

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nuray TOMAK

OTO-SABİT ALT GRUPLAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2007

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OTO-SABİT ALT GRUPLAR

Nuray TOMAK
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez/...../2007 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

İmza.....
Prof.Dr. Naime EKİCİ
DANIŞMAN

İmza.....
Yrd.Doç.Dr. ELA AYDIN
ÜYE

İmza.....
Yrd.Doç.Dr. Ersin KIRAL
ÜYE

Bu tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof.Dr. Aziz ERTUNÇ
Enstitü Müdürü
İmza ve Mühür

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

OTO-SABİT ALT GRUPLAR

Nuray TOMAK

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman: Prof.Dr. Naime EKİCİ

Yıl: 2007, Sayfa: 41

Jüri: Prof.Dr. Naime EKİCİ

Yrd.Doç.Dr. ELA AYDIN

Yrd.Doç.Dr. Ersin KIRAL

F_n sonlu bir X kümesi tarafından üretilen bir serbest grup olsun. F_n serbest grubunun bazı özel alt gruplarının bir S alt kümesi tarafından sabit bırakılan alt grupları incelenmiş ve bu alt gruplar kullanılarak, F_n nin endo-sabit, oto-sabit, mono-sabit, 1-endo-sabit, 1-oto-sabit ve 1-mono-sabit alt grupları tanımlanmıştır. Buradan hareketle, bu alt grupların rankının en fazla ne kadar olabileceğine değinilmiş ve maksimum ranklı sabit alt gruplar tanımlanmıştır. Buna ek olarak, F_n nin 1-oto-sabit alt gruplarının serbest çarpanları ile F_n nin oto-sabit alt grupları arasındaki ilişkiler de incelenmiştir. Serbest gruplardaki incelemelere paralel olarak, karakteristiği 2 olan bir cisim üzerindeki L serbest Lie cebirinin sabit nokta alt uzayının boyutu belirlenmeye çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Serbest grup, oto-sabit alt grup, serbest Lie cebiri, sabit nokta alt uzayı.

ABSTRACT

MSc THESIS

AUTO-FIXED SUBGROUPS

Nuray TOMAK

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF ÇUKUROVA**

Supervisor: Prof.Dr. Naime EKİCİ

Year: 2007, Pages: 41

Jury: Prof.Dr. Naime EKİCİ

Assist.Prof.Dr. ELA AYDIN

Assist.Prof.Dr. Ersin KIRAL

Let F_n be a free group generated by a finite set X . It has been investigated that subgroups of F_n fixed by subset S of some particular subgroups of F_n and it has defined auto-fixed, endo-fixed, mono-fixed, 1-auto-fixed, 1-endo-fixed and 1-mono-fixed subgroups of F_n . Taking into consideration this definition, it has observed that these subgroups of F_n have the rank at most n and it has defined that maximum-rank fixed subgroups of F_n . Besides, it has been investigated that the relation between free factors of 1-auto-fixed subgroups of F_n and auto-fixed subgroups of F_n . In addition to the investigation in the free groups, it has studied that the determination of the dimension of the fixed-point subspace of a free Lie algebra L over a field of characteristic 2.

Key Words: Free group, auto-fixed subgroup, a free Lie algebra, fixed-point subspace.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasında bilgi ve tecrübeleriyle beni aydınlatan, yardımlarını esirgemeyen , bilgisi ve kişiliği ile örnek aldığım saygı değer danışmanım Prof.Dr.Naime EKİCİ'ye sonsuz şükran ve teşekkürlerimi sunarım.

Saygı değer hocam Yrd.Doç.Dr.Ela AYDIN'a, Arş.Gör.Dilek KAHYALAR'a, Arş.Gör.Zeynep ÖZKURT (YAPTI)'a ve tüm Matematik Bölümü akademik personeline bu çalışmanın oluşmasında yardımlarını esirgemedikleri için çok teşekkür ederim.

Ayrıca, bu çalışmanın yazım aşamasında çok fazla emeği geçen ve bana her konuda yardımcı olan sevgili arkadaşım Arş.Gör.Demet PARLAK'a sonsuz sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SAYFA

ÖZ	I
ABSTRACT	II
TEŞEKKÜR	III
İÇİNDEKİLER	IV
1 GİRİŞ	1
2 TEMEL BİLGİLER	3
2.1 Serbest Gruplar	3
2.2 Serbest Lie Cebirleri	4
3 BİR SERBEST GRUBUN OTO-SABİT ALT GRUPLARI	9
3.1 Endo-Sabit Alt Gruplar	9
3.2 Oto-Sabit Alt Gruplar	12
3.3 Maksimum Ranklı Sabit Alt Gruplar	16
3.4 Noktasal Sabit Alt Gruplar	17
4 SERBEST LİE CEBİRLERİNİN OTOMORFİZMLERİNİN SABİT NOKTALARI	21
KAYNAKLAR	33
ÖZGEÇMİŞ	35

1. GİRİŞ

Rankı n olan bir F_n serbest grubunun 1-oto-sabit alt grupları hakkındaki en önemli sonuç, M.Bestvina ve M.Handel (Bestvina ve Handel, 1992) tarafından bulunmuştur. Bu sonuca göre, F_n nin her 1-oto-sabit alt grubu en fazla n ranka sahiptir. Imrich ve Turner (Imrich ve Turner,1989), bu sonucu kullanarak, F_n nin herhangi bir 1-endo-sabit alt grubunun en fazla n ranka sahip olduğunu gösterdiler. Ayrıca, Dicks ve Ventura (Dicks ve Ventura, 1996) da Bestvina ve Handel'in tekniklerini kullanarak, F_n nin herhangi bir mono-sabit alt grubunun rankının en fazla n olduğunu gösterdiler. Daha sonra, G.M.Bergman (Bergman, 1999) da, bu sonucu kullanarak, F_n nin herhangi bir endo-sabit alt grubunun en fazla n ranka sahip olduğunu göstermiştir.

Biz bu çalışmamızda, F_n serbest grubunun oto-sabit alt grupları ve bir serbest Lie cebirinin sabit nokta alt uzaylarının boyutunu inceledik.

Tezin ikinci bölümünde çalışmamızın kaynağını oluşturan serbest gruplar ve serbest Lie cebirleriyle ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde, F_n serbest grubunun bazı özel alt gruplarının bir S alt kümesi tarafından sabit bırakılan alt grupları incelenmiş ve bu alt gruplar kullanılarak, F_n nin endo-sabit, oto-sabit, mono-sabit, 1-endo-sabit, 1-oto-sabit ve 1-mono-sabit alt grupları tanımlanmıştır. Ayrıca, bu alt grupların rankının en fazla ne kadar olabileceğine değinilmiş ve maksimum ranklı sabit alt gruplar tanımlanmıştır. Daha sonra, F_n nin her oto-sabit alt grubunun, F_n nin 1-oto-sabit alt grubunun bir serbest çarpanı olduğu gösterilmiştir. Fakat, F_n nin 1-oto-sabit alt gruplarının serbest çarpanlarının, her zaman F_n nin oto-sabit alt grubu olmak zorunda olmadığı belirtilmiş ve $n \geq 3$ için, F_n nin 1-oto-sabit alt gruplarının, oto-sabit olmayan serbest çarpanlarının olduğunu göstermek için, $n \geq 3$ için, F_n nin 1-oto-sabit alt gruplarının, endo sabit olmayan serbest çarpanlarına örnek verilmiştir. Daha sonra, F_n nin maksimum ranklı her oto-sabit alt grubunun, maksimum ranklı 1-oto-sabit alt grubu olduğuna değinilmiş ve bu özelliğin diğer maksimum ranklı endo-sabit ve mono-sabit alt grupları için de doğru olduğu belirtilmiştir. Eğer, H , F_n nin maksimum ranka sahip 1-oto-sabit alt grubu ise, o zaman, H nin her elemanını sabit bırakan F_n nin otomorfizmlerinin grubunun, rankı en fazla $(n - 1)$ olan bir serbest abelyen grup olduğu ispatlanmıştır. Aynı zamanda, F_n grubunun noktasal sabit alt grupları tanımlanmıştır.

Tezin dördüncü bölümünde ise, K karakteristiği 2 olan bir cisim, V , K cismi üzerinde

bir vektör uzayı ve L, V üzerinde bir serbest Lie cebiri olmak üzere, L nin sabit nokta alt uzayı tanımlanmıştır. Ayrıca, G , derecesi 2 olan devirli bir grup ve V , regüler KG -modül olmak üzere, G nin her elemanının V nin vektör uzayı olarak bir otomorfizmini belirttiği ifade edilmiş ve bu otomorfizmin, L nin Lie cebiri olarak bir otomorfizmine tek olarak genişletilebileceği ifade edilmiştir. Daha sonra, L nin sabit-nokta alt uzaylarının boyutu belirlenmeye çalışılmıştır. Bu alt uzayların boyutunu belirlerken de, K cisminin karakteristiğinin 2 ye eşit olduğu durum için ve 2 ye eşit olmadığı durum için, ayrı ayrı gösterilmeye çalışılmıştır. K cisminin karakteristiğinin 2 ye eşit olduğu durum için, bu alt uzayın boyutunun nasıl bulunacağı bir Teoremle ifade edilmiş ve bu Teorem, L serbest cebirinin bir bazını veren başka bir Teorem kullanılarak ispatlanmıştır. Daha sonraki çalışmalarda ise, L nin bir bazını veren bu Teoremin ispatı yapılmaya çalışılmış ve bu İspat yapılırken de adım adım, bu Teoremin ispatı için, gerekli olan önermelere yer verilmiştir. K cisminin karakteristiğinin 2 ye eşit olmadığı durumda, bu alt uzayın boyutunun nasıl belirleneceği ise Brand'ın Karakter Formülü kullanılarak gösterilmeye çalışılmıştır.

2. TEMEL BİLGİLER

2.1 Serbest Gruplar

Tanım 2.1 $G \neq \{0\}$ bir grup olsun. G üzerinde tanımlı bir ikili işlem aşağıdaki koşulları sağlasın:

- i) Her $a, b, c \in G$ için, $(ab)c = a(bc)$ ise, G ye bir yarıgrup (semigrup) denir.
- ii) Eğer bir G yarıgrubunda, her $g \in G$ için, $eg = ge = g$ ise, G ye bir monoid denir.

Tanım 2.2 F bir grup, X boş olmayan bir küme ve $\sigma : X \rightarrow F$ bir fonksiyon olsun. Eğer, her $\alpha : X \rightarrow G$ (G bir grup) fonksiyonu için, $\alpha = \beta\sigma$ olacak şekilde bir tek $\beta : F \rightarrow G$ örten homomorfizmi varsa, o zaman F grubuna, X üzerinde bir serbest grup, X kümesine de, F nin serbest üreteç kümesi denir. X sonlu olduğunda da, X in eleman sayısına F nin rankı denir.

n , pozitif bir tamsayı olmak üzere rankı n olan bir serbest grubu F_n ile göstereceğiz.
 $a, b \in F_n$ için, $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ yazacağız.

Tanım 2.3 F_n , n -ranklı bir serbest grup olsun.

(a) $f : F_n \rightarrow F_n$ fonksiyonu her $a, b \in F_n$ için, $f(ab) = f(a)f(b)$ ise f ye bir homomorfizm denir.

(b) Eğer, f homomorfizmi örten ise, f ye F_n nin bir endomorfizmi denir.

F_n nin monoid endomorfizmini $End(F_n)$ ile göstereceğiz.

(c) Eğer, f homomorfizmi bir izomorfizm ise, f ye F_n nin bir otomorfizmidir denir.

F_n nin bütün otomorfizmlerinin grubunu $Oto(F_n)$ ile göstereceğiz. Bu durumda, $Oto(F_n)$, $End(F_n)$ nin tersinir elemanlarının bir grubudur.

$Inj(F_n)$, F_n nin injektif (veya monic) endomorfizmlerinin kümesini gösterebilir.
 $Inj(F_n)$, $End(F_n)$ nin $Oto(F_n)$ yi içeren bir altmonoididir.

Tanım 2.4 F bir abelyen grup olsun. Boş olmayan bir X kümesi ve bir $i : X \rightarrow F$ fonksiyonu verilsin. Eğer, verilen bir G grubu ve bir $f : X \rightarrow G$ fonksiyonu için, $\bar{f}i = f$ olacak şekilde bir tek $\bar{f} : F \rightarrow G$ homomorfizmi varsa, F abelyen grubuna bir serbest abelyen grup denir.

Her abelyen grup, bir serbest abelyen grubun bir görüntüsüdür.

Ayrıca, eğer F_n, X üzerinde rankı n olan bir serbest grup ise o zaman,

$$F_n^{ab} = F_n / F_n' = F_n / [F_n, F_n]$$

X üzerinde rankı n olan bir serbest abelyen grup olur. F_n^{ab} serbest abelyen grubuna, F_n nin abelyenleştirilmiş de denir.

