

**TÜRKİYE CUMHURİYETİ
ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
EKONOMETRİ ANABİLİM DALI**

OYUN KURAMININ EKONOMİDE UYGULANMASI

Halil İbrahim KESKİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ADANA 2009

**TÜRKİYE CUMHURİYETİ
ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
EKONOMETRİ ANABİLİM DALI**

OYUN KURAMININ EKONOMİDE UYGULANMASI

Halil İbrahim KESKİN

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ersin KIRAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ADANA 2009

Çukurova Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma, jürimiz tarafından Ekonometri Ana Bilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Yrd. Doç. Dr. Ersin KIRAL
(Danışman)

Üye : Prof. Dr. Erhan YILDIRIM

Üye : Yrd. Doç. Dr. Cevat BİLGİN

ONAY

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim elemanlarına ait olduklarını onaylarım.

...../...../2009

Doç. Dr. Azmi Yalçın
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 Sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu'ndaki hükümlere tabidir.

ÖZET

OYUN KURAMININ EKONOMİDE UYGULANMASI

Halil İbrahim KESKİN

Yüksek Lisans Tezi, Ekonometri Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ersin KIRAL

Eylül 2009, 149 sayfa

Ekonomik büyümenin kaynağı yatırımlardır. Yatırımlar ise ekonomik birimlerin gelirlerinden daha azını harcayarak elde ettiği tasarruflara dayanmaktadır. Ekonomik tasarruflar finansal piyasalar aracılığıyla yatırıma dönüştürülmektedir. Finansal piyasalar ekonomideki bu önemli fonksiyonunun yanında yatırımcısına önemli getiriler sağlayarak tasarrufları özendirici bir unsur olmaktadır. Bu bağlamda, finansal piyasaların tüm bu fonksiyonlarını yerine getirmesi kararların sağlıklı alınmasına bağlıdır. Bu piyasalar çok sayıda sosyo-ekonomik değişkenin etkisi altında olduğundan belirsizlik ve risk içermektedir. Ayrıca bu değişkenlerin birbirleriyle olan etkileşimi alınan kararlarda bu unsurun dikkate alınmasını zorunlu kılmaktadır. Yukarıda bahsedilen karşılıklı etkileşim ve belirsizlik durumları altında alınan kararlarda oyun kuramı bilinen diğer yöntemlere göre çok daha iyi sonuçlar vermektedir.

Çalışmamızda öncelikle oyun kuramı ile ilgili temel kavramlardan bahsedildikten sonra, teori sıfır toplamlı, sıfır toplamlı olmayan ve yayvan (genişletilmiş) formdaki oyunlar olmak üzere üç kısımda incelenmiştir. Çalışmamızın uygulama kısmında ise minimum risk düzeyinde maksimum getirili portföyün oyun kuramı yaklaşımıyla oluşturulması ve oluşturulan portföydeki hisse senetlerinin geçmişe yönelik alt dönemlerdeki getiri oranları değişimlerinin yine oyun kuramı yardımıyla hesaplanarak mevcut piyasanın içinde bulunduğu durumu anlamaya yönelik stratejik bir bakış açısı getirilmesi amaçlanmaktadır. Buradan hareketle oluşturulan portföydeki hisse senetlerinin getiri oranı performanslarının durağan olup olmadığı ve nasıl bir seyir izlediği belirlenmeye çalışılmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Sıfır Toplamlı oyunlar, Sıfır Toplamlı Olmayan Oyunlar, Yayvan Formdaki Oyunlar, Portföy, Doğrusal Programlama.

ABSTRACT**APPLICATION OF GAME THEORY IN ECONOMICS****Halil İbrahim KESKİN****Master Thesis, Department of Econometrics****Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Ersin KIRAL****September 2009, 149 sayfa**

As the main source of economic growth, investments are predicated on savings of the economic agents. Savings are transformed into investments via financial markets. Financial markets also act as a remarkable incentive for savings by providing the investors with substantial returns. In this context, it is crucial to possess sound decision-making mechanism for the financial markets in order to fulfill those functions. Since these markets are under the effect of many socio-economical variables, they involve certain degrees of risk and uncertainty. Moreover, interactions among those variables within the economy are rendered imperative to be taken into consideration throughout the decision-making process. Game theory reveals much better results than other known methods used for the analysis of decision-making mechanisms under such mutual interactions and uncertainty.

In this study, the basic concepts regarding the Game Theory are mentioned and the theoretical framework is built on three sections such as, zero-sum games, nonzero-sum games and extensive-formed games. In application part, formation of a portfolio at the minimum risk level and with maximum level of returns and evaluation of current status of the market from a strategic point of view by estimating differentiation in rates of return of the portfolio stocks via game theory approach are aimed. Consequently, efforts are spared to determine performance course and stationary state of the rates of return for the portfolio stocks.

Key Words: Zero-sum games, Non-zero-sum games, Games in Extensive Form, Portfolio, Linear Programming.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TABLolar LİSTESİ	viii
ŞEKİLLER LİSTESİ	ix

1. BÖLÜM

GİRİŞ	1
-------------	---

2. BÖLÜM

OYUN KURAMI

2.1 Oyun Kuramının Genel Tanımı	5
2.2 Oyun	6
2.3 Temel Kavramlar ve Tanımlar	6
2.3.1 Oyuncular	6
2.3.2 Stratejiler	6
2.3.3 Ödemeler	7
2.4 Oyunları Sınıflandırılması	7
2.5 Oyunların Gösterim Biçimleri	9
2.5.1 Normal Biçim	9
2.5.2 Yayvan (Extensive) Biçim	10
2.5.3 Karakteristik Fonksiyon Biçimi	11
2.6 İki Kişilik Sıfır Toplamlı Oyunlar	11
2.6.1 Eğer Noktalı Oyunlar (Karma Stratejiler)	12
2.6.2 Karma Stratejiler	18
2.6.3 İki Kişilik Sıfır Toplamlı Oyunların Çözüm Yöntemleri	25
2.6.3.1 Minimaks Yöntemi:	27
2.6.3.2 Grafik Yöntem	29
2.6.3.3 Cebirsel Yöntem	30
2.6.3.4 Matris Yöntemi	32

2.6.3.5 İterasyon Yöntem	36
2.6.3.6 Doğrusal Programlama Yöntemi.....	38
2.7 İki Kişilik Sıfır Toplamlı Olmayan Oyunlar	47
2.7.1 İşbirlikçi Olmayan Oyunlar	47
2.7.1.1 Baskın Strateji Dengesi	50
2.7.1.1.1 Tam Domine Edilen Stratejilerin Yinelemeli Eleme Yöntemiyle Çözümü.....	50
2.7.1.1.2 Tam Strateji Nash Dengesi.....	51
2.7.1.2 Karma Strateji	53
2.7.1.2.1 Maksimin Değerleri	55
2.7.1.2.2 Karma Strateji Nash Dengesi	56
2.7.1.2.3: Karma Strateji Denge Çiftini Hesaplamak İçin Grafik Yöntem	57
2.7.2 İşbirlikçi Oyunlar	65
2.7.2.1 Nash Pazarlık Aksiyomları	67
2.7.3 N-Kişilik İşbirlikçi Oyunlar	74
2.7.3.1 Karakteristik Fonksiyon	75
2.7.3.2 Esas (Essential) ve Esas Olmayan (Inessential) Oyunlar	77
2.7.3.3 Tahsis (Imputations).....	78
2.7.3.4 Çekirdek (Core).....	81
2.7.3.5 Shapley Değerleri.....	85
2.8 Yayvan (Extensive) Formdaki Oyunlar	93
2.8.1 Oyun Ağaçları	98
2.8.2 Bilgi kümeleri.....	99
2.8.3 Seçim Fonksiyonları ve Stratejileri	99
2.8.4 Seçim Alt Ağaçları	100
2.8.5 Şansa Bağlı Hamlenin (Chance Moves) Yer Aldığı Oyunlar	108
2.8.6 N-sıralı Strateji Dengesi.....	109
2.8.7 Yayvan Formda Oyunlar İçin Bazı Çözüm Yöntemleri.....	110
2.8.7.1 Geriye Doğru Tümevarım Yöntemi (Backward Induction)	110
2.8.7.2 Alt Oyun Tam Nash Dengesi (Subgame Perfection)	112

3. BÖLÜM

OYUN KURAMININ EKONOMİDE UYGULANMASI

3.1 Finansal Piyasalar.....	118
3.2 Finansal Piyasalarda Karar Verme.....	120
3.3 Finansal Piyasalar ve Oyun Kuramı.....	122
3.4 Oyunun Oluşturulması	124
3.5 Ödemeler Matrisinin Oluşturulması.....	127
3.6 Oyunun Doğrusal Programlamayla Çözümü.....	128
3.7 Çözüm Sonuçlarının Değerlendirilmesi	132
3.8 Oluşturulan Portföydeki Hisse Senelerinin Görelî Getiri Oranı Performanslarının Araştırılması	135
3.9 Sonuçların Değerlendirilmesi	138
SONUÇ	142
KAYNAKÇA	146
ÖZGEÇMİŞ	149

TABLOLARIN LİSTESİ

Tablo 2.1: Başlangıç Simpleks Tablosu.....	46
Tablo 3.1: Ocak Ayı Ödemeler matrisi.....	127
Tablo 3.2: Ocak Ayı Strateji Vektörü.....	131
Tablo 3.3: 2000–2007 Dönemi İçin Strateji Vektörleri.....	132
Tablo 3.4: 2000–2007 Dönemi İçin Getiriler	132
Tablo 3.5: Tam Stratejilere Göre 2000-2007 Dönemi İçin Getiri ve Riskler	133
Tablo 3.6: 2000–2006 Dönemi İçin Strateji Sonuç Vektörleri	135
Tablo 3.7: 2000–2005 Dönemi İçin Strateji Sonuç Vektörleri	136
Tablo 3.8: 2000–2004 Dönemi İçin Strateji Sonuç Vektörleri	136
Tablo 3.9: 2000–2003 Dönemi İçin Strateji Sonuç Vektörleri.....	137
Tablo 3.10: 2000–2002 Dönemi İçin Strateji Sonuç Vektörleri	137
Tablo 3.11: 2000–2001 Dönemi İçin Strateji Sonuç Vektörleri	138

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1: Yayvan Biçim	11
Şekil 2.2: Battle of Buddies İçin Karma Strateji Denge Çifti	61
Şekil 2.3: Battle of Buddies İçin İşbirliksiz Ödeme Bölgesi	63
Şekil 2.4: Battle of Buddies İçin İşbirlikçi Ödeme Bölgesi	66
Şekil 2.5: Nash'in.4. Pazarlık Aksiyomu	68
Şekil 2.6: Konveks Yüzeyler.....	70
Şekil 2.7: Ödeme Bölgesi.....	73
Şekil 2.8: Matching Coins İçin Ağaç Diagramı	94
Şekil 2.9: Ağaç	95
Şekil 2.10: Two Figer Mora (İki Parmak Oyunu)	99
Şekil 2.11: Üç Oyunculu Oyun	101
Şekil 2.12: Seçim Alt Ağacı Sorusu	104
Şekil 2.13: A Oyuncusunun Seçim Alt Ağaçları	106
Şekil 2.14: B oyuncusunun Seçim Alt Ağaçları	108
Şekil 2.15: Geriye Doğru Tümevarım Yöntemi	111
Şekil 2.16: Alt Oyun	112
Şekil 2.17: Alt Oyun Tam Nash Dengesi	114
Şekil 3.1: Finansal Sistemde Fon Akışı.....	118
Şekil 3.2: Optimal Portföy.....	122

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Ekonomide, endüstriyel organizasyondan, ücret görüşmelerine, dış ticaret politikalarının belirlenmesinden, üretim planlamasına kadar birçok alanda karşılıklı etkileşim olduğunu görürüz. Bu gibi durumlarda sağlıklı kararlar alınabilmesi, bu kararların karşılıklı etkileşim zemininde ele alınarak verilmesine bağlıdır. Yani karar sürecinde etkileşimin göz önünde bulundurulması gerekmektedir. Oyun teorisi karşılıklı etkileşim temeline dayalı optimal karar vermeye yönelik bir yaklaşımdır. Bu bağlamda bu tarz etkileşimi içinde barındıran rekabet altında optimal karar vermeye yönelik problemler oyun kuramı çerçevesinde değerlendirilebilir.

Ekonomi perspektifinden baktığımız zaman birçok problemin doğasında karşılıklı etkileşim, rekabet, belirsizlik ve risk görürüz. Etkileşim ve riski içinde barındıran finansal piyasalarda karar verme ise hiç şüphesiz bu problemler içerisinde ilk akla gelenlerdendir. Finansal piyasalar, çok sayıda sosyoekonomik faktörün etkisine ve bu faktörlerin olası birbiriyle olan etkileşimlerinden kaynaklanan etkilere maruz kalmaktadır. Buna bağlı olarak, piyasadaki karar vericilerin aldığı kararların bu etkileşimi ve etkileri yansıtacak şekilde bir çatışma zemini içerisinde belirlenmesi gerekmektedir. Finansal piyasaların doğası gereği yatırımcının almış olduğu karar sonucunda elde edeceği kazanç, sadece kendi seçimine bağlı olarak ortaya çıkmamaktadır. Bu kazanç piyasanın o anki durumunun bir sonucu olarak belirlenmektedir. Bu bağlamda yatırımcının kendi perspektifinden piyasadaki mevcut durumu bir bütün olarak ele alıp anlaması, elde etmek istediği kazanç anlamında alacağı pozisyon açısından oldukça önemlidir. Rekabetin ve etkileşimin yer aldığı finansal piyasalarda, oyun kuramı sağlıklı kararlar alınmasında önemli katkılar sağlayabilir. Oyun teorisi karşılıklı etkileşim ve risk içeren finansal piyasaların doğasını yansıtabilecek önemli bir araçtır. Çünkü oyun belirsizlik ve risk altında oynanmaktadır ve oyun kuramının bize sunduğu çözüm araçları karşılıklı etkileşim temeline dayalı problemlerde optimum dengeyi elde etmemize olanak tanımaktadır. Oyun kuramının teorik altyapısı geleceğe yönelik tahminlerde bulunmamıza imkân vermesinin yanında temel fonksiyonu tahminden çok mevcut durumu anlamaya ve buna uygun olarak hareket etmeye yöneliktir. Bu noktada oyun kuramı piyasadaki mevcut durumda alınması gereken en iyi pozisyonun ne olması gerektiğine yönelik stratejik bir bakış

açısı getirebilir. Bu bilgiden hareketle belli periyodik dönemlerde piyasanın içinde bulunduğu duruma göre yatırımcının minimum risk düzeyinde getirisini en fazla yapabilmesi için nasıl bir strateji izlemesi gerektiğinin belirlenmesi ve buradan elde edilen sonuçların stabil bir seyir izleyip izlemediğinin tespit edilmesi için bu sonuçların piyasanın diğer alt dönemlerinde de geçerli olup olmadığının incelenmesi çalışmamızın temel konusunu oluşturmaktadır. Bu anlamda elde edilen bulguların hem yatırım kararı sürecine yapacağı katkıların hemde bu bulguların yatırım kararı sürecindeki yeri ve önemi üzerinde durulmuştur. Oyun kuramının finansal piyasalarda karar almada kullanılan yöntemlere alternatif bir yöntem olarak ele alınması ayrıca karar alma sürecine sağlayacağı katkıların ortaya konması bu alanda yapılan çalışmalara önemli açılımlar sağlayacağı düşünülmektedir.

Ekonomide fon arz ve talebinin karşılandığı yerler olarak tanımlayabileceğimiz finansal piyasalar. Birçok sosyoekonomik değişkenin etkisinde kaldıklarından belirsizlik ve riski bünyelerinde barındırmaktadır. Ayrıca bu piyasalarda tarafların verdiği ekonomik kararlar birbirinden etkilenen çatışma halindeki etkileşimli kararlardır. Fon arz ve talebinde bulunan kesimler bu piyasalarda ne kadar doğru kararlar verir ve piyasanın sağlıklı işleyişi gerçekleşirse, ekonomik hedeflerin gerçekleşmesinde o denli olumlu katkılar ortaya çıkacaktır (Özdil,1998).

Finansal piyasalarda karar verme sürecinde çeşitli analizlerden yararlanılır. Tüm bu analizlere ek olarak ilgili hisse senetlerinin portföy içerisindeki diğer hisse senetlerine kıyasla getiri oranı performanslarındaki değişikliklerin bilinmesi yatırımcı için önemli bir gösterge olması düşünülmektedir. Çalışmada bu amaca yönelik olarak öncelikle minimum risk düzeyinde maksimum getirili portföyün oyun kuramıyla oluşturulması daha sonra elde edilen portföydeki hisse senetlerinin geçmişe yönelik göreceli getiri oranı değişimlerinin tespit edilmesi amaçlanmaktadır. Buradan hareketle oluşturulan portföydeki hisse senetlerinin göreceli getiri oranı performanslarının istikrarlı olup olmadığı belirlenmeye çalışılmıştır.

Bu amaç için seçtiğimiz, İstanbul Menkul Kıymetler Borsasında (İMKB) işlem gören, Adana C, Anadolu Sigorta, Akbank, Bossa, Doğan Holding, Ereğli Demir Çelik, Eczacıbaşı İlaç, Migros, Türk Hava Yolları A.O. ve Vestel hisse senetlerinin ay sonu kapanış fiyatlarından yararlanılmıştır. Çalışmanın uygulandığı dönem olarak piyasanın stratejilerinin tanımlandığı 2000–2007 yılları arası alınmıştır. Burada oyun bir tarafta yatırımcı diğer tarafta piyasanın olduğu iki kişilik sıfır toplam bir oyun olarak düşünülmüştür (Özdil,1998). Ödemeler matrisi bu çerçevede oluşturularak oyunun

çözümüne gidilmiştir. Sonuçta getiri oranı performanslarında meydana gelen değişiklikler her bir alt dönem için diğer dönemlerle karşılaştırılarak benzerlikler ve farklılıklar ortaya konulmuştur.

Çalışmanın teorik altyapısına oyun kuramının temel kavramlarından, oyunların sınıflandırılmasından ve gösterim biçimlerinden bahsedilerek giriş yapıldıktan sonra, teori üç kısımda ele alınmıştır. İlk kısımda iki kişilik sıfır toplamli oyunlardan bahsedilmiştir. Bu tür oyunlarda oyunun sonunda oyuncuların elde ettiği kazançların toplamı sıfır olmaktadır. İki kişilik sıfır toplamli oyunlar eğer noktalı olan oyunlar ile eğer noktalı olmayan oyunlar şeklinde iki kısımda incelenmiştir. Eğer noktalı oyunlar tam strateji dengesinin sağlandığı oyunlardır. Tam strateji dengesi oyunda yer alan her iki oyuncunun oyunun her tekrarında sahip olduğu stratejilerden daima aynı stratejiyi seçmesi durumunda oluşan dengedir. Eğer noktalı olmayan oyunlarda ise tam strateji dengesi sağlanamamaktadır. Bu tarz oyunlardaki denge kavramı ise karma strateji dengesidir. Karma strateji dengesinde oyuncular sahip olduğu stratejilerini belli olasılıklarla ağırlıklandırarak seçmektedir. Konunun devamında bu her iki şekildeki oyunlar için bazı çözüm yöntemlerinden bahsedilmiştir. İkinci kısımda ise iki kişilik sıfır toplamli olmayan oyunlar incelenmiştir. Sıfır toplamli olmayan oyunlar genel olarak işbirlikçi olan ve işbirlikçi olmayan oyunlar olmak üzere iki ayrı bölümde ele alınmıştır. İşbirlikçi oyunlarda stratejik işbirliği ve tam anlamda işbirliği olmak üzere oyuncular arasında iki çeşit işbirliğinden söz edildiği için bu kısım ayrıca iki alt bölümde incelenmiştir. Stratejik işbirliği oyuncuların hangi stratejileri seçeceklerine kendi aralarında anlaşma yaparak ulaştığı işbirliğidir. Tam anlamda işbirliği ise stratejik işbirliğine ek olarak oyunun sonunda elde edilen ödentinin de belli bir kurala göre paylaşıldığı işbirliği durumudur. İşbirlikçi olmayan oyunlar genel olarak baskın strateji dengesi ve karma strateji dengesi olmak üzere iki bölümde ele alınmıştır. Baskın ve karma strateji dengesinde temel çözüm kavramı Nash dengesidir. İşbirlikçi oyunlar ise iki kişilik ve daha sonra genel olarak N kişilik oyunlar adı altında değerlendirilerek çeşitli kavramlar ve yöntemler üzerinde durulmuştur. Bu bölümdeki oyunlar için genel olarak kullanılan gösterim biçimi ise karakteristik fonksiyon biçimidir. Üçüncü kısımda ise yayvan (extensive) formdaki oyunlar incelenmiştir. Burada oyunlar, hareketlerin ardı ardına seçildiği durumda oluşan oyunlardır. Bu tarz oyunlara dinamik oyunlarda denilmektedir. Yayvan formdaki oyunlar tam bilgiye dayalı ve tam bilgiye dayalı olmayan oyunlar olarak iki kısımda ele alınmıştır. Ayrıca, ilgili tanımlar ve kavramlar açıklanarak bazı çözüm yöntemleri üzerinde durulmuştur.

Çalışmanın üçüncü bölümünde ise, ilk olarak finansal sistemi oluşturan temel unsurlar olan finansal piyasalar, bu piyasalarda faaliyet gösteren kurumlar ve bu faaliyetin nesnesi olan finansal araçlardan bahsedilmiştir. Daha sonra bu unsurlardan meydana gelen finansal sistemin işleyişinden kısaca bahsedilmiştir. Devamında finansal piyasaların tanımını, işleyişi ve ekonomideki yeri ve önemi üzerinde durulmuştur. Finansal piyasalar gelirlerinden daha az harcayarak fazla fona sahip olan firmalar, hane halkı ve hükümetlerden gelirlerinden daha fazla harcama yaptığı için fon kısıtlılığına çeken ekonomik birimlere fon kanalize ederek önemli bir ekonomik fonksiyonu icra ederler (Mishkin, 2001). Finansal piyasaların temel özelliği belirsizlik ve risk içermesidir. Belirsizlik altında finansal varlıkların getirilerinin ne olacağını kesin olarak belirlemek neredeyse imkânsızdır. Bu varlıkların getirileri finansal piyasalarda belirsizlik ve risk altında şekillendiğinden yatırımcının en uygun kararı vermesi için çeşitli teknikler geliştirilmiştir. Finansal karar verme teknikleri geçmiş dönem verilerden hareketle geleceği tahmin ilkesine dayanmaktadır. Bunun için geliştirilmiş çeşitli yöntemler, hem finansal piyasaların çok sayıda sosyoekonomik değişkenin etkisinde olması hem de bu değişkenlerin birbiriyle olan etkileşimlerinden kaynaklanan etkilerin modellere yansıtılmasındaki güçlükler bizleri alternatif yöntem arayışına itmiştir. Bu noktada etkileşimli karar almada diğer yöntemlere göre daha iyi sonuçlar veren oyun kuramı finansal piyasalarda karar vermede alternatif bir yaklaşım olarak akla gelmektedir (Özdil ve Yılmaz, 2001). Oyun teorisi finansal piyasaların doğasını yansıtabilecek önemli bir araçtır. Buna göre, çalışmamızda oyun kuramının finansal karar vermeye nasıl uygulandığından bununla ilgili olarak oyunun varsayımlarından ve oluşturulmasından bahsedilmiştir. Son olarak oluşturduğumuz modelin çözümü ve sonuçların değerlendirilmesi yapılmıştır. Buradan hareketle sonuçların geçmiş dönemlerde istikrarlı bir seyir izleyip izlemediği üzerinde durulmuştur.

2. BÖLÜM

OYUN KURAMI

2.1 Oyun Kuramının Genel Tanımı

Oyun kuramının genel tanımından bahsetmeden önce oyun kuramına konu olabilecek oyunların tanımından daha sonra bir oyunda olması gereken bazı temel kavramlardan bahsedeceğiz.

Ekonomide çeşitli çatışma durumlarıyla karşılaşırız. Bu çatışma durumlarını, duopol piyasadaki firmaların verdiği kararlardan, ücret görüşmelerine, dış ticaret politikalarının belirlenmesinden, üretim planlamasına kadar sıralayabiliriz. Çatışma genel olarak şu şekilde ifade edilir; taraflardan birinin yapacağı herhangi bir hareketin sonucunun, kısmen diğer tarafın hareketine bağlı olması durumu (Ventsell, 1965). Bu tarz çatışma durumlarını analiz edebilmek ve bu çatışma durumu altında uygun kararın alınabilmesini sağlamak için oyun kuramı geliştirilmiştir. Oyun kuramında amaç birbirine rakip olan tarafların akılcı bir şekilde nasıl davranmaları gerektiğini ortaya koymaktır. Gerçek hayatta karşılaştığımız çatışma durumları çok sayıda faktörü içinde barındırır. Bu faktörlerin tümünün etkisini ortaya koyabilmek ve analiz edebilmek son derece zordur hatta bazen imkânsızdır. Bu yüzden, böyle durumların matematiksel analizini mümkün kılabilmek için, belirtilen tarzdaki çatışma durumunu en iyi şekilde temsil edecek, ana faktörlerin dikkate alındığı, yan faktörlerin göz ardı edildiği basitleştirilmiş örnek modeller kurmamız gerekmektedir. Böyle modellere oyun denir.

Yukarıda bahsedilen tarafların akılcı bir şekilde davranmaları gerektiği hususu önemlidir. Bir birey (oyuncu) olası sonuçların kümesi üzerine iyi tanımlanmış amaç yada tercihlerle sahipse ve bu amaçları elde etmek için sahip olduğu en iyi stratejiyi uyguluyor ise bu birey rasyoneldir (Koçkesen, 2008). Oyunda, akılcı bir karar alıcının diğer bir değişle oyuncunun, kendisi için en iyi olanı tercih ettiği varsayılmaktadır. Buna göre oyun kuramını rasyonel bireyler arasında stratejik etkileşimin olduğu durumları açıklayan matematiksel bir yaklaşım olarak ifade edebiliriz. Tüm bu bilgiler ışığında oyun kuramı şu şekilde tanımlanır; sonucu yalnızca bir oyuncunun seçimine veya şansına bağlı olmayan aynı zamanda diğer oyuncu yada oyuncu gruplarının yaptığı seçimlere de bağlı olan çatışma durumlarını analiz etmek için kullanılan matematiğin bir dalıdır. Ekonomi bağlamında değerlendirdiğimizde oyun kuramı, ekonomik

faaliyetlere ilişkin en iyi kararın verilebilmesi için geliştirilmiş bir yaklaşım olarak ifade edilebilir.

Oyunlar genel olarak aşağıda belirtilen özelliklere sahiptir. (Houlden, 1962). Yani, karşılaşılan bir problemin oyun kuramı içerisinde değerlendirilebilmesi bu özelliklerin sağlanmasını gerektirir.

1. Oyuna katılan oyuncular sonlu sayıdadır.
2. Oyuncuların strateji sayıları sonludur.
3. Her oyuncu kendisi ve rakibinin sahip olduğu stratejilerin neler olduğunu bilmekte, fakat rakibinin hangi stratejiyi uygulayacağını bilmemektedir.
4. Oyuncular hangi stratejilerini seçerse seçsin her birinin karı veya zararı sınırlıdır.
5. Oyuncuların kazançları (veya kayıpları) kendi verecekleri karar kadar rakiplerinin kullanacağı stratejiye de bağlıdır.
6. Bütün muhtemel davranışlar hesap edilebilir nitelikte olmalıdır.

2.2 Oyun

Genel olarak oyun; yukarıda bahsedilen koşulların sağlandığı zeki ve rasyonel oyuncuların, bu oyuncuların sahip olduğu stratejilerin ve bunların sonuçlarının yer aldığı kendini tanımlayan kurallardan meydana gelen bir çatışma modelidir.

2.3 Temel Kavramlar ve Tanımlar

2.3.1 Oyuncular

Bir oyundaki karar verici varlıklara oyuncu denir. Burada varlık; birey, şirket, ulus, kurum, ordu, v.s olabilir. Oyun kuramında, oyuncular ile ilgili varsayımlar şunlardır; bir oyunda oyuncu sayısı en az iki olmalıdır ve sınırlı sayıda olmalıdır, oyundaki tüm oyuncular rasyonel olmalıdır yani kazanmak için en iyisini yapmalıdır.

2.3.2 Stratejiler

Bir oyundaki herhangi bir oyuncunun oyun boyunca ortaya çıkabilecek bütün durumlar için yaptığı seçimleri belirten kurallar bütününe strateji denir. Bir stratejinin sağlaması gereken üç koşul vardır (Morris, 1994). İlki, strateji tam olmalıdır; bir strateji oyunun bütün durumlarında uygulanabilmelidir. İkincisi, strateji kesin olmalıdır; oyunda yapılacak hareket tesadüfi yada oyuncunun keyfine göre değil oyunun kuralı

tarafından belirlenmelidir. Bazı oyunlarda tesadüfi hamle olabilir, tavlada zar atılması gibi ama bu oyunun kuralı dahilinde gerçekleştirilen bir eylemdir. Üçüncü koşul ise oyunun herhangi bir anında oyuncunun alternatif seçimlerinin oluşturduğu küme içindeki her bir duruma vereceği cevap benzer alternatif seçimlerden oluşmalıdır.

Stratejiler, oyunun yapısına göre çeşitlilik gösterir. Oyuncuların sahip oldukları strateji sayısına göre düşündüğümüzde, sonlu yada sonsuz sayıda strateji olabilir. Oyunun kuralına göre düşündüğümüzde, oyuncular sahip oldukları stratejilerini aynı anda veya belli bir dizimselliğe göre seçebilir. Oyuncuların stratejilerini seçme sıklığına (sayısına) göre düşündüğümüzde ise oyunun tüm aşamalarında aynı strateji seçiliyorsa tam strateji, farklı stratejiler seçiliyorsa karma strateji söz konusudur. Bir oyunda her bir stratejiye karşı oyunun sonunda bir ödenti vardır.

2.3.3 Ödemeler

Bir oyunun sonucu oyundaki oyuncunun hangi stratejilerini seçtiğine bağlıdır. Bir oyunda yer alan her oyuncu sahip oldukları stratejileri belli kurallar çerçevesinde seçtiklerinde oyunun sonunda bu stratejilerin oyunculara yüklediği kazanç yada kayıp vardır. Bu kazanç yada kayıplar sayıyla ifade edilmelidir. Bazı oyunlarda ödemeler, mutluluk, tatmin, saygınlık yada bunların zıtları gibi sayısal olmayan ödemeler olabilir. Böyle psikolojik ödemeli oyunlarla çalışmak için gerekli olan ilk şey bu ödemeleri sayısal hale getirmektir. Sayısal olmayan ödemelerin sayısal olana değiştirilmesi makul bir şekilde daima yapılabilir (Morris, 1994). Ödemeler, oyunun türüne göre farklı gösterimlere sahiptir. Örneğin normal biçimdeki bir oyunda ödemeler matris ile ifade edilirken, yayvan (extensive) biçimdeki bir oyunda ödemeler vektörlerle ifade edilir. Farklı oyun türleri için ödemelerin nasıl belirlendiği ve nasıl gösterildiği ilgili kısımda bahsedilecektir.

2.4 Oyunları Sınıflandırılması

Oyunların sınıflandırılması ile ilgili birçok yaklaşım vardır. Genel olarak oyunlar şans ve strateji oyunları olmak üzere ikiye ayrılır.

Şans oyunları doğaya karşı oynanan tek kişilik bir oyundur. Bu tarz oyunlarda, oyuncu, sonuçları tam olarak kontrol edemez ve oyuncunun stratejik seçimleri kesin sonuçlara ulaşamaz. Şans oyunlarının sonuçları kısmen oyuncuya kısmen de doğaya bağlıdır. Burada doğa ikinci bir oyuncuymuş gibi düşünülür. Şans oyunları iki kısımda

değerlendirilir. Birincisi, risk içeren şans oyunlarıdır. Bu durumda, oyuncu doğanın stratejilerinin her birinin olasılıklarını bilmektedir bu yüzden oyuncu sahip olduğu stratejilerin her biri için başarı olasılığını bilebilir. İkincisi ise belirsizlik içeren şans oyunlarıdır. Burada doğanın stratejilerine anlamlı olasılıklar atanamaz, bu yüzden oyuncunun kazancı kesin olarak belli değildir ve stratejilerin başarı olasılığı bilinmemektedir (Kelly, 2003).

Strateji oyunları ise iki yada daha fazla oyuncudan oluşur. Bu oyunculardan her biri oyunun sonucunu kısmen kontrol edebilir. Oyuncular diğer her oyuncunun seçimlerine kesin olasılıklar tayin edemediği için strateji oyunları belirsizlik içermektedir. Oyun kuramında, genelde, bu tarz oyunlar incelenmektedir. Çünkü oyunun sonucu, oyuncuların tümünün tercihlerine göre belirlenmektedir. Oyuncular bir taraftan kendileri için en iyi olanı seçerken diğer taraftan rakiplerinin seçimlerini göz önünde bulundurarak oyunu şekillendirmektedir. Strateji oyunları oyuncu sayısına, strateji sayısına, oyunun sonucuna, oyuncuların sahip olduğu bilgiye ve zamana göre gruplandırılmaktadır.

Oyuncu sayısına göre strateji oyunları iki kişilik veya “n” kişilik oyunlar olmak üzere ikiye ayrılır. Duopol piyasasındaki firmaların rekabeti üzerine kurulu bir oyun iki kişilik oyunlara örnek olarak verilebilir. Oyuncu sayısı ikiden fazla olduğu durumlarda çoğunlukla koalisyon oluşturulmaktadır. Burada, teori kurulacak koalisyonun nasıl olacağıyla ve koalisyondaki üyelerin ödentilerinin makul bir şekilde nasıl paylaşılacağıyla ilgilenmektedir.

Strateji sayısına göre oyunlar ikiye ayrılır; sonlu sayıda stratejiye sahip oyunlar ile sonsuz sayıda stratejiye sahip oyunlar. Taraflardan en azından birisinin sonsuz sayıda olası stratejiye sahip olduğu oyunlara sonsuz oyunlar veya sınırsız oyunlar denir (Ventsell, 1964).

Oyunun sonucuna göre strateji oyunları, sıfır toplamı veya sıfır toplamı olmayan oyunlar olmak üzere ikiye ayrılır. Adından da anlaşılacağı gibi sıfır toplamı oyunlarda tüm oyunculara yapılacak ödemelerin toplamı sıfırdır. Yani bir tarafın kazancı diğer tarafın kaybına eşittir. Sıfır toplamı olmayan oyunlarda ise oyunculara yapılacak ödemelerin toplamı sabit bir sayı olabileceği gibi değişik sonuçlarda olabilmektedir. Bu tarz oyunlara sırayla sabit toplamı ve sabit toplamı olmayan oyunlar denir. Sıfır toplamı olmayan oyunlarda bir oyuncunun kazancı diğer oyuncunun kaybına eşit değildir. Buna göre böyle bir oyunda tarafların bir kısmı kazanırken diğer kısmının kaybetme zorunluluğu yoktur. Oyundaki her oyuncu oyunun sonunda hem kazanabilir

hemde kaybedebilir. Sıfır toplamı olmayan oyunlarda önemli bir husus ortaklık kavramıdır. Sıfır toplamı veya sabit toplamı iki kişilik oyunlarda her oyuncu için kazançların toplamı sıfır veya sabit olduğu için ortaklığın hiçbir üstünlüğü olmaz. Sabit toplamı olmayan oyunlarda ise ortaklık bir üstünlük sağlayabilir (Öztürk,1994). Dolayısıyla ortaklık (koalisyon) kavramı sıfır toplamı olmayan oyunlar içerisinde değerlendirilmelidir.

Oyuncuların sahip oldukları bilgi açısından oyunlar ikiye ayrılır. Eğer oyundaki her oyuncu oyunun geçmiş her anını biliyor ise bu özellikteki bir oyuna tam bilgiye dayalı oyun denir. Örneğin satranç böyle bir oyundur. Oyunun başından itibaren her iki oyuncuda rakibinin hangi hamleyi oynadığını bilir. Eğer oyun hakkında oyuncuların bir kısmı diğer oyuncuların sahip olmadığı bir bilgiye sahip ise bu özellikteki oyuna tam bilgiye dayalı olmayan oyunlar denir.

Oyunlar zaman faktörüne göre statik ve dinamik oyunlar olmak üzere ikiye ayrılır. Statik oyunlar belli bir zaman dilimi içerisinde tüm kararların aynı anda alındığı oyunlardır. Dinamik oyunlar ise kararların belli bir şekilde peşi sıra alındığı oyunlardır.

2.5 Oyunların Gösterim Biçimleri

Oyunlar genel olarak üç farklı biçimde gösterilir. Bunlar normal (stratejik) biçim, yayvan (extensive) biçim ve karakteristik fonksiyon biçimidir. Burada hangi oyun için hangi biçimin kullanılacağı, ilgilendiğimiz oyunun yapısına bağlıdır. Eğer bir oyun normal biçimde daha kolay ifade edilebiliyorsa ve oyunun çözümü için hesaplamalar daha kolay yapılabiliriyorsa normal biçim tercih edilir. Bu tamamıyla araştırmacının sezgisine bağlıdır. Ama genel olarak statik oyunlarda, stratejilerin eşanlı seçildiği, normal biçim, dinamik oyunlarda ise yayvan biçim, işbirlikçi oyunlarda ise karakteristik fonksiyon biçimi tercih edilir.

2.5.1 Normal Biçim

Oyundaki her oyuncunun sahip olduğu her bir stratejisine karşı diğer oyuncuların sahip oldukları olası tüm stratejilerin kesişiminden meydana gelen ödemelerin matris ile ifade edilmesine normal biçim denir. Bu matrise ödemeler matrisi denir. Yukarıda bahsettiğimiz gibi oyuncuların stratejilerini aynı anda ve birbirinden bağımsız olarak seçtikleri statik oyunlarda genellikle normal biçim kullanılır. Normal biçimde gösterilen bir oyunun sıfır toplamı olup olmaması matris elemanlarının gösterim şeklinde

değişikliğe neden olur. İki kişilik normal biçimdeki bir oyunda matrisin her bir elemanı bir sıralı ikiliden meydana gelir. Bu sıralı ikilinin ilk elemanı 1. oyuncunun kazancını, ikinci eleman ise 2. oyuncunun kazancını gösterir. Sıfır toplamlı oyunlarda, özel olarak, oyuncuların birisinin kazancı diğerinin kaybına eşit olduğu için sıralı ikililerin ikinci elemanı, ilk elemanın ters işaretlisi olur. Bu durumda ödemeler matrisindeki her bir eleman yalnızca satır oyuncusunun kazancını göstermek üzere sıralı ikilinin ilk elemanından oluşur. Bu rakamlar diğer (kolon) oyuncunun kayıplarını gösterir. İki oyunculu ve her oyuncunun iki stratejisini olduğu, sıfır toplamlı olmayan bir oyun normal formda genel olarak aşağıdaki gibi gösterilir;

$$\begin{bmatrix} (a,b) & (c,d) \\ (e,f) & (g,h) \end{bmatrix}$$

İki oyunculu ve her oyuncunun iki stratejisinin olduğu, sıfır toplamlı oyun normal formdaki bir oyun ise genel olarak aşağıdaki gibi gösterilir;

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

2.5.2 Yayvan (Extensive) Biçim

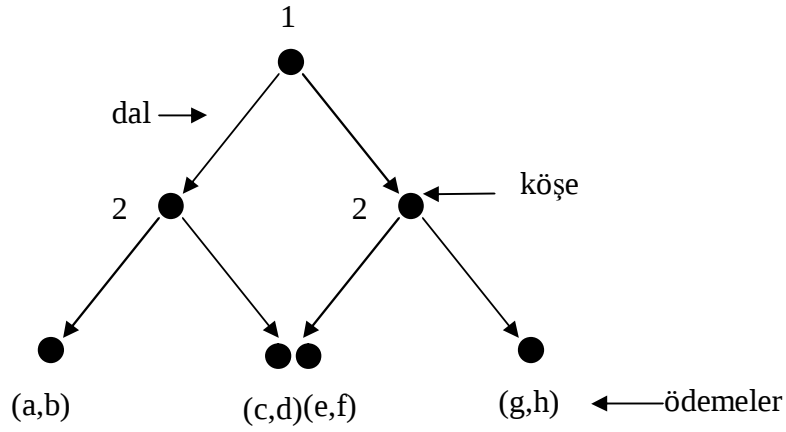
Bir oyunun yayvan formu

1. Oyuncular kümesini
2. Hareketlerin ne zaman ve nasıl olduğunu
3. Her hareketin sonucunda oyuncuların neyi bildiğini
4. Oyuncuların seçimlerinin bir fonksiyonu olarak, ödemeleri

tanımlamaktadır (Meunier,2006).

Oyunların yayvan formu oyun ağaçları tarafından ifade edilir. Bir ağaç dallardan bu dalların birleştiği köşelerden ve ödemelerden meydana gelir.

İki oyunculu, her oyuncunun iki stratejisinin olduğu ve ilk önce 1. oyuncunun stratejisini seçtiği ardından 2. oyuncunun kendi stratejisini seçtiği bir oyun, yayvan formda genel olarak aşağıdaki gibi gösterilir.



Şekil 2.1: Yayvan Biçim

2.5.3 Karakteristik Fonksiyon Biçimi

Oyuncuların oluşturduğu tüm olası koalisyonlardaki her bir üye için, koalisyonda olmayan diğer oyuncular nasıl oynarsa oynasın, oyunun değerine karakteristik fonksiyon denir. Bir S koalisyonu için karakteristik fonksiyon $v(S)$ ile gösterilir. Bu kavramlar ilgili bölümlerde ayrıntılı olarak incelenecektir.

2.6 İki Kişilik Sıfır Toplamlı Oyunlar

Verilen bir çatışma durumunun bir oyun belirtebilmesi için şu özelliklere sahip olmalıdır. Oyun kesin olarak tarif edilmiş kurallardan oluşan bir sistemdir. Yani bir oyun, oyunun her aşamasında her oyuncunun yapabileceği hareketleri, tarafların her birinin diğerinin davranışı hakkında bilgi derecesini, yapılan hareketler dizisini (oyunun devamı sırasında alınmış kararları) ve her iki tarafın yaptığı bütün hareketlerin sonunda erişilen oyunun sonucunu, belirleyen kurallardan meydana gelen bir sistem olmalıdır. Oyunun sonunda ise sayısal bir ölçütle ifade edilen kazanç yada kayıplar olmalıdır (Ventsell, 1965).

İki kişilik sıfır toplamlı oyunlar genel olarak normal biçim (matris) ile ifade edilirler. Bu tarz oyunlarda her iki oyuncunun da çıkarları birbirine tamamiyle zıttır. Yani taraflardan birinin kazancı diğerinin kaybına eşittir. Dolayısıyla oyuncuların kazançları toplamı sıfırdır. Oyun sonunda elde edilen kazançlar toplamı sıfır olduğu için bu tarz oyunlara sıfır toplamlı oyunlar denmektedir.

Sıfır toplamlı oyunlarda her iki oyuncu için, ayrı ayrı, oluşturulacak olan ödemeler matrisleri birbirinin zıt işaretlisi olur. Bu nedenden dolayı her iki matrisi oluşturmaya

gerek yoktur. Bu matrislerin sadece biri ile iki kişilik sıfır toplamı oyunlar ifade edilebilir.

Oyunların strateji seçimlerinin türlü bileşiminden sonuçlanan kazanç ve kayıpları gösteren matrise ödemeler matrisi denir ve bu matrisinin elemanları pozitif, negatif veya sıfıra eşit olabilir (Öztürk,1994). İki kişilik sıfır toplamı oyunlarda yer alan oyunculara ödemeler matrisinde gösterildiği şekliyle satır ve sütun oyuncusu denir. Satır oyuncusu ödemeler matrisinin satırlarıyla tanımlanan “m” tane stratejiye sahiptir. Kolon oyuncusu ise ödemeler matrisinin kolonlarıyla belirtilen “n” tane stratejiye sahiptir. Eğer satır oyuncusu i. ve kolon oyuncusu j. stratejisini oynarsa, satır oyuncusuna yapılacak olan ödeme m_{ij} , kolon oyuncusuna yapılacak olan ödeme ise $-m_{ij}$ ile ifade edilir. Bu nedenle ödemeler matrisindeki sayıların büyük olması satır oyuncusunun, küçük olması ise kolon oyuncusunun lehinedir. Negatif matris elemanları satır oyuncusu için kayıp, kolon oyuncusu için kazanç olarak ifade edilir. Ödemeler matrisi genel olarak aşağıdaki gibi gösterilir,

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_{m1} & m_{m2} & \dots & m_{mn} \end{bmatrix}$$

2.6.1 Eğer Noktalı Oyunlar (Tam Stratejiler)

Eğer noktalı oyunlar tam strateji dengesinin olduğu oyunlardır. Her iki oyuncunun doğru stratejisini kullanması koşuluyla oyunun birçok kere tekrarlandığını kabul edersek, bunun sonucu olarak; oyunun kuralı gereğince tarafların birbirlerine bir miktar ödeme yapması gerekir. Birim oyun başına düşen ortalama ödeme miktarına *oyunun değeri* denir. Oyunun değerini belirleyen tam stratejilere karşılık gelen strateji çiftinin belirlediği denge noktasına ise eğer (tepe) noktası denir. Buna göre oyunun değeri eğer noktasında almış olduğu değerdir.

Burada oyuncuların kendisi için en iyi olan stratejiyi seçmesi gerekmektedir. Çünkü bu durumda ortaya çıkan sonuç her iki oyuncu içinde en iyi sonuçtur. Bu sonuç satır oyuncusunun ulaşabileceği en yüksek kazancı ve sütun oyuncusunun ulaşabileceği en düşük zararı gösterir. Eğer oyuncuların biri veya ikisi kendi en iyi stratejilerini

seçmez ise bu durumda oyuncular daha az kazanç veya daha fazla kayıp elde ederler. Yani oyuncular en iyi stratejilerini oynamaz ise kazanç ve kayıp oyunun değerinden fazla veya daha az olabilir. İki kişilik bir oyunda bir oyuncu yanlış strateji oynarsa bu oyuncu zarar görür, diğer oyuncu ise oyunun değerinden daha fazla kazanç elde eder. Şimdi bu stratejilerin en iyi şekilde nasıl belirlendiğini ve strateji dengesinin nasıl bulunduğunu inceleyelim.

Matris oyununda strateji dengesi kavramı şu şekilde ifade edilir. (p,q) strateji çifti sırasıyla 1. ve 2. oyuncu için stratejileri ifade etsin. p ve q stratejileri oynanarak elde edilen kazanç M ödemeler matrisindeki m_{pq} elemanını belirler.

