir (Xu ve Wang, 2005; Zhu, 2009).

Kanıt:

- i. İlk olarak R yansımali ve geçişli bir bağıntı ise her $x \in U$ için $(x)_{\mathcal{C}(R)} = R_s(x)$ olduğunu gösterelim. R yansımali bir bağıntı olduğundan her $x \in U$ için $x \in R_s(x)$ dir. Tanım 5.2.2 gereğince $(x)_{\mathcal{C}(R)} = \bigcap \{R_s(y) : x \in R_s(y), y \in U\}$ olur. Buradan $(x)_{\mathcal{C}(R)} \subseteq R_s(x)$ dir. Tersine $x \in R_s(y)$ olsun. O halde yRx dir. Herhangi $z \in R_s(x)$ için xRz olur. R geçişli bir bağıntı olduğundan yRz yani $z \in R_s(y)$ olur. Böylece $R_s(x) \subseteq R_s(y)$ dir. Buradan $R_s(x) \subseteq (x)_{\mathcal{C}(R)}$ olur. O halde $(x)_{\mathcal{C}(R)} = R_s(x)$ eşitliği sağlanır. Şimdi de her $X \subseteq U$ için $\overline{apr}_R(X) = FH_{\mathcal{C}(R)}(X)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
 \forall x \in U \text{ için } x \in \overline{apr}_R(X) &\Leftrightarrow R_s(x) \cap X \neq \emptyset \\
 &\Leftrightarrow \exists y \in U : y \in R_s(x) \cap X \\
 &\Leftrightarrow \exists y \in U : y \in R_s(x) \wedge y \in X \\
 &\Leftrightarrow \exists y \in U : y \in (x)_{\mathcal{C}(R)} \wedge y \in X \\
 &\Leftrightarrow \exists y \in U : y \in (x)_{\mathcal{C}(R)} \cap X \neq \emptyset \\
 &\Leftrightarrow x \in FH_{\mathcal{C}(R)}(X)
 \end{aligned}$$

sağlanır. O halde $\overline{apr}_R(X) = FH_{\mathcal{C}(R)}(X)$ dir.

- ii. Örtü tabanlı yaklaşım operatörlerinin birinci türü arasındaki dualite gereğince $\underline{apr}_R(X) = FL_{\mathcal{C}(R)}(X)$ eşitliği kolayca elde edilir. $\square$

Aşağıda verilen teorem $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{C}(R(\mathcal{C}))$ örtülerinden elde edilen yaklaşım operatörleri arasındaki ilişkiyi ifade etmektedir.

Teorem 5.2.3 U kümesinin bir örtüsü $\mathcal{C}$ olsun. $\mathcal{C}(R(\mathcal{C}))$ ve $\mathcal{C}$ aynı örtü tabanlı alt ve üst yaklaşım operatörlerinin birinci çiftini üretir (Zhu, 2009).

Kanıt: Önerme 5.2.1'den $R(\mathcal{C})$ yansımali ve geçişli bir bağıntıdır. Teorem 5.2.2 gereğince $\overline{apr}_{R(\mathcal{C})} = FH_{\mathcal{C}(R(\mathcal{C}))}$ olur. Teorem 5.2.1 kullanılarak $\overline{apr}_{R(\mathcal{C})} = FH_{\mathcal{C}}$ eşitliği elde edilir. O halde $FH_{\mathcal{C}} = FH_{\mathcal{C}(R(\mathcal{C}))}$ dir.

Örtü tabanlı yaklaşım operatörlerinin birinci türü arasındaki dualite gereğince $FL_{\mathcal{C}} = FL_{\mathcal{C}(R(\mathcal{C}))}$ eşitliği kolayca elde edilir. $\square$

Teorem 5.2.4 R, U üzerinde ters serial bir bağıntı olsun. Aşağıdaki önermeler denktir (Zhu, 2009).

- i. R yansımali ve geçişlidir.
- ii. $R(\mathcal{C}(R)) = R$ dir.

Kanıt:

- (i) $\Rightarrow$ (ii) Herhangi $x, y \in U$ için xRy olsun. O halde $y \in R_s(x)$ dir. R yansımali ve geçişli bir bağıntı olduğundan Teorem 5.2.2 nin kanıtından $R_s(x) = (x)_{\mathcal{C}(R)}$ dir. Buradan $y \in (x)_{\mathcal{C}(R)}$ olur. Tanım 5.2.1 gereğince $xR(\mathcal{C}(R))y$ dir. O halde $R \subseteq R(\mathcal{C}(R))$ olur. Tersine herhangi $(x, y) \in R(\mathcal{C}(R))$ için $y \in (x)_{\mathcal{C}(R)} = R_s(x)$ dir. Buradan xRy olur. O halde $R(\mathcal{C}(R)) \subseteq R$ dir. Sonuç olarak $R(\mathcal{C}(R)) = R$ dir.
- (ii) $\Rightarrow$ (i) Önerme 5.2.1 gereğince $R(\mathcal{C}(R))$ bağıntısı yansımali ve geçişlidir. O halde $R = R(\mathcal{C}(R))$ bağıntısı yansımali ve geçişlidir. $\square$

Önerme 5.2.2 U kümesinin bir örtüsü $\mathcal{C}$ olsun. $\mathcal{C}(R(\mathcal{C})) = \{(x)_{\mathcal{C}} : x \in U\}$ dir.

Kanıt: Herhangi $x, y \in U$ için Tanım 5.2.1'den $y \in R(\mathcal{C})_s(x) \Leftrightarrow y \in (x)_{\mathcal{C}}$ dir. Buradan her $x \in U$ için $R(\mathcal{C})_s(x) = (x)_{\mathcal{C}}$ olur. O halde Tanım 5.2.2'den

$$\mathcal{C}(R(\mathcal{C})) = \{R(\mathcal{C})_s(x) : x \in U\} = \{(x)_{\mathcal{C}} : x \in U\} \text{ dir. } \square$$

Teorem 5.2.5 U kümesinin bir örtüsü $\mathcal{C}$ olsun. $\mathcal{C}$ örtüsünün tekli ve indirgenemez olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{C}(R(\mathcal{C})) = \mathcal{C}$ olmasıdır (Zhu, 2009).

Kanıt: ($\Rightarrow$) $K \in \mathcal{C}(R(\mathcal{C}))$ olsun. Önerme 5.2.2 gereğince $K = (x)_{\mathcal{C}}$ olacak şekilde bir $x \in U$ vardır. $\mathcal{C}$ örtüsü tekli olduğundan $Md(x) = \{K_x\}$ varsayımında bulunalım. Böylece $K = (x)_{\mathcal{C}} = \cap Md(x) = K_x \in \mathcal{C}$ olur. O halde $\mathcal{C}(R(\mathcal{C})) \subseteq \mathcal{C}$ dir. Tersine bir $K \in \mathcal{C}$ için $\mathcal{C}$ örtüsü

indirgenemez olduğundan $K \in Md(x)$ olacak biçimde bir $x \in K$ elemanı vardır. $\mathcal{C}$ örtüsü tekli olduğundan $Md(x) = \{K\}$ dır. Buradan $K = \cap Md(x) = (x)_c$ olur. Önerme 5.2.2'den $K \in \mathcal{C}(R(\mathcal{C}))$ dir. O halde $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}(R(\mathcal{C}))$ dir. Sonuç olarak $\mathcal{C}(R(\mathcal{C})) = \mathcal{C}$ eşitliği elde edilir. ($\Leftarrow$) Önerme 5.2.2 gereğince $\mathcal{C} = \mathcal{C}(R(\mathcal{C})) = \{(x)_c : x \in U\}$ dir. Bir $x \in U$ için $x \in K$ ve $K \in \mathcal{C}$ ise $(x)_c \subseteq K$ dır. $(x)_c \in \mathcal{C}$ olduğundan $Md(x) = \{(x)_c\}$ olur. O halde $\mathcal{C}$ örtüsü teklidir.

$\mathcal{C}$ örtüsünün indirgenebilir olduğunu varsayalım. O halde $(x)_c = \cup\{y_i \in U : i \in J\}$ ve $(y_i)_c \subset (x)_c$ olacak biçimde bir $x \in U$ elemanı ve $\{y_i \in U : i \in J\}$ kümesi vardır. Bu bir çelişkidir. Sonuç olarak $\mathcal{C}$ örtüsü indirgenemezdir. $\square$

5.3. Örtü Tabanlı Kaba Kümelerin İkinci Türü ve Bağıntı Tabanlı Kaba Kümeler Arasındaki İlişkiler

Tanım 5.3.1 U kümesinin bir örtüsü $\mathcal{C}$ olsun. U kümesi üzerinde $R^S(\mathcal{C})$ bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlanır (Zhang ve Luo, 2013).

$$\forall x, y \in U \text{ için } xR^S(\mathcal{C})y \Leftrightarrow x \in (y)_c$$

Karışıklık olmadıkça $R^S(\mathcal{C})$ yerine kısaca $R(\mathcal{C})$ gösterimi kullanılacaktır.

Önerme 5.3.1 Tanım 5.3.1'de verilen $R(\mathcal{C})$ bağıntısı yansılmalı ve geçişlidir (Zhang ve Luo, 2013).

Kanıt: İlk önce $R(\mathcal{C})$ bağıntısının yansılmalı olduğunu gösterelim. Her $x \in U$ için $x \in (x)_c$ olduğundan $xR(\mathcal{C})x$ olur. O halde $R(\mathcal{C})$ bağıntısı yansılalıdır. Şimdi de $R(\mathcal{C})$ bağıntısının geçişli olduğunu gösterelim.

Herhangi $x, y, z \in U$ için $xR(\mathcal{C})y \wedge yR(\mathcal{C})z \Rightarrow x \in (y)_c \wedge y \in (z)_c$

$$\Rightarrow (x)_c \subseteq (y)_c \wedge y \in (z)_c \text{ (Önerme 5.1.1)}$$

$$\Rightarrow x \in (z)_c$$

$$\Rightarrow xR(\mathcal{C})z$$

elde edilir. O halde $R(\mathcal{C})$ bağıntısı geçişlidir. $\square$

Aşağıda verilen teorem; $\mathcal{C}$ örtüsü ve $R(\mathcal{C})$ bağıntısından elde edilen kaba kümelerin aynı olduğunu ifade etmektedir. Yine aynı teoremden örtü tabanlı yaklaşım operatörlerinin ikinci çiftinin, yansılmalı ve geçişli olan bir bağıntıdan elde edilen bağıntı tabanlı yaklaşım operatörleri gibi davrandığını öğreniyoruz.

Teorem 5.3.1 U kümesinin bir örtüsü $\mathcal{C}$ olsun. Her $X \subseteq U$ için

- i. $\overline{apr}_{R(\mathcal{C})}(X) = SH_{\mathcal{C}}(X)$,
- ii. $\underline{apr}_{R(\mathcal{C})}(X) = SL_{\mathcal{C}}(X)$ dir (Zhang ve Luo, 2013).

Kanıt:

- i. Herhangi $x \in U$ için $x \in \overline{apr}_{R(\mathcal{C})}(X) \Leftrightarrow R(\mathcal{C})_s(x) \cap X \neq \emptyset$
 $\Leftrightarrow \exists y \in U : y \in R(\mathcal{C})_s(x) \cap X$
 $\Leftrightarrow \exists y \in U : y \in R(\mathcal{C})_s(x) \wedge y \in X$
 $\Leftrightarrow \exists y \in U : xR(\mathcal{C})y \wedge y \in X$
 $\Leftrightarrow \exists y \in U : x \in (y)_{\mathcal{C}} \wedge y \in X$
 $\Leftrightarrow x \in SH_{\mathcal{C}}(X)$

sağlanır. O halde $\overline{apr}_{R(\mathcal{C})}(X) = SH_{\mathcal{C}}(X)$ dir.

- ii. Örtü tabanlı yaklaşım operatörlerinin ikinci türü arasındaki dualite gereğince $\underline{apr}_{R(\mathcal{C})}(X) = SL_{\mathcal{C}}(X)$ eşitliği kolayca elde edilir. $\square$

Önerme 5.3.1 ve Teorem 5.3.1 gereğince; örtü tabanlı yaklaşım operatörlerinin ikinci türü, yansımali ve geçişli olan bir bağıntıdan elde edilen bağıntı tabanlı yaklaşım operatörleri ile değiştirilebilir.

Bir bağıntıyı bir örtüye dönüştürebiliriz. Gerçekten, R bağıntısı serial olarak alınırsa, $\{R_p(x) : x \in U\}$ ailesi bir örtüdür.

Tanım 5.3.2 R , U üzerinde serial bir bağıntı olsun. $\mathcal{C}^S(R)$ örtüsü aşağıdaki gibi tanımlanır (Zhang ve Luo, 2013).

$$\mathcal{C}^S(R) = \{R_p(x) : x \in U\}$$

Karışıklık olmadıkça $\mathcal{C}^S(R)$ yerine kısaca $\mathcal{C}(R)$ kullanılacaktır.

Genellikle, R bağıntısı ve $\mathcal{C}(R)$ örtüsünden indirgenen bağıntı tabanlı kaba kümeler ve örtü tabanlı kaba kümeler aynı değildir.

Örnek 5.3.1 $U = \{a, b, c\}$ olmak üzere, $R = \{(a, b), (a, c), (b, a), (c, a), (c, b)\}$ bağıntısı verilsin. Öncelikle $x \in U$ olmak üzere, x elemanının ardıl komşulukları $R_s(a) = \{b, c\}$, $R_s(b) = \{a\}$ ve $R_s(c) = \{a, b\}$ olur. Her $x \in U$ için $R_s(x) \neq \emptyset$ olduğundan R serial

bir bağıntıdır. Şimdi her $x \in U$ elemanının öncül komşuluklarını belirleyelim. $R_p(a) = \{b, c\}$, $R_p(b) = \{a, c\}$ ve $R_p(c) = \{a\}$ dir. O halde $\mathcal{C}(R) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{a\}\}$ olur. Her $x \in U$ elemanının $\mathcal{C}(R)$ örtüsüne göre komşulukları $(a)_{\mathcal{C}(R)} = \{a\}$, $(b)_{\mathcal{C}(R)} = \{b, c\}$, $(c)_{\mathcal{C}(R)} = \{c\}$ dir. Sonuç olarak $\overline{apr}_R(\{a\}) = \{b, c\} \neq \{a\} = SH_{\mathcal{C}(R)}(\{a\})$ olur (Zhang ve Luo, 2013).

Teorem 5.3.2 R, U üzerinde yansılmalı ve geçişli bir bağıntı ise her $X \subseteq U$ için

- i. $\overline{apr}_R(X) = SH_{\mathcal{C}(R)}(X)$,
- ii. $\underline{apr}_R(X) = SL_{\mathcal{C}(R)}(X)$ dir (Zhang ve Luo, 2013).

Kanıt:

- i. İlk olarak R yansılmalı ve geçişli bir bağıntı ise her $x \in U$ için $(x)_{\mathcal{C}(R)} = R_p(x)$ olduğunu gösterelim. R yansılmalı bir bağıntı olduğundan her $x \in U$ için $x \in R_p(x)$ dir. Tanım 5.3.2 gereğince $(x)_{\mathcal{C}(R)} = \cap \{R_p(y) : x \in R_p(y), y \in U\}$ olur. Buradan $(x)_{\mathcal{C}(R)} \subseteq R_p(x)$ dir. Tersine $x \in R_p(y)$ olsun. O halde xRy dir. Herhangi $z \in R_p(x)$ için zRx olur. R geçişli bir bağıntı olduğundan zRy yani $z \in R_p(y)$ olur. Böylece $R_p(x) \subseteq R_p(y)$ dir. Buradan $R_p(x) \subseteq (x)_{\mathcal{C}(R)}$ olur. O halde $(x)_{\mathcal{C}(R)} = R_p(x)$ eşitliği sağlanır. Şimdi de her $X \subseteq U$ için $\overline{apr}_R(X) = SH_{\mathcal{C}(R)}(X)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
 \forall x \in U \text{ için } x \in \overline{apr}_R(X) &\Leftrightarrow R_s(x) \cap X \neq \emptyset \\
 &\Leftrightarrow \exists y \in U : y \in R_s(x) \cap X \\
 &\Leftrightarrow \exists y \in U : x \in R_p(y) \wedge y \in X \\
 &\Leftrightarrow \exists y \in U : x \in (y)_{\mathcal{C}(R)} \wedge y \in X \\
 &\Leftrightarrow x \in SH_{\mathcal{C}(R)}(X)
 \end{aligned}$$

sağlanır. O halde $\overline{apr}_R(X) = SH_{\mathcal{C}(R)}(X)$ dir.

