

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÖMÜR SOYTÜRK

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

OTOMOTO VE DİLLER

112487

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA,2001

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OTOMOTO VE DİLLER

ÖMÜR SOYTÜRK
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 28/08/2001 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği İle
Kabul Edilmiştir.

İmza [Signature] İmza [Signature] İmza [Signature]
Prof.Dr. Yusuf ÜNLÜ Prof.Dr.Naime EKİCİ Yrd.Doç.Dr.Perihan(DİNÇ)ARTUT
DANIŞMAN ÜYE ÜYE

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

Bu tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.

Kod No: 1850



[Signature]
Prof Dr . Melih BORAL
Enstitü Müdürü
İmza ve Mühür

Not : Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge,şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER.....	SAYFA
ÖZ.....	I
ABSTRACT.....	II
TEŞEKKÜR.....	III
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Serbest Yarıgruplar ve Monoidler.....	1
1.2. Kongrüans.....	2
1.3. Dönüşüm Monoidi.....	2
2. OTOMOTO.....	4
2.1. Sonlu Durumlu Otomoto.....	4
2.2. Otomoto tarafından Tanınan Diller.....	8
2.3. Tam ve Deterministik Olmayan Otomoto.....	13
2.4. Rasyonel Kümeler ve Kleene Teoremi.....	22
3. SENTAKTİK MONOİD.....	29
3.1 Sentaktik Kongrüans.....	29
3.2 Minimal Otomoto.....	33
3.3 İndirgenmiş Otomoto.....	37
3.4 Bir Otomotonun Dönüşüm Monoidi.....	43
3.5 Sentaktik Monoidin Hesaplanması.....	47
KAYNAKLAR.....	50
ÖZGEÇMİŞ.....	51

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OTOMOTO VE DİLLER

ÖMÜR SOYTÜRK

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman : Yusuf ÜNLÜ
Yıl : 2001, Sayfa :51...
Jüri : Prof.Dr. Yusuf ÜNLÜ
: Prof.Dr. Naime Ekici
: Yrd.Doç.Dr. Perihan(Dinç)Artut

Sonlu durum otomatosu, matematik, mantık, bilgisayar, biyoloji ve linguistik gibi oldukça geniş bir uygulama alanı olan bir matematiksel kavramdır. Bu tezde, böylesine geniş uygulama alanı olan bu kavramı tanıtan bir çalışma yaparak otomoto tarafından tanınan diller, rasyonel kümeler ve Kleene Teoremi, sentaktik kongruans, minimal ve indirgenmiş otomoto gibi otomoto ile ilgili temel kavramları bir araya topladık. Böylece bu konuda çalışmaya yeni başlayan araştırmacılara bir kaynak derledik.

Anahtar Kelimeler : Serbest Gruplar ve Monoidler, Sonlu Durumlu Otomoto, Dil, Sentaktik Kongruans

ABSTRACT

MSc THESIS

AUTOMATA and LANGUAGES

ÖMÜR SOYTÜRK

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF ÇUKUROVA

Supervisor: Prof.Dr. Yusuf ÜNLÜ

Year: 2001, Pages: 51

Jury : Prof. Dr. Yusuf ÜNLÜ

: Prof. Dr. Naime EKİCİ

: Yrd.Doç. Dr. Perihan (DİNÇ) ARTUT

Finite state automata have many applications in mathematics, logic, compilers, biology and statistics. In this thesis we expose this subject with an enormous variety of applications with special emphasis on the fundamental concepts such as automata, language recognized by an automata, rational sets and Kleene's Theorem, syntactic kongruans, minimal and reduced automata.

Key words and Phrases : Free semigroups, monoids, finite state automata, language, syntactic kongruans.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanması sırasında bilgi ve tecrübeleriyle beni aydınlatan ve değerli zamanını ayırarak yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Yusuf ÜNLÜ' a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmalarım sırasında beni yakından destekleyen Araştırma Görevlisi Gonca GÜNGÖR AYIK'a teşekkür ederim.



1. GİRİŞ

1.1. Serbest Yarıgruplar ve Monoidler

A bir sonlu küme olduğuna göre A da tanımlı bir sonlu diziye A üzerinde bir kelime denir. Bu kelime boş da olabilir. A^* ile A üzerinde tanımlı tüm kelimelerin kümesini göstereceğiz. A^* da ikili işlem

$$(a_1a_2\dots a_m)(b_1b_2\dots b_n) = a_1a_2\dots a_mb_1b_2\dots b_n$$

şeklinde tanımlanır. Boş kelime bu işlemin birimidir. Bundan böyle boş kelimeyi 1 ile göstereceğiz. Bu işlem ile A^* kümesine A üzerinde tanımlı *serbest monoid* ve A kümesine bu monoidin bir *doğuray* kümesi denir. Doğuray kümesi A^* tarafından tek türlü bellidir. Çünkü

$$A = A^* \setminus A^*A^*$$

dır. $w = a_1a_2\dots a_m \in A^*$ ise w kelimesinin uzunluğu m dir diyeceğiz. Boş kelimenin uzunluğu 0 dir. A^+ ile A^* ın boş olmayan kelimelerinin topluluğunu göstereceğiz. Bu küme A^* ın bir alt yarıgubudur. Bu yarıgrup *doğuray* kümesi A olan *serbest yarıgrup* tur.

Teorem 1 $A \neq \emptyset$ bir küme ve S bir monoid (yarıgrup) olsun. $\Phi : A \rightarrow S$ herhangi bir fonksiyon ise bir ve bir tek $\Psi : A^* \rightarrow S$ ($\Psi : A^+ \rightarrow S$) homomorfizması için $\Psi|_A = \Phi$ dır.

İspat $a_1a_2\dots a_m \in A^+$ için $\Psi : A^+ \rightarrow S$ fonksiyonunu

$$\Psi(a_1a_2\dots a_m) = \Phi(a_1)\Phi(a_2)\dots\Phi(a_m)$$

olarak tanımlayalım. Eğer S bir monoid ise $\Psi(1) = 1_S$ koyalım. Bu durumda $\Psi|_A = \Phi$ dir ve Ψ kolayca görüleceği gibi bir homomorfizmadır. $\Omega : A^+ \rightarrow S$ bir başka homomorfizma ve $\Omega|_A = \Phi$ ise $a_1a_2\dots a_m \in A^+$ için

$$\begin{aligned} \Omega(a_1a_2\dots a_m) &= \Omega(a_1)\Omega(a_2)\dots\Omega(a_m) \\ &= \Phi(a_1)\Phi(a_2)\dots\Phi(a_m) = \Psi(a_1a_2\dots a_m) \end{aligned}$$

olur. O halde $\Omega = \Psi$ dir. ■

$L \subset A^*$ ise L ye A üzerinde tanımlı bir *dil* ve A ya bu dilin *alfabesi* denir.

1.2. Kongrüans

S bir yarıgrup olsun ve R , S üzerinde bir bağıntı olsun.

$$\forall x, y, a \in S, (x, y) \in R \implies (ax, ay) \in R$$

oluyorsa R ye S üzerinde *sol uyumlu kongrüans* denir.

$$\forall x, y, a \in S, (x, y) \in R \implies (xa, ya) \in R$$

oluyorsa R ye S üzerinde *sağ uyumlu kongrüans* denir. S^1 ile S ye bir birim eleman eklemekle elde edilen monoidi gösterelim. Eğer

$$(\forall a, b \in S^1), (x, y) \in R \implies (axb, ayb) \in R.$$

oluyorsa R ye S üzerinde *uyumlu* denir. Bir sol (sağ) uyumlu eşdeğerlik bağıntısı bir *sol (sağ) kongrüans* dır. Uyumlu bir eşdeğerlik bağıntısına *kongrüans* denir.

S bir yarıgrup, A , S nin bir alt kümesi ve R , S üzerinde bir kongrüans olsun. A , R -sınıflarının bir birleşimi ise R ye, A ya *bağlı bir kongrüanstır* denir. Başka bir deyişle her $(x, y) \in R$ için $x, y \in A$ veya $x, y \notin A$ ise R , A ya *bağlı bir kongrüanstır*.

1.3. Dönüşüm monoidi

Q sonlu bir küme ve S bir monoid olsun. Eğer $\alpha : Q \times S \rightarrow Q$ ya

$$\begin{aligned} \alpha(q, 1) &= q, (q \in Q) \\ \alpha(q, st) &= \alpha(\alpha(q, s), t) q, (q \in Q, st \in S) \end{aligned}$$

olacak şekilde bir dönüşüm varsa α ya S nin Q üzerinde bir hareketi denir. Çoğu zaman $\alpha(q, s)$ yerine qs yazılır. S üzerinde τ bağıntısını

$$\tau = \{(s, s') \in S \times S : \text{her } q \in Q \text{ için } qs = qs'\}$$

olarak tanımlayalım.

Teorem 2 S , Q , üzerine hareketi olan sonlu bir küme ve τ yukarıda tanımlandığı gibi bir bağıntı olsun. O zaman τ , S üzerinde bir kongrüanstır.

İspat τ denkliktir. $a\tau b$ ve $c \in S$ ise $\forall q \in Q$ için

$$\begin{aligned} q(ac) &= (qa)c = (qb)c = q(bc) \implies a\tau bc \\ q(ca) &= (qc)a = (qc)b = q(cb) \implies ca\tau cb \end{aligned}$$

olup τ kongrüanstır. ■

Q üzerine bir S monoidinin hareketi olan sonlu bir küme her $s \in S$ için

$$\rho_s : Q \longrightarrow Q$$

dönüşümünü

$$\rho_s(q) = qs$$

olarak tanımlayalım. τ kongrüans olmasından dolayı

$$a\tau b \iff \rho_a \text{ ve } \rho_b \text{ eşittir.}$$

Eğer

$$\tau = \Delta = \{(a, a) : a \in S\}$$

ise o zaman (Q, S) ikilisine *dönüşüm monoidi* denir. Bir dönüşüm monoidi (Q, S) de

$$(\forall q \in Q), qs_1 = qs_2 \Rightarrow s_1 = s_2$$

dir. S nin eleman sayısı Q dan Q ya olan tüm dönüşümlerin sayısını geçmez. Eğer $|Q| = n$ ise $|S| \leq n^n$ dir. (Q, S) ve (R, T) iki dönüşüm monoidi olsun. $\beta : Q \rightarrow R$ gibi birebir ve örten bir β fonksiyonu ve $\theta : S \rightarrow T$ gibi bir θ homomorfizması her $q \in Q$ ve her $s \in S$ için $\beta(qs) = \beta(q)\theta(s)$ koşulunu sağlıyorsa (Q, S) ve (R, T) ye izomorfik ve (β, θ) ya (Q, S) den (R, T) ye bir izomorfizm denir.

2. OTOMOTO

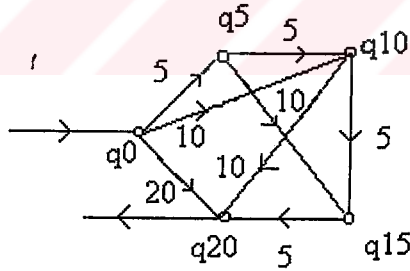
2.1. Sonlu durumlu otomoto

p ile göstereceğimiz bir para birimini kullanan bir para sisteminde $5p, 10p$ ve $20p$ lik madeni paralar olsun. Bir kahve makinası $20p$ ye kahve versin. Bu makinanın $5p, 10p, 20p$ kabul ediyor olduğunu varsayalım. Kahve alabilmek için bu makinarya atılan $20p$ lik girdiyi aşağıdaki gibi değişik şekillerde oluşturabiliriz.

$$(20), (10, 10), (10, 5, 5), (5, 5, 10), (5, 10, 5), (5, 5, 5, 5)$$

O halde bu makinanın, girilen girdinin toplamına göre $q0, q5, q10, q15, q20$ gibi 5 durumda olacağını söyleyebiliriz. $q0$ durumu kullanıcının bozuk paraları atmaya başladığı durumdur, buna *başlangıç durumu* denir. $q20$ durumu makinanın kahveyi verdiği durumdur bunada *terminal durum* denir.

Genel olarak q_i durumunu makinarya i birim p atıldığı durum olarak düşünebiliriz. Makinanın davranışını grafik olarak aşağıdaki gibi gösterebiliriz.



Şekil-1

Herbir girdi dizisi makina tarafından $q0$ başlangıç durumundan $q20$ terminal durumuna bir patika olarak algılanır.

Bir *sonlu durumlu tam ve deterministik otomoto* aşağıdaki koşulları sağlayan $\mathcal{A} = (Q, A, \varphi, i, T)$ şeklinde bir beşlidir.

1. Q ve A sonlu ve boş olmayan kümelerdir.
2. $T \subseteq Q$ ve $i \in Q$.

3. $\varphi : Q \times A \rightarrow Q$ bir fonksiyondur.

Q nun elemanlarına otomotonun *durumları*, A ya otomotonun *alfabesi* ve A nın elemanlarına *girdiler* adı verilir. i , A nın bir *başlangıç durumu*, ve T nin elemanları A nın *terminal durumlarıdır*. φ ye A nın Q üzerindeki *hareketi* denir. Genel olarak $a \in A$ ve $q \in Q$ ise $\varphi(q, a)$ yerine kısaca qa yazılır. $qa = r$ olduğunu belirtmek için çoğu kez $q \xrightarrow{a} r$ sembolünü kullanacağız. Çoğu kez, özellikle φ nin sözün gelişinden belli olması (Q, A, φ, i, T) yerine kısaca (Q, A, i, T) yazacağız.

q durumunun a girdisinden etkilenerek yeni qa durumuna ulaştığı söylenebilir. Bu sembolik modelin yukarıdaki kahve makinasını nasıl temsil ettiğini kolayca görebiliriz.

A daki girdinin q durumundan ardışık olarak etkisine izin verirse o zaman girdi kümesini A^* a genişletebiliriz. Burada A^* ile A üzerinde tanımlı serbest monoidi gösteriyoruz.