O zaman, eğer (p,q) strateji denge çifti ise

$$m_{iq} \leq m_{pq}, \quad \text{her } i \text{ için}$$

ve

$$m_{pj} \geq m_{pq}, \quad \text{her } j \text{ için}$$

yazılır. Burada satır oyuncusunun p stratejisini ve kolon oyuncusunun q stratejisini oynayarak elde ettiği değer (kazanç), satır oyuncusu için; kolon oyuncusunun seçimi sabit iken (q) seçtiği p stratejisi satırlardaki en büyük değer, kolon oyuncusu için; satır oyuncusunun seçimi sabit iken seçtiği q stratejisi kolonlardaki en küçük değer olmalıdır. İkinci eşitsizlik ile ilk eşitsizliğin yönünün farklı olmasının nedeni kolon oyuncusunun ödentilerinin ödemeler matrisinde, oyuncu için kazancı değil kaybı gösteriyor olmasıdır.

Tanım 2.1: M sayılardan oluşan bir matris, m_{pq} elemanı bu matrisin eğer noktası ise bu eleman matriste, aynı anda, bulunduğu satırdaki minimum, bulunduğu kolondaki maksimum değerdir. Bu yüzden, M bir matris oyunu ise (p,q) denge strateji çifti olması ancak ve ancak m_{pq} 'nun eğer noktası olmasıyla sağlanır.

Teorem 2.1: Eğer m_{kl} ve m_{pq} M matrisinin eğer noktaları ise o zaman m_{kq} ve m_{pl} ayrıca eğer noktalarıdır ve

$$m_{kl} = m_{pq} = m_{kp} = m_{pl}$$

olur.

İspat: Eğer noktası bulunduğu satırın minimumu ve bulunduğu kolonun maksimumu olduğu için,

$$m_{pq} \leq m_{pl} \leq m_{kl}$$

iken,

$$m_{kl} \leq m_{kq} \leq m_{pq}$$

yazabiliriz. Bu yüzden

$$m_{kl} = m_{pq} = m_{kp} = m_{pl}$$

Ayrıca, m_{kp} eğer noktasıdır. Çünkü $m_{kq} = m_{kl}$ k satırının minimumudur ve $m_{kq} = m_{pq}$ q kolonunun maksimumudur. Benzer şekilde m_{pl} bir eğer noktasıdır (Morris, 1994).

Eğer noktasının herhangi bir matris oyununun (normal biçim) makul bir çözümü olabilmesi için oyuncuların rasyonel bir şekilde nasıl oynayacağını düşünmemiz gerekir. İlk olarak, satır oyuncusu her ne şekilde oynarsa oynasın rakibi (kolon oyuncusu) kendi ödentisini (kaybını) minimum yapacak şekilde oynar. Aynı şekilde kolon oyuncusu her ne şekilde oynarsa oynasın satır oyuncusu kendi ödentisini maksimum yapacak şekilde oynar. Oyun sıfır toplamı olduğu için kolon oyuncusunun ödentisinin maksimumu satır oyuncusunun ödentisinin minimumuna tam olarak eşittir. Bu yüzden satır oyuncusu kendisi için minimum olan ödemeler içerisinde maksimumu verecek stratejiyi seçer. Kolon oyuncusu ise, matris elemanları bu oyuncu için kayıpları gösterir, en büyük kayıp içerisinde en küçük olanı veren stratejiyi seçecektir.

Tanım 2.2: M, $m \times n$ boyutlu bir matris oyunu, sırasıyla satır ve sütun oyuncusunun değeri

$$u_r(M) = \max_i \min_j m_{ij}$$

ve

$$u_c(M) = \min_j \max_i m_{ij}$$

dir. Eğer satır oyuncusu $u_r(M)$ 'in tanımındaki maksimuma ulaşmak için k stratejisini oynarsa $u_r(M)$ satır oyuncusunun kazanmayı garanti edeceği miktarı verir. Diğer bir değişle kazanabileceğinin en azını belirler.

$$\min_j m_{kj} = u_r(M)$$

Eğer kolon oyuncusu rasyonel bir şekilde stratejisini belirlemezse satır oyuncusu k oynayarak çok daha fazla kazanabilme şansı vardır. Burada $u_r(M)$ satır oyuncusunun kendisi için minimum olan ödemeyi (kayıp) seçeceğini varsayar. Kolon oyuncusu ise l kolonunu oynayarak kendisi için en iyi olan kazancı elde eder. Diğer bir değişle kaybedeceğinin en fazlasını belirlemiş olur.

$$\max_i m_{il} = u_c(M)$$

Lemma 2.1: Herhangi bir M için;

$$u_r(M) \leq u_c(M)$$

dir.

İspat: Herhangi bir i ve l için

$$\min_j m_{ij} \leq m_{il}$$

yazabiliriz. Her iki tarafı i ye göre maksimize edersek;

$$\max_i \min_j m_{ij} \leq \max_i m_{il}$$

$$u_r(M) \leq \max_i m_{il}$$

her l için ifadeyi minimize edersek;

$$u_r(M) \leq \min_l \max_i m_{il}$$

$$u_r(M) \leq u_c(M)$$

(Morris, 1994).

Teorem 2.2: M matris oyunun da m_{pq} eğer noktası ise, ozaman

$$u_r(M) = u_c(M) = m_{pq}$$

İspat: m_{pq} eğer noktası olduğu için

$$\min_j m_{pj} = m_{pq}$$

ve

$$u_r(M) \geq m_{pq}$$

Ayrıca

$$\max_i m_{iq} = m_{pq}$$

ve

$$u_c(M) \leq m_{pq}$$

Bu eşitsizlikleri bir araya getirirsek

$$u_c(M) \leq m_{pq} \leq u_r(M)$$

Lemma 2.1'den

$$u_r(M) \leq u_c(M)$$

olduğundan

$$u_r(M) = u_c(M) = m_{pq}$$

olur (Morris,1994).

Teorem 2.3: Eğer $u_r(M) = u_c(M)$ ise, ozaman M bir eğer noktasına sahiptir.

İspat:

$$\min_j m_{kj} = u_r(M)$$

olacak şekilde bir k seçelim. Daha sonra,

$$m_{kl} = \min_j m_{kj} = u_r(M) = u_c(M)$$

olacak şekilde bir l seçelim.

m_{kl} k satırının minimumudur.

$$\max_i m_{iq} = u_c(M)$$

olan bir q kolonu vardır. Bu yüzden,

$$m_{kl} = u_c(M) = \max_i m_{iq} \geq m_{kq}$$

m_{kl} bulunduğu satırda minimum olduğu için

$$m_{kl} = m_{kq}$$

m_{kq} ise bulunduğu satırda minimum olduğu için

$$m_{kq} = m_{kl} = \max_i m_{iq}$$

Bu yüzden m_{kq} bir eğer noktasıdır.

Buraya kadar anlattıklarımızdan çıkaracağımız sonuç; M eğer noktasına sahip ise, o zaman M 'nin çözümü; satır oyuncusu eğer noktasının olduğu satırı seçer, kolon oyuncusu ise eğer noktasının olduğu kolonu seçer. Satır oyuncusuna yapılacak ödeme $u_r(M) = u_c(M)$ iken, kolon oyuncusuna yapılacak ödeme $-u_r(M) = -u_c(M)$ dir (Morris, 1994).

2.6.2 Karma Stratejiler

Eğer noktasına sahip olan oyunlarda oyuncular tam strateji dengesine ulaşabiliyordu. Bu bölümde ise eğer noktası olmayan oyunlardan bahsedilecektir. Bir matris oyununda eğer noktası yok ise bu durumda oyuncular, sahip olduğu stratejilerden herhangi birini seçerek dengeye ulaşamaz. Yani oyuncular tam strateji oynayarak tek bir noktada kazançlarını belirleyemez. Böyle bir oyunda satır oyuncusu sürekli 1. stratejisini seçiyor ise kolon oyuncusu bu durumu fark ettiğinde satır oyuncusunun 1. stratejisine cevap olabilecek kendi en iyi stratejisini seçer. Böyle bir durumda kolon oyuncusu her zaman avantajlıdır. Benzer durum satır oyuncusu içinde geçerlidir. Başka bir olasılık, oyuncuların sürekli rakibinin bir önceki stratejisine göre kendi en iyi stratejilerini seçmesidir. Bu durumda ise oyun sonsuz bir tekrara girebilir (Morris, 1994).

Yukarıda bahsedilen sorunlara çözüm olacak fikir, her oyuncunun stratejilerini rasgele seçmesi olacaktır. Ancak böyle bir durumda her iki oyuncuda rakibinin hangi stratejisini seçeceğini tahmin edemez. Burada her bir oyuncu rakibinin hangi stratejiyi ne sıklıkla seçeceğini tahmin edebilir fakat oyunun hangi anında hangi stratejinin seçileceğini bilemez (Morris, 1994).

Tanım 2.3: M , $m \times n$ boyutlu bir matris oyunu olsun. Satır oyuncusu için karma strateji n sıralı olasılık vektörüdür, öyleki;

$$p_i \geq 0 \quad 1 \leq i \leq m,$$

$$\sum_{i=1}^m p_i = 1$$

Benzer şekilde kolon oyuncusu için karma strateji n sıralı olasılık vektörüdür.

$$q_j \geq 0 \quad 1 \leq j \leq n,$$

$$\sum_{j=1}^n q_j = 1$$

Satır oyuncusu için karma stratejiyi şu şekilde ifade edebiliriz, satır oyuncusu sahip olduğu her bir i stratejisini p_i olasılığıyla seçerek, oyunun her anında stratejilerini rasgele seçmiş olacaktır. Böyle bir durumda kolon oyuncusu rakibinin hangi stratejisini seçeceğini tahmin edemez. Benzer yorum kolon oyuncusu içinde yapılabilir.

Belli bir oranda kullanılmış tam stratejilerin rasgele sıralanışından oluşan bileşik stratejilere karma strateji denir (Ventsell,1965). Yani oyundaki her oyuncunun sahip olduğu tam stratejilerin her birinin belli bir p olasılığı ile ağırlıklandırılması ile oluşturulan stratejilere karma stratejiler denir. Tam strateji oyun boyunca seçilen stratejinin olasılığının 1 diğer stratejilerin olasılığının sıfır olarak atandığı karma stratejilerin özel bir hali olarak düşünülebilir.

Hem karma strateji hem de tam strateji kullanarak her sonlu oyun için bir çözüm bulunabilir (Ventsell,1965). Buna göre her sonlu oyun için bir optimal strateji çifti vardır. Eğer oyuncuların birisi, diğer oyuncu kendi en iyi stratejisine bağlı kaldığı halde, kendi optimal stratejisinden ayrılırsa, böyle yaparak sadece kaybeder (Ventsell,1965). Buna oyunlar teorisinin esas teorisi denir (Bkz. J.Von Neumann, Game Theory and Economic Behaviour).

Eğer oyuncuların biri yada ikisi karma strateji oynamayı benimserse oyundaki her bir hamle sonunda ortaya çıkan ödemeler seçilen stratejilerin ne olduğuna bağlıdır. Bu şekilde oyunun birçok kez tekrarlanmasıyla ortaya çıkan ödemelerin ortalamasına beklenen değer denir ve $E(\vec{p}, \vec{q})$ ile gösterilir. Burada $\vec{p}$ ve $\vec{q}$ kullanılan karma stratejilerdir. Beklenen değer kavramının nasıl tanımlandığını açıklamak için, satır oyuncusunun karma strateji $\vec{p}$. ve sütun oyuncusunun ise j . tam stratejisini oynadığını düşünelim. Ozaman $M_{m \times n}$ ödemeler matrisinde satır oyuncusuna yapılacak olan ödeme p_i olasılığıyla m_{ij} 'dir. Beklenen ödeme ise,

$$E(\vec{p}, j) = \sum_{i=1}^m p_i m_{ij}$$

olarak hesaplanır.

Şimdide kolon oyuncusunun $\vec{q}$ karma stratejisini seçtiğini düşünelim. Ozaman satır oyuncusuna yapılacak ödeme q_j olasılığıyla $E(\vec{p}, j)$ dir. Bu yüzden,

$$E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{j=1}^n q_j \left(\sum_{i=1}^m p_i m_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m p_i q_j m_{ij}$$

Yukarıdaki ifadenin sırasını değiştirerek aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^m p_i \left(\sum_{j=1}^n q_j m_{ij} \right)$$

(Morris, 1994).

Tanım 2.4: $M_{m \times n}$ bir matris oyunu olsun. Oyunun Satır değeri

$$v_r(M) = \max_{\mathbf{p}} \min_{\mathbf{q}} E(\mathbf{p}, \mathbf{q})$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\mathbf{p}$ ve $\mathbf{q}$ sırasıyla satır ve sütun oyuncularının tüm karma stratejileridir. Sütun değeri ise,

$$v_c(M) = \min_{\mathbf{q}} \max_{\mathbf{p}} E(\mathbf{p}, \mathbf{q})$$

$v_r(M)$ satır oyuncusunun garanti ettiği kazanç miktarını

$v_c(M)$ ise kolon oyuncusunun garanti ettiği kazanç miktarını gösterir.

Burada her iki oyuncunun da rasyonel karar aldığı varsayılmaktadır. Eğer sütun oyuncusu kendisi için en iyi olan stratejiyi oynamaz ise satır oyuncusu $v_r(M)$ değerinden daha büyük bir kazanç elde eder.

Satır oyuncusu için en azından 1 tane karma strateji vardır.

$$v_r(M) = \min_{\mathbf{q}} E(\mathbf{r}, \mathbf{q})$$

Bu stratejiye optimal strateji denir. Benzer şekilde kolon oyuncusunun optimal stratejisi ise,

$$v_c(M) = \max_{\mathbf{p}} E(\mathbf{p}, \mathbf{s})$$

şeklinde yazılır.

Teorem 2.4: $M_{m \times n}$ bir oyun matrisi $\overset{\mathbf{r}}{p}$ ve $\overset{\mathbf{r}}{q}$ sırasıyla satır ve sütun oyuncusu için optimal strateji olsun ozaman,

$$v_r(M) \leq E(\overset{\mathbf{r}}{r}, \overset{\mathbf{r}}{s}) \leq v_c(M)$$

İspat: Kolon oyuncusu için $\overset{\mathbf{r}}{s}$ karma strateji olduğu için

$$v_r(M) = \min_{\overset{\mathbf{r}}{q}} E(\overset{\mathbf{r}}{r}, \overset{\mathbf{r}}{q}) \leq E(\overset{\mathbf{r}}{r}, \overset{\mathbf{r}}{s})$$

yazabiliriz. Benzer şekilde satır oyuncusu için,

$$v_r(M) = \max_{\overset{\mathbf{r}}{p}} E(\overset{\mathbf{r}}{p}, \overset{\mathbf{r}}{s}) \geq E(\overset{\mathbf{r}}{r}, \overset{\mathbf{r}}{s})$$

Bu iki ifadeyi birleştirdiğimiz zaman

$$v_r(M) \leq E(\overset{\mathbf{r}}{r}, \overset{\mathbf{r}}{s}) \leq v_c(M)$$

bulunur.

Bu teoreme göre $v_r(M) \leq v_c(M)$ dir. Bu durum minimaks teoreminin eşitsizlik (zayıf) versiyonudur. Minimaks teoremini aşağıdaki gibi kabul edersek

$$v_r(M) = v_c(M)$$

o zaman yukarıdaki teorem

$$v_r(M) = E(\overset{\mathbf{r}}{r}, \overset{\mathbf{r}}{s}) = v_c(M)$$

olmalıdır.

$\overset{\cdot}{r}$ ve $\overset{\cdot}{s}$ optimal strateji ve $\overset{\cdot}{p}$ ve $\overset{\cdot}{q}$ herhangi bir karma strateji ise,

$$E(\overset{\cdot}{p}, \overset{\cdot}{s}) \leq \max_{\overset{\cdot}{p}} E(\overset{\cdot}{p}, \overset{\cdot}{s}) = v_c(M) = E(\overset{\cdot}{r}, \overset{\cdot}{s}) = v_r(M) \quad (2.1)$$

ve

$$E(\overset{\cdot}{r}, \overset{\cdot}{q}) \geq \min_{\overset{\cdot}{q}} E(\overset{\cdot}{r}, \overset{\cdot}{q}) = v_r(M) = E(\overset{\cdot}{r}, \overset{\cdot}{s}) = v_c(M) \quad (2.2)$$

(2.1) ve (2.2) yi beraber düşündüğümüzde satır oyuncusu $\overset{\cdot}{r}$ oynayarak $v_r(M)$ den daha kötü bir değer elde edemez, $\overset{\cdot}{p}$ oynar ise $v_r(M)$ den daha kötü bir değer elde eder. Bu yüzden satır oyuncusu optimal karma stratejiyi oynamalıdır. Benzer şekilde kolon oyuncusu da optimal stratejiyi uygulamalıdır (Morris,1994).

Tanım 2.5: M $v_r(M) = v_c(M)$ için bir matris oyunu olsun, M 'nin çözümü üç bileşenden meydana gelir.

- 1) Satır oyuncusu için optimal karma strateji
- 2) Sütun oyuncusu için optimal karma strateji
- 3) Oyunun değeri, $v(M)$,

$$v(M) = v_r(M) = v_c(M)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.5: M , $v_r(M) = v_c(M)$ için bir matris oyunu olsun, Kabul edelim ki, $\overset{\cdot}{r}$ ve $\overset{\cdot}{t}$ satır oyuncusu için optimal karma stratejilerdir, $\overset{\cdot}{s}$ ve $\overset{\cdot}{u}$ kolon oyuncusu için optimal karma stratejilerdir. O zaman

$$E(\overset{\cdot}{r}, \overset{\cdot}{s}) = E(\overset{\cdot}{r}, \overset{\cdot}{u}) = E(\overset{\cdot}{t}, \overset{\cdot}{u}) = E(\overset{\cdot}{t}, \overset{\cdot}{s})$$

dir.

İspat: (2.1) ve (2.2) ifadelerini kullanarak

$$E(\overset{\cdot}{r}, \overset{\cdot}{s}) \geq E(\overset{\cdot}{t}, \overset{\cdot}{s}) \geq E(\overset{\cdot}{t}, \overset{\cdot}{u})$$

ve

$$E(\overset{\cdot}{t}, \overset{\cdot}{u}) \geq E(\overset{\cdot}{r}, \overset{\cdot}{u}) \geq E(\overset{\cdot}{r}, \overset{\cdot}{s})$$

yazabiliriz.

Bu yüzden yukarıdaki eşitsizlikleri eşitlik olarak yazılabilir (Morris,1994).

Matris oyunundaki eğer noktası tam strateji dengesine karşılık gelmekteydi. Bu teoreme göre optimum karma strateji çifti karma stratejilerin denge çiftine yani bir eğer noktasına benzemektedir ama eğer noktası değildir. Burada satır ve sütun değerlerinin nasıl bulunacağını aşağıdaki teorem belirlemektedir (Morris, 1994).

Teorem 2.6: $M_{m \times n}$ bir matris olsun. Ozaman

$$v_r(M) = \max_p \min_j E(\bar{p}, j)$$

ve

$$v_c(M) = \min_q \max_i E(i, \bar{q})$$

Burada j tüm kolonları, i ise tüm satırları göstermektedir.

Bu teorem minimum ve maksimum hesaplamak için yalnızca tam stratejileri kullanmamıza olanak tanır (Morris, 1994).

İspat: Tam stratejiler karma stratejilerin özel bir hali olduğu için

$$\min_q E(\bar{p}, \bar{q}) \leq \min_j E(\bar{p}, j) \quad (2.3)$$

yazabiliriz. Burada $\bar{p}$ satır oyuncusu için herhangi bir karma stratejidir. Eşitsizliğin sağ tarafını ispatlamak için

$$E(\bar{p}, l) = \min_j E(\bar{p}, j)$$

olduğunu varsayalım. Eğer $\bar{q}$ kolon oyuncusu için bir karma strateji ise,

$$E(\bar{p}, \bar{q}) = \sum_{j=1}^n q_j E(\bar{p}, j) \geq E(\bar{p}, l) \quad (2.4)$$

olmalıdır. Çünkü bu ifade tüm $\bar{q}$ için sağlar l 'nin seçimine göre,

$$\min_q E(\bar{p}, \bar{q}) \geq \min_j E(\bar{p}, j)$$

yazabiliriz. Buna göre tüm $\vec{p}$ için (2.3) ve (2.4)'ten

$$\min_q E(\vec{p}, \vec{q}) = \min_j E(\vec{p}, j)$$

dir.

Her iki taraf $\vec{p}$ göre maksimize edilirse,

$$\max_p \min_q E(\vec{p}, \vec{q}) = \max_p \min_j E(\vec{p}, j)$$

Böylece satır değeri için ispat tamamlanmış olur, kolon değeri için ispat benzerdir (Morris, 1994).

Bu teoremden şu sonuçları çıkarabiliriz (Morris, 1994);

Satır oyuncusu için bir $\vec{r}$ stratejisi optimal olabilmesi için ancak ve ancak

$$v_r(M) = \min_j E(\vec{r}, j)$$

olmalıdır. Burada j tüm kolonlar gösterir.

Benzer şekilde kolon oyuncusu için $\vec{s}$ stratejisi optimal olabilmesi için ancak ve ancak

$$v_r(M) = \max_i E(i, \vec{s})$$

olmalıdır. Burada i tüm satırları işaret eder

Diğer bir sonuç eğer M'nin eğer noktası varsa m_{kl} değeri, k ve l stratejileri oyunun sonucunu oluşturur.

Sonuç Teorem: Eğer M , m_{kl} eğer noktasına sahip ise o zaman satır değeri sütun değeri ve oyunun değeri birbirine eşit olur $v_r = v_c = m_{kl}$ dir. Buradaki k ve l optimal karma stratejilerdir.

İspat: Tam stratejiler karma stratejilerin özel bir hali olduğu için, önceki teoremden,

$$v_r(M) = \max_p \min_j E(\vec{p}, j)$$

yazabiliriz. Benzer şekilde,

$$v_c(M) \leq u_c(M)$$

dir.

$u_r(M) = u_c(M)$ ve $v_r(M) = v_c(M)$ olduğu için önceki teoremden

$$v_r(M) = v_c(M) = u_r(M) = u_c(M) = m_{kl}$$

k'nın satır oyuncusu için optimal strateji olduğunu göstermek için

$$\min_j E(k, j) = \min_j m_{kj} = m_{kl} = v_r(M)$$

Buna göre satır oyuncusu için k stratejisi, sütun oyuncusu için l stratejisi optimal olduğunda bu oyuncuların satır ve sütun değerleri birbirine eşittir ve bu oyunun değerini vermektedir (Morris, 1994).

2.6.3 İki Kişilik Sıfır Toplamlı Oyunların Çözüm Yöntemleri

Bir oyunun çözümü oyunda yer alan oyuncuların en iyi (optimal) tam yada karma stratejilerinin bulunması ve bu stratejilere karşılık gelen oyun değerinin belirlenmesi demektir. Herhangi bir oyunu çözümlerken oyunun birkaç kez yinelenerek oynandığı düşünülür. İki kişilik oyunda A oyuncusu rakibi olan B oyuncusunun hangi stratejiyi oynayacağını düşünmeden kendisi için x gibi optimal strateji vektörünü elde etmeye çalışır. x vektörü A oyuncusuna oyundan elde edebileceği maksimum beklenen kazancı sağlar. Buna karşılık B oyuncusu A oyuncusunun beklenen kazancını en aza indirecek kendi strateji vektörünü, y, araştırır. Eğer x^* ve y^* sırasıyla A ve B oyuncularının optimal stratejileri ise A oyuncusunun uzun dönemdeki ortalama kazancı (beklenen değeri) $E(x^*, y^*)$ olur. Bu ise oyunun değerine eşittir (Öztürk, 1994).

Oyunları çözmek için buraya kadar geliştirilen teoriyi özetleyecek olursak; herhangi bir oyuncunun her zaman optimal stratejisi vardır, eğer oyunculardan birisi

kendi optimal stratejisine bağılı kalırken diğeri bağılı kalmıyorsa bu oyuncu oyunun değeriinden daha az kazanç elde eder.

Oyunların çözümünde bazı kolaylıklar sağılayan üstünlük stratejisi kavramından bahsedelim. Üstünlük stratejisi oyunda tercihli olarak kullanılan ve diğeri stratejilerden bazılarını devre dışı bırakan stratejiler olarak tanımlanır (Esin, 2003).

Tanım 2.6: M $m \times n$ boyutlu bir matris olsun Eğer

$$m_{ij} \geq m_{kj}$$

tüm j 'ler için sağılıyorsa i . satır k . satır üzerine baskındır. Ayrıca

$$m_{ij} \leq m_{il}$$

tüm i 'ler için sağılıyor ise j kolonu l kolonu üzerine baskındır.

Bir ödemeler matrisinde satır oyuncusu i . stratejisini seçtiğinde sütun oyuncusunun her stratejisi için karşılık gelen ödemeler, matrisin i . satırında gösterilir. Bu bölümdeki ödemeler matrisi satır oyuncusunun kazançlarına göre oluşturulduğu için satır oyuncusu, büyük değerlerin olduğu satırları küçük olanlara tercih eder. Böylece küçük değerli satırlar hiçbir zaman oyuncu tarafından tercih edilmediği için bu satırlar oyunun çözümünden çıkartılır. Dolayısıyla o satıra karşılık gelen strateji hiçbir zaman kullanılmaz. Burada büyük olan satıra karşılık gelen stratejiye baskın (dominant) strateji denir. Diğeri taraftan, ödemeler matrisi kolon oyuncusunun kayıplarını gösterdiği için, bu oyuncu daha az ödemelerin yer aldığı sütunu daha fazla olana tercih eder. Bu durumda büyük olan satıra karşılık gelen strateji oyunun çözümünden çıkarılır.

Burada oyunun çözümünden çıkarılan stratejiler acaba optimum strateji olabilir mi şeklinde bir soru akla gelebilir. Buna şu şekilde cevap verilir; bir oyunda yer alan satır ve sütun oyuncusunun optimal stratejileri sırasıyla $\hat{r}$ ve $\hat{s}$ olsun ve k satırı ile l sütunu problemten çıkarılmış olsun ozaman

$$E(k, \hat{s}) < \max_i E(i, \hat{s})$$

yani satır oyuncusu herhangi bir strateji oynayarak elde edeceği beklenen kazanç k 'den büyük olduğu için k optimal strateji olamaz.

Kolon oyuncusu için:

$$E(\vec{r}, l) > \min_j E(\vec{r}, j)$$

yani kolon oyuncusu sahip olduğu herhangi bir j stratejini seçerse beklenen kaybı l 'den küçük olduğu için l stratejisi kolon oyuncusunun optimal stratejisi olamaz.

Oyunları çözmek için geliştirilmiş birçok yöntem vardır. Bu yöntemleri eğer noktası olan oyunlar ve olmayan oyunlar olmak üzere iki kısımda düşünebiliriz. Eğer noktası olan oyunlarda tam strateji dengesi vardır. Burada kullanılan yöntem minimaks yöntemidir. Eğer noktasının bulunmadığı oyunlarda ise oyunun çözümü, yani oyunda yer alan oyuncuların optimal stratejilerinin belirlenmesi ve oyunun değerinin bulunması, için genel olarak şu yöntemler kullanılır (Esin, 2003).

1. Grafiksel yöntem
2. Cebirsel yöntem
3. Matris yöntemi
4. Doğrusal programlama yöntemi

2.6.3.1 Minimaks Yöntemi

Bu yöntemde, ödemeler matrisinin satırları oyuncuların birinin stratejilerini, kolonları ise diğer oyuncuların stratejilerini gösterir. Rasyonel davranan iki oyuncu kendisi için en iyi stratejiyi belirlemek ister. Bunun için satır oyuncusu seçeceği her i stratejisine karşılık kolon oyuncusunun bu i . satırda yer alan en küçük ödemeye karşılık gelen stratejiyi seçeceğini bilir. Buna göre satır oyuncusu her bir satırdaki en küçük ödemeleri belirler, yani sadece kendi stratejileriyle belirlediği minimum kazançlardan maksimum olanını seçmek ister. Satır minimumları içerisinde maksimumun seçildiği bu yöntem maksimin yöntemi denir. Benzer şekilde kolon oyuncusu ise rakibine yapacağı maksimum ödemeler içerisinde minimum olanını tercih eder, bu yöntem ise minimaks yöntemi denir. Bu iki değer birbirine eşit ise, maksimin=minimaks, oyunun eğer noktası vardır. Oyunun eğer noktası ise aynı zamanda oyunun değerine eşittir. Aşağıda verilen ödemeler matrisi için minimaks yöntemini uygulayalım.

A oyuncusunun m tane, B oyuncusunun n tane stratejisinin olduğu ödemeler matrisi genel olarak aşağıdaki gibidir.

$$\begin{array}{c}
 B_1 \quad B_2 \quad \dots \quad B_n \\
 \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_M \end{array} \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right]
 \end{array}$$

İlk olarak satır oyuncusu için maksimin değerini hesaplayalım “i” satır oyuncusunun stratejilerinden herhangi birini ve “j” ise kolon oyuncusunun stratejilerinden herhangi birini gösteren indis olsun. Satır oyuncusu her bir satır için satırlarda yer alan tüm elemanlar içerisinde en küçük olanı belirleyip matrisin sağına yazar. Bu değeri a_i ile gösterelim. a_i satırlardaki en küçük değer olur.

$$a_i = \min_j a_{ij}$$

Daha sonra satır oyuncusu a_i kolonundaki satır minimumları içerisinde maksimumu seçecektir.

$$a = \max_i \min_j a_{ij}$$

Bulunan bu a_i değeri oyunun maksimin değeri olmaktadır (Neumann ve Morgenstern, 1967).

Kolon oyuncusu ise kaybını minimum yapmak istediğinden öncelikle stratejilerinin her biri için maksimum kaybı bulması gerekir.

$$b_j = \max_i a_{ij}$$

Daha sonra bu maksimum kayıplar arasından minimum olanı seçecektir.

$$b = \min_j \max_i a_{ij}$$

Bulunan b değeri oyunun minimaks değeridir. b , kolon oyuncusunun kabul edebileceği en yüksek, a ise satır oyuncusunun kabul edebileceği en düşük değerler olduğundan, oyunun değeri “ v ” bu iki değer arasında yer alır (Özdil, 1998).

$$a \leq v \leq b$$

Maksimin=minimaks değerleri eşit ise oyun, eğer noktalı (tepe noktalı) oyundur ve oyunun değeri maksimin ile minimaks değerini belirleyen stratejilerin kesim noktasındaki ödeme değeridir.

Eğer oyunda maksimin $\neq$ minimaks ise oyunun eğer noktası yoktur. Bu durumda tam strateji dengesine ulaşılamaz. Bunun için oyunun değişik aşamalarında farklı stratejiler seçilerek karma strateji dengesi aranır. Buna göre herhangi bir oyunu çözerken öncelikle oyunun tepe noktası olup olmadığına bakmamız gerekir. Eğer noktası olmayan oyunlar için daha güçlü çözüm yöntemleri geliştirilmiştir. Bu yöntemler eğer noktasının varlığı halinde de kullanılabilir.

2.6.3.2 Grafik Yöntem

Bu yöntem genellikle $2 \times n$ ve $m \times 2$ boyutlu matris oyunlarında kullanılır. Burada 2 stratejiye sahip olan oyuncunun stratejilerden birini p değerini $1-p$ olasılığıyla seçtiği kabul edilir. Daha sonra diğer oyuncu her bir stratejisini seçtiğinde, 2 stratejiye sahip oyuncuya yapacağı beklenen ödemeler p cinsinden hesaplanır. Satır oyuncusunun 2 tane stratejisi ve sütun oyuncusunun n tane stratejisi olduğunu kabul edersek, sütun oyuncusunun her bir stratejisine karşı satır oyuncusuna yapacağı beklenen ödemeleri şu şekilde hesaplarız.

$$p_j(p) = E((p, (1-p)), j), \quad j=1,2,3, \dots, n, \quad 0 \leq p \leq 1$$

Burada sütun oyuncusunun her stratejisine karşı A'nın (satır oyuncusu) elde edeceği beklenen kazançları gösteren lineer fonksiyonlar elde edilir. Eğer A oyuncusu optimal stratejisini oynar ise B (kolon oyuncusu) oyuncusunun oynayacağı strateji, oyunun değerinden, v , daha az kazandırabilecek bir strateji olmadığından B

oyuncusunun her tam stratejisi için hesaplanan beklenen değerler oyunun değerinden ya büyük yada oyunun de eşit olmalıdır. Buna göre

$$\begin{aligned} p_1(p) &= E(p, (1-p), 1) \geq v \\ p_2(p) &= E(p, (1-p), 2) \geq v \\ &\vdots \\ p_n(p) &= E(p, (1-p), n) \geq v \end{aligned}$$

Ayrıca p olasılık değeri olduğu için $0 \leq p \leq 1$ olmalıdır. Satır oyuncusu kendi kazancını maksimum yapmak istediği için oyunun değerini mümkün olduğu kadar büyük yapacak p olasılığını seçmeye çalışır (Öztürk, 1994).

Benzer şekilde sütun oyuncusunun iki stratejisi var ise bu defa satır oyuncusunun tam stratejilerini oynaması halinde kolon oyuncusuna yapılacak beklenen ödemeler hesaplanır. Buna göre kolon oyuncusu optimal stratejisini oynarsa satır oyuncusunun oyunun değerinden daha fazla kazanabileceği stratejisi olmadığı için beklenen ödemeler oyunun değerinden küçük yada ona eşit olmalıdır. Ödemeler matrisi kolon oyuncusunun kayıplarını gösterdiği için kolon oyuncusu oyunun değerinin mümkün olduğunca küçük olmasını isteyecektir. Elde edilen eşitsizliklerin yatay ekseninde x dikey ekseninde v olacak şekilde grafiği çizilir. Bu grafikteki kısıtların sağlandığı uygun bölgeyi maksimum yapan nokta oyunun değerini vermektedir.

2.6.3.3 Cebirsel Yöntem

Cebirsel yöntemle oyunları çözmek için denklem ve eşitsizlikleri bir arada çözmek gerekir (Esin, 2003). Bunun için aşağıdaki ödemeler matrisine göre eşitsizlikleri oluşturalım.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} B \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Burada satır oyuncusu A'nın $A_1, A_2, \dots, A_m$ olmak üzere m tane stratejisi vardır. Kolon oyuncusu B'nin ise $B_1, B_2, \dots, B_n$ olmak üzere n tane stratejisi vardır.

Oyunu çözmek için satır ve sütun oyuncusunun optimal karma stratejilerini bulmak gerekir. Satır oyuncusu için olasılıklar toplamı

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$$

Kolon oyuncusu için olasılıklar toplamı,

$$q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1$$

olmalıdır.

Satır oyuncusu optimal stratejisini seçerse, kolon oyuncusunun her bir stratejisine karşı satır oyuncusunun ortalama kazancı (beklenen kazancı)

$$a_{1j} p_1 + a_{2j} p_2 + \dots + a_{mj} p_m$$

olacaktır. Burada satır oyuncusu rakibi hangi stratejiyi seçerse seçsin beklenen kazancı oyunun değerinden küçük olamaz. Buna göre

$$a_{11} p_1 + a_{21} p_2 + \dots + a_{m1} p_m \geq v$$

$$a_{12} p_1 + a_{22} p_2 + \dots + a_{m2} p_m \geq v$$

.

.

.

$$a_{1n} p_1 + a_{2n} p_2 + \dots + a_{mn} p_m \geq v$$

genel olarak

$$a_{1j} p_1 + a_{2j} p_2 + \dots + a_{mj} p_m \geq v$$

$$j=1,2,\dots,n$$

yazabiliriz. Benzer şekilde kolon oyuncusu için satır oyuncusunun her stratejisine karşı beklenen kazancı oyunun değerinden büyük olmamalıdır.

$$a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + \dots + a_{in}q_n \leq v \quad i=1,2,\dots,m$$

Bu eşitsizliğe p ve q'nun pozitif olma koşulunu eklersek oluşturmamız gereken denklemleri aşağıdaki gibi özetleyebiliriz.

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1 \quad p_i \geq 0$$

$$q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1 \quad q_j \geq 0$$

$$a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + \dots + a_{mj}p_m \geq v \quad j=1,2,\dots,n$$

$$a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + \dots + a_{in}q_n \leq v \quad i=1,2,\dots,m$$

Buna göre yukarıdaki eşitsizlikleri eşitlik kabul edip denklem sistemini ortak çözersek her iki oyuncu için optimal stratejileri belirlemiş oluruz.

2.6.3.4 Matris Yöntemi

Eğer noktası olmayan iki kişilik sıfır toplamlı oyunların çözümünde kullanılan yöntemler içerisinde uygulanması en pratik olan çözüm yöntemi matris yöntemidir. Bu yöntemde oyuncuların seçeceği optimum stratejiler ve oyunun değeri bir takım formüller yardımıyla hesaplanmaktadır. Oyunda yer alan her bir oyuncunun iki stratejisi olduğunu kabul edelim. Bu durumda satır oyuncusu X'in strateji vektörü $X=(x,1-x)$, kolon oyuncusunun strateji vektörü ise $Y=(y,1-y)$ olur. Ödemeler matrisi ise,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

olarak yazılır.

Teorem 2.7: Bir 2×2 'lik ödemeler matrisli oyunda tam optimal strateji olmadığını kabul edelim. Eğer

$$x^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}, \quad y^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}$$

o zaman $X^* = (x^*, 1 - x^*)$ ve $Y^* = (y^*, 1 - y^*)$ sırasıyla satır ve sütun oyuncuları için optimal stratejilerdir. Oyunun değeri ise

$$v(A) = E(X^*, Y^*) = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}$$

dir.

Teoremin matris oyunlarına çözüm olmasını açıklamaya çalışalım:

$$E(X, Y) = XAY^T$$

şeklinde yazılır. Bu ifadeyi açık bir şekilde yazacak olursak

$$\begin{aligned} f(x, y) = E(X, Y) &= (x, 1 - x) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1 - y \end{pmatrix} \\ &= x[y(a_{11} - a_{21}) + (1 - y)(a_{12} - a_{22})] + a_{12} - a_{22} \end{aligned}$$

yazılır. Optimal tam stratejinin olmadığını varsayarsak f 'nin uç noktaları $0 < x, y < 1$ aralığında yer alır. Eğer f fonksiyonunun x ve y ye göre kısmi türevlerini alıp sıfıra eşitlersek tüm olası kritik noktaları buluruz.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ya + b = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xa + g = 0$$

$$a = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}), \quad b = (a_{12} - a_{22}), \quad g = (a_{21} - a_{22})$$

Eğer $a = 0$ ve $b, g \neq 0$ ise kısmi türevler sıfırdan farklı olur. Bu durumda tam optimal strateji vardır. Teoremdaki varsayımda tam optimal strateji dışlandığı için kısmi türevlerin sıfıra eşit olduğu yerde çözümü gerçekleştireceğiz.

$$x^* = -\frac{g}{a} = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}$$

$$y^* = -\frac{b}{a} = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}$$

Bunun bir eğer noktası olduğunu göstermek için Hessian Matrisi oluşturmamız gerekir.

$$H = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{vmatrix}$$

$\text{Det}(H) = -a^2 < 0$, $a = 0$ olmadığı zaman, bu determinant tanımsızdır. Bu koşullar altında kritik nokta bir eğer noktasıdır (Barron, 2008).

Yukarıdaki formülleri elde etmede, daha pratik bir yol olarak, aşağıdaki formüllerden yararlanılır.

$$X^* = \frac{(1 \ 1) \text{adj}A}{(1 \ 1) \text{adj}A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \quad Y^* = \frac{\text{adj}A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{(1 \ 1) \text{adj}A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$v(A) = \frac{\det(A)}{(1 \ 1) \text{adj}A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Burada

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

ve

$$\text{Det}(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

X^* : satır oyuncusu için optimal strateji vektörü

Y^* : kolon oyuncusu için optimal strateji vektörü

$v(A)$ ise oyunun değerini vermektedir.

Matris yöntemiyle oyunu çözmeye kullanılan diğer bir yaklaşım ise tersi alınabilir ödemeler matrisinin varlığı durumunda geçerli olan bir çözüm yöntemidir. Bu yöntemin uygulanabilmesi için aşağıdaki koşullar sağlanmalıdır (Barron, 2008).

1) $A_{n \times n}$ ve A^{-1} olan bir ödemeler matrisi

2) $J_n A^{-1} J_n^T \neq 0$

3) $v(A) \neq 0$

Burada $J_n = (1 \ 1 \ \dots \ 1)_{1 \times n}$

$X = (x_1 \ \dots \ x_n)$ ve $Y = (y_1 \ \dots \ y_n)$ ise,

$$v = \frac{1}{J_n A^{-1} J_n^T}, \quad X = \frac{J_n A^{-1}}{J_n A^{-1} J_n^T}, \quad Y^T = \frac{A^{-1} J_n^T}{J_n A^{-1} J_n^T}$$

Eğer $x_i \geq 0$, $i=1,2,\dots,n$ ve

$y_j \geq 0$, $j=1,2,\dots,n$ ise

$v = v(A)$, A matrisi için oyunun değerine eşittir ve (x,y) bir karma strateji eğer noktasıdır (Barron, 2008).

İki kişilik sıfır toplamı oyunlarda ödemeler matrisinin simetrik olması özel bir durumdur. Bu tarz özel matrislerin çözümleri için geliştirilen fikirden bahsedelim. Simetrik oyunlarda oyuncular tam olarak aynı strateji vektörlerini (kümelerini) kullanabilir. 1. oyuncunun X stratejisini kullanarak elde ettiği ödemeyi 2.oyuncu Y stratejisini kullanarak elde edilebilir. Bu tarz oyunlar $A = -A^T$ şeklinde tanımlanır (Barron, 2008). Bu koşulu sağlayan herhangi bir matris ters simetrik bir matristir. Buna göre oyuncular stratejik role sahip ise ödemeler matrisi ters simetrik bir yapıda olmalıdır. Bu yapıdaki bir oyunun çözümü için aşağıdaki teorem önerilir.

Teorem 2.8: Herhangi bir ters simetrik oyun için $v(A)=0$ ve eğer X^* 1. oyuncu için optimal strateji ise o zaman 2. oyuncu içinde optimal strateji olmalıdır.

İspat: X , 1. oyuncu için herhangi bir strateji olsun. O zaman

$$E(X, X) = -XAX^T = -XA^T X^T = -(XAX^T)^T = -XAX^T = -E(X, X)$$

Bu yüzden $E(X, X) = 0$ dır. Ayrıca kendi kendisine karşı oynanan stratejinin ödemesi de sıfıra eşittir.

(X^*, Y^*) oyun için bir eğer noktası olsun. Buna göre

$$E(X, Y^*) \leq E(X^*, Y^*) \leq E(X^*, Y), \quad \text{tüm } (X, Y) \text{ stratejileri için}$$

yazabiliriz. O zaman herhangi bir (X, Y) için

$$E(X, Y) = XAX^T = -XA^T Y^T = -(XA^T Y^T)^T = -YAX^T = -E(Y, X)$$

yazılabilir. O zaman

$$-E(Y^*, X) \leq -E(Y^*, X^*) \leq -E(Y, X^*)$$

ise

$$E(Y^*, X) \geq E(Y^*, X^*) \geq E(Y, X^*)$$

Fakat bu Y^* 'ın 1. oyuncu için ve X^* 'ın 2. oyuncu için optimal olduğunu söyler. Ayrıca $E(X^*, Y^*) = -E(X^*, Y^*)$ ise bu durumda $v(A) = 0$ dır (Barron, 2008).

2.6.3.5 İterasyon Yöntem

Pratikte çok defa bir oyunun tam çözümünü bulmak gerekli değildir, ortalama kazancı oyunun değerine yakın olan yaklaşık bir çözüm bulmak yeterli olabilir. Oyunun değeri hakkında genel bir fikir sahibi olmak matrisin basit bir analizini ve oyunun a alt değeri ile b üst değerinin tayinini mümkün kılabilir. a alt değeri ile b üst değeri aşağı yukarı birbirine eşit ise, a ve b ya götüren tam minimaks stratejileri kullanılabilir. a ve b arasındaki fark büyük ise, yaklaşık çözüm hesaplamak için iterasyon metodundan yararlanılır (Ventsell, 1965).

Yöntemin temeli her oyuncunun, geçmişin geleceğe en iyi örnek olacağı düşüncesinden hareketle, rakibinin daha önceki oyunlarına bakarak kendi en iyi stratejisini belirlemesi ilkesine dayanmaktadır. Bu yöntemde oyun birçok defa tekrarlanarak, oyunun her oynanışında her bir oyuncu rakibinin oynamış olduğu bir önceki stratejiye göre kendi en iyi stratejisini oynayarak karşılık verir. Oyun bu şekilde yeteri kadar tekrar ettiğinde oyunun aşamaları için ortalama kazançlar oyunun değerine yakınsayacak ve bütün aşamalarda tarif edilen karma stratejiler her iki oyuncunun optimal stratejisine yaklaşacaktır (Ventsell, 1965).

İterasyon yönteminin çözümünde aşağıdaki yol takip edilir (Esin, 2003).

—Oyunun kazanç matrisinden bir satır seçilir ve bu satır kazanç matrisin altına yazılır.

—Kazanç matrisin altına yazılan bu satırdaki elemanlardan en küçük (minimum) olanı koyu renkle belirtilir ve bu elemanın bulunduğu kolonun elemanları (kazanç matrisindeki) matrisin sağ tarafına yazılır.

—Matrisin sağ tarafına yazılan kolondaki elemanların en büyüğü (maksimumu) koyu renkle belirtilir ve bulunduğu satırdaki elemanlar, kazanç matrisinin altına yazmış olduğumuz satır elemanlarıyla toplanarak, tekrar kazanç matrisinin altına yazılır.

—Toplanarak yazılan bu satırdaki elemanlardan en küçüğü tekrar koyu renkle belirtilir ve bulunduğu kolondaki elemanlar matrisin sağ tarafına yazılan kolondaki elemanlarla toplanarak tekrar matrisin sağ tarafına yazılır.

—Bulduğumuz yeni kolondaki elemanların en büyüğü koyu renkle belirtilir ve kazanç matrisin altına yazılan satır elemanlarıyla toplanarak tekrar matrisin altına yazılır ve böylece devam edilir. Tabi, istenilen iterasyon sayısına kadar.

—Kolon ve satırdaki elemanların birbirine eşitliği durumunda bir önceki satır yada sütuna (kolona) bakılır. Eşit elemanlardan yeniden bir önceki kolon ya da satır seçilmesini gerektirenler atılır, geri kalan kolon elemanları arasından kura çekilir.