Tanım 2.5 $\{G_i \mid i \in I\}$ grupların boş olmayan bir kümesi olsun. G bir grup ve $\lambda_i : G_i \rightarrow G$ bir homomorfizmi olsun. Eğer, G_i den bazı H gruplarının içine, bir $\varphi_i : G_i \rightarrow H$ homomorfizmlerinin bir kümesi için, $\lambda_i \varphi = \varphi_i$ olacak şekilde bir tek $\varphi : G \rightarrow H$ homomorfizmi varsa, λ_i ye, $\{G_i \mid i \in I\}$ nin bir serbest G -çarpımı denir. $\{G_i \mid i \in I\}$ grupların kümesinin, G -serbest çarpımı $G = \prod_{i \in I}^* G_i$ ile gösterilir.

G_i lere de, G nin serbest çarpanları denir. Eğer, I kümesi sonlu ise, yani $I = \{i_1, \dots, i_n\}$ ise, o zaman $G = G_{i_1} * G_{i_2} * \dots * G_{i_n}$ yazılır. Burada $r \in \{1, \dots, n\}$ için, her bir G_{i_r} , G nin bir serbest çarpanıdır.

2.2 Serbest Lie Cebirleri

K bir cisim olsun.

Tanım 2.6 V, K cismi üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde L cebirine V üzerinde serbest Lie cebiri denir.

1. V, L nin bir alt uzayıdır.
2. V nin her bazı L nin serbest üreteç kümesidir.

L nin bir B alt kümesi tarafından gerilen alt uzayı $\langle B \rangle$ ile gösterelim.

L de herhangi iki a, b elemanının çarpımını $[a, b]$ ile ve $a_1, a_2, \dots, a_n \in L$ için, $[\dots [a_1, a_2], \dots a_n]$ çarpımını da, $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ olarak göstereceğiz.

Tanım 2.7 L bir serbest Lie cebiri, $A = \{a_i \mid i \in I\} \subset L$ ve $F = \langle I \rangle$, I kümesi tarafından üretilen bir serbest Lie cebiri olsun. Eğer, $\sigma : i \mapsto a_i$ olacak şekilde $F = \langle I \rangle$ dan L içine bir σ homomorfizmi varsa ve σ örten ise, A ya L nin bir serbest üreteç kümesi denir.

Tanım 2.8 L, V üzerinde bir serbest Lie cebiri ve V nin bir bazı $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ olsun.

$L_1 = \langle v_i \rangle, L_2 = \langle [v_i, v_j] \rangle, \dots, L_n = \langle [v_1, v_2, \dots, v_n] \rangle$ ($i, j = 1, \dots, n$ ve $i \neq j$) olsun. Yani her pozitif n tamsayısı için, L_n ler n uzunluklu elemanlar tarafından gerilsin. Bu şekilde oluşturulan her bir L_n ye n -dereceli homojen alt uzay denir.

Bu durumda, L yi, bir vektör uzayı olarak $L = \bigoplus_{n \geq 1} L_n$ direkt toplamı şeklinde yazabiliriz.

Her bir L_n nin sonlu boyutlu olduğu açık olup, L_n nin boyutunu $\dim L_n$ ile göstereceğiz.

Aslında, eğer V nin boyutu m ise, o zaman L_n nin boyutu, Witt'in formülü ile verilir:

$$\dim(L_n) = \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \mu(d) m^{n/d}.$$

Burada, d, n nin pozitif bölenleri olup, μ Möbius fonksiyonudur. Yani,

$$\mu: \mathbb{Z}^+ \mapsto \{-1, 0, 1\}$$

$$\mu(d) = \begin{cases} 0 & d \text{ bir asal sayının karesi ile bölünebiliyorsa} \\ 1 & d = 1 \text{ ise,} \\ (-1)^k & d = p_1 \dots p_k \text{ (} p_i \text{ ler asal)} \end{cases}$$

dir.

Tanım 2.9 Bir G yarıgrupunda $g \in G$ ve her $x_1, x_2 \in G$ için, $gx_1 = gx_2, x_1g = x_2g$ olduğunda, $x_1 = x_2$ oluyorsa, g ye regüler eleman denir.

Eğer, G nin her elemanı regüler ise, G ye regüler yarıgrup denir.

Eğer, $(R - \{0\}, \cdot)$ halkası regüler yarıgrup ise, R ye regüler halka denir.

Tanım 2.10 G bir grup olsun. $x, y, z \in G, k_x, k'_x, k_y, k'_z \in K$ ve $k_x, k'_x, k_y, k'_z = 0$ (sonlu sayıda k_x, k'_x, k_y, k'_z hariç) olmak üzere,

$$\begin{aligned} \left(\sum_x k_x x \right) + \left(\sum_x k'_x x \right) &= \sum_x (k_x + k'_x) x \\ \left(\sum_x k_x x \right) \left(\sum_x k'_x x \right) &= \sum_x \left(\sum_{yz=x} k_y k'_z \right) x \end{aligned}$$

toplam ve çarpım kurallarıyla verilen

$$KG = \left\{ \sum_{x \in G} k_x x \mid k_x \in K \text{ ve } k_x = 0 \text{ (sonlu sayıda } k_x \text{ hariç)} \right\}$$

kümesi KG grup halkası olarak tanımlanır.

Tanımlanan bu toplam ve çarpım kurallarıyla, KG , birim elemanı $1_K 1_G$ (veya 1_{KG}) olan, birim elemanlı bir halka olur.

Tanım 2.11 KG bir grup halkası ve A toplamsal, değişmeli bir grup olmak üzere eğer, $KG \times A \longrightarrow A$ işlemine göre aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa, A ya bir (sol) KG -modül denir.

$\forall k_1, k_2 \in KG$ ve $a, b \in A$ için,

$$i) k_1(a + b) = k_1a + k_1b$$

$$ii) (k_1 + k_2)a = k_1a + k_2a$$

$$iii) (k_1 k_2)a = k_1(k_2a)$$

Eğer 1_{KG} , KG nin birim elemanı ve $1_{KG}.a = a$ (her $a \in A$) ise A ya unitary KG -modül denir.

Tanım 2.12 Eğer, KG bir regüler halka ve A bir KG -modül ise A ya regüler KG -modül denir.

Tanım 2.13 Eğer, G bir grup ise, o zaman KG bir halka olmasına rağmen,

$$k \left(\sum_{x \in G} k_x x \right) = \sum_{x \in G} (k k_x) x \quad (k, k_x \in K \text{ ve } k_x = 0 \text{ (sonlu sayıda } k_x \text{ hariç)})$$

ile verilen işlemle doğal bir K -modül yapısına sahiptir. Bundan dolayı KG , K üzerinde bir vektör uzayı olur. Ayrıca, $k \in K$ ve $u, v \in KG$ olmak üzere, $k(uv) = (ku)v = u(kv)$ olduğundan, KG ye bir K -cebiri veya K üzerinde G nin bir grup cebiri denir.

Tanım 2.14 R bir halka ve F de bir R -modül olsun. Eğer F aşağıdaki özelliği sağlıyorsa, F ye bir serbest modül denir.

F nin öyle bir X alt kümesi vardır ki, verilen herhangi bir A , R -modülü ve her $f : X \longrightarrow A$ fonksiyonu için $\bar{f}|_X = f$ olacak şekilde bir tek $\bar{f} : F \longrightarrow A$, R -modül homomorfizmi vardır.

Tanım 2.15 $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. X deki harflerin $w = (x_1, \dots, x_k)$, $k \geq 0$, $x_i \in X$ şeklindeki sonlu bir dizisine bir kelime denir. $W(X)$, X kümesindeki harflerin yanyana çarpılmasıyla

oluşan kelimelerin kümesi olsun. A ile bazı $W(X)$ olan serbest K -modülü gösterelim. A daki çarpım, $W(X)$ kümesini A nın alt yarıgrubu ve A yı cebir yapacak şekilde tek olarak belirlenir. $W(X)$ de boş kelime 1 ile gösterilecektir. Bu durumda A ya, serbest üreteç kümesi X olan, 1 birim elemanlı bir serbest birleşmeli cebir denir.

Tanım 2.16 A bir halka M, N, P A -modüller olsun. M ile N nin tensör çarpımını aşağıdaki özelliğe sahip olacak şekilde oluşturacağız:

” $M \times N \mapsto P$ şeklindeki bilineer dönüşümlerle her P , A -modülü için, $T \mapsto P$ şeklindeki bilineer dönüşümler arasında birebir bir bağıntı vardır.”

$C, M \times N$ nin elemanlarının lineer toplamlarından oluşan A -modül ve D, C nin aşağıdaki elemanlar tarafından üretilen altmodülü olsun.

$$(x + x', y) - (x, y) - (x', y)$$

$$(x, y + y') - (x, y) - (x, y')$$

$$(ax, y) - a(x, y)$$

$$(x, ay) - a(x, y)$$

$T = C/D$ diyelim. $(x, y) \in C$ için, $x \otimes y$ ile (x, y) nin T deki görüntüsünü gösterelim.

$C \mapsto C/D = T$ doğal homomorfizmi için, $(x, y) \mapsto x \otimes y$ olsun. Ozaman, T , $(x \otimes y)$ şeklindeki elemanlar tarafından doğurulur. ” $\otimes$ ” işlemine göre, aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$(x + x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y$$

$$x \otimes (y + y') = x \otimes y + x \otimes y'$$

$$ax \otimes y = a(x \otimes y) = x \otimes ay$$

T ye, M ile N nin Tensör çarpımı denir ve $T = M \otimes N$ ile gösterilir.

Tanım 2.17 L , bir Lie cebiri olsun. Aşağıdaki koşulların sağlanması durumunda birim elemanlı ve birleşmeli $U(L)$ cebirine, L nin evrensel enveloping cebiri denir.

1) L den $[U(L)]$ ye kanonik homomorfizm denilen bir $\varepsilon : L \mapsto [U(L)]$ homomorfizmi vardır.

2) K cismi üzerindeki birim elemanlı bir B birleşmeli cebiri ve her $\varphi : L \mapsto [B]$ homomorfizmi için, $\psi \varepsilon = \varphi$ olacak şekilde bir tek $\psi : [U(L)] \mapsto [B]$ homomorfizmi vardır.

L, X üzerinde bir serbest Lie cebiri ise X tarafından üretilen serbest asosyatif cebir, L nin evrensel enveloping cebirine izomorftur.

Tanım 2.18 $F, X = \{x_1, \dots, x_n\}$ tarafından üretilen serbest Lie cebiri olsun. $[\dots [x_{i_1} x_{i_2}], \dots x_{i_k}]$ şeklindeki bir kelimeye bir monomial denir.

Teorem 2.19 (Poincare-Birkhoff-Witt) L, K cismi üzerinde bir Lie cebiri olsun. Eğer, E, L nin iyi sıralı bir bazı ise, o zaman $\varepsilon : L \longrightarrow [U(L)]$ kanonik dönüşümü injektif olup, $U(L)$ evrensel enveloping cebiri, 1 ve $e_1.e_2 \dots e_n, e_1 \geq e_2 \geq \dots \geq e_n, n \geq 1$ formundaki monomialler tarafından üretilen bir serbest K -modüldür.

L bir serbest Lie cebiri ve $a, b \in L$ olmak üzere, $[a^r, b^k]$ ile $\left[\underbrace{b, a, \dots, a}_r, \underbrace{b, \dots, b}_{k-1} \right]$ şeklindeki bir elemanı göstereceğiz.

Tanım 2.20 R bir halka ve P bir R -modül olsun. Eğer, $A \xrightarrow{g} B \longrightarrow 0$ tam dizi (yani g bir epimorfizm) olmak üzere, verilen herhangi bir $f : P \longrightarrow B, R$ -modül homomorfizmi için, eğer,

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ h \swarrow & \downarrow f & \\ A & \xrightarrow{g} B & \longrightarrow 0 \end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde yani $gh = f$ olacak şekilde bir $h : P \longrightarrow A, R$ -modül homomorfizmi varsa, P modülüne projektif modül denir.

Tanım 2.21 R bir halka ve J bir R -modül olsun. Eğer, $0 \longrightarrow A \xrightarrow{g} B$ tam dizi (yani g bir monomorfizm) olmak üzere, verilen herhangi bir $f : A \longrightarrow J, R$ -modül homomorfizmi için, eğer,

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{g} & B \\ & & f \downarrow & \swarrow h & \\ & & J & & \end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde yani $hg = f$ olacak şekilde bir $h : B \longrightarrow J, R$ -modül homomorfizmi varsa, J modülüne injektif modül denir.

3. BİR SERBEST GRUBUN OTO-SABİT ALT GRUPLARI

3.1 Endo-Sabit Alt Gruplar

F_n , bir X kümesi tarafından üretilen serbest grup olsun. Bu bölümde, F_n grubunun $End(F_n)$ nin bir alt kümesi tarafından sabit bırakılan alt gruplarını inceleyeceğiz.

Tanım 3.1 Herhangi bir $S \subseteq End(F_n)$ için, F_n de S nin sabit bıraktığı alt küme,

$$Sab(S) = \{u \in F_n \mid \text{her } \phi \in S \text{ için } \phi(u) = u\}$$

olarak tanımlanır. S boş ise $Sab(S) = F_n$ dir.

$Sab(S)$, F_n nin alt grubu olup, bu alt gruba F_n nin S -sabit alt grubu denir.