- ii. Örtü tabanlı yaklaşım operatörlerinin ikinci türü arasındaki dualite gereğince $\underline{apr}_R(X) = SL_{\mathcal{C}(R)}(X)$ eşitliği kolayca elde edilir. $\square$

Aşağıda verilen teorem $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{C}(R(\mathcal{C}))$ örtülerinden elde edilen yaklaşım operatörleri arasındaki ilişkiyi ifade etmektedir.

Teorem 5.3.3 U kümesinin bir örtüsü $\mathcal{C}$ olsun. $\mathcal{C}(R(\mathcal{C}))$ ve $\mathcal{C}$ aynı örtü tabanlı alt ve üst yaklaşım operatörlerinin ikinci çiftini üretir (Zhang ve Luo, 2013).

Kanıt: Önerme 5.3.1'den $R(\mathcal{C})$ yansımali ve geçişli bir bağıntıdır. Teorem 5.3.2 gereğince $\overline{apr}_{R(\mathcal{C})} = SH_{\mathcal{C}(R(\mathcal{C}))}$ olur. Teorem 5.3.1 kullanılarak $\overline{apr}_{R(\mathcal{C})} = SH_{\mathcal{C}}$ eşitliği elde edilir. Buradan $SH_{\mathcal{C}} = SH_{\mathcal{C}(R(\mathcal{C}))}$ olur.

Örtü tabanlı yaklaşım operatörlerinin ikinci türü arasındaki dualite gereğince $SL_{\mathcal{C}} = SL_{\mathcal{C}(R(\mathcal{C}))}$ eşitliği kolayca elde edilir. $\square$

Teorem 5.3.4 R, U üzerinde serial bir bağıntı olsun. Aşağıdaki önermeler denktir (Zhang ve Luo, 2013).

- i. R yansımali ve geçişlidir
- ii. $R(\mathcal{C}(R)) = R$ dir.

Kanıt:

- (i) $\Rightarrow$ (ii) Herhangi $x, y \in U$ için xRy olsun. O halde $x \in R_p(y)$ dir. R yansımali ve geçişli bir bağıntı olduğundan Teorem 5.3.2 nin kanıtından $R_p(y) = (y)_{\mathcal{C}(R)}$ dir. Buradan $x \in (y)_{\mathcal{C}(R)}$ olur. Tanım 5.3.1 gereğince $xR(\mathcal{C}(R))y$ dir. O halde $R \subseteq R(\mathcal{C}(R))$ olur. Tersine herhangi $(x, y) \in R(\mathcal{C}(R))$ için $x \in (y)_{\mathcal{C}(R)} = R_p(y)$ dir. Buradan xRy olur. O halde $R(\mathcal{C}(R)) \subseteq R$ dir. Sonuç olarak $R(\mathcal{C}(R)) = R$ dir.
- (ii) $\Rightarrow$ (i) Önerme 5.3.1 gereğince $R(\mathcal{C}(R))$ bağıntısı yansımali ve geçişlidir. O halde $R = R(\mathcal{C}(R))$ bağıntısı yansımali ve geçişlidir. $\square$

Önerme 5.3.2 U kümesinin bir örtüsü $\mathcal{C}$ olsun. $\mathcal{C}(R(\mathcal{C})) = \{(x)_{\mathcal{C}} : x \in U\}$ dir (Zhang ve Luo, 2013).

Kanıt: Herhangi $x, y \in U$ için Tanım 5.3.1 gereğince $y \in R(\mathcal{C})_p(x) \Leftrightarrow y \in (x)_{\mathcal{C}}$ eşdeğerliği sağlanır. Böylece her $x \in U$ için $R(\mathcal{C})_p(x) = (x)_{\mathcal{C}}$ olur. O halde Tanım 5.3.2'den $\mathcal{C}(R(\mathcal{C})) = \{R(\mathcal{C})_p(x) : x \in U\} = \{(x)_{\mathcal{C}} : x \in U\}$ dir. $\square$

Teorem 5.3.5 U kümesinin bir örtüsü $\mathcal{C}$ olsun. $\mathcal{C}$ örtüsünün tekli ve indirgenemez olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{C}(R(\mathcal{C})) = \mathcal{C}$ olmasıdır (Zhang ve Luo, 2013).

Kanıt: $(\Rightarrow)$ $K \in \mathcal{C}(R(\mathcal{C}))$ olsun. Önerme 5.3.2 gereğince $K = (x)_{\mathcal{C}}$ olacak şekilde bir $x \in U$ vardır. $\mathcal{C}$ örtüsü tekli olduğundan $Md(x) = \{K_x\}$ varsayımında bulunalım. Böylece $K = (x)_{\mathcal{C}} = \cap Md(x) = K_x \in \mathcal{C}$ olur. O halde $\mathcal{C}(R(\mathcal{C})) \subseteq \mathcal{C}$ dir. Tersine, bir $K \in \mathcal{C}$ için $\mathcal{C}$ örtüsü

indirgenemez olduğundan $K \in Md(x)$ olacak biçimde bir $x \in K$ elemanı vardır. $\mathcal{C}$ örtüsü tekli olduğundan $Md(x) = \{K\}$ dir. Buradan $K = \cap Md(x) = (x)_\mathcal{C}$ olur. Önerme 5.3.2'den $K \in \mathcal{C}(R(\mathcal{C}))$ dir. O halde $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}(R(\mathcal{C}))$ dir. Sonuç olarak $\mathcal{C}(R(\mathcal{C})) = \mathcal{C}$ eşitliği elde edilir. ($\Leftarrow$) Önerme 5.3.2 gereğince $\mathcal{C} = \mathcal{C}(R(\mathcal{C})) = \{(x)_\mathcal{C} : x \in U\}$ dir. Bir $x \in U$ için $x \in K$ ve $K \in \mathcal{C}$ ise $(x)_\mathcal{C} \subseteq K$ dir. $(x)_\mathcal{C} \in \mathcal{C}$ olduğundan $Md(x) = \{(x)_\mathcal{C}\}$ olur. O halde $\mathcal{C}$ örtüsü teklidir.

$\mathcal{C}$ örtüsünün indirgenebilir olduğunu varsayalım. O halde $(x)_\mathcal{C} = \cup\{(y_i)_\mathcal{C} \in U : i \in J\}$ ve $(y_i)_\mathcal{C} \subset (x)_\mathcal{C}$ olacak biçimde bir $x \in U$ elemanı ve $\{y_i \in U : i \in J\}$ kümesi vardır. Bu bir çelişkidir. Sonuç olarak $\mathcal{C}$ örtüsü indirgenemezdir. $\square$

5.4. Örtü Tabanlı Kaba Kümelerin Üçüncü Türü ve Bağlantı Tabanlı Kaba Kümeler Arasındaki İlişkiler

Tanım 5.4.1 U kümesinin bir örtüsü $\mathcal{C}$ olsun. U kümesi üzerinde bir $R^T(\mathcal{C})$ bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlanır (Zhang ve Luo, 2013).

$$\forall x, y \in U \text{ için } xR^T(\mathcal{C})y : \Leftrightarrow x \in st(y, \mathcal{C})$$

Karışıklık olmadıkça $R^T(\mathcal{C})$ yerine kısaca $R(\mathcal{C})$ kullanılacaktır.

Önerme 5.4.1 Tanım 5.4.1'de verilen $R(\mathcal{C})$ bağıntısı yansılmalı ve simetriktir (Zhang ve Luo, 2013).

Kanıt: İlk önce $R(\mathcal{C})$ bağıntısının yansılmalı olduğunu gösterelim. Her $x \in U$ için $x \in st(x, \mathcal{C})$ olduğundan $xR(\mathcal{C})x$ olur. O halde $R(\mathcal{C})$ bağıntısı yansılalıdır. Şimdi de $R(\mathcal{C})$ bağıntısının simetrik olduğunu gösterelim.

Herhangi $x, y \in U$ için $xR(\mathcal{C})y \Rightarrow x \in st(y, \mathcal{C})$

$$\Rightarrow \exists K \in \mathcal{C} : \{x, y\} \subseteq K$$

$$\Rightarrow y \in st(x, \mathcal{C})$$

$$\Rightarrow yR(\mathcal{C})x$$

elde edilir. O halde $R(\mathcal{C})$ bağıntısı simetriktir. $\square$

Aşağıda verilen teorem; $\mathcal{C}$ örtüsü ve $R(\mathcal{C})$ bağıntısından elde edilen kaba kümelerin aynı olduğunu ifade etmektedir. Yine aynı teoremden örtü tabanlı yaklaşım operatörlerinin üçüncü çiftinin, yansılmalı ve simetrik olan bir bağıntıdan elde edilen bağlantı tabanlı yaklaşım operatörleri gibi davrandığını öğreniyoruz.

Teorem 5.4.1 U kümesinin bir örtüsü $\mathcal{C}$ olsun. Her $X \subseteq U$ için

- i. $\overline{apr}_{R(\mathcal{C})}(X) = TH_{\mathcal{C}}(X)$,
- ii. $\underline{apr}_{R(\mathcal{C})}(X) = TL_{\mathcal{C}}(X)$ dir (Zhang ve Luo, 2013).

Kanıt:

- i. Herhangi $x \in U$ için $x \in \overline{apr}_{R(\mathcal{C})}(X) \Leftrightarrow R(\mathcal{C})_s(x) \cap X \neq \emptyset$
 $\Leftrightarrow \exists y \in U : y \in R(\mathcal{C})_s(x) \cap X$
 $\Leftrightarrow \exists y \in U : y \in R(\mathcal{C})_s(x) \wedge y \in X$
 $\Leftrightarrow \exists y \in U : xR(\mathcal{C})y \wedge y \in X$
 $\Leftrightarrow \exists y \in U : x \in st(y, \mathcal{C}) \wedge y \in X$
 $\Leftrightarrow x \in TH_{\mathcal{C}}(X)$

sağlanır. O halde $\overline{apr}_{R(\mathcal{C})}(X) = TH_{\mathcal{C}}(X)$ dir.

- ii. Örtü tabanlı yaklaşım operatörlerinin üçüncü türü arasındaki dualite gereğince $\underline{apr}_{R(\mathcal{C})}(X) = TL_{\mathcal{C}}(X)$ eşitliği kolayca elde edilir. $\square$

Önerme 5.4.1 ve Teorem 5.4.1 gereğince; örtü tabanlı yaklaşım operatörlerinin üçüncü türünün, yansılmalı ve simetrik olan bir bağıntıdan elde edilen bağıntı tabanlı yaklaşım operatörleri ile değiştirilebileceği bilgisine ulaşıyoruz.

Bir bağıntıyı bir örtüye dönüştürebiliriz. Gerçekten, R bağıntısı ters serial olarak alınırsa, $\{\{x, y\} : y \in R(\mathcal{C})_s(x), x \in U\}$ ailesi bir örtüdür.

Tanım 5.4.2 R , U üzerinde ters serial bir bağıntı olsun. $\mathcal{C}^T(R)$ örtüsü aşağıdaki gibi tanımlanır (Zhang ve Luo, 2013).

$$\mathcal{C}^T(R) = \{\{x, y\} : y \in R(\mathcal{C})_s(x), x \in U\}$$

Karışıklık olmadıkça $\mathcal{C}^T(R)$ yerine kısaca $\mathcal{C}(R)$ gösterimi kullanılacaktır.

Genellikle, R bağıntısı ve $\mathcal{C}(R)$ örtüsünden indirgenen bağıntı tabanlı kaba kümeler ve örtü tabanlı kaba kümeler aynı değildir.

Örnek 5.4.1 $U = \{a, b, c\}$ olmak üzere, $R = \{(a, a), (a, b), (b, c)\}$ bağıntısı verilsin. Öncelikle $x \in U$ olmak üzere, x elemanının öncül komşulukları $R_p(a) = \{a\}, R_p(b) = \{a\}$ ve $R_p(c) = \{b\}$ olur. Her $x \in U$ için $R_p(x) \neq \emptyset$ olduğundan R ters serial bir bağıntıdır. Şimdi her $x \in U$ elemanının ardıl komşuluklarını belirleyelim. $R_s(a) = \{a, b\}, R_s(b) = \{c\}$

ve $R_s(c) = \emptyset$ dir. O halde $\mathcal{C}(R) = \{\{a\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$ olur. Her $x \in U$ elemanının $\mathcal{C}(R)$ örtüsüne göre ayırtedilemez komşulukları $st(a, \mathcal{C}(R)) = \{a, b\}$, $st(b, \mathcal{C}(R)) = \{a, b, c\}$ ve $st(c, \mathcal{C}(R)) = \{b, c\}$ olur. Sonuç olarak $\overline{apr}_R(\{b\}) = \{a\} \neq \{a, b, c\} = TH_{\mathcal{C}(R)}(\{b\})$ olur (Zhang ve Luo, 2013).

Teorem 5.4.2 R, U üzerinde yansımali ve simetrik bir bağıntı ise her $X \subseteq U$ için

- i. $\overline{apr}_R(X) = TH_{\mathcal{C}(R)}(X)$,
- ii. $\underline{apr}_R(X) = TL_{\mathcal{C}(R)}(X)$ dir (Zhang ve Luo, 2013).

Kanıt:

- i. $x \in \overline{apr}_R(X)$ olsun. O halde $R_s(x) \cap X \neq \emptyset$ dir. $y \in R_s(x) \cap X$ alalım. Buradan $\{x, y\} \in \mathcal{C}(R)$ elde edilir. Böylece $y \in \{x, y\} \cap X \neq \emptyset$ olduğundan $x \in \{x, y\} \subseteq TH_{\mathcal{C}(R)}(X)$ olur. O halde $\overline{apr}_R(X) \subseteq TH_{\mathcal{C}(R)}(X)$ dir. Tersine herhangi $x \in TH_{\mathcal{C}(R)}(X)$ için $x \in K$ ve $K \cap X \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $K \in \mathcal{C}(R)$ vardır. $y \in K \cap X$ olsun. $y = x$ ise, R bağıntısı yansımali olduğundan $x \in R_s(x) \cap X \neq \emptyset$ olur. O halde $x \in \overline{apr}_R(X)$ dir. $y \neq x$ ise Tanım 5.4.2 gereğince $K = \{x, y\}$ olur. R bağıntısı simetrik olduğundan $y \in R_s(x)$ dir. Buradan $y \in R_s(x) \cap X \neq \emptyset$ olur. O halde $x \in \overline{apr}_R(X)$ dir. Bu durumda $TH_{\mathcal{C}(R)}(X) \subseteq \overline{apr}_R(X)$ dir. Sonuç olarak $\overline{apr}_R(X) = TH_{\mathcal{C}(R)}(X)$ olur.
- ii. Örtü tabanlı yaklaşım operatörlerinin üçüncü türü arasındaki dualite gereğince $\underline{apr}_R(X) = TL_{\mathcal{C}(R)}(X)$ eşitliği kolayca elde edilir. $\square$

Aşağıda verilen teorem $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{C}(R(\mathcal{C}))$ örtülerinden elde edilen yaklaşım operatörleri arasındaki ilişkiyi ifade etmektedir.

Teorem 5.4.3 U kümesinin bir örtüsü $\mathcal{C}$ olsun. $\mathcal{C}(R(\mathcal{C}))$ ve $\mathcal{C}$ örtü tabanlı alt ve üst yaklaşım operatörlerinin aynı üçüncü çiftini üretir (Zhang ve Luo, 2013).