—Yaklaşık stratejiler, kolonlardaki en büyük ve satırlardaki en küçük değerlerin sayısı iterasyon sayısına bölünerek bulunur.

—Oyunun alt ve üst sınır değerleri en son kolondaki en büyük eleman ile en son satırdaki en küçük eleman tekrarlama sayısına bölünerek elde edilir.

2.6.3.6 Doğrusal Programlama Yöntemi

Oyunların doğrusal programla yöntemiyle nasıl çözüldüğünden bahsetmeden önce doğrusal programlamadan genel olarak bahsedelim.

Doğrusal programlamanın ana konusu sınırlı kaynakların alternatif faaliyetler arasında en iyi şekilde nasıl tahsis edileceği problemiyle ilgilidir. Doğrusal programlama optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılan matematiksel bir yöntemdir. Herhangi bir doğrusal programlama modelinin oluşturulması ve uygulanması için bazı varsayımların sağlanması gerekmektedir. Bu varsayımlar doğrusallık, toplanabilirlik ve kesinlik şeklinde ifade edilir. Bu varsayımlar kısaca aşağıdaki gibi açıklanabilir (Öztürk, 1994).

Doğrusallık varsayımı; amaç fonksiyonu değişkenlerinin derecelerinin 1 olması anlamına gelmektedir. Bu, girdiler ile çıktılar arasında doğrusal bir ilişkinin olduğunu gösterir. Bu durumda girdiler ve çıktılar aynı oranda artar yada azalır.

Toplanabilirlik varsayımı; doğrusal programlamada her fonksiyon ilişkin olduğu faaliyetlerin bireysel katkılarının toplamıdır. Örneğin bir ürünü üretmek için 2 saate, diğer ürünü üretmek için 3 saate gereksinim var ise bu iki ürünü birden üretmek için 5 saate gereksinim vardır.

Kesinlik varsayımı; doğrusal programlama modelinde her bir parametre kesin olarak belirlenebilmelidir. Bu ise modelin deterministik olduğunu gösterir.

Bu varsayımlardan sapmalar sonucu bazı özel doğrusal programlama türleri geliştirilmiştir. Örneğin doğrusallık varsayımının sağlanmaması durumunda kuadratik programlama geliştirilmiştir veya modeldeki girdi ve çıktıların bölünebilir olmaması durumunda tamsayılı programlama geliştirilmiştir. Oluşturulan doğrusal programlama modelinin simplex yöntemle çözümüyle, eğer varsa, optimal çözüm bulunmaktadır. Bir doğrusal programla modeli genel olarak aşağıdaki gibi gösterilir.

Amaç denklemi:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

Kısıtlar;

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq (\geq) b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq (\geq)b_2$$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdot & & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & & & \cdot \end{array}$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq (\geq)b_m$$

Ayrıca pozitiflik koşulu;

$$x_j \geq 0 \quad (j=1,2,\dots,n))$$

Burada;

x_j : n karar değişkenini

c_j : j değişkenine ait amaç denklemi katsayılarını

a_{ij} : i kaynağının j değişkenine ilişkin teknik katsayıyı

b_i : i kaynağının kullanılabilecek toplam sabit değerini gösterir.

Oyun matrisinin doğrusal programlama modeline dönüştürülmesi oyunun çözümünün ilk adımını oluşturmaktadır. İki kişilik sıfır toplamlı oyunlar her ne özellikte olursa olsun ister karma stratejili ister tam stratejili veya oyuncuların sahip olduğu strateji sayıları ister eşit, isterse farklı iki yada daha fazla stratejiden oluşsun doğrusal programlama yöntemi ile çözüme, eğer varsa, ulaşılabilir. Aşağıda verilen oyun matrisinin genel hali için doğrusal programlama modelinin nasıl kurulacağını açıklamaya çalışalım. İlk olarak satır oyuncusuna göre oyunun doğrusal programlama modeline nasıl dönüştürüleceğinden bahsedelim (Öztürk, 1994).

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_M \end{array} \begin{array}{c} B_1 \quad B_2 \quad \dots \quad B_n \\ \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right] \end{array} \end{array}$$

Her oyunda bir tek çözüm değeri vardır. Bu değer oyunun çözüm değeri olarak adlandırılır.

A oyuncusu için $x_1, x_2, \dots, x_m$ den oluşan ve $x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1$ koşulunu sağlayan öyle bir karma strateji kümesi vardır ki, A oyuncusu uzun dönemde sahip olduğu $A_1, A_2, \dots, A_m$ stratejilerini sırasıyla $x_1, x_2, \dots, x_m$ olasılıklarıyla oynadığında oyunun değeri kadar kazanç elde edecektir.

A oyuncusu hangi stratejiyi ne olasılıkla oynayacağını belirlemek için oyuncu maksimin ilkesinden hareketle minimum kazançlarından maksimumu veren stratejiyi seçecektir. Benzer şekilde B oyuncusu da maksimum kayıpları arasından minimum olanı veren stratejiyi seçecektir. Buna göre B oyuncusu herhangi bir j.nci stratejisini seçmesi halinde, A oyuncusunun beklenen kazancı,

$$a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \dots + a_{mj}x_m \quad j=1,2,\dots,n$$

toplamı kadar olacaktır. Bu kazanç, maksimin ilkesi gereği oyunun değeri kadar yada ondan daha fazla olabilir. Bu durum B oyuncusunun her bir stratejisi için aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \geq v$$

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \geq v$$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \geq v$$

Ayrıca olasılıklar toplamının 1'e eşit olması koşulunu da eklersek,

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1$$

Yukarıdaki eşitsizlikler ve olasılıklar toplamının 1 e eşit olması koşulu yardımıyla A oyuncusu için doğrusal programlama modelini kuracak olursak, öncelikle bütün eşitsizlikleri 1'e eşit şekle dönüştürebilmek için eşitsizliklerin her iki tarafı $\frac{1}{v}$ ile

çarpılmalıdır ayrıca eşitsizliklere uygulanan bu dönüşüm modelin tamamına uygulanmalıdır. Buna göre modeli yeniden oluşturacak olursak,

$$a_{11}(x_1/v) + a_{21}(x_2/v) + + a_{m1}(x_m/v) \geq (v/v)$$

$$a_{12}(x_1/v) + a_{22}(x_2/v) + + a_{m2}(x_m/v) \geq (v/v)$$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$a_{1n}(x_1/v) + a_{2n}(x_2/v) + + a_{mn}(x_m/v) \geq (v/v)$$

Ayrıca,

$$(x_1/v) + (x_2/v) + + (x_m/v) = 1/v$$

Elde edilir. Burada $d_i = \frac{x_i}{v}$ dönüşümü yapılırsa

$$a_{11}d_1 + a_{21}d_2 + + a_{m1}d_m \geq 1$$

$$a_{12}d_1 + a_{22}d_2 + + a_{m2}d_m \geq 1$$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$a_{1n}d_1 + a_{2n}d_2 + + a_{mn}d_m \geq 1$$

ayrıca,

$$d_1 + d_2 + + d_m = \frac{1}{v}$$

olacaktır. Ödemeler matrisi A (sıra) oyuncusunun beklenen kazançlarına göre oluşturulduğu için matristeki ödeme değerlerinin büyük olması A oyuncusunun lehine olduğu için bu oyuncu oyunun değerini, v, maksimum yapmaya çalışacaktır. v'nin maksimize edilmesi $\frac{1}{v}$ 'nin minimize edilmesi ile eş anlamlı olduğundan doğrusal programlama modelinin amaç fonksiyonu minimizasyon olacaktır. Buna göre model,

$$\text{Min } Z = d_1 + d_2 + \dots + d_m = \frac{1}{v} = v_0$$

Kısıtlar

$$a_{11}d_1 + a_{21}d_2 + \dots + a_{m1}d_m \geq 1$$

$$a_{12}d_1 + a_{22}d_2 + \dots + a_{m2}d_m \geq 1$$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$a_{1n}d_1 + a_{2n}d_2 + \dots + a_{mn}d_m \geq 1$$

ve olasılıkların negatif olamayacağından hareketle, pozitiflik koşulu

$$d_1, d_2, \dots, d_m \geq 0$$

olacak şekilde A oyuncusu için doğrusal programlama modeli elde edilmiş olur.

Problem d_i için çözüldükten sonra optimal stratejileri, x_i , bulmak için

$$x_i = v d_i = d_i / v_0$$

dönüşümü yapılır.

B oyuncusu için doğrusal programlama modeli benzer şekilde $y_1, y_2, \dots, y_n$ den oluşan ve $y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1$ olacak şekilde öyle bir karma stratejileri vardır ki B oyuncusu sahip olduğu stratejileri sırasıyla $y_1, y_2, \dots, y_n$ frekansı ile oynadığında oyunun değeri kadar ödeme yapacaktır. Bu koşullara uygun olarak B oyuncusu $y_1, y_2, \dots, y_n$ değerlerini bulmaya çalışacaktır. Bunun için ilk olarak A oyuncusunun seçebileceği tüm olası stratejilere göre B oyuncusunun beklenen kaybı hesaplanmalıdır. B oyuncusu minimaks ilkesi gereğince maksimum kayıplarını minimize etmek isteyeceğinden hesaplanan değerleri oyunun değerinden küçük yada en kötü ihtimalle ona eşit yapmaya çalışacaktır. Bu durum aşağıdaki gibi ifade edilir,

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \leq v$$

$$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + + a_{2n}y_n \leq v$$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + + a_{mn}y_n \leq v$$

Ayrıca olasılıklar toplamı 1'e eşit olması koşulunu da aşağıdaki gibi belirtecek olursak,

$$y_1 + y_2 + + y_n = 1$$

yazabiliriz. Benzer şekilde eşitlik ve eşitsizliklerin her iki tarafı $\frac{1}{v}$ ile çarpılacak olursa,

$$a_{11}(y_1 / v) + a_{12}(y_2 / v) + + a_{1n}(y_n / v) \leq (v / v)$$

$$a_{21}(y_1 / v) + a_{22}(y_2 / v) + + a_{2n}(y_n / v) \leq (v / v)$$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$a_{m1}(y_1 / v) + a_{m2}(y_2 / v) + + a_{mn}(y_n / v) \leq (v / v)$$

ve

$$y_1 / v + y_2 / v + + y_n / v = 1 / v$$

olacaktır. Benzer şekilde $f = \frac{y_j}{v}$ dönüşümü yapacak olursak model aşağıdaki gibi olacaktır.

$$a_{11}f_1 + a_{12}f_2 + + a_{1n}f_n \leq 1$$

$$a_{21}f_1 + a_{22}f_2 + + a_{2n}f_n \leq 1$$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}f_1 + a_{m2}f_2 + \dots + a_{mn}f_n \leq 1 \end{matrix}$$

ve

$$f_1 + f_2 + \dots + f_n = 1/v$$

B oyuncusu için oyunun değeri A oyuncusuna yapacağı ödemeyi yani kaybını gösterdiği için oyunun değeri v 'yi minimize etmek isteyecektir. v 'nin minimizasyonu $1/v$ 'nin maksimizasyonu anlamına geldiği için modelin amaç fonksiyonu maksimizasyon amacına göre oluşturulacaktır. Buna göre model aşağıdaki gibi olacaktır,

$$MaxZ = f_1 + f_2 + \dots + f_n = 1/v$$

Kısıtlar

$$a_{11}f_1 + a_{12}f_2 + \dots + a_{1n}f_n \leq 1$$

$$a_{21}f_1 + a_{22}f_2 + \dots + a_{2n}f_n \leq 1$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

$$a_{m1}f_1 + a_{m2}f_2 + \dots + a_{mn}f_n \leq 1$$

ve olasılıkların pozitif olma koşulunu da modele ilave edecek olursak

$$f_1, f_2, \dots, f_n \geq 0$$

olarak, B oyuncusu için model elde edilmiş olur. Bu model simplex yöntemiyle çözülerek B oyuncusu için optimal strateji vektörü hesaplanmış olur.

Burada dikkat edilmesi gereken bir husus B oyuncusu için oluşturulan modelin dualinin A oyuncusu için oluşturulan model olduğu gerçeğidir. Dualite kavramını şu şekilde ifade edebiliriz. Her doğrusal programlama modelinin ilişkili olduğu bir ikiz problemi vardır. Esas problem primal problem olarak adlandırılırken, diğer probleme dual problem denir. Eğer bu iki problem arasında dualite özelliği varsa birinin optimal çözümü diğerinin de optimal çözümüdür (Öztürk, 1994). Doğrusal programlamadaki

simetri özelliğinden dual problemin duali primal problemdir. Bu yüzden hangi modelin primal hangisinin dual olduğunun pek bir önemi yoktur. Eğer verilen bir doğrusal programlama modeli, primal model, maksimum ise duali minimumdur veya terside geçerlidir. Primal modelin dual modeli ile arasında aşağıdaki gibi ilişkiler ortaya çıkmaktadır. (Öztürk, 1994).

1. Primal problem maksimum olduğunda onun duali minimumdur veya tersi de geçerlidir.
2. Kısıtların yönü $\leq$ olan maksimum primal problemin dualinin kısıtlayıcıları $\geq$ dir.
3. Minimum dual problemin değişkenlerinin amaç fonksiyonu katsayıları, primal problemin sağ taraftaki sabit parametreler olmaktadır. Tersinden, minimum dual problemin sağ taraf sabitleri primal modelin amaç fonksiyonu katsayıları olmaktadır.
4. Primal modelin kısıtlarının katsayıları A matrisi ile ifade ettiğimizde dual problemin kısıtlayıcı matrisi A matrisinin transpozu olmaktadır.
5. Dual değişken sayısı primal problemin kısıtlayıcı denklem sayısına eşittir. Tersine, dual modelin kısıt sayısı, primal modelin değişken sayısına eşittir.
6. Her iki problemde de yer alan değişkenler pozitif değerlidir.

Buna göre B oyuncusu için oluşturulan model primal model ise A oyuncusu için oluşturulan model de bu modelin duali olmaktadır. Buna göre problem B oyuncusu için çözülürse A oyuncusu için de çözmeye gerek yoktur. Dualiteden dolayı bu oyuncu içinde oyunun çözüm değeri aynı olacaktır. B oyuncusu için çözülen problemin simpleks çözüm matrisinin aylak ve artık değişkenlerinin altındaki $c_j - z_j$ satırındaki elemanlar A oyuncusunun optimal stratejilerinin değerini yani dual değişken değerlerini vereceğinden problem A oyuncusu içinde çözülmüş olur. Uygulamada kısıtların $\leq$ yönlü olduğu minimizasyon problemleri yapay değişken gerektirmediği için çözüm kolaylığı açısından tercih edilir (Öztürk,1994).

Primal model olan kolon oyuncusu için oluşturduğumuz model için simplex yönteminin adım adım nasıl uygulandığı açıklamaya çalışalım. Satır oyuncusu için çözüm, dualiteden dolayı, kolon oyuncusu için elde edilen çözümden doğrudan elde edilebilir (Barron, 2008).

1. Doğrusal programlama modelini aylak değişkenler kullanarak doğrusal denklem sistemine dönüştür.

2. Başlangıç simpleks tablosu oluştur.

Örneğin $A_{3 \times 3}$ ödeme matrisi için başlangıç simpleks tablosu aşağıdaki gibi oluşturulur.

Tablo 2.1: Başlangıç Simpleks Tablosu

cj	1 y_1	1 y_2	1 y_3	0 S_1	0 S_2	0 S_3	Çözüm
S_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	1	0	0	b_1
S_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	0	1	0	b_2
S_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	0	0	1	b_3
z_j	0	0	0	0	0	0	0
$c_j - z_j$	1*	1	1	0	0	0	

3. Pivot kolonu seç.

En alt satırdaki sayılar içerisinde, çözüm kolonu hariç, mutlak değer olarak en büyük olanı seç. Bu seçilen kolon pivot kolonu olur. Eğer iki olası seçim varsa, ikisinden birisini seç. Eğer alt satırdaki tüm sayılar sıfır yada pozitif ise, o zaman sonuca ulaşılmıştır. Temel çözüm optimal çözümdür.

4. Aşağıdaki kurallara göre pivot kolondaki pivot elemanı seç.

a. Pivot eleman daima pozitif bir sayı olmalıdır. Sıfır ve negatif sayılar simpleks yönteminde kural dışıdır.

b. Pivot kolondaki pozitif her bir a elemanı için, alt satır hariç, $\frac{b}{a}$ oranını hesapla, burada b tablonun en sağında yer alan kolondaki ilgili satıra karşılık gelen eleman.

c. En küçük oranı seç. Bu en küçük oranın olduğu satıra karşılık gelen pivot kolonundaki eleman, a, pivot elemanıdır.

5. Pivot elemanı 1, pivot kolonundaki diğer tüm elemanları sıfır yapacak şekilde indirgeme yapılır. Pivot elemanın yer aldığı satırdaki elemana karşılık gelen sol taraftaki $x (S_i)$ değeri ile ilk satırdaki (amaç satırı) x değişkenini yer değiştir. Bu sonuçlara göre sonraki tabloyu oluştur.

6. En alt satırda, sonuç kolonu hariç, negatif değer kalmayana kadar 3. 4. ve 5. adımları sırasıyla tekrar et. En alt satırda pozitif sayı kalmadığı zaman optimal çözüme ulaşılmış olur.

7. Çözüm şu şekildedir, 1. kolondaki her bir değişkenin çözüm değeri son kolonda yer alır. Diğer tüm değişkenler sıfırdır. Optimal amaç değeri son satır ve sütundaki değerdir.

2.7. İki Kişilik Sıfır Toplamlı Olmayan Oyunlar

Sıfır toplamlı olmayan oyunlar genel olarak işbirlikçi ve işbirlikçi olmayan oyunlar olarak iki gruba ayrılır. Oyuncular arasında iki çeşit işbirliğinden söz edilebilir. Bunlardan ilki stratejik işbirliğidir. Stratejik işbirliğinden kasıt, oyuncular oyuna başlamadan önce her iki taraf için bağlayıcı olan bir anlaşma yapmaktır. İkincisi ise oyunun sonunda ortaya çıkan ödentileri de paylaşarak tam anlamda işbirliği yapmaktır. Bu işbirliği çeşitlerinden ilkinin amacı işbirliği yapan iki tarafında kazancını arttırmak, ikincisinin amacı ise bir oyuncunun yada oyuncu grubunun diğer oyuncuyu seçeceği stratejilerde işbirliğine teşvik etmektir. Böylece oyunun sonunda her iki taraf için daha iyi bir kazanca ulaşmak amaçlanır. Sıfır toplamlı iki kişilik oyunlar işbirlikçi değildir. Çünkü işbirliği hiçbir zaman her iki oyuncuya da bir avantaj sağlamaz. Toplam ödeme daima sıfırdır ve herhangi bir strateji kombinasyonu ile arttırılamaz (Öztürk,1994). Diğer bir husus işbirlikçi oyunlarda eğer oyuncuların birbirini aldatma ihtimali varsa yine işbirliği yapılmayabilir (Morris, 1994).

2.7.1 İşbirlikçi Olmayan Oyunlar

İşbirlikçi olmayan oyunlar ile ilgili verebileceğimiz en bilinen örnek mahkûmlar ikilemidir.

Örnek 2.1 (Mahkûmlar İkilemi): Bu oyunda Bülent ve Cem adında iki oyuncu olsun ve bu oyuncuların her birinin iki stratejisi olsun. Bu stratejiler; C: işbirliği yapmak ve D: işbirliği yapmamaktır. Eğer her iki oyuncuda D stratejisini oynarsa o zaman her ikisi de 5 yıl hapis yatacak. Eğer her iki oyuncu C'yi seçerse bu defa 2'şer yıl hapis yatacaklar. Fakat oyunculardan birisi D, diğeri C seçerse bu defa, D'yi seçen 1 yıl, C'yi seçen 10 yıl yatacak. Eğer oyuncular işbirliği yapabilseydi her ikisi de C'yi seçerdi. Böylece her ikisi de 2 yıl hüküm giyerdi. Diğer taraftan oyun işbirliksiz ise bu defa her iki oyuncu için en iyi seçenek D'dir. Bu oyunda mahkûmların yüzleşmiş oldukları ikilem işbirliği yapmalı mıyım, yoksa yapmamalı mıyım kararıdır. Bu oyunda dikkat edilmesi gereken başka bir nokta ödemelerin iki oyuncu arasında transfer

edilemeyeşidir. Yani ödemeleri bir havuzda toplayıp daha önce yapılmış bir anlaşmaya göre paylaşma olasılığı yoktur (Morris, 1994).

İki kişilik normal formdaki oyunların matrislerle ifade edildiğinden daha önce bahsetmiştik. Sıfır toplamı olmayan oyunlar ise “ikili matris”(bi-matrix) ile ifade edilir. Genel olarak, C bir ikili matris ise bu matrisin c_{ij} elemanı bir sıralı ikiliden meydana gelir. Bu sıralı ikililerin elemanlarından ilki; satır oyuncusu, P_1 , i . stratejisini oynadığında ve sütun oyuncusu da j . stratejisini oynadığında, P_1 oyuncusu için ortaya çıkan ödemeye karşılık gelir. Benzer şekilde ikinci eleman ise P_2 oyuncusuna yapılacak ödemeyi gösterir. Eğer oyun sıfır toplamı olsaydı matristeki bu sayı çiftlerinin toplamı sıfır olurdu ve matristeki elemanlar satır oyuncusu için kazancı sütun oyuncusu için kaybı (yani ilk elemanın negatif işaretlisi) gösterirdi. Bu bilgiler ışığında mahkûmlar ikilemi için ikili matris aşağıdaki şekilde verilir.

$$\begin{array}{c} \text{Cem} \\ \text{Bülent} \begin{bmatrix} (-2,-2) & (-10,-1) \\ (-1,-10) & (-5,-5) \end{bmatrix} \end{array}$$

Bu konuyla ilgili teoride önemli bir yeri olan iki oyun daha vardır.

Örnek 2.2 (Battle of the Buddies), (Morris,1994). Bu oyunda Norm ve Cliff adında iki arkadaş gece eğlencesi için farklı tercihlere sahiptir. Norm güreş maçına gitmeyi tercih ederken Cliff at yarışına gitmeyi tercih eder. Her ikisi de kendi seçimine yalnız gitmekten hoşlanmıyor. Diğer arkadaşının seçimine birlikte gitmeyi kendi seçimine yalnız gitmeye tercih ediyor. Meydana gelebilecek olası her durum için sayısal değerler verecek olursak; eğlenceye yalnız gitmek için “0”, arkadaşının seçimine beraber gitmek için “1” ve kendi seçimine arkadaşınla gitmek için “5” değerlerini verelim. Bu sayıları mutluluk oranı gibi düşünebiliriz. Bu durumu bir oyun olarak ifade edecek olursak, stratejiler; W güreş maçına gitmek, R at yarışına gitmek olarak sıralanır. Oyunu işbirliksiz olarak düşünelim bunun için her bir oyuncunun tercihlerini birbirinden bağımsız ve aynı anda yaptıklarını varsayalım. Bu durumda ikili matris aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{array}{cc} & \text{Cliff} \\ & W \quad R \\ \text{Norm} \begin{array}{c} W \\ R \end{array} & \begin{bmatrix} (5,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,5) \end{bmatrix} \end{array}$$

Örnek 2.3 (Chicken), (Morris, 1994). Bu oyunda boş ve düz bir yolda giden iki genç karşılaşır. Yolun ortasındaki düz çizgi üzerinde birbirine doğru arabalarını hızla sürerler. Eğer sürücülerden birisi diğerinden önce direksiyonu çevirirse, o zaman ilk direksiyonu çeviren “tavuk” olarak adlandırılır ve itibar kaybeder. Eğer her ikisi de direksiyonu çevirirse ikisinin de cesur olmadığı düşünülür. Eğer direksiyonu çevirmezlerse her ikisi de ölür. Ortaya çıkan durumlar için keyfi sayısal değerler atayalım. Ölüm “-10”, tavuk olmak “0”, diğer oyuncu direksiyonu çevirirken direksiyonu çevirmemek “5”, aynı anda direksiyonu çevirmek “3” ile numaralandırılsın. Bu oyun için ikili matris,

$$\begin{array}{cc} & S \quad D \\ \begin{array}{c} S \\ D \end{array} & \begin{bmatrix} (3,3) & (0,5) \\ (5,0) & (-10,-10) \end{bmatrix} \end{array}$$

şeklinde oluşturulur. Burada S direksiyonu çevirme, D ise çevirmeme stratejisini ifade etmektedir. Bu oyunda oyuncular işbirliği yaparak her ikisi de direksiyonu çevirmeyi tercih eder. Bu gibi oyunlar için oyuncuların hangi stratejiyi seçeceği ödeme değerlerine oldukça bağlıdır. Eğer matristeki (3,3) elemanı (2,2) olsaydı o zaman oyuncular kimin direksiyonu çevirip çevirmeyeceğine karar vermek için yazı tura atarak işbirliği yapması oyuncular için daha iyi bir sonuç ortaya çıkarırdı (Morris,1994). Bu durumu şu şekilde açıklayabiliriz; oyununda beklenen kazançları hesaplamak için oyunun birkaç kez tekrarlanması gerektiğinden daha önce bahsetmiştik. Bu durumda oyunun en az iki defa oynandığını kabul edelim. Matristeki elemanın (3,3) olması durumunda her bir oyuncunun kazancı, bu durumda oyuncular direksiyonu çevirmeyi tercih eder, $(3,3)+(3,3)=(6,6)$ dır. Bu durumda oyuncuların ortalama kazançları 3’dür. Matristeki elemanın (2,2) olması durumunda ise eğer her ikisi de direksiyonu çevirmeyi seçerse oyuncuların elde edeceği kazanç $(2,2)+(2,2)=(4,4)$ ve ortalama kazanç 2 olarak hesaplanır. Kimin direksiyonu çevireceğine 1/2 olasılığı ile karar verirlerse, o zaman

$(0,5)+(5,0)=(5,5)$ ve ortalama 2,5 kazanç elde ederler. Burada son durum her iki oyuncu için daha fazla kazanç getirdiği için oyuncular bu durumu tercih edecektir.

2.7.1.1 Baskın Strateji Dengesi

Sıfır toplamlı olmayan normal formda ve işbirliğinin olmadığı bazı oyunlar için tam baskın strateji dengesine ulaşılabilir. Bunun için ilk olarak tam domine edilen strateji tanımını verelim.

Tanım 2.7: $G=\{S_1, S_2, \dots, S_n; p_1, p_2, \dots, p_n\}$ normal formda bir oyun, S_i i. oyuncu için strateji kümesini p_i ise i. oyuncu için beklenen kazancı göstermektedir. s_i' ve s_i'' , i oyuncusu için mevcut olan iki farklı strateji ve s_i' ve s_i'' S_i kümesinin elemanı olsun. Eğer diğer oyuncuların mevcut strateji kombinasyonlarının her biri için i oyuncusunun s_i' oynayarak elde ettiği kazanç, i oyuncusunun s_i'' nü oynayarak elde ettiği kazançtan tam olarak küçük ise o zaman s_i' , s_i'' tarafından tam olarak domine edilir. Bu durum diğer oyuncuların strateji kümeleri $S_1, S_2, \dots, S_n$ den elde edilen her $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ için

$$p_i(s_1, \dots, s_i', \dots, s_n) < p_i(s_1, \dots, s_i'', \dots, s_n)$$

şeklinde tanımlanır.

Bu tanımdan rasyonel bir oyuncunun tam olarak domine edilen bir stratejiyi asla oynamak istemediğini anlıyoruz (Gibbons, 1992). Çünkü beklenen kazancı daha düşüktür. Bunun sonucu olarak eğer oyuncu bu stratejiyi oynamak istemiyor ise onu karar sürecinden eleyebiliriz. Tabii ki bunu yaparken her bir oyuncunun, kendisinin dışındaki oyuncuları rasyonel birer oyuncuymuş gibi görüp, domine edilen bir stratejiyi oynamayacağını varsaymamız gerekir (Gibbons, 1992). Bu bilgiler ışığında aşağıda belirtilen yöntem baskın strateji dengesini bulmak için geliştirilmiştir.

2.7.1.1.1 Tam Domine Edilen Stratejilerin Yinelemeli Eleme Yöntemiyle Çözümü

Bu yöntem herhangi bir normal formdaki oyuna şu şekilde uygulanır: İlk olarak, her bir oyuncu için domine edilen stratejiler silinir, çünkü hiçbir rasyonel oyuncu bu stratejileri oynamak istemez. Bu stratejiler silindiği zaman daha küçük bir oyun matrisi oluşur. Daha sonra, bu küçük matris oyununda domine edilen stratejiler silinir, böylece

daha da küçük bir oyun matrisi elde edilir. Bu şekilde sürece devam edilir ta ki silinebilecek hiçbir strateji kalmayana kadar (Watson, 2002). Bu eleme süreci sonunda eğer bir tane strateji çifti kalıyorsa bu strateji çifti oyunun denge değeridir.

Bu yöntem iki tane dezavantaja sahiptir (Gibbons, 1992). Bunlardan ilki oyuncuların rasyonel olduğunun her oyuncu tarafından bilinmesi varsayımıdır. Bu varsayım için yalnızca oyuncuların rasyonel olduğunu varsaymıyoruz aynı zaman da her oyuncunun tüm oyuncuların rasyonel olduğunu bildiğini varsayıyoruz ve tüm oyuncularında her oyuncunun rasyonel olduğunu bildiğini biliyor olduğunu varsayıyoruz ve bu böyle sonsuza kadar devam ediyor (Aumann, 1976). İkinci dezavantaj ise bu sürecin sonunda oyuncuların hangi stratejileri oynayacağını kesin olarak belirlenememesi durumudur. Bunun için daha kesin tahminler veren çözüm yöntemlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu ihtiyaca cevap olabilecek yöntem Nash Dengesi'dir (Gibbons, 1992). Nash dengesi oyuncuların nasıl en uygun oynamaları gerektiği hakkında çok daha kesin tahminler vermektedir.

2.7.1.1.2 Tam Strateji Nash Dengesi

Nash dengesi işbirlikçi olmayan oyun teorisi problemlerine kesin olarak bir tek çözüm bulmayı sağlamaktadır. Bu yöntem her bir oyuncunun seçeceği optimal stratejinin yalnızca bir tane olmasını sağlamaktadır. Nash dengesinin temeli her bir oyuncunun tahmin edilen stratejisinin diğer oyuncuların tahmin edilen stratejilerine karşı en iyi karşılık (tepki) olmasına dayanmaktadır. Buna göre tam strateji Nash dengesi tanımı aşağıdaki gibi verilir.

Tanım 2.8: $G = \{S_1, \dots, S_N; p_1, \dots, p_2\}$ N oyunculu bir oyun olsun. $(s_1^*, \dots, s_n^*)$ stratejileri, her i oyuncusu için, s_i^* diğer $(n-1)$ oyuncunun belirlediği $(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)$ stratejilerine karşı en iyi tepkiyse bir Nash Dengesidir. Nash dengesi S_i 'deki her mevcut s_i stratejisi için,

$$p_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*) \geq p_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)$$

şeklinde tanımlanır ve s_i^*

$$\max_{s_i \in S_i} p_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)$$

olarak bulunursa $(s_1^*, \dots, s_n^*)$ Nash dengesidir.

Burada dikkat edilmesi gereken nokta oyundaki herhangi bir oyuncu için teorinin önerdiği çözümün, o oyuncu için mevcut kazançlarından en fazlası olmayabileceğidir. Yani oyundaki herhangi bir oyuncu için çözümün önerdiği kazançtan daha yüksek mevcut kazançlar olabilir. Kabul edelim ki teori $G = \{S_1, \dots, S_N; p_1, \dots, p_2\}$ oyunu için $(s_1', \dots, s_n')$ stratejisini çözüm olarak önersin. Eğer bu çözüm Nash dengesi değilse (yani i oyuncusunun seçtiği s_i' strateji diğer oyuncuların seçtiği stratejilere en iyi tepki değilse) aşağıdaki koşula uyan bir s_i'' stratejisi vardır

$$p_i(s_1', \dots, s_{i-1}', s_i', s_{i+1}', \dots, s_n') < p_i(s_1', \dots, s_{i-1}', s_i'', s_{i+1}', \dots, s_n')$$

Bu durum i oyuncusunu teorinin söylediği stratejiyi oynamaktan vazgeçmeye teşvik eder. Çünkü bu durumda oyuncu kazancının daha fazla olduğu s_i'' stratejisini oynamak isteyecektir. Teori böyle bir $(s_1', \dots, s_i'', \dots, s_n')$ stratejileri çözüm olarak (rakibine karşı en iyi tepki) ortaya koyabilir. Fakat bu stratejiler Nash Dengesi değildir. Bu noktada teoriye “birlikte hareket etme” (convention) kavramı dahil edilir. Buna göre her bir oyuncu hem kendi en iyi tepkisini düşünürken hem de tüm oyuncular için de en iyi olacak stratejiyi oynamalıdır. Bu yüzden birlikte hareket etme (convention) ile şekillendirilen stratejiler Nash Dengesi olmaktadır (Gibbons, 1992).

Önerme 1: $G = \{S_1, \dots, S_N; p_1, \dots, p_2\}$ N oyunculu normal formdaki bir oyunda eğer domine edilen stratejilerin yinelemeli eleme yöntemiyle bir denge değeri bulunabiliyorsa, bu stratejiler $(s_1^*, \dots, s_n^*)$ tek Nash Dengesidir (Gibbons, 1992).

Önerme 2: $G = \{S_1, \dots, S_N; p_1, \dots, p_2\}$ N oyunculu normal formdaki bir oyunda eğer $(s_1^*, \dots, s_n^*)$ bir Nash Dengesi ise, o zaman bu stratejiler baskın olunan stratejilerin

yinelemeli elenmesinden geriye kalanlardır. Yani yinelemeli eleme yöntemi ile en iyi tepki yöntemi birbirini desteklemektedir (Gibbons, 1992).

En iyi tepki yoluyla Nash Dengesinin belirlenmesini strateji kümesi kesikli veya sürekli olması durumu için ayrı ayrı ele alalım. Örneğin iki oyunculu bir oyun için bu yöntemi, 2. oyuncunun her seçimi karşısında 1. oyuncunun en iyi stratejisini seçmesi olarak özetleyebiliriz. Yani 2. oyuncunun seçimi biliniyor iken 1. oyuncu için

$$\max p_1(s_1, s_2)$$

maksimizasyonu yaparak en iyi strateji bulunur. Benzer şekilde ikinci oyuncu içinde maksimizasyon yaparak en iyi tepki fonksiyonu bulunur. Bulunan en iyi tepki fonksiyonları ortak çözülerek denge değerine ulaşılır.

Kesikli durum için sütun oyuncusunun stratejisi karşısında satır oyuncusunun buna karşılık en iyi stratejisini seçmesi şeklinde satır oyuncusunun en iyi stratejileri belirlenecek. Benzer şekilde sütun oyuncusunun en iyi stratejileri, satır oyuncusunun stratejisi belli iken buna vereceği en iyi tepki (seçenek) olmaktadır.

Böylece, her iki oyuncunun birlikte elde edebileceği en yüksek kazançlar ise bu en iyi tepkilerin birlikte oluşturduğu ödeme çiftleridir. İşte bu ödeme çiftlerine karşılık gelen strateji çiftleri Nash Dengesini vermektedir.

Sürekli durumda ise öncelikle 2. oyuncunun seçimi sabit iken 1. oyuncunun tepki fonksiyonu hesaplanır. Daha sonra, 1. oyuncunun seçimi sabit iken 2. oyuncunun tepki fonksiyonu bulunur. Bulunan bu iki fonksiyon ortak çözülerek Nash dengesi elde edilir.

2.7.1.2 Karma Strateji

Tanım 2.9: $\vec{p}$, strateji kümesi $X_1, \dots, X_N$ olan normal formda N oyunculu bir oyun olsun P_i oyuncusu için karma strateji

$$\vec{p}_i = (p_i(x))_{x \in X_i}$$

olasılık vektörüdür. $p_i(x)$, P_i oyuncusunun $x \in X_i$ stratejisini oynama olasılığı olarak ifade edilir.

İki kişilik oyunlar için karma strateji tanımını şu şekilde ifade ederiz; $m \times n$ boyutlu A ve B matrisleri sırasıyla satır ve sütun oyuncusu için ödemeler matrisi olsun. Satır oyuncusu için karma strateji m sıralı $\vec{p}$ olasılık vektörü, kolon oyuncusu için karma strateji n sıralı $\vec{q}$ olasılık vektörüdür. P_i oyuncusu için tüm karma strateji kümesi ise M_i sembolüyle gösterilir.

Tanım 2.10: Sırasıyla $P_1, P_2, \dots, P_N$ oyuncularını tarafından oynanan $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N$ karma stratejilerine göre şekillenen P_i oyuncusunun beklenen kazancı (ödemesi)

$$p_i(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N) = \sum (p_1(x_1)p_2(x_2) \dots p_N(x_N))p_i(x_1, x_2, \dots, x_N),$$

burada toplam $1 \leq i \leq N$ için $x_i \in X_i$ in mevcut tüm seçimlerini kapsar.

Buna göre beklenen ödeme, her biri N sıralı oynama olasılığına göre ağırlıklandırılmış N sıralı tam stratejilere göre elde edilen tüm ödemelerin toplamıdır (Morris, 1994).

İki oyunculu bir oyun için beklenen ödeme şu şekilde ifade edilir. A ve B $m \times n$ boyutlu sırasıyla satır ve sütun oyuncusu için ödemeler matrisi ise satır oyuncusu için m sıralı $\vec{p}$ vektörü, oyuncunun sahip olduğu m tane stratejinin her birini oynama olasılığını gösteriyorsa ve $\vec{q}$ vektörü kolon oyuncusunun sahip olduğu n tane stratejisinin her birini oynama olasılığını gösteriyorsa, satır oyuncusu için beklenen ödeme, ortaya çıkabilecek her bir sonuca karşılık gelen ödeme ile bu sonucun ortaya çıkma olasılığının çarpımlarının toplamıdır.

$$p_1 = p_1q_1a_{11} + p_1q_2a_{12} + p_2q_1a_{21} + p_2q_2a_{22} + \dots + p_mq_na_{mn}$$

Buna göre,

$$p_1 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i q_j a_{ij}$$

Sütun oyuncusu için beklenen ödeme

$$p_2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i q_j b_{ij}$$

olarak tanımlanır.

Battle of The Buddies oyunu için beklenen ödemeleri hesaplayacak olursak (Morris,1994).

Norm'un sahip olduğu iki stratejiyi de, W ve R, $\frac{1}{2}$ olasılığıyla seçtiğini kabul edelim.

Cliff ise sahip olduğu iki stratejiden W'yu $\frac{1}{3}$ ve R'yi ise $\frac{2}{3}$ olasılığıyla seçtiğini kabul edelim.

Bu durumda beklenen ödeme,

Norm için;

$$p_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}(5) + \frac{2}{3}(0) \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}(0) + \frac{2}{3}(1) \right) = \frac{7}{6}$$

Cliff için;

$$p_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}(1) + \frac{2}{3}(0) \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}(0) + \frac{2}{3}(5) \right) = \frac{11}{6}$$

olarak hesaplanır.

2.7.1.2.1 Maksimin Değerleri

Maksimin değeri oyunculara bir oyunda bekleyebilecekleri ödeme miktarının kötümser bir tahminini verir. (Morris,1994). Yani bu değer bir oyunda oyuncuların ne kadar ortalama ödeme elde edilebileceğinin alt sınırını belirler. P_1 ve P_2 oyunculu iki kişilik bir oyunda P_1 oyuncusu için maksimin değeri v_1 ile gösterilir ve P_2 oyuncusunun P_1 'e yapılacak ödemeyi minimum yapacak şekilde hareket ettiği varsayılarak hesaplanır (Morris,1994).

$$v_1 = \max_p \min_q p_i(\vec{p}, \vec{q})$$

Burada p ve q P_1 ve P_2 oyuncularını için tüm karma stratejileri kapsar. v_1 'i hesaplamak için P_1 oyuncusunun ödemeler matrisi sıfır toplamlı bir oyunmuş gibi düşünülür ve ona göre çözüm yapılır. Bu matrisin değeri v_1 'i vermektedir. Bunun nedeni eğer P_2 , P_1 'e yapılacak ödemeyi minimum yapmak için oynuyorsa, bu ödemenin negatiflerini maksimum yapmak için oynuyordur. Bu ise oyuncunun sıfır toplamlı oyunda kolon oyuncusuymuş gibi hareket ettiğini söylemenin başka bir yoludur. Kolon oyuncusu için maksimin değeri hesaplanırken oyun sıfır toplamlı olmadığından matris (ikili) elemanlarını negatif düşünemeyiz çünkü bu değerler oyunun gerçek ödemeleridir. Bunun için kolon oyuncusunun ödemeler matrisinin transpozu alınarak maksimin değeri hesaplanır (Morris,1994).

2.7.1.2.2 Karma Strateji Nash Dengesi

Herhangi bir tam strateji karma strateji olarak ifade edilebilir. Bu, oyuncunun oynadığı stratejiye 1, oynamadığı diğer tüm stratejilere de sıfır olasılığı verilerek yapılır. Tam strateji Nash Dengesini karma stratejilere uyarlayabilmek için her bir oyunun karma stratejileri diğer oyuncuların karma stratejilerine en iyi tepki olması gerekir. İki oyunculu durum için konuyu açıklayacak olursak, P_1 oyuncusunun m tane, P_2 oyuncusunun da n tane tam stratejisi olduğunu kabul edelim. Her iki oyuncunun da strateji kümelerini şu şekilde yazalım (Gibbons, 1992);

$$S_1 = \{x_1, \dots, x_m\}, \quad S_2 = \{y_1, \dots, y_n\}$$

buradaki x_i ve y_j sırasıyla keyfi tam stratejileri belirtsin. Eğer P_1 oyuncusu P_2 oyuncusunun $(y_1, \dots, y_n)$ stratejilerini, $\bar{q} = (q_1, \dots, q_n)$ olasılıklarıyla oynayacağına inanırsa o zaman P_1 'in x_i tam stratejisini oynamasıyla elde edeceği beklenen ödeme

$$\sum_{j=1}^n q_j p_1(x_i, y_j)$$

ve P_1 oyuncusu karma strateji $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$ oynayarak elde edeceği beklenen ödenti,

$$p_1(\vec{p}, \vec{q}) = \sum_{i=1}^m p_i \sum_{j=1}^n q_j p_1(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i q_j p_1(x_i, y_j)$$

Benzer şekilde 2. oyuncunun beklenen ödemesi;

$$p_2(\vec{p}, \vec{q}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i q_j p_2(x_i, y_j)$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.11: $G = \{S_1, S_2; p_1, p_2\}$ normal formda iki oyunculu bir oyun olsun. Eğer her oyuncunun karma stratejisi diğer oyuncunun karma stratejisine en iyi tepki ise ayrıca,

$$p_1(p^*, q^*) \geq p_1(p, q^*)$$

ve

$$p_2(p^*, q^*) \geq p_2(p^*, q)$$

eşitsizlikleri sağlanıyorsa o zaman (p^*, q^*) karma strateji Nash Dengesidir. Bu tanıma göre oyuncuların birisi optimum stratejisine göre oynamaz ise daha az beklenen kazanç elde eder.

Teorem 2.9: $G = \{S_1, \dots, S_N; p_1, \dots, p_N\}$ N oyunculu normal formdaki bir oyunda, eğer N ve her i için S_i sonlu ise o zaman en az bir tam yada karma strateji Nash Dengesi vardır. (İspat için: Bkz. Gibbons, 1992)

2.7.1.2.3 Karma Strateji Denge Çiftini Hesaplamak İçin Grafik Yöntem

Battle of Buddies oyunu için yöntemi açılalım (Morris, 1994).

Norm için karma stratejilerin tümü $(x, 1-x)$ formunda yazılabilir. Burada $0 \leq x \leq 1$ dir.

Cliff için karma stratejiler $(y, 1-y)$ formunda yazılır ve aynı şekilde y olasılık değeri olduğu için $0 \leq y \leq 1$ olur.

Her bir oyuncu için beklenen ödemeleri x ve y'nin fonksiyonu olarak yazalım.

Norm için beklenen ödeme,

$$p_1 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i q_j a_{ij}$$

yardımıyla, aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} p_1(x, y) &= p_1 q_1(a_{11}) + p_1 q_2(a_{12}) + p_2 q_1(a_{21}) + p_2 q_2(a_{22}) \\ &= x.y(5) + x.(1-y).(0) + (1-x).y.(0) + (1-x).(1-y).(1) \\ p_1(x, y) &= 5xy + (1-x)(1-y) = 6xy - x - y + 1 \end{aligned}$$

Benzer şekilde Cliff için beklenen ödeme,

$$p_2(x, y) = x.y + 5(1-x)(1-y) = 6xy - 5x - 5y + 5$$

olarak bulunur.

Bu noktadan sonra denge çiftini bulmak için yapılacak olan bir (x^*, y^*) çifti bulmaktır. Yalnız bulacağımız bu çiftin $p_1(x^*, y^*)$ 'ın, $p_1(x, y^*)$ üzerine maksimum olması ve $p_2(x^*, y^*)$ 'in ise $p_2(x^*, y)$ üzerine maksimum olması gerekmektedir. Bunu sağlamanın yolu aşağıda ifade edilen iki kümenin grafiklerini bir araya getirmeye olur.

$$A = \{(x, y) : p_1(x, y) \text{ y sabit iken } x \text{ üzerine maksimum}\}$$

$$B = \{(x, y) : p_2(x, y) \text{ x sabit iken } y \text{ üzerine maksimum}\}$$

Bu iki kümenin kesişim noktaları denge çifti olacaktır. Bunun için ödeme fonksiyonlarını düzenleyip tekrar yazacak olursak,

$$p_1(x, y) = (6y - 1)x - y + 1$$

$$p_2(x, y) = (6x - 5)y - 5x + 5$$

$p_1(x, y)$ için y sabit olduğunda p_1 'i maksimum yapacak x değerlerini bulalım.

$\frac{\partial p_1}{\partial x} = 6y - 1 = 0$ ise $y = \frac{1}{6}$ kritik nokta olarak bulunur.

$y < \frac{1}{6}$ ise, p_1 $x=0$ da maksimumdur.

$y > \frac{1}{6}$ ise, p_1 $x=1$ de maksimumdur.

$y = \frac{1}{6}$ ise p_1 herhangi bir x noktasında maksimumdur.

$p_2(x, y)$ için x sabit olduğunda p_2 'yi maksimum yapacak y değerlerini bulalım.

$\frac{\partial p_2}{\partial x} = 6x - 5 = 0$ ise $x = \frac{5}{6}$ kritik nokta olarak bulunur.

$x < \frac{5}{6}$ ise p_2 $y=0$ da maksimumdur

$x > \frac{5}{6}$ ise p_2 $y=1$ de maksimumdur.