Tanım 3.2 H, F_n nin bir alt grubu olsun. $S \subseteq End(F_n)$ için $H = Sab(S)$ oluyorsa H ye F_n nin endo-sabit alt grubu denir.

Tanım 3.3 (a) Eğer $S \subseteq Inj(F_n)$ ise H ye F_n nin mono-sabit alt grubu denir.

(b) Eğer $S \subseteq Oto(F_n)$ ise H ye F_n nin oto-sabit alt grubu denir.

(c) Eğer bazı $\phi \in End(F_n)$ için $H = Sab(\phi)$ ise H ye F_n nin 1-endo-sabit alt grubu denir. (Burada $Sab(\{\phi\})$ yerine $Sab(\phi)$ yazacağız).

(d) Eğer $\phi \in Inj(F_n)$ ve $H = Sab(\phi)$ ise H ye F_n nin 1-mono-sabit alt grubu denir.

(e) Eğer $\phi \in Oto(F_n)$ ve $H = Sab(\phi)$ ise H ye F_n nin 1-oto-sabit alt grubu denir.

F_n nin herhangi bir maksimal devirli alt grubu 1-oto-sabittir. Çünkü bu devirli grup, uygun bir iç otomorfizm tarafından sabit bırakılan bir alt gruptur.

Not: Dikkat edilecek olursa, bir oto-sabit alt grup, 1-oto-sabit alt grupların bir kesişimidir. 1-oto-sabit alt grupların kesişimi de oto-sabit bir alt gruptur.

Tanım 3.4 F_n nin rankı n olan 1-oto-sabit alt grubuna, maksimum ranklı 1-oto-sabit alt grubu denir.

Önerme 3.5 Eğer A, B, C bir G grubunun alt grupları ise ve A, B nin bir serbest çarpanı ise, o zaman $A \cap C, B \cap C$ nin bir serbest çarpanıdır.

İspat: Bu Önermenin ispatı (Serre, 1980; Dicks ve Ventura, 1989) da bulunabilir. ■

Biz burada G nin serbest grup olması durumu ile ilgileneceğiz.

Teorem 3.6 (Takahasi, 1951) Eğer H , F_n nin sonlu üretilmiş bir alt grubu ise, o zaman F_n nin H yi içeren sonlu tüm alt grupların bir $\mathfrak{O}$ kümesi vardır ve F_n nin H yi içeren her altgrubu $\mathfrak{O}$ kümesine ait bir serbest çarpana sahiptir.

İspat: Bu Teoremin ispatı (Takahasi, 1951) de, ayrıca bir grafik-teori ispatı da (Ventura, 1997) de bulunabilir. ■

Teorem 3.7 (Takahasi, 1951) Eğer $(H_m \mid m \geq 1)$ bir serbest grubun altgruplarının bir sayılabilir azalan zinciri $(H_1 \geq H_2 \geq H_3 \geq \dots)$ ve bütün m ler için, bazı pozitif tamsayılar H_m nin rankını belirliyor ise, o zaman $\bigcap_{m \geq 1} H_m$ kesişimi, bütün fakat sonlu sayıda m için, H_m nin bir serbest çarpanıdır.

İspat: Bu Teoremin ispatı (Takahasi, 1951) veya (Magnus ve ark., 1976) da, ayrıca bir grafik-teori ispatı da (Dicks ve Ventura, 1996) da bulunabilir. ■

Teorem 3.8 (Howson, 1954) Eğer A ve B bir serbest grubun sonlu üretilmiş alt grupları ise o zaman $A \cap B$ de sonlu üretilmiştir.

İspat: Bu Teoremin ispatı (Howson, 1954) de ve (Stallings, 1983) de verilen Gerten'in çok kısa grafik-teori ispatında da bulunabilir. ■

Şimdi, F_n nin endomorfizmlerini düşünelim.

Teorem 3.9 (Bestvina ve Handel, 1992; Imrich ve Turner, 1989) F_n nin her 1-endo-sabit alt grubu en fazla n ranka sahiptir.

İspat: W. Imrich ve E. C. Turner (Imrich ve Turner, 1989), M. Bestvina ve M. Handel (Bestvina ve Handel, 1992) tarafından ispatlanan 1-oto-sabit durumunu kullanarak, bu teoremi ispatlamışlardır. Aslında bu, ϕ nin yeterli derecede yüksek bir üssünün üzerinde, ϕ nin etkisini düşünmek için yeterlidir. ■

Şimdi yukarıdaki Teoreme temel oluşturan ve önemli bir yere sahip olan aşağıdaki Teoremi verelim.

Teorem 3.10 (Dyer ve Scott, 1975) Eğer F_n nin bir ϕ otomorfizmi sonlu dereceli ise, o zaman F_n nin $Sab(\phi)$ sabit alt grubu, F_n nin bir serbest çarpanıdır.

İspat: Bu Teoremin ispatı (Dyer ve Scott, 1975) de bulunabilir. ■

Sonuç 3.11 Eğer $\phi \in \text{End}(F_n)$ ve m bir pozitif tamsayı ise, o zaman $Sab(\phi)$, $Sab(\phi^m)$ nin bir serbest çarpanıdır.

İspat: $\phi \in \text{End}(F_n) \Rightarrow Sab(\phi), F_n$ nin 1-endo-sabit alt grubudur.

$\phi^m \in \text{End}(F_n) \Rightarrow Sab(\phi^m), F_n$ nin 1-endo-sabit alt grubudur.

Teorem 3.9 dan, $Sab(\phi^m)$ en fazla n ranka sahip olabileceğinden, $Sab(\phi^m)$ sonlu ranklı bir serbest grup olur. Ayrıca ϕ sonlu dereceli bir otomorfizm olarak $Sab(\phi^m)$ üzerine etki eder. Böylece Teorem 3.10 dan, $Sab(\phi)$, $Sab(\phi^m)$ nin bir serbest çarpanı olur. ■

Sonuç 3.12 Eğer, $\phi \in \text{End}(F_n)$ ise o zaman $\{Sab(\phi^m) \mid m \geq 1\}$ içermeye göre bir maksimum elemana sahiptir.

İspat: Her pozitif m tamsayısı için $H_m = Sab(\phi^m)$ olsun. Teorem 3.9 dan, her bir H_m en fazla n ranka sahip bir serbest gruptur.

m yi, H_m , mümkün olan maksimum ranka sahip olacak şekilde seçelim. Sonuç 3.11 den, eğer r bir pozitif tamsayı ise, o zaman H_m ve H_r, H_{mr} nin serbest çarpanlarıdır.

H_m nin rankının maksimumluğundan, $H_m = H_{mr}$ olduğunu söyleyebiliriz. Bu yüzden H_r, H_m nin bir serbest çarpanı olup, H_m bir maksimum eleman olur. Bu maksimum eleman ϕ nin bütün sonlu yörüngelerini içerir ve bazen ϕ nin periyodik kümesi olarak isimlendirilir. ■

Teorem 3.13 (Bergman, 1999) Eğer $M, \text{End}(F_n)$ nin bir altmonoidi ise, o zaman $\psi \in M$ vardır öyle ki $Sab(M), Sab(\psi(M))$ nin bir serbest çarpanıdır ve M nin $\psi(M)$ yarı altgrubu $\text{Inj}(\psi(F_n))$ nin içinde $\text{End}(\psi(F_n))$ nin bir yarı alt grubu olarak görünür.

İspat: (Bergman, 1999) dan, $\psi(M)$ nin rankını mümkün olduğu kadar küçük düşünerek $\psi \in M$ yi alalım. $\psi(M), \psi(F_n)$ ye injektif olarak etki eder. Bu yüzden, $\psi(M), \text{Inj}(\psi(F_n))$ nin bir yarı alt grubu olarak görünebilir. Şimdi,

$$H = \psi^{-1}(Sab(\psi(M))) \leq F_n$$

olduğunu düşünelim. Her $\phi \in M$ için, $\psi\phi \in \psi(M)$ olduğundan, ϕ nin $Sab(\psi(M))$ ye kısıtlanması

$$\psi : H \longrightarrow Sab(\psi(M))$$

örten homomorfizmin bir parçasıdır. (Bergman, 1999) dan,

$$H = \psi^{-1}(Sab(\psi(M)))$$

$Sab(\psi(M))$ nin bir serbest çarpanıdır. Fakat M birimi içerdiğinden,

$$H = \psi^{-1}(Sab(\psi(M)))$$

kesinlikle $Sab(M)$ dir. Yani $H = Sab(M)$ olur.

Buradan da $Sab(M)$, $Sab(\psi(M))$ nin bir serbest çarpanı olduğu elde edilmiş olur. ■

Bu Teoremin başka bir ispatı (Dicks ve Dunwoody, 1999) da da bulunabilir.

3.2 Oto-Sabit Alt Gruplar

$S \subseteq End(F_n)$ olsun. Bu bölümde, $Sab(S)$, $Sab(\phi)$ nin bir serbest çarpanı olacak şekilde, $End(F_n)$ nin S tarafından üretilmiş bir altmonoidinin içinde olan bir ϕ endomorfizminin olduğunu ispatlayacağız.

Ayrıca, F_n nin herhangi bir oto-sabit alt grubunun (veya mono-sabit, endo-sabit), F_n nin 1-oto-sabit alt grubunun (veya 1-mono-sabit, 1-endo-sabit) bir serbest çarpanı olduğu gösterilecektir.

Önerme 3.14 Eğer $\phi, \psi \in End(F_n)$ ve ψ injektif ise, o zaman $Sab(\psi, \phi)$, $Sab(\psi^t \phi)$ nin serbest çarpanı olacak şekilde pozitif bir t tamsayısı vardır.

İspat: Sonuç 3.12 den her r pozitif tamsayısı için,

$$Sab(\psi^{mr}) = Sab(\psi^m)$$

olacak şekilde bir pozitif m tamsayısı vardır ($Sab(\psi^m)$ ve $Sab(\psi^r)$, $Sab(\psi^{mr})$ nin serbest çarpanı olduğundan ve $Sab(\psi^m)$ nin maksimalliğinden).

$\psi^m = \eta$ olsun. O zaman, her pozitif r tamsayısı için,

$$Sab(\eta^r) = Sab(\eta)$$

olur. Aynı zamanda ψ injektif olduğundan η de injektif olur.

Teorem 3.9 dan, $Sab(\phi)$ ve $Sab(\eta)$ sonlu üretilmiş olduğundan, Teorem 3.8 den,

$$Sab(\eta) \cap Sab(\phi) = Sab(\eta, \phi)$$

nin de sonlu üretilmiş olduğu elde edilir.

Teorem 3.6 dan, $Sab(\eta, \phi)$, F_n nin sonlu üretilmiş alt grubu olduğundan, F_n nin $Sab(\eta, \phi)$ yi içeren sonlu üretilmiş alt gruplarının bir sonlu $\mathcal{D}$ kümesi vardır ve F_n nin

$Sab(\eta, \phi)$ yi içeren her alt grubu bir serbest çarpan olarak $\mathfrak{D}$ kümesinin bazı elemanlarına sahiptir.

r bir pozitif tamsayı olsun. O zaman, $Sab(\eta^r \phi)$, F_n nin $Sab(\eta, \phi)$ yi içeren bir alt grubudur. Bu yüzden, (Teorem 3.6 dan) M_r , $Sab(\eta^r \phi)$ nin bir serbest çarpanı olacak şekilde bazı $M_r \in \mathfrak{D}$ vardır. Herhangi bir $s > r$ pozitif tamsayısı için,

$$Sab(\eta, \phi) \leq M_r \cap M_s \leq Sab(\eta^r \phi, \eta^s \phi) \quad (3.1)$$

dir. Fakat eğer, $x \in Sab(\eta^r \phi, \eta^s \phi)$ ise o zaman,

$$\eta^{s-r}(x) = \eta^{s-r}(\eta^r(\phi(x))) = \eta^s(\phi(x)) = x$$

olup, $\eta(x) = x$ olur. Bundan dolayı,

$$\eta^r \phi(x) = x = \eta^r(x)$$

elde edilir. Fakat η injektif olduğundan $\phi(x) = x$ elde edilir. Buradanda, $x \in Sab(\eta, \phi)$ olup,

$$Sab(\eta^r \phi, \eta^s \phi) \leq Sab(\eta, \phi)$$

olur. Ayrıca, (3.1) den de,

$$Sab(\eta, \phi) \leq M_r \cap M_s \leq Sab(\eta^r \phi, \eta^s \phi) \leq Sab(\eta, \phi)$$

olup, buradan da bütün farklı r, s pozitif tamsayıları için,

$$Sab(\eta, \phi) = M_r \cap M_s$$

elde edilir. $\mathfrak{D}$ sonlu olduğundan $M_r = M_s$ olacak şekilde $s > r$ pozitif tamsayıları vardır ve

$$M_r = M_r \cap M_s = Sab(\eta, \phi)$$

olup, M_r , $Sab(\eta^r \phi)$ nin serbest çarpanı olduğundan o zaman ,

$$M_r = Sab(\eta, \phi), Sab(\eta^r \phi) = Sab(\psi^{mr} \phi) \quad (*)$$

nin bir serbest çarpanı olur. Sonuç 3.11 den, $Sab(\psi)$, $Sab(\psi^m) = Sab(\eta)$ nin bir serbest çarpanıdır. Ayrıca, Önerme 3.5 den,

$$Sab(\psi) \cap Sab(\phi) = Sab(\psi, \phi)$$

$$Sab(\eta) \cap Sab(\phi) = Sab(\eta, \phi)$$

nin bir serbest çarpanıdır.