Açıkça $q \in Q$ ve $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ olduğuna göre $w = a_1 a_2 \dots a_n \in A^*$ ise

$$qw = ((\dots (qa_1) a_2) \dots) a_n$$

olarak tanımlanır. Daha formal olarak

$$\begin{aligned} q1 &= q; \quad (q \in Q) \\ q(wa) &= (qw)a; \quad (q \in Q, w \in A^*, a \in A) \end{aligned}$$

olarak tanımlayabiliriz.

A^* in Q üzerindeki hareketi her $q \in Q$ ve $w, z \in A^*$ için

$$q(wz) = (qw)z$$

özellğine sahiptir. Bu özelliği $|z|$ üzerinde tümevarımla gösterelim.

$|z| = 1$ ise $z = a_i$ şeklindedir. Tanım gereğince

$$q(wz) = q(wa_i) = (qw)a_i$$

olur. Eğer $z = z'a$ ise $|z| = n$, $|z'| = n - 1$ olup

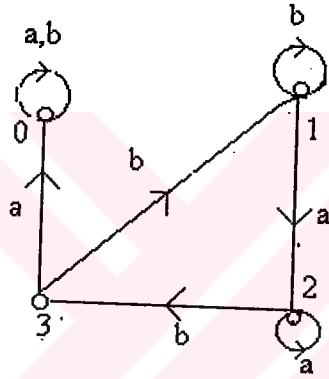
$$q(wz) = q(w(z'a)) = q((wz')a) = ((qw)z')a = (qw)z$$

olduğu görülür.

Q üzerinde A nın hareketini bir tablo yardımıyla özetleyebiliriz. $n = |Q|$ ve $m = |A|$ ise $n + 1$ satır ve $m + 1$ sütünü olan bir tablonun 1. satırına A nın elemanlarını ve 1. sütünü Q nun elemanlarını yazalım. Daha sonra $a \in A$ ve $q \in Q$ için a yı içeren sütun ve q yu içeren satıra qa yı yazalım. Bu tablo $\mathcal{A}$ otomotosunu tek türlü belirler. Buna bir örnek olarak $Q = \{0, 1, 2, 3\}$, $A = \{a, b\}$ ise

	a	b
0	0	0
1	2	1
2	2	3
3	0	1

tablosunun belirlediği otomotoyu düşünebiliriz. Aynı otomotoyu bir durum diagramı ile de gösterebiliriz. Aşağıda verilen diagramın hiç bir söze gerek kalmaksızın otomotoyu nasıl resmettiği kolayca görülür.



Şekil-2

$$0a = 0b = 0, 2a = 2, 3a = 0, 1a = 2, 1b = 1, 2b = 3, 3b = 1$$

Teknik olarak Harry nin 1969 daki bu gösterimine *etiketli diagram* denir. Bu diagramın nasıl çizileceğini daha genel olarak açıklayalım. Diagramın köşelerini Q nun elemanları oluşturur. Diagramın kenarları ise her $q, r \in Q$, $a \in A$ ve $qa = r$ koşulunu sağlayan $q \xrightarrow{a} r$ şeklinde a etiketli elemanlardan oluşur. Bu durumu yukarıdaki otomotonun diagramı daha açık bir biçimde görülebilir. Ayrıca A^* ın Q üzerindeki etkisi bu durum diagramından kolayca izlenebilir. Örneğin $1(aba)$ yı birden başlayarak ardışık olarak a, b yi okların yönünde takip ederek hesaplayabiliriz. Böylece

$$1(aba) = 2(aba) = 3(aba) = 0$$

olduğu görülür.

Bir $\mathcal{A}$ otomotonun yalnızca durum kümesi Q ve girdi kümesi A ya bağlı değil üstelik A nın Q üzerindeki hareketinin doğasına da bağlıdır.

Bu bölümde tanımladığımız otomoto için kullandığımız *tam* sıfatı qa her q ve her a için tanımlı olduğunu, *deterministik* sıfatı ise a girdisinin q durumu üzerindeki etkisinin tek türlü belirli olduğunu belirtmektedir. Daha sonraki bölümlerde tam veya deterministik olmayan otomotolara da yer vereceğiz.

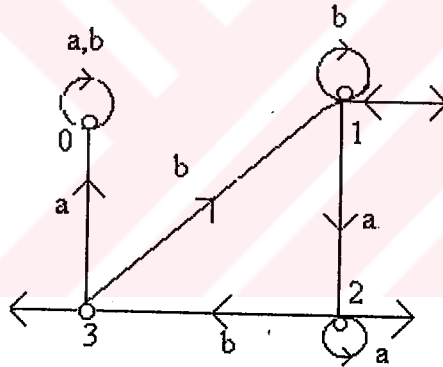


2.2. Otomoto tarafından tanınan diller

Açıkca bir otomotoyu durumları çeşitli girdiler tarafından değiştirilebilen bir çeşit ilkel bir makina olarak tanımlayabiliriz. Böyle bir makina ile yapacağımız şey çok açık değildir. Bunu başlangıç ve terminal durumları kullanarak açabiliriz.

Eğer $iw \in T$ ise $\mathcal{A}$ otomatosu A^* daki w kelimelerin kümesini *tanır* denir. $L(\mathcal{A})$ ile $\mathcal{A}$ otomatosu tarafından tanınan A^* daki tüm kelimelerin kümesini göstereceğiz. $L(\mathcal{A})$ kümesine $\mathcal{A}$ tarafından *tanınan dil* diyeceğiz.

Başlangıç durumu içe doğru ok aracılığıyla, terminal durumu dışa doğru ok aracılığıyla hem terminal hem başlangıç durumunu çift yönlü ok ile gösterelim. $Q = \{0, 1, 2, 3\}$, $A = \{a, b\}$, $i = 1$ ve $T = \{1, 2, 3\}$ olmak üzere aşağıdaki diagram ile tanımlanan $\mathcal{A}$ otomatosunu düşünelim.



Şekil-3

$b^2a^3b^2a^4$ kelimesi $\mathcal{A}$ otomatosu tarafından tanınır. Çünkü

$$1(b^2a^3b^2a^4) = 2 \in T$$

dir. Fakat

$$1(b^2a^3ba^4) = 0$$

olup $b^2a^3ba^4$ kelimesi $\mathcal{A}$ otomotonu tarafından tanınmaz. $L(\mathcal{A})$ in $A^* = \{a, b\}^*$ in aba yı içermeyen tüm w kelimelerinden oluştuğunu gösterebiliriz. Bunu $w \in A^*$ olduğuna göre $|w|$ üzerinden tümevarımla yapalım. Bu amaçla $n \in \mathbb{N}$ için L_n ile $L(\mathcal{A})$ nın boyu n olan kelimelerini göstereyim.

$|w| = 1$ ise $w = a$ ve $w = b$ dir. $1a = 2 \in T$, $1b = 1 \in T$ olup a, b $\mathcal{A}$ tarafından tanınır. O halde $L_1 = \{a, b\}$ dir.

$|w| = n > 1$ olsun. Boyu n den küçük bir kelimenin $\mathcal{A}$ tarafından tanınması için gerek ve yeter koşul aba yı içermemesi olsun. Önce w nun aba yı içermediğini varsayalım.

$w = za$ veya $w = zb$ dir. w , aba yı içermediğinden z de aba yı içermez. $|z| = n - 1$ olup tümevarım varsayımı gereğince $z \in L(\mathcal{A})$ dir. $1z \in \{1, 2, 3\}$ dür. $1z = 3$ olursa diagramdan da kolayca görüleceği gibi $z = uab$ şeklinde olmak zorundadır. Fakat bu $w = uaba$ olmasını gerektireceğinden, w nun aba yı içermemesi ile çelişir. O halde $1z \in \{1, 2\}$ dir. $w = za$ ise $1w = 1za \in \{1a, 2a\} = \{2\} \subset T$ olur. $w = zb$ ise $1w = 1zb = \{1b, 2b, 3b\} = \{1, 3\} \subset T$ dir. O halde her durumda $w \in L(\mathcal{A})$ dir. Şimdi tersine olarak $w \in L(\mathcal{A})$ olduğunu varsayalım. $w = u(aba)^j$ şeklinde ise her $j \in \mathbb{Q}$ için $j(aba) = 0$ olduğu dikkate alınacak olursa $jw = 0y = 0$ olduğu görülür. Bu ise $w \in L(\mathcal{A})$ olması ile çelişir. O halde w , aba yı içermez. Böylece

$$L(\mathcal{A}) = \{a, b\}^* \setminus \{a, b\}^* aba \{a, b\}^*$$

olduğu görülür.

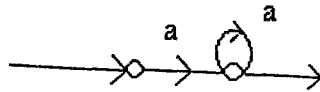
Örnek 3 Durum diagramı



Şekil-4

olan otomoto a^* ı tanır.

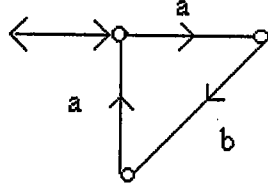
Örnek 4 Durum diagramı



Şekil-5

olan otomoto a^+ yı tanır.

Örnek 5 Durum diagramı



Şekil-6

olan otomoto $(aba)^*$ ı tanır.

Bir $\mathcal{A} = (Q, A, \varphi, i, T)$ otomotosu verilsin. Eğer $q(a_1a_2\dots a_n) = q'$ ise o zaman otomotonun durum diagramında q ve q' durumları bir

$$q \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \rightarrow \dots \rightarrow q_{n-1} \xrightarrow{a_n} q_n$$

patikası ile birbirine bağlanır. $a_1a_2\dots a_n$ ye *patikanın etiketi* denir.

Eğer bir patika başlangıç durumu i ile başlıyor ve T deki t terminal durumu ile bitiyorsa *patika başarılıdır* denir.

$$w \in L(\mathcal{A}) \iff w \text{ etiketli başarılı bir patika vardır.}$$

Örneğin şekil-3 deki durum diagramındaki

$$1 \xrightarrow{b} 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$$

patikası ba^2b etiketi ile başarılıdır.

A bir küme ve L, A^* in bir alt kümesi olsun. Eğer $L(\mathcal{A}) = L$ olacak şekilde alfabesi A olan bir $\mathcal{A}$ otomotosu varsa A^* in L alt kümesine *tanınabilir* denir. Örneğin, daha önce kanıtladığımız gibi $A = \{a, b\}$ için $L = A^* \setminus A^*abaA^*$ kümesi tanınabilirdir. Bu bölümün temel amacı sonlu doğuraylı A^* monoidinin tanınabilir alt kümesinin kullanışlı alternatif tanımının verilmesidir. Tanınabilir bir kümenin sağlaması gereken önemli bir koşulu veren aşağıdaki teorem bir kümenin tanınabilir olmadığını kanıtlamakta sıkça kullanılan bir teoremdir.

Teorem 6 (Pompalama Lemma) L, A^* da sonsuz tanınabilir bir dil olsun. O zaman aşağıdaki koşulları sağlayan bir N pozitif tamsayısı vardır. $z \in L$ ve $|z| > N$ ise z kelimesi,

i) $u, w \in A^*, v \in A^+$

ii) $|uv| \leq N$

iii) her $m \geq 0$ için $uv^m w \in L$,

olmak üzere $z = uvw$ şeklinde yazılabilir.

İspat Pompalama Lemma adı v 'nin istenildiği kadar kopyası ile uvw kelimesini şişirebildiğimizden kaynaklanır. $\mathcal{A} = (Q, A, i, T)$ sonlu durumlu otomoto olmak üzere $L = L(\mathcal{A})$ olsun. $N = |Q|$ koyalım. $|z| = k > N$ olmak üzere $z = a_1 a_2 \dots a_k \in L$ olsun. $z = a_1 a_2 \dots a_k$ etiketli başarılı bir patikada $N + 1$ tane $q_0, q_1, \dots, q_N$ durumundan en az biri tekrar eder. $r \geq 0$ ile $q_r, q_1, \dots, q_N$ dizisinde tekrar eden ilk durum olsun Ayrıca q_{r+s} de q_r 'nin ilk tekrarı olsun. Dikkat edilirse $r \geq 0$, $s > 0$, $|Q| = N$ olup $r + s \leq N$ dir. $r + s$, N 'den küçük olmazsa q_i lerden biri q_r den daha önce tekrar eder. $u \in A^*$, $v \in A^+$ ve $w \in A^*$ sırasıyla

$$q_0 \rightarrow \dots \rightarrow q_r, q_r \rightarrow \dots \rightarrow q_{r+s} = q_r, q_{r+s} \rightarrow \dots \rightarrow q_N \rightarrow \dots \rightarrow q_k$$

patikalının etiketleri olsun. $z = uvw$ dir. q_0 'dan q_k 'ya başarılı bir patika v etiketli $q_r \rightarrow \dots \rightarrow q_{r+s} = q_r$ bir döngüyü içerir. Başka bir başarılı patikayı bu döngü etrafında istenildiği kadar dönererek veya bu döngüyü hiç kullanmadan elde ederiz. Böylece $m \geq 0$ için $uv^m w \in L$ dir. Ayrıca burada $|uv| = r + s \leq N$ dir. ■

Pompalama Lemmasının kullanımına bir örnek olarak $\{a, b\}^*$ ın

$$L = \{a^n b^n : n \geq 1\}$$

alt kümesinin tanınabilir olmadığını kanıtlayalım.

Eğer bu küme sonlu durumlu bir otomoto tarafından tanınabilir ise Pompalama Lemmasının bize verdiği N pozitif tamsayısını gözönünde bulunduralım.

$n > N$ için $z = a^n b^n$ kelimesini alalım. $|v| \geq 1$ ve $|uv| \leq N < n$ ile $z = uvw$ olarak yazılabilir. Bu yolla $uv^m w \in L$ olur. ($m \geq 0$ için) u ve v , z nin a larının başlangıç bloklarından oluşur.

$$u = a^p, v = a^q, w = a^r b^n$$

($p, r \geq 0, q > 0, p + q + r = n$) dir. Fakat o zaman

$$uv^0 w = a^{n-q} b^n \in L$$

olup L nin tanımı ile çelişir. Bu yüzden L tanınabilir değildir.