$x = \frac{5}{6}$ ise p_2 herhangi bir y noktasında maksimumdur.

Şimdi de her iki oyuncu için maksimin değeri hesaplayalım. Daha önce bahsedildiği üzere maksimin değeri her iki oyuncu için ayrı ayrı oluşturulan ödemeler matrisinin sıfır toplamlı oyun matrisiymiş gibi çözülmesiyle bulunur.

Norm için ödemeler matrisi aşağıdaki gibidir.

$$N = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bu matrisi sıfır toplamlı bir oyun matrisiymiş gibi düşünüp matris yöntemiyle çözelim.

$$v(N) = \frac{\det(A)}{(1,1)adjA \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\text{adj } N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det N = 5$$

$$v(A) = \frac{5}{(1,1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{5}{6}$$

olarak bulunur. Norm için optimum strateji vektörü ise

$$(W, R) = \frac{(1,1) \text{adj} A}{(1,1) \text{adj} A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$(W, R) = \frac{(1,1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}}{(1,1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$W = \frac{1}{6}$ ve $R = \frac{5}{6}$ olarak bulunur.

Cliff için ödemeler matrisi aşağıdaki gibidir.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Bu matris sıfır toplamlı bir oyunmuş gibi çözülebilmesi için transpozunu alınmalıdır. Buna göre Cliff için oyunun değeri aşağıdaki gibi hesaplanır.

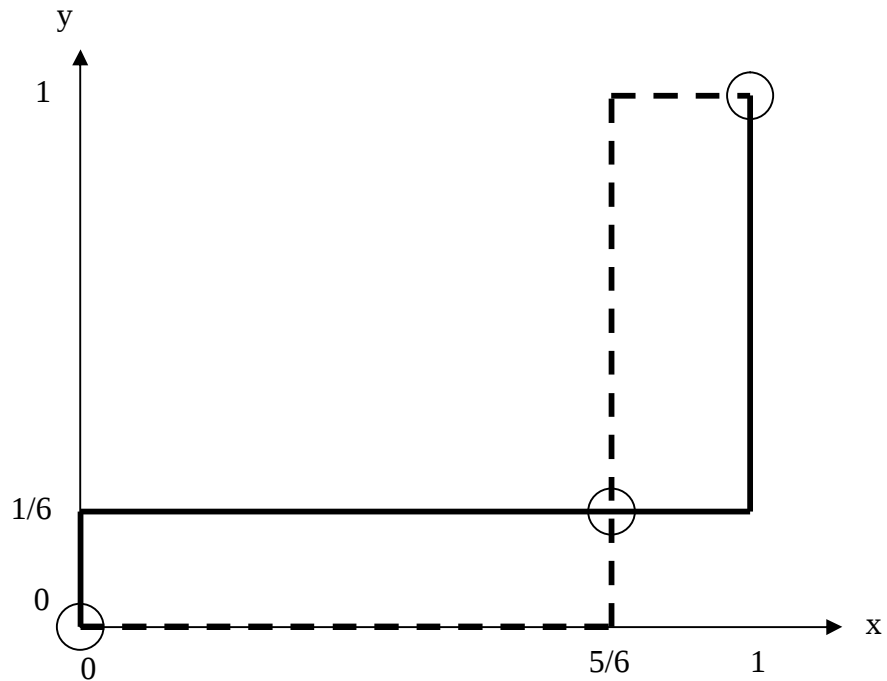
$$\text{adj } C^T = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det C^T = 5$$

$$v(C) = \frac{5}{(1,1) \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{5}{6}$$

Cliff için oyunun optimal strateji vektörü $W = \frac{5}{6}$, $R = \frac{1}{6}$ olarak bulunur.

Bu bilgiler ışığında, düz çizgi A kümesini, kesikli çizgi B kümesini göstermek üzere A ve B kümelerinin grafiği aşağıdaki gibi çizilir.



Şekil 2.2: Battle of Buddies İçin Karma Strateji Denge Çifti

Grafiğe göre iki kümenin kesiştiği 3 tane nokta olduğunu görürüz (halka için alınmış noktalar) bu noktalar $((0,1), (0,1))$, $((5/6,1/6), (1/6,5/6))$ ve $((1,0), (1,0))$ dır. Bundan sonra yapılması gereken her bir oyuncu için bu dengeleri yorumlamak olacaktır. Norm son dengeyi seçecektir. Çünkü bu durumda 5 birim kazanca ulaşır. Cliff ise ilk dengeyi seçmek isteyecektir. İkinci dengede ise her iki oyuncu için ödeme 5/6 dır. Bu diğer iki dengeye göre çok daha az bir kazançtır. 5/6 değeri yukarıda hesapladığımız gibi maksimin değeridir yani oyuncuların oyunun sonunda elde edebilecekleri en iyi kazancın alt sınırıdır (Morris, 1994).

Tanım 2.12 : p iki kişilik bir oyun olsun. Aşağıdaki iki boyutlu küme işbirlikçi olmayan ödeme bölgesi olarak adlandırılır.

$$p = \{p_1(\bar{p}, \bar{q}), p_2(\bar{p}, \bar{q}) : \bar{p} \in M_1, \bar{q} \in M_2\}$$

Burada M_1 , 1. oyuncunun tüm stratejilerinin kümesi M_2 , 2. oyuncunun tüm stratejilerinin kümesini göstermektedir. p 'deki noktalar ödeme çiftleri olarak adlandırılır.

Yukarıda verilen tanıma göre ödeme bölgesi kartezyen koordinat sisteminde çizilebilir. Ödeme bölgesi, yatay eksen p_1 , dikey eksen p_2 olacak şekilde, olası tüm karma strateji çiftlerine göre hesaplanan ödeme çiftlerinin grafiği çizilerek oluşturulur.

Tanım 2.13: (u, v) ve (u', v') iki farklı ödeme çifti olsun. Eğer $u \geq u'$ ve $v \geq v'$ ise o zaman (u, v) , (u', v') üzerine baskındır.

Ödeme bölgesinde baskın olan ödeme çifti baskın olunan ödeme çiftinin sağında ve yukarisındadır. Yukarıdaki örnek için ödeme bölgesi olası tüm stratejiler Norm için (1,0) dan (0,1)'e kadar, aynı şekilde Cliff içinde (1,0) dan (0,1) kadar sıralanır. Tüm bu aralıktaki olasılık değerleri için beklenen ödemeler hesaplanır. Aşağıda bu olasılıklardan bazılarını hesaplayalım (Morris, 1994).

İlk olarak tam stratejilere karşılık gelen ödemeleri hesaplayalım.

Norm W ve Cliff R stratejisini seçerse ortaya çıkacak ödeme (5,1) dir.

Norm R ve Cliff R stratejisini seçerse ortaya çıkacak ödeme (1,5) dir.

Norm W (veya R) Cliff R (veya W) stratejisini seçerse ortaya çıkacak olan ödeme (0,0) dır.

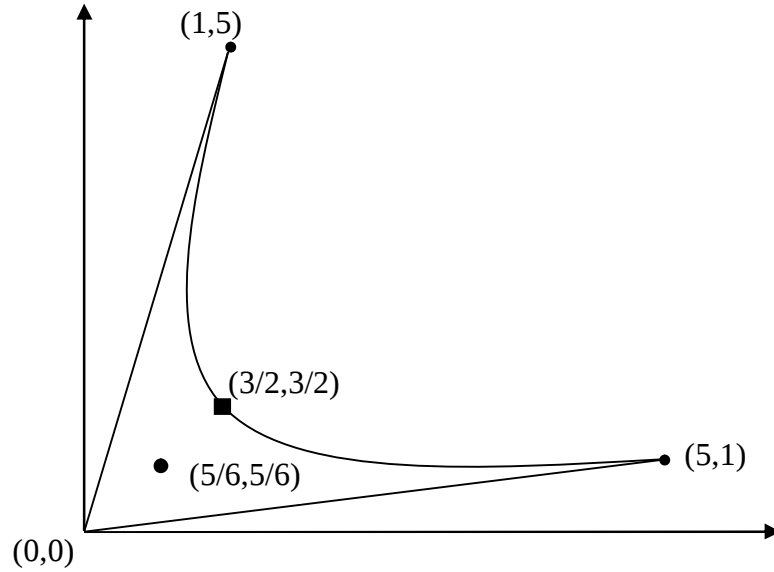
Daha sonra $(1/2, 1/2)$ karma stratejisi karşılık gelen ödemeleri hesaplayalım. Norm için beklenen ödeme,

$$p_1 = 1/2(1/2(5) + 1/2(0)) + 1/2(1/2(0) + 1/2(1)) = 3/2$$

Cliff için beklenen ödeme,

$$p_1 = 1/2(1/2(1) + 1/2(0)) + 1/2(1/2(0) + 1/2(5)) = 3/2$$

O zaman ödeme çifti $(3/2, 3/2)$ olarak bulunur. Ayrıca bu oyun için maksimin değeri $(5/6, 5/6)$ olarak daha önce hesaplanmıştı. Tüm bu verilerden hareketle bu oyunun ödeme bölgesinin grafiği aşağıdaki gibi olur. (Morris, 1994).



Şekil 2.3: Battle of Buddies İçin İşbirliksiz Ödeme Bölgesi

Tanım 2.14: Hem $(\hat{p}, \hat{q})$ hemde $(\hat{r}, \hat{s})$ iki kişilik bir oyun için karma strateji denge çifti olsun. O zaman,

- 1) Eğer $(\hat{p}, \hat{q})$ ve $(\hat{r}, \hat{s})$ denge çifti ise bunlar değiş tokuş edilebilir.
- 2) Eğer $p_i(\hat{p}, \hat{q}) = p_i(\hat{r}, \hat{s})$ ise bu iki denge çiftinin eşit olduğu söylenir.

Teorem 2.10: Sıfır toplamli oyunlarda tüm karma strateji denge çiftlerinin değiş tokuş edilebilir ve birbirine eşittir. Bir oyundaki iki denge çifti değiş tokuş edilebilir ve birbirine eşit ise bu oyun Nash'in önerdiği yöntemle çözülebilir (Morris, 1994).

Tanım 2.15: Herhangi bir ödeme çifti tarafından domine edilmemiş ödeme çiftine Pareto Optimal denir.

Buraya kadar anlatılan fikirlerin ışığında Norm ve Cliff'nin bu işbirliksiz oyunu gerçekte nasıl oynamaları gerektiği hakkında çeşitli çözüm fikirleri geliştirelim. Yukarıdaki şekle göre $(1, 5)$, $(5, 1)$ ve $(3/2, 3/2)$ noktaları pareto optimaldir. Buna göre oyuncuların seçebileceği bazı stratejiler için oyunu yorumlayalım (Morris, 1994).

1. Norm W oynarsa, bu durumda Cliff'in yapabileceği en iyi seçim W oynamaktır. Bu senaryonun başarısı oyuncuların inatçılık derecesine bağlıdır. Aksi takdirde, Cliff R oynamakta ısrar ederse bu durumda oyun her iki oyuncu için en düşük ödeme ile sonuçlanır.
2. Norm muhtemelen ikinci denge çifti olan (5/6, 1/6) oynamak istemez. Çünkü Cliff sahip olduğu iki stratejisinden herhangi birini oynayarak 5/6 kazanç elde edebilir. Fakat Cliff R oynarsa bu durumda Norm'un ortalama kazancı 1/6 ya düşer.
3. Norm eğer R stratejisini oynarsa, Cliff Norm'un bu şekilde oynamaya devam edeceğine inanırsa, R ile karşılık verir. Bu durum Cliff için harika olur, Norm içinde fena olmaz. Yalnız burada simetriden dolayı R Norm için iyi bir fikirse, W Cliff için iyi bir fikir mi şeklinde bir soru akla gelmektedir. Böyle bir durumda oyun bir döngüye girecektir.
4. Norm (1/6, 5/6) oynayarak en azından maksimin değeri kadar kazanmayı garanti etmiş olur. Norm bu şekilde oynarsa Cliff her ne şekilde oynarsa oynasın Norm'un kazancı oyunun maksimin değeri olan 5/6 dır. Belki de bu Norm'un yapabileceğinin en iyisidir.

İşbirlikçi olmayan oyunlarda, eğer oyuncular birbirlerine yeteri derecede güveniyorsa işbirliği içinde davranabilir. Tabi buradaki işbirliği sonraki bölümde anlatılacak olan işbirliği tanımından biraz farklıdır. Aradaki fark, burada oyuna başlamadan önce her iki oyuncu arasında bağlayıcı olan bir anlaşma yapmadan, oyunun yapısına göre her iki taraf içinde daha iyi olabilecek bir çözüm üzerinde karşılıklı olarak resmi olmayan bir mutabakata varmak ve o şekilde oyunu oynamaktır. Mahkûmlar ikilemi tarzında bir oyun için genel olarak

$$\begin{bmatrix} (a,a) & (b,c) \\ (c,b) & (d,d) \end{bmatrix}$$

$$c > a > d > b \text{ ve } a > \frac{(b+c)}{2}$$

eşitsizlikleri sağlıyor ise karşılıklı işbirliği yapmak, işbirliği yapmamaktan çok daha iyi bir sonuç ortaya çıkarmaktadır. Böyle bir durumda oyuncular işbirliği yaparak çok daha fazla kazanç elde edebilirler. Bu yüzden, eğer oyuncular karşılıklı olarak birbirlerine güvenirlerse her iki oyuncu içinde en iyi yol işbirliği yapmaktır (Morris,1994). Bu

genelleme Mahkumlar İkilemi oyununda mahkumların yaşamış olduğu “işbirliği yapma” yada “işbirliği yapmama” şeklindeki ikilem için bir dereceye kadar çözüm olabilir.

2.7.2 İşbirlikçi Oyunlar

Daha önce bahsedildiği üzere oyunlar teorisinde iki çeşit işbirliğinden söz edilebilir. Bunlardan ilki stratejik işbirliği, diğeri ise ödemelerinde paylaşıldığı tam anlamda işbirliğidir. Burada ilk olarak stratejik işbirliğinden söz edilecektir. Stratejik işbirliği oyuncuların hangi stratejileri oynamaları gerektiği hakkında kendi aralarında her bir oyuncu için bağlayıcı olan bir anlaşma yapmaları anlamına gelir. Battle of Buddies oyununu işbirlikçi bir oyun olarak düşünecek olursak, oyuncuların şu şekilde bir işbirliği yaptığını düşünelim; hangi eğlenceye karar vermek için kendi aralarında yazı tura atıyorlar, eğer tura gelirse Güreş maçına (W) gidiyorlar, yazı gelirse at yarışı (R) gidiyorlar. Bu şekilde oynandığı takdirde her bir oyuncun beklenen ödemesi (kazancı) 3 dür. Bu ödeme işbirliği yapmamakla elde edilen ödemeden $(3/2, 3/2)$, (kazançtan) çok daha fazladır. Burada $1/2$ olasılıkla W, $1/2$ olasılıkla R seçmek her iki oyuncunun da anlaştığı ortak (müşterek) stratejidir. Ortak strateji tanımını şu şekilde verilmektedir (Morris, 1994).

Tanım 2.16: p , $m \times n$ boyutlu A ve B ödeme matrisli iki kişilik bir oyun olsun. Ortak strateji $m \times n$ boyutlu bir olasılık matrisidir $(P = p_{ij})$. Bu yüzden

$$p_{ij} \geq 0, \quad 1 \leq j \leq n, \quad 1 \leq i \leq m \text{ ve} \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1 \text{ dir.}$$

Ortak stratejiye P , göre satır oyuncusuna yapılacak beklenen ödeme

$$p_1(P) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} a_{ij}$$

dir. Kolon oyuncusuna yapılacak beklenen ödeme

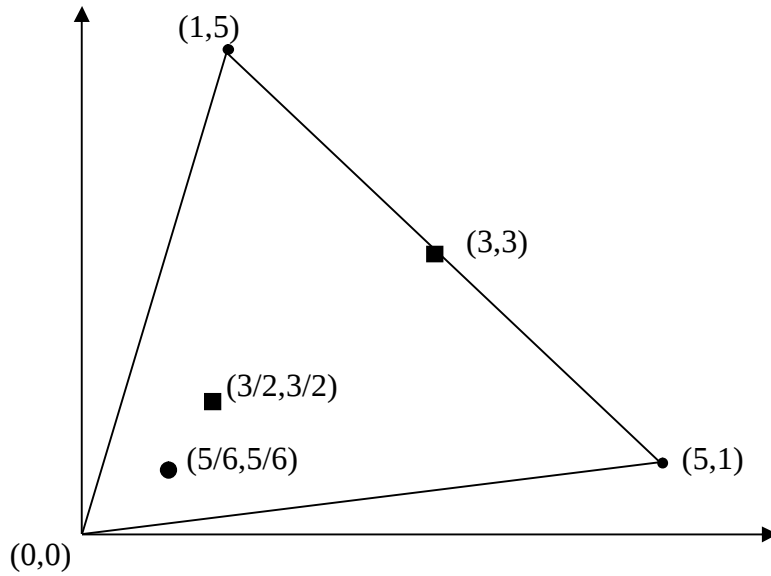
$$p_2(P) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} b_{ij}$$

dir.

Tanım 2.17: İşbirlikçi ödeme bölgesi;

$$\{(p_1(P), p_2(P)); P \text{ müşterek (ortak) strateji}\}$$

kümesi olarak tanımlanır. Yani 1. oyuncuya yapılacak beklenen ödeme sıralı ikilinin birinci elemanı, 2. oyuncuya yapılacak beklenen ödeme ise ikinci elemanı olan, sıralı ikililerin oluşturduğu noktaların kümesi olarak ifade edilebilir. Bu küme işbirliksiz ödeme bölgesinden çok daha geniştir. Bu yüzden eğer oyuncular işbirliği yaparsa çok daha fazla ödeme elde edebilirler. (Morris, 1994).



Şekil 2.4: Battle of Buddies İçin İşbirlikçi Ödeme Bölgesi

Oyuncular ortak stratejiyi belirlemek için aşağıda belirtilen iki kriter gere göre anlaşma yapmalıdır (Morris(1994)).

1. Oyuncuların üzerinde anlaştığı ortak stratejiye göre elde edeceği ödeme çifti pareto optimal olmalıdır.

2. Her oyuncu için ortak stratejiden elde edilecek kazanç en azından maksimin değeri kadar olmalıdır.

Buna göre ortak strateji oynayarak elde edilecek olan kazanç maksimin değerinden büyük ve hiçbir ödeme çifti tarafından domine edilmemiş olmalıdır. Bu kriterler bir pazarlık kümesi kavramının gerekliliğini ortaya koymaktadır.

Tanım 2.18: İki kişilik işbirlikçi bir oyun için pazarlık (anlaşma) kümesi,

$$u \geq v_1, \quad v \geq v_2$$

olan tüm pareto optimal (u, v) ödeme çiftlerinin kümesidir. Burada v_1 ve v_2 maksimin değerleridir.

Pazarlık kümesi, maksimin değerinden büyük olan tüm pareto optimal ödeme çiftlerinin kümesi olarak ifade edilebilir. Buna göre yukarıdaki şekilde anlaşma (pazarlık) kümesi (1,5) ten (5,1)'e giden doğru parçasıdır. Burada cevaplanması gereken problem oyuncuların bu anlaşma (pazarlık) kümesindeki ödeme değerlerinden hangisi üzerine anlaşacağıdır. Çünkü satır oyuncusu pazarlık kümesindeki mümkün olduğu kadar sağda, kolon oyuncusu ise mümkün olduğu kadar yukarıda olan bir ödeme çiftini tercih etmektedir (Morris, 1994).

2.7.2.1 Nash Pazarlık Aksiyomları

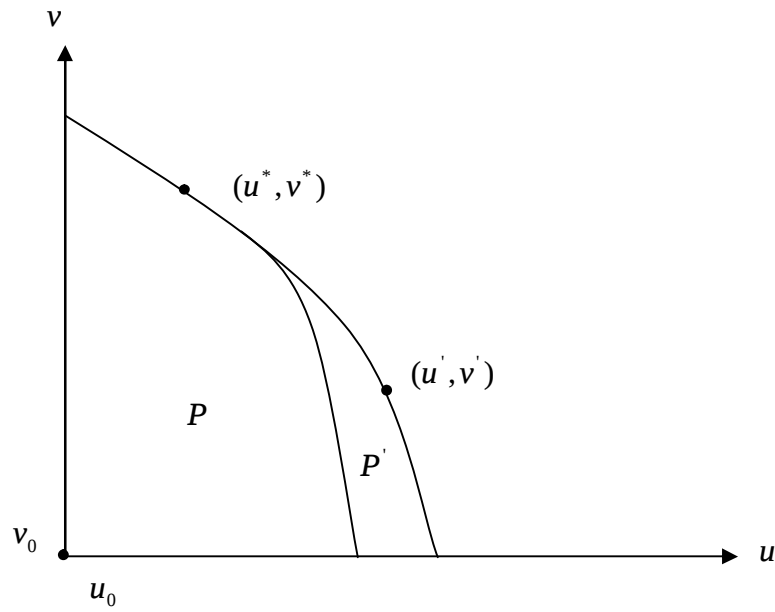
Az önce bahsettiğimiz problemin çözümü için geliştirilen teori pazarlık kümesinde oyuncuların, üzerinde anlaşmaya varacakları ödeme çiftinin ne olacağına karar vermenin adil bir yöntemini bulmak için geliştirilmiştir. Bunun için 'hakem kararı prosedürü' (arbitration procedure) " Ψ " karar sürecinde yer alması gerekir. Hakem kararı prosedürü anlaşmazlığı çözmek için arbiter (hakem) olarak adlandırılan yansız bir kişinin süreçte yer almasıdır. Hakem kararı prosedürü; bir ödeme bölgesi ve bu ödeme bölgesinin elemanı olan bir statüko noktası $(u_0, v_0) \in P$ 'den oluştuğu zaman, Ψ her iki oyuncu için adil bir ödeme çifti belirler. Statüko noktası genellikle maksimin değerleri çiftidir. Bu değer oyuncuların hakem kararı prosedürünün önerdiği ödemeyi reddettiklerinde kabul etmek zorunda oldukları ödeme çiftidir (Morris, 1994).

Herhangi bir makul çözüme ait olan genel özellikleri belirten aksiyomlar yardımıyla işbirlikçi oyunlar problemi analiz edilebilir (Nash, 1953).

Ödeme bölgesi, P , ve statüko noktası, (u_0, v_0) , a uyan hakem kararı çifti, $\Psi(P, (u_0, v_0)) = (u^*, v^*)$ ile gösterili ve aşağıdaki aksiyomları sağlaması gerekmektedir.

1. Bireysel rasyonellik , $u^* \geq u_0$ ve $v^* \geq v_0$
2. Pareto optimallik, (u^*, v^*) pareto optimaldir.
3. Seçilebilirlik (feasibility), $(u^*, v^*) \in P$
4. Alakasız (irrelevant) alternatiflerin bağımsızlığı,

Eğer P ve P' aynı statüko noktalı pazarlık (anlaşma) kümeleri ve $P \subset P'$ ise o zaman ya P' 'nin hakem kararı çifti $(u', v') \notin P$ olur yada $(u', v') = (u^*, v^*)$ olur (Stegnel,2008).



Şekil 2.5: Nash'in.4. Pazarlık Aksiyomu

5. Lineer Dönüşümler Altında Değişmeme (invariance),
 P' nün P nin lineer dönüşümüyle elde edildiğini varsayalım,

$$u' = au + b, \quad v' = cv + d, \quad \text{burada } a, c > 0$$

olsun. O zaman

$$\Psi(P', (au_0 + b, cv_0 + d)) = (au^* + b, cv^* + d)$$

olur.

6. Simetri,

P nin simetrik olduğunu kabul edelim, Yani $(u, v) \in P$ ise $(v, u) \in P$ olmalıdır.

Ayrıca $u_0 = v_0$ olduğunu kabul edersek, $u^* = v^*$ olmalıdır.

Yukarıda bahsedilen aksiyomların ne anlama geldiklerinden kısaca bahsedecek olursak. Aksiyom 1, oyuncuların hakem kararı prosedürü sonucu elde edeceği hakem kararı çiftinin maksimin değerinden büyük olduğunu. Aksiyom 2, hakem kararı çiftinin pazarlık kümesindeki hiçbir ödeme tarafından domine edilmediğini. Aksiyom 3, hakem kararı çiftinin ödeme bölgesinin içinde yer aldığını. Aksiyom 4, eğer P pazarlık kümesi ilave ödeme noktalarına sahip fakat statüko noktası aynı daha geniş bir P' pazarlık kümesine genişletilirse hakem kararı çifti ya bu yeni noktalardan biridir yada P bölgesinin hakem kararı çiftine eşittir (Stegnel,2008). Aksiyom 5, eğer ödemelerin hesaplandığı birimlerde, kısmen, değişiklik varsa, bu durumda hakem kararı çiftinde bir değişiklik yoktur. Aksiyon 6, eğer oyuncular hem ödeme bölgesi hem de statüko noktasına göre simetrik role sahip ise ozaman oyuncular aynı ödemeyi elde ederler (Morris,1994).

Tanım 2.19: (Konveks Kümeler) S , R^n 'in bir alt kümesi olsun. Eğer S 'deki her $\bar{x}$ ve $\bar{y}$ için ve de $0 \leq t \leq 1$ aralığında her t sayısı için,

$$t\bar{x} + (1-t)\bar{y} \in S$$

ise S konvektir.

Tanım 2.20: $F = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k\}$ R^n 'in sonlu bir alt kümesi olsun. O zaman

$$\sum_{i=1}^k t_i \bar{x}_i,$$

Burada $t_1, t_2, \dots, t_k$ negatif olmayan sayılar ve toplamaları 1 ise, $\sum_{i=1}^k t_i \bar{x}_i$ F 'nin bir konveks kombinasyonudur.

Tanım 2.21: A , R^n 'in herhangi bir alt kümesi olsun. A 'nın konveks yüzeyi (convex hull) A 'nın sonlu alt kümelerinin tüm konveks kombinasyonlarının kümesi olarak tanımlanır ve $co(A)$ şeklinde gösterilir.

Örneğin bir üçgen köşelerinin konveks yüzeyidir veya aşağıdaki şekildeki konveks küme altı köşesinin konveks yüzeyidir.



Şekil 2.6: Konveks Yüzeyler

Teorem 2.11: p , ödemeler matrisi, C , $m \times n$ boyutlu ve ikili matris olan iki kişilik bir oyun olsun. O zaman işbirlikçi ödeme bölgesi koordinatları ikili matrisin elemanları olan R^2 'deki noktaların kümesinin konveks yüzeyidir.

İspat: Eğer P ortak strateji ise, o zaman bu ortak stratejiye göre ödeme çifti,

$$(p_1(P), p_2(P)) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} c_{ij}$$

dir. Bu ödeme çifti $\{c_{ij} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ 'nin konveks yüzeyindedir. Çünkü bu kümenin bir alt kümesidir ve $0 \leq p_{ij} \leq 1$ olduğu için konveks kombinasyon tanımından bu ödeme çifti bu kümenin konveks kombinasyonudur. Diğer taraftan konveks yüzeyin herhangi bir noktası bir ödeme çiftidir (Morris, 1994).

Tanım 2.22: S , R^2 'nin herhangi bir alt kümesi olsun, Eğer (u, v) S 'nin elemanı olduğunda (v, u) 'da S 'nin elemanıysa, S kümesi simetriktir. Eğer bir küme simetrik ise, bu küme $x=y$ köşegenine göre yansımasına özdeştir.

Tanım 2.23: A , R^n 'in herhangi bir alt kümesi olsun. Simetrik konveks yüzey,

$$A \cup \{(v, u) : (u, v) \in A\}$$

kümesinin konveks yüzeyi olarak tanımlanır ve $sco(A)$ ile gösterilir.

Yukarıdaki tanıma göre A kümesinin simetrik konveks yüzeyi A kümesi ve A kümesinin $x=y$ eksenine göre yansımasının birleşiminden meydana gelir.

Lemma 2.2: A, R^n 'in herhangi bir alt kümesi olsun ve k, A 'daki her (u, v) noktası için

$$u + v \leq k$$

gibi bir sayı olsun, ozaman aynı eşitsizlik A 'nın simetrik konveks yüzeyindeki her bir nokta için sağlar.

İspat: Eşitsizlik A 'nın köşegene göre yansımasındaki her nokta için kesinlikle sağlar. Bu yüzden eşitsizlik A ve A 'nın yansımasının birleşiminin her noktası için sağlar. Eşitsizliğin sağladığı R^2 'deki tüm noktaların kümesi konvektir (Morris,1994).

Theorem 2.12: Nash aksiyomlarını sağlayan tek bir hakem kararı prosedürü vardır. (İspat için: Bkz. Morris, 1994)

Lemma 2.3: P bir ödeme bölgesi ve $(u_0, v_0) \in P$ olsun. Kabul edelim ki, $u > u_0, v > v_0$ olan bir $(u, v) \in P$ noktası var olsun ve K bu eşitsizlikleri sağlayan tüm $(u, v) \in P$ 'nin kümesi olsun. K üzerine

$$g(u, v) = (u - u_0)(v - v_0)$$

tanımlanır. O zaman, g maksimuma K üzerinde bir ve yalnızca bir noktada ulaşır.

İspat: $K' = \{(u, v) \in P : u > u_0, v > v_0\}$ K 'yı içeren sınırlandırılmamış kapalı bir küme olsun. Matematiksel analizin (Bkz. Apostol,1974 ya da Potter ve Morrey,1991) teoremiyle, sürekli olan g fonksiyonu K' üzerinde maksimuma ulaşır ve g 'nin K' üzerinde maksimumu ile K üzerindeki maksimumu aynıdır.

İspatın tamamlanması için geriye g 'nin maksimuma yalnız bir kez ulaştığını gösterilmesi kalıyor. Kabul edelim ki g maksimumu (u_1, v_1) ve (u_2, v_2) gibi farklı iki noktada elde etsin. Ozaman,

$$M = \max g(u, v) = g(u_1, v_1) = g(u_2, v_2)$$

yazılabilir. Şimdi, ya

$$u_1 > u_2, \quad v_1 < v_2$$

yada

$$u_1 < u_2, \quad v_1 > v_2$$

İlk olasılığa göre ispatı gerçekleştirelim ikincisi ise ilkinin benzeridir.

P konveks olduğundan,

$$g(u_3, v_3) = (1/2)(u_1, v_1) + (1/2)(u_2, v_2) \in P$$

yazabiliriz. $g(u_3, v_3)$ 'ü hesaplayacak olursak,

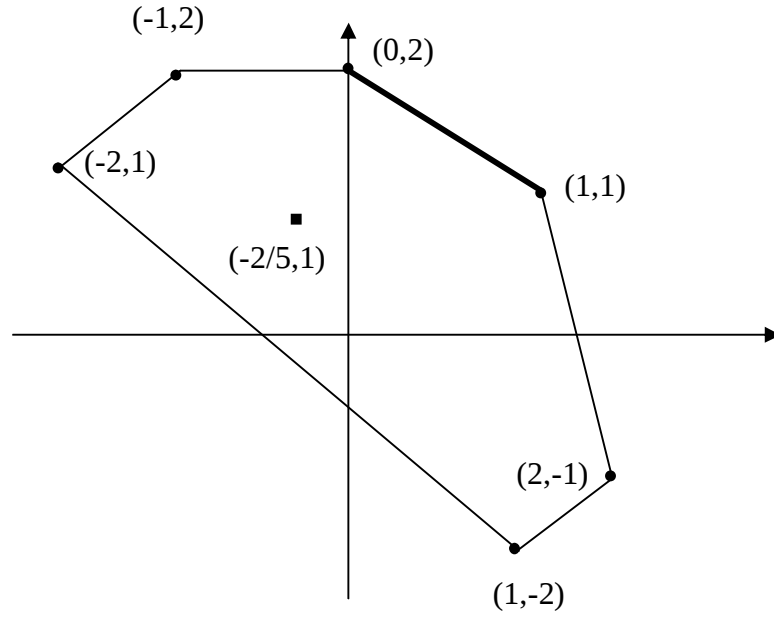
$$\begin{aligned} g(u_3, v_3) &= (u_3 - u_0)(v_3 - v_0) \\ &= \left(\frac{u_1 + u_2}{2} - u_0\right)\left(\frac{v_1 + v_2}{2} - v_0\right) \\ &= \left(\frac{u_1 - u_0}{2} + \frac{u_2 - u_0}{2}\right)\left(\frac{v_1 - v_0}{2} + \frac{v_2 - v_0}{2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)[(u_1 - u_0)(v_1 - v_0) + (u_2 - u_0)(v_2 - v_0) + \\ &\quad (u_1 - u_0)(v_2 - v_0) + (u_2 - u_0)(v_1 - v_0)] \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)[2M + 2M + (u_1 - u_0)(v_2 - v_0) + (u_2 - u_0)(v_1 - v_0) \\ &\quad - (u_1 - u_0)(v_1 - v_0) - (u_2 - u_0)(v_2 - v_0)] \\ &= M + \left(\frac{1}{4}\right)[(v_2 - v_0)(u_1 - u_0) + (v_1 - v_0)(u_2 - u_1)] \\ &= M + \left(\frac{1}{4}\right)[(u_1 - u_0)(v_2 - v_0)] \\ g(u_3, v_3) &> M \end{aligned}$$

Bu bir çelişkidir çünkü M maksimumdu, Dolayısıyla g maksimuma iki yerde ulaşamaz (Morris, 1994) .

Aşağıda verilen ikili matrisin işbirlikçi bir oyun olduğunu düşünelim (Morris,1994).

$$\begin{bmatrix} (2,-1) & (-2,1) & (1,1) \\ (-1,2) & (0,2) & (1,-2) \end{bmatrix}$$

Bu matrisin maksimin değeri $v_1 = -\frac{2}{5}$ ve $v_2 = 1$ olarak hesaplanmıştır. Ayrıca ödeme bölgesi aşağıda verilmiştir.



Şekil 2.7: Ödeme Bölgesi

Statüko noktası (maksimin değeri) $(u_0, v_0) = (-2/5, 1)$ olarak yazarsak, hakem kararı çifti $(-2/5, 1)$ 'in domine edildiği ödeme bölgesindeki noktalar arasında bulunur. Bu noktalar pareto optimaldir. Şekilde bu noktalar $(0,2)$ den $(1,1)$ 'e giden doğru parçası üzerindeki tüm noktalardır. Buna göre hakem kararı çifti bu doğru üzerinde

$$g(u, v) = (u - u_0)(v - v_0)$$

fonksiyonunun maksimum olduğu nokta bulunarak hesaplanır. Bu doğru parçası üzerinde

$$u + v = 2 \Rightarrow v = -u + 2$$

yazabiliriz. Böylece problem tek değişkenli bir fonksiyonun maksimizasyonuna indirgenmiş olur.

$$g(u, v) = (u + 2/5)(v - 1) = (u + 2/5)(-u + 1)$$

$$g(u, v) = -u^2 + 3u/5 + 2/5$$

$$\frac{\partial g(u)}{\partial u} = -2u + 3/5 = 0$$

Buradan $u = \frac{3}{10}$ ve $v = \frac{17}{10}$ bulunur.

Bu nokta $(\frac{3}{10}, \frac{17}{10})$ hakem kararı çifti yani oyunun çözümüdür.

2.7.3 N-Kişilik İşbirlikçi Oyunlar

Önceki bölümde stratejik işbirliğinden bahsedildi, stratejik işbirliğinde oyuncular, oynadığı stratejilerde karşılıklı işbirliği yapıyorlardı ama oyunun sonunda ödemeleri paylaşmıyorlardı. Bu bölümde incelenecek olan oyunlarda oyuncular tam anlamıyla işbirliği yapmaktadır. Yani hem stratejik işbirliği hem de oyunun sonunda elde edilen toplam ödemeyi belli bir kurala göre paylaşarak işbirliği yapıyorlar. Bu tarz oyunlarda oyuncular kümesi koalisyon olarak adlandırılır. Bu kümedeki oyuncular yalnızca ortak strateji üzerine, aralarında bağlayıcı olan, bir anlaşma yapmaz aynı zamanda bu kümedeki her bireyin kazançları (ödentileri) bir havuzda toplanır ve toplam ödeme belli bir şekilde paylaşılır. Bunun olabilmesi için ödemelerin oyuncular arasında transfer edilebilir olmasını, örneğin para gibi, varsaymamız gerekir. Burada oyuncu sayısının ikiden fazla olması gerektiği şeklinde bir varsayım yapılamaz fakat iki oyunculu durum ya trivialdir yada daha önce bahsedilen oyunlara benzer bir oyundur (Morris, 1994).

Bu bölümde anlatılan teori hem sıfır toplamlı hem de sıfır toplamlı olmayan oyunlar için geçerlidir.

Tanım 2.24 (Koalisyon) : Koalisyon, temel olarak müşterek strateji oluşturan ve toplam ödemenin üyeler arasında nasıl paylaşılacağı üzerinde anlaşılan, oyuncuların kümesinin bir alt kümesidir. Koalisyon üyelerinin kendi aralarında yaptığı anlaşmalar her üye için mutlak şekilde bağlayıcıdır. Koalisyon ile ilgili notasyon şu şekildedir:

Tüm N oyuncunun oluşturduğu küme P ile gösterilir, koalisyon büyük el yazısı harfleriyle, S , T , U gibi, gösterilir (Morris,1994).

Tanım 2.25: Herhangi bir koalisyon için $S \subseteq P$ için S 'nin karşı (mualif) koalisyonu $S^C = P - S = \{P \in P : P \notin S\}$ şeklinde tanımlanır.

Oyuncuların tümünden oluşan koalisyon Grand koalisyon olarak adlandırılır. Bu koalisyonun karşı koalisyonu da boş koalisyon olarak adlandırılır. Ayrıca genel olarak N oyunculu bir oyunda 2^N koalisyon vardır.

2.7.3.1 Karakteristik Fonksiyon

Oluşturulan bir S koalisyonu ve bu koalisyonla karşı oluşturulmuş olan S^C koalisyonunu birer oyuncuymuş gibi düşünebiliriz. Ozaman işbirlikçi bir oyun bu iki oyuncu arasında oynanan işbirlikçi olmayan bir oyun haline gelmiş olur. Eğer koalisyon ve karşı koalisyon işbirliği yaparsa Grand koalisyon oluşturulmuş olur (Morris,1994).

Tanım 2.26: N oyunculu bir oyun için

$$P = \{P_1, P_2, \mathbf{K}, P_N\}$$

ve P_i oyuncusu için strateji kümesi X_i ile gösterilsin, $S \subseteq P$ bir koalisyon olsun. S 'nin boş olmadığını ve tüm oyunculardan oluşmadığını varsayalım. Bu koalisyon için tam ortak (müşterek) stratejiler $P_i \in S$ için X_i 'lerin kartezyen çarpımlarının elemanlarıdır. Benzer şekilde karşı koalisyon için tam ortak (müşterek) stratejiler $P_i \notin S$ için X_i 'lerin kartezyen çarpımlarının elemanlarıdır.

Bu durumda S ve S^C arasındaki oyun bir ikili matris (bi-matrix) oyunu (sıfır toplamı olmayan) olarak ifade edilebilir. Bu matrisin satırları S 'nin tam ortak stratejilerine karşılık gelir. Kolonlar ise S^C 'nin tam ortak stratejilerine karşılık gelir. Matrisin elemanları ise sayı çiftlerinden meydana gelir. Bu sayı çiftlerinin ilk elemanları S koalisyonundaki oyuncuların ödentilerinin toplamıdır, ikinci elemanları ise karşı koalisyondaki oyuncuların ödentilerinin toplamıdır (Morris,1994).

Tanım 2.27: S koalisyonu için ikili matristen hareketle hesaplanan maksimin değeri S 'nin karakteristik fonksiyonu olarak tanımlanır ve $v(S)$ ile gösterilir. Buna göre S 'nin elemanları en azından $v(S)$ kadar toplam ödeme elde ederler.

Teorem 2.13 (Superadditivity): S ve T ortak (müşterek) olmayan koalisyonlar olsun. O zaman,

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$$

İspat: Karakteristik fonksiyon tanımından S için bir ortak strateji vardır. Bu ortak stratejiye göre S nin elemanlarının elde edeceği toplam kazancın alt sınırı en az $v(S)$ kadardır. Benzer durum T için de geçerlidir. S ve T ayrı koalisyonlar olduğu için bu maksimin sonuçlarına göre oynamak S ve T 'nin her üyesi için makuldür. Bu iki koalisyonun birleşimi için bir ortak strateji oluşturulursa bu ortak stratejiye göre oyuncuların elde edeceği toplam ödeme en azından $v(S)+v(T)$ kadar olur, bundan fazlada olabilir (Morris, 1994).

Bu teoreme göre aşağıda verilen iki sonuca ulaşılır (Morris,1994).

1. Eğer $S_1, S_2, \dots, S_k$ herhangi ikisi ortak olmayan koalisyonlar ise o zaman

$$v\left(\bigcup_{i=1}^k S_i\right) \geq \sum_{i=1}^k v(S_i)$$

2. Herhangi N kişilik bir oyun için

$$v(P) \geq \sum_{i=1}^N v(\{P_i\})$$

Tanım 2.28: $P=\{P_1, \dots, P_N\}$ oyuncuların kümesinden ve bir v fonksiyonundan oluşan karakteristik fonksiyon formunda bir oyun,

$$v(\emptyset) = 0$$

S ve T ' ortak (müşterek) olmayan koalisyonlar iken,

$$v(\{P_1, P_3\}) > v(\{P_1\}) + v(\{P_3\})$$

sağlıyorsa, P 'nin tüm alt kümeleri için tanımlanır.

2.7.3.2 Esas (Essential) ve Esas Olmayan (Inessential) Oyunlar

Oyunları koalisyon kurmaya gerek olup olmadığına göre ayırıştırırsak, koalisyon kurmanın gerek olduğu oyunlar esas (essential) gerek olmadığı oyunlar ise esas olmayan (inessential) oyunlar olarak adlandırılır (Morris,1994).

Tanım 2.29: Karakteristik fonksiyon formunda N kişilik bir v oyunu

$$v(P) = \sum_i^N v(\{P_i\})$$

ise, esas olmayan (inessential) olduğu söylenir. Inessential olmayan oyunlar esas (essential) oyunlardır.

Teorem 2.14: S bir esas olmayan (inessential) oyunda oyuncuların oluşturduğu herhangi bir koalisyon olsun. O zaman

$$v(S) = \sum_{P \in S} v(\{P\})$$

dir.

İspat: Teoremdeki eşitliğin olmadığını kabul edelim. Sonuç 1'den

$$v(S) > \sum_{P \in S} v(\{P\})$$

ve superadditivity den,

$$v(P) \geq v(S) + v(S^C) > \sum_i^N v(\{P_i\})$$

yazılır. Bu esas olmayan (inessential) oyunun tanımıyla çelişir. Bu yüzden esas olmayan (inessential) bir oyunda koalisyon kurmaya gerek yoktur. Yani işbirliği daha büyük bir ödemeye neden olmaz (Morris, 1994).

Teorem 2.15: Sıfır toplam normal formdaki iki kişilik bir oyun karakteristik fonksiyon formunda esas olmayan (inessentialdir).

İspat: Minimaks teoremine göre satır oyuncusu için oyunun değeri, $v(\{P_1\})$, ile sütun oyuncusu için oyunun değeri, $v(\{P_2\})$, birbirinin ters işaretlisidir. Bu yüzden toplamları sıfırdır. Ayrıca, sıfır toplam özelliğinden $v(P)=0$ dır. Bu yüzden

$$v(P) = v(\{P_1\}) + v(\{P_2\})$$

dir (Morris,1994).

2.7.3.3 Tahsis (Imputations)

N oyunculu bir oyunda bir koalisyon kurulduğunu düşünelim. Oyunun sonunda koalisyondaki oyuncular arasında ödemelerin nasıl paylaşılacağı oyuncular için önemlidir. Oyunculara giden kazançlar bir N-sıralı $\vec{x}$ vektörünün sayılarından oluşur. Böyle bir N-sıralı vektörün, oyunun sonunda tüm oyuncular için kabul edilebilmesi için iki koşul sağlamalıdır. Bunlar bireysel rasyonellik ve kolektif rasyonelliktir. Koalisyondaki oyunculara yapılacak olan ödemeleri gösteren N-sıralı vektör bu iki koşulu sağlıyorsa (tahsis) imputasyon olarak adlandırılır. (Morris,1994).

Tanım 2.30: $v, P=\{P_1, K, P_N\}$ oyunculu karakteristik fonksiyon formunda N kişilik bir oyun olsun. Eğer aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa, Bir N sıralı $\vec{x}$ vektörünün elemanlarının bir (tahsis) imputasyon olduğu söylenir.

1. Bireysel rasyonellik. Tüm P_i oyuncuları için $x_i \geq v(\{P_i\})$

2. Kolektif rasyonellik. $\sum_{i=1}^N x_i = v(P)$

Bu iki koşulun nasıl elde edildiğini açıklayacak olursak;

Bireysel rasyonellik için: Eğer herhangi bir i için $x_i < v(\{P_i\})$ ise P_i oyuncusuna x_i kadarlık bir ödeme verecek hiçbir koalisyon yoktur. P_i oyuncusunun kendi başına oyuna devam etmesi daha iyidir.

Kolektif rasyonelliği açıklamak için ilk olarak,

$$\sum_{i=1}^N x_i \geq v(P) \quad (2.5)$$

durumunu inceleyelim. Bu eşitsizliğin yanlış olduğunu kabul edelim. Ozaman,

$$b = v(P) - \sum_{i=1}^N x_i > 0$$

yazabiliriz. Bu yüzden oyuncular Grand koalisyon kurarlar ve toplam ödentiği

$$x'_i = x_i + \frac{b}{N}$$

şeklinde paylaşırlar. Böylece her oyuncu daha fazla kazanç elde ettiği için $\bar{x}$ imputasyonunu tüm oyuncular kabul eder ve imputasyon gerçekleşir. Imputasyon gerçekleşirse eğer (2.5) doğru olur.

İkinci olarak,

$$\sum_{i=1}^N x_i \leq v(P) \quad (2.6)$$

durumunu inceleyelim. Bunun için $\bar{X}$ 'in gerçekleştiğini kabul edelim. Yani, S bir koalisyon ve bu koalisyonun elemanları ve bu koalisyonun karşı koalisyonunun elemanları oyunun sonunda ödemeleri paylaşım tarzı olarak $\bar{x}$ üzerinde anlaşsın. Ozaman superadditivity kullanarak,

$$\sum_{i=1}^N x_i = \sum_{P_i \in S} x_i + \sum_{P_i \in S^C} x_i = v(S) + v(S^C) \leq v(P)$$

yazabiliriz. Buna göre (2.5) ile (2.6)'nin birleşimi kolektif rasyonellik koşulunu verir (Morris,1994).