(*) dan dolayı $Sab(\psi, \phi)$, $Sab(\psi^{mr} \phi)$ nin bir serbest çarpanıdır. ■

Önerme 3.15 $S, Inj(F_n)$ nin boş olmayan bir alt kümesi ve $M(S), Inj(F_n)$ nin S tarafından üretilmiş alt yarıgrubu olsun. O zaman, $Sab(S), Sab(\phi)$ nin bir serbest çarpanı olacak şekilde $\phi \in M(S)$ vardır.

İspat: κ, S nin eleman sayısını göstereyin. $1 \leq \kappa \leq \aleph_0$ dır.

$\kappa = 1$ durumu açıktır.

Varsayalım ki $2 \leq \kappa < \aleph_0$ ve sonuç, κ dan küçük kümeler için doğru olsun. $\psi \in S$ alalım. Tümevarım hipotezinden $Sab(S - \{\psi\}), Sab(\phi)$ nin bir serbest çarpanı olacak şekilde $\phi \in M(S - \{\psi\})$ vardır. Önerme 3.5 den,

$$Sab(S - \{\psi\}) \cap Sab(\psi) = Sab(S)$$

$$Sab(\phi) \cap Sab(\psi) = Sab(\psi, \phi)$$

nin bir serbest çarpanıdır.

$S \subseteq Inj(F_n)$ ve $\psi \in S$ olduğundan ψ injektif olup, Önerme 3.14 den, $Sab(\psi, \phi), Sab(\psi^t \phi)$ nin bir serbest çarpanı olacak şekilde bir pozitif t tamsayısı vardır.

$Sab(S), Sab(\psi^t \phi)$ nin bir serbest çarpanı olup, aynı zamanda $\psi^t \phi \in M(S)$ olduğundan, tümevarım hipotezinden sonucun sonlu kümeler için sağlandığı gösterilmiş olur. Geriye $\kappa = \aleph_0$ durumunu göstermek kaldı. Bu yüzden S , boş olmayan sonlu

$$(S_m \mid m \geq 1)$$

alt kümelerinin sayılabilir artan bir dizisinin birleşimi olsun. O zaman,

$$(Sab(S_m) \mid m \geq 1)$$

kesişimleri $Sab(S)$ olan alt grupların sayılabilir azalan bir dizisidir.

Her $m \geq 1$ için, S_m ler sonlu olduğundan ve sonlu kümeler için, Önermenin doğruluğu tümevarım hipotezinden gösterildiğinden, her $m \geq 1$ için, $Sab(S_m), Sab(\phi_m)$ nin bir serbest çarpanı olacak şekilde $\phi_m \in M(S_m)$ vardır.

Teorem 3.9 dan, her $Sab(S_m)$ en fazla n ranka sahiptir. Bu yüzden, Teorem 3.7 den,

$$\bigcap_{m \geq 1} Sab(S_m) = Sab(S)$$

$Sab(S_m)$ nin bir serbest çarpanı olacak şekilde bir pozitif m tamsayısı vardır.

Her $m \geq 1$ için $Sab(S_m)$, $Sab(\phi_m)$ nin bir serbest çarpanı olacak şekilde $\phi_m \in M(S_m)$ vardı. Bu yüzden, $Sab(S)$, $Sab(\phi_m)$ nin bir serbest çarpanı olacak şekilde,

$$\phi_m \in M(S_m) \subseteq M(S)$$

vardır. ■

Teorem 3.16 n pozitif bir tamsayı, F_n , n -ranklı bir serbest grup, S , $End(F_n)$ nin bir alt kümesi ve M , $End(F_n)$ nin S tarafından üretilmiş alt monoidi olsun. O zaman, $Sab(S)$, $Sab(\phi)$ nin bir serbest çarpanı olacak şekilde $\phi \in M$ vardır.

İspat: Teorem 3.13 den, $\psi(M)$, $Inj(\psi(F_n))$ nin bir alt yarıgrubu olarak görülebilecek ve $Sab(M)$, $Sab(\psi(M))$ nin bir serbest çarpanı olacak şekilde $\psi \in M$ vardır (M , $End(F_n)$ nin bir alt monoidi).

$Inj(\psi(F_n))$ nin $\psi(M)$ boş olmayan alt kümesi ve alt yarıgrubu için, Önerme 3.15 i kullanırsak; $Sab(\psi(M))$, $Sab(\phi)$ nin bir serbest çarpanı olacak şekilde,

$$\phi \in \psi(M) \subseteq M \subseteq End(F_n)$$

vardır.

$Sab(M)$, $Sab(\psi(M))$ nin; $Sab(\psi(M))$ de $Sab(\phi)$ nin bir serbest çarpanı olduğundan,

$$Sab(S) = Sab(M)$$

$Sab(\phi)$ nin bir serbest çarpanıdır. $M \subseteq End(F_n)$ olduğundan, $S = M$ alabiliriz. ■

1-endo-sabit alt grupların kümesinin keyfi ya da sonlu kesişimler altında kapalı olduğu bilinmemesine rağmen, $\phi^2 = \phi$ olacak şekildeki ϕ için, $H = Sab(\phi)$ alt gruplarının alt kümesi keyfi kesişimler altında kapalıdır (Bergman, 1999).

Teorem 3.16 ya göre, acaba F_n nin 1-oto-sabit alt grubunun bir serbest çarpanının, oto-sabit olması gereklidir? Bu $n \leq 2$ için direkt olarak ispatlanabilir. Fakat Önerme 3.27 de, $n \geq 3$ olması durumu için aksi örnekler olduğunu göreceğiz.

Şimdi Teorem 3.16 nın bazı sonuçlarına bakalım:

Sonuç 3.17 (a) F_n nin her oto-sabit alt grubu, bazı 1-oto-sabit alt gruplarının bir serbest çarpanıdır.

(b) F_n nin her mono-sabit alt grubu, bazı 1-mono-sabit alt gruplarının bir serbest çarpanıdır.

(c) F_n nin her endo-sabit alt grubu, bazı 1-endo- sabit alt gruplarının bir serbest çarpanıdır.

Sonuç 3.18 (Dicks ve Ventura, 1996; Bergman, 1999) F_n nin her endo-sabit alt grubu en fazla n ranka sahiptir.

Bu sonuç, G.M.Bergman tarafından (Bergman, 1999) da gösterilmiştir.

3.3 Maksimum Ranklı Sabit Alt Gruplar

Bu bölümde alt grupların maksimum ranka sahip olduğu durumları düşüneceğiz. Aşağıdaki iki Önerme, Teorem 3.16 nın özel bir durumu olarak hemen elde edilir.

Önerme 3.19 Eğer S , $Sab(S)$ nin rankı n olacak şekilde $End(F_n)$ nin bir alt kümesi ise, o zaman, $End(F_n)$ nin S tarafından üretilmiş alt monoidi

$$Sab(S) = Sab(\phi)$$

olacak şekilde bir ϕ elemanını içerir.

Önerme 3.20 (a) F_n nin maksimum ranklı her oto-sabit alt grubu, maksimum ranklı 1-oto-sabit alt gruptur.

(b) F_n nin maksimum ranklı her mono-sabit alt grubu, maksimum ranklı 1-mono-sabit alt gruptur.

(c) F_n nin maksimum ranklı her endo-sabit alt grubu, maksimum ranklı 1-endo-sabit alt gruptur.

Şimdi Collins ve Turner'ın bu alandaki 2 önemli çalışmasını hatırlayalım:

Teorem 3.21 (Turner, 1996) Eğer $\phi \in End(F_n)$ ve $Sab(\phi)$, n ranka sahipse, o zaman $\phi \in Oto(F_n)$ dir.

Teorem 3.22 (Colins ve Turner, 1996) H , F_n nin bir alt grubu ve m , H nin F_n^{ab} deki (serbest abelyen) görüntüsünün rankını gösterebilir. O zaman, H , F_n nin maksimum ranklı 1-oto-sabit alt grubudur ancak ve ancak F_n nin $0 \leq l \leq n$ için,

$$F_l = \langle x_i \mid 1 \leq i \leq n \rangle$$

şeklinde kurulan bir $(x_i \mid 1 \leq i \leq n)$ bazı varsa ve H nin, $1 \leq j \leq m$ için $y_j = x_j$ ve $m+1 \leq k \leq n$ için F_n nin herhangi bir elemanının bir öz kuvveti olmayan (bu nedenle özellikle $w_k \neq 1$), bazı $w_k \in H \cap F_{k-1}$ için, $y_k = [w_k, x_k]$ olan bir

$$(y_i \mid 1 \leq i \leq n)$$

bazı varsa. Bu durumda, $0 \leq l \leq n$ için $(y_i \mid 1 \leq i \leq l)$, $H \cap F_l$ nin bir bazıdır.

Şimdiye kadar elde ettiğimiz sonuçları aşağıdaki Teorem ile özetleyelim.

Teorem 3.23 n pozitif bir tamsayı, F_n rankı n olan bir serbest grup ve H, F_n nin n ranklı bir alt grubu olsun. m de H nin F_n^{ab} içindeki (serbest abelyen) görüntüsünün rankını gösterebilir. O zaman, aşağıdakiler denktir:

(a) H, F_n nin 1-oto-sabit alt grubudur.

(b) H, F_n nin 1-mono-sabit alt grubudur.

(c) H, F_n nin 1-endo-sabit alt grubudur.

(d) H, F_n nin oto-sabit alt grubudur.

(e) H, F_n nin mono-sabit alt grubudur.

(f) H, F_n nin endo-sabit alt grubudur.

(g) F_n nin bir $(x_i \mid 1 \leq i \leq n)$ bazı ve H nin bir $(y_i \mid 1 \leq i \leq n)$ bazı vardır öyle ki $1 \leq j \leq m$ için $y_j = x_j$, $m+1 \leq k \leq n$ ve $w_k \in H \cap F_{k-1}$ olmak üzere $y_k = [w_k, x_k]$ olsun. Burada, w_k öz kuvvet değildir.

İspat: Önerme 3.20, (a) nın (d) ye, (b) nin (e) ye ve (c) nin (f) ye denk olduğunu; Teorem 3.21, (a), (b) ve (c) nin denk olduğunu ve Teorem 3. 22 de, (a) ve (g) nin denk olduğunu gösterir. ■

3.4 Noktasal Sabit Alt Gruplar

F_n nin herhangi bir H alt grubu için, $Oto(F_n)$ nin H nin her elemanını sabit bırakan elemanlarının kümesini $Oto_H(F_n)$ ile gösterelim. $Oto_H(F_n)$ kümesine, H nin noktasal sabiti denir. Bu kümeyi daha açık olarak,

$$Oto_H(F_n) = \{\phi \in Oto(F_n) \mid \text{her } h \in H \text{ için } \phi(h) = h\}$$

şeklinde ifade edebiliriz. F_n nin,

$$S \longmapsto Sab(S) \text{ ve } H \longmapsto Oto_H(F_n)$$

şeklinde verilen alt grupları ve $Oto(F_n)$ nin alt kümeleri arasında birebir bir eşleme vardır. Bu durum, birbirine karşılık gelen kapalı alt kümeler arasında standart bir bijeksiyona sebep olur. Bundan dolayı, $Oto(F_n)$ nin kapalı alt kümeleri, F_n nin noktasal sabitleyeni iken, F_n nin alt grupları, F_n nin bir oto-sabit alt grubudur. F_n nin herhangi bir H alt grubu için, F_n nin H yi içeren bütün 1-oto-sabit alt gruplarının kesişimi olan $Sab(Oto_H(F_n))$, H nin F_n deki oto-sabit kapanışıdır.

Biz bu bölümde maksimum ranklı durumla ilgileneceğiz. Bu bölümün amacı bazı ilginç olan özel durumları hesaplamaktır. $Oto(F_n)$ nin maksimum ranklı oto-sabit alt gruplarına karşılık gelen kapalı alt grupları tanımlayarak başlayalım.

Önerme 3.24 H, F_n nin maksimum ranklı bir oto-sabit alt grubu olsun ve m de, H nin F_n^{ab} deki (serbest abelyen) görüntüsünün rankını gösterebilirsin. O zaman, $End_H(F_n) = Oto_H(F_n)$, $Oto(F_n)$ nin $n - m$ ranklı bir serbest abelyen grubudur.

İspat: Teorem 3.22 den, F_n nin bir $(x_i \mid 1 \leq i \leq n)$ ve H nin bir $(y_i \mid 1 \leq i \leq n)$ bazı vardır öyleki $1 \leq j \leq m$ için $y_j = x_j$, $m + 1 \leq k \leq n$ için $y_k = [w_k, x_k]$ dir. Burada $w_k \in H \cap F_{k-1}$ bir öz kuvvet değildir.