Kanıt: Önerme 5.4.1'den $R(\mathcal{C})$ yansımali ve simetrik bir bağıntıdır. Teorem 5.4.2 gereğince $\overline{apr}_{R(\mathcal{C})} = TH_{\mathcal{C}(R(\mathcal{C}))}$ olur. Teorem 5.4.1 kullanılarak $\overline{apr}_{R(\mathcal{C})} = TH_{\mathcal{C}}$ eşitliği elde edilir. Buradan $TH_{\mathcal{C}} = TH_{\mathcal{C}(R(\mathcal{C}))}$ olur.

Örtü tabanlı yaklaşım operatörlerinin üçüncü türü arasındaki dualite gereğince $TL_{\mathcal{C}} = TL_{\mathcal{C}(R(\mathcal{C}))}$ eşitliği kolayca elde edilir. $\square$

Teorem 5.4.4 R, U üzerinde ters serial bir bağıntı olsun. Aşağıdaki önermeler denktir (Zhang ve Luo, 2013).

- i. R yansımali ve simetriktir.
- ii. $R(\mathcal{C}(R)) = R$ dir.

Kanıt:

- (i) $\Rightarrow$ (ii) Herhangi $(x, y) \in R$ için $y \in R_s(x)$ dir. Böylece Tanım 5.4.2'den $\{x, y\} \in \mathcal{C}(R)$ olur. Buradan $x \in st(y, \mathcal{C}(R))$ olduğu görülür. Tanım 5.4.1 gereğince $xR(\mathcal{C}(R))y$ dir. Buradan $R \subseteq R(\mathcal{C}(R))$ olur. Tersine herhangi $(x, y) \in R(\mathcal{C}(R))$ için $x = y$ ise, R bağıntısı yansımali olduğundan $(x, y) \in R$ dir. $x \neq y$ ise, Tanım 5.4.1'den $x \in st(y, \mathcal{C}(R))$ olur. O halde bir $K \in \mathcal{C}(R)$ vardır öyle ki $\{x, y\} \subseteq K$ dır. Böylece $\mathcal{C}(R)$ nin tanımından $K = \{x, y\}$ olur. Buradan $\{x, y\} \in \mathcal{C}(R)$ olduğu görülür. Bu durumda $y \in R_s(x)$ dir. O halde $(x, y) \in R$ olduğundan $R(\mathcal{C}(R)) \subseteq R$ olur. Sonuç olarak $R(\mathcal{C}(R)) = R$ dir.
- (ii) $\Rightarrow$ (i) Önerme 5.4.1 gereğince $R(\mathcal{C}(R))$ bağıntısı yansımali ve simetriktir. O halde $R = R(\mathcal{C}(R))$ bağıntısı yansımali ve simetriktir. $\square$

Teorem 5.4.5 U kümesinin bir örtüsü $\mathcal{C}$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir (Zhang ve Luo, 2013).

- i. $\mathcal{C}(R(\mathcal{C})) = \mathcal{C}$
- ii. Her $A \in \mathcal{C}$ için $|A| \leq 2$ ve $\{\{x\} : x \in U\} \subseteq \mathcal{C}$ dir.

Kanıt:

- (i) $\Rightarrow$ (ii) $\mathcal{C}(R(\mathcal{C})) = \mathcal{C}$ olduğundan Tanım 5.4.2'den her $A \in \mathcal{C}$ için $|A| \leq 2$ ve Önerme 5.4.1'den $R(\mathcal{C})$ bağıntısı yansımali olduğundan her $x \in U$ için $x \in R(\mathcal{C})_s(x)$ dir. O halde Tanım 5.4.2 gereğince $\{\{x\} : x \in U\} \subseteq \mathcal{C}$ dir.
- (ii) $\Rightarrow$ (i) Her $x \in U$ için $\{x\} \in \mathcal{C}$ olduğundan $x \in st(x, \mathcal{C})$ dir. Tanım 5.4.1'den $xR(\mathcal{C})x$ olur. Buradan $\{x\} \in \mathcal{C}(R(\mathcal{C}))$ dir. Şimdi de $\{x, y\} \in \mathcal{C}$ ve $x \neq y$ olduğunu kabul edelim. O halde $x \in st(y, \mathcal{C})$ dir. Böylece $xR(\mathcal{C})y$ olur. Buradan $\{x, y\} \in \mathcal{C}(R(\mathcal{C}))$ dir. O halde $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}(R(\mathcal{C}))$ olur. Tersine her $\{x, y\} \in \mathcal{C}(R(\mathcal{C}))$ için $x = y$ ise $\{x\} \in \mathcal{C}$ olduğu açıktır.

$x \neq y$ ise $yR(\mathcal{C})x$ dir. Buradan $y \in st(x, \mathcal{C})$ olur. O halde bir $K \in \mathcal{C}$ vardır öyle ki $\{x, y\} \subseteq K$ dir. Teoremin varsayımından $\{x, y\} = K$ olur. Buradan $\{x, y\} \in \mathcal{C}$ dir. O halde $\mathcal{C}(R(\mathcal{C})) \subseteq \mathcal{C}$ olur. Sonuç olarak $\mathcal{C}(R(\mathcal{C})) = \mathcal{C}$ dir. $\square$

5.5. Örtü Tabanlı Kaba Kümelerin Dördüncü Türü İçin Bağintı Tabanlı Kaba Kümelerin Temsilcisi

Tanım 5.5.1 U kümesinin bir örtüsü $\mathcal{C}$ olsun. U kümesi üzerinde bir $R^R(\mathcal{C})$ bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlanır (Zhang ve Luo, 2013).

$$\forall x, y \in U \text{ için } xR^R(\mathcal{C})y: \Leftrightarrow x \in md(y)$$

Karışıklık olmadıkça $R^R(\mathcal{C})$ yerine kısaca $R(\mathcal{C})$ gösterimi kullanılacaktır.

Önerme 5.5.1 Tanım 5.5.1’de verilen $R(\mathcal{C})$ bağıntısı yansımalıdır (Zhang ve Luo, 2013).

Kanıt: Her $x \in U$ için $x \in md(x)$ olduğundan $xR(\mathcal{C})x$ sağlanır. O halde $R(\mathcal{C})$ bağıntısı yansımalıdır. $\square$

Aşağıda verilen teorem; $\mathcal{C}$ örtüsü ve $R(\mathcal{C})$ bağıntısından elde edilen kaba kümelerin aynı olduğunu ifade etmektedir. Yine aynı teoremden örtü tabanlı yaklaşım operatörlerinin dördüncü çiftinin, yansımali olan bir bağıntıdan elde edilen bağıntı tabanlı yaklaşım operatörleri gibi davrandığını öğreniyoruz.

Teorem 5.5.1 U kümesinin bir örtüsü $\mathcal{C}$ olsun. Her $X \subseteq U$ için

- i. $\overline{apr}_{R(\mathcal{C})}(X) = RH_{\mathcal{C}}(X)$,
- ii. $\underline{apr}_{R(\mathcal{C})}(X) = RL_{\mathcal{C}}(X)$ dir (Zhang ve Luo, 2013).

Kanıt:

- i. Herhangi $x \in U$ için $x \in \overline{apr}_{R(\mathcal{C})}(X) \Leftrightarrow R(\mathcal{C})_s(x) \cap X \neq \emptyset$

$$\Leftrightarrow \exists y \in U : y \in R(\mathcal{C})_s(x) \cap X$$

$$\Leftrightarrow \exists y \in U : y \in R(\mathcal{C})_s(x) \wedge y \in X$$

$$\Leftrightarrow \exists y \in U : xR(\mathcal{C})y \wedge y \in X$$

$$\Leftrightarrow \exists y \in U : x \in md(y) \wedge y \in X$$

$$\Leftrightarrow x \in RH_{\mathcal{C}}(X)$$

sağlanır. O halde $\overline{apr}_{R(\mathcal{C})}(X) = RH_{\mathcal{C}}(X)$ dir.

- ii. Örtü tabanlı yaklaşım operatörlerinin dördüncü türü arasındaki dualite gereğince $\underline{apr}_{R(\mathcal{C})}(X) = RL_{\mathcal{C}}(X)$ eşitliği kolayca elde edilir. $\square$

Önerme 5.5.1 ve Teorem 5.5.1 gereğince; örtü tabanlı yaklaşım operatörlerinin dördüncü türü, yansılmalı olan bir bağıntıdan elde edilen bağıntı tabanlı yaklaşım operatörleri ile değiştirilebilir.

5.6. Örtü Tabanlı Kaba Kümelerin Beşinci Türü ve Bağıntı Tabanlı Kaba Kümeler Arasındaki İlişkiler

Tanım 5.6.1 U kümesinin bir örtüsü $\mathcal{C}$ olsun. U kümesi üzerinde bir $R^L(\mathcal{C})$ bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlanır (Zhang ve Luo, 2013). Her $x, y \in U$ için

$$xR^L(\mathcal{C})y: \Leftrightarrow \exists z \in U : \{x, y\} \subseteq (z)_{\mathcal{C}}.$$

Karışıklık olmadıkça $R^L(\mathcal{C})$ yerine kısaca $R(\mathcal{C})$ yazacağız.

$R(\mathcal{C})$ bağıntısının bazı özelliklerini verebilmek için $(*)$ özelliğini tanımlayalım.

Tanım 5.6.2 Bir $R \subseteq U \times U$ bağıntısı verilsin. Her $(x, y) \in U \times U$ için

$$xRy : \Leftrightarrow \exists z \in U : \{x, y\} \subseteq \bigcap \{R_s(w) : z \in R_s(w), w \in U\}$$

koşulunu gerçekleyen R bağıntısına $(*)$ özelliğini sağlıyor denir (Zhang ve Luo, 2013).

Önerme 5.6.1 R bağıntısı ters serial ve $(*)$ özelliğini sağlıyorsa yansılmalı ve simetriktir (Zhang ve Luo, 2013).

Kanıt: İlk önce R bağıntısının yansılmalı olduğunu gösterelim. Her $x \in U$ için R ters serial bir bağıntı olduğundan $R_p(x) \neq \emptyset$ dir. O halde $y \in R_p(x)$ olacak şekilde bir $y \in U$ elemanı vardır. Buradan yRx olur. R bağıntısı $(*)$ özelliğini sağladığından bir $z \in U$ ögesi için $\{x\} \subseteq \{x, y\} \subseteq \bigcap \{R_s(w) : z \in R_s(w), w \in U\}$ olur. O halde xRx dir ve R bağıntısı yansılalıdır. Şimdi de R bağıntısının simetrik olduğunu gösterelim. $x, y \in U$ olmak üzere xRy olduğunu varsayalım. R bağıntısı $(*)$ özelliğini sağladığından $\{x, y\} \subseteq \bigcap \{R_s(w) : z \in R_s(w), w \in U\}$ olacak biçimde bir $z \in U$ vardır. Buradan yRx dir. Sonuç olarak R bağıntısı simetriktir. $\square$

Önerme 5.6.2 U kümesinin bir örtüsü $\mathcal{C}$ olsun. $R(\mathcal{C})$ bağıntısı aşağıdaki özellikleri sağlar (Zhang ve Luo, 2013).

- i. $R(\mathcal{C})$ bağıntısı yansımalıdır.
- ii. $R(\mathcal{C})$ bağıntısı simetriktir.
- iii. Her $x, y \in U$ için $xR(\mathcal{C})y$ olması için gerek ve yeter koşul $R(\mathcal{C})$ bağıntısının “ $z \in U : \{x, y\} \subseteq \bigcap \{R(\mathcal{C})_s(w) : z \in R(\mathcal{C})_s(w), w \in U\}$ ” olan $(*)$ özelliğini sağlamasıdır.

Kanıt:

- i. Her $x \in U$ için $x \in (x)_c$ dir. O halde $xR(\mathcal{C})x$ dir. Buradan $R(\mathcal{C})$ bağıntısı yansımalıdır.
- ii. Tanım 5.6.1 gereğince her $x, y \in U$ için $xR(\mathcal{C})y$ ise $\{x, y\} \subseteq (z)_c$ olacak şekilde bir $z \in U$ vardır. Böylece $yR(\mathcal{C})x$ olur ve $R(\mathcal{C})$ bağıntısı simetriktir.
- iii. $(\Rightarrow)$ Tanım 5.6.1’den her $x, y \in U$ için $xR(\mathcal{C})y$ ise $\{x, y\} \subseteq (z)_c$ olacak şekilde bir $z \in U$ vardır. Herhangi $w \in U$ için $z \in R(\mathcal{C})_s(w)$ ise $\{z, w\} \subseteq (u)_c$ olacak şekilde bir $u \in U$ vardır. Buradan $(z)_c \subseteq (u)_c$ ve $w \in (u)_c$ olur. O halde $\{x, w\} \subseteq (u)_c$ ve $\{y, w\} \subseteq (u)_c$ dir. Tanım 5.6.1 gereğince $wR(\mathcal{C})x$ ve $wR(\mathcal{C})y$ olur. Buradan $\{x, y\} \subseteq R(\mathcal{C})_s(w)$ dir. O halde $\{x, y\} \subseteq \bigcap \{R(\mathcal{C})_s(w) : z \in R(\mathcal{C})_s(w), w \in U\}$ dir.
 $(\Leftarrow)$ $R(\mathcal{C})$ bağıntısı $(*)$ özelliğini sağlasın. O halde $\{x, y\} \subseteq \bigcap \{R(\mathcal{C})_s(w) : z \in R(\mathcal{C})_s(w), w \in U\}$ olacak şekilde bir $z \in U$ vardır. Herhangi bir $w_0 \in R(\mathcal{C})_s(z)$ için $R(\mathcal{C})$ bağıntısı simetrik olduğundan $z \in R(\mathcal{C})_s(w_0)$ dır ve $x \in R(\mathcal{C})_s(w_0)$ elde edilir. O halde $w_0 \in R(\mathcal{C})_s(x)$ dir. Böylece $R(\mathcal{C})_s(z) \subseteq R(\mathcal{C})_s(x)$ kapsamasına ulaşılır. $R(\mathcal{C})$ bağıntısı yansımali olduğundan $z \in R(\mathcal{C})_s(z)$ dir. Böylece $y \in \bigcap \{R(\mathcal{C})_s(w) : z \in R(\mathcal{C})_s(w), w \in U\} \subseteq R(\mathcal{C})_s(z) \subseteq R(\mathcal{C})_s(x)$ dir. O halde $xR(\mathcal{C})y$ dir. $\square$

Aşağıda verilen teorem; $\mathcal{C}$ örtüsü ve $R(\mathcal{C})$ bağıntısından elde edilen kaba kümelerin aynı olduğunu ifade etmektedir. Yine aynı teoremden örtü tabanlı yaklaşım operatörlerinin beşinci çiftinin, yansımali, simetrik ve $(*)$ özelliğini sağlayan bir bağıntıdan elde edilen bağıntı tabanlı yaklaşım operatörleri gibi davrandığını öğreniyoruz.

Teorem 5.6.1 U kümesinin bir örtüsü $\mathcal{C}$ olsun. Her $X \subseteq U$ için

- i. $\overline{apr}_{R(\mathcal{C})}(X) = LH_{\mathcal{C}}(X),$
- ii. $\underline{apr}_{R(\mathcal{C})}(X) = LL_{\mathcal{C}}(X)$ dir (Zhang ve Luo, 2013).

Kanıt:

- i. Herhangi $x \in U$ için $x \in \overline{apr}_{R(\mathcal{C})}(X) \Leftrightarrow R(\mathcal{C})_s(x) \cap X \neq \emptyset$
- $$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \exists y \in U : y \in R(\mathcal{C})_s(x) \cap X \\ &\Leftrightarrow \exists y \in U : y \in R(\mathcal{C})_s(x) \wedge y \in X \\ &\Leftrightarrow \exists y \in U : xR(\mathcal{C})y \wedge y \in X \\ &\Leftrightarrow \exists z \in U : \{x, y\} \subseteq (z)_c \wedge y \in X \\ &\Leftrightarrow \exists z \in U : y \in (z)_c \cap X \wedge x \in (z)_c \\ &\Leftrightarrow \exists z \in U : (z)_c \cap X \neq \emptyset \wedge x \in (z)_c \\ &\Leftrightarrow x \in LH_c(X) \end{aligned}$$

sağlanır. O halde $\overline{apr}_{R(\mathcal{C})}(X) = LH_c(X)$ dir.