Teorem 2.16: v karakteristik fonksiyon formunda N kişilik bir oyun olsun. Eğer v esas olmayan (inessential) ise, ozaman yalnızca bir tahsise (imputation) sahiptir. Şöyle ki;

$$\bar{x} = (v(\{P_1\}), \mathbf{K}, v(\{P_N\}))$$

Eğer v esas (essential) ise ozaman v sonsuz çoklukta tahsise (imputation) sahiptir.

İspat: ilk olarak v 'nin esas olmayan (inessential) olduğunu ve $\bar{x}$ 'in herhangi bir j için bir tahsis (imputasyon) olduğunu kabul edelim.

Bireysel rasyonellikten, eğer

$$x_j > v(\{P_j\})$$

ozaman, esas olmayan (inessential) tanımından

$$\sum_{i=1}^N x_i > \sum_{i=1}^N v(\{P_i\}) = v(P)$$

yazarız. Bu kolektif rasyonellikle çelişir ve bu her i için $x_i = v(\{P_i\})$ olduğunu gösterir.

İspatın diğer kısmı için, v 'nin esas (essential) olduğunu, $v(P) > \sum_{i=1}^N v(\{P_i\})$,

ve

$$b = v(P) - \sum_{i=1}^N v(\{P_i\}) > 0$$

olduğunu kabul edelim. Negatif olmayan ve toplamı b 'yı veren herhangi bir N sıralı $\bar{a}$ vektörü için,

$$x_i = v(\{P_i\}) + a_i$$

bir tahsis (imputation) tanımlarız. $\vec{a}$ 'nın sonsuz sayıda seçimi olduğu için sonsuz sayıda tahsis (imputation) vardır (Morris,1994).

Bu teoreme göre esas (essential) oyunlar için çok fazla tahsis (imputation) vardır. Buradaki problem bunların hangisinin çözüm olabileceğini belirlemektir. Bunun için herhangi bir tahsisi (imputation) diğerine nasıl tercih edeceğimizi tanımlamamız gerekir. Bu noktada tahsislerin (imputation) baskınlığı kavramı bir çözüm olarak karşımıza çıkmaktadır

Tanım 2.31: v karakteristik fonksiyon formunda bir oyun, S bir koalisyon ve $\vec{x}$, $\vec{y}$ tahsisler (imputation) olsun. Ozaman aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa $\vec{x}$, S koalisyonunda $\vec{y}$ 'yi domine eder.

$$1. x_i > y_i, \quad \text{her } P_i \in S \text{ için}$$

$$2. \sum_{P_i \in S} x_i \leq v(S)$$

Bu ilişki için notasyon $\vec{x} \mathbf{p}_S \vec{y}$ şeklindedir (Morris,1994).

2.7.3.4 Çekirdek (Core)

N kişilik işbirlikçi oyunlar için geliştirilen çözüm kavramlarından ilki çekirdek (core)'dir. Herhangi bir oyunda domine edilen bir tahsis (imputation) asla gerçekleşmeyeceği fikrine dayanır. Oyuncular kendilerine daha fazla pay veren bir koalisyona geçme eğiliminde olurlar (Morris, 1994).

Tanım 2.32: v karakteristik fonksiyon formunda bir oyun olsun. v 'nin çekirdeği herhangi bir koalisyonda başka bir tahsis (imputation) tarafından domine edilmeyen tüm tahsislerden (imputation) oluşur.

Bu tanıma göre $\vec{x}$ çekirdekteki bir tahsis ise (imputation) hiçbir oyuncu grubu bu tahsisi (imputation) başka bir tahsisle (imputation) değiştirmek ve farklı bir koalisyon kurmak istemez. Bu kavramın önemli bir kusuru vardır. Bu kusur çekirdeğin boş olabileceği durumudur. Bir tahsisin (imputation) çekirdek'te olup olmadığına karar verebilmek için bu tanımın yanında aşağıdaki teoreme de ihtiyaç duyarız (Morris, 1994).

Teorem 2.17: v karakteristik fonksiyon formunda N oyunculu bir oyun ve $\vec{x}$ bir tahsis (imputation) olsun. Ozaman her S koalisyonu için ancak ve ancak

$$\sum_{P_i \in S} x_i \geq v(S)$$

ise , $\vec{x}$ v 'nin çekirdeğinin içinde olan bir tahsis (imputation) dir. (İspat için: Bkz. Morris, 1994).

Sonuç Teorem 2.1: v karakteristik fonksiyon formunda N oyunculu bir oyun ve $\vec{x}$, N sıralı bir vektör olsun. Eğer $\vec{x}$ aşağıdaki iki koşulu sağlıyorsa o zaman çekirdekte olan bir tahsis (imputation) dir.

1. $\sum_{i=1}^N x_i = v(P)$
2. $\sum_{P_i \in S} x_i = v(S)$ her S koalisyonu için.

İspat: $\vec{x}$ aşağıdaki iki koşulu sağladığını kabul edelim. 1 oyunculu bir koalisyonu ikinci koşulu uygularsak bu bireysel rasyonelliğin sağladığını gösterir. İlk koşul ise kolektif rasyonelliktir. Bu yüzden $\vec{x}$ bir tahsistir. Önceki teoremden dolayı çekirdeğin içindedir (Morris,1994).

Örnek 2.4 (Kullanılmış Araba Oyunu):

Bu konuyla ilgili teoride yer alan önemli bir örnek “Kullanılmış Araba Oyunu” dur. (Morris,1994).

Nixon adında bir adam bundan böyle kullanmayacak olduğu eski bir arabası vardır ve onu satmak istiyor. Eğer satamazsa arabanın Nixon için bir değeri yoktur. Arabayı almak isteyen iki kişi var Agnew ve Mitchell, Agnew arabaya 500\$ veriyor, Mitchell ise arabanın değerinin 700\$ olduğunu düşünüyor. Oyun arabayı satın almak için fiyat teklif eden oyunculardan ve Nixon'un bu tekliflerden birini kabul etmesinden yada bunların ikisini de reddetmesinden oluşuyor.

Oyuncuların isimlerini N, A, M şeklinde kısaltarak bu oyunun karakteristik fonksiyon formunu yazalım.

$$\begin{aligned} v(\{N\}) &= 0, & v(\{A\}) &= 0, & v(\{M\}) &= 0 \\ v(\{N, A\}) &= 500, & v(\{N, M\}) &= 700, & v(\{A, M\}) &= 0 \\ v(\{N, A, M\}) &= 700 \end{aligned}$$

Bu değerlerin nasıl elde edildiğini açıklayacak olursak (Morris,1994) ; ilk olarak tek oyunculu $\{N\}$ koalisyonunu düşünelim. N 'nin 2 tane stratejisi vardır. Bunlar ya yüksek olan teklifi kabul etmek yada yüksek olan teklif kendisine göre belirlediği bir alt sınırdan daha az ise her ikisinin de teklifini reddetmek. Karşı koalisyon $\{A,M\}$ için şöyle bir ortak strateji vardır; A ve M 'nin her ikisinin de sıfır teklif etmesi, oyuncular bu şekilde oynarlarsa N oyuncusunun kendi stratejilerine göre elde edeceği maksimum ödeme sıfırdır. Maksimin değeri tanımından (N oyuncusu için oyunun değeri) $v(\{N\}) = 0$. Buna göre diğer iki tek oyunculu koalisyonun maksimin değeri sıfırdır. Çünkü karşı koalisyon daima bu oyuncunun teklifini reddeder. Yani oyuncuların sıfırdan farklı bir ödeme elde edebilmesi için Nixon'la anlaşması gerekir. M 'nin ne oynadığından bağımsız olarak, $\{N,A\}$ koalisyonu toplamda 500\$ verecek pek çok ödemeye sahiptir. Örneğin, A , N 'ye 500\$ verip arabayı satın alabilir. Bu durumda N 'ye yapılan ödeme 500\$ A 'ya yapılan ödeme ise 0 dır. Benzer şekilde $\{N,M\}=700$ 'dır. Son olarak Grand koalisyon 700\$ karakteristik fonksiyon değerine sahiptir. Bu olası en büyük toplam ödentidir.

Bir (x_N, x_A, x_M) tahsisi çekirdeğin içinde yer alıyorsa aşağıdaki koşulları sağlamalıdır.

$$\begin{aligned} x_N &\geq 0, & x_A &\geq 0, & x_M &\geq 0 \\ x_N + x_A + x_M &= 700 \\ x_N + x_A &\geq 500, & x_N + x_M &\geq 700, & x_A + x_M &\geq 0 \end{aligned}$$

Bu eşitlik ve eşitsizlikler sistemi çözüldüğü zaman,

$$500 \leq x_N \leq 700, \quad x_M = 700 - x_N, \quad x_A = 0$$

sonucu elde edilir. Buna çözüme göre oyunun sonucunu şu şekilde yorumlarız; Mitchell 500\$ ile 700\$ arasında bir teklif vererek (bu para N 'nin kazandığı miktarı gösterir) arabayı satın alır. Angnew arabayı satın alamaz ama onun oyunda yer alması fiyatı 500\$'ın üzerine çıkaramaya zorlar.

Örnek 2.5 (Oy Verme Oyunu):

Teoride önemli bir yeri olan diğer bir örnek için aşağıdaki “Oy Verme” oyununu ele alalım.

Bir şehrin yerel yönetimi şehir meclisi, meclis başkanı ve belediye başkanı tarafından yürütülüyor. Meclis, altı üye ve bir başkandan oluşuyor. Herhangi bir kanun tasarısının, bu şehirde yasalaşabilmesi iki şekilde oluyor.

1. Meclis çoğunluğu (meclis üyeleri arasında eşitlik olması durumunda başkanın oyuyla) yasayı onaylar ve belediye başkanı imzalar.
2. Konsey yasa çıkarır ve belediye başkanı veto eder. Fakat konseydeki yedi üyenin en az altsının oyuyla veto kalkar. (Bu durumda meclis başkanı daima oy kullanmak zorundadır).

Oyun verilen yasayı onaylayan veya onaylamayan sekiz kişiden oluşmaktadır (Morris, 1994).

Bu oyunun normal formunda ödemeler, kazanan tarafta olmayla elde edilen güç birimidir. Normal formdan hareketle oyunun karakteristik fonksiyonunu oluşturacak olursak; sekiz oyuncu arasında oluşturulan koalisyon “kazanan koalisyon” bunun karşı koalisyonu ise “kaybeden koalisyon” olarak adlandırılır. Eğer S koalisyonu kazanan koalisyon ise $v(S)=1$, kaybeden koalisyon ise $v(S)=0$ olarak tanımlanır. Her tek kişilik koalisyon kaybeden ayrıca Grand koalisyon ise daima kazanan koalisyon olduğu için, 8 sıralı $(x_m, x_c, x_1, \dots, x_6)$ vektörü,

$$x_m, x_c, x_1, \dots, x_6 \geq 0$$

ve

$$x_m + x_c + x_1 + \dots + x_6 = 1$$

ise bir tahsistir (imputation). Burada M: belediye başkanı, C: meclis başkanı, x_i , $i=1,2,\dots,6$: meclis üyelerini gösterir (Morris, 1994).

Oy verme oyunları işbirlikçi oyunlar teorisinde önemli bir yer tutmaktadır. Bununla ilgili olarak bilinen çalışmalar “Birleşmiş Milletlerdeki Güç Dağılımı”(Jones, 1980) ve “Farklı Eyaletlerdeki Seçmenlerin Göreli Güçleri Üzerine Yapılan USA Başkanlık Seçiminin Electoral College Method Etkisi” (Owen, 1982).

Teorem 2.18: Oy verme oyunu boş bir çekirdeğe (core)’a sahiptir.

İspat: Tersinden, kabul edelim ki $(x_m, x_c, x_1, \dots, x_6)$ çekirdekte olsun. Meclisin en az altı üyesinden oluşan herhangi bir koalisyonu “kazanan” koalisyondur. Buna göre

$$\sum_{P_i \in S} x_i = v(S)$$

den

$$x_m + x_c + x_1 + \dots + x_6 \geq 1$$

ve çekirdekteki terimlerden herhangi birisi çekirdekten çıkarılırsa, yukarıdaki eşitsizlik yine sağlar. Çünkü tüm x ’ler negatif olmayandır ve toplamı 1 dir. Bu ise yukarıdaki eşitsizlikteki tüm x ’lerin sıfır olduğunu belirtir. Bu bir çelişkidir (Morris,1994).

Bu oyun oyunlar teorisinin önemli bir kategorisine girmektedir.

Tanım 2.33: karakteristik fonksiyon formunda bir v oyunu aşağıdaki koşulları sağlıyor ise “simple” olarak adlandırılır.

1. Her S koalisyonu için $v(S)$ ya 0’dır yada 1’dir.
2. $v(\text{Grand koalisyon})=1$ dir.
3. $v(\text{herhangi bir tek oyunculu koalisyon})=0$ dır.

Simple oyunda $v(S)=1$ olan koalisyon kazanan koalisyon $v(S)=0$ olan koalisyon ise kaybeden koalisyon olarak adlandırılır.

2.7.3.5 Shapley Değerleri

Oyuncuların final ödentilerinin ne olması gerektiğinin adil bir yöntemini tanımlamak için geliştirilmiştir. Bu yöntem bir oyuncunun ait olduğu koalisyona katkısının ne olduğunu bulmaya çalışır. Bir oyunun karakteristik fonksiyonu v ve S , P_i ’nin yer aldığı bir koalisyon ise, o zaman

$$d(P_i, S) = v(S) - v(S - \{P_i\})$$

sayısı, P_i oyuncusunun S koalisyonuna katılmasıyla bu koalisyona yaptığı katkının ölçüsüdür. Bu sayılar Shapley değerlerinin tanımında kullanılmaktadır. Shapley değerlerinin nasıl elde edileceğini açıklayacak olursak; P_i oyuncusu için ilk olarak şuna

dikkat etmeliyiz; oyuncular topluca (kolektif olarak) bir imputasyon üzerinde anlaşır anlaşmaz, bu oluşturulan koalisyon Grand koalisyon gibi varsayılmalıdır. Bunun nedeni kolektif rasyonellik koşulu, imputasyonlar yoluyla, tüm ödemelerin toplamının $v(P)$ olmasını sağlar. Bu varsayıma göre Grand koalisyonun oluşma sürecine dikkat edersek; bu süreç bir oyuncuyla başlar, ikinci bir oyuncu katılır ve daha sonra onlara üçüncü bir oyuncu daha katılır ve böyle devam eder. Bu süreç listedeki k. oyuncunun koalisyona k. sırada katılan oyuncu olduğu, oyuncuların sıralanmış listesi tarafından ifade edilir. Karakteristik fonksiyonu aşağıda verilen örnekte P_1 için d değerini hesaplayalım (Morris,1994).

$$\begin{aligned}
 v(P) &= 100, & v(\emptyset) &= 0 \\
 v(\{P_1\}) &= 0, & v(\{P_2\}) &= -10, & v(\{P_3\}) &= 10, & v(\{P_4\}) &= 0 \\
 v(\{P_1, P_2\}) &= 25, & v(\{P_1, P_3\}) &= 30, & v(\{P_1, P_4\}) &= 40 \\
 v(\{P_2, P_3\}) &= 10, & v(\{P_2, P_4\}) &= 10, & v(\{P_3, P_4\}) &= 30 \\
 v(\{P_1, P_2, P_3\}) &= 50, & v(\{P_1, P_2, P_4\}) &= 30 \\
 v(\{P_1, P_3, P_4\}) &= 50, & v(\{P_2, P_3, P_4\}) &= 40
 \end{aligned}$$

Grand koalisyon oluşurken oyuncuların bu koalisyona katılma sıralamalarından birisi

$$P_3, P_2, P_1, P_4$$

dür. Başka birçok olası sıralama vardır. Bu sıralamaları

$$4 \times 3 \times 2 = 4!$$

şeklinde buluruz. Genel olarak N oyuncu için N! dir.

Grand koalisyonun rasgele oluşmasıyla gerçekleşen sıralamanın seçimini düşünelim.

Genel olarak N! olası durum olduğu için bu durumların her birine $\frac{1}{N!}$ olasılığı

verilebilir. Şimdi yukarıda verilen sıralamaya göre oluşan Grand koalisyona göre P_1 oyuncusunun koalisyona katkısını ölçelim.

$$d(P_1, \{P_3, P_2, P_1\}) = v(\{P_3, P_2, P_1\}) - v(\{P_3, P_2\}) = 50 - 10 = 40$$

Bu sayı P_1 'in koalisyona katılmasıyla ona yapmış olduğu katkının miktarıdır (Morris,1994).

Shapley değerinin (f_i) tanımı şu şekildedir: Oyuncuların $N!$ olası sıralamalarının her biri için aynı hesaplamaları yap; bu olası sıralamaların her birini $\frac{1}{N!}$ olasılığıyla ağırlıklandır, sonuçları topla. Bu tanım iki şekilde kullanılır. İlki f_i 'nin hesaplanmasını oldukça kolaylaştıracak bir formül geliştirmek için, ikincisi ise $\vec{f} = (f_1, \mathbf{K}, f_N)$ 'in bir imputasyon olduğunu göstermek için (Morris,1994).

İlkiyle başlayalım, P_i oyuncusunun k pozisyonunda olduğu sıralamaları elde edelim. k ya kadarki oyuncuların kümesini S ile gösterelim ve P_i 'de bu kümede yer alsın. P_i 'den önceki oyuncuların sıralamalarını ve P_i 'den sonraki oyuncuların sıralamalarını değiştirerek P_i 'nin yine k . sırada olduğu yeni sıralamalar elde ederiz. Ayrıca hem orijinal hem de değiştirilmiş sıralama için f_i 'yi tanımlayan ifadedeki toplamda yer alan terim,

$$d(P_i, S) = v(S) - v(S - \{P_i\})$$

dir.

P_i 'den önceki oyuncuların $(k-1)!$ permutasyonu vardır.

P_i 'den sonraki oyuncuların ise $(N-k)!$ permutasyonu vardır.

Bir diyagram yardımıyla Grand koalisyounun oluşumunu şu şekilde açıklayabiliriz: k , S koalisyouna katılan son oyuncu, $|S|$ S 'deki oyuncu sayısı ve $N-|S|$ oyuncu k 'dan sonra koalisyona katılıyor. Buna göre Grand koalisyounun oluşumu,

$$(1)(2), \dots, (|S|-2)(|S|-1), k, (N-|S|)(N-|S|-1), \dots, (2)(1)$$

şeklinde olur (Barron, 2008).

Böylece $d(P_i, S)$ ifadesi, k 'dan önce $(|S|-1)!$ ve k 'dan sonra $(N-|S|)!$ olmak üzere, $(|S|-1)!(N-|S|)$ kez meydana gelir. Buna göre Shapley değeri aşağıdaki formül yardımıyla hesaplanır (Morris, 1994).

$$f_i = \sum_{P_i \in S} \frac{(N-|S|)(|S|-1)!}{N!} d_i(P_i, S)$$

f_i sayısı P_i için Shapley değeri olarak adlandırılır. Ayrıca, $\mathbf{f}$ ise oyun için Shapley vektörü olarak adlandırılır.

Kullanılmış araba oyununu için Shapley vektörünü hesaplamaya çalışalım (Morris, 1994).

f_N 'i hesaplamak için N 'nin yer aldığı koalisyonları yazalım.

$$v(\{N\})=0, \quad v(\{N, A\})=500, \quad v(\{N, M\})=700, \quad v(\{N, A, M\})=700$$

$$d(N, \{N\}) = 0 - 0 = 0$$

$$d(N, \{N, A\}) = v(\{N, A\}) - v(\{A\}) = 500 - 0 = 500$$

$$d(N, \{N, M\}) = v(\{N, M\}) - v(\{M\}) = 700 - 0 = 700$$

$$d(N, \{N, A, M\}) = v(\{N, A, M\}) - v(\{A, M\}) = 700 - 0 = 700$$

$$\begin{aligned} f_N &= \frac{(3-1)!(1-1)!}{3!}(0) + \frac{(3-2)!(2-1)!}{3!}(500) + \frac{(3-2)!(2-1)!}{3!}(700) + \frac{(3-3)!(3-1)!}{3!}(700) \\ &= 433,33 \end{aligned}$$

f_A 'i hesaplamak için A 'nın yer aldığı koalisyonları yazalım.

$$v(\{A\})=0, \quad v(\{N, A\})=500, \quad v(\{A, M\})=0, \quad v(\{N, A, M\})=700$$

$$d(A, \{A\}) = 0 - 0 = 0$$

$$d(A, \{N, A\}) = v(\{N, A\}) - v(\{N\}) = 500 - 0 = 500$$

$$d(A, \{A, M\}) = v(\{A, M\}) - v(\{M\}) = 0 - 0 = 0$$

$$d(A, \{N, A, M\}) = v(\{N, A, M\}) - v(\{N, M\}) = 700 - 700 = 0$$

$$f_A = \frac{(3-1)!(1-1)!}{3!}(0) + \frac{(3-2)!(2-1)!}{3!}(500) + \frac{(3-2)!(2-1)!}{3!}(0) + \frac{(3-3)!(3-1)!}{3!}(0)$$

$$=83,33$$

f_M 'i hesaplamak için M'in yer aldığı koalisyonları yazalım.

$$v(\{M\}) = 0, \quad v(\{N, M\}) = 700, \quad v(\{A, M\}) = 0, \quad v(\{N, A, M\}) = 700$$

$$d(M, \{M\}) = 0 - 0 = 0$$

$$d(M, \{N, M\}) = v(\{N, M\}) - v(\{N\}) = 700 - 0 = 700$$

$$d(M, \{A, M\}) = v(\{A, M\}) - v(\{A\}) = 0 - 0 = 0$$

$$d(M, \{N, A, M\}) = v(\{N, A, M\}) - v(\{N, A\}) = 700 - 500 = 200$$

$$f_M = \frac{(3-1)!(1-1)!}{3!}(0) + \frac{(3-2)!(2-1)!}{3!}(700) + \frac{(3-2)!(2-1)!}{3!}(0) + \frac{(3-3)!(3-1)!}{3!}(200)$$

$$=183,33$$

Buna göre oyunun çözümünü yorumlayalım; Mitchell arabayı 433,33\$ satın alır, fakat Agnew 'e kendisine karşı teklifte bulunmaması için 83,33\$ rüşvet ödemek zorundadır. Toplam ödenti olan 700\$'ın oyuncular arasında paylaşma oranlarını gösteren Shapley vektörü $\vec{f} = (433.33, 83.33, 183.33)$ dür. Bu vektör Nixon'un en güçlü pazarlık pozisyonunda olduğunu göstermektedir (Morris,1994).

Teorem 2.19: v karakteristik fonksiyon formunda bir oyun olsun, ozaman Shapley vektörü bir tahsisdir (imputation).

İspat: Tahsis (imputation) tanımından $\vec{f}_i$ vektörü bireysel ve kolektif rasyonellik koşullarını sağlamalıdır.

Bireysel rasyonelliği ispatlamak için, $f_i \geq v(\{P_i\})$ olduğunu göstermemiz gerekir. Superadditivity'den, $v(P_1 \cup P_2) \geq v(\{P_1\}) + v(\{P_2\})$, eğer $P_i \in S$ ise

$$v(S) \geq v(S - \{P_i\}) + v(\{P_i\})$$

$$d(P_i, S) = v(S) - v(S - \{P_i\}) \geq v(\{P_i\})$$

Böylece,

$$f_i \geq \left(\sum_{P_i \in S} \frac{(N-|S|)! (|S|-1)!}{N!} \right) v(\{P_i\})$$

Yukarıdaki eşitsizlikteki toplam oyuncuların farklı sıralamalarının toplamıdır. Buna göre parantez içindeki ifade 1'e eşittir. O zaman

$$f_i \geq v(\{P_i\})$$

dir.

Kolektif rasyonelliği ispatlamak için $\sum_{i=1}^N f_i = v(P)$ olduğunu göstermemiz gerekir.

$$\sum_{i=1}^N f_i = \sum_{i=1}^N \sum_{P_i \in S} \frac{(N-|S|)! (|S|-1)!}{N!} d(P_i, S)$$

T sabit, S 'den farklı ve boş olmayan bir koalisyon olmak üzere, sağ taraftaki çift toplamda, $v(T)$ 'nin yer aldığı terimleri göz önünde bulundurursak, o zaman $v(T)$ 'yi içeren pozitif ve negatif katsayılı olmak üzere iki çeşit terim vardır. $T=S$ olduğu zaman, pozitif katsayılı olan terim aşağıdaki gibidir.

$$\frac{(N-|T|)! (|T|-1)!}{N!}$$

$T = S - \{P_i\}$ olduğu zaman, negatif katsayılı olan terim aşağıdaki gibidir.

$$- \frac{(N-1-|T|)! |T|!}{N!}$$

dir. İlk çeşit terim $|T|$ kez meydana gelir (yani T 'nin her elemanı için 1 kez) ve ikinci çeşit terim $N-|T|$ kez meydana gelir (T 'nin dışındaki her bir oyuncu için 1 kez) böylece çift toplamdaki $v(T)$ 'nin katsayısı,

$$\frac{|T| (N-|T|)! (|T|-1)!}{N!} - \frac{(N-|T|) (N-1-|T|)! |T|!}{N!}$$

$$\frac{(N-|T|)! |T|!}{N!} - \frac{(N-|T|)! |T|!}{N!} = 0$$

Bu yüzden çift toplamdaki geriye kalan terimler Grand koalisyon ve boş koalisyonun solundaki terimlerdir (katsayılarıdır). Boş koalisyon $v(\emptyset) = 0$ olduğu için

$$\sum_{i=1}^N f_i = \frac{N(0)!(N-1)!}{N!} v(P) = v(P)$$

Buna göre $\hat{f}_i$ bireysel ve kolektif rasyonellikleri sağladığı için bir imputasyondur (Morris, 1994).

“Oy verme” oyunu için Shapley değerlerini hesaplayalım (Morris,1994);

M- belediye başkanı

C- meclis başkanı

$x_1, \mathbf{K}, x_6$ — meclis üyelerini göstermek üzere,

f_M 'in hesaplanmasıyla başlayacak olursak, f_i 'nin tanımından sıfırdan farklı terimler bu koalisyon için $S - \{M\}$ kaybeden koalisyondur. Yani yasa çıkarabilecek ama başkanın vetosunu aşamayacak olan koalisyonlardır. S koalisyonu ise kazanan koalisyondur. Burada 4 çeşit kazanan koalisyon vardır. Bunlar,

1. S , belediye başkanı, 3 tane meclis üyesi ve meclis başkanından oluşur.
2. S , belediye başkanı, 4 tane meclis üyesinden oluşur.
3. S , belediye başkanı, 4 tane meclis üyesinden ve Meclis başkanından oluşur.
4. S , belediye başkanı, 5 tane meclis üyesinden oluşur.

İlk çeşit kümeden, 6 tane üyeden 3 tanesi $\binom{6}{3} = 20$ farklı şekilde seçildiğinden, 20 tane

vardır. $|S| = 5$ olduğu için

$$\frac{(N - |S|)(|S| - 1)!}{N!} = \frac{(8 - 5)!(5 - 1)!}{8!} = \frac{1}{280}$$

Buna göre bu 20 tane kümenin f_M 'e katkısı $\frac{20}{280} = \frac{1}{14}$ dür.

İkinci çeşit kümeden 15 tane oluşturulabilir. Bunların f_M 'e katkısı,

$$(15) \frac{(8 - 5)!(5 - 1)!}{8!} = \frac{3}{56}$$

Üçüncü çeşit kümeden 15 tane oluşturulabilir. Bunların f_M 'e katkısı,

$$(15) \frac{(8 - 6)!(6 - 1)!}{8!} = \frac{5}{56}$$

Dördüncü çeşit kümeden 6 tane oluşturulabilir. Bunların f_M 'e katkısı,

$$(6) \frac{(8 - 6)!(6 - 1)!}{8!} = \frac{1}{28}$$

dir. Bu sayıları topladığımız zaman,

$$f_M = \frac{1}{14} + \frac{3}{56} + \frac{5}{56} + \frac{1}{28} = \frac{1}{4}$$

olarak bulunur.

f_C 'yi hesaplamak için, f_C 'ye katkı yapan kümeleri belirleyelim. Bunlar iki çeşittir,

1. S, başkan, üç üye ve belediye başkanından oluşur. (Üyeler arasındaki oylarda, eşitlik olması durumunda meclis başkanı yasayı onaylar ve belediye başkanı imzalar.)
2. S, başkan ve 5 üyeden oluşur. (bu durumda yasa veto edilebilir, fakat meclis başkanının oyuyla veto kalkabilir.)

İlk çeşit koalisyondan 20 tane, ikinci çeşit koalisyondan ise 6 tane vardır. Ozaman,

$$f_C = (20) \frac{(8-5)!(5-1)!}{8!} + (6) \frac{(8-6)!(6-1)!}{8!} = \frac{3}{28}$$

Şimdide, üyelerin Shapley değerlerini hesaplayacak olursak. f_i 'lerin toplamı 1'e eşit olduğundan ve simetriden dolayı f_i 'ler eşittir. Bu yüzden her i için,

$$f_i = \left(\frac{1}{6}\right) \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{28}\right) = \frac{3}{28}$$

olarak bulunur. Bu sonuçlara göre üyelerin ve meclis başkanlarının güçleri eşittir, belediye başkanı ise bunlardan çok daha güçlüdür.

2.8 Yayvan (Extensive) Formdaki Oyunlar

Yayvan formdaki oyunlar genel olarak şu özelliklere sahiptir (Morris, 1994);

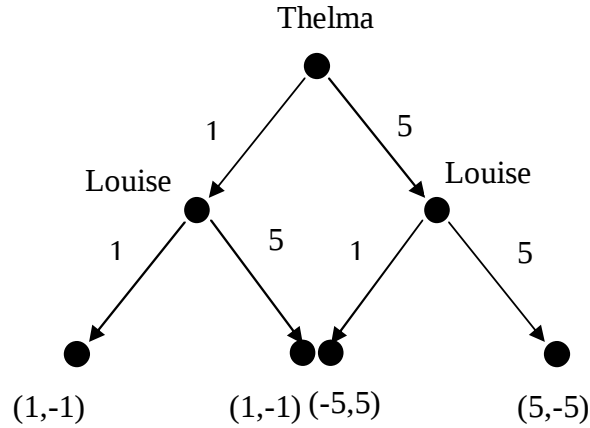
1. Sınırlı sayıda oyuncu vardır.
2. Her oyuncu oyunun kuralları hakkında tam bilgiye sahiptir.
3. Oyundaki farklı noktalarda her oyuncu bir dizi seçim yada hamleye sahiptir. Bu seçim kümesi sonludur.
4. Oyun sonlu sayıda hamleden sonra biter.
5. Oyun bittikten sonra her oyuncu sayısal bir ödeme elde eder.

Bu sayı negatif olabilir, bu durumda bu sayının mutlak değeri kayıp olarak ifade edilir. Burada yayvan formdaki oyunlar ile yalnızca tümel (complete) bilgiye dayalı yayvan formdaki oyunlar belirtmektedir.

Bir oyunu ağaç diyagramı vasıtasıyla nasıl ifade edildiğini Matching Coins adındaki oyun için gösterelim (Morris, 1994).

Örnek 13 Para Eşleştirme (Matching Coins):

Thelma ve Louise adında iki oyuncu vardır. Oyuncuların her biri diğerine göstermeksizin elinde bozuk para (nikel, penny) saklıyor. Daha sonra her iki oyuncuda ellerini açıyor, eğer paralar aynı ise, Thelma paraların ikisini alıyor eğer farklı ise bu defa Louise her iki parayı alıyor. Matching coins için ağaç diyagramı Şekil 2.8'de gösterilmiştir.



Şekil 2.8: Matching Coins İçin Ağaç Diagramı

Diyagramdaki küçük halkalar köşe olarak adlandırılır. İki köşe arasındaki yönlendirilmiş doğru parçalarına ise kenar adı verilir. Oyun en tepe noktada oynanmaya başlar Louise'in iki köşesinin birinden geçerek alttaki dört köşeden birine ulaşır. Bunların her biri Thelma'dan Louise'e yapılan ödemeleri ifade eden düzenli sayı çiftleriyle etiketlenir. Örneğin Thelma elinde Penny'yi saklar ve Louise'de Nikeli saklarsa, o zaman oyun Thelma'nın köşesinden soldaki kenar yoluyla hareket eder ve Louise'in soldaki köşesinden sağdaki kenar yoluyla $(-1,1)$ ile ifade edilen alttaki köşeye ulaşır. Bu Thelma 1 kaybetti (yani -1 kazandı) ve Louise 1 kazandı anlamına gelir (Morris, 1994).

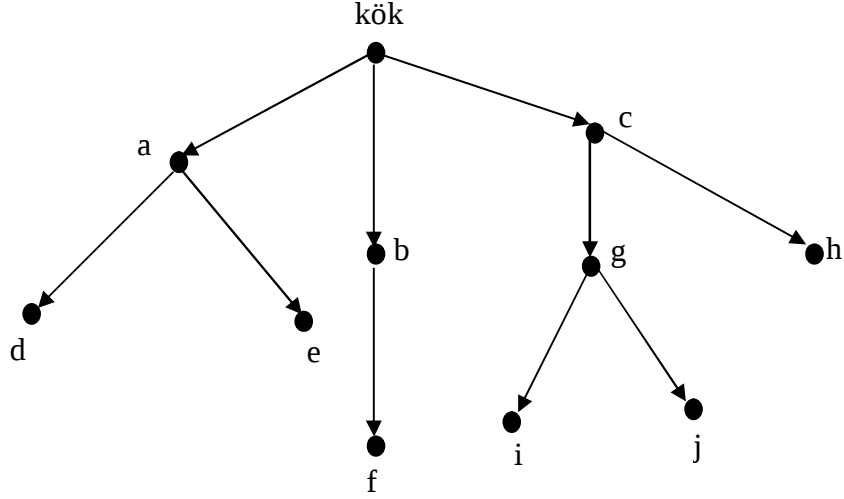
Tanım 2.33: Yönlendirilmiş bir grafik köşe adında sonlu sayıda noktalar ile bu noktalarla diğer farklı köşeleri birbirine bağlayan kenar adında yönlendirilmiş doğru parçalarının sonlu bir kümesidir. Kenarlar için ok başı ve köşeler için noktalar çizilerek yönlendirilmiş bir grafik çizilebilir.

Bu konuyla ilgili notasyon şu şekilde verilmektedir. Yönlendirilmiş grafikleri belirtmek için büyük harf kullanacağız, köşeleri belirtmek için de küçük harf kullanacağız. Kenarlar ise (u,v) şeklinde belirtilecek; bu kenarın u köşesinden v köşesine gittiği anlamına gelir. Yönlendirilmiş G grafiği için tüm köşelerin kümesi $V(G)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.34: Yönlendirilmiş bir G grafiğinde bir u köşesinden bir v köşesine giden herhangi bir patika G 'nin köşelerinin $(v_0, v_1, \dots, v_n)$ sonlu bir dizisidir. Burada $n \geq 1$, $v_u = u$, $v_n = v$ ve $i=1,2,\dots,n$ için (v_{i-1}, v_i) G 'nin bir kenarıdır.

Tanım 2.35: Yönlendirilmiş bir grafik kendisine gelen hiçbir kenarın olmadığı kök adında bir r köşesine sahipse ve grafikteki diğer her bir v köşesi için r 'den v 'ye bir tek patika varsa bir ağaç olarak tanımlanır.

Ağaçlar genellikle kök tepede olacak şekilde çizilir. Şekil 2.9'daki ağaçta görüldüğü gibi tüm köşeler etiketlenmiştir. Bu ağaç 11 köşeye ve 10 kenara sahiptir.



Şekil 2.9: Ağaç

Tanım 2.36: Eğer (u, v) bir kenar ise v köşesi u köşesinin bir çocuğudur. Ayrıca, bu durumda v 'nin ebeveyni u köşesidir.

Şekil 2.8.2'teki ağaçta f köşesi b 'nin çocuğu, g köşesi c 'nin çocuğudur, e ve d 'nin ebeveyni a , ve a, b, c 'nin ebeveyni ise köktür. Herhangi bir ağaçta u 'nun çocukları $Ch(u)$ şeklinde gösterilir. Burada şunu da belirtelim, herhangi bir köşe birçok çocuğa sahip olabilir. Ebeveynsiz tek köşe köktür (Morris, 1994).

Tanım 2.37: Herhangi bir çocuğu olmayan köşe ise (terminal) uç köşe olarak adlandırılır.

Bizim örneğimizde uç köşeler d, e, f, i, j, h 'dir.

Tanım 2.38: Uç yada kök olmayan herhangi bir köşe ara köşe olarak adlandırılır.

Örneğimizdeki ara köşeler a, b, c, g dir.

Tanım 2.39: Eğer u dan v ye bir patika varsa v köşesi u 'nun torunudur. Bu durumda u , v 'nin bir atasıdır. Ayrıca tüm köşelerin atası kök'tür.

Örnekte c , i 'nin ve j 'ni atası, i ve j ise c 'nin torunudur.

Tanım 2.40: Bir ağaçtaki herhangi bir patikanın uzunluğu patikadaki kenar sayısı kadardır ve bu patikalar birbirlerini kesmezler yani farklı köşeleri birbirine bağlarlar. Bu yüzden ağaçtaki bir patikanın uzunluğu en fazla kenar sayısının bir eksiği kadardır.

Tanım 2.41: Bir T Ağacın derinliği ise ağaçtaki en uzun patikanın uzunluğu kadardır ve $De(T)$ ile gösterilir.

Şekil 2.8.2'de (kök,c,g,j) 3 uzunluklu bir patikadır ve ağaçtaki en uzun patikadır buna göre bu ağacın derinliği 3'tür.

Teorem 2.20:

1. Ebeveyni birden fazla olan köşe yoktur.
2. Eğer u ve v T 'nin köşeleri olsun. Eğer u 'dan v 'ye bir patika varsa, o zaman v 'den u 'ya bir patika yoktur.
3. Her uç olmayan köşe bir uç toruna sahiptir.

İspat:

1. Kabul edelim ki w , u ve v gibi iki tane ebeveyni olan bir köşe olsun. Ağaç tanımından kökten u 'ya bir patika vardır. Bu patikaya (u,w) kenarı ilave etmek, kökten w 'ya bir patika üretir. Benzer şekilde kökten v 'ye giden patikaya (v,w) kenarı ilave etmek, kökten w 'ya başka bir patika üretir. Bu iki patika aynı değildir. Çünkü bu iki patikanın birindeki son kenar (u,w) diğerindeki son kenar (v,w) dur. Bu durum ağaç tanımına uymaz, bu yüzden w iki tane ebeveyne sahip olamaz.
2. v 'den u 'ya bir patika olduğunu kabul edelim. Şimdi kökten u 'ya giden bir patikayla başlayalım ve ilk olarak bu patikaya u 'dan v 'ye giden bir patika ekleyelim ve daha sonra v 'den tekrar u 'ya giden bir patika ekleyelim. Bu süreç kökten u 'ya giden ikinci bir patika üretir. Bu durum ağaç tanımına uymaz. Bu yüzden v 'den u 'ya bir patika yoktur.
3. u uç olmayan bir köşe olsun, u 'dan başlayan en uzun patikayı düşünersek. Bu patikanın sonundaki köşe uç köşedir. Çünkü eğer değilse patika uzatılabilir. Bu ise seçilen patikanın en uzun olduğu gerçeğiyle uyumsuz.

(Morris, 1994).

Tanım 2.42: T bir ağaç ve u , bu ağacın herhangi bir köşesi olsun. u tarafından belirlenen T 'nin kesmesi, T_u şeklinde gösterilir ve şu şekilde tanımlanır; T_u nun köşeleri u nun kendisi artı u nun tüm torunlarıdır. T_u nun kenarları u köşesinden başlayan T ağacının tüm kenarlarıdır. Eğer u , T ağacının kökü ise o zaman $T_u = T$ ve

eğer u uç köşe ise o zaman T trivial bir ağaçtır. Şekil 2.9'daki ağacın T_c kesmesi c, g, h, i, j köşelerine ve (c, g) , (g, i) , (g, j) , (c, h) kenarlarına sahiptir.

Teorem 2.21: Herhangi bir T ağacı ve u köşesi için, T_u kökü u olan bir ağaçtır.

İspat: İlk olarak, T_u ağacının u ya gelen hiç kenarı olmasın, çünkü eğer olursa, Tanım 2.42'den böyle bir kenarın başlangıç köşesinin u 'nun bir torunu olması lazım. İkinci olarak, v , T_u nun bir köşesi olsun. O zaman v , u 'nun bir torunudur ve böylece T_u ağacında u dan v ye patika vardır (Morris, 1994).

Tanım 2.43: T bir ağaç ve u , T nin bir köşesi olsun. Bölüm ağacı, T/u şeklinde gösterilir ve şu tanımlanır: T/u 'nun köşeleri u nun torunlarının silindiği T ağacının köşeleridir, kenarları ise T/u nun köşelerinde biten ve T ağacından başlayan kenarlardır. Bu yüzden u , T/u nun uç köşesidir.

Örneğin, Şekil 2.9'daki ağaçta bölüm ağacı T/a (a, d) , (a, e) kenarları ve d, e köşeleri silinerek elde edilir. Eğer u , T 'nin kökü ise o zaman T/u 'nun trivial olduğuna dikkat edilmelidir. Eğer u , uç köşe ise o zaman T/u T ağacının kendisidir (Morris, 1994).

Teorem 2.22: Eğer T kökü r olan bir ağaç ve u bu ağacın bir köşesi ise, T/u kökü r olan bir ağaçtır.

Tanım 2.44: T bir ağaçsa o zaman T 'nin alt ağacı S , köşeleri T 'nin köşelerinin bir alt kümesi olan, kenarları T nin kenarlarının bir alt kümesi olan, kökü T 'nin kökü olan ve uç köşeleri T 'nin köşelerinin bir alt kümesi olan bir ağaçtır. Şekil 2.9'daki ağaçta alt ağacın köşeleri c, h, g, j ve kenarları $(\text{kök}, c)$, (c, h) , (c, g) , (g, j) dir.

Teorem 2.23: S , T 'nin bir alt ağacı olsun o zaman S , kökten S 'nin uç köşelerine giden patikaların birleşmesinden oluşur. Diğer taraftan, eğer U , T ağacının tüm uç köşelerinin kümesinin boş olmayan herhangi bir alt kümesi ise, o zaman kökten U 'nun herhangi bir elemanına giden tüm patikaların birleşmesi bir alt ağaç oluşturur. Bu alt ağacın uç köşelerinin kümesi kesinlikle U dur.

Örneğin Şekil 2.9'daki ağacın $U = \{d, f, j\}$ uç köşelerin kümesini düşünelim; o zaman U tarafından tanımlanan alt ağaç, $(\text{kök}, a, d)$, $(\text{kök}, b, f)$, $(\text{kök}, c, g, j)$ şeklindeki üç patikanın birleşmesinden meydana gelir (Morris, 1994).

2.8.1 Oyun Ağaçları

T , N kişilik trivial olmayan bir ağaç olsun. Oyuncuları $P_1, P_2, \dots, P_n$ ile gösterelim. Eğer T 'nin uç olmayan her köşesi P_i ile etiketlenilmiş ve tüm uç köşeler, v , N sıralı $\vec{p}(v)$ ödeme vektörüyle etiketlenilmişse bu ağaç oyun ağacı olarak tanımlanır. Bu ağaca karşılık gelen oyuna ise ağaç oyunu denir.

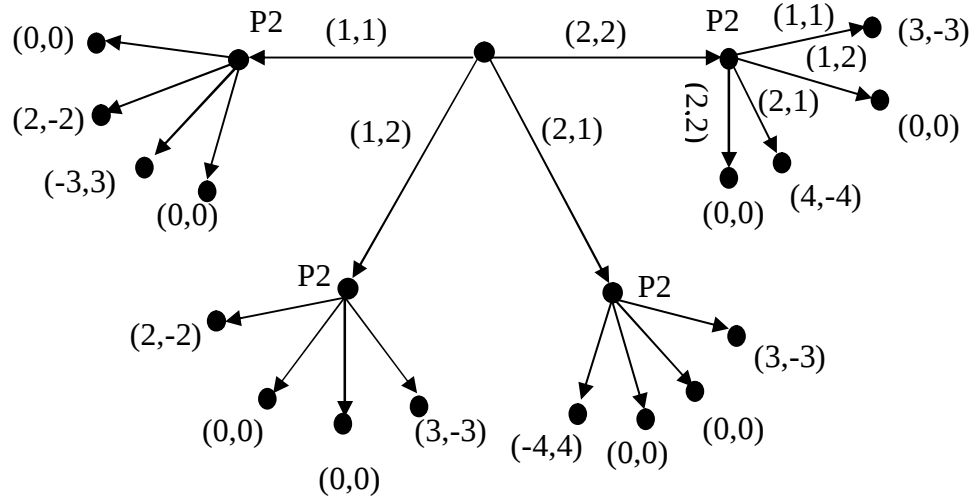
Eğer T bir oyun ağacı ise o zaman T 'nin kesim ağaçları da bir oyun ağacıdır. T 'nin T/u bölüm ağacı ise u köşesine atanmış herhangi bir N -sıralısı var ise bir oyun ağacı olur. Ek olarak T 'nin bir alt ağacında bir oyun ağacıdır. Bir ağaç oyunu aşağıdaki gibi oynanır (Morris,1994).

Kök oyuncusu kendisine ait olan çocuklarından birisini seçer. Eğer bu çocuk ara köşe ise seçilen bu köşedeki oyuncu da kendi çocuklarından birini seçer, bu oyun bu şekilde bir v uç köşesine ulaşıncaya kadar sürer. Oyuncular bu bitiş köşesinde etiketlenen N sıralı ödeme vektörüne göre ödeme elde eder. Yani P_i oyuncusu $\vec{p}(v)$ vektörünün i -inci bileşeni $p_i(v)$ kadar ödeme alır.

Örnek 14 (Two finger mora):

Bu oyun iki oyuncuyla oynanır. Her iki oyuncu bir yada iki parmağını kaldırır ve aynı anda rakibinin kaldırdığı parmak sayısını 1 yada 2 diyerek tahmin eder. Eğer oyunculardan birinin tahmini, rakibininki yanlışken, doğruysa ozaman toplam kaldırılan parmak sayısı kadar para alır. Eğer her iki oyuncuda doğru yada yanlış tahminde bulunursa ozaman her ikisi de para kazanamaz (Morris,1994).