$l, m + 1 \leq l \leq n$ olan bir tamsayı olsun. O zaman, $1 \leq i \leq n$ için, eğer $i \neq l$ ise

$$\phi_l(x_i) = x_i \text{ ve } \phi_l(x_l) = w_l x_l$$

olan, F_n nin bir tek ϕ_l endomorfizmi vardır. ϕ_l nin bir otomorfizm olduğu açıktır ve ϕ_l, w_l yi sabit bırakır.

$$\begin{aligned} \phi_l(w_l(x_1, \dots, x_{l-1})) &= \left(w_l \left(\underbrace{\phi_l(x_1)}_{x_1}, \underbrace{\phi_l(x_2)}_{x_2}, \dots, \underbrace{\phi_l(x_{l-1})}_{x_{l-1}} \right) \right) \\ &= w_l(x_1, x_2, \dots, x_{l-1}) \end{aligned}$$

Bundan dolayı, $\phi_l \in Oto_H(F_n)$ dir. Ayrıca, $\phi_l (m + 1 \leq l \leq n)$ ler değişmelidir.

Şimdi herhangi bir $\phi \in End_H(F_n)$ elemanını düşünelim.

$1 \leq j \leq m$ için, $\phi(x_j) = \phi(y_j) = y_j = x_j$ olduğu görülür. Eğer, $m + 1 \leq k \leq n$ ise,

$$\phi(x_k) = w_k^{r_k} x_k$$

olacak şekilde bir tek r_k tamsayısı olduğunu iddia ediyoruz:

Bunu göstermek için,

$$X_k = \phi(x_k)$$

olsun. Aynı zamanda, ϕ , w_k ve y_k yı sabit bıraktığından dolayı w_k ve y_k , H nin içindedir. Bu yüzden,

$$w_k^{-1}x_k^{-1}w_kx_k = y_k = \phi(y_k) = \phi([w_k, x_k]) = [\phi(w_k), \phi(x_k)] = [w_k, X_k] = w_k^{-1}X_k^{-1}w_kX_k$$

olur. Buradan da,

$$w_k^{-1}x_k^{-1}w_kx_k = w_k^{-1}X_k^{-1}w_kX_k,$$

$$x_k^{-1}w_kx_k = X_k^{-1}w_kX_k,$$

$$x_k^{-1}w_kx_kX_k^{-1} = X_k^{-1}w_k,$$

$$X_kx_k^{-1}w_kx_kX_k^{-1} = w_k,$$

$$X_kx_k^{-1}w_kx_k = w_kX_k,$$

$X_kx_k^{-1}w_k = w_kX_kx_k^{-1}$, olduğu elde edilir ki, bu da $X_kx_k^{-1}$ in, w_k ile değişmeli olduğunu gösterir. Bu yüzden ve w_k da bir öz kuvvet olmadığından, bir tek r_k tamsayısı için,

$$X_kx_k^{-1} = w_k^{r_k}$$

dır. Bu da iddiamızı ispatlar. Böylece,

$$X_kx_k^{-1} = w_k^{r_k},$$

$$X_k = w_k^{r_k}x_k,$$

$$\phi(x_k) = w_k^{r_k}x_k \text{ olur. Buradan da, tek olan } r_k \text{ tamsayıları için, } \phi = \underbrace{\phi_{m+1}^{r_{m+1}} \dots \phi_n^{r_n}}_{(n-m \text{ tane})} \text{ sonucunu}$$

çıkarırız.

Böylece ispat tamamlanır. ■

Sonuç 3.25 Varsayalım ki S , $Sab(S)$ nin rankı n olacak şekilde, $End(F_n)$ nin bir alt kümesi olsun ve m de $Sab(S)$ nin F_n^{ab} deki (serbest abelyen) görüntüsünün rankını gösterebilirsin. O zaman, S , $Oto(F_n)$ nin $n - m$ ranklı bir serbest abelyen alt grubunun içindedir (ve S , $Oto(F_n)$ nin en fazla $n - m$ ranklı bir serbest abelyen alt grubunu üretir).

$n = m$ için, aşıkardurumu görmezden gelirse, S yi bir tek elemandan meydana gelecek şekilde seçebileceğimizi görürüz ki, bu durumda bu elemanın ürettiği (serbest abelyen) alt grubun rankı 1 dir (rank $Sab(S) = 1$).

Önerme 3.26 a, b, c , F_n nin bir $\mathfrak{B}$ bazının farklı elemanları olsun. Eğer, A, B, C ,

$$[A, B] = [a, b] \text{ ve } [A, C] = [a, c]$$

olacak şekilde F_n nin elemanlarıysa, o zaman $A = a$, $B = a^r b$ ve $C = a^s c$ olacak şekilde r, s tamsayıları vardır.

İspat: Bu Önermenin ispatı (Lyndon ve Schupp, 1977; Ventura, 1997) de bulunabilir. ■

Önerme 3.27 $n \geq 3$ ve a, b, c, F_n nin bir X bazının farklı elemanları olsun.

$$H = \langle X - \{a, b, c\} \cup \{[a, b], [a, c]\} \rangle$$

ve

$$K = \langle X - \{b, c\} \cup \{[a, b], [a, c]\} \rangle = H * \langle a \rangle$$

olsun. O zaman, K, H nin endo-sabit kapanışıdır ve H, K nın bir öz(proper) serbest çarpanıdır. Ayrıca K, F_n nin maksimum ranklı 1-oto-sabit alt grubudur.

İspat: Önerme 3.26 dan dolayı, F_n nin H yi sabit bırakan herhangi bir endomorfizmi a elemanını da sabit bırakır. Bu yüzden K, H nin endo-sabit kapanışı içindedir.

$X - \{b, c\} \cup \{[a, b], [a, c]\}$, K nın, Teorem 3.22 de verilen formdaki bir bazı olduğundan, K nın F_n nin maksimum ranklı 1-oto-sabit alt grubu olduğunu görürüz. ■

Bundan dolayı $n \geq 3$ için, Önerme 3.27, F_n nin 1-oto-sabit alt gruplarının oto-sabit alt grubu olmayan hatta endo-sabit olmayan serbest çarpan örneklerini vermektedir.

F_n nin bütün oto-sabit alt gruplarının kümesinin keyfi kesişimler altında kapalı olduğu açıktır. Önerme 3.27 den, bu küme eğer $n \geq 3$ ise, elde edilen serbest çarpanlar altında kapalı değildir. Ayrıca, F_n nin her 1-oto-sabit alt grubunun, F_n nin oto-sabit alt grubu olduğu açıktır.

4. SERBEST LİE CEBİRLERİNİN OTOMORFİZMLERİNİN SABİT NOKTALARI

K karakteristiği 2 olan bir cisim, V , K cismi üzerinde bir vektör uzayı ve L , V üzerindeki serbest Lie cebiri olsun.

Bu bölümde L nin sabit nokta alt uzaylarının boyutlarını belirlemeye çalışacağız.

G , derecesi 2 olan devirli bir grup ve V , regüler KG -modül olsun. Bu durumda, G nin her elemanı V nin vektör uzayı olarak bir otomorfizmini belirtir. Bu otomorfizm, L nin Lie cebiri olarak bir otomorfizmine tek olarak genişletilebilir. Bu şekilde, L bir KG -modül olup, her bir L_n bir alt modüldür.

Tanım 4.1 $L_n^G = \{u \in L_n : ug = u \text{ bütün } g \in G \text{ için}\}$ kümesine L nin sabit-nokta alt uzayı denir.

L_n^G alt uzaylarının boyutlarının belirlenmesi temel problemlerden birisidir.

Burada, bütün n ler için,

$$\dim(L_n^G) = \frac{1}{2n} \sum_{\substack{d \mid n \\ d \text{ tek}}} \mu(d) 2^{n/d} \quad (4.1)$$

olduğunu ispatlayacağız.

Bu formül bütün n tek sayıları ve $n \leq 20$ olacak şekildeki çift sayılar (bilgisayar hesaplamaları kullanılarak) için, M.W.Short (Short, 1995) tarafından tahmin edilmiştir.

Bu sonuç, L.G.Kovács'ın, "Kourovka Notebook" (Kovács, 1990) isimli kitapta 11.47. soru olarak bulunan sorusuna cevap verir.

Teorem 4.2 V , sonlu m -boyutlu boş olmayan serbest bir KG -modül ve L , V üzerinde bir serbest Lie cebiri olsun. O zaman,

$$\dim(L_n^G) = \frac{1}{2n} \sum_{\substack{d \mid n \\ d \text{ tek}}} \mu(d) m^{n/d}$$

dir.

L nin bir bazını veren aşağıdaki sonuçtan, Teorem 4.2 elde edilecektir.

Teorem 4.3 V , sonlu m -boyutlu sıfırdan farklı bir serbest KG -modül ve L , V üzerinde bir serbest Lie cebiri olsun. Ayrıca, G , g tarafından üretilen devirli grup ve her n için, $\mathfrak{C}_n$, L_n nin mümkün olan en büyük boyutlu serbest KG -alt modülünü serbestçe üreten bir alt

kümesi ve $\mathfrak{C} = \bigcup_{n \geq 1} \mathfrak{C}_n$ olsun. O zaman, $c \in \mathfrak{C}$ ve $r \geq 0$ için, c, cg ve $[(cg)^{2^r}, c^{2^r}]$ elemanları, L nin bir bazıdır.

$[(cg)^{2^r}, c^{2^r}]$ elemanları, L nin evrensel enveloping cebirinin elemanları olup, bu elemanlar aynı zamanda L nin elemanlarıdır.

Önerme 4.5 ten,

$$[(cg)^{2^r}, c^{2^r}] = [c, cg, cg, \dots, cg, c, \dots, c]$$

olup, sağ tarafta c ve cg nin her ikisinden de 2^r tane vardır. Ayrıca,

$$[(cg)^{2^r}, c^{2^r}]g = [c^{2^r}, (cg)^{2^r}]$$

dir.

Yani c ve cg elemanları, g tarafından birbirine dönüştürülür ve bu elemanlar bir regüler KG -modülünü gerer.

Her bir c, cg ve $[(cg)^{2^r}, c^{2^r}]$ elemanı, bir L_n alt uzayına aittir. Bu nedenle, Teorem 4.3, L nin bir parçalanışını vermekle birlikte, L_n nin bir serbest KG -modülle, aşikar KG -modülün bir direkt toplamı olduğunu gösterir.

Bu bölümde, Teorem 4.3 den Teorem 4.2 in elde edilişini vereceğiz.

Ayrıca, tamsayılar ve karakteristiği 2 ye eşit olmayan cisimler üzerindeki Lie cebirlerini ilgilendiren Teorem 4.2 nin, bazı sonuçlarını düşüneceğiz.

Teorem 4.3 den Teorem 4.2 i Elde Etme:

Her n ve $c \in \mathfrak{C}_n$ için, F_n, L_n nin c ve cg elemanları tarafından gerilen bir alt uzayı olsun.

T_n de, n dereceli $[(cg)^{2^r}, c^{2^r}]$ elemanları tarafından gerilen bir alt uzay olsun.

O zaman, Teorem 4.3 den, F_n bir serbest KG -modül ve T_n aşikar bir KG -modül olmak üzere,

$$L_n = F_n \oplus T_n$$

dir.

$f_n = \frac{1}{2} \dim(F_n)$ ($\dim(F_n)$, bir KG -modül olarak F_n nin rankıdır) ve $t_n = \dim(T_n)$ olsun.

O halde, $f_n = |\mathfrak{C}_n|$ ve t_n de n dereceli $[(cg)^{2^r}, c^{2^r}]$ elemanlarının sayısıdır. Buradan,

$$t_n = \sum_{\substack{r \geq 0 \\ 2^{r+1} \nmid n}} |\mathfrak{C}_{n/2^{r+1}}| = \sum_{\substack{r \geq 0 \\ 2^{r+1} \nmid n}} f_{n/2^{r+1}} \quad (4.2)$$

olur.

$L_n = F_n \oplus T_n$ olduğundan, $\dim(L_n) = \dim(F_n) + \dim(T_n)$ olup, $\dim(L_n) = 2f_n + t_n$ dir.

Ayrıca, $F_n^G = \{u \in F_n \mid ug = u\}$ idi. Buradan, $ug = u$ eşitliğinde, aşağıdaki düzenlemeler yapılırsa,

$$ug - u = 0,$$

$$u(g - 1) = 0,$$

$$u(g + 1 - 2) = 0,$$

$$u(g + 1) = 2u, \text{ olur. Buradan,}$$

$F_n^G = F_n(1 + g)$ elde edilip, $\dim(F_n^G) = f_n$ ve $\dim(L_n^G) = f_n + t_n$ olduğu görülür. Eğer, n tek ise (4.2) eşitliğinden, $t_n = 0$ olup, buradan da,

$$\dim(L_n^G) = f_n = \frac{1}{2} \dim(F_n) = \frac{1}{2} \dim(L_n) = \frac{1}{2n} \sum_{d \mid n} \mu(d) m^{n/d}$$

bulunur ki, bu Teorem 4.2 nin (n tek sayısı için) formülüdür (n tek olduğundan, d de tek olmak zorundadır).