- ii. Örtü tabanlı yaklaşım operatörlerinin beşinci türü arasındaki dualite gereğince $\underline{apr}_{R(\mathcal{C})}(X) = LL_c(X)$ eşitliği kolayca elde edilir. $\square$

Önerme 5.6.2 ve Teorem 5.6.1 gereğince; örtü tabanlı yaklaşım operatörlerinin beşinci türünün, yansımali, simetrik ve $(*)$ özelliğini sağlayan bir bağıntıdan elde edilen bağıntı tabanlı yaklaşım operatörleri ile değiştirilebileceği bilgisine ulaşıyoruz.

Bir bağıntıyı bir örtüye dönüştürebiliriz. Gerçekten, R bağıntısı ters serial olarak alınırsa, $\{R_s(x) : x \in U\}$ ailesi bir örtüdür.

Tanım 5.6.3 R , U üzerinde ters serial bir bağıntı olsun. $\mathcal{C}^L(R)$ örtüsü aşağıdaki gibi tanımlanır (Zhang ve Luo, 2013).

$$\mathcal{C}^L(R) = \{R_s(x) : x \in U\}$$

Karışıklık olmadıkça $\mathcal{C}^L(R)$ yerine kısaca $\mathcal{C}(R)$ yazacağız.

Genellikle, R bağıntısı ve $\mathcal{C}(R)$ örtüsünden indirgenen bağıntı tabanlı kaba kümeler ve örtü tabanlı kaba kümeler aynı değildir.

Örnek 5.6.1 $U = \{a, b, c\}$ olmak üzere, $R = \{(a, a), (a, b), (b, c)\}$ bağıntısı verilsin. Öncelikle $x \in U$ olmak üzere, x elemanının öncül komşulukları $R_p(a) = \{a\}$, $R_p(b) = \{a\}$ ve $R_p(c) = \{b\}$ olur. Her $x \in U$ için $R_p(x) \neq \emptyset$ olduğundan R ters serial bir bağıntıdır. Şimdi her $x \in U$ elemanının ardıl komşuluklarını belirleyelim. $R_s(a) = \{a, b\}$, $R_s(b) = \{c\}$ ve $R_s(c) = \emptyset$ dir. O halde $\mathcal{C}(R) = \{\{a, b\}, \{c\}\}$ olur. Her $x \in U$ elemanının $\mathcal{C}(R)$ örtüsüne

göre komşulukları $(a)_{\mathcal{C}(R)} = \{a, b\}$, $(b)_{\mathcal{C}(R)} = \{a, b\}$ ve $(c)_{\mathcal{C}(R)} = \{c\}$ olur. Sonuç olarak $\overline{apr}_R(\{b\}) = \{a\} \neq \{a, b\} = LH_{\mathcal{C}(R)}(\{b\})$ olur (Zhang ve Luo, 2013).

Teorem 5.6.2 R, U üzerinde ters serial bir bağıntı olsun. Aşağıdaki önermeler denktir (Zhang ve Luo, 2013).

- i. $R(\mathcal{C}(R)) = R$
- ii. R bağıntısı $(*)$ özelliğini sağlar.

Kanıt:

(i) $\Rightarrow$ (ii) $R(\mathcal{C}(R)) = R$ olsun. Önerme 5.6.2 gereğince R bağıntısı $(*)$ özelliğini sağlar. (ii) $\Rightarrow$ (i) R bağıntısı $(*)$ özelliğini sağlıyorsa her $(x, y) \in R$ için $\{x, y\} \subseteq \bigcap \{R_s(w) : z \in R_s(w), w \in U\}$ olacak şekilde bir $z \in U$ vardır. Tanım 5.6.3'den $\bigcap \{R_s(w) : z \in R_s(w), w \in U\} = (z)_{\mathcal{C}(R)}$ elde edilir. Buradan $\{x, y\} \subseteq (z)_{\mathcal{C}(R)}$ olur. O halde $(x, y) \in R(\mathcal{C}(R))$ dir. Böylece $R \subseteq R(\mathcal{C}(R))$ olur. Tersine her $(x, y) \in R(\mathcal{C}(R))$ için $\{x, y\} \subseteq (z)_{\mathcal{C}(R)} = \bigcap \{R_s(w) : z \in R_s(w), w \in U\}$ olacak şekilde bir $z \in U$ vardır. O halde $(*)$ özelliğinden $(x, y) \in R$ dir. Böylece $R(\mathcal{C}(R)) \subseteq R$ olur. Sonuç olarak $R(\mathcal{C}(R)) = R$ eşitliği elde edilir. $\square$

Sonuç 5.6.1 Eğer $R \subseteq U \times U$ ters serial bağıntısı $(*)$ özelliğini sağlıyorsa, aşağıda verilen eşitlikler sağlanır (Zhang ve Luo, 2013).

- i. $\overline{apr}_R = LH_{\mathcal{C}(R)}$,
- ii. $\underline{apr}_R = LL_{\mathcal{C}(R)}$ dir.

Kanıt:

- i. Teorem 5.6.2 gereğince $R(\mathcal{C}(R)) = R$ dir. Ayrıca Teorem 5.6.1'e göre $\overline{apr}_{R(\mathcal{C}(R))} = LH_{\mathcal{C}(R)}$ olur. O halde $\overline{apr}_R = LH_{\mathcal{C}(R)}$ dir.
- ii. Örtü tabanlı yaklaşım operatörlerinin beşinci türü arasındaki dualite gereğince $\underline{apr}_R = LL_{\mathcal{C}(R)}$ eşitliği elde edilir. $\square$

Tanım 5.6.4 U kümesinin bir örtüsü $\mathcal{C}$ ve $x \in K$ olmak üzere $K \in \mathcal{C}$ olsun. Her $y \in U$ için “ $y \in K \Leftrightarrow \{x, y\} \subseteq (u)_\mathcal{C}$ olacak şekilde bir $u \in U$ vardır” koşulu sağlanıyorsa, x elemanına K kümesinin $n - temsilci$ elemanı denir.

$\mathcal{C}$ örtüsünün her elemanı bir $n - temsilci$ elemana sahipse $\mathcal{C}$ örtüsüne $n - temsilci$ örtü adı verilir (Zhang ve Luo, 2013).

Örnek 5.6.2 $U = \{a, b, c, d\}$ olmak üzere, $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\}$ örtüsü verilsin. İlk olarak her $x \in U$ elemanının $\mathcal{C}$ örtüsüne göre komşuluklarını belirleyelim. $(a)_\mathcal{C} = \{a\}$, $(b)_\mathcal{C} = \{b\}$, $(c)_\mathcal{C} = \{b, c, d\}$ ve $(d)_\mathcal{C} = \{b, c, d\}$ dir. $a, b \in \{a, b\} \in \mathcal{C}$ dir. Ancak $\{a, b\} \subseteq (u)_\mathcal{C}$ olacak şekilde bir $u \in U$ elemanı bulunmadığından $\{a, b\} \in \mathcal{C}$ kümesinin $n - temsilci$ elemanı yoktur. Bu nedenle $\mathcal{C}$ örtüsü n -temsilci örtü değildir. Şimdi de $\{b, c, d\} \in \mathcal{C}$ elemanının bir $n - temsilci$ elemanını bulalım. $b, c \in \{b, c, d\}$ ve $b, d \in \{b, c, d\}$ dir. Ayrıca $\{b, c\}, \{b, d\} \subseteq (c)_\mathcal{C} = (d)_\mathcal{C}$ olduğu görülür. O halde b elemanı $\{b, c, d\}$ kümesinin bir $n - temsilci$ elemanıdır.

Önerme 5.6.3 U kümesinin bir örtüsü $\mathcal{C}$ olsun. Her $z \in U$ için $(z)_\mathcal{C} \subseteq (z)_{\mathcal{C}(R(\mathcal{C}))}$ dir (Zhang ve Luo, 2013).

Kanıt: Her $w \in U$ için $z \in R(\mathcal{C})_s(w)$ olsun. O halde $\{z, w\} \subseteq (u)_\mathcal{C}$ olacak şekilde bir $u \in U$ vardır. Buradan $(z)_\mathcal{C} \subseteq (u)_\mathcal{C}$ dir. Bundan dolayı herhangi $v \in (z)_\mathcal{C}$ için $\{v, w\} \subseteq (u)_\mathcal{C}$ olur. O halde $v \in R(\mathcal{C})_s(w)$ dir. Böylece $(z)_\mathcal{C} \subseteq R(\mathcal{C})_s(w)$ olur. Sonuç olarak $(z)_\mathcal{C} \subseteq \bigcap \{R(\mathcal{C})_s(w) : z \in R(\mathcal{C})_s(w), w \in U\} = (z)_{\mathcal{C}(R(\mathcal{C}))}$ elde edilir. $\square$

Önerme 5.6.4 U kümesinin bir örtüsü $\mathcal{C}$ olsun. $\mathcal{C}(R(\mathcal{C}))$ örtüsü $n - temsilci$ örtüdür ve $\mathcal{C}(R(\mathcal{C}))$ örtüsünün tüm $n - temsilci$ elemanlarının kümesi U dur (Zhang ve Luo, 2013).

Kanıt: İlk olarak $\mathcal{C}(R(\mathcal{C}))$ örtüsünün $n - temsilci$ örtü olduğunu gösterelim. Herhangi $K \in \mathcal{C}(R(\mathcal{C}))$ için Tanım 5.6.1 ve Tanım 5.6.3 gereğince $K = R(\mathcal{C})_s(x)$ olacak şekilde bir $x \in U$ vardır. O halde x elemanı K kümesinin $n - temsilci$ elemanıdır. Gerçekten Tanım 5.6.1’den her $y \in K$ için $\{x, y\} \subseteq (u)_\mathcal{C}$ olacak şekilde bir $u \in U$ vardır. Önerme 5.6.3’den $\{x, y\} \subseteq (u)_{\mathcal{C}(R(\mathcal{C}))}$ olur. Tersine $\{x, y\} \subseteq (u)_{\mathcal{C}(R(\mathcal{C}))} = \bigcap \{R(\mathcal{C})_s(w) : u \in R(\mathcal{C})_s(w), w \in U\}$ olacak şekilde bir $u \in U$ elemanı varsa, Önerme 5.6.2 (iii)’den $y \in R(\mathcal{C})_s(x) = K$ olur. Sonuç olarak $\mathcal{C}(R(\mathcal{C}))$ örtüsü $n - temsilci$ örtüdür. Şimdi de $\mathcal{C}(R(\mathcal{C}))$

örtüsünün tüm $n - temsilci$ elemanlarının kümesinin U olduğunu gösterelim. $\mathcal{C}(R(\mathcal{C})) = \{R(\mathcal{C})_s(x) : x \in U\}$ ve x elemanı $R(\mathcal{C})_s(x)$ kümesinin $n - temsilci$ elemanlarını olduğundan $\mathcal{C}(R(\mathcal{C}))$ örtüsünün tüm $n - temsilci$ elemanlarının kümesi U olur. $\square$

Teorem 5.6.3 U kümesinin bir örtüsü $\mathcal{C}$ olsun. $\mathcal{C}(R(\mathcal{C})) = \mathcal{C}$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{C}$ örtüsü $n - temsilci$ örtü ve $\mathcal{C}$ örtüsünün tüm $n - temsilci$ elemanlarının kümesinin U olmasıdır (Zhang ve Luo, 2013).

Kanıt: $(\Rightarrow)$ $\mathcal{C}(R(\mathcal{C})) = \mathcal{C}$ olsun. Önerme 5.6.4 gereğince $\mathcal{C}$ örtüsü $n - temsilci$ örtüdür ve $\mathcal{C}$ örtüsünün tüm $n - temsilci$ elemanlarının kümesi U dur.

$(\Leftarrow)$ $\mathcal{C}$ örtüsü $n - temsilci$ örtü olduğundan herhangi $K \in \mathcal{C}$ için bir $x \in K$ elemanının K kümesinin $n - temsilci$ elemanı olduğunu varsayalım. Tanım 5.6.1 ve Tanım 5.6.4'ten her $y \in U$ için $y \in K \Leftrightarrow \{x, y\} \subseteq (u)_c$ olacak şekilde bir $u \in U$ vardır $\Leftrightarrow y \in R(\mathcal{C})_s(x)$ dir. Buradan $K = R(\mathcal{C})_s(x) \in \mathcal{C}(R(\mathcal{C}))$ olur. O halde $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}(R(\mathcal{C}))$ dir. Tersine herhangi bir $R(\mathcal{C})_s(x) \in \mathcal{C}(R(\mathcal{C}))$ için x elemanı $\mathcal{C}$ örtüsünün $n - temsilci$ elemanı olduğundan, x elemanının $n - temsilci$ elemanı olduğu bir $K \in \mathcal{C}$ vardır. O halde her $y \in U$ için $y \in K \Leftrightarrow \{x, y\} \subseteq (u)_c$ olacak şekilde bir $u \in U$ vardır $\Leftrightarrow y \in R(\mathcal{C})_s(x)$ dir. Buradan $R(\mathcal{C})_s(x) = K \in \mathcal{C}$ olur. Böylece $\mathcal{C}(R(\mathcal{C})) \subseteq \mathcal{C}$ olur. Sonuç olarak $\mathcal{C}(R(\mathcal{C})) = \mathcal{C}$ dir. $\square$

$R^F(\mathcal{C}), R^S(\mathcal{C}), R^T(\mathcal{C}), R^R(\mathcal{C})$ ve $R^L(\mathcal{C})$ bağıntılarının sağladığı özellikler aşağıda Tablo 5.1 ile verilmiştir.

Tablo 5.1. Örtüden elde edilen bağıntıların sağladığı özellikler

	Yansıma	Simetri	Geçişme
$R^F(\mathcal{C})$	✓		✓
$R^S(\mathcal{C})$	✓		✓
$R^T(\mathcal{C})$	✓	✓	
$R^R(\mathcal{C})$	✓		
$R^L(\mathcal{C})$	✓	✓	

5.7. Aynı Örtü Tabanlı Yaklaşım Operatörlerini Üreten İki Farklı Örtü İçin Koşullar

Örtü tabanlı kaba küme teorisinde; farklı örtüler aynı örtü tabanlı alt ve üst yaklaşım operatörlerini üretebilirler. O halde iki örtünün hangi koşullar altında aynı örtü tabanlı alt ve üst yaklaşım operatörlerini üreteceği problemiyle ilgilenmek önem kazanmaktadır. Bu kesimde, bağıntı tabanlı yaklaşım operatörlerine özdeş olmayı sağlayan iki bağıntı için bir koşul verilecektir. Buna ek olarak; bağıntı tabanlı kaba kümeler bağlamında, iki örtü için koşullar aynı örtü tabanlı yaklaşım operatörlerini üretmek için elde edilecektir.

Teorem 5.7.1 U üzerinde R_1 ve R_2 bağıntıları verilsin. Aşağıdaki önermeler denktir (Zhang ve Luo, 2013).

- i. $\overline{apr}_{R_1} = \overline{apr}_{R_2}$.
- ii. $R_1 = R_2$.

Kanıt:

- (i) $\Rightarrow$ (ii) Her $x \in U$ için $(R_1)_p(x) = \overline{apr}_{R_1}(\{x\}) = \overline{apr}_{R_2}(\{x\}) = (R_2)_p(x)$ dir. O halde $R_1 = R_2$ olur.
- (ii) $\Rightarrow$ (i) $R_1 = R_2$ olsun. $\overline{apr}_{R_1} = \overline{apr}_{R_2}$ eşitliği açıktır. $\square$

Teorem 5.7.1 kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 5.7.1 U kümesinin iki örtüsü $\mathcal{C}_1$ ve $\mathcal{C}_2$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir (Zhang ve Luo, 2013).