Two finger morra oyununu bir oyun ağacı olarak ifade edelim. Ağaç olarak tanımlanan oyunlarda oyuncular sırayla hareket (hamle) eder. Bu oyunda ise hamleler aynı anda gerçekleşiyor. Bu yüzden bu oyunu ağaç olarak ifade edebilmek için 3. bir kişiye ihtiyaç duyarız. Her iki oyuncu kaldıracağı parmak sayısını ve yapacağı tahmini bu tarafsız kişiye fısıldar. Daha sonra bu tarafsız kişi sonuçları açıklar. Böylelikle oyuncuların hareketleri art arda gelen hareketler şekline dönüşür.



Şekil 2.10: Two Figer Mora (İki Parmak Oyunu)

P1, 4 farklı oyun seçeneğine sahiptir. Bunların her biri (f,p) sıralı çiftleriyle ifade edilebilir. Burada “f” kaldırılan parmak sayısını, “p” tahmin edilen parmak sayısını gösterir. f ve p, ya 1 ya da 2 değerini alır. P1’ i kök kabul edersek, öncelikle P1 in dört çocuğu vardır, bunlar P2 ile gösterilmiştir. Bu çocukların tamamının da 4 çocuğu vardır, bu çocukların tümü ise uç köşedir.

2.8.2 Bilgi Kümeleri

P oyuncusu için bir bilgi kümesi S, tümü P’ye ait olan köşelerin kümesidir öyle ki; oyunun belli bir anında P oyuncusu bu köşelerden birinde olduğunu bilir fakat hangisinde olduğunu bilemez. Bu tanıma göre bilgi kümesi tek bir köşeden oluşuyorsa oyun tam bilgiye (perfect) dayalı bir oyundur, birden fazla köşeden oluşuyorsa oyun eksik bilgiye dayalı bir oyundur (Morris, 1994). Bilgi kümeleri yayvan biçimli oyunlarda kümedeki her bir köşenin kesikli bir çizgi ile birleştirilmesiyle gösterilir.

2.8.3 Seçim Fonksiyonları ve Stratejileri

Bir stratejinin ağlaması gereken üç koşul vardır. İlki strateji tam olmalıdır: Bir strateji oyunun bütün durumlarında uygulanabilir. İkincisi, strateji kesin olmalı: Verilen bir oyun durumunda yapılacak hamle tesadüfi yada oyuncunun keyfine göre değil de oyunun kuralı tarafından belirlenmelidir. 3. gerektirme ise bilgi kümeleri (tabloları) kabul edilmelidir. Bu bir stratejinin bir bilgi kümesi içerisindeki her köşede aynı hamleyi gerektirmesi anlamına gelir. Örneğin Two Finger Morra’da P2 için

herhangi bir strateji P_2 'nin 4 köşesinin her birinden aynı hareket (hamle) yapılmasını gerektirir (Morris,1994).

Tanım 2.45: T bir oyun ağacı ve P'de oyunculardan biri olsun. T ağacının P ye ait tüm köşelerinin kümesi üzerine tanımlı c fonksiyonu P için bir seçim fonksiyonu tanımlar. Şöyle ki P ye ait bütün u köşeleri için c (u) , u'nun bir çocuğu (ürünü) olmalıdır.

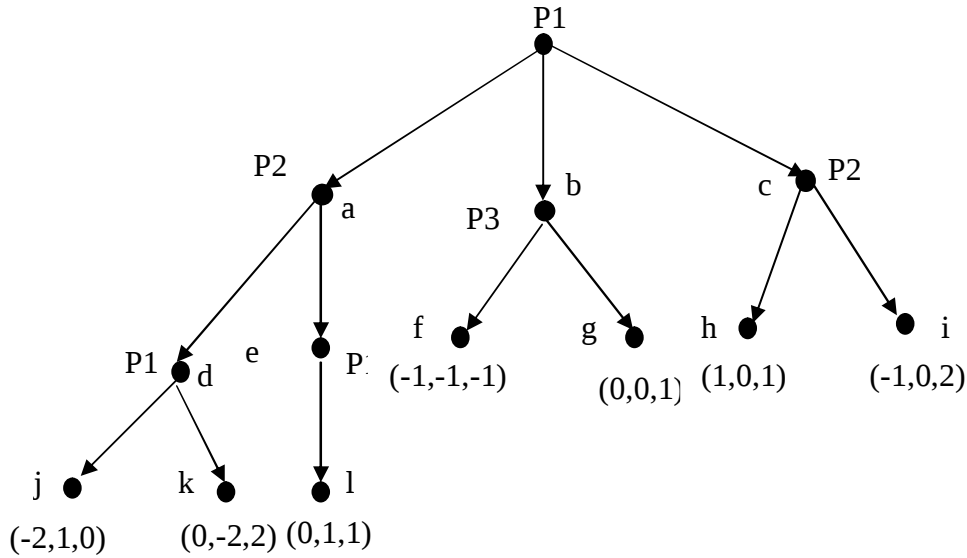
Eğer c seçim fonksiyonuna göre oynayan bir oyuncu u köşesine ulaşmış ise artık bundan sonra yapacağı her seçimde u'nun çocuklarını seçer. Yukarıda da belirtildiği gibi seçim fonksiyonu her bir oyuncu için ayrı ayrı tanımlanır. Oyundaki bir oyuncu için seçim fonksiyonu ise oyuncunun sahip olduğu oyundaki tüm köşelerde fonksiyon tarafından belirlenen hareketleri gösterir. Eğer oyun oynanırken oyuncu kendine ait bir köşeye ulaşmışsa seçim fonksiyonunun bu köşede tanımladığı hamleyi yapmalıdır.

Tanım 2.46: $P_1, P_2, \dots, P_N$ olmak üzere N tane oyuncu olduğunu kabul edelim. P_i oyuncusunun bütün seçim fonksiyonlarının kümesini Γ_i ile tanımlayalım. Verilen her bir P_i oyuncusu, seçim fonksiyonu $c_i \in \Gamma_i$ ye göre oynayacaktır, burada $1 \leq i \leq N$ dir. Böylelikle kökten bir uç köşeye bir patika belirlenmiş olacaktır. Patikanın sonlandığı w uç köşesinde etiketlenen N sıralı $\vec{p}(w)$ vektörünün i. bileşen numarası için bir $p_i(c_1, c_2, \dots, c_N)$ tanımlayalım. Bu tanımlamış olduğumuz miktar, oyuncular $(c_1, c_2, \dots, c_N)$ seçim fonksiyonuna göre oynadıkları zaman P_i oyuncusuna yapılacak olan ödemeyi göstermektedir.

2.8.4 Seçim Alt Ağaçları

Tanım 2.47: T bir ağaç ve P'de oyunculardan biri olsun ayrıca c'de P için bir seçim fonksiyonu olsun. (P,c)'yi T'nin kökünden uç köşesine bir patika olarak tanımlayalım öyle ki; u bu patika üzerinde P'ye ait bir köşe ise o zaman (u,c(u)) kenarı bu patikanın bir kenarıdır. Bu yüzden (P,c) patikası, P oyuncusunun c seçim fonksiyonuna göre oynadığında oyunun olası oynanmalarından birini temsil eder.

Burada oynanma, oyunda yer alan her oyuncunun kendi seçim fonksiyonlarının belirlediği hamlelere göre ayrı ayrı oynadıktan sonra bu hamleleri kesiştirdiğimizde kökten uç köşeye ulaşan patikalardan her biri anlamına gelmektedir. Örneğin aşağıdaki üç oyunculu oyunu düşünersek,



Şekil 2.11: Üç Oyunculu Oyun

P_1 'in c_1 fonksiyonunu kullandığını kabul edelim. $c_1(\text{kök})=a$, $c_1(d)=k$, $c_1(e)=l$ olsun. O zaman (kök, a,e,l) patikası bir (P_1, c_1) patikasıdır. Aynı zamanda (kök a,d,k) da bir (P_1, c_1) patikasıdır. Bu ağaç için bu şekilde yalnızca 2 patika yazılabilir (Morris,1994).

Tanım 2.48: T bir ağaç, P bir oyuncu ve c'de P'nin bir seçim fonksiyonu olsun P ve c tarafından belirlenen seçim alt ağacı tüm (P,c) patikalarının birleşimi olarak tanımlanır.

Teorem 2.23' ten bir seçim ağacının bir alt ağaç olduğu açıktır. Tüm alt ağaçlar ise seçim alt ağacı değildir. Şekil 2.10'da uç köşeleri j, k, h ve i olan alt ağaç herhangi bir oyuncu için bir seçim alt ağacı değildir. Eğer P_1 için bir seçim alt ağacı olsaydı, j ve k'yı içermeyecekti, P_2 için olsaydı ve i'yi içermezdi ve P_3 için olsaydı f ve g'yi içerirdi. Burada dikkat edilmesi gereken iki husus vardır. Bunlardan ilki, eğer u P oyuncusuna ait seçim alt ağacının bir köşesi ise o zaman u'nun alt ağaçta yalnızca 1 tane çocuğu vardır. Diğer taraftan P'den farklı bir oyuncuya ait seçim alt ağacının bir v köşesi, alt ağaçta bu köşenin tüm çocuklarına sahiptir. İkinci husus, seçim fonksiyonu hakkında gerekli olmayan bilgi seçim alt ağacı içinde yer almaz. Örneğin Şekil 2.10'daki ağaçta P_1 için iki farklı seçim fonksiyonu olduğunu düşünelim $c_1(\text{kök})=b$, $c_1(d)=k$, $c_1(e)=l$ ve $c'_1(\text{kök})=b$, $c'_1(d)=J$, $c'_1(e)=l$. Bu iki farklı seçim fonksiyonu açık bir şekilde benzer stratejiyi şekillendirir. Çünkü d köşesine asla ulaşılmaz. P_1 ve c_1

tarafından belirlenen seçim alt ağacı P_1 ve c_1' tarafından belirlenen seçim alt ağacının aynıdır (Morris, 1994).

Lemma 2.4: T bir oyun ağacı, P bir oyuncu ve c P için bir patika olduğunu ve aşağıdaki koşulları sağladığını kabul edelim.

* eğer w, P oyuncusunun sahip olduğu Q üzerinde bir patika ise o zaman ya $w=v$ dir yada $c(w)$ Q'nun üzerindedir. Bu durumda Q bir (P,c) patikasına uzatılmıştır.

İspat: Q' , Q'yu kapsayan en uzun patika ve (*)'daki koşulları sağlıyor olsun. Ayrıca z, Q' üzerindeki son köşe olsun. Eğer z uç köşe değilse, o zaman iki durum vardır; z ya P'ye aittir yada değildir. Eğer aitse $Q'' = Q' \cup (z, c(z))$ olsun. Eğer ait değilse ve y z'nin herhangi bir çocuğu ise $Q'' = Q' \cup (z, y)$ olsun. Her iki durumda da Q'' (*)'daki koşulları sağlar ve Q' 'den daha uzun bir patikadır. Bu Q' , Q'yu kapsayan en uzun patika olduğu gerçeğiyle çelişmektedir. Bu yüzden z bir uç köşe olmalıdır. Bundan dolayı Q' bir (P,c) patikasıdır.

Teorem 2.24: T bir oyun ağacı ve P de bu ağacın oyuncularından biri olsun. T nin bir S alt ağacı aşağıda belirtilen koşulları sağlıyorsa P ve seçim fonksiyonu c tarafından bir seçim alt ağacı tanımlanır.

1) Eğer u S'de bir köşe ve u P'ye aitse, o zaman u'nun çocuklarından biri kesin olarak S'nin içindedir.

2) Eğer u S'de bir köşe ve u P'ye ait değil ise, o zaman u'nun tüm çocukları S'nin içindedir (İspat için: Bkz. Morris, 1994).

Buna göre seçim fonksiyonlarını seçim alt ağaçlarıyla yer değiştirebiliriz. Önceki kullanmış olduğumuz notasyonu da değiştirirsek, $(S_1, S_2, \dots, S_N)$ N-sıralı seçim alt ağacından kaynaklanan P_i oyuncusuna yapılan ödemeler için $p_i(S_1, \dots, S_N)$ yazabiliriz. Ayrıca P için bir strateji, P'nin seçim fonksiyonu ve P tarafından belirlenen tüm seçim alt ağaçlarının kümesinin alt kümesinin bir elemanı olarak tanımlanır (Morris, 1994).

Tanım 2.49: T, N oyunculu bir oyun ağacı olsun. $P_1, P_2, \dots, P_N$ ve T'ye bağlı yayvan formdaki bir oyun, T ile beraber her bir P_i oyuncusu için seçim alt ağaçlarının toplamının (Σ_i) boş olmayan kümesinden oluşur. Σ_i kümesi P_i 'nin strateji kümesi olarak adlandırılır. Σ_i 'nin herhangi bir elemanı P_i 'nin bir stratejisidir.

Özetlersek, strateji kümeleri kavramı oyuncuların tam bilgiye sahip olmalarını engelleyen oyun kuralının oluşmasını sağlar. Örneğin, P_i 'nin oyunun belli bir anında

ulaşmış olduğu köşelerin kümesinin ne olduğunu bilmesine izin verilmezse, ozaman P_i 'nin strateji kümesi bu elde edilemeyen bilgiye bağlı farklı hareketleri (hamleleri) gerektiren seçim alt ağacını içermez (Morris, 1994). Genel olarak yayvan formdaki bir oyun aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\Gamma = (T, \{P_1, P_2, \dots, P_N\}, \{\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_N\})$$

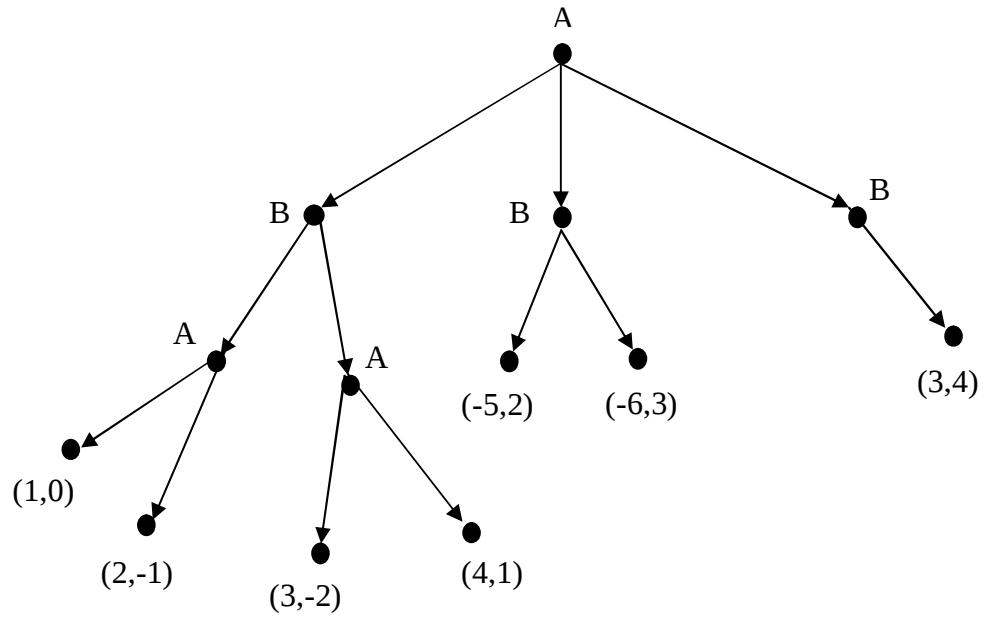
Burada Γ , T oyun ağaçlı, $P_1, P_2, \dots, P_N$ oyunculu ve sırasıyla bu oyuncuların sahip olduğu $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_N$ strateji kümeli bir oyun tanımlanmaktadır.

Her bir seçim alt ağacı (dolayısıyla her bir strateji) bir alt ağaçtır. Bu yüzden bir seçim alt ağacının kendisi bir oyun ağacıdır (Morris, 1994).

Eğer bir S_i seçim alt ağacı her bir Σ_i 'den seçilirse, o zaman S_i 'lerin kesişimleri kökten uç köşeye bir patikadır. Bu patika oyunun oynanmasını (history) ifade eder. S_i 'ye göre hareket eden her bir i oyuncu bu patikanın bittiği uç köşede etiketlenen N-sıralı vektörün elemanları, N tane oyuncunun ödemelerini verir ve $p_i(S_1, \dots, S_N)$ olarak yazılır. Bu değer, verilen seçim alt ağacına göre oynayan tüm oyuncuların meydana getirdiği, P_i oyuncusunun kazancını gösterir (Morris, 1994).

Örnek olarak, Şekil 2.12'de verilen oyun ağacını göz önüne alalım (Morris, 1994). Bu ağaç tam bilgiye sahip bir oyun olsun, oyunda A ve B olarak belirtilmiş iki oyuncu vardır. A oyuncusu 12 seçim fonksiyonuna, B oyuncusu da 4 seçim fonksiyonuna sahiptir. A'nın seçim fonksiyonunu hesaplamak için, A'ya ait 3 köşe olduğuna dikkat edilmeli. Köşelerden ikisi 2 çocuğa sahipken diğeri (kök) 3 çocuğa sahiptir. Böylece, seçim fonksiyonu sayısı $2 \times 2 \times 3 = 12$ 'dir. A oyuncusu için 6 tane seçim alt ağacı vardır. Bu alt ağaçların tamamı Şekil 2.13'te gösterilmektedir. Seçim alt ağaçlarını sayabilmek için, A'nın ortadaki çocuğunun seçimine karşılık gelen seçim ağacını M ile belirtelim. A'nın sağ taraftaki çocuğunun seçimine karşılık gelen seçim ağacını R ile belirtelim. Eğer A kökten hareketle sol taraftaki çocuğunu seçerse, 4 olası seçim ağacı vardır. Bunların her biri L_{xy} ismine sahiptir. Burada x ve y'nin her biri ya L yada R dir. Bu notasyonda x: B'nin sola hareket ettiği durumdaki A tarafından seçilen çocukları belirtir. y ise B'nin sağa hareketine cevap olarak A tarafından seçilen çocuklardır. Böylece bu 4 seçim alt ağacı LLL, LLR, LRL ve LRR'dır.

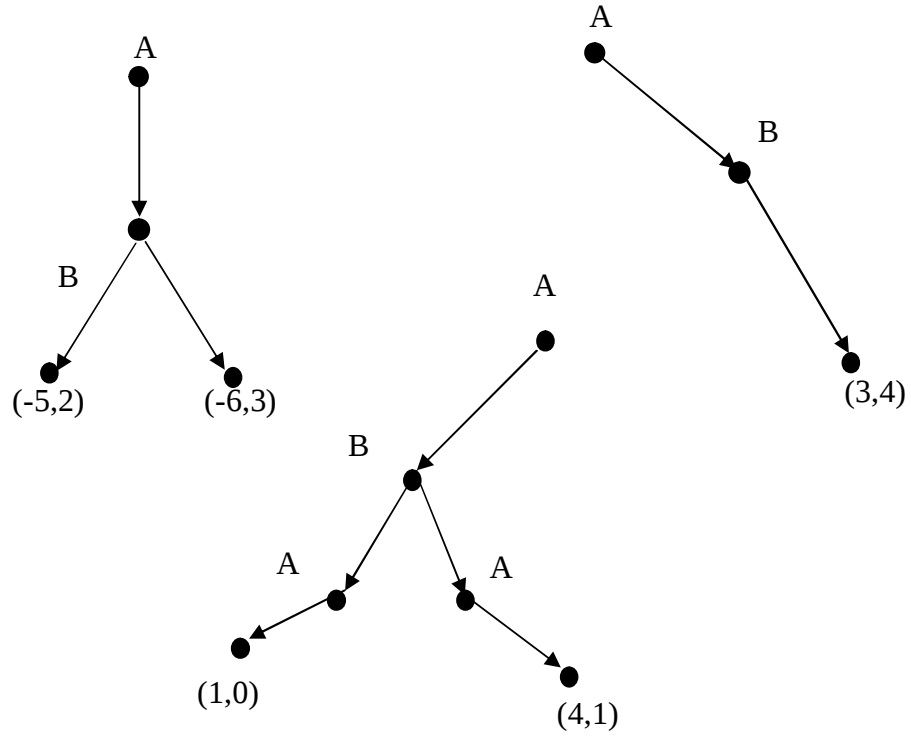
B için 4 tane seçim alt ağacı vardır. Bunlar x y ile belirtilir. Her bir x ve y, ya L yada R'dir. Burada, x: A sol taraftaki çocuğunu seçtiğinde B'nin cevabıdır (karşı hamlesidir). y ise, A ortadaki çocuğunu seçtiğinde B'nin cevabıdır. B için bu seçim alt ağaçlarının tamamı Şekil 2.14'de gösterilmiştir. Kabul edelim ki, B oyuncusu LL oynarken (A solu seçerse, B L ile cevap verecek, A ortayı seçerse, B L ile cevap verecek) A oyuncusu LRR (A solu seçtikten sonra, B L seçerse A R seçecek, B R seçerse A R seçecek) oynarsa o zaman B'ye ödeme -1 iken A'ya ödeme 2'dir (Morris, 1994).

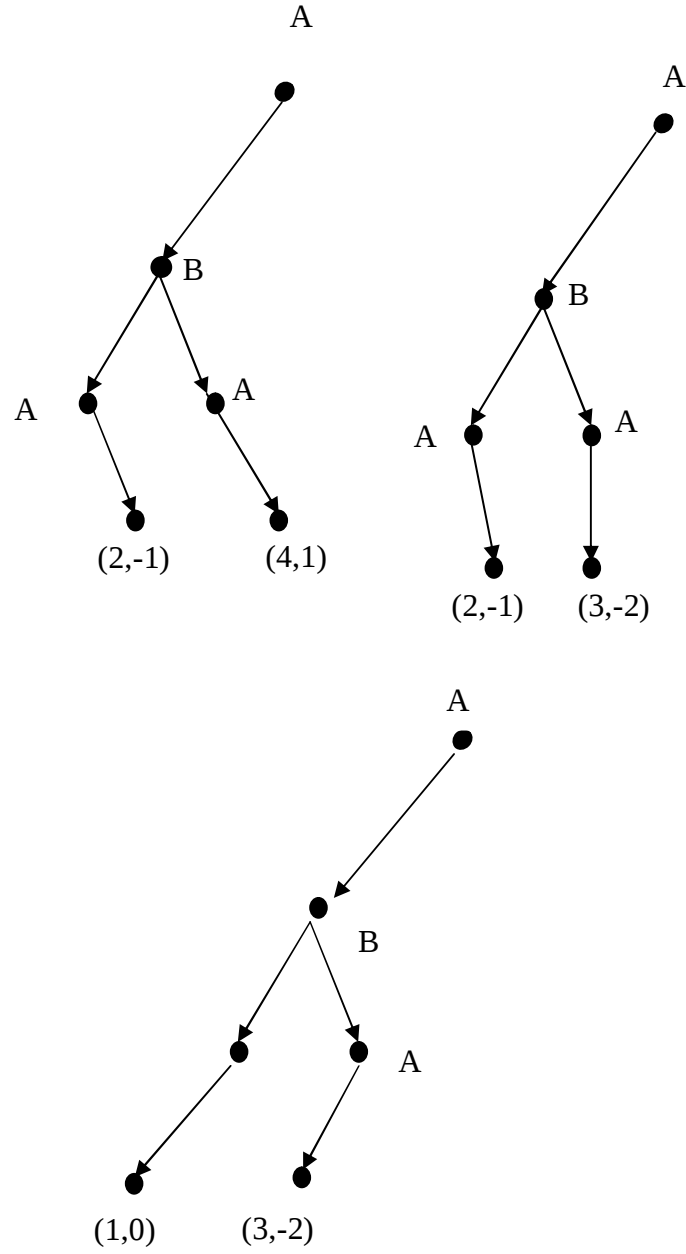


Şekil 2.12: Seçim Alt Ağacı Sorusu

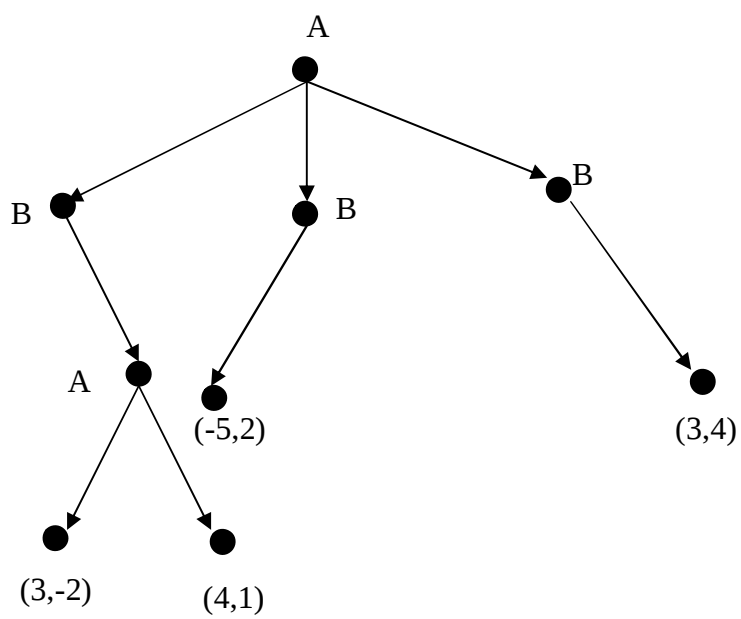
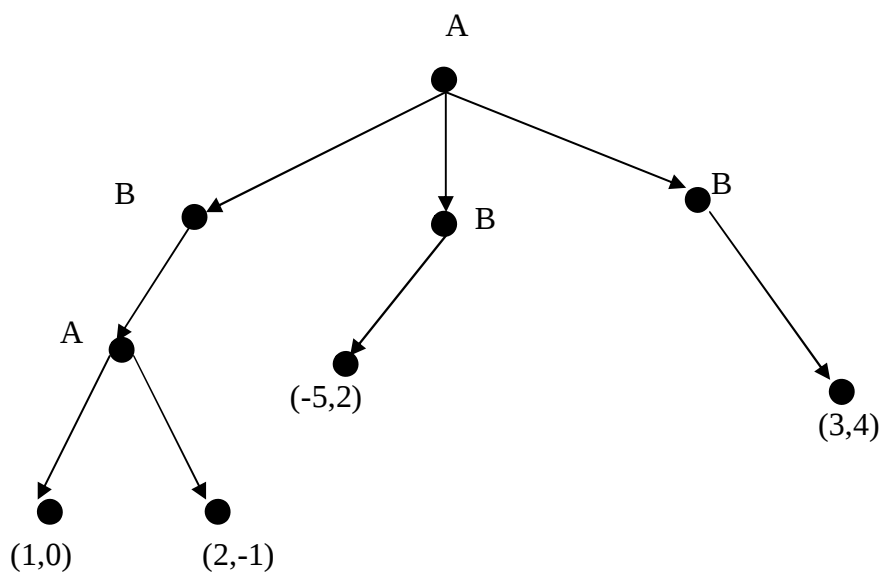
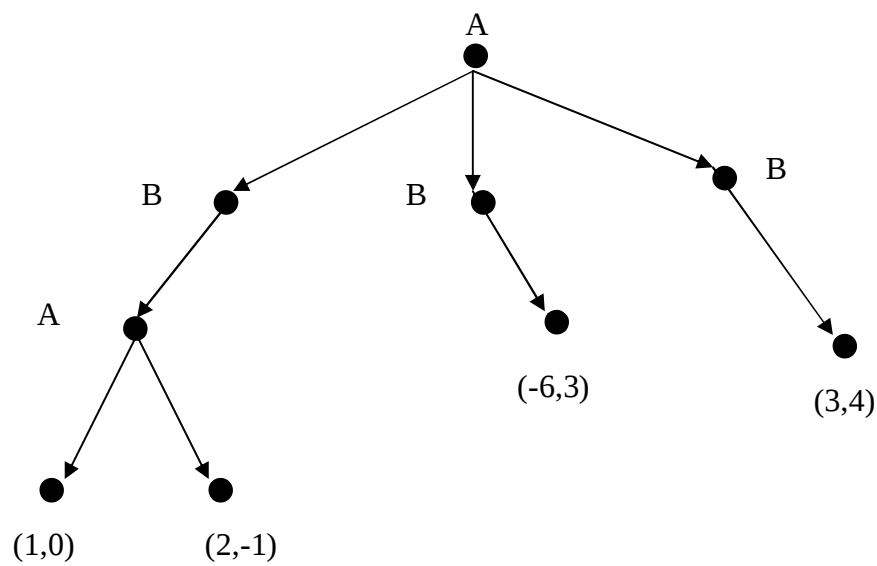
Şimdi oyunun kuralının değiştiğini kabul edelim, şöyle ki: A'nın ilk hareketinden sonra B, A'nın sola hareketi ile ortaya olan hareketini ayırt edemesin. Ayrıca A sola hareket ederse (ilk hamlesinde) bu defa A, B'nin hareketini sola yada sağa olduğunu ayırt edemediğini kabul edelim. O zaman A için strateji kümesi LLL, LRR, M ve R'den oluşur. LRL, LLR stratejilerinin olmamasının sebebi, A B'nin hareketinin R mi yoksa L mi olduğunu bilmemesidir. B oyuncusu L yada R oynasa A buna ya L ile yada R ile cevap verecektir. Ayrıca B'nin strateji kümesi LL ve RR şeklinde 2 seçim alt ağacından oluşur (Morris,1994). Çünkü stratejinin üçüncü koşulundan bir bilgi kümesindeki her bir noktada oyuncu aynı hamleyi yapmalıdır. Yani B oyuncusu A ne oynarsa oynasın sahip olduğu iki stratejiden birini oynayacaktır. Yalnız burada oyuncu 2. köşede mi yoksa 3. köşede mi olduğunu bilmediği için B oyuncusu ya A oyuncusu solu da

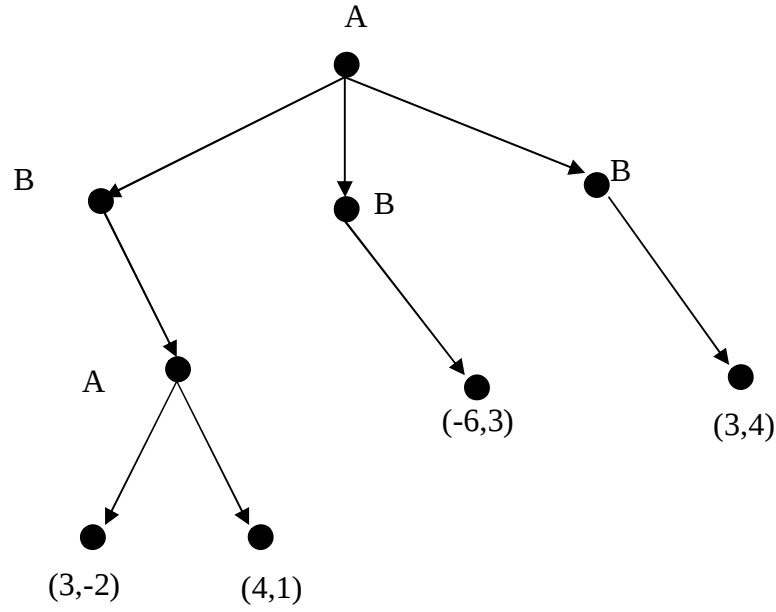
seçtiğinde L, ortayı da seçtiğinde L oynayacaktır yada A oyuncusu solu da seçtiğinde R, ortayı da seçtiğinde R oynayacaktır.





Şekil 2.13: A Oyuncusunun Seçim Alt Ağaçları





Şekil 2.14: B oyuncusunun Seçim Alt Ağaçları

2.8.5 Şansa Bağlı Hamlenin (Chance Moves) Yer Aldığı Oyunlar

Şansa bağlı hamle içeren oyunlarda bu hamle oyundaki uç olmayan bir kümenin herhangi bir oyuncuyla değil de “C” şansa bağlı köşe ile etiketlenilmesiyle gösterilir. Ağaçtaki böyle bir köşenin anlamı; oyunun bu noktada, bu köşenin çocuklarından birinin seçiminin rasgele yapılacağıdır. Bu kümenin seçilebilecek çocuklarının olasılıkları, negatif olmayan ve toplamı 1 olan sayılardır. Bu olasılıklar “C” köşesinden çıkan kenarlar üzerinde gösterilir. Buna göre, eğer u şansa bağlı bir köşe ise ayrıca v bu köşenin bir çocuğu ise ozaman $\Pr(u, v)$ seçilecek (u, v) kenarının olasılığını belirtir. Böylece u 'dan çıkan tüm kenarların kümesini $E(u)$ ile gösterirsek,

$$\Pr(u, v) \geq 0$$

$$\sum_{(u,v) \in E(u)} \Pr(u, v) = 1$$

dir (Morris, 1994).

Bu tarz oyunlarda seçim fonksiyonu ve seçim alt ağacı tanımı aynıdır fakat P_i oyuncusu için $p_i(S_1, S_2, \dots, S_N)$ ödeme tanımı değişmektedir. Bu durumda oyunun sonlandığı terminal köşedeki etiketlenmiş olan ödemeler oyuncular tarafından yapılan

seçimlerin yanı sıra ansa bağlı hamleye de bağlıdır. S_i seçim alt ağacına göre oynayan her bir P_i oyuncusunun S_i 'lerinin kesişimi kökten uç köşeye giden tek bir patika belirler fakat ansa bağlı bir hamle varsa bu durumda bu kesişim birçok uç köşeyi içeren bir alt ağaçtır. Bu ağacın dallarındaki her bir patika ansa bağlı bir köşeye karşılık gelir. Bu yüzden, kesişmedeki her bir uç köşe kökten u'ya giden patika üzerinde karşılaşılan ansa bağlı köşedeki olasılıklarla ağrılıklandırılmalıdır. Ozaman P_i oyuncusuna yapılacak beklenen ödeme kesişimin uç köşelerindeki N sıralı ödeme vektörlerinin i . bileşenlerinin ağrılıklandırılmış ortalaması olmalıdır (Morris, 1994).

Tanım 2.50: T, N oyunculu bir ağaç olsun. Her bir i için $S_i \in \Sigma_i$ olsun. Eğer $w, \bigcap_{i=1}^N S_i$ 'nin bir uç köşesi ve R kökten w ya bir patika ise, o zaman w da sona eren oyunun olasılığı,

$$\Pr(S_1, S_2, \dots, S_N; w) = \prod \{ \Pr(u, v) : u \text{ ansa bağlı ve } (u, v) \in R \}$$

şeklinde tanımlanır. Buradan anlaşılan, eğer R patikası üzerinde ansa bağlı bir köşe yoksa o zaman

$$\Pr(S_1, S_2, \dots, S_N; w) = 1 \text{ dir.}$$

O zaman demeler de aşığıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.51: $S_i \in \Sigma_i$ seçim alt ağaçlarından kaynaklanan P_i oyuncusuna yapılan beklenen ödeme, $p_i(S_1, S_2, \dots, S_N)$

$$p_i(S_1, S_2, \dots, S_N) = \sum \Pr(S_1, S_2, \dots, S_N; w) p_i(w)$$

tarafından tanımlanır. Burada toplam $\bigcap_{i=1}^N S_i$ alt ağaçların kesişimindeki tüm w uç köşeleri kapsamaktadır.

2.8.6 N-sıralı Strateji Dengesi

Genel olarak N sıralı strateji vektörlerinden her birisi, eğer oyunculardan birisi, diğer oyuncuların tamamı kendi stratejilerine sadık kalırken, kendi stratejisini terk

ederse bu durum terk eden için ceza ile sonuçlanıyorsa, bir oyuncu için dengeyi gösterir. (Morris, 1994). Yani birisi hariç oyundaki tüm oyuncular N sıralı strateji vektörünün belirlediği gibi oynuyorsa, bu oynamayan oyuncu bunu yaparak yalnızca daha az bir kazanç elde eder.

Tanım 2.52: Γ , N oyunculu yayvan formda bir oyun ve her oyuncu için strateji kümeleri sırayla $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_N$ olsun. Bir N-sıralı (S_i^*) vektörü, $S_i^* \in \Sigma_i$, $1 \leq i \leq n$ için, her i ve her $S_i \in \Sigma_i$ için

$$p_i(S_1^*, \mathbf{K}, S_i, \mathbf{K}, S_N^*) \leq p_i(S_1^*, \mathbf{K}, S_i^*, \mathbf{K}, S_N^*)$$

ise bir N sıralı dengedir.

Tanım 2.53: Γ İleri formda bir oyun olsun. Γ Tam bilgiye sahip bir oyunsu her bir oyuncu için her bir seçim alt ağacı bir stratejidir.

Teorem 2.25: Γ ileri formda bir oyun olsun eğer Γ tam bilgiye sahip bir oyunsu, o zaman N-sıralı strateji dengesi vardır (İspat için: Bkz. Morris, 1994).

2.8.7 Yayvan Formda Oyunlar İçin Bazı Çözüm Yöntemleri

Burada tam bilgiye dayalı yayvan formdaki oyunlar için çözüm yöntemi olan geriye doğru tümevarım (backward induction) yönteminden bahsettikten sonra yayvan formdaki oyunlar için genel çözüm yöntemi olan (hem tam bilgiye hem de eksik bilgiye dayalı oyunlar için kullanılan) alt oyun tam Nash dengesinden (Subgame Perfect Nash Equilibrium) bahsedilecektir.

2.8.7.1 Geriye Doğru Tümevarım Yöntemi (Backward Induction)

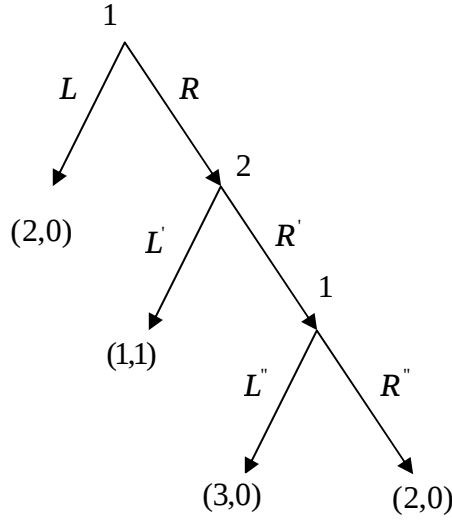
Bu yöntem tam bilgiye dayalı yayvan formdaki oyunlarda kullanılır. Oyunun tam bilgiye dayalı olması oyuncunun oyundaki hareket ettiği her bir köşede oyun ile ilgili her bilgiyi bilmesi anlamına gelmektedir. Bu ise oyuncuların hareket ettiği her köşede tam olarak rasyonel davranmasını sağlar. Geriye doğru tümevarım yöntemi oyuncuların her hareketinde rasyonel oldukları varsayımına dayanmaktadır. Ayrıca oyunun sınırlı sayıda aşamadan oluşması gerekmektedir. Aşama, tüm oyuncuların aynı anda hamlelerini yaptıkları her bir periyoda verilen isimdir. Örneğin Stackelberg oyununda 1. aşama; lider firma çıktı seviyesini seçer, takipçi firma hiçbir seçim yapmaz. 2. aşama;

takipçi firma lider firmanın çıktı seviyesine göre kendi çıktı seviyesini seçer, lider firma ise hiçbir seçim yapmaz (Fudenberg ve Tirole, 1991).

Geriye doğru tümevarım yöntemi şu şekilde uygulanır; sınırlı sayıda aşamadan oluşan tam bilgili bir oyun ele alalım, uç köşeden bir önceki herhangi bir köşeyi düşünelim. Bu köşeden hareket eden bir oyuncu rasyonel olduğu için kendisine en yüksek ödemeyi veren hamleyi seçecektir. Bu hamleyi yaparak buna karşılık gelen ödemeyi elde etmiş olur. Bu köşeden sonraki tüm köşeler silinir. Böylece daha kısa bir oyun ağacı elde edilir. Burada bizim ele aldığımız köşe uç köşe olmuş olur. Daha sonra bu süreç orijinal köşeye kadar tekrarlanır (Melunier, 2006).

Tanım: 2.54: Tam bilgili, sonlu sayıda aşamanın olduğu oyunlarda geriye doğru tümevarım dengesi bir strateji profilidir. Burada her bir oyuncunun stratejisi ağacın her bir köşesinde optimaldir. Ayrıca her oyuncu ileriki aşamalarda diğer oyuncuların kendi denge stratejilerini izleyeceklerini varsaymaktadır.

Yöntemi aşağıdaki ağaç üzerinde açıklayalım (Gibbons, 1992).



Şekil 2.15: Geriye Doğru Tümevarım Yöntemi

İlk olarak oyunun 3. aşamasıyla başlayalım. Burada 1. oyuncu L'' oynayarak 3 birim ödeme, R'' oynayarak 0 birim ödeme kazanır. Buna göre L'' optimaldir. Bu yüzden 2. aşamada 2. oyuncu R' stratejisini seçerse buna karşılık 1. oyuncunun L'' stratejisini seçeceğini bekler. Böylece 2. oyuncunun 2. aşamadaki seçimi, L' oynarsa 1 birim, R' oynarsa 0 birim kazanır. Burada L' oynamak 2. oyuncu için optimaldir. Bu yüzden 1. aşamada 1. oyuncu R stratejisini seçerse 2. oyuncunun buna L' ile karşılık

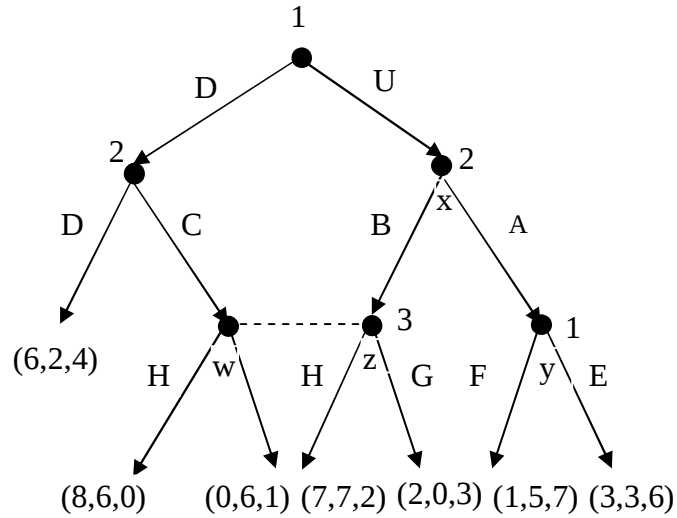
vereceğini bekler. Buna göre 1. aşamada 1. oyuncu L seçerse 2 birim kazanır, R seçerse 1 birim kazanır. L seçmek optimaldir. Buna göre geriye doğru tümevarım yöntemiyle bu oyunun çözümü, 1. aşamada 1. oyuncunun L stratejisini seçmesiyle sonlanır. Bu durumda 1. oyuncu 2 birim kazanç elde ederken 2. oyuncu 0 birim kazanç elde eder.

2.8.7.2 Alt Oyun Tam Nash Dengesi (Subgame Perfection)

Geriye doğru tümevarım yöntemi eksik bilgiye dayalı oyunlara genel olarak genişletilebilmesi için bu yöntemdeki uygun olmayan Nash dengelerinin elenerek rafine edilmesi gerekir. Bunun için peşi sıra gelen rasyonellikleri birleştirerek Nash'in çözüm kavramının rafine edilmesi tanımlanır (Shelten,1975). Bu rafine etme tamlık (perfection) olarak adlandırılır (Watson, 2002). Nash dengesin rafine edebilmek alt oyun kavramıyla olmaktadır.

Alt oyun: yayvan formdaki bir oyunda bir x köşesi, ne kendisi nede bu köşenin ardılı olan köşeler x 'in ardılı olmayan köşeleri içeren bir bilgi kümesinde yer almıyorsa alt ağacın başlangıcı olarak adlandırılır. Bir alt oyun böyle bir x köşesi ve onun ardıllarından meydana gelen bir ağaç olarak tanımlanır (Watson,2002).

Bu tanıma aşağıdaki oyun yardımıyla açıklayalım.



Şekil 2.16: Alt Oyun

Başlangıç köşesi alt oyunun da başlangıç köşesidir. Çünkü oyunun tamamı bir alt oyunun kendisidir. Ayrıca y köşesi de bir alt oyunun başlangıç noktasıdır. Çünkü y

kesikli çizgi ile herhangi bir köşeye bağlanmamaktadır ve y 'nin tüm ardılları uç köşelerdir. Diğer taraftan x bir alt oyunun başlangıç noktası olamaz. Çünkü bu köşenin ardılı olan z köşesi bu köşenin ardılı olmayan w köşesiyle aynı bilgi kümesinde yer alır. Bu ise alt oyun tanımına uymaz (Watson,2002).

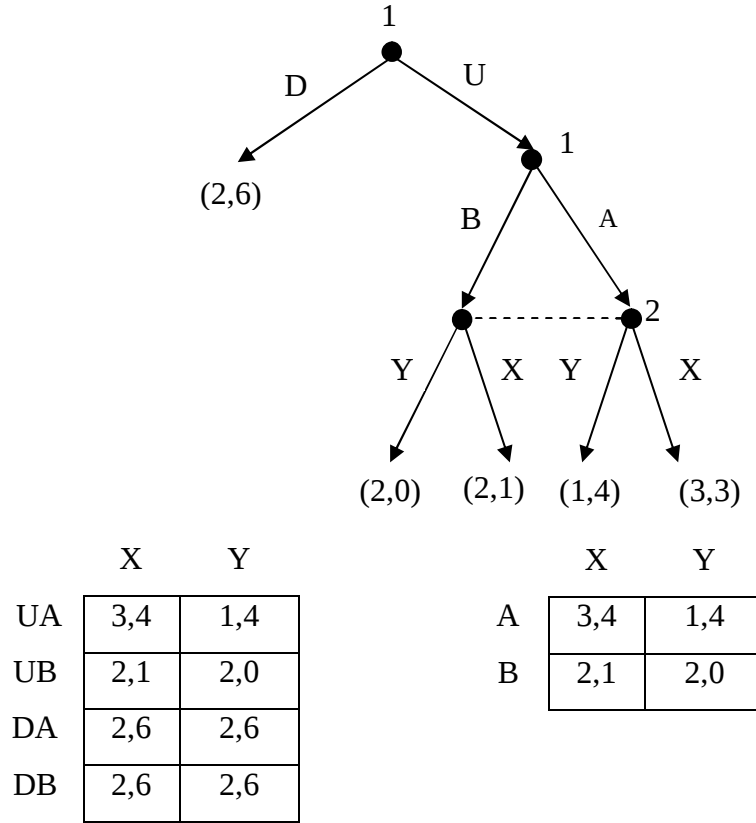
Yayvan formda verilen denge tanımına dikkat edersek; normal formda verilen denge (Nash) tanımı ile benzerdir. Her iki tanımda da oyuncuların kendi stratejilerinden ayrılmaları onların zararına olmaktadır. Yayvan formdaki oyunlardaki strateji kavramı normal formdakilerden farklıdır. Oyuncular stratejilerini aynı anda seçtikleri herhangi bir normal formdaki oyunda stratejiler oyuncular tarafından doğrudan (birbirinden bağımsız olarak) yapılan eylemlerdir. Fakat yayvan formdaki oyunlarda her bir oyuncu için bir seçim alt ağacı bir strateji belirler. Yani oyuncular bir eylem seçtiklerinde aynı zamanda rakibinin seçebileceği eylemleri şekillendirmektedir. Dahası oyunun bundan sonraki aşamalarında hem kendisinin hem de rakibinin eylemlerini şekillendirmektedir. Bu unsurları dikkate aldığımızda yayvan formdaki oyunlar için denge kavramı aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.55: Bir strateji profili orijinal oyunun her bir alt oyununda bir Nash dengesi tanımlarsa bu strateji profili alt oyun tam Nash dengesi olarak adlandırılır.