Eğer, n çift ise, o zaman, (4.2) eşitliğinden,

$$t_n = \sum_{\substack{r \geq 0 \\ 2^{r+1} \mid n}} |\mathfrak{C}_{n/2^{r+1}}| = \sum_{\substack{r \geq 0 \\ 2^{r+1} \mid n}} f_{n/2^{r+1}}$$

$$t_1 = 0, t_2 = |\mathfrak{C}_1| = f_1, t_3 = 0, t_4 = |\mathfrak{C}_2| + |\mathfrak{C}_1| = f_2 + t_2, t_5 = 0, t_6 = |\mathfrak{C}_3|, t_7 = 0,$$

$$t_8 = |\mathfrak{C}_4| + |\mathfrak{C}_2| + |\mathfrak{C}_1| = f_4 + t_4 \text{ olup,}$$

$$n \text{ çift ise, } t_n = f_{n/2} + t_{n/2} = \dim(L_{n/2}^G) \text{ olur.}$$

Buradan da,

$$\begin{aligned} \dim(L_n^G) &= f_n + t_n = \frac{1}{2} \dim(L_n) - \frac{t_n}{2} + t_n \\ &= \frac{1}{2} (\dim(L_n) + t_n) = \frac{1}{2} (\dim(L_n) + \dim(L_{n/2}^G)) \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} \dim(L_n^G) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \mu(d) m^{n/d} + \frac{1}{n} \sum_{\substack{e \mid \frac{n}{2} \\ e \text{ tek}}} \mu(e) m^{n/2e} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \mu(d) m^{n/d} - \frac{1}{n} \sum_{\substack{e \mid \frac{n}{2} \\ e \text{ tek}}} \mu(2e) m^{n/2e} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \mu(d) m^{n/d} - \frac{1}{n} \sum_{\substack{d \mid n \\ d \text{ çift}}} \mu(d) m^{n/d} \right) (d = 2e) \end{aligned}$$

Eğer, d , 4 ile bölünebiliyorsa, $\mu(d) = 0$ olur. Bu bulduğumuz, Teorem 4.2 nin formülüdür (Burada yaptığımız hesaplama, (Short, 1995) deki Teorem 4.3 ün ispatının parçasının çok benzeridir). ■

Şimdi, Teorem 4.2 nin, karakteristiği 2 ye eşit olmayan K cismi için olan durumunu düşünelim.

$G = \{1, g\}$ olsun.

Bu durumda, L_1 , g nin özvektörlerinden oluşan bir baza sahiptir öyle ki, bunların yarısı 1 özdeğerine, diğer yarısı da -1 özdeğerine sahiptir. Karşılık gelen n dereceli baz komütatörleri, L_n nin, yine g nin özvektörlerinden oluşan bir bazını verir (Bourbaki, 1960, 1972). Açık bir şekilde, $\dim(L_n^G)$, özdeğeri 1 olan bu özvektörlerin sayısıdır. Bu sayı, yalnızca baz komütatörlerinin derecelerine bağlı olup, K dan bağımsızdır. Bu yüzden, genelliği bozmaksızın, K nın, kompleks sayılar cismi olduğunu varsayabiliriz. Bu durumda, Brandt' ın karakter formülü (Brandt, 1944), G nin, L_n üzerindeki χ karakterini verir:

$$\chi(1) = \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \mu(d) m^{n/d}$$

ve

$$\chi(g) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{d \mid n \\ d \text{ çift}}} \mu(d) m^{n/d}$$

olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

$\dim(L_n^G)$, G nin χ karakterinde bir çokluktur.

$$\begin{aligned} \dim(L_n^G) &= \frac{1}{2} (\chi(1) + \chi(g)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \sum_{\substack{d \mid n \\ d \text{ tek}}} \mu(d) m^{n/d} + \frac{1}{n} \sum_{\substack{d \mid n \\ d \text{ çift}}} \mu(d) m^{n/d} \right) \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{\substack{d \mid n \\ d \text{ tek}}} \mu(d) m^{n/d} + \sum_{\substack{d \mid n \\ d \text{ çift}}} \mu(d) m^{n/d} \end{aligned}$$

dir.

Teorem 4.3 ün İspatı:

Daha önce tanımlandığı gibi, G , g tarafından üretilen ve derecesi 2 olan bir gruptur.

A , L nin evrensel enveloping cebiri yani $A = U(L)$ olsun. (Bourbaki, 1960,1972) dan, A , V üzerinde serbest asosiyatif K -cebiri (Burada, A cebiri, V , A nın bir alt uzayı ve V nin

her bazı, A nın bir serbest üreteç kümesi olacak şekilde bir serbest asosyatif K -cebiri).

Kolaylık için, A yı birim elemanlı alacağız. Bundan dolayı, $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ dır.

Burada, $A_0 = K$, $A_1 = V$ ve bütün $n \geq 0$ için, A_n , A nın n -inci homojen bileşenidir öyle ki bu alt uzay $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ olmak üzere, $v_1 v_2 \dots v_n$ formundaki bütün elemanlar tarafından gerilir ($n = 0$ için, $v_1 v_2 \dots v_n$ "boş" çarpımı, A nın 1 birim eleman olarak yorumlanır).

A asosyatif cebiri, her $u, v \in A$ için, $[u, v] = uv - vu$ şeklinde tanımlanan Lie çarpımı tarafından oluşturulan, K üzerinde bir Lie cebirine dönüştürüldüğü zaman, L , A nın V tarafından üretilen bir Lie alt cebiri olarak tanımlanabilir.

Yapılan bu tanımlamayla, biz, $L \subseteq A$, $L_1 = A_1 = V$ ve bütün $n \geq 1$ için, $L_n = A_n \cap L$ elde ederiz.

$\mathfrak{B}$, L için, herhangi bir K -bazı ve $<$, $\mathfrak{B}$ nin herhangi bir (tam) sıralaması olsun.

A nın $b_1 b_2 \dots b_k$ formundaki bütün elemanlarının kümesini $\mathfrak{B}^*$ ile göstereceğiz. Burada, $k \geq 0$, $b_1, b_2, \dots, b_k \in \mathfrak{B}$ ve $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_k$ dır. Bu, $\mathfrak{B}^*$ ın A nın bir K -bazı olduğunun ifade edildiği Poincaré-Birkhoff-Witt teoreminin (Bourbaki, 1960, 1970) özel bir durumudur.

Biz, aşağıdaki gibi, $\mathfrak{B}^*$ ın, değişik bir şeklini kullanacağız.

$b_1, b_2, \dots, b_k \in \mathfrak{B}$ olsun ve $b_1 b_2 \dots b_k$ çarpımını düşünelim. $\{1, 2, \dots, k\}$ nin herhangi bir π permütasyonu için, $b_{1\pi} b_{2\pi} \dots b_{k\pi}$ çarpımı, $b_1 b_2 \dots b_k$ nın bir "yeniden düzenlemesi" olarak isimlendirilir.

Örneğin, $b_1 b_2$ ve $b_1 b_2 b_3$ alalım. $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ olsun.

$$b_{1\pi} b_{2\pi} = b_2 b_1 \text{ ve } b_{1\pi} b_{2\pi} b_{3\pi} = b_2 b_1 b_3$$

olup, bütün çarpımlar için, bu sıralamayı veriyoruz.

Önerme 4.4 $\mathfrak{B}$, L nin sıralanmış bir bazı olsun. $\mathfrak{B}^*$ ın her bir u elemanı için, u' , u nun bir yeniden düzenlenmesi olsun. O zaman, $\{u' : u \in \mathfrak{B}^*\}$, A nın bir bazıdır.

İspat: Her bir $r \geq 0$ için, $0 \leq k \leq r$ ve $b_1, b_2, \dots, b_k \in \mathfrak{B}$ için, $b_1 b_2 \dots b_k$ formundaki A nın bütün elemanlarının kümesi $\mathcal{A}_{(r)}$ olsun.

$\mathfrak{B}_{(r)} = \mathcal{A}_{(r)} \cap \mathfrak{B}^*$ olsun. O zaman, $\mathcal{A}_{(r)}$ nin her bir elemanı, $\mathfrak{B}_{(r)}$ nin tek bir elemanının bir yeniden düzenlemesidir.

$b_1, b_2 \in \mathfrak{B}$ için, $b_1 b_2 = b_2 b_1 + [b_1, b_2]$ elde ederiz.

Burada, $[b_1, b_2] \in L = \langle \mathfrak{B} \rangle$ dir. Buradan da, eğer $r \geq 1$ için, $u \in \mathcal{A}_{(r)}$ ve v , u nun bir yeniden düzenlemesi ise, $v - u \in \langle \mathcal{A}_{(r-1)} \rangle$ dir. Tümevarım hipotezinden, bütün r ler için, $\langle \mathcal{A}_{(r)} \rangle = \langle \mathfrak{B}_{(r)} \rangle$ olduğu görülür. $\mathfrak{B}_{(r)}$ nin elemanları, Poincaré-Birkhoff-Witt teoreminden, lineer bağımsız olduğundan, $\mathfrak{B}_{(r)}$, $\langle \mathcal{A}_{(r)} \rangle$ nin bir bazıdır. Burada, $r \geq 1$ ve $u \in \mathfrak{B}_{(r)}$ için, $u' - u \in \langle \mathcal{A}_{(r-1)} \rangle$ dir.

Buradan da, yine tümevarım hipoteziyle, bütün r ler için, $\{u' : u \in \mathfrak{B}_{(r)}\}$ nin , $\langle \mathcal{A}_{(r)} \rangle$ nin bir bazı olduğu görülür.

$\langle \mathcal{A}_{(r)} \rangle$, A nın bir alt uzayı olduğundan, $\{u' : u \in \mathfrak{B}_{(r)}\}$, A nın bir bazıdır. ■

Burada dikkat etmek gerekirse, Önerme 4.4, yalnızca, 2 karakteristikteki serbest KG -modül formundaki Lie cebirleri için değil, başka keyfi serbest Lie cebirleri için de sağlanır.

Aşağıdaki diğer sonucumuz ise, buna zıt olarak, K nın karakteristiği 2 ye eşit olan durumuna dayanır.

Önerme 4.5 $u, v \in A$ ve $r \geq 0$ olsun. O zaman,

$$[u^{2^r}, v^{2^r}] = [v, u, u, \dots, u, v, \dots, v]$$

dir. Burada, sağdaki u ve v ler 2^r çokluktadır.

İspat: K nın karakteristiği 2 olduğundan,

$$\begin{aligned} [u, v, v] &= [(uv - vu), v] \\ &= (uv - vu)v - v(uv - vu) \\ &= uv^2 - 2uvu + v^2u \\ &= uv^2 + v^2u \\ &= uv^2 + v^2u - v^2u + v^2u \\ &= uv^2 - v^2u + 2v^2u \\ &= uv^2 - v^2u \\ &= [u, v^2] \end{aligned}$$

olup, bu özdeşliğin tekrarları kullanılarak;

$$\begin{aligned} [u^{2^r}, v^{2^r}] &= [u^{2^r}, v, v, \dots, v] \\ &= -[v, u^{2^r}, v, \dots, v] \\ &= -2[v, u^{2^r}, v, \dots, v] + [v, u^{2^r}, v, \dots, v] \\ &= [v, u, u, \dots, u, v, \dots, v] \end{aligned}$$

elde edilir. ■

G nin, V üzerine etkisi, G nin asosyatif A cebiri üzerine etkisine genişletilebilir. Burada, G nin elemanları, bu A asosyatif cebirinde, cebir otomorfizmi olarak davranır ve A bir Lie cebiri olarak kabul edilirse, bu otomorfizmler ayrıca Lie cebiri otomorfizmleri olur. Ayrıca, A nın L Lie alt cebiri, G altında invaryanttır ve G nin L üzerine etkisi, önceki tanımla aynıdır. Bu tanıma göre, G nin her elemanı, L nin bir Lie cebir otomorfizmine tek şekilde genişletilebilen, V nin bir vektör uzayı otomorfizmini gerektirir.

Yani, V , KG -modül olup,

$(\cdot) : KG \times V \longrightarrow V$ olup, bu çarpma A ya genişletilirse,

$KG \times A \longrightarrow A$ olur ve $\sum_{g \in G} \alpha_g \cdot u_g \in KG$ dir (KG nin elemanları bu yapıdadır).
 $\sum_{g \in G} \alpha_g \cdot u_g \in KG$ ve $a \in A$ için,

$$\left(\sum_{g \in G} \alpha_g \cdot u_g \right) \cdot a = \sum_{g \in G} \alpha_g \cdot u_g \cdot a = \sum_{g \in G} \alpha_g \cdot ga$$

olup, G nin elemanlarını bir otomorfizm olarak görebiliriz.

Hem A , hem de L , KG -modül olup, A_n ve L_n homojen bileşenleri alt modüllerdir.

Teorem 4.3, A_n nin KG -modül yapısı gözönünde bulundurularak ispatlanacaktır.

$u \in A$ için, $\bar{u} = ug$ ve A nın herhangi bir $\mathcal{U}$ alt kümesi için, $\overline{\mathcal{U}} = \{\bar{u} : u \in \mathcal{U}\}$ yazacağız.

Önerme 4.6 Her $n \geq 1$ için, A_n bir serbest KG -modüldür.