- i. $FH_{\mathcal{C}_1} = FH_{\mathcal{C}_2}$.
- ii. Her $x \in U$ için $(x)_{\mathcal{C}_1} = (x)_{\mathcal{C}_2}$ dir.

Kanıt: $FH_{\mathcal{C}_1} = FH_{\mathcal{C}_2} \Leftrightarrow \overline{apr}_{R^F(\mathcal{C}_1)} = \overline{apr}_{R^F(\mathcal{C}_2)}$

$$\Leftrightarrow R^F(\mathcal{C}_1) = R^F(\mathcal{C}_2)$$

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in U \text{ için } xR^F(\mathcal{C}_1)y \text{ ancak ve ancak } xR^F(\mathcal{C}_2)y$$

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in U \text{ için } y \in (x)_{\mathcal{C}_1} \text{ ancak ve ancak } y \in (x)_{\mathcal{C}_2}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in U \text{ için } (x)_{\mathcal{C}_1} = (x)_{\mathcal{C}_2}. \square$$

Sonuç 5.7.2 U kümesinin iki örtüsü $\mathcal{C}_1$ ve $\mathcal{C}_2$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir (Zhu,2009).

- i. $SH_{\mathcal{C}_1} = SH_{\mathcal{C}_2}$.
- ii. Her $x \in U$ için $(x)_{\mathcal{C}_1} = (x)_{\mathcal{C}_2}$ dir.

Kanıt: $SH_{\mathcal{C}_1} = SH_{\mathcal{C}_2} \Leftrightarrow \overline{apr}_{R^S(\mathcal{C}_1)} = \overline{apr}_{R^S(\mathcal{C}_2)}$
 $\Leftrightarrow R^S(\mathcal{C}_1) = R^S(\mathcal{C}_2)$
 $\Leftrightarrow \forall x, y \in U$ için $yR^S(\mathcal{C}_1)x$ ancak ve ancak $yR^S(\mathcal{C}_2)x$
 $\Leftrightarrow \forall x, y \in U$ için $y \in (x)_{\mathcal{C}_1}$ ancak ve ancak $y \in (x)_{\mathcal{C}_2}$
 $\Leftrightarrow \forall x \in U$ için $(x)_{\mathcal{C}_1} = (x)_{\mathcal{C}_2}$. $\square$

Sonuç 5.7.3 U kümesinin iki örtüsü $\mathcal{C}_1$ ve $\mathcal{C}_2$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir (Zhang ve Luo, 2013).

- i. $TH_{\mathcal{C}_1} = TH_{\mathcal{C}_2}$.
- ii. Her $x \in U$ için $st(x, \mathcal{C}_1) = st(x, \mathcal{C}_2)$ dir.

Kanıt: $TH_{\mathcal{C}_1} = TH_{\mathcal{C}_2} \Leftrightarrow \overline{apr}_{R^T(\mathcal{C}_1)} = \overline{apr}_{R^T(\mathcal{C}_2)}$
 $\Leftrightarrow R^T(\mathcal{C}_1) = R^T(\mathcal{C}_2)$
 $\Leftrightarrow \forall x, y \in U$ için $yR^T(\mathcal{C}_1)x$ ancak ve ancak $yR^T(\mathcal{C}_2)x$
 $\Leftrightarrow \forall x, y \in U$ için $y \in st(x, \mathcal{C}_1)$ ancak ve ancak $y \in st(x, \mathcal{C}_2)$
 $\Leftrightarrow \forall x \in U$ için $st(x, \mathcal{C}_1) = st(x, \mathcal{C}_2)$. $\square$

Sonuç 5.7.4 U kümesinin iki örtüsü $\mathcal{C}_1$ ve $\mathcal{C}_2$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir (Zhu ve Wang, 2007).

- i. $RH_{\mathcal{C}_1} = RH_{\mathcal{C}_2}$.
- ii. Her $x \in U$ için $md_{\mathcal{C}_1}(x) = md_{\mathcal{C}_2}(x)$ dir.

Kanıt: $RH_{\mathcal{C}_1} = RH_{\mathcal{C}_2} \Leftrightarrow \overline{apr}_{R^R(\mathcal{C}_1)} = \overline{apr}_{R^R(\mathcal{C}_2)}$
 $\Leftrightarrow R^R(\mathcal{C}_1) = R^R(\mathcal{C}_2)$
 $\Leftrightarrow \forall x, y \in U$ için $yR^R(\mathcal{C}_1)x$ ancak ve ancak $yR^R(\mathcal{C}_2)x$
 $\Leftrightarrow \forall x, y \in U$ için $y \in md_{\mathcal{C}_1}(x)$ ancak ve ancak $y \in md_{\mathcal{C}_2}(x)$
 $\Leftrightarrow \forall x \in U$ için $md_{\mathcal{C}_1}(x) = md_{\mathcal{C}_2}(x)$. $\square$

Sonuç 5.7.5 U kümesinin iki örtüsü $\mathcal{C}_1$ ve $\mathcal{C}_2$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir (Zhang ve Luo, 2013).

- i. $LH_{\mathcal{C}_1} = LH_{\mathcal{C}_2}$.
- ii. Her $x \in U$ için $\bigcup \{(w)_{\mathcal{C}_1} : x \in (w)_{\mathcal{C}_1}, w \in U\} = \bigcup \{(v)_{\mathcal{C}_2} : x \in (v)_{\mathcal{C}_2}, v \in U\}$ dir.

Kanıt: $LH_{\mathcal{C}_1} = LH_{\mathcal{C}_2} \Leftrightarrow \overline{ap\overline{r}}_{R^L(\mathcal{C}_1)} = \overline{ap\overline{r}}_{R^L(\mathcal{C}_2)}$
 $\Leftrightarrow R^L(\mathcal{C}_1) = R^L(\mathcal{C}_2)$
 $\Leftrightarrow \forall x, y \in U$ için $xR^L(\mathcal{C}_1)y$ ancak ve ancak $xR^L(\mathcal{C}_2)y$
 $\Leftrightarrow \forall x, y \in U$ için $\exists w \in U : \{x, y\} \subseteq (w)_{\mathcal{C}_1}$ ancak ve ancak
 $\exists v \in U : \{x, y\} \subseteq (v)_{\mathcal{C}_2}$
 $\Leftrightarrow \forall x, y \in U$ için $y \in \{(w)_{\mathcal{C}_1} : x \in (w)_{\mathcal{C}_1}, w \in U\}$ ancak ve ancak
 $y \in \{(v)_{\mathcal{C}_2} : x \in (v)_{\mathcal{C}_2}, v \in U\}$
 $\Leftrightarrow \forall x \in U$ için
 $\bigcup \{(w)_{\mathcal{C}_1} : x \in (w)_{\mathcal{C}_1}, w \in U\} = \bigcup \{(v)_{\mathcal{C}_2} : x \in (v)_{\mathcal{C}_2}, v \in U\}.$

□

5.8. Örtü Tabanlı Kaba Kümeler Arasındaki İlişkiler

Bu kesimde, bağıntı tabanlı kaba kümeler kapsamında örtü tabanlı kaba kümelerin birbirleriyle olan ilişkileri üzerinde durulacaktır. Bu bağlamda, alt ve üst yaklaşım operatörleriyle çakışmasına ilişkin gerekli ve yeterli koşullar verilecektir.

Teorem 5.8.1 U kümesinin bir örtüsü $\mathcal{C}$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir (Qin vd., 2007).

- i. $FH_{\mathcal{C}} = SH_{\mathcal{C}}$ (ya da $FL_{\mathcal{C}} = SL_{\mathcal{C}}$).
- ii. $\{(x)_{\mathcal{C}} : x \in U\}$ ailesi U kümesinin bir ayrışımıdır.

Kanıt: $FH_{\mathcal{C}} = SH_{\mathcal{C}} \Leftrightarrow \overline{ap\overline{r}}_{R^F(\mathcal{C})} = \overline{ap\overline{r}}_{R^S(\mathcal{C})}$
 $\Leftrightarrow R^F(\mathcal{C}) = R^S(\mathcal{C})$
 $\Leftrightarrow \forall x, y \in U$ için $xR^F(\mathcal{C})y$ ancak ve ancak $xR^S(\mathcal{C})y$
 $\Leftrightarrow \forall x, y \in U$ için $y \in (x)_{\mathcal{C}}$ ancak ve ancak $x \in (y)_{\mathcal{C}}$
 $\Leftrightarrow \forall x, y \in U$ için $y \in (x)_{\mathcal{C}}$ ise $(x)_{\mathcal{C}} = (y)_{\mathcal{C}}$
 $\Leftrightarrow \forall x, y \in U$ için $(x)_{\mathcal{C}} \cap (y)_{\mathcal{C}} \neq \emptyset$ ise $(x)_{\mathcal{C}} = (y)_{\mathcal{C}}$

$\Leftrightarrow \{(x)_c : x \in U\}$ ailesi U kümesinin bir ayrışımıdır. $\square$

Teorem 5.8.2 U kümesinin bir örtüsü $\mathcal{C}$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir (Zhu, 2009).

- i. $FH_c = TH_c$ (ya da $FL_c = TL_c$).
- ii. $\mathcal{C}$ örtüsü U kümesinin bir ayrışımıdır.

Kanıt: $FH_c = TH_c \Leftrightarrow \overline{apr}_{R^F(\mathcal{C})} = \overline{apr}_{R^T(\mathcal{C})}$

$$\Leftrightarrow R^F(\mathcal{C}) = R^T(\mathcal{C})$$

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in U \text{ için } xR^F(\mathcal{C})y \text{ ancak ve ancak } xR^T(\mathcal{C})y$$

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in U \text{ için } y \in (x)_c \text{ ancak ve ancak } x \in st(y, \mathcal{C})$$

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in U \text{ için } y \in (x)_c \text{ ancak ve ancak } y \in st(x, \mathcal{C})$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in U \text{ için } (x)_c = st(x, \mathcal{C})$$

$$\Leftrightarrow \forall K_1, K_2 \in \mathcal{C} \text{ için } K_1 \cap K_2 \neq \emptyset \text{ ise } \forall x \in K_1 \cap K_2 \text{ için}$$

$$(x)_c = K_1 \cap K_2 = K_1 = K_2 = st(x, \mathcal{C})$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{C} \text{ örtüsü } U \text{ kümesinin bir ayrışımıdır. } \square$$

Teorem 5.8.3 U kümesinin bir örtüsü $\mathcal{C}$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir (Zhang ve Luo, 2013).

- i. $FH_c = RH_c$ (ya da $FL_c = RL_c$).
- ii. Her $x \in U$ için $|Md(x)| = 1$ ve $\{md(x) : x \in U\}$ ailesi U kümesinin bir ayrışımıdır.
- iii. $reduct(\mathcal{C})$ ailesi U kümesinin bir ayrışımıdır.

Kanıt:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Kanıtı iki adımda verelim. İlk olarak $|Md(x)| = 1$ olduğunu gösterelim. $FH_c = RH_c$ olsun. Tersine $|Md(x)| \neq 1$ olacak şekilde bir $x \in U$ elemanı olduğunu varsayalım. O halde $\{K_1, K_2\} \subseteq Md(x)$ ve $K_1 \neq K_2$ olacak şekilde $K_1, K_2 \in \mathcal{C}$ kümeleri vardır. Minimal tanımlayıcı tanımından $K_1 \not\subseteq K_2$ ve $K_2 \not\subseteq K_1$ dir. Buradan $y \in K_2 \setminus K_1$ olacak şekilde bir $y \in U$ elemanı vardır. Böylece $y \in K_2 \subseteq md(x)$ ve $y \notin (x)_c \subseteq K_1$ olur. Varsayım gereğince $RH_c(\{x\}) = md(x) = FH_c(\{x\})$ dir. O halde $y \in FH_c(\{x\})$ dir. Bu durumda $(y)_c \cap \{x\} \neq \emptyset$ olur. O halde $x \in (y)_c$ dir. $(y)_c \subseteq md(y)$ olduğundan $x \in md(y)$ dir. Tanım 5.5.1'den $xR^R(\mathcal{C})y$ olur. Teorem 5.2.1 ve Teorem 5.5.1 kullanılarak $\overline{apr}_{R^F(\mathcal{C})} = \overline{apr}_{R^R(\mathcal{C})}$ eşitliği elde edilir. Teorem 5.7.1'den $R^F(\mathcal{C}) = R^R(\mathcal{C})$

olur. O halde $xR^F(\mathcal{C})y$ dir. Tanım 5.2.1 gereğince $y \in (x)_c$ dir. Bu da $y \notin (x)_c$ olması ile çelişir. Sonuç olarak $|Md(x)| = 1$ dir.

Şimdi de kanıtın ikinci bölümü için $\{md(x) : x \in U\}$ ailesinin U kümesinin bir ayrışımı olduğunu gösterelim. Bunun için $\{md(x) : x \in U\}$ ailesinin U kümesinin bir ayrışımı olmadığını varsayalım. O halde $md(x_1) \neq md(x_2)$ ve $md(x_1) \cap md(x_2) \neq \emptyset$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in U$ elemanları vardır. Her $x \in U$ için $|Md(x)| = 1$ olduğundan $Md(x_1) = \{K_1\}$ ve $Md(x_2) = \{K_2\}$ olduğunu varsayalım. O halde $K_1 = md(x_1) \neq md(x_2) = K_2$ dir. Eğer $K_1 \subseteq K_2$ ise $x_2 \notin K_1$ dir. Aksi taktirde $md(x_2) = K_1$ olur ki bu bir çelişkidir. $x_1 \in K_1 \subseteq K_2 = md(x_2)$ dir. Tanım 5.5.1'den $(x_1, x_2) \in R^R(\mathcal{C})$ dir. $x_2 \notin K_1 = md(x_1) \supseteq (x_1)_c$ olduğundan Tanım 5.2.1 gereğince $(x_1, x_2) \notin R^F(\mathcal{C})$ olur. Bu da $R^F(\mathcal{C}) = R^R(\mathcal{C})$ olması ile çelişir. Bu durumda $K_1 \not\subseteq K_2$ dir. Benzer şekilde $K_2 \not\subseteq K_1$ olduğu kolayca görülür. O halde $Md(x_1) = \{K_1\}$ ve $Md(x_2) = \{K_2\}$ olduğundan $x_1 \notin K_1 \cap K_2$ ve $x_2 \notin K_1 \cap K_2$ dir. $y \in K_1 \cap K_2$ olsun. $|Md(y)| = 1$ olduğundan $Md(y) = K_3$ ve $K_3 \subseteq K_1 \cap K_2$ olacak şekilde bir $K_3 \in \mathcal{C}$ kümesi vardır. Buradan $x_1 \notin K_3 = md(y) \supseteq (y)_c$ olur. O halde $(y, x_1) \notin R^F(\mathcal{C})$ dir. $R^F(\mathcal{C}) = R^R(\mathcal{C})$ olduğundan $(y, x_1) \notin R^R(\mathcal{C})$ dir. Bu durumda $y \notin md(x_1) = K_1 \supseteq K_3$ olur. Bu da $y \in K_3$ olması ile çelişir. Sonuç olarak $\{md(x) : x \in U\}$ ailesi U kümesinin bir ayrışımıdır.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Her $x \in U$ için $|Md(x)| = 1$ ve $\{md(x) : x \in U\}$ ailesi U kümesinin bir ayrışımı olsun. Her $K \in reduct(\mathcal{C})$ için $K \in Md(x)$ olacak şekilde bir $x \in K$ elemanı vardır. $reduct(\mathcal{C})$ ailesinin U kümesinin bir ayrışımı olmadığını varsayalım. $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$ ve $K_1 \neq K_2$ olacak şekilde $K_1, K_2 \in reduct(\mathcal{C})$ kümeleri vardır. O halde $K_1 \in Md(x_1)$ ve $K_2 \in Md(x_2)$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in U$ elemanları vardır. Teoremin varsayımından $\{K_1\} = Md(x_1)$ ve $\{K_2\} = Md(x_2)$ dir. Bu durumda $md(x_1) \cap md(x_2) \neq \emptyset$ ve $md(x_1) \neq md(x_2)$ olur. Bu da $\{md(x) : x \in U\}$ ailesinin U kümesinin bir ayrışımı olması ile çelişir. Sonuç olarak $reduct(\mathcal{C})$ ailesi U kümesinin bir ayrışımıdır.