Örnek 7 $A = \{a, b, \dots\}$ en az iki harfi içeren sonlu bir alfabe olsun. $w = a_1 a_2 \dots a_n \in A^*$ ise w^R yi, w nun tersi olan kelime $a_n a_{n-1} \dots a_1$ olarak tanımlayalım. $P = \{w \in A^* : w^R = w\}$ koyalım. P , A^* daki tm polindromların kümesidir. P tanınabilir değildir.

İspat Pompalama Lemması tarafından verilen N tamsayısını gözönünde bulunduralım ve $n > N$ için

$$z = a^n b a^n$$

polindromunu alalım. O zaman $|v| \geq 1$, $|uv| \leq N < n$ ve her $m \geq 0$ için $uv^m w \in P$ olacak şekilde $z = uvw$ olarak yazabiliriz. $|uv| \leq N < n$ nin anlamı hem u hem de v aşağıdaki gibi a ların bloklarından oluşuyor demektir.

$$u = a^p, v = a^q, w = a^r b a^n$$

$(p, r \geq 0, q > 0, p + q + r = n)$. Fakat o zaman

$$uv^0 w = a^{n-q} b a^n \in P$$

olmalıdır. $a^{n-q} b a^n$ bir palindrom olmadığından, P tanınabilir değildir.

■



2.3. Tam ve deterministik olmayan otomoto

Bir otomotonun daha genel tanımı ile çalışmak çoğu zaman daha kullanışlıdır. Daha önce de olduğu gibi durumların boş olmayan sonlu bir Q kümesi ve boş olmayan sonlu bir alfabe A olsun. Fakat Q üzerine A nın hareketinii $Q \times A$ dan $P(Q)$ ya olan φ fonksiyonu yardımıyla tanımlayacağız. Burada $P(Q)$, Q nun tüm alt kümelerinin kümesidir. $\varphi(q, a) = \emptyset$ olma durumunda qa tanımsız olur. Üstelik $|\varphi(q, a)| \geq 2$ ise qa tek türlü belli değildir. Bu durumu daha formal olarak yazalım.

Bir *sonlu durumlu otomoto* (tam veya deterministik olmayan) aşağıdaki koşulları sağlayan $\mathcal{A} = (Q, A, \varphi, i, T)$ şeklinde bir beşlidir.

1. Q ve A sonlu ve boş olmayan kümelerdir.
2. $T \subseteq Q$ ve $i \in Q$.
3. $\varphi : Q \times A \rightarrow P(Q)$ bir fonksiyondur.

Dikkat edilecek olursa yeni tanımlanan kavram, tam ve deterministik otomoto kavramını kapsar. Bunun için $\mathcal{A} = (Q, A, \psi, i, T)$ bir tam ve deterministik otomoto ise $\varphi : Q \times A \rightarrow P(Q)$ fonksiyonu

$$\varphi(q, a) = \{\psi(q, a)\}$$

olarak tanımlanacak olursak bu olguyu kolayca görebiliriz. O halde $\mathcal{A} = (Q, A, \varphi, i, T)$ otomotosu her $q \in Q$, $a \in A$ için $|\varphi(q, a)| = 1$ olması durumunda tam ve deterministik olarak algılanabilir.

Artık qa birden çok değer alabildiğinden, böyle bir otomotonun durum diagramında $q \xrightarrow{a} r$ kenarı yerine $qa = \{r_1, \dots, r_k\}$ ise $q \xrightarrow{a} r_1, \dots, q \xrightarrow{a} r_k$ kenarları yer alacaktır. $qa = \emptyset$ ise q ile başlayan ve a etiketli bir kenar olmayacaktır. A nın Q üzerine hareketini aşağıdaki kurallarla A^* ın Q üzerine hareketini genişletebiliriz.

$$\begin{aligned} q1 &= \{q\}, \quad (q \in Q) \\ q(wa) &= \bigcup_{p \in qw} pa, \quad (w \in A^*, q \in Q, a \in A) \end{aligned}$$

$P \subseteq Q$ için $Pa = \bigcup_{p \in P} pa$ olarak tanımlanırsa $q(wa) = (qw)a$ olur. Bu eşitlik Q nun elemanlarının arasında olmasından ziyade Q nun alt kümelerinin arasında olması anlamındadır. İspatı daha önceki ile tamamen aynı olmamakla beraber

$$q(wz) = (qw)z$$

dir. Tüm bu durumlarla beraber i başlangıç durumunu ve terminal durumları Q nun boş olmayan T alt kümesi ile belirtilir. Eğer $iw \cap T \neq \emptyset$ ise o zaman w kelimesi $\mathcal{A}$ tarafından *tanınır* denir ve $w \in L(\mathcal{A})$ yazılır. Şimdide tanınabilirliğin daha genel ve yeni içeriğine bakalım. Eğer

$L \subseteq A^*$ ise ve $L = L(\mathcal{A})$ olacak şekilde tam ve deterministik olması gerekmeyen bir $\mathcal{A}$ otomotosu varsa A^* ın L alt kümesine *tanınabilir* denir.

Teorem 8 $\mathcal{A} = (Q, A, \varphi, i, T)$ (tam ve deterministik olması gerekmez) bir otomoto ve $L(\mathcal{A})$ da $\mathcal{A}$ otomotosu tarafından tanınan bir dil olsun. O zaman

$$L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$$

olacak şekilde bir tam deterministik bir $\mathcal{A}'$ otomotosu vardır.

İspat $\mathcal{A}'$ otomotosunun alfabesini $\mathcal{A}$ otomotosunun alfabesi ile aynı A kümesi olarak alalım. Fakat $\mathcal{A}'$ -nün durumlarının kümesini Q nun tüm alt kümelerinin kümesi $P(Q)$ olarak alalım. A nın $P(Q)$ üzerine hareketini bir ψ fonksiyonu ile aşağıdaki gibi gösterelim.

$$\begin{aligned} \psi &: P(Q) \times A \rightarrow P(Q) \\ \psi(P, a) &= \bigcup_{p \in P} \varphi(p, a), \quad (P \in P(Q), a \in A) \end{aligned}$$

daha kısa bir gösterimle bunu

$$Pa = \bigcup_{p \in P} pa, \quad (P \in P(Q), a \in A)$$

olarak yazabiliriz. Başlangıç ve terminal durumları bir müddet bir kenara bırakacak olursak $\mathcal{A}' = (P(Q), A, \psi)$ yukarıdaki tanımlama ile tam ve deterministik bir otomoto olur. A nın Q üzerine hareketini alışlageldiği gibi aşağıdaki kurallarla A^* ın Q üzerine hareketine genişletebiliriz.

$$\begin{aligned} P1 &= P, \quad (P \in P(Q)) \\ P(wa) &= (Pw)a, \quad (w \in A^*, P \in P(Q), a \in A) \end{aligned}$$

Şimdi biz bunları $|w|$ üzerinden tümevarımla A^* daki her w kelimesi ve her $P \in P(Q)$ için

$$Pw = \bigcup_{p \in P} pw$$

olduğunu göstereceğiz. $|w| = 1$ için iddia tanımdan başka bir şey değildir. $|w| = n > 1$ olduğunu kabul edelim. $z \in A^*$ ve $a \in A$ ile $w = za$ olarak yazalım O zaman

$$Pw = P(za) = (Pz)a = \left(\bigcup_{p \in P} pz \right) a = \bigcup_{p \in P} (pz)a = \bigcup_{p \in P} p(za) = \bigcup_{p \in P} pw$$

elde edilir. $Pw = \bigcup_{p \in P} pw$ formülü $\psi(P, w) = \bigcup_{p \in P} \varphi(p, w)$ şeklinde de yazılabilir. özellikle dikkat edilecek olursa

$$\psi(\{q\}, w) = \varphi(q, a), \quad (w \in A^*, q \in Q).$$

Tek elemanlı $\{i\}$ kümesini başlangıç durumu olarak terminal durumları

$$T' = \{P \in P(Q) : P \cap T \neq \emptyset\}$$

kümesi olarak alırsak $\mathcal{A}'$ otomotosunun tanımını tanımlarız. Bu durumda

$$\begin{aligned} w &\in L(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \varphi(i, w) \cap T \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \psi(\{i\}, w) \cap T \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \psi(\{i\}, w) \in T' \\ &\Leftrightarrow w \in L(\mathcal{A}'). \end{aligned}$$

■

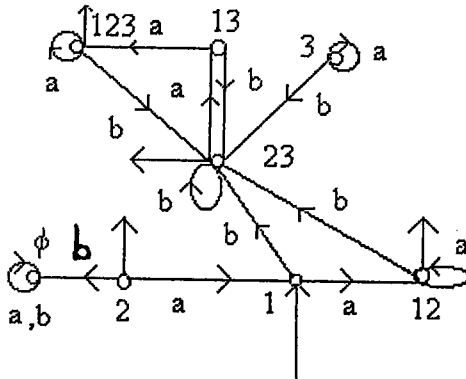
Örnek 9 Şimdi aşağıdaki şekilde durum diagramı verilen $\mathcal{A}'$ otomotosunu inceleyelim. Bu otomoto $2^3 = 8$ duruma sahip olup tam ve deterministiktir.

	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{2, 3\}$	$\{1, 3\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 2, 3\}$
a	$\emptyset$	$\{1, 2\}$	$\{1\}$	$\{3\}$	$\{1, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 2, 3\}$
b	$\emptyset$	$\{2, 3\}$	$\emptyset$	$\{2, 3\}$	$\{2, 3\}$	$\{2, 3\}$	$\{2, 3\}$	$\{2, 3\}$

Başlangıç durumu $\{1\}$ ve terminal durumlar

$$\{2\}, \{2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}$$

olsun. O zaman durum diagramı aşağıdaki gibidir.



Şekil-7

Bu son otomoto tam ve deterministik olmanın etkileyici görüntüsüne sahip iken bazı hoş olmayan görünümlere de sahiptir. Bunları açıklamak için bazı tanımlara ihtiyaç vardır.

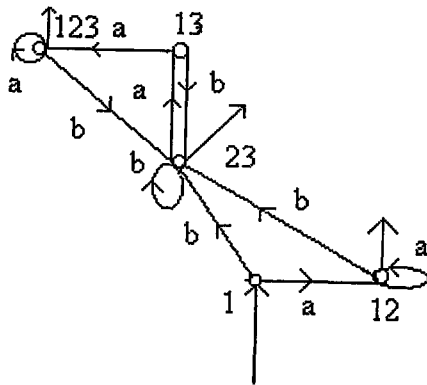
Bir deterministik $\mathcal{A} = (Q, A, i, T)$ otomotosunda $iw = q$ olacak şekilde A^* da w kelimesi varsa q durumuna *erişilebilir* denir. Eğer her durumu erişilebilir ise $\mathcal{A}$ otomotosuna *erişilebilir* denir.

Dikkat edilecek olursa yukarıdaki durum diagramına sahip $\mathcal{A}$ otomotosu erişilebilir değildir. Çünkü $\emptyset$, $\{2\}$, $\{3\}$ durumlar erişilebilir değildir.

Bir $\mathcal{A}$ otomotosunun davranışı başarılı patikalar aracılığıyla (yani i den T ye patikalar) tanımlanır ve erişilebilir durumlar başarılı patikalar aracılığıyla ziyaret edilir. Diğer bütün durumlar A nın hareketi ile ilgisiz olup bunların kaldırılması mümkün görülebilir. Bu aslında çok basit bir düşünce ile yapılabilir. Bir tam deterministik $\mathcal{A} = (Q, A, \varphi, i, T)$ otomotosu verilsin. $\mathcal{A}^b$ otomotosunu (Q', A, φ, i, T) olarak tanımlayalım. Burada Q' , Q dan erişilebilir olmayan durumların çıkarılmasıyla elde edilen kümedir. A nın Q' üzerine hareketi basitce A nın Q üzerine hareketinin Q' kısıtlanması olarak tanımlayalım. Bu yolla başarılı olmayan patikalar engellendiğinden

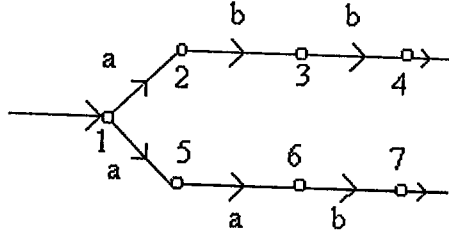
$$L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}^b)$$

olup $\mathcal{A}^b$ erişilebilirdir. Yukarıda durum diagramı verilen otomotoya bunu uygularsak aşağıdaki durum diagramına sahip erişilebilir bir otomoto elde ederiz. Bu otomotoda orjinal otomoto ile aynı davranışa sahip fakat tam deterministik ve erişilebilirdir.



Şekil-8

Örnek 10 *Durum diagramı aşağıdaki gibi verilen (tam olmayan ,deterministik olmayan) $\mathcal{A}$ otomotosunu gözönünde bulunduralım.*



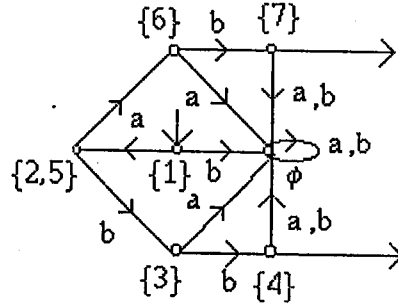
Şekil-9

$L(\mathcal{A}) = \{ab^2, a^2b\}$ olduğu açıktır.

$$\begin{array}{lll} \{1\} a = \{2, 5\} & \{2, 5\} a = \{6\} & \{6\} a = \{3\} a = \emptyset \\ \{1\} b = \emptyset & \{2, 5\} b = \{3\} & \{6\} b = \{7\}, \{3\} b = \{4\} \end{array}$$

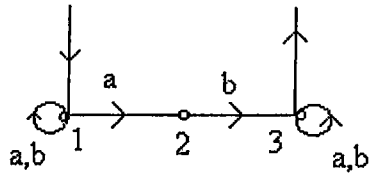
$$\begin{array}{l} \{7\} a = \{7\} b = \{4\} a = \{4\} b = \emptyset \\ \emptyset a = \emptyset b = \emptyset \end{array}$$

olduğuna dikkat edelim. Böylece $L(\mathcal{A})$ yı tanıyan tam deterministik ve erişilebilir bir otomotonun durum diagramı aşağıdaki gibi verilir.