İspat: Bir vektör uzayı olarak, A_n , $V \otimes \dots \otimes V$, n -inci tensör çarpımına izomorfik ve G , A üzerine cebir otomorfizmi olarak etki ettiğinden, KG -modül olarak, $A_n \cong V \otimes \dots \otimes V$ dir. V , serbest olduğundan, $V \otimes \dots \otimes V$ de serbest olup, A_n bir serbest KG -modüldür. ■

$\mathfrak{C}_n$ ve $\mathfrak{C}$, Teorem 4.3 de tanımlandıkları gibi olsun. Yani, her n için, $\mathfrak{C}_n$, L_n nin mümkün olan en büyük boyutlu serbest KG -alt modülünü serbestçe üreten bir alt kümesi ve

$$\mathfrak{C} = \bigcup_{n \geq 1} \mathfrak{C}_n$$

olsun.

$c \in \mathfrak{C}$ için, $\bar{\mathfrak{C}} = \{cg \mid c \in \mathfrak{C}\}$ ve $\mathfrak{C} \cup \bar{\mathfrak{C}} = \{c, cg \mid c \in \mathfrak{C}\}$ olmak üzere, $\mathfrak{C} \cup \bar{\mathfrak{C}}$ nin elemanlarının lineer bağımsız olduğuna dikkat edelim.

$\mathcal{D}$, $c \in \mathfrak{C}$ ve $r \geq 0$ olmak üzere, A nın $[\bar{c}^{2^r}, c^{2^r}]$ formundaki bütün elemanlarının kümesi olsun.

O zaman, Önerme 4.5 den, $\mathcal{D} \subseteq L$ olur ($[\bar{c}^{2^r}, c^{2^r}] = [c, \bar{c}, \dots, \bar{c}, c, \dots, c] \in L$).

$\mathcal{D}$ nin her elemanı homojen olduğundan, $\mathcal{D}_n = \mathcal{D} \cap L_n$ olmak üzere, $\mathcal{D} = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{D}_n$ olur.

Önerme 4.7 Her $n \geq 1$ için, $\mathcal{D}_n$ nin $[\bar{c}^{2^r}, c^{2^r}]$ elemanları lineer bağımsızdır.

İspat: Varsayalım ki, n çift olsun (Çünkü, n tek ise $\mathcal{D}_n$ boştur).

L nin, $\mathcal{C} \cup \bar{\mathcal{C}} \subseteq \mathfrak{B}$ olacak şekilde bir $\mathfrak{B}$ bazını seçelim ve $\mathfrak{B}$ yi herhangi bir şekilde sıralayalım. Böylece, A nın bir $\mathfrak{B}^*$ bazını elde ederiz. ($c \in \mathcal{C}, r \geq 0$ için) $c^{2^r}, \bar{c}^{2^r}$ elemanları, bu $\mathfrak{B}^*$ bazına aittir. $n/2$ dereceli bu elemanlar, $A_{n/2}$ de lineer bağımsızdır. Ayrıca, $A_n \cong A_{n/2} \otimes A_{n/2}$ olduğundan, A_n nin $c^{2^r} \bar{c}^{2^r}$ ve $\bar{c}^{2^r} c^{2^r}$ formundaki elemanları da, A_n de lineer bağımsızdır. Bu yüzden, $\bar{c}^{2^r} c^{2^r} - c^{2^r} \bar{c}^{2^r}$ elemanları lineer bağımsızdır. ■

Her $n \geq 1$ için, $F_n = \langle \mathcal{C}_n \cup \bar{\mathcal{C}}_n \rangle$ ve $T_n = \langle \mathcal{D}_n \rangle$ olsun.

Bu yüzden, $F_n, \mathcal{C}_n \cup \bar{\mathcal{C}}_n$ bazıyla serbest bir KG -modül ve $T_n, \mathcal{D}_n$ bazıyla aşık bir KG -modüldür. Ayrıca, hem F_n , hem de T_n, L_n nin alt modülüdür.

Eğer $n \geq 1$ için, $L_n = F_n \oplus T_n$ olduğunu gösterirsek, Teorem 4.3 gösterilmiş olacaktır. Çünkü, bu şekilde $\mathcal{C}_n \cup \bar{\mathcal{C}}_n \cup \mathcal{D}_n$ nin, L_n nin bir bazı olduğu gösterilmiş olur.

$n \geq 1$ için, $\mathcal{E}_n, A_n$ nin $c \in \mathcal{C}$ ve $r \geq 0$ olmak üzere, $c^{2^r} \bar{c}^{2^r}$ formundaki bütün elemanlarının kümesi olsun. L nin öyle bir $\mathfrak{B}$ bazını seçelim ki, her n için, $\mathfrak{B}_n, \mathcal{C}_n \cup \bar{\mathcal{C}}_n$ i içeren L_n nin bir bazı olmak üzere, $\mathfrak{B} = \bigcup_{n \geq 1} \mathfrak{B}_n$ olsun. $\mathfrak{B}$, bütün $c \in \mathcal{C}$ için, $c < \bar{c}$ olacak şekilde sıralansın. O zaman, bütün n ler için, $\mathfrak{B}_n$ ve $\mathcal{E}_n, \mathfrak{B}^*$ ın parçalanmış alt kümeleridir. Bu yüzden, $\mathfrak{B}_n \cup \mathcal{E}_n$ nin elemanları lineer bağımsızdır. $\mathcal{D}_n \subseteq L_n = \langle \mathfrak{B}_n \rangle$ olduğundan, $\mathcal{D}_n \cup \mathcal{E}_n$ nin elemanları da lineer bağımsızdır. Şimdi $W_n = \langle \mathcal{D}_n \cup \mathcal{E}_n \rangle$ diyelim ve aşağıdaki Önermeyi gösterelim.

Önerme 4.8 $n \geq 1$ için, $L_n \cap W_n = T_n$ dir ve W_n, A_n nin bir serbest KG -alt modülüdür.

İspat: ($T_n = \langle \mathcal{D}_n \rangle$ idi). $\mathfrak{B}_n \cup \mathcal{E}_n$ nin elemanları lineer bağımsız olduğundan,

$$L_n \cap \langle \mathcal{E}_n \rangle = \{0\}$$

dır ($L_n = \langle \mathfrak{B}_n \rangle \cap \langle \mathcal{E}_n \rangle = \{0\}$). Bundan dolayı;

$$\begin{aligned} L_n \cap W_n &= L_n \cap (\langle \mathcal{D}_n \cup \mathcal{E}_n \rangle) \\ &= L_n \cap (\langle \mathcal{D}_n \rangle + \langle \mathcal{E}_n \rangle) \\ &= L_n \cap (T_n + \langle \mathcal{E}_n \rangle) \\ &= T_n + (L_n \cap \langle \mathcal{E}_n \rangle) \\ &= T_n \end{aligned}$$

$\mathcal{D}_n \cup \mathcal{E}_n$ nin elemanları, lineer bağımsız olduğundan, bu elemanlar W_n nin bir bazını oluşturur.

$\mathcal{E}_n$ deki $c^{2^r} \bar{c}^{2^r}$ leri çiftler çiftler yerleştirirsek, bunlar $\mathcal{D}_n$ deki $[\bar{c}^{2^r}, c^{2^r}]$ lere karşılık gelir.

Fakat,

$$\underbrace{(c^{2^r} \bar{c}^{2^r})}_{\in \mathcal{E}_n} g = \bar{c}^{2^r} c^{2^r} = \underbrace{c^{2^r} \bar{c}^{2^r}}_{\in \mathcal{E}_n} + \underbrace{[\bar{c}^{2^r}, c^{2^r}]}_{\in \mathcal{D}_n}$$

dir.

Bu yüzden, W_n , $e \in \mathcal{E}_n$ olmak üzere, e ve eg elemanlarından meydana gelen bir baza sahiptir. O halde, W_n , regüler KG -modüllerin bir direkt toplamıdır ve buradan da, W_n nin bir serbest KG -modül olduğu elde edilir. ■

Teorem 4.3 ün ispatındaki asıl adım, aşağıdaki sonuçtur :

Önerme 4.9 Bütün $n \geq 1$ için, $L_n + W_n$, A_n nin bir KG -modül direkt toplamındaki bir terimidir (Yani, $A_n = L_n \oplus W_n \oplus \dots$ dir).

Bu önermeyi ispatlamadan önce, bunun Teorem 4.3 ü elde etmede nasıl kullanılacağını gösterelim.

Önerme 4.9 dan Teorem 4.3 ü elde etme :

$n \geq 1$ için, $L_n = F_n \oplus T_n$ olduğunu göstermek yeterlidir.

Önerme 4.6 den dolayı, A_n bir serbest KG -modüldür ve Önerme 4.9 dan dolayı, $L_n + W_n$, A_n nin bir direkt toplamındaki bir terimidir. Regüler KG -modül parçalanamaz olduğundan, $L_n + W_n$ serbesttir. Ayrıca, Önerme 4.8 den, W_n de serbesttir.

Serbest KG -modüller injektif olduğundan, $(L_n + W_n)/W_n$, $L_n + W_n$ nin bir direkt toplamındaki bir terimine izomorftur ve serbesttir.

Yani,

$$L_n + W_n \longmapsto L_n + W_n$$

olan içine bir homomorfizm vardır ve bu homomorfizmin çekirdeği W_n olup,

$$(L_n + W_n)/W_n \cong L_n + W_n \text{ (1.izomorfizm teoremi)}$$

Ayrıca,

$$(L_n + W_n)/W_n \cong L_n/(L_n \cap W_n) \text{ (2.izomorfizm teoremi)}$$

oldüğundan, Önerme 4.8 den dolayı, $L_n \cap W_n = T_n$ olduğundan, L_n/T_n serbest olur.

Serbest KG -modüller projektif olduğundan, L_n nin öyle bir serbest J_n alt modülü vardır ki, $L_n = J_n \oplus T_n$ olur. Bu yüzden, $L_n(1+g) \subseteq J_n$ dir. F_n, L_n nin mümkün olan en büyük boyutlu bir serbest alt modülü olup, ayrıca,

$F_n \cap T_n \subseteq F_n^G = F_n(1+g) \subseteq L_n(1+g) \subseteq J_n$ dir. Fakat, $J_n \cap T_n = \{0\}$ dir. Ohalde, $F_n \cap T_n = \{0\}$ olup, F_n ve T_n , direkt toplamlarını gererler. Yani, $\langle F_n \cup T_n \rangle = F_n \oplus T_n$ dir. Fakat, $\dim(F_n) \geq \dim(J_n)$ ve $L_n = J_n \oplus T_n$ olduğundan, $L_n = F_n \oplus T_n$ olur.

Bu şekilde istenilen elde edilmiş olur. ■

Şimdi Önermenin ispatına dönelim ve n üzerinden tümevarımla göstermeye çalışalım:

$n = 1$ için, sonuç aşıkardır, çünkü $W_1 = \{0\}$ ve $A_1 = L_1$ dir.

Bir $n > 1$ tamsayısını sabit tutalım ve varsayalım ki, bütün $i < n$ için, $L_i + W_i, A_i$ nin direkt toplamındaki bir terimi olsun.

Teorem 4.3 ün elde edilişindeki sonuç kullanılırsa, $i < n$ için, $L_i = F_i \oplus T_i$ dir ve bundan dolayı, $\mathfrak{C}_i \cup \overline{\mathfrak{C}}_i \cup \mathcal{D}_i, L_i$ nin bir bazıdır.

$i < n$ için, $\mathfrak{B}_i = \mathfrak{C}_i \cup \overline{\mathfrak{C}}_i \cup \mathcal{D}_i$ olacak şekilde, bütün $i \geq 1$ için, $\mathfrak{B}_i, L_i$ nin bir bazı olsun ve $\mathfrak{B} = \bigcup_{i \geq 1} \mathfrak{B}_i$ yazalım. Bu durumda, $\mathfrak{B}, L$ nin bir bazı olur. A nın bir $\mathfrak{B}^*$ bazını elde etmek için, $\mathfrak{B}$ üzerine herhangi bir sıralama koyalım. $\mathfrak{B}^*$ ın her bir elemanı homojen olduğundan, $\mathfrak{B}^* \cap A_n, A_n$ nin bir bazıdır. $\mathfrak{B}^* \cap A_n$ nin elemanları, her bir çarpanı, n den daha az dereceye sahip olan, n -dereceli, sıralanmış çarpımlarla birlikte, $\mathfrak{B}_n$ (L_n nin seçilmiş bir bazı) nin elemanlarından meydana gelir.

Bu çarpanlar, $\bigcup_{i < n} \mathfrak{B}_i$ ye, yani $\mathfrak{C}' = \bigcup_{i < n} \mathfrak{C}_i$ ve $\mathcal{D}' = \bigcup_{i < n} \mathcal{D}_i$ olmak üzere, $\mathfrak{C}' \cup \overline{\mathfrak{C}'} \cup \mathcal{D}'$ ye aittir.

$\mathcal{Y}, c \in \mathfrak{C}'$ ve c^{2^r} , en fazla n -dereceli olmak üzere, c^{2^r} formundaki bütün elemanların kümesi olsun.