(iii) $\Rightarrow$ (i) $reduct(\mathcal{C})$ ailesi U kümesinin bir ayrışımı olsun. O halde her $x \in U$ için $md(x) = (x)_c$ dir. Bu durumda $\{(x)_c : x \in U\} = reduct(\mathcal{C})$ ailesi U kümesinin bir ayrışımıdır. Buradan her $x, y \in U$ için

$$y \in (x)_c \Leftrightarrow (x)_c = (y)_c \Leftrightarrow md(x) = md(y) \Leftrightarrow x \in md(y)$$

olur. O halde

$$(x, y) \in R^F(\mathcal{C}) \Leftrightarrow (x, y) \in R^R(\mathcal{C})$$

sağlanır. Buradan $R^F(\mathcal{C}) = R^R(\mathcal{C})$ elde edilir. Sonuç olarak $\overline{apr}_{R^F(\mathcal{C})} = FH_c = RH_c = \overline{apr}_{R^R(\mathcal{C})}$ dir. $\square$

Teorem 5.8.4 U kümesinin bir örtüsü $\mathcal{C}$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir (Qin vd., 2007).

- i. $FH_{\mathcal{C}} = LH_{\mathcal{C}}$ (ya da $FL_{\mathcal{C}} = LL_{\mathcal{C}}$).
- ii. $\{(x)_{\mathcal{C}} : x \in U\}$ ailesi U kümesinin bir ayrışımıdır.

Kanıt: $FH_{\mathcal{C}} = LH_{\mathcal{C}} \Leftrightarrow \overline{apr}_{R^F(\mathcal{C})} = \overline{apr}_{R^L(\mathcal{C})}$

$$\Leftrightarrow R^F(\mathcal{C}) = R^L(\mathcal{C})$$

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in U \text{ için } xR^F(\mathcal{C})y \text{ ancak ve ancak } xR^L(\mathcal{C})y$$

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in U \text{ için } y \in (x)_{\mathcal{C}} \text{ ancak ve ancak}$$

$$y \in \bigcup \{(z)_{\mathcal{C}} : x \in (z)_{\mathcal{C}}, z \in U\}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in U \text{ için } (x)_{\mathcal{C}} = \bigcup \{(z)_{\mathcal{C}} : x \in (z)_{\mathcal{C}}, z \in U\}$$

$$\Leftrightarrow \forall x, z \in U \text{ için } x \in (z)_{\mathcal{C}} \text{ ise } (z)_{\mathcal{C}} \subseteq (x)_{\mathcal{C}}$$

$$\Leftrightarrow \forall x, z \in U \text{ için } x \in (z)_{\mathcal{C}} \text{ ancak ve ancak } (x)_{\mathcal{C}} = (z)_{\mathcal{C}}$$

$$\Leftrightarrow \forall x, z \in U \text{ için } (x)_{\mathcal{C}} \cap (z)_{\mathcal{C}} \neq \emptyset \text{ ise } (x)_{\mathcal{C}} = (z)_{\mathcal{C}}$$

$$\Leftrightarrow \{(x)_{\mathcal{C}} : x \in U\} \text{ ailesi } U \text{ kümesinin bir ayrışımıdır. } \square$$

Teorem 5.8.5 U kümesinin bir örtüsü $\mathcal{C}$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir (Zhang ve Luo, 2013).

- i. $SH_{\mathcal{C}} = TH_{\mathcal{C}}$ (ya da $SL_{\mathcal{C}} = TL_{\mathcal{C}}$).
- ii. $\mathcal{C}$ örtüsü U kümesinin bir ayrışımıdır.

Kanıt:

(i) $\Rightarrow$ (ii) $SH_{\mathcal{C}} = TH_{\mathcal{C}}$ olduğunu varsayalım. Teorem 5.3.1 ve Teorem 5.4.1 gereğince $\overline{apr}_{R^S(\mathcal{C})} = \overline{apr}_{R^T(\mathcal{C})}$ dir. O halde Teorem 5.7.1'den $R^S(\mathcal{C}) = R^T(\mathcal{C})$ olur. Buradan her $x, y \in U$ için

$$x \in (y)_{\mathcal{C}} \Leftrightarrow xR^S(\mathcal{C})y \Leftrightarrow xR^T(\mathcal{C})y \Leftrightarrow x \in st(y, \mathcal{C}) \Leftrightarrow y \in st(x, \mathcal{C})$$

eşdeğer ifadeleri elde edilir. Şimdi $\mathcal{C}$ örtüsünün U kümesinin bir ayrışımı olmadığını varsayalım. O halde $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$ ve $K_1 \neq K_2$ olacak şekilde $K_1, K_2 \in \mathcal{C}$ kümeleri vardır. Genelliği bozmayacağından $K_1 \not\subseteq K_2$ olduğunu kabul edelim. $x \in K_1 \setminus K_2$ ve $y \in K_1 \cap K_2$ olsun. O halde $y \in st(x, \mathcal{C})$ ve $x \notin (y)_{\mathcal{C}} \subseteq K_2$ dir. Bu bir çelişkidir. Sonuç olarak $\mathcal{C}$ örtüsü U kümesinin bir ayrışımıdır.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $\mathcal{C}$ örtüsü U kümesinin bir ayrışımı ise $SH_{\mathcal{C}} = TH_{\mathcal{C}}$ olduğu kolayca görülür. $\square$

Teorem 5.8.6 U kümesinin bir örtüsü $\mathcal{C}$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir (Zhang ve Luo, 2013).

- i. $SH_{\mathcal{C}} = RH_{\mathcal{C}}$ (ya da $SL_{\mathcal{C}} = RL_{\mathcal{C}}$).
- ii. Her $x \in U$ için $|Md(x)| = 1$ dir.

Kanıt:

(i) $\Rightarrow$ (ii) $SH_{\mathcal{C}} = RH_{\mathcal{C}}$ olsun. Tersine $|Md(x)| \neq 1$ olacak şekilde bir $x \in U$ elemanı bulunduğunu varsayalım. Bu durumda $K_1 \not\subseteq K_2$ ve $K_2 \not\subseteq K_1$ olacak şekilde $K_1, K_2 \in Md(x)$ kümeleri vardır. $y \in K_1 \setminus K_2$ olsun. O halde $K_1 \subseteq md(x)$ ve $(x)_{\mathcal{C}} \subseteq K_2$ olduğundan $y \in md(x)$ ve $y \notin (x)_{\mathcal{C}}$ dir. Böylece Tanım 5.3.1 ve Tanım 5.5.1 gereğince $(y, x) \in R^R(\mathcal{C})$ ve $y \notin R^S(\mathcal{C})$ olur. O halde $R^S(\mathcal{C}) \neq R^R(\mathcal{C})$ dir. Teorem 5.7.1'den $\overline{apr}_{R^S(\mathcal{C})} \neq \overline{apr}_{R^R(\mathcal{C})}$ dir. Teorem 5.3.1 ve Teorem 5.5.1 gereğince $SH_{\mathcal{C}} \neq RH_{\mathcal{C}}$ olur. Bu ise $SH_{\mathcal{C}} = RH_{\mathcal{C}}$ olması ile çelişir. Sonuç olarak her $x \in U$ için $|Md(x)| = 1$ dir.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Her $x \in U$ için $|Md(x)| = 1$ olsun. O halde $(x)_{\mathcal{C}} = \cap Md(x) = \cup Md(x) = md(x)$ dir. Buradan her $y \in U$ için $y \in (x)_{\mathcal{C}}$ olması için gerek ve yeter koşul $y \in md(x)$ olması elde edilir. O halde her $x, y \in U$ için $(y, x) \in R^S(\mathcal{C})$ olması için gerek ve yeter koşul $(y, x) \in R^R(\mathcal{C})$ olmasıdır. Buradan $R^S(\mathcal{C}) = R^R(\mathcal{C})$ dir. Teorem 5.3.1, Teorem 5.5.1 ve Teorem 5.7.1 gereğince $SH_{\mathcal{C}} = \overline{apr}_{R^S(\mathcal{C})} = \overline{apr}_{R^R(\mathcal{C})} = RH_{\mathcal{C}}$ olur. $\square$

Teorem 5.8.7 U kümesinin bir örtüsü $\mathcal{C}$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir (Qin vd., 2007)

- i. $SH_{\mathcal{C}} = LH_{\mathcal{C}}$ (ya da $SL_{\mathcal{C}} = LL_{\mathcal{C}}$).
- ii. $\{(x)_{\mathcal{C}} : x \in U\}$ ailesi U kümesinin bir ayrışımıdır.

Kanıt: $SH_{\mathcal{C}} = LH_{\mathcal{C}} \Leftrightarrow \overline{apr}_{R^S(\mathcal{C})} = \overline{apr}_{R^L(\mathcal{C})}$

$$\Leftrightarrow R^S(\mathcal{C}) = R^L(\mathcal{C})$$

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in U \text{ için } yR^S(\mathcal{C})x \text{ ancak ve ancak } yR^L(\mathcal{C})x$$

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in U \text{ için } y \in (x)_{\mathcal{C}} \text{ ancak ve ancak}$$

$$y \in \cup \{(z)_{\mathcal{C}} : x \in (z)_{\mathcal{C}}, z \in U\}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in U \text{ için } (x)_{\mathcal{C}} = \cup \{(z)_{\mathcal{C}} : x \in (z)_{\mathcal{C}}, z \in U\}$$

$$\Leftrightarrow \forall x, z \in U \text{ için } x \in (z)_{\mathcal{C}} \text{ ise } (z)_{\mathcal{C}} = (x)_{\mathcal{C}}$$

$$\Leftrightarrow \forall x, z \in U \text{ için } (x)_{\mathcal{C}} \cap (z)_{\mathcal{C}} \neq \emptyset \text{ ise } (x)_{\mathcal{C}} = (z)_{\mathcal{C}}$$

$$\Leftrightarrow \{(x)_{\mathcal{C}} : x \in U\} \text{ ailesi } U \text{ kümesinin bir ayrışımıdır. } \square$$

Teorem 5.8.8 U kümesinin bir örtüsü $\mathcal{C}$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir (Zhu ve Wang, 2007).

- i. $TH_{\mathcal{C}} = RH_{\mathcal{C}}$ (ya da $TL_{\mathcal{C}} = RL_{\mathcal{C}}$).
- ii. $\mathcal{C}$ noktasal bir örtüdür.

Kanıt: $TH_{\mathcal{C}} = RH_{\mathcal{C}} \Leftrightarrow \overline{apr}_{R^T(\mathcal{C})} = \overline{apr}_{R^R(\mathcal{C})}$

$$\Leftrightarrow R^T(\mathcal{C}) = R^R(\mathcal{C})$$

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in U \text{ için } yR^T(\mathcal{C})x \text{ ancak ve ancak } yR^R(\mathcal{C})x$$

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in U \text{ için } y \in st(x, \mathcal{C}) \text{ ancak ve ancak } y \in md(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in U \text{ için } st(x, \mathcal{C}) = md(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in U \text{ için } st(x, \mathcal{C}) \subseteq md(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in U \text{ için } K \in \mathcal{C} \wedge x \in K \text{ ise } K \subseteq md(x)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{C} \text{ noktasal bir örtüdür. } \square$$

Teorem 5.8.9 U kümesinin bir örtüsü $\mathcal{C}$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir (Zhang ve Luo, 2013).

- i. $TH_{\mathcal{C}} = LH_{\mathcal{C}}$ (ya da $TL_{\mathcal{C}} = LL_{\mathcal{C}}$).
- ii. Her $x \in U$ için $st(x, \mathcal{C}) = \bigcup \{(z)_{\mathcal{C}} : x \in (z)_{\mathcal{C}}, z \in U\}$ dir.
- iii. Her $x, y \in U$ için $\mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_y \neq \emptyset$ ise, $\mathcal{C}_z \subseteq \mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_y$ olacak biçimde bir $z \in U$ elemanı vardır.

Kanıt: $TH_{\mathcal{C}} = LH_{\mathcal{C}} \Leftrightarrow \overline{apr}_{R^T(\mathcal{C})} = \overline{apr}_{R^L(\mathcal{C})}$

$$\Leftrightarrow R^T(\mathcal{C}) = R^L(\mathcal{C})$$

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in U \text{ için } yR^T(\mathcal{C})x \text{ ancak ve ancak } yR^L(\mathcal{C})x$$

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in U \text{ için } y \in st(x, \mathcal{C}) \text{ ancak ve ancak}$$

$$y \in \bigcup \{(z)_{\mathcal{C}} : x \in (z)_{\mathcal{C}}, z \in U\}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in U \text{ için } st(x, \mathcal{C}) = \bigcup \{(z)_{\mathcal{C}} : x \in (z)_{\mathcal{C}}, z \in U\}$$

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in U \text{ için } \exists K \in \mathcal{C} : \{x, y\} \subseteq K \text{ ise } \exists z \in U : \{x, y\} \subseteq (z)_{\mathcal{C}}$$

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in U \text{ için } \mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_y \neq \emptyset \text{ ise } \exists z \in U : \mathcal{C}_z \subseteq \mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_y. \square$$

Teorem 5.8.10 U kümesinin bir örtüsü $\mathcal{C}$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir (Zhang ve Luo, 2013).

- i. $RH_{\mathcal{C}} = LH_{\mathcal{C}}$ (ya da $RL_{\mathcal{C}} = LL_{\mathcal{C}}$).

- ii. Her $x \in U$ için $md(x) = \bigcup \{(z)_c : x \in (z)_c, z \in U\}$
- iii. Her $x, y \in U$ için $y \in md(x)$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{C}_z \subseteq \mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_y$ olacak şekilde bir $z \in U$ elemanın bulunmasıdır.

Kanıt: $RH_c = LH_c \Leftrightarrow \overline{apr}_{R^R(\mathcal{C})} = \overline{apr}_{R^L(\mathcal{C})}$

$$\Leftrightarrow R^R(\mathcal{C}) = R^L(\mathcal{C})$$

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in U \text{ için } yR^R(\mathcal{C})x \text{ ancak ve ancak } yR^L(\mathcal{C})x$$

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in U \text{ için } y \in md(x) \text{ ancak ve ancak}$$

$$y \in \bigcup \{(z)_c : x \in (z)_c, z \in U\}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in U \text{ için } md(x) = \bigcup \{(z)_c : x \in (z)_c, z \in U\}$$

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in U \text{ için } y \in md(x) \text{ ancak ve ancak } \exists z \in U : \{x, y\} \subseteq (z)_c$$

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in U \text{ için } y \in md(x) \text{ ancak ve ancak } \exists z \in U : \mathcal{C}_z \subseteq \mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_y.$$

□

Teorem 5.8.1, Teorem 5.8.4 ve Teorem 5.8.7 kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.8.1 U kümesinin bir örtüsü $\mathcal{C}$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir (Zhang ve Luo, 2013).

- i. $FH_c = SH_c$.
- ii. $FH_c = LH_c$.
- iii. $SH_c = LH_c$.
- iv. $\{(x)_c : x \in U\}$ ailesi U kümesinin bir ayrışımıdır.

Teorem 5.8.2 ve Teorem 5.8.5 kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.8.2 U kümesinin bir örtüsü $\mathcal{C}$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir (Zhang ve Luo, 2013).

- i. $FH_c = TH_c$.
- ii. $SH_c = TH_c$.
- iii. $\mathcal{C}$ örtüsü U kümesinin bir ayrışımıdır.