Şekil-10

Örnek 11 $L = \{a, b\}^* ab \{a, b\}^*$ dilini tanıyan tam olmayan non-deterministik otomotoyu yazmak kolaydır. Bu otomotonun durumu diagramı aşağıdaki gibidir.

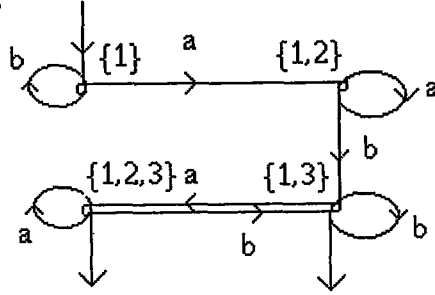


Şekil-11

L yi tanıyan tam deterministik erişilebilir $\mathcal{A}'$ otomotosunu bulmak için aşağıdaki hesaplamalar yapılır.

$$\begin{aligned}
 \{1\} a &= \{1, 2\} & \{1, 2\} a &= \{1, 2\} \\
 \{1\} b &= \{1\} & \{1, 2\} b &= \{1, 3\} \\
 \{1, 3\} a &= \{1, 2, 3\} & \{1, 2, 3\} a &= \{1, 2, 3\} \\
 \{1, 3\} b &= \{1, 3\} & \{1, 2, 3\} b &= \{1, 3\}
 \end{aligned}$$

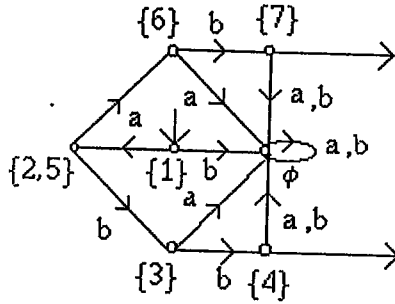
$\mathcal{A}'$ otomotosunun durum diagramı da aşağıdaki gibi çizilir.



Şekil-12

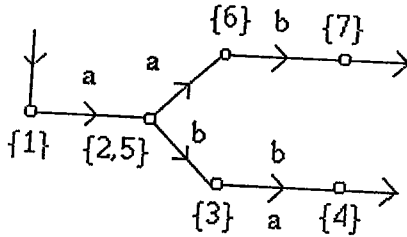
Erişilebilirlik fikri açıkça bir dualede sahiptir. A^* da $qw \in T$ olacak şekilde bir w kelimesi var ise $\mathcal{A} = (Q, A, i, T)$ otomotosundaki bu q durumuna *ters erişilebilir* denir. Eğer $\mathcal{A}$ otomotosunun tüm durumları ters erişilebilir ise $\mathcal{A}$ otomotosunun kendisine *ters erişilebilir* denir. $L(\mathcal{A})$ da başarılı patiklar yani i den T ye olan patiklar vasıtasıyla tanımlandığından ve yalnızca ters erişilebilir durumlar başarılı patiklar vasıtasıyla ziyaret edilebildiğinden eğer ters erişilebilir olmayan durumlardan temizlersek $\mathcal{A}$ nin davranışı etkilenmeyecektir. Hem erişilebilir hemde ters erişilebilir olan bir otomotoya *trim* denir.

Daha önce durum diagramı aşağıdaki gibi çizilen otomotoyu düşünelim.



Şekil-13

Bu otomotoda ters erişilebilir olmayan bir $\emptyset$ durumu vardır. Biz onu temizlersek aşağıdaki durum diagramına sahip $\mathcal{A}''$ otomotosunu elde ederiz.



Şekil-14

Bu yeni otomoto hala deterministik ve üstelik trimdir. Fakat tam değildir. Çünkü $\{7\}$ a ve $\{7\}$ b tanımsızdır.

En genel halde $\mathcal{A}$ otomotosu verilsin. $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$ olacak şekilde deterministik ve erişilebilir bir $\mathcal{A}'$ otomotosunu üretmeyi garanti edebiliriz. Fakat bunun yanında tam ve ters erişilebilir olmak arasında bir tercih yapmak durumundayız. Sadece $L(\mathcal{A})$ ile ilgilenildiğinde, gerekiyorsa ve $\mathcal{A}$ tam değil ise tam, deterministik değil ise deterministik, ve trim

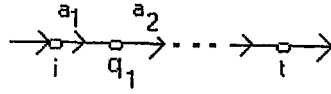
değil ise trimde yapabiliriz. Üstelik tüm bunları $L(\mathcal{A})$ yı değıştirmeden yapabiliriz.



2.4. Rasyonel kümeler ve Kleene teoremi

Teorem 12 *A sonlu bir alfabe olsun. A^* daki tüm tek elemanlı kümeler tanınabilir.*

İspat A bir alfabe olsun $w = a_1a_2...a_n \in A^+$ olsun. $\mathcal{A}$ (tam olmayan) otomatosu aşağıdaki durum diagramına sahip olup



Şekil-15

$L(\mathcal{A}) = \{w\}$ dir. Eğer $w = 1$ ise durum diagramı



Şekil-16

olan $\mathcal{A}$ otomatosu için $L(\mathcal{A}) = \{1\}$ dir. ■

Teorem 13 *Boş küme tanınabilir.*

İspat $\mathcal{A} = (\{i, 0\}, A, i, \{i\})$ olmak üzere her $a \in A$ $ia = 0a = i$ olarak tanımlanırsa $L(\mathcal{A}) = \emptyset$ dir. ■

Teorem 14 *A sonlu bir alfabe ve L_1, L_2 de A^* ın tanınabilir alt kümeleri olsun. O zaman $L_1 \cup L_2$ de A^* ın tanınabilir bir alt kümesidir.*

İspat Tam ve deterministik

$$\mathcal{A}_1 = (Q_1, A, \varphi_1, i_1, T_1) \text{ ve } \mathcal{A}_2 = (Q_2, A, \varphi_2, i_2, T_2)$$

otomotoları için $L_1 = L(\mathcal{A}_1)$ $L_2 = L(\mathcal{A}_2)$ olsun. $Q = Q_1 \times Q_2$ ve

$$\varphi((q_1, q_2), a) = (\varphi_1(q_1, a), \varphi_2(q_2, a)), ((q_1, q_2) \in Q, a \in A)$$

$i = (i_1, i_2)$ ve

$$T = (T_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times T_2)$$

olmak üzere $\mathcal{A}$ otomotosunu (Q, A, φ, i, T) olarak alalım. Eğer $w \in L_1$ ise o zaman $i_1 w \in T_1$ olup

$$(i_1, i_2) w = (i_1 w, i_2 w) \in (T_1 \times Q_2) \subseteq T$$

dir. Benzer şekilde $w \in L_2$ ise $(i_1, i_2) w \in T$ olup $L_1 \cup L_2 \subseteq L(\mathcal{A})$ dir. Tersini göstermek için $w \in L(\mathcal{A})$ ise ya $i_1 w \in T_1$ veya $i_2 w \in T_2$ olup $w \in L_1 \cup L_2$ dir. O halde $L_1 \cup L_2 = L(\mathcal{A})$ dir. ■

Teorem 15 A sonlu bir alfabe olsun. A^* in her sonlu alt kümesi tanımlıdır.

İspat Yukardaki teoremlerin bir sonucudur. ■

A boş olmayan sonlu bir küme olsun. A^* in tüm sonlu alt kümelerinin tanımlı olduğunu gördük. Fakat A^* in her alt kümesi tanımlı değildir. $L_1, L_2 \subseteq A^*$ verilsin. Bunların çarpımları $L_1 L_2$ yi

$$L_1 L_2 = \{uv : u \in L_1, v \in L_2\}$$

olarak tanımlarız. A^* in L alt kümesi verilsin.

$$L^* = \{u_1 u_2 \dots u_n : n \geq 0; u_1, u_2, \dots, u_n \in L\}$$

olarak tanımlarız. Buda Klene nin yıldız işlemi olarak adlandırılan standart bir notasyondur. Dikkat edilecek olursa her

$$L \subseteq A^*$$

için

$$L^* = \{1\} \cup L \cup L^2 \cup \dots = \bigcup_{n=0}^{\infty} L^n$$

şeklinde de ifade edebiliriz..

Eğer A^* in sonlu alt kümelerine $\cup, \cdot, *$ işlemlerinin sonlu uygulamalarıyla elde edilen A^* in bir alt kümesine *rasyonel* denir. Örneğin;

$$(ab)^*, \{ab, ba\}^*, (a^* \cup b^*)^*, \{a, b\}^*$$

kümeleri A^* in rasyonel alt kümeleridir.

$$\{a, b\}^+ = a \{a, b\}^* \cup b \{a, b\}^*$$

şeklinde yazılabidiğinden $\{a, b\}^+$ da rasyoneldir. A^* in tüm rasyonel alt kümelerinin kümesini *Rat* A^* ile göstereceğiz.

Teorem 16 (Kleene Teoremi) *A sonlu bir alfabe ve L, A^* in bir alt kümesi olsun. O zaman*

$$L \text{ tanınabilir} \Leftrightarrow L \text{ rasyoneldir.}$$

İspat A^* 'ın tüm tanınabilir alt kümelerinin kümesini $\text{Rec } A^*$ ile gösterelim. A^* 'ın tüm sonlu alt kümeleri tanınabilir olup $\text{Rec } A^*$ in içindedir. Eğer

$$L_1, L_2 \in \text{Rec } A^* \implies L_1 \cup L_2 \in \text{Rec } A^*$$

$$L_1, L_2 \in \text{Rec } A^* \implies L_1.L_2 \in \text{Rec } A^*$$

ve

$$L \in \text{Rec } A^* \implies L^* \in \text{Rec } A^*$$

olduğunu gösterebilirsek o zaman her rasyonel kümenin tanınabilir olduğunu söyleyebileceğiz. Yani $\text{Rat } A^* \subseteq \text{Rec } A^*$ olacaktır. Daha önce

$$L_1, L_2 \in \text{Rec } A^* \implies L_1 \cup L_2 \in \text{Rec } A^*$$

olduğu gösterildi.

$$L_1, L_2 \in \text{Rec } A^* \implies L_1.L_2 \in \text{Rec } A^*$$

olduğunu gösterelim.

L_1 ve L_2 sırasıyla tam deterministik

$$\mathcal{A}_1 = (Q_1, A, \varphi_1, i_1, T_1) \text{ ve } \mathcal{A}_2 = (Q_2, A, \varphi_2, i_2, T_2)$$

otomotoları tarafından tanınıyor olduğunu kabul edelim. $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$ kabul edebiliriz. Bu bilgiler ile yeni deterministik olmayan otomotoyu üretilim.

$\mathcal{A} = (Q_1 \cup Q_2, A, \psi, i_1, T_2)$ olarak tanımlayalım. Her $q_1 \in Q_1, q_2 \in Q_2$ ve $a \in A$ için burada

$$\psi(q_1, a) = \begin{cases} \{\varphi_1(q_1, a)\} & \text{Eğer } \varphi_1(q_1, a) \notin T_1 \\ \{\varphi_1(q_1, a), i_2\} & \text{Eğer } \varphi_1(q_1, a) \in T_1 \end{cases}$$

$\psi(q_2, a) = \{\varphi_2(q_2, a)\}$ dir. $w = z_1 z_2 \in L_1 L_2, z_1 \in L_1, z_2 \in L_2$ olarak aldığımızı kabul edelim. O zaman $\varphi_1(i_1, z_1) \in T_1$ olur ve böylece $\psi(i_1, z_1), i_2$ yi içerir. Dikkat edilecek olursa $\psi(i_1, z_1),$

$$\{\varphi_1(i_1, z_1), i_2\}$$

den daha geniş olabilir çünkü i_1 den $\varphi_1(i_1, z_1)$ e olan patika T_1 i öncelikle bir kaç kez ziyaret etmiş olabilir.)

$\psi(i_1, z_1 z_2), \varphi_2(i_2, z_2)$ yi içerdiğinden $\psi(i_1, z_1 z_2)$ nin T_2 ile kesişimi boş değildir. Böylece $w \in L(\mathcal{A})$ dır. Yani $L_1 L_2 \subseteq L(\mathcal{A})$ dır.

Tersi için $w \in L(\mathcal{A})$ aldığımızı kabul edelim. $\psi(i_1, w), T_2$ nin bir elemanını içerir.

$\mathcal{A}$ daki i_1 den $\psi(i_1, w)$ ye olan patika yalnızca w nun bazı sol çarpanları u lar için $\varphi_1(i_1, u) \in T_1$ ise Q_2 den geçer.

$u_1, u_2, \dots, u_k$ sol faktörleri için bu sağlansın. Burada

$$|u_1| < |u_2| < \dots < |u_k|$$

ve $w = u_j v_j$, $j = 1, 2, \dots, k$ dır. $\varphi_1(i_1, u_j) \in T_1$ olup $u_j \in L_1$ dir. Her j için $i_2 \in \psi(i_1, u_j)$ olup böylece $\psi(i_1, w)$, $\varphi_2(i_2, v_j)$ yi içerir. Ashında

$$\psi(i_1, w) = \{\varphi_1(i_1, w), \varphi_2(i_2, v_1), \varphi_2(i_2, v_2), \dots, \varphi_2(i_2, v_k)\}$$

dir. Kabulden ($w \in L(\mathcal{A})$ ya bakarsak) $\varphi_2(i_2, v_j)$, $j = 1, \dots, k$ lerden en az biri T_2 ye ait olmalıdır. Bir $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ vardır öyleki $v_j \in L_2$ dir. Böylece $w = u_j v_j \in L_1 L_2$ ye ulaşırız. O halde $L_1 L_2 \in \text{Rec } A^*$ dır.

$L \in \text{Rec } A^* \implies L^* \in \text{Rec } A^*$ olduğunu göstermeye çalışalım.