Alt oyun tam Nash dengesinin temel fikri bir Nash dengesi yalnızca oyunun tamamının dengesi değil aynı zamanda oyunda tanımlanmış olan uygun alt oyunların her birinin de dengesi olmalıdır.

Son olarak şunu belirtelim, tam bilgiye dayalı oyunlar için geriye doğru tümevarım yöntemi ile bulunan çözüm alt oyun tam Nash dengesini vermektedir (Watson,2002).

Aşağıdaki şekil için alt oyun tam Nash dengesinin nasıl bulunduğunu açıklayalım (Watson, 2002).



Şekil 2.17: Alt Oyun Tam Nash Dengesi

İlk olarak 1. oyuncunun U oynayarak ulaştığı köşeye bakarsak tanıma uygun bir alt oyun olduğunu görürüz. Bu durumda, oyunun tamamıyla beraber, iki tane alt oyun olmuş oldu. Strateji profilleri her bir bilgi kümesinde oyuncuların ne yaptığını belirttiği için her bir strateji profili uygun bir alt oyundaki davranışları belirler, hatta bu alt oyuna ulaşılmaya bile. (DAX) strateji profilini düşünelim. Eğer bu profile göre oynanır, o zaman oyun asla uygun bir alt oyuna girmez. Şekilde iki tane normal formda oyun görülmektedir. İlk şekil ağacın tamamının normal formunu ikinci şekil ise uygun alt oyunun normal formunu göstermektedir. Normal formdaki oyunlardaki Nash dengesi yöntemiyle ilk olarak oyunun tamamı için olan matrisi çözersek. (UA, X), (DA, Y), (DB, Y) Nash dengesi olarak bulunmuştur. Alt oyun için olan matrisi çözdüğümüzde ise (A,X) Nash dengesi olarak bulunmuştur. Buna göre oyunun alt oyun tam Nash dengesini (çözümünü) bulalım. Strateji (DA, Y) ve (DB, Y) alt oyun Nash dengesi değildir. Çünkü bu stratejiler uygun alt oyunda Nash dengesi değildir. (DA, Y) strateji profili uygun alt oyunda (A,Y) stratejisinin oynanmasını gerektirir, fakat (A,Y) stratejisi uygun alt oyunda bir denge değildir. Dahası, (DB, Y) alt oyunda (B,Y) stratejisinin

oyunacağını göstermektedir fakat (B,Y)'de stratejisi uygun alt oyunda bir denge değildir. Buna göre yalnızca 1 tane alt oyun tam Nash dengesi vardır, (NA, X).

Diğer bir örnek iki aşamalı, sürekli değişkenler içeren iki oyunculu bir oyun olsun. Oyunun kurgusu şu şekilde olsun; 1. oyuncu x_1 eylemini seçsin daha sonra 2. oyuncu 1. oyuncunun sonucunu görüp ardından x_2 eylemini seçsin. Oyuncuların kazanç fonksiyonları aşağıdaki gibi olsun.

$$p_1 = -x_1^2 - x_1x_2 + 5x_1$$

$$p_2 = -x_2^2 - x_1x_2 + 4x_2$$

Oyunu çözmek için önce alt oyunda Nash dengesinin hesaplarız. Bunun için maksimizasyonun 1. ve 2. sıra koşullarını uygularız.

2. oyuncunun seçimi sabit iken 1. oyuncunun tepki fonksiyonu,

$$p_1(x_1) = -x_1^2 - x_1x_2 + 5x_1$$

$$\frac{\partial p_1(x_1)}{\partial x_1} = -2x_1 - x_2 + 5 = 0$$

$$x_1 = R_1(x_2) = \frac{5 - x_2}{2}$$

1. oyuncunun seçimi sabit iken 2. oyuncunun tepki fonksiyonu,

$$p_2(x_2) = -x_2^2 - x_1x_2 + 4x_2$$

$$\frac{\partial p_2(x_2)}{\partial x_2} = -2x_2 - x_1 + 4 = 0$$

$$x_2 = R_2(x_1) = \frac{4 - x_1}{2}$$

Bu oyunda elde ettiğimiz 2. oyuncuya ait tepki fonksiyonu 2. oyuncunun seçeceği optimal strateji belirler. Buna göre 1. oyuncu bu stratejiye bağlı olarak seçeceği optimal stratejiyi belirlemelidir. Böylece oyunun denge değeri bulunmuş olur.

$$p_1(x_1, R_2(x_1)) = -x_1^2 - x_1\left(\frac{4-x_1}{2}\right) + 5x_1$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_1} = -x_1 + \frac{3x_1}{2}$$

$$x_1^* = \frac{3}{4}$$

olarak bulunur. x_2 ise

$$x_2 = R_2(x_1) = \frac{4-x_1}{2}$$

ifadesinde x_1 değerin yerine konulmasıyla bulunur.

$$x_2^* = \frac{13}{8}$$

olarak bulunur. Bu optimum stratejilere göre oynandığında 1. oyuncunun elde edeceği kazanç $p_1 \cong 1,97$, 2. oyuncunun elde edeceği kazanç $p_2 = 2,64$ olarak bulunmuştur.

3. BÖLÜM

OYUN TEORİSİNİN EKONOMİDE UYGULANMASI

Ekonomide genel olarak yatırımların kaynağı tasarruflardır. Tasarruflar ekonomik birimlerin elde ettiği gelirlerinden daha azını harcamalarıyla oluşur. Bu tasarrufların fon ihtiyacı olan birimlere aktarılması finansal piyasalar aracılığıyla gerçekleşir. Böylece, finansal piyasalar ekonomik büyüme amacına yönelik kapasite artırıcı yatırımlara kaynaklık ederken diğer taraftan sermayenin tabana yayılması yoluyla gelir dağılımındaki dengesizlikleri giderme amacına da hizmet eder. Ayrıca yatırımcısına piyasa koşullarına göre oldukça iyimser kazançlar sağlaması yönüyle tasarrufları özendirici bir unsur olurken, sermaye birikimine de katkıda bulunur (Özdil ve Yılmaz, 2001). Bu yüzden finansal piyasalar ekonominin vazgeçilmez unsurlarından birisidir.

Finansal sistemden genel olarak bahsetmek istense, ilk olarak finansal sistemi oluşturan temel unsurların neler olduğundan daha sonra bu unsurlardan meydana gelen finansal sistemin nasıl işlediğinden bahsedilmesi gerekir.

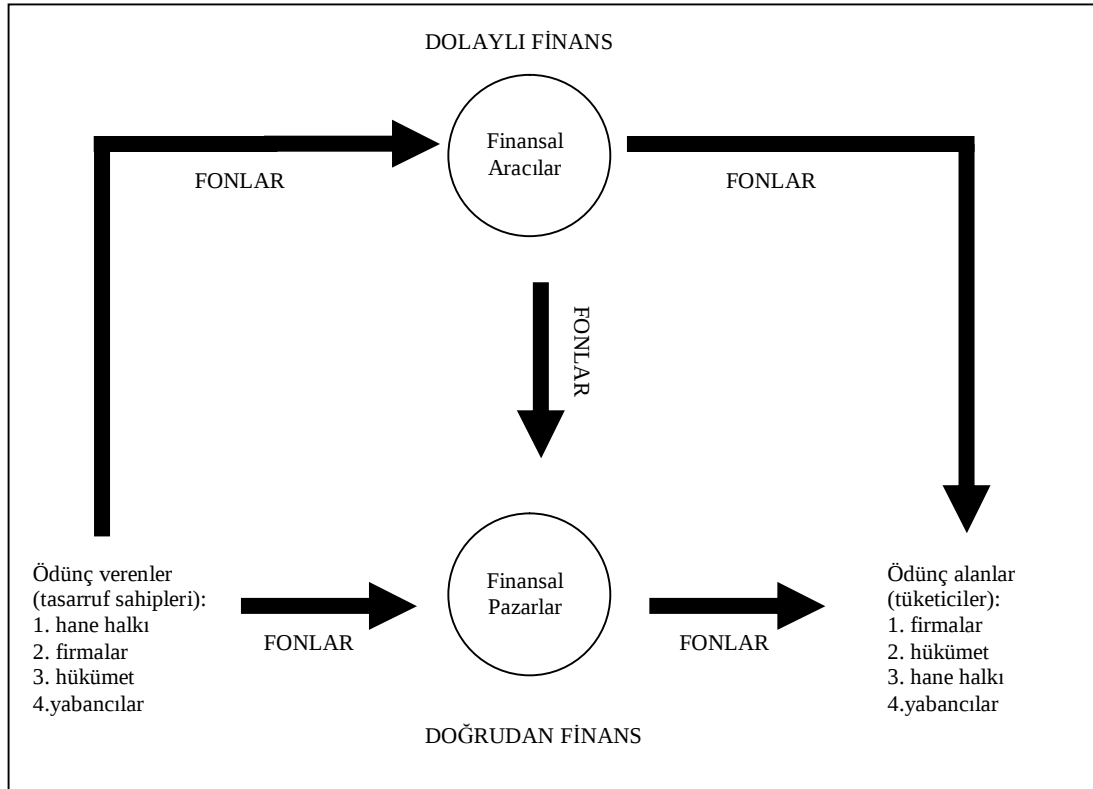
Finansal sistemi oluşturan temel unsurlar; finansal piyasalar, bu finansal piyasalarda faaliyet gösteren finansal kurumlar ve faaliyetin nesnesi olan finansal araçlardır. Finansal sistem bu unsurların oluşturduğu dinamik bir yapı olarak ifade edilir.

Finansal sistemi oluşturan temel unsurlardan kısaca bahsedecek olursak; finansal aracı: nihai borçlu ile nihai borç veren arasında yer alan kurumdur (Furness, 1972). Nasıl para olgusu değişim sürecini satış ve alım işlemi gibi iki ayrı işleme ayırıştırıyorsa aracılıkta borç verme ve borçlanma sürecini iki ayrı işleme bölmelerini sağlar. Aracı kurum nihai borç verenden borçlanır ve nihai borçluya borç verir. Aracı kurum nihai borç verenler için kendi üzerinden ikincil menkul kıymet düzenler ve fon toplar daha sonra bunu nihai borçlulara vererek birincil menkul değer elde eder (Bilgin, 2007). Finansal araçlar ise finansal sistem içerisindeki fon talep edenler ile arz edenler arasındaki karşılıklı ilişkiyi sağlamak için gereklidir. Finansal araçlar yoluyla piyasa katılımcıları yapmak istedikleri işlemleri gerçekleştirme olanağına kavuşurlar. Piyasalarda işlem gören finansal araçlar; bono, tahvil, hazine kâğıdı, hisse senedi, kabul senetleri, ticari kâğıtlar gibi menkulleri kapsamaktadır. Finansal piyasalar ise henüz

bahsedilen işlemlerin gerçekleştiği platformlardır. Piyasalar hakkında değerlendirme kriterlerine göre farklı sınıflandırmalar yapılmaktadır. Kullanılan finansal araçlara göre tanımlandığında, finansal piyasalar borç ve hisse senedi piyasaları olarak bireyler ve firmaların borçlanmalarını gerçekleştirdiği piyasalar olarak bilinir. Finansal araçların kullanımı açısından birincil ve ikincil piyasalar ise sırasıyla, yeni çıkarılmış menkul kıymetler ve daha önceden düzenlenmiş menkul kıymetlerin işlem gördüğü piyasalar olmaktadır. Vade bakımından değerlendirildiğinde, basit olarak para piyasası, yalnızca kısa dönem borç araçlarının bulunduğu piyasa olmasına karşın sermaye piyasası uzun dönemli borç araçlarının ve hisse senetlerinin hüküm sürdüğü piyasaları ifade etmektedir (Bilgin, 2007).

3.1 Finansal Piyasalar

Finansal piyasalar gelirlerinden daha az harcayarak fazla fona sahip olan firmalar, hane halkı ve hükümetlerden gelirlerinden daha fazla harcama yaptığı için fon kıtlığına sahip olan ekonomik birimlere fon kanalize ederek önemli bir ekonomik fonksiyonu icra ederler. Bu fonksiyon aşağıdaki şekilde gösterilmiştir (Mishkin, 2001).



Şekil 3.1: Finansal Sistemde Fon Akışı

Tablodan anlaşılacağı üzere finansal piyasalarda ya ödünç vericiler ile alıcılar arasında karşılıklı olarak doğrudan fon akışı sağlanır ya da dolaylı olarak aracı kurumlar vasıtasıyla fon akışı sağlanır. Finansal pazarlar fonların kanalize edilmesini sağlayarak ekonomide birçok önemli görevi yerine getirirler. Karlı bir yatırım fırsatına sahip olmayan tasarruf sahipleri sahip oldukları tasarruflarını bu fırsatlara sahip olanlara aktararak ekonomide etkinliğin artmasına neden olurlar. Finansal marketlerin varlığı, belli bir amacı gerçekleştirmek için şuan yeterli birikime sahip olmayan bir tüketiciye şuan bu amacı gerçekleştirebilmesine imkân sağlar. Ayrıca tasarrufu özendirerek sermaye birikimini sağlamaktır. Buna göre finansal piyasalar üretken yatırım fırsatlarına sahip olmayan ekonomik birimlerden bu fırsatlara sahip olan ekonomik birimlere fon akışı sağlayarak sermayenin verimli bir şekilde dağıtılmasını ve daha yüksek bir üretimi ve genel olarak ekonomideki etkinliği olumlu yönde etkilerler (Mishkin,2001).

Finansal piyasaların temel özelliği belirsizlik ve risk içermesidir. Belirsizlik altında finansal varlıkların getirilerinin ne olacağını kesin olarak belirlemek neredeyse imkânsızdır. Finansal yatırım sırasında üstlenilen riskler finansal varlığın türüne göre değişmektedir. Genel olarak; ortaklık hakkı tanımlayan finansal varlıklar iki tür riske sahiptir, pazar riski ve iş riski. Alacaklılık hakkı tanımlayan finansal varlıklar ise faiz oranı riski taşırlar. Her iki tür finansal varlık içinde geçerli olan risk ise enflasyon riskidir (Amling, 1974).

Pazar riski, hisse senedi fiyatlarındaki dalgalanmalara bağlı olarak yatırımcının hisse senedine yatırmış olduğu anaparasının en azından bir kısmını kaybetme olasılığıdır. Dolayısıyla pazar riskini anlamak için hisse senetlerinin fiyat davranışlarını anlamak gerekir. Gelişmiş borsalarda hisse senetleri herhangi bir fiyat hareketi geliştirdiğinde bu trend çok çabuk değişmez. Fakat günlük, haftalık, aylık fiyat dalgalanmaları sürekli vardır. Hisse senetlerinin geçmişteki fiyat dalgalanmaları aralığı ne kadar genişse pazar riskinin de o ölçüde yüksek olacağı kaçınılmazdır. Hisse senedi fiyatları geçmişte belli bir dönemsel hareket sergilemişlerse, bunun gelecekte de devam edeceği varsayımıyla, alım satım zamanlaması bu dönemsel harekete göre belirlenir. Yatırımcı günlük ve haftalık dalgalanmaları bir kenara bırakırsa, yatırım dönemi sonunda kendisine kar elde edeceği bir zaman dilimi seçip yatırımını buna göre yönlendirebilir (Konuralp, 2005).

İş riski, firmanın gelir yaratma gücünün veya rekabet gücünün azalması nedeniyle yatırımcının sermaye kazancı şeklinde elde edeceği getirilerdeki düşüşü ifade eder. Yatırımcı iş riskinden kaynaklanabilecek zararlarını en aza indirebilmek için

öncelikle firmanın rekabet gücünü ve firmanın gelecekteki gelir beklentilerinin ne olduğunu analiz etmek zorundadır. Faiz oranı riski ise yatırımcının piyasa faiz oranlarındaki değişmelere bağlı olarak daha önceki faiz oranlarından ihraç edilmiş finansal varlıkları üzerinden elde edecekleri getirilerdeki aşınmayı ifade eder. Enflasyon riski, paranın satın alma gücündeki azalmadır (Konuralp, 2005).

Buna göre finansal piyasalar tüm bu risk ve getirilerin etkisiyle şekillenen finansal varlıkların beklenen getiri oranlarının belirlendiği yerlerdir.

3.2 Finansal Piyasalarda Karar Verme

Sermaye piyasalarında yatırım yapacak bir kişi için en önemli konu, finansal varlığın pazar fiyatının o finansal varlığın gerçek değerini yansıtıp yansıtmadığının bilinmesidir. Buna göre, yatırımcı analiz ederek bulduğu fiyat ile piyasa fiyatını karşılaştırarak alım satım kararını verir (Doğukanlı ve Canbaş, 2001).

Yatırımcı bir finansal varlığın fiyatını analiz ederken birçok bilgidan yararlanır. Temel olarak bu bilgiler üç başlık altına toplanabilir (Doğukanlı ve Canbaş, 2001).

1. Ekonomik gelişmeyle ilgili bilgiler.
2. Sektörel gelişmeyle ilgili bilgiler.
3. Firmayla ilgili bilgiler.

Genel ekonomik durumla ilgili şu göstergeler bir fikir verebilir (Karaşin, 1987); gayri safi milli hasıla, kişi başına harcanabilir gelir, para arzı, faiz oranları, dış ticaret ve ödemeler dengesi açıkları, kamu kesimi harcamaları, para ve maliye politikaları, enflasyon, işsizlik, sabit yatırım harcamaları, inşaat endüstrisindeki gelişmeler.

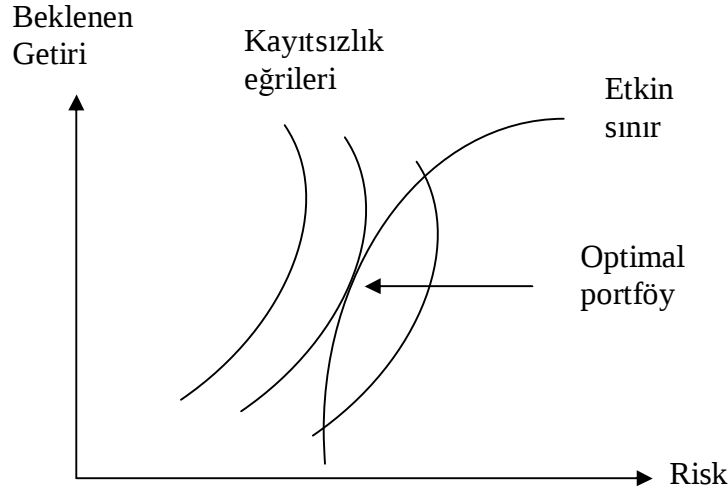
İkinci aşama olan endüstri analizinde ise amaç büyüyen, ekonomik dalgalanmalara karşı dayanıklı ve gelişme aşamasındaki endüstrilere yatırım yapmak olmalıdır. Gelişen sektörlerin belirlenmesinde şu ölçütler kullanılabilir; karlılık oranları, kar dağıtım oranları, üretim ve satış oranları, büyüme oranları, ekonomik dalgalardan etkilenme oranları, sektörler arası rekabet, sektör çalışma barışının incelenmesi, sektörün hükümetlerin ekonomik plan ve programıyla uyumu, hammadde konusunda dışa bağımlılık derecesi, sektördeki teknolojik gelişme, sektördeki kapasite kullanım oranı (Doğukanlı ve Canbaş, 2001).

Yatırım kararı için gerekli olan üçüncü temel gösterge olan firmayla olan bilgiler ise sermaye yapısı, gerçek ve tüzel kişilere ait sermaye payı, sermayenin %10'undan fazlasına sahip olan ortakların bilinmesidir. Ayrıca işletmenin üretim hacmi, satış gücü,

pazarlarının büyüklüğü, üretim yapısı, personel durumu, çalışma seyri, faaliyet ve yönetim etkinliği geçmiş verilere göre değerlendirilmesi gerekir (Doğukanlı ve Canbaş, 2001).

Finansal karar verme teknikleri geçmiş dönem verilerden hareketle geleceği tahmin ilkesine dayanmaktadır. Bunun için geliştirilmiş zaman serileri analizi, trend analizi, regresyon analizi gibi birçok yöntem vardır. Ancak hem finansal piyasaların çok sayıda sosyoekonomik değişkenin etkisinde olması hem de bu değişkenlerin birbiriyle olan etkileşimlerinin olabileceği düşünüldüğünde tüm bu etkenler modellere yansıtılmasında oldukça zor olmaktadır. Bu nedenle etkileşimli karar almada diğer yöntemlere göre daha iyi sonuçlar veren oyun kuramı finansal karar vermede alternatif bir yaklaşım olarak akla gelmektedir (Özdil ve Yılmaz, 2001).

Finansal karar vermede temel yaklaşım portföy oluşturmaktır. Bunun için portföy analizi gerekmektedir. Portföy analizinde geleneksel ve modern yaklaşım olmak üzere iki farklı değerlendirme vardır. Geleneksel yaklaşım riski dağıtma ilkesine bağlı olarak çok sayıda finansal varlığın oluşturduğu çeşitlendirmeyi önerirken, modern yaklaşım getiriler arasında pozitif korelasyon olmayan varlıkların bir araya getirilmesiyle riskin azaltılması ilkesine dayanmaktadır. Bunun için, getirileri arasında yüksek korelasyon olmayan varlıkların bileşimi yoluyla, her olası beklenen portföy getirisi için en az risk içeren varlık bileşiminin belirlenebileceğini açıklamaktadır. Farklı varlıkların farklı ağırlıklarından oluşan olası her portföy için iki çıkarım yapılabilir. Ya aynı risk düzeyinde bazı portföyler daha yüksek beklenen getiriye sahiptir yada aynı beklenen getiri düzeyinde bazı portföyler diğerlerine göre daha düşük riske sahiptir. Burada yatırımcının tercihiyle ilgili olarak en iyi portföyler aynı getiri düzeyinde daha düşük riske sahip olan ve aynı risk düzeyinde en yüksek getiriye sahip olan portföylerdir. Bu portföyler etkin sınırı oluşturur yani bu sınır üzerinde yer alırlar. Yatırımcının etkin sınır üzerinde nerede yer alacağı yatırımcının fayda fonksiyonu ile ilgilidir. Fayda eğrisi beklenen getiri ile risk arasında değişimi gösteren bir eğridir. Optimal portföy etkin sınır üzerinde en yüksek faydaya sahip olan portföydür. Buna göre optimum portföy fayda eğrisinin kayıtsızlık eğrisine teğet olduğu noktada yer almaktadır (Doğukanlı ve Canbaş, 2001).



Şekil 3.2: Optimal Portföy

Portföy analizi tek dönemlik bir analiz olup geleceği tahminlemeye dayanmaktadır. Ayrıca, hangi portföyün ne kadar süre elde tutulacağı ile ilgili bir bilgi vermemektedir (Özdil ve Yılmaz, 2001).

3.3 Finansal Piyasalar ve Oyun Kuramı

Çok sayıda sosyoekonomik faktörün ve bu faktörlerin olası birbirleriyle olan etkileşimlerinden kaynaklanan etkilere maruz kalan finansal piyasalar belirsizlik ve risk içermektedir. Finansal piyasada kararlar belirsizlik ve risk altında alınmaktadır. Bu noktada düşünüldüğünde oyun teorisine konu olan oyunlar da belirsizlik ve risk altında oynanmaktadır. Ayrıca rakiplerin aldığı kararların birbiriyle etkileşimli olduğu çatışma durumlarında çok iyi sonuçlar veren önemli bir araçtır. Bu bilgiler ışığında finansal piyasaları düşündüğümüzde, burada oyun yatırımcının piyasaya karşı oynadığı bir oyun olarak düşünülebilir. Piyasa sahip olduğu bütün özellikleriyle doğayı temsil etmektedir (Friedmann,1997). Doğaya karşı oynanan oyunlar tek kişilik sıfır toplamlı oyundur (Shubik,1989). Bu noktada piyasanın, yatırımcıya karşı oynayan bir oyuncuymuş gibi hareket ettiğini varsayarsak, oyunu doğaya karşı oynanan oyunlarda olduğu gibi satırlarda yatırımcının alternatif stratejileri, sütunlarda doğanın (piyasa) stratejileri olacak şekilde iki kişilik sıfır toplamlı bir oyun olarak ifade edebiliriz. Burada doğanın stratejilerini belli bir dönemde meydana gelen her türlü etkinin sonucu olarak tanımlamamız gerekir. Çünkü piyasanın her türlü etki ve değişkeni içinde barındıran sonsuz sayıda stratejisi vardır. Örneğin döviz kurlarının yükselmesi veya faiz

istikrarsızlığı gibi etkenlerin hepsi birer strateji olarak düşünülebilir. Bu stratejilerin birbiriyle olan etkileşimlerinin de söz konusu olabileceği düşünülünce bu stratejilerin net olarak ortaya konması ve açıklanması çok zor hatta imkânsızdır. Fakat bu etkileşimin ne olduğunu bilmesek de bunlar belli bir dönemde gerçekleşir ve ilgili finansal varlığın değerine yansır. İlgili stratejilerin uygulanmasıyla elde edilen sonuç ödeme değerini tanımlar. Böylece seçilmiş hisse senetlerinin fiyatlarındaki net artış değeri piyasa stratejilerinin sonuçlarını gösterir. Piyasanın herhangi bir dönemde sahip olduğu sonsuz sayıda stratejilerinin herhangi birini oynayarak finansal varlıklara belli getiriler sağlamaktadır. Bu getirilerin pozitif olması yatırımcı için kazancı, negatif olması kaybı, sıfır olması ise ilgili dönemde finansal varlığın kazanç yada kayıp sağlamadığını gösterir (Özdil ve Yılmaz, 2001).

Ödeme ve stratejileri tanımladıktan sonra, oluşturacağımız modelin piyasanın gerçek doğasını yansıtabilmesi için piyasanın maksimin stratejisine göre oynadığını varsayarak oyunu çözmemiz gerekir (Özdil ve Yılmaz, 2001). Buna göre piyasa kendisi için en kötü durumlar içerisinde en iyi durumu seçecektir. Bunu yapmadığı zaman yatırımcının elde edeceği kazanç oyunun değerinden fazla olacaktır. Piyasanın bu şekilde davrandığını varsayarak hem yatırımcıya karşı bir oyuncuymuş gibi davranmasını sağlamış oluyoruz hem de oyunu sıfır toplamı bir oyun haline dönüştürmüş oluyoruz. Böylece piyasada belirlenen ilgili hisse senedinin getirisinin tamamını yatırımcının kazancı yani elde ettiği gelir olarak belirlemiş oluyoruz. Aksi takdirde, oyuncu hisse senedinin getirisini kazanç olarak elde edemezdi. Bu durum ise mevcut piyasa mekanizmasının doğasını yansıtmazdı.

Finansal piyasalarda herhangi karar vermek için daha önce bahsedildiği üzere birçok analiz yapılmaktadır. Tüm bu analizlere ek olarak portföy içerisindeki ilgili hisse senetlerinin diğer varlıklara kıyasla getiri oranının performanslarındaki değişikliklerin bilinmesi yatırımcı için önemli bir gösterge olmaktadır. Böylece, yatırımcı portföydeki göreceli getiri oranlarındaki değişime bakarak, şu anda ve geçmiş dönemlerde oluşturmuş olduğu portföylerin bir sonraki dönem için oluşturmayı düşündüğü portföyden farklı olup olmaması kararını vermede önemli bir ön bilgiye sahip olmuş olur. Mevcut portföyün yatırım dönemlerinde istikrarlı bir seyir izleyip izlemediğini tespit ederek, portföydeki hisse senetlerinin göreceli getiri oranı performanslarındaki dalgalanmaların stabil olup olmadığına göre ya mevcut portföyün aynısını bir sonraki yatırım dönemi için uygulama yada mevcut portföyü değiştirme kararı alır. Oyun teorisiyle oluşturulan optimum portföydeki hisse senetlerinin göreceli getiri oranı performansının yine oyun

teorisi yardımıyla belirlenmesi çalışmamızın temel konusunu oluşturmaktadır. Bunun için öncelikle 2000–2007 dönemi için oyun teorisi yardımıyla minimum risk düzeyinde maksimum getirili portföyün oluşturulması daha sonra oluşturulan bu portföydeki hisse senetlerinin geçmiş dönemlerde göreceli getiri oranlarının belli bir istikrar sergileyip sergilemediği araştırılmıştır. Sonuç olarak getiri oranı performanslarında meydana gelen değişiklikler her bir dönem için diğer dönemlerle karşılaştırılarak benzerlikler ve farklılıklar ortaya konulmuştur. Şüphesiz bu değişiklikler ilgili döneme özgü sosyoekonomik ve politik gelişmelerin bir sonucu olarak ortaya çıkmaktadır. Burada amaç geleceğe yönelik bir tahmin yapmak değil, geçmişte ne olduğuna dair yatırımcıya ayna tutmaktır. Burada yatırımcının, yatırım kararı alırken önceki bölümde kısaca bahsedilen analizlere ek olarak oyun teorisiyle oluşturulan optimum portföydeki hisse senetlerinin birbirine kıyasla getiri oranlarındaki değişimin stabil olup olmadığını bilmesi alacağı kararın başarısına önemli bir katkı sağlayabilmektedir. Bu yöntemin avantajı yatırımcıya oluşturulan portföyün ne kadar süre elde tutması gerektiğini söyleyebilmesidir. Oysa bilinen diğer portföy analizi yöntemlerinde portföyün elde tutulma süresiyle ilgili pek bir bilgi verilmemektedir (Özdil ve Yılmaz, 2001). Uygun veriler elde edildiği takdirde yatırım döneminin olabildiğince kısa tutulması durumunda çok daha hassas sonuçlar elde edilebilir.

3.4 Oyunun Oluşturulması

İstanbul Menkul Kıymetler Borsasında (İMKB) seçtiğimiz Adana C, Anadolu Sigorta, Akbank, Bossa, Doğan Holding, Ereğli Demir Çelik, Eczacıbaşı İlaç, Migros, Türk Hava Yolları A.O. ve Vestel hisse senetleri için minimum risk düzeyinde maksimum getirili portföyün oluşturulması ve oluşturulan portföydeki hisse senetlerinin göreceli getiri oranı performansının araştırılması problemi için, ilgili hisse senedi fiyatlarından yararlanılmıştır. Model yatırımcının en kısa yatırım döneminin 1 ay olduğu varsayılarak oluşturuldu için ilgili hisse senetlerinin ay sonu kapanış fiyatları kullanılmıştır. Burada hisse senedi fiyatları, bu fiyatları etkileyen çeşitli etkilerden arındırılmadan doğrudan piyasada gözlemlediğimiz tüm bu etkilerin bir sonucu olarak o anki fiyatlar üzerinden değerlendirilmiştir.

Seçilmiş hisse senetleriyle minimum risk düzeyinde maksimum getirili portföyün oyun kuramıyla oluşturulabilmesi için bazı varsayımlara gerek duyulmaktadır (Özdil, 1998).

1. En kısa yatırım dönemi 1 ay olduğu varsayılmıştır. İlgili finansal varlığın 1 aydan daha fazla elde tutulup tutulamayacağı sorusunun yanıtı modelin çözümüyle elde edilecektir. Burada en az elde tutma süresinin 1 ay olması çok uzun bir süre gibi görülebilir. Bunun nedeni veri elde etmedeki zorluklar, hesaplama güçlükleri ve zaman gibi kısıtlardan kaynaklanmaktadır. Uygun veriler elde edildiği takdirde sürenin olabildiğince kısa tutulması çok daha hassas sonuçların elde edilmesine neden olur. Örneğin finansal varlığı elde tutma süresi 1 gün olduğunda modelin çözümüyle finansal varlığın 1 günden daha uzun sürelerle elde tutulup tutulamayacağına karar verilmiş olacaktır.
2. Oyunda yatırımcının elindeki fonları Adana C, Anadolu Sigorta, Akbank, Bossa, Doğan Holding, Ereğli Demir Çelik, Eczacıbaşı İlaç, Migros, Türk Hava Yolları A.O., Vestel hisse senedine yatırmaktadır. Bu hisse senetlerinden çok daha fazla ve farklı hisse senetleri içinde oyun tanımlanabilir.
3. Piyasa stratejilerinin tanımlandığı dönem olarak 2000–2007 yılları alınmıştır. Türkiye ekonomisinde yaşanan 2001 krizi ve sonrasındaki dönemin istikrarlı olması bu dönemin seçilmesinde etkili olmuştur. Çünkü 2000–2007 için oluşturduğumuz portföy bu dönem boyunca piyasanın istikrarlı olduğu varsayılarak oluşturulmuştur. Bundan dolayı piyasanın kısmen istikrarlı olduğu bu dönem seçilerek model uygulanmıştır. Burada teknik olarak modelin yalnızca piyasanın istikrarlı olduğu dönemlerde uygulanabileceği gibi bir sınırlama yapılamaz ancak modelin uygulamasından sonra elde edilen sonuçların yaptığımız uygulamanın amacına uygun olabilmesi için piyasanın istikrarlı bir dönem içerisinde olması gerekmektedir. Buna göre bu döneme ilişkin her ay için seçilmiş hisse senetlerinin bir önceki aya göre net getirileri hesaplanarak strateji sonuçlarını gösteren ödeme değerleri hesaplanmıştır.

Burada oyun taraflardan birinin yatırımcı diğ erinin doğ a (piyasa) olduğu iki kiş ilik sıfır toplamlı bir oyun olarak tanımlandığından bir tarafta yatırımcının stratejileri diğ er tarafta piyasanın stratejileri vardır. Buna göre yatırımcının stratejileri aşağıdaki gibi olacaktır.

1. Strateji: **ADNAC**; ilgili dönemde eldeki fonu Adana C hisse senedine yatırmak

2. Strateji: **ANSGR**; ilgili dönemde eldeki fonu Anadolu Sigorta hisse senedine yatırmak
3. Strateji: **AKBNK**; ilgili dönemde eldeki fonu Akbank hisse senedine yatırmak
4. Strateji: **BOSSA**; ilgili dönemde eldeki fonu Bossa hisse senedine yatırmak
5. Strateji: **DOHOL**; ilgili dönemde eldeki fonu Doğan Holding hisse senedine yatırmak
6. Strateji: **EREGL**; ilgili dönemde eldeki fonu Ereğli Demir Çelik hisse senedine yatırmak
7. Strateji: **ECILC**; ilgili dönemde eldeki fonu Eczacıbaşı İlaç hisse senedine yatırmak
8. Strateji: **MIGRS**; ilgili dönemde eldeki fonu Migros hisse senedine yatırmak
9. Strateji: **THYAO**; ilgili dönemde eldeki fonu Türk Hava Yolları A.O. hisse senedine yatırmak
10. Strateji: **VESTL**; ilgili dönemde eldeki fonu Vestel hisse senedine yatırmak şeklinde tanımlanmıştır.

Diğer oyuncu olan piyasanın, kesin olarak açıklanması ve tanımlanması oldukça zor olan çok sayıda faktör ve bu faktörlerin birbiriyle etkileşiminden ortaya çıkan sayısız kombinasyonu tarafından etkilenen sonsuz sayıda stratejisi vardır. Piyasanın bu sonsuz sayıda stratejilerinden hangilerini seçeceğini tam olarak kestiremeyiz ama piyasanın herhangi bir dönemdeki durumu bu stratejilerin uygulanmasıyla ortaya çıkan o dönemdeki sonucudur. Bu sonuç ilgili hisse senetlerinin fiyatlarına yansır ve ödeme değerlerine karşılık gelir. Kısaca piyasanın sonsuz sayıda stratejilerini bilmememize rağmen belli bir dönem için bu stratejiler gerçekleştikten sonra ortaya çıkan sonuç piyasanın stratejisi olacaktır. Yani ilgili dönemdeki seçilmiş hisse senetlerinin fiyatlarında meydana gelen artış piyasa stratejilerinin sonuçlarını gösterecektir ve ödeme değerlerini belirleyecektir (Özdil ve Yılmaz, 2001).

Örneğin 2001 yılı şubat ayı Akbank hisse senedinin getirisi 0.74 olması piyasanın o dönemde Akbank hisse senedine yatırım yapan oyuncuya kazanç sağlayıp kendisini zarara uğratan bir stratejinin seçildiği anlamına gelir.

2000–2007 dönemi için oluşturulan minimum risk düzeyinde maksimum getirili portföydeki hisse senetlerinin birbirine kıyasla getiri oranlarında meydana gelen artış yada azalışın 2000–2007 boyunca geçmiş dönemlerde stabil olup olmadığının incelenmesi için öncelikle oyun 2000–2007 dönemi için çözüme alınır. Daha sonra 2000–2006 dönemi için çözüm yapılır ve böyle 1'er yıl dışlanarak oluşturulan her bir alt dönem için çözümler yapılır. Yapılan bu iterasyon sonucunda 2000–2007 dönemi

için oluşturduğumuz portföydeki hisse senetlerinin göreceli getiri oranlarının performansının stabil olup olmadığı araştırılmıştır. Buna göre oluşturduğumuz portföyün bir sonraki dönemde değiştirilip değiştirilmemesi kararı ile ilgili bir ön fikre sahip olmak amaçlanmaktadır.

3.5 Ödemeler Matrisinin Oluşturulması

Hisse senetlerinin elde tutulma sürelerinin ne az bir ay olduğundan. Her ay için ayrı ayrı ödemeler matrisi hesaplanmalıdır. Piyasa sonuçları kolon olarak, yatırımcı stratejileri satır olacak şekilde ödemeler matrisini oluşturursak. Her ay için yıllar kolonlarda, hisse senetleri de satırlarda yer alacaktır. Ödeme değerlerinin hesaplanması için her bir hisse senedinin bir önceki döneme göre değişim oranları alınıp bu değerlere anaparayı ifade edecek +1 eklenmiştir. Böylelikle 1'den büyük değerler yatırımcı için kazançları 1'den küçük değerler ise yatırımcının kayıplarını ifade etmektedir (Özdil ve Yılmaz, 2001).

Örneğin Akbank hisse senedinin 1999 yılı aralık ayı sonunda kapanış fiyatı 1.19 TL iken, 2000 yılı ocak ayı sonunda kapanış fiyatı 1.08 TL'dir. Bu durumda Akbank hisse senedinin 2000 yılı ocak ayı getirisi $(1.08-1.19)/1.19=-0,0924$ bu değere anapara anlamında +1 ilave ettiğimizde $1+(-0,0924) = 0,9076$ olarak ödeme değeri hesaplanmıştır. Buna göre piyasa yatırımcının aybaşındaki 1 TL sine 0,09076 TL ödemiştir. Yani bu durumda oyuncu kaybetmiş piyasa kazanmıştır.

Yukarıda belirtildiği gibi hesaplanan ödeme değerleriyle oluşturulan ocak ayı ödemeler matrisi aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

Tablo 3.1: Ocak Ayı Ödemeler Matrisi

ocak	Piyasa halleri							
Yatırımcı stratejileri	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
ADNAC	1,5	1,1333	1,0521	0,6895	0,9723	1,0155	1,0839	1,1831
ANSGR	1,0238	1	0,9265	0,9808	0,9091	1,1207	1,2732	1,0294
AKBNK	0,9076	1,1422	0,9406	1,1314	0,8828	1	1,0455	1,0545
BOSSA	1,4706	1,1875	1,0175	1	0,899	1,0556	0,9912	1,065
DOHOL	1,0126	1,0556	1,0645	1	0,9406	1,2593	1,1923	1,0628
EREGL	1,0377	0,9219	1,1163	1,1646	1	1,0683	1,0282	1,1767
ECILC	1,0114	1	0,9167	1,1385	1,0155	0,9114	1,1336	0,9358
MIGRS	1,2444	0,8829	0,8798	0,9301	0,9074	0,9295	1,1152	1,0106
THYAO	1,1168	0,8875	0,9231	1,1017	0,9548	0,9434	0,9763	1,1967
VESTL	1,2884	1,1943	1,0541	1,1111	0,9322	1,0288	1,0458	0,9511

Benzer şekilde her ay için 12 ayrı ödemeler matrisi oluşturulmuştur.

3.6 Oyunun Doğrusal Programlamayla Çözümü

Oyunun doğrusal programlama ile çözülebilmek için öncelikle oyunu doğrusal programlama modeline dönüştürmemiz gerekmektedir. Bunun için piyasanın hangi stratejiyi oynayacağını bilmeyen yatırımcı, P1 olasılığıyla Adana C, P2 olasılığıyla Anadolu Sigorta, P3 olasılığıyla Akbank, P4 olasılığıyla Bossa, P5 olasılığıyla Doğan Holding, P6 olasılığıyla Ereğli Demir Çelik, P7 olasılığıyla Eczacıbaşı İlaç, P8 olasılığıyla Migros, P9 olasılığıyla Türk Hava Yolları A.O., P10 olasılığıyla Vestel hisse senedine yatırım yapma stratejilerini oynayacaktır. Bu durumda piyasanın 2000 yılı stratejisini oynaması halinde yatırımcının beklenen kazancı oyunun değerinden büyük yada ona eşit olacaktır. Buna göre ilgili yıllar için beklenen kazançlar aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

2000 yılı için beklenen kazanç:

$$1.5P1 + 1.02381P2 + 0.907563P3 + 1.470588P4 + 1.012579P5 + 1.037736P6 + 1.011364P7 + 1.244373P8 + 1.116836P9 + 1.28841P10 \geq V$$

benzer şekilde diğer yıllar için yatırımcının beklenen kazançları hesaplanırsa;

2001 yılı için beklenen kazanç:

$$1.133333P1 + 1P2 + 1.142188P3 + 1.1875P4 + 1.055556P5 + 0.921875P6 + 1P7 + 0.882863P8 + 0.887526P9 + 1.194332P10 \geq V$$

2002 yılı için beklenen kazanç:

$$1.052083P1 + 0.926471P2 + 0.94055P3 + 1.017544P4 + 1.064516P5 + 1.116279P6 + 0.916667P7 + 0.879822P8 + 0.923077P9 + 1.054054P10 \geq V$$

2003 yılı için beklenen kazanç:

$$0.689474\mathbf{P1} + 0.980769\mathbf{P2} + 1.131387\mathbf{P3} + 1\mathbf{P4} + 1\mathbf{P5} + 1.164557\mathbf{P6} + 1.138462\mathbf{P7} + 0.930085\mathbf{P8} + 1.101695\mathbf{P9} + 1.111111\mathbf{P10} \geq V$$

2004 yılı için beklenen kazanç:

$$0.972332\mathbf{P1} + 0.909091\mathbf{P2} + 0.882784\mathbf{P3} + 0.899032\mathbf{P4} + 0.940594\mathbf{P5} + 1\mathbf{P6} + 1.015504\mathbf{P7} + 0.907436\mathbf{P8} + 0.954839\mathbf{P9} + 0.932203\mathbf{P10} \geq V$$

2005 yılı için beklenen kazanç:

$$1.015526\mathbf{P1} + 1.12069\mathbf{P2} + 1\mathbf{P3} + 1.055556\mathbf{P4} + 1.259259\mathbf{P5} + 1.068259\mathbf{P6} + 0.911392\mathbf{P7} + 0.929487\mathbf{P8} + 0.943396\mathbf{P9} + 1.028846\mathbf{P10} \geq V$$

2006 yılı için beklenen kazanç:

$$1.083855\mathbf{P1} + 1.273196\mathbf{P2} + 1.045455\mathbf{P3} + 0.991228\mathbf{P4} + 1.192308\mathbf{P5} + 1.028169\mathbf{P6} + 1.133641\mathbf{P7} + 1.115212\mathbf{P8} + 0.976331\mathbf{P9} + 1.045817\mathbf{P10} \geq V$$

2007 yılı için beklenen kazanç:

$$1.18306\mathbf{P1} + 1.029412\mathbf{P2} + 1.054545\mathbf{P3} + 1.065\mathbf{P4} + 1.06278\mathbf{P5} + 1.176699\mathbf{P6} + 0.93578\mathbf{P7} + 1.010638\mathbf{P8} + 1.196721\mathbf{P9} + 0.951087\mathbf{P10} \geq V$$

olmaktadır. Ayrıca olasılıklar toplamı

$$\mathbf{P1+P2+P3+P4+P5+P6+P7+P8+P9+P10=1}$$

dir.

Bütün eşitsizliklerin her iki tarafı V'ye bölünürse, yani $(X_i=P_i/V)$ dönüşümü yapılırsa;

$$1.5X1 + 1.02381X2 + 0.907563X3 + 1.470588X4 + 1.012579X5 + 1.037736X6 + 1.011364X7 + 1.244373X8 + 1.116836X9 + 1.28841X10 \geq 1$$

$$1.133333X_1 + 1X_2 + 1.142188X_3 + 1.1875X_4 + 1.055556X_5 + 0.921875X_6 + 1X_7 + 0.882863X_8 + 0.887526X_9 + 1.194332X_{10} \geq 1$$

$$1.052083X_1 + 0.926471X_2 + 0.94055X_3 + 1.017544X_4 + 1.064516X_5 + 1.116279X_6 + 0.916667X_7 + 0.879822X_8 + 0.923077X_9 + 1.054054X_{10} \geq 1$$

$$0.689474X_1 + 0.980769X_2 + 1.131387X_3 + 1X_4 + 1X_5 + 1.164557X_6 + 1.138462X_7 + 0.930085X_8 + 1.101695X_9 + 1.111111X_{10} \geq 1$$

$$0.972332X_1 + 0.909091X_2 + 0.882784X_3 + 0.899032X_4 + 0.940594X_5 + 1X_6 + 1.015504X_7 + 0.907436X_8 + 0.954839X_9 + 0.932203X_{10} \geq 1$$

$$1.015526X_1 + 1.12069X_2 + 1X_3 + 1.055556X_4 + 1.259259X_5 + 1.068259X_6 + 0.911392X_7 + 0.929487X_8 + 0.943396X_9 + 1.028846X_{10} \geq 1$$

$$1.083855X_1 + 1.273196X_2 + 1.045455X_3 + 0.991228X_4 + 1.192308X_5 + 1.028169X_6 + 1.133641X_7 + 1.115212X_8 + 0.976331X_9 + 1.045817X_{10} \geq 1$$

$$1.18306X_1 + 1.029412X_2 + 1.054545X_3 + 1.065X_4 + 1.06278X_5 + 1.176699X_6 + 0.93578X_7 + 1.010638X_8 + 1.196721X_9 + 0.951087X_{10} \geq 1$$

ve

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} = 1/V$$

elde edilir. Yatırımcının amacı oyunun değeri olan V 'yi maksimum etmek olduğundan, burada $1/V$ yi minimum etmekle aynı amaca ulaşmış olur. Bu durumda amaç fonksiyonu;

$$\text{MİN } X_0 = \text{MİN } 1/V = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10}$$

olacaktır. Ayrıca olasılıklar negatif olamayacağından, $X_i \geq 0$ koşulu pozitiflik koşulu olarak doğrusal programlama modeline eklenmelidir.