$TH_c = RH_c, TH_c = LH_c$ ve $RH_c = LH_c$ eşitliklerinin birbirinden bağımsız olduğunu göstermek için aşağıdaki örnekleri inceleyelim.

Örnek 5.8.1 $U = \{a, b, c\}$ olmak üzere $\mathcal{C} = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{b\}\}$ örtüsü verilsin. Öncelikle $x \in U$ olmak üzere, x elemanının $\mathcal{C}$ örtüsüne göre ayırtedilemez komşulukları $st(a, \mathcal{C}) = \{a, b\}$, $st(b, \mathcal{C}) = \{a, b, c\}$ ve $st(c, \mathcal{C}) = \{b, c\}$ olur. Her $x \in U$ elemanının $\mathcal{C}$ örtüsüne göre komşulukları $(a)_c = \{a, b\}$, $(b)_c = \{b\}$ ve $(c)_c = \{b, c\}$ dir. Şimdi de her $x \in U$ elemanın minimal tanımlayıcıları $Md(a) = \{\{a, b\}\}$, $Md(b) = \{\{b\}\}$ ve $Md(c) = \{\{b, c\}\}$ dir. Buradan her $x \in U$ elemanın yakın dostları $md(a) = \{a, b\}$, $md(b) = \{b\}$ ve $md(c) = \{b, c\}$ olur. O halde her $u \in U$ için $st(u, \mathcal{C}) = \bigcup \{(w)_c : u \in (w)_c, w \in U\}$ olur. Ancak $md(b) = \{b\} \neq \{a, b, c\} = \bigcup \{(w)_c : b \in (w)_c, w \in U\}$ ve $st(b, \mathcal{C}) = \{a, b, c\} \neq \{b\} = md(b)$ dir. Teorem 5.8.8, Teorem 5.8.9 ve Teorem 5.8.10 gereğince $TH_c = LH_c, RH_c \neq LH_c$ ve $TH_c \neq RH_c$ olur (Zhang ve Luo, 2013).

Örnek 5.8.2 $U = \{a, b\}$ olmak üzere $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ örtüsü verilsin. Her $x \in U$ elemanının minimal tanımlayıcıları $Md(a) = \{\{a\}\}$ ve $Md(b) = \{\{b\}\}$ olur. Buradan her $x \in U$ elemanın yakın dostları $md(a) = \{a\}$ ve $md(b) = \{b\}$ dir. Her $x \in U$ elemanının $\mathcal{C}$ örtüsüne göre komşulukları $(a)_c = \{a\}$ ve $(b)_c = \{b\}$ dir. Şimdi de her $x \in U$ elemanının $\mathcal{C}$ örtüsüne göre ayırtedilemez komşuluklarını belirleyelim. $st(a, \mathcal{C}) = \{a, b\}$ ve $st(b, \mathcal{C}) = \{a, b\}$ dir. O halde her $u \in U$ için $md(u) = \bigcup \{(w)_c : u \in (w)_c, w \in U\}$ olur. Ancak $st(a, \mathcal{C}) = \{a, b\} \neq \{a\} = md(a)$ dir. Teorem 5.8.8, Teorem 5.8.9 ve Teorem 5.8.10 gereğince $RH_c = LH_c, TH_c \neq RH_c$ ve $TH_c \neq LH_c$ olur (Zhang ve Luo, 2013).

Örnek 5.8.3 $U = \{a, b, c, d\}$ olmak üzere $\mathcal{C} = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$ örtüsüne göre minimal tanımlayıcılar $Md(a) = \{\{a, b\}\}$, $Md(b) = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$, $Md(c) = \{\{b, c\}, \{c, d\}\}$ ve $Md(d) = \{\{c, d\}\}$ olur. Buradan her $x \in U$ elemanın yakın dostları $md(a) = \{a, b\}$, $md(b) = \{a, b, c\}$, $md(c) = \{b, c, d\}$ ve $md(d) = \{c, d\}$ dir. Şimdi de her $x \in U$ elemanının $\mathcal{C}$ örtüsüne göre ayırtedilemez komşuluklarını belirleyelim. $st(a, \mathcal{C}) = \{a, b\}$, $st(b, \mathcal{C}) = \{a, b, c\}$, $st(c, \mathcal{C}) = \{b, c, d\}$ ve $st(d, \mathcal{C}) = \{c, d\}$ dir. Her $x \in U$ elemanının $\mathcal{C}$ örtüsüne göre komşulukları $(a)_c = \{a, b\}$, $(b)_c = \{b\}$, $(c)_c = \{c\}$ ve $(d)_c = \{c, d\}$ dir. O halde her $u \in U$ için $st(u, \mathcal{C}) = md(u)$ olur. Ancak $st(b, \mathcal{C}) = md(b) = \{a, b, c\} \neq \{a, b\} = \bigcup \{(w)_c : b \in (w)_c, w \in U\}$ dir. Teorem 5.8.8, Teorem 5.8.9 ve Teorem 5.8.10 gereğince $TH_c = RH_c, TH_c \neq LH_c$ ve $RH_c \neq LH_c$ olur (Zhang ve Luo, 2013).

$TH_c = RH_c, TH_c = LH_c$ ve $RH_c = LH_c$ eşitliklerinin sağlanmasının diğer koşullardan bağımsız olduğunu göstermek için aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek 5.8.4 $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ olmak üzere $\mathcal{C} = \{\{b, e, f\}, \{a, b, e, f\}, \{a, b, d, e\}, \{a, b, c, f\}, \{a, e, f, g\}\}$ örtüsü verilsin.

Tablo 5.2. Evrensel kümedeki elemanların değerleri

x	$Md(x)$	$md(x)$	$st(x, \mathcal{C})$	$(x)_c$
a	$\{\{a, b, e, f\}, \{a, b, d, e\}, \{a, b, c, f\}, \{a, e, f, g\}\}$	$\{a, b, c, d, e, f, g\}$	$\{a, b, c, d, e, f, g\}$	$\{a\}$
b	$\{\{b, e, f\}, \{a, b, d, e\}, \{a, b, c, f\}\}$	$\{a, b, c, d, e, f\}$	$\{a, b, c, d, e, f\}$	$\{b\}$
c	$\{\{a, b, c, f\}\}$	$\{a, b, c, f\}$	$\{a, b, c, f\}$	$\{a, b, c, f\}$
d	$\{\{a, b, d, e\}\}$	$\{a, b, d, e\}$	$\{a, b, d, e\}$	$\{a, b, d, e\}$
e	$\{\{b, e, f\}, \{a, b, d, e\}, \{a, e, f, g\}\}$	$\{a, b, d, e, f, g\}$	$\{a, b, d, e, f, g\}$	$\{e\}$
f	$\{\{b, e, f\}, \{a, b, c, f\}, \{a, e, f, g\}\}$	$\{a, b, c, e, f, g\}$	$\{a, b, c, e, f, g\}$	$\{f\}$
g	$\{\{a, e, f, g\}\}$	$\{a, e, f, g\}$	$\{a, e, f, g\}$	$\{a, e, f, g\}$

Yukarıda verilen Tablo 5.2'ye göre her $u \in U$ için $st(u, \mathcal{C}) = md(u)$ ve $st(u, \mathcal{C}) = \bigcup \{(w)_c : u \in (w)_c, w \in U\} = md(u)$ olur. Buradan $TH_c = RH_c, TH_c = LH_c$ ve $RH_c = LH_c$ dir. Ancak $\mathcal{C}$ örtüsü, $\{(x)_c : x \in U\}$ ailesi ve $reduct(\mathcal{C})$ ailesi U kümesinin ayrışımı değildir ve $|Md(a)| \neq 1$ dir (Zhang ve Luo, 2013).

6. ÖRTÜ TABANLI KABA KÜMELER İLE İLGİLİ UYGULAMALAR

Bu kesimde, bağıntı tabanlı kaba kümeler ve örtü tabanlı kaba kümelerin birbirleriyle olan ilişkileri ile ilgili uygulamalar verilecektir.

6.1. Yaklaşım Operatörlerinin Aksiyomatik Karakterizasyonları ile İlgili Problemler

Yaklaşım operatörlerinin temel özelliklerini neyin oluşturduğu sorunu, yaklaşım operatörlerini karakterize eden aksiyom kümelerinin oluşturulmasıyla incelenmiştir. Son yıllarda, kaba küme cebirlerinin matematiksel yapısını analiz etmeyi aksiyomatik biçime dönüştürmek için yoğun çaba harcanmıştır. Yansıma ve geçişme özelliklerine sahip bir bağıntıdan elde edilen bağıntı tabanlı yaklaşım operatörleri için aksiyomatik sistemler Yao (Yao, 1998) tarafından verilmiştir.

Lemma 6.1.1

i. Bir $H : \mathcal{P}(U) \rightarrow \mathcal{P}(U)$ operatörünün her $X, Y \subseteq U$ için

$$(1L) \quad H(\emptyset) = \emptyset$$

$$(2L) \quad X \subseteq H(X)$$

$$(3L) \quad H(X \cup Y) = H(X) \cup H(Y)$$

$$(4L) \quad H(H(X)) \subseteq H(X)$$

özelliklerini sağlaması için gerek ve yeter koşul $\overline{apr}_R = H$ olacak şekilde yansımali ve geçişli bir R bağıntısının bulunmasıdır.

ii. Bir $L : \mathcal{P}(U) \rightarrow \mathcal{P}(U)$ operatörünün her $X, Y \subseteq U$ için

$$(1L) \quad L(U) = U$$

$$(2L) \quad L(X) \subseteq X$$

$$(3L) \quad L(X \cap Y) = L(X) \cap L(Y)$$

$$(4L) \quad L(X) \subseteq L(L(X))$$

özelliklerini sağlaması için gerek ve yeter koşul $\underline{apr}_R = L$ olacak şekilde yansımali ve geçişli bir R bağıntısının bulunmasıdır (Yao, 1998).

Xu ve Wang (Xu ve Wang, 2005) çalışmalarında örtü tabanlı yaklaşım operatörlerinin birinci çiftini Yao (Yao, 1998) nun yansımali ve geçişli bir bağıntıdan elde edilen bağıntı tabanlı yaklaşım operatörleri ile değiştirdiler. Bu yöntemle; Teorem 5.2.1, Teorem 5.2.2 ve Lemma 6.1.1 yardımıyla FH ve FL için aksiyomatik sistemler kurulmuş olur.

Teorem 6.1.1

i. Bir $H : \mathcal{P}(U) \rightarrow \mathcal{P}(U)$ operatörünün her $X, Y \subseteq U$ için

$$(1H) \quad H(\emptyset) = \emptyset$$

$$(2H) \quad X \subseteq H(X)$$

$$(3H) \quad H(X \cup Y) = H(X) \cup H(Y)$$

$$(4H) \quad H(H(X)) \subseteq H(X)$$

özelliklerini sağlaması için gerek ve yeter koşul $FH = H$ olacak şekilde bir $\mathcal{C}$ örtüsünün bulunmasıdır.

ii. Bir $L : \mathcal{P}(U) \rightarrow \mathcal{P}(U)$ operatörünün her $X, Y \subseteq U$ için

$$(1L) \quad L(U) = U$$

$$(2L) \quad L(X) \subseteq X$$

$$(3L) \quad L(X \cap Y) = L(X) \cap L(Y)$$

$$(4L) \quad L(X) \subseteq L(L(X))$$

özelliklerini sağlaması için gerek ve yeter koşul $FL = L$ olacak şekilde bir $\mathcal{C}$ örtüsünün bulunmasıdır (Xu ve Wang, 2005).

6.2. Örtü Bilgi Sistemleri ve Bağıntı Bilgi Sistemlerinin Birleştirici Özellik İndirgemeleri

Bilginin indirgenmesi bilgi işlemede ve veri madenciliğinde temel bir sorundur. Kaba küme teorisi belirsiz ve hatalı olan veri için matematiksel bir yaklaşımdır. Bu teori bilgi indirgemesi için de önemli bir katkıda bulunmaktadır. Şimdiye kadar kaba küme teorisine dayalı pek çok özellik için indirgeme algoritmaları verilmiştir.

Bir özellik için çoklu özellik değerleri bulunan bazı nesneler ile düşünülen bilgi sisteminin örtü bilgi sistemi olarak alınması uygundur. Örtü tabanlı kaba küme teorisi örtü bilgi sisteminin özellik indirgemesinin devamı için uygundur.

Tanım 6.2.1 U kümesinin örtülerinin bir ailesi $\Delta = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ olmak üzere, (U, Δ) ikilisine bir örtü bilgi sistemi adı verilir (Li ve Yin, 2009).

Tanım 6.2.2 U kümesinin örtülerinin bir ailesi $\Delta = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ olmak üzere, her $x \in U$ için $(x)_\Delta = (x)_{C_1} \cap (x)_{C_2} \cap \dots \cap (x)_{C_n}$ olsun. $Cov(\Delta) = \{(x)_\Delta : x \in U\}$ ailesi U kümesinin bir örtüsüdür. Bu örtüye Δ ailesinden üretilmiş örtü adı verilir (Li ve Yin, 2009).

Tanım 6.2.3 (U, Δ) bir örtü bilgi sistemi olsun, bir $C_i \in \Delta$ ($i = 1, \dots, n$) örtüsü için $Cov(\Delta) = Cov(\Delta \setminus \{C_i\})$ eşitliği sağlanıyorsa C_i örtüsü Δ ailesinde vazgeçilebilir örtü denir. Aksi taktirde C_i örtüsü Δ ailesinde vazgeçilemez örtü olarak adlandırılır (Li ve Yin, 2009).

Tanım 6.2.4 (U, Δ) bir örtü bilgi sistemi olsun, $Cov(P) = Cov(\Delta)$ özelliğini sağlayan her $P \subseteq \Delta$ için P ailesindeki her özellik vazgeçilemezse, yani her $C_i \in P$ ($i = 1, \dots, n$) için $Cov(P) \neq Cov(P \setminus \{C_i\})$ oluyorsa, P alt ailesine Δ ailesinin bir indirgemesi denir (Li ve Yin, 2009).

Örtü indirgemesi yapılarak Δ ailesindeki gereksiz örtüler silinir ya da atılır. Bu yöntem izlenerek $\mathcal{P}(U)$ ailesindeki her bir elemanın örtü tabanlı yaklaşımlarının aynı birinci çiftini üreten en küçük örtü kümeleri bulunur. Tanım 5.2.1 kullanılarak (U, Δ) örtü bilgi sisteminden yansımali ve geçişli bağıntıların bir ailesi aşağıdaki gibi elde edilir. Her $x, y \in U$ ve $C_i \in \Delta$ ($i = 1, \dots, n$) için

$$(x, y) \in R(C_i) : \Leftrightarrow y \in (x)_{C_i} \text{ dir.}$$

Her $P \subseteq \Delta$ için $\bigcap_{C_i \in P} R(C_i)$ ifadesini $R(P)$ ile gösterelim. Her $x, y \in U$ için

$$y \in (x)_P \Leftrightarrow y \in \bigcap_{C_i \in P} (x)_{C_i} \Leftrightarrow (x, y) \in \bigcap_{C_i \in P} R(C_i) \Leftrightarrow (x, y) \in R(P)$$

eşdeğer ifadeleri elde edilir.

Her $P \subseteq \Delta$ için $Cov(P) = Cov(\Delta) \Leftrightarrow$ her $x \in U$ için $(x)_\Delta = (x)_P$

$$\Leftrightarrow \text{her } x \in U \text{ için } y \in (x)_\Delta \text{ ancak ve ancak } y \in (x)_P$$

$$\Leftrightarrow \text{her } x \in U \text{ için } (x, y) \in R(\Delta) \text{ ancak ve ancak}$$

$$(x, y) \in R(P)$$

$$\Leftrightarrow R(\Delta) = R(P)$$

eşdeğerlikleri kolayca görülür. O halde $P \subseteq \Delta$ ailesinin Δ ailesinin bir indirgemesi olması için gerek ve yeter koşul $R(\Delta) = R(P)$ ve her $C_i \in P$ ($i = 1, \dots, n$) örtüsü için $R(P \setminus \{C_i\}) \neq R(P)$ olmasıdır.