$1 \notin L$ için ispatlamak yeterli olacaktır. $1 \in L$ ise

$$(L \setminus \{1\})^* = L^*$$

$$L \in \text{Rec } A^* \implies L \setminus \{1\} \in \text{Rec } A^*$$

dır. Dolayısıyla

$$L \in \text{Rec } A^* \implies L \setminus \{1\} \in \text{Rec } A^*$$

$$\implies (L \setminus \{1\})^* \in \text{Rec } A^* \implies L^* \in \text{Rec } A^*$$

olur. $(L \setminus \{1\})^* = L^*$ in ispatı açıktır. $L \in \text{Rec } A^* \implies L \setminus \{1\} \in \text{Rec } A^*$ olduğunu ispatlamak için $L = L(\mathcal{A})$ ve $\mathcal{A} = (Q, A, \varphi, i, T)$ olsun.

Eğer $q \in Q$, her $a \in A$ için

$$\varphi'((q, 0), a) = \varphi'((q, 1), a) = (\varphi(q, a), 1)$$

ile $\mathcal{A}' = (Q \times \{0, 1\}, A, \varphi', (i, 0), T \times \{1\})$ ise o zaman

$$\varphi'((i, 0), w) = \begin{cases} (\varphi(i, w), 0), & w = 1 \\ (\varphi(i, w), 1), & w \neq 1 \end{cases}.$$

dır. $\varphi'((i, 0), w) \in T \times \{1\}$ olması için gerek ve yeter koşul $w \in L \setminus \{1\}$ olmasıdır.

$$L(\mathcal{A}') = L \setminus \{1\}$$

dir.

$$L \in \text{Rec } A^* \implies L \setminus \{1\} \in \text{Rec } A^*$$

olduğunu gösterdik. Şimdi

$$L \setminus \{1\} \in \text{Rec } A^* \implies (L \setminus \{1\})^* \in \text{Rec } A^*$$

olduğunu gösterelim.

$1 \notin L$ ve $L = L(A)$ olduğunu kabul edelim. Burada

$$\mathcal{A} = (Q, A, \varphi, i, T)$$

dir. Şimdi $\mathcal{A}$ yı kullanarak $\mathcal{A}^+$ otomotosunu yaratalım.

$\mathcal{A}^+ = (Q, A, \varphi^+, i, T)$ dir. Burada

$$\varphi^+(q, a) = \begin{cases} \{\varphi(q, a)\}, & \text{Eğer } \varphi(q, a) \notin T \\ \{\varphi(q, a), i\}, & \text{Eğer } \varphi(q, a) \in T \end{cases}$$

dir.

$n \geq 1$ ve $z_1, z_2, \dots, z_n \in L$ ile $w = z_1 z_2 \dots z_n \in L^+ (= L^* \setminus \{1\})$ olduğunu kabul edelim. $\varphi(i, z_1) \in T$ olduğundan $\varphi^+(i, z_1)$ hem i yi hem de T nin bir elemanını içerir. Tümevarım ile $\varphi^+(i, z_1 \dots z_{k-1})$ in hem i yi hem T nin bir elemanını içerdiğini kabul edersek $\varphi^+(i, z_1 \dots z_k)$, $\varphi^+(i, z_k) = \{\varphi(i, z_k), i\}$ yi içerir. (kabulden $\varphi(i, z_k) \in T$ dir.). O halde $\varphi^+(i, z_1 \dots z_k)$ hem i yi hem de T nin bir elemanını içerir. Böylece $w \in L(\mathcal{A}^+)$ dir. Yani $L^+ \subseteq L(\mathcal{A}^+)$ dir.

Tersine $w \in L(\mathcal{A}^+)$ olduğunu kabul edelim. $\varphi^+(i, w)$, T nin bir elemanını içerir. z_1, w nun trivial olmayan ve $\varphi^+(i, z_1)$, T nin bir elemanını içerecek şekilde en kısa sol çarpanı olsun. (w böyle bir çarpandır.) O zaman $\varphi^+(i, z_1) = \{\varphi(i, z_1), i\}$ ve $z_1 \in L$ dir. Eğer $z_1 = w$ ise o zaman $w \in L \subseteq L^+$ olup ispat biter. Yoksa $w = z_1 w_1$ olur ve z_2, w_1 in trivial olmayan en kısa sol faktörü olsun öyleki $\varphi^+(i, z_1 z_2)$, T nin bir elemanını içerir. O zaman

$$\varphi^+(i, z_1 z_2) = \{\varphi(i, z_1 z_2), \varphi(i, z_2), i\}$$

ve ya $z_1 z_2 \in L$ veya $z_2 \in L$. Her durumda $z_1 z_2 \in L^+$ dir.

Eğer $w = z_1 z_2$ ise iş biter. Yoksa $w = z_1 z_2 w_2$ ve $z_3, \varphi^+(i, z_1 z_2 z_3)$, T nin bir elemanını içerecek şekilde w_2 nin trivial olmayan en kısa sol çarpanı olsun. O zaman

$$\varphi^+(i, z_1 z_2 z_3) = \{\varphi(i, z_1 z_2 z_3), \varphi(i, z_2 z_3), \varphi(i, z_3), i\}$$

ya $z_1 z_2 z_3 \in L$ veya $z_2 z_3 \in L$ veya $z_3 \in L$ dir. Her durumda $z_1 z_2 z_3 \in L^+$ dir. w nun boyu sonlu olup bu işlemler bir yerde son bulur. O halde $w \in L^+$ dir.

$$L \in \text{Rec}A^* \rightarrow L^+ \in \text{Rec}A^*$$

olduğunu gösterdik. L^+ tanınabilir ise $L^* = L^+ \cup \{1\}$ de tanınabilir dir. Her rasyonel kümenin tanınabilir olduğunu gösterdik. Yani $\text{Rat} A^* \subseteq \text{Rec} A^*$ dir.

Tersini göstermek için bir tanınabilir L kümesini gözönünde bulunduralım. Bu yüzden tam deterministik $\mathcal{A} = (Q, A, \varphi, i, T)$ için

$$L = L(\mathcal{A}) = \{w \in A^* : iw \in T\}$$

dir. Aslında L sonlu bir birleşimdir. Yani

$$L = \bigcup_{t \in T} L(i, t)$$

dir. Burada

$$L(i, t) = \{w \in A^* : iw = t\}$$

dir. $L(i, t)$ nin rasyonel olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Daha genel olarak Q daki her q, p için $L(p, q)$ rasyoneldir. Burada

$$L(p, q) = \{w \in A^* : pw = q\}$$

dır. A da p den q ya tüm patikaların etiketlerinin kümesidir.

p den q ya her patika için bu patika vasıtasıyla Q da ziyaret edilen köşelerin kümesini bölge olarak tanımlayabiliriz. Dikkat edilirse bölge p ve q yu içerir.

Q daki p, q için, p, q yu içeren Q nun her R alt kümesi için $L(p, R, q)$ yu bölgesi R içinde kalan p den q ya tüm patikaların etiketlerinin kümesi olarak tanımlarız. Yani

$$L(p, R, q) = \{w \in A^* : pw = q, w \text{ nun her } z \text{ sol çarpanı için } pz \in R\}$$

p den q ya (belirli) kesin bir patika, p veya q yu ziyaret etmeyen patikadır. Eğer $V, p \notin V, q \notin V$ olacak şekilde Q nun alt kümesi ise o zaman $Z(p, V, q)$ yi, bölgesi $V \cup \{p, q\}$ içinde kalan p den q ya olan kesin patikaların etiketlerinin kümesi olarak tanımlarız. Yani

$$Z(p, V, q) = \{w \in A^* : w \text{ nun öz sol faktörü } z \text{ için } pz \in V, pw = q\}$$

Amacımız $L(p, q) (= L(p, Q, q))$ nun rasyonel bir küme olduğunu göstermektir. p ve q yu içeren Q nun her R alt kümesi ile p ve q yu içermeyen Q nun her V alt kümesi için $L(p, R, q)$ ve $Z(p, V, q)$ nun rasyonel olduğunu ispatlayarak yapacağız. Bunu $|R|$ ve $|V|$ üzerinde tümevarım kullanacağız. Başlamadan önce V deki p, q için

$$A(p, q) = \{a \in A : pa = q\}$$

koyalım. $A(p, q)$ sonlu olup kesinlikle rasyoneldir. $A(p, q)$ boş ta olabilir. $|R| = 1$ olması ancak $p = q$ ile mümkündür.

$$L(p, \{p\}, p) = (A(p, p))^*$$

olup rasyoneldir. $|V| = 0$ olması mümkündür. Bu durumda

$$Z(p, \emptyset, q) = A(p, q)$$

olup rasyoneldir. Eğer $|V| = 1$ ise $V = \{r\}$ $r \neq p, q$ ve

$$Z(p, \{r\}, q) = A(p, r) (A(r, r))^* A(r, q)$$

rasyoneldir. $n \geq 2$ olsun ve $L(p, R, q)$ ($p, q \in R$) ve $Z(p, V, q)$ ($p, q \notin V$) kümeleri $|V|$ ve $|R|$ den küçük oldukça rasyonel olsun. $|R| = n$ için

$L(p, R, q)$ yu gözönünde bulunduralım. $w \in L(p, R, q)$ olsun. p den q ya w etiketli patikanın p yi birkaç kez ziyaret ettiğini kabul edelim. $k \geq 0$ için

$$w = z_1 \dots z_k w'$$

yazabiliriz. Burada $z_1, \dots, z_k \in Z(p, R \setminus \{p\}, p)$ dir. Eğer $p = q$ ise o zaman $w' = 1$ ve

$$L(p, R, p) = [Z(p, R \setminus \{p\}, p)]^*$$

dir. Tümevarım hipotezinden $Z(p, R \setminus \{p\}, p)$ rasyonel olup $L(p, R, p)$ rasyoneldir. Eğer $p \neq q$ ise $w_1, pw_1 = q$ olmak üzere w nun en kısa sol çarpanı olsun. Bu yüzden

$$w_1 \in Z(p, R \setminus \{p, q\}, q)$$

ve $w_2 \in L(p, R \setminus \{p\}, q)$ ile $w = z_1 \dots z_k w_1 w_2$ dir. Aslında

$$L(p, R, q) = (Z(p, R \setminus \{p\}, p))^* Z(p, R \setminus \{p, q\}, q) L(q, R \setminus \{p\}, q)$$

dir. Böylece tümevarım hipotezinden $L(p, R, q)$ rasyoneldir. $w \in Z(p, V, q)$ olduğunu gözönünde bulunduralım. Burada $|V| = n$ ve $p, q \notin V$ dir. O zaman



Şekil-17

w etiketi bir patika vardır. Burada $w = aw'b$ ve $r, s \in V$ dir. $w' \in L(r, V, s)$ olur.

$$Z(p, V, q) = \bigcup_{r, s \in V} [A(p, r) L(r, V, s) A(s, q)]$$

dır. $L(r, V, s)$ nin rasyonel olduğunu yukarıda gösterdik. Bu yüzden $Z(p, V, q)$ rasyoneldir. ■

3. SENTAKTİK MONOİD

3.1. Sentaktik kongrüans

Her $L \subseteq A^*$ ile ilgili L nin sentaktik monoidi denilen bir $Syn(L)$ monoidi vasıtasıyla rasyonel dillerin başka bir karakterizasyonunu bu bölümde elde edeceğiz. A sonlu bir alfabe ve $L \subseteq A^*$ olsun. A^* üzerindeki σ_L sentaktik kongrüansını

$$\sigma_L = \{(w, z) \in A^* \times A^* : (\forall u, v \in A^*) \ u w v \in L \iff u z v \in L\}$$

olarak tanımlayalım. Her M monoidi ve M nin her P alt kümesi için

$$\sigma_p = \{(x, y) \in M \times M : (\forall u, v \in M) \ u x v \in P \iff u y v \in P\}$$

bağıntısı M üzerinde bir kongrüanstır. σ_p bir denklik bağıntısıdır. $(x, y) \in \sigma_p$ ve $a \in M$ alalım. O zaman her $u, v \in M$ için

$$u(ax)v \in P \iff (ua)xv \in P \iff (ua)yv \in P \iff u(ay)v \in P$$

dir. Böylece $(ax, ay) \in \sigma_p$ dir. Benzer şekilde $(xa, ya) \in \sigma_p$ olup σ_p kongrüanstır. $M = A^*$ durumuna dönelim. $x\sigma_p y$ ve $x \in P$ olduğunu kabul edelim. O zaman $x = 1x1 \in P$ ve böylece $y = 1y1 \in P$ dir. $x\sigma_p y$ ise ya x ve y , P dedir veya x ve y , P nin dışındadır. σ_p kongrüansı P ye bağlıdır.

Teorem 17 M bir monoid ve P de M nin bir alt kümesi olsun. σ_p sentaktik kongrüansı P ye bağlı M üzerinde maximum tek kongrüanstır.

İspat ρ nun M üzerinde P ye bağlı bir kongrüans olduğunu kabul edelim. $(x, y) \in \rho$ olsun. O zaman her $u, v \in M$ için $(uxv, uyv) \in \rho$ dir. u ve v nin her seçimi için ya $uxv, uyv \in P$ veya $uxv, uyv \notin P$ dir. Yani her $u, v \in M$ için

$$uxv \in P \iff uyv \in P$$

dir. Böylece $(x, y) \in \sigma_p$ dir. ■

$M = A^*$ için ilk tanımı düşünersek L nin sentaktik monoidi $Syn(L)$ yi A^*/σ_L olarak tanımlarız. $\varphi : A^* \rightarrow M$ morfizmi ve $\varphi^{-1}(P) = L$ olacak şekilde M nin bir P alt kümesi varsa A^* daki bir L diline bir M monoidi tarafından tanınır denir. Her L dili kendinin $Syn(L)$ monoidi tarafından tanınır. Çünkü $P = \sigma_L^h(L)$ ise o zaman $L = (\sigma_L^h)^{-1}(P)$ dir. ($\sigma_L^h : A^* \rightarrow A^*/\sigma_L$ örten monoid morfizmi vardır.)

Teorem 18 A sonlu bir alfabe ve $L \subseteq A^*$ olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

- (i) L , A^* in rasyonel bir alt kümesidir
- (ii) $Syn(L)$ sonludur.