O zaman, $\mathcal{Y}$ sonlu bir kümedir ve $s_1, \dots, s_k$ lar farklı olmak üzere, $\mathcal{Y} = \{s_1, \dots, s_k\}$ olduğunu söyleyebiliriz.

Bu notasyonlarla birlikte, $\mathcal{D}'$, derecesi n den az olan ve 1 içermeyen bütün $[\bar{s}_i, s_i]$ elemanlarından meydana gelir.

$(\mathfrak{B}^* \cap A_n) \setminus \mathfrak{B}_n$ nin her bir elemanının bir yeniden sıralamasını alacağız.

Önerme 4.4 den dolayı, bu yeniden sıralamar, $\mathfrak{B}_n$ nin elemanlarıyla birlikte, bize A_n nin yeni bir bazını verecek.

$u \in (\mathfrak{B}^* \cap A_n) \setminus \mathfrak{B}_n$ olsun.

O zaman, $u, \mathfrak{C}' \cup \overline{\mathfrak{C}'} \cup \mathcal{D}'$ nin farklı elemanlarının kuvvetlerinin çarpımıdır.

İlk önce, $c \in \mathfrak{C}'$ ve c^λ en fazla n -dereceli olmak üzere, c nin bir λ kuvvetini düşünelim. λ yı 2 tabanında yazarsak;

$$\lambda = \varepsilon_0 2^0 + \varepsilon_1 2^1 + \varepsilon_2 2^2 + \dots$$

olup, her bir $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ ve bütün fakat sonlu sayıdakiler 0 dır.

Bu yüzden,

$$c^\lambda = c^{\varepsilon_0 2^0 + \varepsilon_1 2^1 + \varepsilon_2 2^2 + \dots} = c^{\varepsilon_0} (c^2)^{\varepsilon_1} (c^{2^2})^{\varepsilon_2} \dots$$

olur. Buradan da, c^λ nin $\mathcal{Y}$ nin farklı elemanlarının bir çarpımı olduğu elde edilir.

Benzer şekilde, $\bar{c}^\lambda$ yı da, $\bar{\mathcal{Y}}$ nin farklı elemanlarının bir çarpımı olarak yazabiliriz. Bu yüzden, u yu, $\mathcal{D}'$ nin $[\bar{s}_i, s_i]$ gibi farklı elemanlarının kuvvetlerinin ve $\bar{\mathcal{Y}} \cup \mathcal{Y}$ nin farklı elemanlarının bir çarpımı olarak yazabiliriz. Buradan da, u nun, bir u' yeniden düzenlemesi vardır ve $i = 1, \dots, k$ için, $\delta_i, \varepsilon_i \in \{0, 1\}$, $v_i \geq 0$ ve eğer, $[\bar{s}_i, s_i]$, n veya daha fazla dereceye sahipse, $v_i = 0$ olmak üzere,

$$s_1^{\delta_1} \bar{s}_1^{\varepsilon_1} [\bar{s}_1, s_1]^{v_1} \dots s_k^{\delta_k} \bar{s}_k^{\varepsilon_k} [\bar{s}_k, s_k]^{v_k} \quad (4.3)$$

formundadır.

$\mathcal{L}$, (4.3) formundaki n -dereceli bütün elemanların kümesi olsun.

$\mathcal{L}$, nin her bir elemanı, $(\mathfrak{B}^* \cap A_n) \setminus \mathfrak{B}_n$ nin tek bir elemanının bir yeniden sıralanmasıdır ve tam tersine, $\mathfrak{B}_n \cup \mathcal{L}$, A_n nin bir bazıdır.

$\mathcal{E}_n$, (daha önce Lemma 4.8 tanımlandığı gibi) $n \geq 1$ için, A_n nin $c^{2^r} \bar{c}^{2^r}$ formundaki bütün elemanlarının kümesidir ($c \in \mathfrak{C}$ ve $r \geq 0$ için).

s_i nin derecesi $n/2$ olmak üzere, $s_i \bar{s}_i$ formundaki elemanlardan meydana gelen, $\mathcal{L}$ nin bir alt kümesidir.

$\widehat{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \setminus \mathcal{E}_n$ yazalım.

O zaman, A_n nin $\mathfrak{B}_n \cup \mathcal{E}_n \cup \widehat{\mathcal{L}}$ bazına sahip olduğu elde edilir.

$L_n + W_n = \langle \mathfrak{B}_n \cup \mathcal{E}_n \rangle$ olduğundan $\mathcal{D}_n \subseteq L_n = \langle \mathfrak{B}_n \rangle$, $W_n = \langle \mathcal{D}_n \cup \mathcal{E}_n \rangle$, $A_n = (L_n + W_n) \oplus \langle \widehat{\mathcal{L}} \rangle$ olur.

Önermeyi ispatlamak için, $\langle \widehat{\mathcal{L}} \rangle$ nin, A_n nin bir KG -alt modülü olduğunu ispatlamak yeterlidir.

Eğer, (4.3), $\widehat{\mathcal{L}}$ nin bir elemanını gösterirse ve bazı i ler için, $\delta_i = \varepsilon_i = 1$ ise, o zaman, $s_i \bar{s}_i$ nin derecesi n den daha az olmalıdır ki, bu yüzden, $[\bar{s}_i, s_i] \in \mathcal{D}'$ olur. Bundan dolayı, $\widehat{\mathcal{L}}$

nın bir elemanın, (4.3) formundaki yazılışındaki i -inci çarpan olan $s_i^{\delta_i} \bar{s}_i^{\varepsilon_i} [\bar{s}_i, s_i]^{v_i}$, ya A nın birim elemanıdır ($\delta_i = \varepsilon_i = v_i = 0$ olduğu zaman), ya da aşağıdakilerden biridir :

$$s_i \bar{s}_i [\bar{s}_i, s_i]^v, v \geq 0 \text{ ve } [\bar{s}_i, s_i] \in \mathcal{D}' \text{ ise} \quad (4.4)$$

$$[\bar{s}_i, s_i]^{v+1}, v \geq 0 \text{ ve } [\bar{s}_i, s_i] \in \mathcal{D}' \text{ ise} \quad (4.5)$$

$$s_i [\bar{s}_i, s_i]^v, v \geq 0 \text{ ve eğer } [\bar{s}_i, s_i] \notin \mathcal{D}' \text{ ise } v = 0 \quad (4.6)$$

$$\bar{s}_i [\bar{s}_i, s_i]^v, v \geq 0 \text{ ve eğer } [\bar{s}_i, s_i] \notin \mathcal{D}' \text{ ise } v = 0 \quad (4.7)$$

$i = 1, \dots, k$ için, $\mathcal{P}_i$ birim elemanı ve (4.4), (4.5), (4.6) ve (4.7) tipindeki bütün elemanları içeren, A nın bir alt kümesi olsun. Bundan dolayı, $\widehat{\mathcal{L}}$, $p_i \in \mathcal{P}_i$ ($1 \leq i \leq k$ için) ve $p_1 p_2 \dots p_k$ nın derecesi n olmak üzere, tamamen $p_1 p_2 \dots p_k$ elemanlarından meydana gelir.

$\mathcal{P}_i$ nin herbir p elemanı için, $\tilde{p}, P_i$ nin aşağıdaki şekilde tanımlanan bir elemanı olsun:

Eğer $p = 1$ ise, $\tilde{p} = 1$

Eğer $p = s_i \bar{s}_i [\bar{s}_i, s_i]^v$ ise, $\tilde{p} = [\bar{s}_i, s_i]^{v+1}$ veya tam tersi $p = [\bar{s}_i, s_i]^{v+1}$ ise, $\tilde{p} = s_i \bar{s}_i [\bar{s}_i, s_i]^v$

Eğer $p = s_i [\bar{s}_i, s_i]^v$ ise, $\tilde{p} = \bar{s}_i [\bar{s}_i, s_i]^v$ veya tam tersi $p = \bar{s}_i [\bar{s}_i, s_i]^v$ ise, $\tilde{p} = s_i [\bar{s}_i, s_i]^v$ olsun.

Önerme 4.10 $1 \leq i \leq k$ için $p \in \mathcal{P}_i$ olsun. O zaman, $\langle p, \tilde{p} \rangle$, A nın bir KG -alt modülüdür.

İspat: Eğer, $p = 1$ ise, $\tilde{p} = 1$ olup $\langle 1, 1 \rangle = \langle 1 \rangle$ olup, sonuç açıktır. Bu yüzden, $p \neq 1$ alalım.

Genelliği bozmaksızın, varsayabiliriz ki, (4.4) deki gibi $p = s_i \bar{s}_i [\bar{s}_i, s_i]^v$ veya (4.6) daki gibi $p = s_i [\bar{s}_i, s_i]^v$ dir.

İlk durumda;

$$pg = \bar{s}_i s_i [\bar{s}_i, s_i]^v = (s_i \bar{s}_i + [\bar{s}_i, s_i]) [\bar{s}_i, s_i]^v = p + \tilde{p}$$

p ve $pg = p + \tilde{p}$, $\langle p, \tilde{p} \rangle$ yi gerdiğinden, $\langle p, \tilde{p} \rangle$ nin bir KG -modül olduğu açıktır.

İkinci durumda,

$$pg = \bar{s}_i [\bar{s}_i, s_i]^v = \tilde{p} \text{ olup, yine sonuç açıktır.}$$

Şimdi $q \in \widehat{\mathcal{L}}$ olsun ve $p_i \in \mathcal{P}_i$ ($1 \leq i \leq k$) olmak üzere, $q = p_1 p_2 \dots p_k$ yazalım.

O zaman,

$$qg = (p_1 p_2 \dots p_k) g = (p_1 g) (p_2 g) \dots (p_k g)$$

olur ve böylece, Önerme 4.10 dan, $qg, i = 1, \dots, k$ için, $p'_i \in \{p_i, \tilde{p}_i\}$ olmak üzere, $p'_1 p'_2 \dots p'_k$ formundaki elemanların bir lineer toplamı olur. $\tilde{p}_i, p_i$ ile aynı dereceye sahip olduğundan, herbir $p'_1 p'_2 \dots p'_k$ elemanı $\widehat{\mathcal{L}}$ ne aittir.

Bu yüzden, istenildiği gibi, $\langle \widehat{\mathcal{L}} \rangle, A_n$ nin bir KG -alt modülü olur. ■

KAYNAKLAR

- BERGMAN G. M., (1999). Supports of Derivations, Free Factorizations and Ranks of Fixed Subgroups in Free Groups. Trans. Amer. Math. Soc., 1531-1550.
- BESTVINA M., HANDEL, M., (1992). Train Tracks and Automorphisms of Free Groups. Ann. of Math. (2), 1-51.
- BRANDT A., (1944). The Free Lie Ring and Lie Representations of The Full Linear Group. Trans. Amer. Math. Soc. 56, 528-536.
- BOURBAKI N., (1960, 1972). Groupes et Algèbres de Lie. Chap. 1, 2. Paris.
- COLLINS D. J., TURNER E. C., (1996). All Automorphisms of Free Groups with Maximal Rank Fixed Subgroups. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 615-630.
- DICKS W., DUNWOODY M. J., (1989). "Groups Acting on Graphs," Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, Vol. 17, 1-35.
- DICKS W., DUNWOODY M. J., (1999). On Equalizers of Sections. J. Algebra, 20-39.
- DICKS W., VENTURA E., (1996). The Group Fixed by a Family of Injective Endomorphisms of a Free Group. Contemp. Math., 1-81.
- DYER J. T., SCOTT G. P., (1975). Periodic Automorphisms of Free Groups. Comm. Algebra, 195-201.
- HOWSON A. G., (1954). On The Intersection of Finitely Generated Free Groups. J. London Math. Soc., 428-434.
- IMRICH W., TURNER E. C., (1989). Endomorphisms of Free Groups and their Fixed Points. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 421-422.
- KOVÁCS L. G., (1990). The Kourovka Notebook: Unsolved Problems in Group Theory. Novosibirsk, 11th edition.
- LYNDON R., SCHUPP P., (1977). "Combinatorial Group Theory," Springer-Verlag, Berlin.
- MAGNUS W., KARRAS A., SOLITAR D., (1976). "Combinatorial Group Theory," Dover, New York, Sect. 2.4., Exercises 33-36.
- SERRE J. P., (1980). "Trees," Springer-Verlag, Berlin, 1-55.
- SHORT M. W., (1995). A Conjecture about Free Lie Algebras. Comm. Algebra 23, 3051-3057.
- STALLINGS J. R., (1983). Topology of Finite Graphs. Invent. Math., 551-565.
- TAKAHASI M., (1951). Note on Chain Conditions in Free Groups. Osaka J. Math., 221-225.

- TURNER E. C., (1996). Test Words for Automorphisms of Free Groups. Bull. London Math. Soc., 255-263.
- VENTURA E., (1997). On Fixed Subgroups of Maximal Rank. Comm. Algebra. 3361-3375.

ÖZGEÇMİŞ

1981 yılında Adana’da doğdum. İlk ve orta öğrenimimi Adana’da tamamladım. 1999 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’ne girdim. 2003 yılında lisans öğrenimimi tamamlayıp aynı yıl bölümde yüksek lisansa başladım ve halen öğrenimime devam etmekteyim.