(U, Δ) örtü bilgi sisteminin özellik indirgemelerinin $(U, \{R(C_i): C_i \in \Delta\})$ ($i = 1, \dots, n$) bağıntı bilgi sisteminin özellik indirgemeleri ile özdeş olduğunu görebiliriz. Ayrıca bağıntı bilgi sistemlerinin özellik indirgemeleri $\mathcal{P}(U)$ ailesindeki her elemanın aynı bağıntı tabanlı yaklaşımlarını üreten bağıntıların en küçük kümeleridir.

Örnek 6.2.1 Bir konut değerlendirme problemini düşünelim. Bunun için dokuz seçeneği $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}$ kümesi ile özelliklerini de $E = \{fiyat, renk, yapı, çevre\}$ ile gösterelim. Özellik değerleri *fiyat* için $\{yüksek, orta, düşük\}$, *renk* için $\{iyi, kötü\}$, *yapı* için $\{makul, sıradan, makul değil\}$ ve *çevre* için $\{sessiz, az gürültülü, gürültülü, çok gürültülü\}$ olsun. Bu konutları değerlendirecek dört uzmandan oluşan kümeyi $\{A, B, C, D\}$ olarak alalım. Bu uzmanların aynı özellikler için değerlendirme sonuçları farklı olabilir. Değerlendirme sonuçları aşağıda listelenip Tablo 6.1, Tablo 6.2, Tablo 6.3 ve Tablo 6.4 ile gösterilmiştir (Tsang vd., 2008).

fiyat özelliği için;

$A : yüksek = \{x_1, x_4, x_5, x_7\}, orta = \{x_2, x_8\}, düşük = \{x_3, x_6, x_9\}$

$B : yüksek = \{x_1, x_2, x_4, x_7, x_8\}, orta = \{x_5\}, düşük = \{x_3, x_6, x_9\}$

$C : yüksek = \{x_1, x_4, x_7\}, orta = \{x_8\}, düşük = \{x_2, x_3, x_5, x_6, x_9\}$

$D : yüksek = \{x_1, x_4, x_7\}, orta = \{x_5\}, düşük = \{x_2, x_3, x_6, x_8, x_9\}$

Tablo 6.1. Fiyat değerlendirme sonuçları

	<i>yüksek</i>	<i>orta</i>	<i>düşük</i>
A	$\{x_1, x_4, x_5, x_7\}$	$\{x_2, x_8\}$	$\{x_3, x_6, x_9\}$
B	$\{x_1, x_2, x_4, x_7, x_8\}$	$\{x_5\}$	$\{x_3, x_6, x_9\}$
C	$\{x_1, x_4, x_7\}$	$\{x_8\}$	$\{x_2, x_3, x_5, x_6, x_9\}$
D	$\{x_1, x_4, x_7\}$	$\{x_5\}$	$\{x_2, x_3, x_6, x_8, x_9\}$

renk özelliği için;

$A : iyi = \{x_1, x_2, x_3, x_6\}, kötü = \{x_4, x_5, x_7, x_8, x_9\}$

$B : iyi = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}, kötü = \{x_4, x_6, x_7, x_8, x_9\}$

$C : iyi = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, kötü = \{x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}$

$D : iyi = \{x_1, x_2, x_3\}, kötü = \{x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}$

Tablo 6.2. Renk değerlendirme sonuçları

	<i>iyi</i>	<i>kötü</i>
A	$\{x_1, x_2, x_3, x_6\}$	$\{x_4, x_5, x_7, x_8, x_9\}$
B	$\{x_1, x_2, x_3, x_5\}$	$\{x_4, x_6, x_7, x_8, x_9\}$
C	$\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$	$\{x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}$
D	$\{x_1, x_2, x_3\}$	$\{x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}$

yapı özelliği için;

$A : makul = \{x_1, x_2, x_3\}, sıradan = \{x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}, makul değil = \{x_9\}$

$B : makul = \{x_1, x_2, x_3\}, sıradan = \{x_4, x_5, x_6, x_7, x_9\}, makul değil = \{x_8\}$

$C : makul = \{x_1, x_2, x_3\}, sıradan = \{x_4, x_5, x_6, x_8, x_9\}, makul değil = \{x_7\}$

$D : makul = \{x_1, x_2, x_3\}, sıradan = \{x_4, x_5, x_6\}, makul değil = \{x_7, x_8, x_9\}$

Tablo 6.3. Yapı değerlendirme sonuçları

	<i>makul</i>	<i>sıradan</i>	<i>makul değil</i>
A	$\{x_1, x_2, x_3\}$	$\{x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$	$\{x_9\}$
B	$\{x_1, x_2, x_3\}$	$\{x_4, x_5, x_6, x_7, x_9\}$	$\{x_8\}$
C	$\{x_1, x_2, x_3\}$	$\{x_4, x_5, x_6, x_8, x_9\}$	$\{x_7\}$
D	$\{x_1, x_2, x_3\}$	$\{x_4, x_5, x_6\}$	$\{x_7, x_8, x_9\}$

çevre özelliği için;

$A : sessiz = \{x_1, x_2\}, az gürültülü = \{x_3, x_6\}, gürültülü = \{x_4, x_5, x_7\},$
 $çok gürültülü = \{x_8, x_9\}$

$B : sessiz = \{x_1, x_5\}, az gürültülü = \{x_2, x_3\}, gürültülü = \{x_4, x_7, x_8\},$
 $çok gürültülü = \{x_6, x_9\}$

$C : sessiz = \{x_1\}, az gürültülü = \{x_2, x_3\}, gürültülü = \{x_4, x_7, x_8\},$
 $çok gürültülü = \{x_5, x_6, x_9\}$

$D : sessiz = \{x_1, x_2, x_4\}, az gürültülü = \{x_3, x_5\}, gürültülü = \{x_7, x_8\},$
 $çok gürültülü = \{x_6, x_9\}$

Tablo 6.4. Çevre değerlendirme sonuçları

	<i>sessiz</i>	<i>az gürültülü</i>	<i>gürültülü</i>	<i>çok gürültülü</i>
A	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_3, x_6\}$	$\{x_4, x_5, x_7\}$	$\{x_8, x_9\}$
B	$\{x_1, x_5\}$	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_4, x_7, x_8\}$	$\{x_6, x_9\}$
C	$\{x_1\}$	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_4, x_7, x_8\}$	$\{x_5, x_6, x_9\}$
D	$\{x_1, x_2, x_4\}$	$\{x_3, x_5\}$	$\{x_7, x_8\}$	$\{x_6, x_9\}$

Her uzmanın değerlendirmesinin aynı öneme sahip olduğunu varsayalım. Bu değerlendirmeleri bilgiyi kaybetmeden bir araya getirmek istiyorsak, her özellik değeri için her uzman tarafından verilen değerlendirmeleri birleştirmeliyiz. Daha sonra, her özellik için bir ayrışım yerine belirsizliğin bir türünü içeren bir örtü alırız.

fiyat : $C_1 = \{\{x_1, x_2, x_4, x_5, x_7, x_8\}, \{x_2, x_5, x_8\}, \{x_2, x_3, x_5, x_6, x_8, x_9\}\}$

renk : $C_2 = \{\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}, \{x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}\}$

yapı : $C_3 = \{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}, \{x_7, x_8, x_9\}\}$

çevre : $C_4 = \{\{x_1, x_2, x_4, x_5\}, \{x_2, x_3, x_5, x_6\}, \{x_4, x_5, x_7, x_8\}, \{x_5, x_6, x_8, x_9\}\}$

$\Delta = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ olsun. (U, Δ) ikilisi bir örtü bilgi sistemidir. Aynı zamanda bir $S = (U, E)$ bilgi sistemini aşağıda verilen Tablo 6.5'teki gibi elde ederiz.

Kısaca;

y: yüksek, *o*: orta, *d*: düşük, *i*: iyi, *k*: kötü, *m*: makul, *s*: sıradan, *md*: makul değil,

se: sessiz, *a*: az gürültülü, *g*: gürültülü, *çg*: çok gürültülü şeklinde ifade edeceğiz.

Tablo 6.5. $S = (U, E)$ bilgi sistemi

	<i>fiyat</i>	<i>renk</i>	<i>yapı</i>	<i>Çevre</i>
x_1	<i>y</i>	<i>i</i>	<i>m</i>	<i>se</i>
x_2	<i>y, o, d</i>	<i>i</i>	<i>m</i>	<i>se, a</i>
x_3	<i>d</i>	<i>i</i>	<i>m</i>	<i>a</i>
x_4	<i>y</i>	<i>i, k</i>	<i>s</i>	<i>se, g</i>
x_5	<i>y, o, d</i>	<i>i, k</i>	<i>s</i>	<i>se, a, g, çg</i>
x_6	<i>d</i>	<i>i, k</i>	<i>s</i>	<i>a, çg</i>
x_7	<i>y</i>	<i>k</i>	<i>s, md</i>	<i>g, çg</i>
x_8	<i>y, o, d</i>	<i>k</i>	<i>s, md</i>	<i>g</i>
x_9	<i>d</i>	<i>k</i>	<i>s, md</i>	<i>çg</i>

(U, Δ) bir örtü bilgi sistemi ve özellikler kümesi E olmak üzere, bir $L \subseteq E$ özellik kümesi için (U, Δ) örtü bilgi sisteminden üretilmiş bir $R(L)$ bağıntısı aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$xR(L)y: \Leftrightarrow \forall a \in L \text{ için } a(x) \subseteq a(y)$$

(U, Δ) örtü bilgi sisteminin özellik indirgemeleri $R(E)$ bağıntısını koruyan minimal özellik alt kümeleri olan $S = (U, E)$ bilgi sistemi ya da $(U, \{R(\mathcal{C}_i): \mathcal{C}_i \in \Delta\})$ ($i = 1, \dots, n$) bağıntı bilgi sistemi ile değiştirilebilir. Bilgi sisteminin özellik indirgemesi için mevcut algoritmalara göre örtü bilgi sisteminin özellik indirgemesi için makul algoritmalar elde edilebilir.



7. SONUÇ

Bu tez çalışmasında Pawlak kaba küme yaklaşımının genelleştirilmesi düşüncesiyle ortaya çıkan örtü tabanlı kaba küme teorisi ayrıntılı olarak incelenmiş ve elde edilen sonuçlar anlamlı bir şekilde verilmiştir.

Bu çalışmanın matematik alanında önemli bir temel kaynak olması düşünülmektedir. Bu konu üzerinde yapılacak olan ileri düzeydeki çalışmalar için yararlı katkıyı sağlayacağı öngörülmektedir.



KAYNAKLAR

- Bayhan, S., Acar, E., 2019. Diyabet Tanısında Kaba Küme Yaklaşımı. *Dergi Ayrıntı (Journal Detail)*, Cilt 7, Sayı: 74, 51-54.
- Bayhan, S., Acar, E., 2019. Hastalık Tanısında Matematiksel Bir Yaklaşım Olarak Kaba Kümeler. *II. Uluslararası Sağlık Bilimleri ve Yaşam Kongresi, Burdur*.
- Bayhan, S., Uğur, A.A., Acar, E., 2019. Kaba Kümeler ve Örtüler. *I. Uluslararası Genç Araştırmacılar Öğrenci Kongresi, Burdur*.
- Bonikowski, Z., Bryniarski, E., Wybraniec-Skardowska, U., 1998. Extensions and Intensions in the Rough Set Theory. *Information Sciences*, 107, 149-167.
- Diker, M., Uğur, A. A., 2012. Textures and Covering Based Rough Sets. *Information Sciences*, 184, 44-63.
- Güneş, D., 2010. Yaklaşımlı Kümeler ve Bazı Uygulamaları. Yüksek Lisans Tezi. *Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Tokat, Türkiye*.
- Lashin, E., Kozae, A., Khadra, A. A., Medhat, T., 2005. Rough Set Theory for Topological Spaces. *International Journal of Approximate Reasoning*, 40 (12), 35–43.
- Li, F., Yin, Y.Q., 2009. Approaches to Knowledge Reduction of Covering Decision Systems Based on Information Theory. *Information Sciences*, 179, 1694-1704.
- Özer, O., Çoker, D., Taş, K., 1994. Soyut Matematik. *Anadolu Üniversitesi Yayınları, Eskişehir*.
- Pawlak, Z., 1982. Rough Sets. *International Journal of Computer and Information Sciences*, 11, 341-356.
- Pawlak, Z., 1991. Rough sets: Theoretical Aspects of Reasoning About Data. *Kluwer Academic Publishers, Boston*.
- Qin, K., Gao, Y., Pei, Z., 2007. On Covering Rough Sets. *The Second International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology (RSKT 2007), Lecture Notes in Computer Science*, vol. 4481, 34-41.
- Samanta, P., Chakraborty, M. K., 2009. Covering Based Approaches to Rough Sets and Implication Lattices. *International Workshop on Rough Sets, Fuzzy Sets, Data Mining, and Granular Soft Computing, Springer*, 127-134.
- Samanta, P., Chakraborty, M. K., 2011. Generalized Rough Sets and Implication Lattices. *Transactions on Fuzzy Rough Sets XIV, Springer*, 183-201.

- Suraj, Z., 2004. An Introduction to Rough Set Theory and Its Applications. *ICENCO 2004*, December 27-30, Cairo, Egypt, 1-39.
- Thivagar, M. L., Richard, C., Paul, N. R., 2012. Mathematical Innovations of a Modern Topology in Medical Events. *International Journal of Information Science*, 2(4), 33-36.
- Tsang, E., Cheng, D., Yeung, D., 2008. Approximations and Reducts with Covering Generalized Rough Sets. *Computers and Mathematics with applications*, 56, 279-289.
- Xu, Z., Wang, Q., 2005. On the Properties of Covering Rough Sets Model. *Journal of Henan Normal University (Natural Sciences)*, 33 (1), 130-132.
- Xu, W., Zhang, W., 2007. Measuring Roughness of Generalized Rough Sets Induced By A Covering. *Fuzzy Sets and Systems*, 158, 2443-2455.
- Yang, T., Li, Q., 2010. Reduction About Approximation Spaces of Covering Generalized Rough Sets. *International Journal of Approximate Reasoning*, 51, 335-345.
- Yao, Y. Y., 1996. Two Views of The Theory of Rough Sets in Finite Universes. *International Journal of Approximate Reasoning*, 15, 291-317.
- Yao, Y.Y., 1998. Constructive and Algebraic Methods of Theory of Rough Sets. *Information Sciences*, 109, 21-47.
- Yao, Y.Y., 1998. Relational Interpretations of Neighborhood Operators and Rough Set Approximation Operators. *Information Sciences*, Vol. 111, No. 1-4, 239-259.
- Yao, Y. Y., Yao, B., 2012. Covering Based Rough Sets Approximation. *Information Sciences*, 200, 91-107.
- Zakowski, W., 1983. Approximations in the Space (U, π) . *Demonstratio Mathematica* 16, 761-769.
- Zhang, Y., Luo, M., 2013. Relationships Between Covering-Based Rough Sets and Relation-Based Rough Sets. *Information Sciences*, 225, 55-71.
- Zhao, Z., 2016. On Some Types of Covering Rough Sets from Topological Points of View. *International Journal of Approximate Reasoning*, 68, 1-14.
- Zhu, W., 2009. Relationship Among Basic Concepts in Covering-Based Rough Sets. *Information Sciences*, 179, 2478-2486.
- Zhu, W., 2009. Relationship Between Generalized Rough Sets Based on Binary Relation and Covering. *Information Sciences*, 179, 210-225.
- Zhu, W., Wang, F.Y., 2006. Properties of the First Type of Covering-Based Rough Sets. *Proceeding of DM Workshop 06, ICDM 06, Hong Kong, China*, December 18, 407-411.

Zhu, W., Wang, F.Y., 2007. On Three Types of Covering-Based Rough Sets. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 19 (8), 1131-1144.