(iii) L , bir sonlu M monoidi tarafından tanınır.

İspat $(i) \Rightarrow (ii)$: L nin A^* ın rasyonel bir alt kümesi olduğunu kabul edelim. O zaman Kleene teoreminden deterministik bir $\mathcal{A} = (Q, A, \varphi, i, T)$ otomatosu için $L = L(\mathcal{A})$ dir. A^* üzerinde τ bağıntısını.

$$w\tau z \iff (\forall q \in Q), qw = qz$$

olarak tanımlayalım. τ nun bir denklik bağıntısı olduğu açıktır. τ nun kongrüans olduğunu gösterelim. $w\tau z$ ve $u \in A^*$ olsun. Her $q \in Q$ için $qw = qz$ gerçeğinden

$$q(wu) = (qw)u = (qz)u = q(zu)$$

olduğu kolayca görülür. Bu yüzden $wu\tau zu$ dur. Üstelik $qu \in Q$ olup $(qu)w = (qu)z$ olup $uw\tau uz$ dir. Şimdi Q nun sonluluğundan A^*/τ nun sonlu olduğunu söyleyebiliriz. $Q = \{q_1, \dots, q_n\}$ olsun. O zaman $(w \in A^*)$ τ -sınıfı $w\tau, q_1w, \dots, q_nw$ nun Q da alacağı değerler ile hesaplanır. τ sınıfının tüm elemanlarının sayısı n^n yi geçmez. A^*/τ sonludur. $w, z \in A^*$ ve $w\tau z$ olduğunu kabul edelim. O zaman $\forall u, v \in A^*$ için $uwv\tau uzv$ dir. Böylece her $q \in Q$ için

$$quwv = quzv$$

dir. Özel olarak

$$iuwv \in T \iff iuzv \in T$$

dir. Yani

$$uwv \in L \iff uzv \in L$$

dir. Böylece $(w, z) \in \sigma_L$ dir. $\tau \subseteq \sigma_L$ olduğunu göstermiş olduk. O zaman

$$Syn(L) = A^*/\sigma_L \cong (A^*/\tau) / (\sigma_L/\tau)$$

dir. A^*/τ sonlu olup bölüm monoidide sonludur.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: $M = Syn(L)$ olarak ispat açıktır.

$(iii) \Rightarrow (i)$: M bir sonlu monoid, $\varphi : A^* \rightarrow M$ morfizm ve M nin $L = \varphi^{-1}(P)$ olacak şekilde bir P alt kümesi olduğunu kabul edelim. L nin rasyonel olduğunu göstermek istiyoruz. Kleene teoreminden bir sonlu durumlu $\mathcal{A} = (Q, A, i, T)$ otomatosu için $L = L(\mathcal{A})$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır. A nın Q üzerindeki hareketini $q \in Q, a \in A$ için

$$qa = q\varphi(a)$$

kuralı ile tanımlayalım. Bunu alışlageldiği gibi A^* ın Q üzerindeki hareketine genişletebiliriz. $q \in Q, w \in A^*$ için

$$qw = q\varphi(w)$$

dir. $i = 1$ (M nin birim elemanı), $\varphi = M$ ve $T = P$ olsun. O zaman

$$w \in L(\mathcal{A}) \iff iw \in T \iff 1\varphi(w) \in P \iff w \in \varphi^{-1}(P) = L$$

olup $L = L(\mathcal{A})$ dır. ■

S ve T gibi iki monoid verilsin. U dan S ye örten morfizm olacak şekilde T nin bir U alt monoidi varsa S, T yi *böler* denir ve S/T olarak yazılır. Başka bir deyişle S, T nin bir alt monoidinin homomorfik görüntüsüdür.

Teorem 19 *A sonlu bir alfabe $L' \subseteq A^*$ ve M bir monoid olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(i) M, L yi tanıır.

(ii) $Syn(L), M$ yi böler.

İspat $(i) \Rightarrow (ii) : L, M$ monoidi tarafından tanınıyor olsun.

$$\varphi : A^* \longrightarrow M$$

ve

$$\varphi^{-1}(P) = L$$

olacak şekilde M nin P alt monoidi vardır. P, M nin $S = im(\varphi)$ alt monoidi tarafından içerilir.

$$\begin{array}{ccc} A^* & \xrightarrow{\varphi} & S = im(\varphi) \\ \sigma_L^h \searrow & & \swarrow \theta \\ & Syn(L) = A^*/\sigma_L & \end{array}$$

φ ve σ_L^h örtendir. L ye bağlı $ker \varphi$ kongrüansı $x \in L$ ve $(x, y) \in ker \varphi$ için

$$\varphi(x) = \varphi(y) \in P \Rightarrow y \in L$$

dır. σ_L, L ye bağlı tüm kongrüansları içerdiğinden $ker \varphi \subseteq \sigma_L$ dir. Yani $Ker \varphi \subseteq Ker \sigma_L^h$ dir. O zaman S den $Syn(L)$ ye θ morfizmi vardır öyleki $\theta \circ \varphi = \sigma_L^h$ dir. $Syn(L), M$ nin S alt monoidinin homomorfik görüntüsüdür. Böylece $Syn(L), M$ yi böler.

$(ii) \Rightarrow (i) : Syn(L)$ nin M yi böldüğünü kabul edelim. M nin S alt monoidi ve $\psi : S \longrightarrow Syn(L)$ örten morfizmi vardır.

$$\begin{array}{ccc} M \supseteq S & \xrightarrow{\psi} & Syn(L) \\ \theta \swarrow & & \searrow \sigma_L^h \\ & A^* & \end{array}$$

ψ, σ_L^h örtendir. Her $a \in A$ için $\theta(a)$ yı $\psi^{-1}(\sigma_L^h(a))$ da bir eleman olarak seçersek (ψ örten olup bu mümkündür.)

$$\psi\theta(a) = \sigma_L^h(a).$$

dır. Böylece $\theta : A \longrightarrow S$ dönüşümüne vardır. $\theta : A^* \longrightarrow S$ ye tek şekilde genişletebiliriz. $\psi\theta\theta = \sigma_L^h, A$ üzerinde aynı olup A^* a tek

genişlemeleri de aynıdır.

Yani $\psi \circ \theta = \sigma_L^h$, A^* dan $Syn(L)$ ye morfizm olarak alabiliriz. $P = \theta(L)$ olsun. O zaman $\theta^{-1}(P) \supseteq L$ dir. $\theta^{-1}(P) \subseteq L$ olduğunu göstermek için $w \in \theta^{-1}(P)$ alalım. $\theta(w) \in P$ dir. Bu yüzden $z \in L$ vardır öyleki

$$\theta(w) = \theta(z)$$

dir. $\psi(\theta(w)) = \psi(\theta(z))$ olup böylece $\sigma_L^h(w) = \sigma_L^h(z)$ dir. $z\sigma_L w$ ve $z = 1.z.1 \in L$ dir. σ_L nin tanımından $w \in L$ dir. $\theta^{-1}(P) \subseteq L$ dir. $L = \theta^{-1}(P)$ olup L, M monoidi tarafından tanınır. ■

3.2. Minimal otomoto

M bir monoid veya yarıgrup, X , M nin herhangi bir alt kümesi ve $u \in M$ olsun. $u^{-1}X$ i

$$u^{-1}X = \{s \in M : us \in X\}$$

olarak tanımlayalım. $u^{-1}X$ boş da olabilir. $1^{-1}X = X$ dir.

$$(uv)^{-1}X = \{s \in M : uvs \in X\} = \{s \in M : vs \in u^{-1}X\} = v^{-1}(u^{-1}X)$$

olup $(uv)^{-1}X = v^{-1}(u^{-1}X)$ dir. $P(A^*)$, A^* ın tüm alt kümelerinin kümesi olduğunu hatırlayalım. $P(A^*)$ üzerinde A^* ın hareketini $X \subseteq A^*$ ve $u \in A^*$ için

$$Xu = u^{-1}X$$

olarak tanımlayalım. Dikkat edilecek olursa $u, v \in A^*$ için

$$X1 = X, X(uv) = (Xu)v$$

dir. L , A^* ın herhangi bir alt kümesi olsun.

$$Q_L = \{u^{-1}L : u \in A^*\}$$

$$i_L = L (= i^{-1}L \in Q_L)$$

$$T_L = \{u^{-1}L : u \in L\}$$

olarak tanımlayalım. T_L için alternatif bir tanım olarak

$$T_L = \{x \in Q_L : 1 \in x\}$$

verilebilir. Dikkat edilirse

$$u \in L \iff u.1 \in L \iff 1 \in u^{-1}L$$

dir. $\mathcal{A}_L = (Q_L, A, i_L, T_L)$ otomotosu

$$i_L w \in T_L \iff w^{-1}i_L = w^{-1}L \in T_L \iff 1 \in w^{-1}L \iff w \in L$$

olup Q_L sonlu ise $\mathcal{A}_L = (Q_L, A, i_L, T_L)$ otomotosu L yi tanıır.

Teorem 20 Q_L sonludur $\iff L$ bir rasyonel kümedir.

İspat $(\Rightarrow)$ Q_L sonlu olsun. $\mathcal{A}_L$, L yi tanıyıp L rasyonel kümedir.

$(\Leftarrow)$ L bir rasyonel küme olsun. Böylece erişilebilir deterministik $\mathcal{A} = (Q, A, i, T)$ için $L = L(\mathcal{A})$ dır. $\zeta : Q \rightarrow P(A^*)$ dönüşümünü

$$\zeta(q) = \{w \in A^* : qw \in T\}$$

kuralı ile tanımlayalım. $\mathcal{A}$ erişilebilir olup her $q \in Q$ bazı $u \in A^*$ lar için $q = iu$ dur. $\zeta(q) \in Q_L$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} w \in \zeta(q) &\iff qw \in T \iff iuw \in T \iff uw \in L \\ &\iff w \in u^{-1}L \iff \zeta(q) = u^{-1}L \in Q_L \end{aligned}$$

dir. $\zeta : Q \longrightarrow Q_L$ olduğunu düşünürsek ζ örtendir. Çünkü her $u^{-1}L \in Q_L$ için $q = iu$ durumunu gözönünde bulundurursak

$$\zeta(q) = \{w \in A^* : iuw \in T\} = \{w \in A^* : uw \in L\} = u^{-1}L$$

dir. ζ örten Q sonlu olup Q_L de sonludur. ■

Yukarıdaki ispatta dikkat edilirse L , A^* ın rasyonel bir alt kümesi ve $\mathcal{A} = (Q, A, i, T)$ L yi tanıyan bir deterministik erişilebilir bir otomoto ise o zaman $|Q| \geq |Q_L|$ dir. O halde $\mathcal{A}_L = (Q_L, A, i_L, T_L)$ otomotosuna L yi tanıyan *minimal otomoto* denir.

Örnek 21 $A = \{a, b\}$ ve

$$L = A^*abA^* = \{w \in A^* : ab \text{ } w \text{ nun bir parçasıdır.}\}$$

O zaman $i_L = L$ olsun.

$$La = \{w \in A^* : aw \in L\} = L \cup bA^* = L_1$$

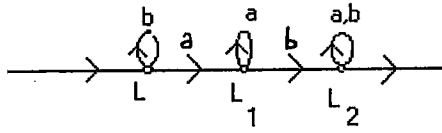
$$Lb = \{w \in A^* : bw \in L\} = L$$

$$L_1a = \{w \in A^* : aw \in L_1\} = \{w \in A^* : a^2w \in L\} = L_1$$

$$L_1b = \{w \in A^* : bw \in L_1\} = \{w \in A^* : abw \in L\}$$

$$= A^* = L_2L_2a = L_2b = L_2$$

$T_L = \{x \in Q_L : 1 \in x\} = \{L_2\}$ olarak bulunur. $\mathcal{A}_L = (Q_L, A, i_L, T_L)$ nin durum diagramı



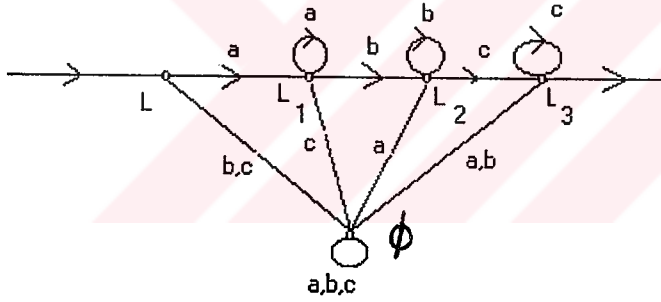
Şekil-18

Örnek 22 $A = \{a, b, c\}$ ve $L = a^+b^+c^+ = \{a^m b^n c^p : m, n, p \geq 1\}$ ol-

sun. Burada $i_L = L$ ve

$$\begin{aligned}
 La &= \{w \in A^* : aw \in L\} = L \cup b^+c^+ = L_1 \\
 Lb &= \{w \in A^* : bw \in L\} = \emptyset \\
 Lc &= \{w \in A^* : cw \in L\} = \emptyset \\
 L_1a &= \{w \in A^* : aw \in L_1\} = L_1 \\
 L_1b &= \{w \in A^* : bw \in L_1\} = \{w \in A^* : abw \in L\} = b^+c^+ = L_2 \\
 L_1c &= \{w \in A^* : cw \in L_1\} = \emptyset \\
 L_2a &= \{w \in A^* : aw \in L_2\} = \emptyset \\
 L_2b &= \{w \in A^* : bw \in L_2\} = L_2 \\
 L_2c &= \{w \in A^* : cw \in L_2\} = c^+ = L_3 \\
 \emptyset a &= \emptyset b = \emptyset c = \emptyset \\
 L_3a &= \{w \in A^* : aw \in L_3\} = \emptyset \\
 L_3b &= \{w \in A^* : bw \in L_3\} = \emptyset \\
 L_3c &= \{w \in A^* : cw \in L_3\} = L_3
 \end{aligned}$$

olup $T_L = L_3$ dır. $A_L = (Q_L, A, i_L, T_L)$ nin durum diagramı



Şekil-19

Dikkat edilirse her durumda minimal otomotonun sonluluğu L nin rasyonel olduğunu doğrular.

Örnek 23 $A = \{a, b\}$ ve $L = \{a^n b^n : n \geq 1\}$ olsun. L nin rasyonel olmadığını biliyoruz. $i_L = L$ ve

$$La = \{w \in A^* : aw \in L\} = \{a^{n-1}b^n : n \geq 1\} = L_1$$

diyelim.

$$\begin{aligned}
 Lb &= \{w \in A^* : bw \in L\} = \emptyset \\
 \emptyset a &= \emptyset b = \emptyset
 \end{aligned}$$

daha genel olarak,

$$La^r = \{a^{n-r}b^n : n \geq 1\} = L_r$$

diyelim. L_r sonlu olmayıp L rasyonel değildir.



3.3. İndirgenmiş otomoto

$\mathcal{A} = (Q, A, i, T)$ tam deterministik erişilebilir bir otomoto olsun. A^* ın $q^{-1}T$ alt kümesini

$$q^{-1}T = \{w \in A^* : qw \in T\}$$

ile gösterelim. Q üzerindeki ρ denklik bağıntısını

$$\rho = \{(q_1, q_2) \in Q \times Q : q_1^{-1}T = q_2^{-1}T\}$$

olarak tanımlayalım. Eğer ρ , Q üzerinde özdeş bağıntı yani

$$q_1^{-1}T = q_2^{-1}T \implies q_1 = q_2$$

ise $\mathcal{A}$ otomotosuna *indirgenmiş otomoto* denir.

Teorem 24 Her rasyonel L dili için minimal otomoto $\mathcal{A}_L$ indirgenmiştir.

İspat $q_1, q_2 \in Q_L$ için $q_1 = u_1^{-1}L$ ve $q_2 = u_2^{-1}L$ olsun. $q_1 \rho q_2$ olduğunu kabul edelim. Böylece $q_1^{-1}T_L = q_2^{-1}T_L$

$$\{w \in A^* : q_1 w \in T_L\} = \{w \in A^* : q_2 w \in T_L\}$$

dir. Yani

$$\begin{aligned} \{w \in A^* : (u_1^{-1}L)w \in T_L\} &= \{w \in A^* : (u_2^{-1}L)w \in T_L\} \\ \{w \in A^* : w^{-1}u_1^{-1}L \in T_L\} &= \{w \in A^* : w^{-1}u_2^{-1}L \in T_L\} \\ \{w \in A^* : (u_1w)^{-1}L \in T_L\} &= \{w \in A^* : (u_2w)^{-1}L \in T_L\} \end{aligned}$$

T_L nin tanımından

$$\{w \in A^* : u_1w \in L\} = \{w \in A^* : u_2w \in L\}$$

$u_1^{-1}L = u_2^{-1}L$ olup $q_1 = q_2$ dir. $\mathcal{A}_L$ indirgenmiştir. $\blacksquare$

$\mathcal{A} = (Q, A, \varphi, i, T)$ tam deterministik erişilebilir bir otomoto ve ρ, Q üzerinde daha önce tanımladığımız gibi bir denklik olsun. $\mathcal{A}/\rho$ bölüm otomotosunu

$$(Q/\rho, A, \Psi, i_\rho, T')$$

olarak tanımlayacağız. Burada

$$T' = \{t\rho : t \in T\}$$

ve her $q \in Q$ $a \in A$ için

$$\Psi(q\rho, a) = (\varphi(q, a))\rho$$

dur. Bunu daha basit olarak $(q\rho, a) = (q, a)\rho$ yazacağız. Q/ρ üzerinde A nın hareketinin iyi tanımlı olup olmadığını kontrol edelim. Yani $q_1\rho = q_2\rho$ ise

$$\Psi(q_1\rho, a) = \Psi(q_2\rho, a)$$

olup olmadığına bakalım. $q_1\rho = q_2\rho$ olduğunu kabul edelim. O zaman $\forall w \in A^*$ için

$$q_1w \in T \iff q_2w \in T$$

dir. Bu özel olarak $w \in aA^*$ içinde sağlanır. Her $z \in A^*$ için

$$q_1az \in T \iff q_2az \in T$$

dir. Burada $(q_1a)\rho = (q_2a)\rho$ dur. Böylece istenen ispatlanmış olur. A/ρ bir otomotodur. Üstelik

$$T' = \{q\rho \in Q/\rho : q\rho \cap T \neq \emptyset\} = \{q\rho \in Q/\rho : q\rho \subseteq T\}$$

olduğunu göstereceğiz. İlk eşitlik T' nün tanımından açıktır. İkincisi için

$$q\rho \subseteq T \Rightarrow q\rho \cap T \neq \emptyset$$

dur. Tersini göstermek için $q\rho \cap T \neq \emptyset$ olsun. O zaman $q\rho$ da t vardır öyleki $t \in T$ dir. Fakat o zaman $q'\rho t$ de her q' , $q\rho$ da olur ve böylece

$$(q')^{-1}T = t^{-1}T$$

$(q')^{-1}T, 1$ i içerip $q' \in T$ dir.

$$q\rho \subseteq T$$

dir.

Teorem 25 $\mathcal{A} = (Q, A, i, T)$ tam deterministik erişilebilir bir otomoto olsun. O zaman $\mathcal{A}/\rho$ indirgenmiş ve $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}/\rho)$ dur.

İspat $\forall q \in Q$ ve $w \in A^*$ için $(q\rho)w = (qw)\rho$ dur. $\mathcal{A}/\rho$ nun indirgenmiş olduğunu gösterelim. $q_1\rho, q_2\rho \in Q/\rho$ alalım.

$$(q_1\rho)^{-1}T' = (q_2\rho)^{-1}T'$$

olsun.

$$\begin{aligned} \{w \in A^* : q_1\rho w \in T'\} &= \{w \in A^* : q_2\rho w \in T'\} \\ \{w \in A^* : (q_1w)\rho \in T'\} &= \{w \in A^* : (q_2w)\rho \in T'\} \end{aligned}$$

T' nin tanımından

$$\{w \in A^* : q_1w \in T\} = \{w \in A^* : q_2w \in T\} q_1^{-1}T = q_2^{-1}T$$

olup

$$q_1\rho = q_2\rho$$

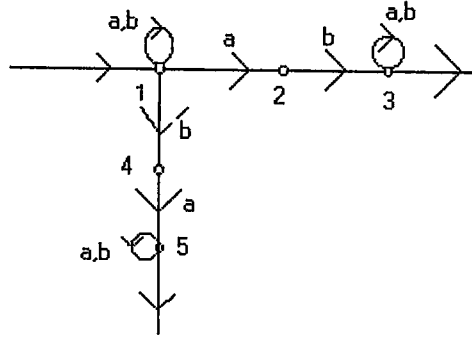
dur. O halde

$$\begin{aligned} w \in L(\mathcal{A}/\rho) &\iff (i\rho)w \in T' \\ &\iff (iw)\rho \in T' \iff iw \in T \iff w \in L(\mathcal{A}) \end{aligned}$$

dır. ■

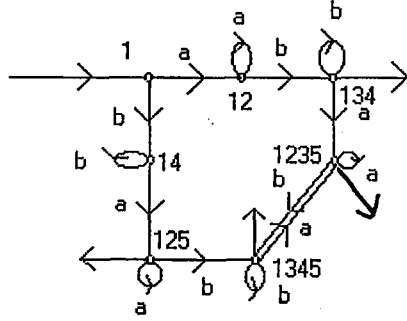
Bu teoremde bize verilen bir rasyonel dili tanıyan tam deterministik erişilebilir bir otomotomuz varsa indirgenmiş otomotoyu tam deterministik erişilebilir olmayı bozmadan inşa edebileceğimizi söyler.

Örnek 26 $A = \{a, b\}$ ve $L = A^*abA^* \cup A^*baA^*$ olsun. L yi tanıyan (tam ve deterministik olmayan) otomotonun durum diagramı aşağıdaki gibidir.



Şekil-20

$$\begin{aligned}
 1a &= \{1, 2\} & 1b &= \{1, 4\} \\
 \{1, 2\}b &= \{1, 3, 4\} & \{1, 4\}a &= \{1, 2, 5\} \\
 \{1, 3, 4\}a &= \{1, 2, 3, 5\} & \{1, 3, 4\}b &= \{1, 3, 4\} \\
 \{1, 2, 5\}b &= \{1, 3, 4, 5\} & \{1, 2, 3, 5\}a &= \{1, 2, 3, 5\} \\
 \{1, 3, 4, 5\}a &= \{1, 2, 3, 5\} & \{1, 3, 4, 5\}b &= \{1, 3, 4, 5\} \\
 \{1, 2\}a &= \{1, 2\} \\
 \{1, 4\}b &= \{1, 4\} \\
 \{1, 2, 5\}a &= \{1, 2, 5\} \\
 \{1, 2, 3, 5\}b &= \{1, 3, 4, 5\}
 \end{aligned}$$



Şekil-21

Bu A otomatosu indirgenmiş değildir.

$$T = \{\{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 5\}\}$$

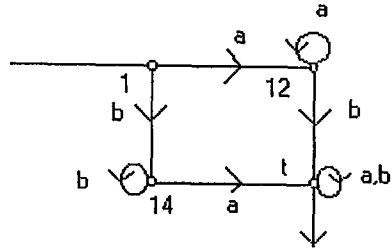
$$\{1\}^{-1}T = L$$

$$\{1, 2\}^{-1}T = L \cup bA^*$$

$$\{1, 4\}^{-1}T = L \cup aA^*$$

$$\{1, 2, 5\}^{-1}T = \{1, 3, 4\}^{-1}T = \{1, 2, 3, 5\}^{-1}T = \{1, 3, 4, 5\}^{-1}T = A^*$$

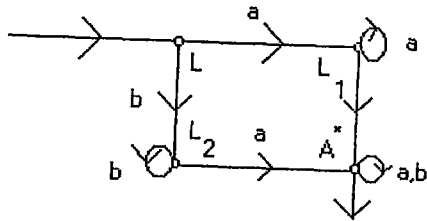
$\mathcal{A}$ nın 4 terminal durumunu tanımlar. $\mathcal{A}/\rho$ daha basit aşağıdaki durum diagramına sahiptir.



Şekil-22

Bu otomoto indirgenmiştir.

$$\begin{aligned}
 La &= \{w \in A^* : aw \in L\} = L \cup bA^* = L_1 \\
 Lb &= \{w \in A^* : bw \in L\} = L \cup aA^* = L_2 \\
 L_1a &= L_1 (a^2w \in L), L_1b = A^* (baw \in L) \\
 L_2a &= A^* (abw \in L), L_2b = L_2 (b^2w \in L) \\
 A^*a &= A^*b = A^*
 \end{aligned}$$



Şekil-23

A ve A/ρ nun diagramlarının etkisel olarak aynı oluşu bir tesadüf değildir.

$$\xi : Q \longrightarrow Q_L$$

$\xi(q) = q^{-1}T$ ($q \in Q$) şeklindedir. ξ nın Q dan Q_L ye örten olduğu gösterildi. $\xi(q) = \xi(q') \Rightarrow q\rho q'$ dir. Böylece $\mathcal{A} = (Q, A, i, T)$ indirgenmiş ise ξ birebir ve örtendir. $\mathcal{A}_1 = (Q_1, A, \varphi_1, i_1, T_1)$ ve $\mathcal{A}_2 = (Q_2, A, \varphi_2, i_2, T_2)$ iki otomoto olsun. Eğer her $q_1 \in Q_1$ ve her $a \in A$ için

$$\xi : Q_1 \longrightarrow Q_2, \xi(i_1) = i_2$$

$$\forall q_1 \in T_1 \Rightarrow \xi(q_1) \in T_2$$

ve

$$\xi(\varphi_1(q_1, a)) = \varphi_2(\xi(q_1), a)$$

olacak şekilde 1-1 ξ dönüşümü varsa $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ otomotolarına *izomorfiktir* denir.

Teorem 27 L, A^* da rasyonel bir küme $\mathcal{A}_L$ minimal otomoto $\mathcal{A} = (Q, A, i, T)$ L yi tanıyan tam deterministik erişilebilir bir otomoto olsun. O zaman $\mathcal{A}, \mathcal{A}_L$ ye izomorfiktir.

İspat $\xi : Q \longrightarrow Q_L$ ye daha önce tanımladığımız gibi olsun.

$$\xi(i) = i^{-1}T = \{w \in A^* : iw \in T\} = L = i_L$$

$$q \in T \iff 1 \in q^{-1}T \iff q^{-1}T \in T_L \iff \xi(q) \in T_L$$

$$\xi(qa) = (qa)^{-1}T = a^{-1}q^{-1}T = (q^{-1}T)a = \xi(q)a.$$



3.4. Bir otomotonun dönüşüm monoidi

$\mathcal{A} = (Q, A, i, T)$ bir otomoto olsun. τ , A^* üzerinde daha önce tanımlandığı gibi bir kongurans olsun.

$$w\tau z \Leftrightarrow (\forall q \in Q), qw = qz$$

A^*/τ nun sonlu olduğunu gördük. w nun τ -sınıfını $\bar{w}$ ile gösterip A^*/τ nun Q üzerinde hareketini

$$q\bar{w} = qw$$

kuralı ile verelim. τ nun tanımından dolayı eğer $\bar{w}_1 = \bar{w}_2$ ise o zaman her $q \in Q$ için $qw_1 = qw_2$ dir. Böylece

$$\forall q \in Q, q\bar{w}_1 = q\bar{w}_2$$

dir. Dikkat edilirse her $q \in Q$ ve her $\bar{w}, \bar{z} \in A^*/\tau$ için

$$q(\bar{w}\bar{z}) = (q\bar{w})\bar{z}$$

dir. Daha da ötesi

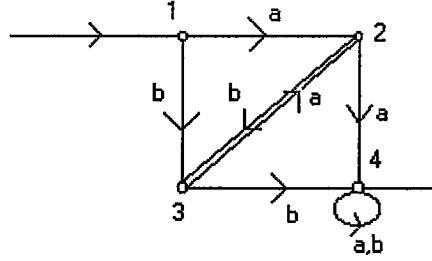
$$\forall q \in Q, q\bar{w} = q\bar{z} \implies \bar{w} = \bar{z}$$

olup $(Q, A^*/\tau)$ dönüşüm monoididir. $(Q, A^*/\tau)$ ya $\mathcal{A}$ otomotosunun dönüşüm monoidi diyeceğiz ve $TM(\mathcal{A})$ ile göstereceğiz. Eğer bize sonlu bir dönüşüm monoidi $X = (Q, M)$ verilmiş ise o zaman $(Q, M \setminus \{1\}, \varphi)$ otomotosunu

$$\varphi(q, s) = qs \quad (q \in Q, s \in M \setminus \{1\})$$

olarak tanımlayabiliriz. Eğer $M \setminus \{1\}$ bir küme olarak gözönünde bulundurursak $(M \setminus \{1\})^*$ ın Q üzerindeki hareketini alışlageldiği gibi tanımlayabiliriz. $s_1 \dots s_m$ ve $t_1 \dots t_n$ elemanları $(M \setminus \{1\})^*$ da eşit ise o zaman her $q \in Q$ üzerine etkileride aynıdır. Bu otomoto $X = (Q, M)$ dönüşüm monoidinin otomotosu olarak adlandırılır ve $Aut(X)$ yazılır.

Örnek 28 Durum diagramı aşağıdaki gibi verilen $\mathcal{A}$ otomotosunu gözönünde bulunduralım.



Şekil-24

$\bar{a}$ ve $\bar{b}$ nin Q üzerindeki hareketi aşağıdaki gibidir.

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

O zaman

$$(\bar{a})^2 = (\bar{b})^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = z$$

olur.

$$\bar{a}\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} = e, \bar{b}\bar{a} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} = f$$

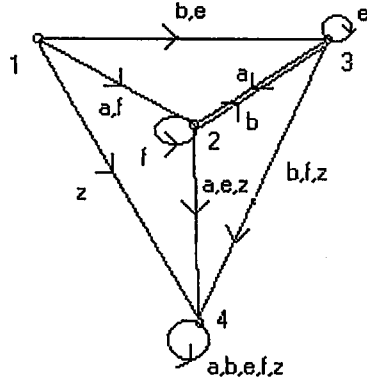
diyelim. $\bar{a}\bar{b}\bar{a} = \bar{a}$ ve $\bar{b}\bar{a}\bar{b} = \bar{b}$ dir. Böylece $TM(A)$

$$1, \bar{a}, \bar{b}, z, e, f$$

olmak üzere 6 tane elemanı içeriyor. Eğer biz bu dönüşüm monoidi

$$X = (Q, M) = (\{1, 2, 3, 4\}, \{1, \bar{a}, \bar{b}, z, e, f\})$$

ile başlarsak ve daha önce tarif edildiği gibi $Aut(X)$ i inşa edersek o zaman orjinal otomotoya geri dönmeyeceğiz. Yeni otomotonun alfabesi $\bar{a}, \bar{b}, e, f, z$ olan beş elemanlı alfabadir ve aşağıdaki durum diagramına sahiptir.



Şekil-25

Fakat biz bu yeni otomotonun dönüşüm monoidini hesaplırsak daha önceki gibi 6 elemanlı aynı monoide ulaşırız. (her $\mathcal{A}$ otomatosu için) $Aut(TM(\mathcal{A})) \neq \mathcal{A}$ dır.

Teorem 29 Her $X = (Q, M)$ sonlu dönüşüm monoidi için

$$TM(Aut(X)) \cong X$$

İspat Q sonlu ve $X = (Q, M)$ olsun. O zaman

$$Aut(X) = (Q, M \setminus \{1\}, \varphi)$$

olur. Burada

$$\varphi(q, s) = qs \quad (q \in Q, s \in M)$$

s elemanının Q üzerindeki hareketi, dönüşüm monoidi tarafından hesaplanır.

$TM(Aut(X))$ i, $(Q, (M \setminus \{1\})^* / \tau)$ olarak tanımlarız. Her $q \in Q$ için

$$(s_1 \dots s_m) \tau = (t_1 \dots t_n) \tau \Leftrightarrow q(s_1 \dots s_m) = q(t_1 \dots t_n)$$

$$\theta : (M \setminus \{1\})^* \rightarrow M$$

$$\theta(s_1 \dots s_m) = s_1 \dots s_m$$

ve θ , $(M \setminus \{1\})^*$ ın boş kelimesini M nin birimine gönderen dönüşüm olarak tanımlansın. $(M \setminus \{1\})^*$ ın herhangi iki $s_1...s_m$ ve $t_1.....t_n$ elemanı için

$$\begin{aligned}\theta(s_1...s_m) &= \theta(t_1...t_n) \Leftrightarrow t_1...t_n = s_1...s_m \\ \Leftrightarrow qs_1...s_m &= qt_1...t_n (\forall q \in Q) \Leftrightarrow s_1...s_m \tau t_1...t_n\end{aligned}$$

dır. O zaman

$$\alpha : (M \setminus \{1\})^* / \tau \longrightarrow M$$

izomorfizmi vardır ve aşağıdaki diagram değişmelidir.

$$\begin{array}{ccc}(M \setminus \{1\})^* & \xrightarrow{\theta} & M \\ \tau^{\natural} \searrow & & \nearrow \alpha \\ & (M \setminus \{1\})^* / \tau & \end{array}$$

Dahada ötesi her $q \in Q$, her $s_1...s_m \in (M \setminus \{1\})^*$ için

$$q(\alpha((s_1...s_m)\tau)) = q(\theta(s_1...s_m)) = q(s'_1...s_m)$$

$$\begin{aligned}(1\theta, \alpha) &: (Q, (M \setminus \{1\})^* / \tau) \longrightarrow (Q, M) \\ (1\theta, \alpha)(qs) &= 1\theta(q)\alpha(s)\end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak θ , $(Q, (M \setminus \{1\})^* / \tau)$ den (Q, M) ye bir TM-izomorfizmdir. ■

3.5. Sentaktik monoidin hesaplanması

A bir alfabe, L, A^* in rasyonel alt kümesi, $\mathcal{A}_L, L$ nin minimal otomotosu olsun. $\mathcal{A}_L$ nin durumları $(u \in A^*), u^{-1}L$ formunun alt kümeleridir. $\mathcal{A}_L$ nin dönüşüm monoidi $(Q_L, A^*/\tau)$ dur. Burada her $u \in A^*$ için

$$w\tau z \Leftrightarrow (u^{-1}L)w = (u^{-1}L)z \Leftrightarrow w^{-1}u^{-1}L = z^{-1}u^{-1}L$$

dir. Bunu daha formal olarak aşağıdaki şekilde yazarız.

$$\begin{aligned} \{v \in A^* : wv \in u^{-1}L\} &= \{v \in A^* : zv \in u^{-1}L\} \text{ veya} \\ \{v \in A^* : u w v \in L\} &= \{u \in A^* : u z v \in L\} \end{aligned}$$

Her $u, v \in A^*$ için

$$u w v \in L \iff u z v \in L \text{ dir.}$$

Bu yüzden τ, σ_L olarak daha önce tanımlanan sentaktik kongrüanstır. A sonlu bir alfabe ve L, A^* in rasyonel bir alt kümesi olsun. L nin sentaktik monoidi ile L nin minimal otomotosunun dönüşüm monoidi aynıdır.

Örnek 30 $A = \{a, b\}, L = A^*abaA^*$ olsun. L nin $\mathcal{A}_L$ minimal otomotosunu hesaplayalım. $i_L = L$.

$$La = \{w \in A^* : aw \in L\} = L \cup baA^* = L_1$$

$$Lb = \{w \in A^* : bw \in L\} = L$$

$$L_1a = \{w \in A^* : a^2w \in L\} = L_1$$

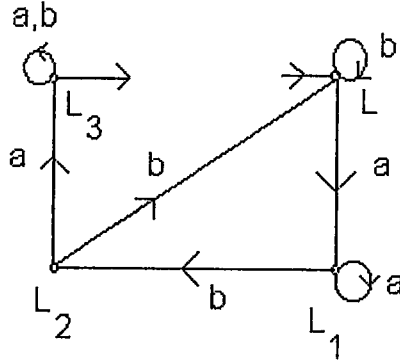
$$L_1b = \{w \in A^* : abw \in L\} = L \cup aA^* = L_2$$

$$L_2a = \{w \in A^* : abaw \in L\} = A^* = L_3$$

$$L_2b = \{w \in A^* : abbw \in L\} = L$$

$$L_3a = L_3b = L_3$$

Durum diagramı



Şekil-26

şeklindedir. L, L_1, L_2, L_3 yerine 1, 2, 3, 4 alırsak $\mathcal{A}_L$ nin dönüşüm monoidinin aşağıdaki elemanlarına sahibiz. Dönüşüm için i, j, k, l yazacağız. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i & j & k & l \end{pmatrix}$ ve $(i, j, k, l) = 4444$ ü 0 ile göstereceğiz. Bu durumda

$$\begin{array}{llll} a = 2244 & b^2 = 1114 & ba^2 = ba & a^3b = ab \\ b = 1314 & a^3 = a & bab = 3434 & a^2ba = 0 \\ a^2 = 2244 = a & a^2b = ab & b^2a = 2224 & a^2b^2 = ab^2 \\ ab = 3344 & aba = 0 & b^3 = b^2 & aba^2 = 0 \\ ba = 2424 & ab^2 = 1144 & a^4 = a & abab = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} ab^2a = a & bab^2 = 1414 & a^5 = a & a^2bab = 0 \\ ab^3 = ab^2 & b^2a^2 = b^2a & a^4b = ab & a^2b^2a = 0 \\ ba^3 = ba & b^2ab = 3334 & a^3ba = 0 & aba^3 = 0 \\ ba^2b = bab & b^3a = b^2a & a^3b^2 = ab^2 & aba^2b = ab \\ baba = 0 & b^4 = b^2 & a^2ba^2 = 0 & ba^3b = bab \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} a^2b^3 = ab^2 & ab^3a = a & b^2a^2b = b^2ab & baba^2 = 0 \\ ab^2a^2 = 0 & abab^2 = 0 & ba^2ba = 0 & b^3ab = b^2ab \\ babab = 0 & ba^4 = ba & ab^4 = ab^2 & bab^2a = ba \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} ba^2b^2 = bab^2 & bab^3 = bab^2 & b^3a^2 = b^2a \\ b^2a^3 = b^2a & b^2ab^2 = b^2 & b^4 = b^2a \\ b^2aba = 0 & b^5 = b^2 & \end{array}$$

Bu hesaplamalar bize uzunluğu 5 olan 32 kelimeden başka kelime olmadığını söyler. Aynı zamanda sentaktik monoid

$$1, a, b, ab, ba, b^2, 0, ab^2, bab, b^2a, bab^2, b^2ab$$

olan 12 kelimeyi içerir. Bu bilgiler ile Cayley tablosu yapmak kolaydır. Boyu 1 olan kelime 2 tane, boyu 2 olan kelime 4 tane boyu 3 olan kelime 8 tane dir. A^*/τ sonlu olduğundan bunun sınırı n^n dir. Burada $|Q| = n$ dir. Bu hesaplamaları yapmak üzere Paris ve Nebraska üniversiteleri bilgisayar programı geliştirmiştir.



KAYNAKLAR

- BIRKHOFF,G.**(1935), On the structure of abstract algebras.Proc.Cambridge Phil.Soc.31,433-454.
- CHOMSKY,N.** (1959), On certain formal properties of grammars.Inf.Control 2,137-167
- CLIFFORD,A.H. ve PRESTON,G.B.** (1961), The algebraic theory of semigroups Vol.1.Math.Surveys of the American Math.Soc.7
- COHN,P,M.** (1965), Universal algebra.Harper and Row,New York.
- DAVIS,M.**(1958), Computability and solvability.McGraw-Hill,New York
- EILENBERG,S.** (1974), Automata ,languages and machines Vol.A.Academic Press,New York and London
- EILENBERG,S.** (1976), Automata ,languages and machines Vol.B.Academic Press,New York and London
- EILENBERG,S. Ve SCHUTZENBERGER,M.P.** (1976), On pseudovarieties of monoids.Adc.Math.19,413-448.
- GREEN,J.A.** (1951), On the structure of semigroups.Ann.Math.54,163-172.
- HARARY,F.** (1969), Graph theory.Addison-Wesley,Reading,Mass
- HOPCROFT,J.E. ve ULLMAN,J.D.**(1979), Introduction to automata theory,languages and computation.Addison-Wesley,Reading,Mass
- HOWIE,J.M.** (1976), An introduction to semigroup theory.Academic Press,London and New York
- KLEENE,S.** (1956), Representation of events in nerve sets.Automata Studies(ed.C.E.SHANNON ve J.McCARTHY93-40.Princeton University Press,Princeton,N.J.
- LALLEMENT,G.**(1979), Semigroups and combinatorial applications.Wiley-Interscience,New York.
- PIN,J.E.** (1986), Varieties of formal languages.North Oxford Academic Publishers,Oxford
- PIN,J.E. ,STRUBING,H. Ve THERIEN,D.**(1984), Small varieties of finite semigroups and extensions.J.Australian Math.Soc.A 37,268-281

REES,D.(1940), On semi-groups.Proc.Cambridge Phil.Soc.36,387-400

SCHUTZENBERGER,M.P.(1965), On finite monoids having only trivial subgroups.Inf.Control 8,190-194



ÖZGEÇMİŞ

1976 yılında LEFKOŞA(KIBRIS)'da doğdum. İlk orta ve lise eğitimimi tamamladıktan sonra 1993'de Çukurova Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne girdim. İlk yıl YADEM de ingilizce hazırlık programını tamamladım. 1998 yılında mezun olup aynı yıl Çukurova Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde yüksek lisans öğrenimime, başladım.



T.C. FÖRSEVİDEKİTİM KURULU
BİLİM VE YATIRIM MİLLİETİ