Bu şekilde oluşturulan doğrusal programlama modeli çözüldüğünde, optimal çözüm aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

X1	0,108270
X2	0,000000
X3	0,000000
X4	0,000000
X5	0,100208
X6	0,266169
X7	0,526144
X8	0,000000
X9	0,000000
X10	0,000000

Amaç fonksiyonunun değeri ise 1,000791 olarak elde edilmiştir. $P_i = X_i/V$ dönüşümü yapılarak, P_i olasılıkları aşağıdaki gibi bulunmuştur. Buna göre;

Tablo 3.2: Ocak Ayı Strateji Vektörü

Hisse senetleri		Optimal değerleri	X	$P_i = X_i/V$	Strateji vektörü (P_i)
ADNAC	X1	0.108270		0.1081	0,1
ANSGR	X2	0.000000		0	0
AKBNK	X3	0.000000		0	0
BOSSA	X4	0.000000		0	0
DOHOL	X5	0.100208		0.1001	0,1
EREGL	X6	0.266169		0.2659	0,27
ECILC	X7	0.526144		0.5257	0,53
MIGRS	X8	0.000000		0	0
THYAO	X9	0.000000		0	0
VESTL	X10	0.000000		0	0
V	1.000791				

Ocak ayı için strateji vektörü;

$V_{OCAK} = (0.1, 0, 0, 0, 0.1, 0.27, 0.53, 0, 0, 0)$ olarak bulunmuştur.

Bunun anlamı, yatırımcı ocak ayında elindeki fonu strateji vektörünün belirttiği olasılıklar oranında paylaştırması gerektiğidir. Örneğin yatırımcının elinde 100 TL varsa bunun 10 TL' si ile Adana C, 10 TL ' si ile Doğan Holding, 27 TL' si ile Ereğli Demir Çelik ve 53 TL' si ile Eczacıbaşı İlaç hisseleri satın almalıdır. Bu şekilde oynandığı takdirde piyasa koşulları nasıl gerçekleşirse gerçekleşsin yatırımcının kazancı en az oyunun değeri kadar olacaktır.

Benzer şekilde diğer aylar için doğrusal programlama ile çözüm değerleri hesaplanarak, her bir ay için strateji vektörleri aşağıdaki gibi bulunmuştur.

Tablo 3.3: 2000–2007 Dönemi İçin Strateji Vektörleri

	ADNAC	ANSGR	AKBNK	BOSSA	DOHOL	EREGL	ECILC	MIGRS	THYAO	VESTL
Ocak	0,1	0	0	0	0,1	0,27	0,53	0	0	0
Şubat	0	0	0	0,53	0	0	0	0,18	0	0,29
Mart	0,33	0	0	0	0	0	0,56	0,11	0	0
Nisan	0	0	0,69	0	0	0	0,29	0,02	0	0
Mayıs	0,24	0	0	0	0	0,76	0	0	0	0
Haziran	0	0	0,46	0	0,29	0	0	0	0,25	0
Temmuz	0,78	0	0	0	0	0	0,04	0,18	0	0
Ağustos	0,15	0,61	0	0	0	0,24	0	0	0	0
Eylül	0	0	0	0	0	0	0	0,85	0	0,15
Ekim	0	0	0,23	0	0	0	0	0,77	0	0
Kasım	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
Aralık	0,8	0	0	0	0	0	0	0,2	0	0

Yukarıdaki tablo incelendiğinde yalnızca kasım ayı için tam stratejinin bulunduğu görülmektedir. Diğer aylarda ise karma strateji bulunmuştur. Burada yatırımcı yukarıdaki sonuçların belirttiği gibi oynamazsa, kazancı oyunun değerinden daha az olacaktır.

3.7 Çözüm Sonuçlarının Değerlendirilmesi

Her ay için strateji vektörlerinin belirttiği gibi oynandığında ilgili dönemde elde edilecek kazançlar aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Tablo 3.4: 2000–2007 Dönemi İçin Getiriler

	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Ocak	1,0675	0,9978	0,9989	1,0868	0,9995	0,9989	1,1061	1,0383
Şubat	0,8805	0,8785	0,8786	1,0351	1,0218	1,0659	1,0949	0,9365
Mart	1,1681	0,9547	0,95	0,9498	1,1157	1,1252	0,9496	1,0443
Nisan	1,1812	1,3824	1,1636	1,2144	0,9735	0,9727	0,9729	1,0186
Mayıs	0,8615	0,8617	0,8937	0,9939	0,9021	1,1133	0,8615	0,9098
Haziran	1,0075	1,049	1,1086	1,0086	1,0517	1,092	1,0187	1,0068
Temmuz	0,9714	0,9719	1,1308	0,9721	1,0931	1,0985	1,0121	1,0086
Ağustos	1,0113	1,2493	1,0371	2,4361	1,0877	1,0107	1,0644	1,0103
Eylül	0,9008	0,9005	1,1373	1,1203	1,0374	0,9879	1,0537	0,9967
Ekim	1,2133	1,1985	1,0868	1,2063	1,0602	1,0129	1,0971	1,0128
Kasım	0,7273	1,1593	1,3675	0,9341	1,0219	1,2857	0,9829	0,8113
Aralık	1,0736	1,1206	1,0631	1,1655	1,1469	1,1384	1,0835	1,0617

Buna göre 2000–2007 dönemi için oluşturduğumuz portföyün toplam getirisi ve toplam riski hesaplanmıştır. Risk hesaplanan getirilerin standart sapmasının ortalamaya oranının yüzde cinsinden ifade edilmesiyle bulunmuştur, $DK = \frac{s}{\bar{x}} 100$. Burada birden

$$s^2 = \sum_{i=1}^N w_i^2 s_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j Cov_{ij}$$

şeklinde hesaplanmaktadır. Standart sapma ise varyansın karekökü alınarak elde edilmiştir.

	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Getiriler	0,9438	1,7804	2,0257	4,5317	1,6129	2,304	1,3021	0,8394
Toplam getiri	62,654							
Standart sapma	0,146	0,163	0,133	0,408	0,066	0,088	0,074	0,07
Toplam risk	56,83							

Diğer taraftan, yatırımcı aynı dönemde oyun teorisinin belirttiği strateji vektörlerine göre oynamayıp elindeki fonun tamamını tek bir hisse senedine yatırırsa, her tam stratejilere göre elde edilen kazançlar aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Tablo 3.5: Tam Stratejilere Göre 2000–2007 Dönemi İçin Getiri ve Riskler

ADNAC	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Getiriler	0,5455	1,6	1,9792	1,3316	1,502	2,1026	0,9161	1
Toplam getiri	6,6545							
Toplam risk	55,97							
ANSGR	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Getiriler	0,7381	1,0968	0,9176	1,7981	2,0677	1,6724	0,8763	1,1765
Toplam getiri	4,7619							
Toplam risk	54,76							
AKBNK	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Getiriler	0,5378	1,7609	1,2156	1,9927	1,4729	1,6414	1	1,3182
Toplam getiri	7,3109							
Toplam risk	47,08							
BOSSA	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Getiriler	0,4706	3,5625	1,4386	0,8817	1,2448	1,2667	1,7544	0,81
Toplam getiri	4,7647							
Toplam risk	55,15							
DOHOL	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Getiriler	0,4528	0,8611	0,7581	2,1489	1,3366	1,5407	1,0721	0,9955
Toplam getiri	1,3962							
Toplam risk	73,99							
EREGL	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007

Getiriler	0,6038	1,3438	0,9186	2,2785	1,6278	1,6962	1,0362	2
Toplam getiri	9,717							
Toplam risk	48,77							
ECILC	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Getiriler	0,6705	0,8136	1,3542	1,9846	1,8372	1,8312	1,2558	0,9541
Toplam getiri	5,9091							
Toplam risk	57,24							
MIGRS	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Getiriler	0,7412	1,462	0,7003	1,3962	1,4203	1,187	1,6076	1,2822
Toplam getiri	3,6817							
Toplam risk	41,74							
THYAO	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Getiriler	0,7097	0,7975	0,7564	1,3136	1,0258	1,0629	0,7219	1,4098
Toplam getiri	0,6241							
Toplam risk	55,34							
VESTL	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Getiriler	0,6658	1,498	0,8514	1,873	0,8814	0,9654	0,7331	0,788
Toplam getiri	0,7817							
Toplam risk	52,33							

Yakarıdaki sonuçlara göre sekiz yıllık dönem içerisinde portföyün toplam getirisi 62,654 olarak bulunmuştur. Bunun anlamı, sekiz yıllık süre içerisinde oyun teorisinin belirttiği gibi oynandığı takdirde, sekiz yılın sonunda yatırımcının 1TL'si, 62,654TL olacak demektir.

Tam strateji sonuçları incelendiğinde Adana C, Anadolu Sigorta, Akbank, Bossa, Doğan Holding, Ereğli Demir Çelik, Eczacıbaşı İlaç, Migros, Türk Hava Yolları A.O, Vestel hisse senetlerinin toplam getirileri sırasıyla 6,6545 – 4,7619 – 7,3109 – 4,7647 – 1,3962 – 9,717 – 5,9091 – 3,6817 – 0,6241 – 0,7817 olarak bulunmuştur. Burada oyun teorisinin önerdiği şekilde oynandığında elde edilen toplam getiri ile her bir hisse senedi için tam strateji oynandığında elde edilen toplam getiriler karşılaştırılırsa oyun teorisinin önerdiği portföyün açık bir şekilde üstünlüğü görülmektedir.

Riskler karşılaştırıldığında ise portföy riski ile tam strateji riskleri aşağı yukarı birbirine yakın çıkmıştır. Yalnız Akbank, Ereğli Demir Çelik ve Migros hisse senetlerinin riskleri portföy riskinden çok düşük çıkmıştır. Burada getirilere baktığımızda ise portföy getirisinin çok yüksek olduğu buna karşılık ilgili hisse senetlerinin tam strateji getirilerinin çok düşük olduğu görülmektedir. Tüm bunlar dikkate alınırsa, bu durum oyun kuramının minimum risk düzeyinde maksimum getirili portföy oluşturma amacını gerçekleştirdiğini göstermektedir.

3.8 Oluşturulan Portföydeki Hisse Senelerinin Görelî Getiri Oranı Performanslarının Araştırılması

Oluşturulan portföydeki hisse senelerinin görelî getiri oranı performanslarının araştırmak için ilk olarak son 1 yıllık veriler dışlanarak 2000–2006 dönemi için minimum risk düzeyinde maksimum getirili portföy hesaplanıp elde edilen bu portföy 2000–2007 döneminde hesaplanan portföyle karşılaştırılmıştır. Aynı şekilde 1’er yıllık veriler dışlanarak diğer alt dönemler için benzer hesaplamalar yapılmıştır.

2000–2006 dönemi için minimum risk düzeyinde maksimum getirili portföyün hesaplanması: Burada, piyasanın 2007 stratejisinin olmadığı durumda oluşturulacak olan optimum portföyün ne olduğu araştırılmıştır. Bunun için 2000–2006 dönemindeki verilerden hareketle oluşturulan oyun matrisi doğrusal programlamayla çözüme alınmıştır. Her ay için oyun teorisiyle elde edilen optimum strateji vektörleri aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Tablo 3.6: 2000–2006 Dönemi İçin Strateji Sonuç Vektörleri

	2000–2006									
	ADNAC	ANSGR	AKBNK	BOSSA	DOHOL	EREGL	ECILC	MIGRS	THYAO	VESTL
Ocak	0,1	0	0	0	0,1	0,27	0,53	0	0	0
Şubat	0	0	0	0,53	0	0	0	0,18	0	0,29
Mart	0,33	0	0	0	0	0	0,56	0,11	0	0
Nisan	0	0	0,7	0	0	0	0,28	0,02	0	0
Mayıs	0,24	0	0	0	0	0,76	0	0	0	0
Haziran	0	0	0,55	0	0,45	0	0	0	0	0
Temmuz	0,78	0	0	0	0	0	0,04	0,18	0	0
Ağustos	0,01	0,67	0	0	0	0,32	0	0	0	0
Eylül	0	0	0	0	0	0	0	0,85	0	0,15
Ekim	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
Kasım	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
Aralık	0,8	0	0	0	0	0	0	0,2	0	0

2000–2005 dönemi için minimum risk düzeyinde maksimum getirili portföyün hesaplanması: 2006 ve 2007 yılı verileri modelden dışlanarak oluşturulan oyun matrisi doğrusal programlamayla çözülmüştür. Her ay için oyun teorisiyle elde edilen optimum strateji vektörleri aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Tablo 3.7: 2000–2005 Dönemi İçin Strateji Sonuç Vektörleri

2000–2005										
	ADNAC	ANSGR	AKBNK	BOSSA	DOHOL	EREGL	ECILC	MIGRS	THYAO	VESTL
Ocak	0,1	0	0	0	0,1	0,27	0,53	0	0	0
Şubat	0	0	0	0,53	0	0	0	0,18	0	0,29
Mart	0,7	0,07	0	0	0	0	0,23	0	0	0
Nisan	0	0	0,72	0	0	0	0,28	0	0	0
Mayıs	0,24	0	0	0	0	0,76	0	0	0	0
Haziran	0	0	0,55	0	0,45	0	0	0	0	0
Temmuz	0,78	0	0	0	0	0	0,04	0,18	0	0
Ağustos	0,01	0,67	0	0	0	0,32	0	0	0	0
Eylül	0	0	0	0	0	0	0	0,85	0	0,15
Ekim	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
Kasım	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
Aralık	0,82	0	0	0	0	0	0	0,18	0	0

2000–2004 dönemi için minimum risk düzeyinde maksimum getirili portföyün hesaplanması: Benzer şekilde 2000–2004 dönemi dikkate alınarak oluşturulan problem çözüldüğünde her ay için elde edilen minimum risk düzeyinde maksimum getirili portföy aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Tablo 3.8: 2000–2004 Dönemi İçin Strateji Sonuç Vektörleri

2000–2004										
	ADNAC	ANSGR	AKBNK	BOSSA	DOHOL	EREGL	ECILC	MIGRS	THYAO	VESTL
Ocak	0,19	0	0	0	0	0,3	0,51	0	0	0
Şubat	0	0	0	0,53	0	0	0	0,18	0	0,29
Mart	0,7	0,07	0	0	0	0	0,23	0	0	0
Nisan	0	0,19	0	0	0	0	0,81	0	0	0
Mayıs	0,24	0	0	0	0	0,76	0	0	0	0
Haziran	0	0	0,55	0	0,45	0	0	0	0	0
Temmuz	0,78	0	0	0	0	0	0,04	0,18	0	0
Ağustos	0,17	0,83	0	0	0	0	0	0	0	0
Eylül	0	0	0	0	0	0	0	0,85	0	0,15
Ekim	0	0,48	0	0,33	0	0	0	0	0,19	0
Kasım	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
Aralık	0,82	0	0	0	0	0	0	0,18	0	0

2000–2003 dönemi için minimum risk düzeyinde maksimum getirili portföyün hesaplanması: Benzer işlemler 2000–2003 dönemine uygulanarak her ay için optimum portföyler hesaplanmıştır.

Tablo 3.9: 2000–2003 Dönemi İçin Strateji Sonuç Vektörleri

2000–2003										
	ADNAC	ANSGR	AKBNK	BOSSA	DOHOL	EREGL	ECILC	MIGRS	THYAO	VESTL
Ocak	0	0	0	0	0	0,42	0	0	0	0,58
Şubat	0	0	0	0,53	0	0	0	0,18	0	0,29
Mart	0,7	0,07	0	0	0	0	0,23	0	0	0
Nisan	0,21	0	0	0,51	0	0	0,28	0	0	0
Mayıs	0,24	0	0	0	0	0,76	0	0	0	0
Haziran	0	0	0,55	0	0,45	0	0	0	0	0
Temmuz	0,78	0	0	0	0	0	0,04	0,18	0	0
Ağustos	0,17	0,83	0	0	0	0	0	0	0	0
Eylül	0	0	0	0	0	0	0	0,85	0	0,15
Ekim	0,01	0,7	0	0	0	0	0	0	0,29	0
Kasım	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
Aralık	0,82	0	0	0	0	0	0	0,18	0	0

2000–2002 dönemi için minimum risk düzeyinde maksimum getirili portföyün hesaplanması: Benzer işlemler 2000–2002 dönemine uygulanarak her ay için potimum portföyler hesaplanmıştır.

Tablo 3.10: 2000–2002 Dönemi İçin Strateji Sonuç Vektörleri

2000–2002										
	ADNAC	ANSGR	AKBNK	BOSSA	DOHOL	EREGL	ECILC	MIGRS	THYAO	VESTL
Ocak	0	0	0	0	0	0,42	0	0	0	0,58
Şubat	0	0	0	0,53	0	0	0	0,18	0	0,29
Mart	0	0,53	0	0	0,37	0	0,1	0	0	0
Nisan	0	0	0	0,7	0	0	0,3	0	0	0
Mayıs	0,24	0	0	0	0	0,76	0	0	0	0
Haziran	0	0	0,52	0	0,48	0	0	0	0	0
Temmuz	0,89	0	0	0,11	0	0	0	0	0	0
Ağustos	0,17	0,83	0	0	0	0	0	0	0	0
Eylül	0	0	0	0	0	0	0	0,85	0	0,15
Ekim	0,6	0	0	0	0	0	0	0	0,4	0
Kasım	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
Aralık	0,82	0	0	0	0	0	0	0,18	0	0

2000–2001 dönemi için minimum risk düzeyinde maksimum getirili portföyün hesaplanması: Benzer işlemler 2000–2001 dönemine uygulanarak her ay için potimum portföyler hesaplanmıştır.

Tablo 3.11: 2000–2001 Dönemi İçin Strateji Sonuç Vektörleri

	2000–2001									
	ADNAC	ANSGR	AKBNK	BOSSA	DOHOL	EREGL	ECILC	MIGRS	THYAO	VESTL
Ocak	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Şubat	0	0	0	0	0	0	0	0,42	0	0,58
Mart	0	0,61	0	0	0	0	0,39	0	0	0
Nisan	0,12	0	0	0,88	0	0	0	0	0	0
Mayıs	0,24	0	0	0	0	0,76	0	0	0	0
Haziran	0	0	0,52	0	0,48	0	0	0	0	0
Temmuz	0,89	0	0	0,11	0	0	0	0	0	0
Ağustos	0	0,37	0	0	0	0	0,63	0	0	0
Eylül	0	0	0	0	0	0	0	0,85	0	0,15
Ekim	0	0	0	0,22	0	0	0	0	0,78	0
Kasım	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
Aralık	0	0	0,81	0,19	0	0	0	0	0	0

3.9 Sonuçların Değerlendirilmesi

2000–2001 döneminden başlayıp 2000–2007 dönemine kadar her ay için strateji vektörlerinde meydana gelen değişimleri yorumlayacak olursak; ilk olarak Ocak ayı için 2000–2001 dönemi sonuçlarına bakalım. Vestel hisse senedinin diğer hisse senetlerine göre getiri performansının çok yüksek olduğu görülmektedir. Yatırımcı bu dönemde Vestel hisse senedine tam strateji uygulamaktadır. 2000–2002 dönemine baktığımızda Ereğli Demir Çelik hisse senedinin görelî getiri performansının arttığı gözlenmektedir. Diğer taraftan Vestel hisse senedinin görelî getiri oranı performansında gerileme görülmektedir. Benzer durum 2000–2003 yılları arasındaki veriler kullanılarak yapılan analizde aynen korunmaktadır. Yani bu dönemde görelî olarak hisse senetlerinin getiri oranı performanslarında bir değişiklik olmamaktadır. 2000–2004 yılları arasındaki dönem dikkate alındığında ise Vestel hisse senedinin görelî getiri oranı performansında ciddi bir düşüş görülmektedir. Bu düşüş yatırımcıya bu hisse senedine bir sonraki dönem için dikkat etmesi gerektiğini söylüyor. Yine bu dönem içerisinde Eczacıbaşı İlaç ‘ın çok büyük bir görelî getiri performansı sergilediği görülmektedir. Adana C ise yine görelî getiri performansı artışa geçen başka bir hisse senedir. 2000–2005 yılları arasındaki döneme baktığımızda ise benzer durumun çok küçük değişikliklerle devam ettiği görülmektedir. 2000–2006 arasındaki dönemde ise Adana C, Doğan Holding, Ereğli Demir Çelik, Eczacıbaşı ilaç hisse senetlerinin belli oranlarda yatırım değerine sahip hisseler olduğu görülmektedir. Son olarak 2000–2007 dönemi dikkate alındığında portföydeki hisse senetlerinin birbirine kıyasla getiri oranlarındaki göstermiş oldukları

performans değişmeyerek stabil bir hal almıştır. Buna göre yatırımcının bir sonraki dönemde ocak ayı için oluşturacağı portföyde Eczacıbaşı İlaç'a en fazla pay (elindeki fonun yaklaşık yarısı) ayırması gerektiği sonucu çıkmaktadır. Tabii ki bu bir ön bilgidir yatırımcı kesin karar vermek için yatırım analizi için gerekli olan tüm analizleri yapması gerekmektedir.

Şubat ayı için sonuçları yorumlayacak olursak 2000–2001 dönemi için Migros'a %42, Vestel'e ise %58 fon yatırılmasını önerilmektedir. 2000–2002 dönemine baktığımızda Bossa hisse senedinin getiri oranı performansında büyük bir artış görülmektedir. 2002 yılından sonra tüm dönemlerde bu oranlar korunup, bu ay içinde portföydeki hisse senetlerinin getiri oranı performansında bir değişiklik olmadığı görülmektedir.

Mart ayı için 2000–2001 dönemi ve 2000–2002 dönemlerinde Anadolu Sigorta ve Eczacıbaşı İlaç hisse senetlerinin portföydeki tüm kâğıtlara kıyasla görelî getiri oranı performansı yüksek olan hisselerdir. 2000–2003 dönemini dikkatlice incelediğimizde Adana C hisse senedinin görelî getiri performansında çok ciddi bir artış olduğu görülmektedir. Bununla beraber Adana C'deki performans artışı kadar olmasa da Eczacıbaşı İlaç 'da önemli bir performans artışı görülmektedir. Buna karşılık Anadolu sigortanın Göstermiş olduğu performans artışı bu iki hisse senedinin çok gerisinde kalmaktadır. 2000–2004 ve 2000–2005 arası dönemleri dikkate aldığımızda benzer yapının devam ettiği görülmektedir. 2000–2006 döneminde Adana C'nin görelî getiri performansında gerileme görülmektedir. Buna karşılık Eczacıbaşı İlaç da ise artış görülmektedir. 2000–2007 döneminde ise bu mevcut durum devam etmektedir.

Nisan ayı için değerlendirme yaptığımızda 2000–2001 döneminde ve 2000–2002 döneminde Bossa'nın açık bir şekilde üstünlüğü görülmektedir. 2000–2003 döneminde ise Bossa'nın göstermiş olduğu performans görelî olarak biraz azalırken Adana C hisse senedinde artış görülmektedir. 2000–2004 döneminde ise Bossa'nın görelî getiri performansı çok ciddi bir şekilde düşmektedir. Eczacıbaşı İlaç'ın portföydeki tüm hisse senetlerine kıyasla getiri oranı performansında bir artış görülmektedir. 2000–2005 döneminde ise Akbank hisse senedinin de çok yüksek bir performans artışı görülmektedir. Bu dönemden sonra gelen 2000–2006 ve 2000–2007 dönemlerinde benzer durum devam etmektedir.

Mayıs ayı için sonuçları değerlendirdiğimizde, burada Adana C ve Ereğli Demir Çelik hisse senetlerinin portföydeki tüm kâğıtlara kıyasla getiri oranı performansları oldukça yüksektir. Bunun nedenini mevsime bağlı olarak inşaat sektöründeki

canlanmaya bağlayabiliriz. Burada her dönem için Mayıs ayında oluşturulan portföyler oldukça istikrarlı bir seyir izlemektedir. Bu ayda yatırımcıya ilgili iki hisse senedine yatırım yapma tavsiyesinde bulunulabilir.

Haziran ayına baktığımızda yine Akbank ve Doğan Holding hisse senetlerinin görelî getiri oranı performanslarının oldukça istikrarlı olduğu gözlenmiştir. 2000–2007 döneminde ise Türk Hava Yolları A.O’nun görelî olarak getiri oranı performansında belirli bir artış vardır. Bunun nedenini ise özellikle 2006’dan sonra sektörde faaliyet gösteren özel havayolu şirketlerinin artması buna bağli olarak rekabetin fiyatların düşmesine neden olması ve böylece hava yolu taşımacılığına olan talebin artması olarak gösterilebilir.

Temmuz ayı için baktığımızda genel olarak her dönemde hisse senetlerinin görelî getiri oranı performansı istikrarlı bir seyir izlemektedir. Bossa’nın 2000–2003 dönemine kadar istikrarlı bir seyir izleyip bu dönemden sonra ise bu performansı kaybetmesi dikkat çekici bir nokta olarak karşımıza çıkmaktadır.

Ağustos ayı için baktığımızda 2000–2001 döneminde Anadolu sigorta ve Eczacıbaşı İlaç yüksek performans sergileyen hisseler olarak karşımıza çıkmaktadır. Fakat 2000–2002 döneminden sonra Eczacıbaşı İlaç hisse senedinin çok ciddi bir şekilde görelî getiri oranı performansı kaybettiği gözlenmiştir. Bundan sonraki dönemlerde ise diğer kâğıtlara kıyasla getiri oranı performansında pek bir varlık gösteremediği gözlenmiştir. 2000–2004 dönemine kadar Anadolu Sigorta oldukça istikrarlı bir seyir izlemektedir. 2000–2005 döneminde Ereğli Demir Çelik hisse senedinin görelî getiri oranı performansı önemli derecede artmıştır ve sonraki dönemlerde bu durum istikrarlı bir şekilde devam etmiştir.

Eylül ayı için portföydeki tüm kâğıtlar içerisinde birbirine kıyasla en iyi getiri oranı performansı gösteren hisse senedi Migros’dur. Baktığımız zaman bu hisse senedi tüm dönemlerde istikrarlı bir seyir izlemektedir.

Ekim ayı için sonuçları değerlendirdiğimizde 2000–2001 dönemi için Türk Hava Yolları A.O ve Bossa önemli hisse senetleri olarak karşımıza çıkıyor. 2000–2002 döneminde görelî olarak Adana C performansında artış meydana gelmesine rağmen bir sonraki dönemde görelî olarak oldukça geride kalmaktadır. Bu dönemde Anadolu Sigortanın performansında önemli bir artış meydana gelmektedir. 2000–2004 döneminde ise Bossa’nın performansında önemli bir artış olmaktadır. Fakat 2000–2005 dönemi ve bu dönemden sonraki 2000–2006 döneminde Migros çok yüksek bir görelî performans sergileyerek portföyde tam strateji oynanması yönünde bir sonuç çıkmıştır.

2000–2007 döneminde ise bu oran biraz gerileyip Akbank hisse senedinde görelî bir performans artışı görölmektedir.

Kasım ayı için baktığımızda portföydeki tüm hisse senetlerinin görelî olarak getiri oranı performansı oldukça istikrarlı bir seyir izlemektedir. Her dönem için tüm fonun Akbank hisse senedine ayrılması yönünde tam strateji oynanması sonucu ortaya çıkmaktadır.

Aralık ayı için 2000–2001 döneminde öne çıkan hisseler Akbank ve Bossa iken 2001 ‘den sonraki dönemlerde görelî olarak getiri oranı performanslarında düşüş görölmektedir. Yine bu dönemden sonra görelî olarak portföydeki en iyi getiri oranı performansı sergileyen hisse senedi Adana C’dir. 2002’den sonraki tüm dönemlerde oldukça istikrarlı bir seyir izlemektedir.

SONUÇ

Bu çalışmada öncelikli olarak oyun kuramı ile ilgili kavramlar üzerinde durulmuştur. Bu bağlamda oyunun tanımı, oyuncular, stratejiler ve ödemeler üzerinde durulmuştur. Oyun, sonucu yalnızca bir oyuncunun seçimine veya şansına bağlı olmayan aynı zamanda diğer oyuncu yada oyuncu gruplarının yaptığı seçimlere de bağlı olan çatışma durumlarını analiz etmek için kullanılan matematiğin bir dalıdır. Ekonomi bağlamında değerlendirdiğimizde oyun kuramı, ekonomik faaliyetlere ilişkin en iyi kararın verilebilmesi için geliştirilmiş bir yaklaşım olarak ifade edilebilir. Oyun kuramı genel olarak üç kısımda incelenmiştir. Bunlar sıfır toplamlı oyunlar, sıfır toplamlı olmayan oyunlar ve yayvan formdaki oyunlardır.

İki kişilik sıfır toplamlı oyunlar genel olarak normal biçim (matris) ile ifade edilirler. Bu tarz oyunlarda her iki oyuncunun da çıkarları birbirine tamamiyle zıttır. Yani taraflardan birinin kazancı diğerinin kaybına eşittir. Dolayısıyla oyuncuların kazançları toplamı sıfırdır. Oyun sonunda elde edilen kazançlar toplamı sıfır olduğu için, böyle oyunlara sıfır toplamlı oyunlar denmektedir. Sıfır toplamlı oyunlar, eğer noktali ve eğer noktali olmayan oyunlar şeklinde iki kısımda değerlendirilmiştir. Eğer noktali oyunlar tam strateji dengesinin olduğu oyunlardır. Oyunun değerine tam strateji uygulayarak ulaşılamıyorsa bu durumda eğer noktali olmayan oyunlar için karma strateji dengesi söz konusudur. Eğer noktali oyunlarda genel çözüm yöntemi minimaks yöntemidir. Eğer noktasi olmayan oyunları çözmek için grafiksel yöntem, matris yöntemi ve doğrusal programlama yöntemi gibi çeşitli yöntemler vardır. Bu yöntemlerin uygulanabilmesi için bazı varsayımların sağlanması gerekmektedir. Örneğin grafik yöntemin uygulanabilmesi için oyun matrisi ya $2 \times m$ yada $m \times 2$ boyutlu olması gerekir. Matris yönteminin uygulanabilmesi için ödemeler matrisinin kare ve tersi alınabilir bir matris olması gerekir. Doğrusal programlama modelinin oluşturulması ve uygulanması için bazı varsayımların sağlanması gerekmektedir. Bu varsayımlar doğrusallık, toplanabilirlik ve kesinlik şeklinde ifade edilir. İki kişilik sıfır toplamlı oyunları çözmeye kullanılan en genel yöntem doğrusal programlama yöntemidir. İki kişilik sıfır toplamlı oyunlar her ne özellikte olursa olsun, ister karma stratejili ister tam stratejili, veya oyuncuların sahip olduğu strateji sayıları ister eşit, isterse farklı iki yada daha fazla stratejiden oluşsun doğrusal programlama yöntemi ile çözüme, eğer varsa, ulaşılabilir.

Sıfır toplamlı olmayan oyunlar genel olarak işbirlikçi ve işbirlikçi olmayan oyunlar olarak iki gruba altında değerlendirilmiştir. Oyuncular arasında iki çeşit işbirliğinden söz edilebilir. Bunlardan ilki stratejik işbirliğidir. Stratejik işbirliğinden kasıt oyuncular oyuna başlamadan önce her iki taraf için bağlayıcı olan bir anlaşma yapmaktır. İkincisi ise oyunun sonunda ortaya çıkan ödentileri de paylaşarak tam anlamda işbirliği yapmaktır. İşbirlikçi olmayan oyunlarda tam baskın strateji dengesine ulaşılabilmektedir. Bu yöntemin mantığı hiçbir rasyonel oyuncunun kendi stratejilerinden birini oynayarak elde ettiği kazanç, diğerini oynayarak elde ettiği kazançtan tam olarak küçük ise ozaman bu getirisi küçük olan stratejiyi oynanmamasına dayanmaktadır. Domine edilen stratejilerin oyun matrisinden silindiğinde, eğer bir tane strateji çifti kalıyorsa bu strateji çifti oyunun denge değeri olmaktadır. Aksi takdirde, eğer kesin olarak bir tane strateji çiftine ulaşılamıyorsa bu durumda tam strateji Nash dengesi kullanılmaktadır. Nash dengesinin temeli her bir oyuncunun belirlediği stratejisinin diğer oyuncuların belirlediği stratejilerine karşı en iyi karşılık (tepki) olmasına dayanmaktadır. Oyun teorisindeki tüm oyunlar tam strateji Nash Dengesi ile sonuçlanmayabilir. Bazı oyunlarda oyuncular sahip oldukları tam stratejileri belli olasılıklarla seçerek çözüme ulaşmaktadırlar. Böyle durumlarda karma strateji dengesi söz konusudur. Karma strateji, her bir oyuncunun sahip olduğu stratejileri çeşitli seçim olasılıklarıyla ağırlıklandırılması olarak düşünülür. Tam strateji Nash Dengesini karma stratejilere uyarladığımızda her bir oyunun karma stratejileri diğer oyuncuların karma stratejilerine en iyi tepki olması gerekir. Eğer bu kural sağlanıyorsa karma strateji Nash dengesi vardır denir. İşbirlikçi oyunlar ise iki kısımda incelenmiştir. . Bunlardan ilki stratejik işbirliği, tam anlamda işbirliğidir. Stratejik işbirliği oyuncuların hangi stratejileri oynamaları gerektiği hakkında kendi aralarında her bir oyuncu için bağlayıcı olan bir anlaşma yapmaları anlamına gelir. Tam anlamda işbirliği ise hem stratejik işbirliği hem de oyunun sonunda elde edilen toplam ödemeyi belli bir kurala göre paylaşıldığı işbirliği çeşididir. Burada, işbirliği yapan ve elde edilen ödemeleri belli bir kurala göre paylaşan, oyuncuların kümesinin alt kümesine koalisyon denilmektedir. Bu koalisyonun dışındaki oyuncuların kümesine de karşı koalisyon denilmektedir. Oluşturulan koalisyon ve karşı koalisyonu birer oyuncu gibi düşünürsek, ozaman işbirlikçi bir oyun bu iki oyuncu arasında oynanan işbirlikçi olmayan bir oyun haline gelmiş olur. Oluşturulan koalisyon için oyunun maksimin değeri karakteristik fonksiyon olarak tanımlanır. N kişilik işbirlikçi oyunlar için geliştirilen çeşitli çözüm kavramları vardır bunlardan en bilinenleri Core ve Shapley Değerleridir. Bunlardan ilki, herhangi

bir oyunda domine edilen bir imputasyonun asla gerçekleşmeyeceği fikrine dayanır. Diğer yöntem ise bir oyuncunun ait olduğu koalisyona katkısının ne olduğunu bulmaya çalışır.

Yayvan (extensive) formdaki oyunlarda ise tümel (complete) bilgiye dayalı yayvan formdaki oyunları ele alınmıştır. Burada oyunlar tam bilgiye dayalı ve tam bilgiye dayalı olmayan oyunlar şeklinde iki kısımda ele alınmıştır. Bunun için bilgi kümeleri kavramı, oyundaki bir oyuncunun oyun esnasında ulaşabileceği köşelerden birinde olduğunu bildiği fakat hangisinde olduğunu bilmediği köşelerin kümesi olarak tanımlanmıştır. Bu tanıma göre bilgi kümesi tek bir köşeden oluşuyorsa oyun tam bilgiye (perfect) dayalı, birden fazla köşeden oluşuyorsa oyun eksik bilgiye dayalı bir oyun olarak ifade edilir. Tam bilgiye dayalı oyunlar için genel çözüm yöntemi, geriye doğru tümevarım (Backward Induction) yöntemidir. Geriye doğru tümevarım yöntemi oyuncuların her hareketinde rasyonel oldukları, ayrıca oyunun sınırlı sayıda aşamadan oluşması gerektiği varsayımlarına dayanmaktadır. Eksik bilgiye dayalı oyunlarda ise alt oyun tam Nash dengesi (Subgame Perfection) çözüm yöntemi olmaktadır. Bu yöntemin temeli, alt oyun tanımlayarak, uygun olmayan Nash dengelerini rafine edilerek dengeye ulaşılmasına dayanmaktadır.

Oyun kuramının finansal karar vermede kullanılması bir tarafta yatırımcı diğer tarafta doğanın (piyasanın) olduğu iki kişilik sıfır toplamlı bir oyun modeliyle yapılmaktadır. Yatırımcının finansal varlıkları İstanbul Menkul Kıymetler Borsasından (İMKB) seçtiğimiz Adana C, Anadolu Sigorta, Akbank, Bossa, Doğan Holding, Ereğli Demir Çelik, Eczacıbaşı İlaç, Migros, Türk Hava Yolları A.O., Vestel hisse senetleridir. Burada gelirini maksimize etmek isteyen yatırımcının stratejileri bu hisse senetlerine ne oranda yatırım yapacağı sorusunun cevabında yatmaktadır. Oyunculardan diğeri olan piyasanın ise sonsuz sayıdaki stratejilerini bilmememize rağmen belli bir dönem için bu stratejiler gerçekleştikten sonra ortaya çıkan sonuç piyasanın stratejisi olacaktır. Doğa herhangi bir stratejisini oynayarak hisse senetlerinin o anki piyasa değerini belirlemede geçen sürede getirileri tanımlamaktadır. Minimum risk düzeyinde maksimum getirili portföyün oluşturulması ve oluşturulan portföydeki hisse senetlerinin göreceli getiri oranı performansının araştırılması problemi için öncelikle modelin ödemeler matrisi oluşturulmuştur. Hisse senetlerinin elde tutulma sürelerinin ne az bir ay olduğundan. Her ay için ayrı ayrı ödemeler matrisi hesaplanmıştır. Piyasa sonuçları kolon olarak, yatırımcı stratejileri satır olacak şekilde ödemeler matrisini oluşturulmuştur. Ödeme

değerleri ise her bir hisse senedinin bir önceki döneme göre değişim oranları alınıp bu değerlere anaparayı ifade edecek +1 eklenerek hesaplanmıştır.

Oluşturduğumuz ödemeler matrisi doğrusal programlama modeline dönüştürülüp çözüme alınmıştır. Böylece 2000–2007 dönemi için minimum risk düzeyinde maksimum getirili portföy elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlara göre getiri ve riskler hesaplanarak tam stratejili çözümle elde edilen getiri ve risklerle karşılaştırılmıştır. Burada oyun kuramıyla oluşturulan portföyün açık bir şekilde üstünlüğü sonucuna varılmıştır. Daha sonra elde ettiğimiz portföyündeki hisse senetlerinin geçmiş dönemlerde göstermiş oldukları görelî getiri oranı performansları hesaplanmıştır. Bunun için piyasanın 2007 yılı stratejisi dışlanarak model yeniden çözüme alınmıştır. Daha sonra 2007 ve 2006 yılı stratejileri dışlanarak model çözüme alınmıştır. Böyle birer yıllık veriler dışlanarak oluşturulan modeller doğrusal programlamayla çözülmüştür. Daha sonra sonuçlar değerlendirilmiştir.

Sonuç olarak elde edilen bulgulara göre oyun kuramının minimum risk düzeyinde maksimum getirili portföy oluşturma amacını gerçekleştirdiği görülmektedir. Bunun yanında oluşturulan bu portföydeki hisse senetlerinin görelî getiri oranı performansı yine oyun kuramı yardımıyla net bir şekilde ortaya çıkarılmıştır. Yalnız elde edilen sonuçların bazı dönem istikrarlı bazı dönemlerde istikrarsız olması bu bulgulara göre kesin bir yatırım kararının verilemeyeceğini göstermektedir. Burada elde edilen bulgular yalnızca ilgili dönem içerisinde geçerli olmaktadır ve bu bilgilerle geleceğe yönelik bir tahminde bulunulamamaktadır. Burada yapılan çalışmayla oluşturulan portföydeki hisse senetlerinin geçmiş döneme ait görelî getiri oranı performanslarının oyun kuramı yardımıyla tespit edilmesi sağlıklı sonuçlar vermiştir. Ancak bu sonuçlarda görülen istikrarsızlık elde edilen bulguların geleceğe yönelik bir yatırım amacı için yalnızca bir ön bilgi niteliği taşıdığı sonucuna varılmıştır.

KAYNAKÇA

- Amling, Frederick, (1974), *Investments, An Introduction to Analysis and Management*, Prectice-Hall International Inc. 3. Baskı.
- Aumann, R., (1974), "Subjectivity and Correlation in Randomized Strategies ".*Jurnal of Mathematical Economics* 1:67-96.
- Aumann, R., (1976), " Agreeing to Disagree", *Annals of Statistics* 4:1236–39.
- Barron, E. N.,(2008), *Game Theory An Introduction*, New Jersey, John Wiley & Sons, Inc.
- Bilgin C., (2007), "Finansal İstikrarsızlık Sorunu ve İktisat Politikası Bağlamında Türkiye Örneği", *Doktora Tezi*, Çukurova Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Adana.
- Doğukanlı, H ve Canbaş, S.,(2001), *Finansal Pazarlar*, İstanbul, Beta Basım Yayım Dağıtım A.Ş.
- Esin, Alptekin, (2003),*Yöneylem Araştırmasında Yararlanılan Karar Yöntemleri*, Ankara: Gazi Kitabevi
- Friedman, J. W., (1997), *Oligopoly and The Theory of Games*, New York, North-Holland Publishing Company.
- Fudenberg, D ve Tirole, J., (1991), *Game Theory*, London, The MIT Press.
- Furness, E.L., (1972), *An Introduction to Financial Economics*, London, Heinemann.
- Gibbons, Robert, (1992), *Game Theory For Applied Economists*, New Jersey, Princeton University Press.
- Houlden, B.T.(1962), *Some Techniques of Operational Research*, London, English University Press.
- Jones, A. J., (1980), *Game Theory: Mathematical Models of Conflict*, Ellis Horwood Limited, Chichester.
- Karaşin, G., (1987), *Sermaye Piyasası Analizleri*, Ankara, Özkan Matbaacılık Sanayi.
- Kelly, Anthony ,(2003), *Decision Making Using Game Theory*, Chambridge, Chambridge University Pres. Chambridge, United Kingdom.
- Koçkesen, Levent, (2008), *Game Theory Lecture Notes*, 16 Jul 2008:120
<http://www.docstoc.com/docs/951235/Game-Theory-Lecture-Notes--->
 Levent-Kockesen, 16 Eylül 2008.
- Konuralp, Gürel, (2005), *Sermaye Piyasaları Analizler, Kuramlar ve Portföy Yönetimi*

2. Baskı, İstanbul, ALFA Basım Yayım Dağıtım Ltd. Şti.
- Mishkin, F.S., (2001), *The Economics of Money, Banking, and Financial Markets*, Addison Wesley.
- Meunier, Valerie, (2006), *An Introduction to Game Theory*, School of Economics and Management University of Aarhus, Spring 2006:80,
http://www.cs.ust.hk/mjg_lib/Library/GTNotesMeunier2006.pdf,
05.12.2008.
- Morris, Peter, (1994), *Introduction to Game Theory*, New York, Springer-Verlag.
- Nash, John, (1953), "Two-Person Cooperative Games", *Econometrica*, Vol. 21, No.1 (Jan., 1953), pp. 128–140
- Neuman, V.J. Morgenstern, O., (1967), *Theory of Games and Economic Behavior*, New York, Science Editions, John Wiley and Sons.Inc. 3. edition.
- Owen, G. (1982), *Game Theory*, Academic Press
- Özdil, T. (1998), "Finansal Karar Vermede Oyun Kuramı", *Doktora Tezi*,
Dokuz Eylül Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, İzmir.
- Özdil, Tuncer ve Yılmaz, Cengiz, (2001), "Seçilmiş Hisse Senetlerinden Minimum Risk Düzeyinde Maksimum Getirili Portföyün Oyun Kuramıyla Oluşturulması", *V. Ulusal Ekonometri ve İstatistik Sempozyumu 19–22 Eylül 2001*, Çukurova Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Ekonometri Bölümü, Adana.
- Öztürk, Ahmet (1994), *Yöneylem Araştırması*, Bursa, Ekin Kitabevi Yayını, 4. Baskı.
- Potter, M.H. ve Morrey, C.B., (1991), *A First Course in Real Analysis*, New York, Springer Verlag, second edition.
- Selten, R. (1974), "Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games". *Int. Journal of Game Theory*, Vol. 4, Issue 1, pp. 9 e 25 -55, Physica-Verlag, Vienna.
- Stegnel, Bernhard von (2008), *Lectures*, London School of Economics, London, BSc Mathematics and Economics by distance learning offered by the University of London External Programme.
<http://www.maths.lse.ac.uk/Courses/MA301/lectnotes.pdf>, 27.11.2008.
- Shubik, M. (1989), *Game Theory in The Social Science: Concept and Solutions*, London, The MIT Press 5th Printing.
- Tom W, Apostol (1974), *Mathematical Analysis*, Michigan, Addison-Wesley, second edition.

- Watson, Joel, (2002), *Strategy an Introduction to Game Theory*, New York and London,
W.W. Norton&Company Ltd.
- Wentsel, E.S., (1965), (Çev. Halil Yüksel), *Oyunlar Teorisine Giriş*, İstanbul,
Türk Matematik Derneği Yayınları No:27.
- SPK Sermaye Piyasası Kurulu Aylık Raporları, 2000–2007.

ÖZGEÇMİŞ

ADI SOYADI : Halil İbrahim KESKİN

DOĞUM YERİ VE TARİHİ: Gaziantep/Nizip – 01.01.1982

ADRES : Çukurova Üniversitesi
İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi
Ekonometri Bölümü Balcalı
ADANA
Tel: (322)3387254–166

E –Posta : hkeskin@cu.edu.tr

EĞİTİM DURUMU

Yüksek Lisans 2006–2009 : Çukurova Üniversitesi
Sosyal Bilimler Enstitüsü,
Ekonometri Ana Bilim Dalı,
ADANA

Lisans 2000–2004 : Selçuk Üniversitesi, Fen Edebiyat
Fakültesi İstatistik Bölümü,
KONYA

Lise 1995–1998 : Nizip Lisesi, G.ANTEP/Nizip

Ortaokul 1992–1995 : Bilal Saide Marufoğlu Ortaokulu,
G.ANTEP/Nizip

İlkokul 1987–1992 : Cumhuriyet İlkokulu,
G.ANTEP/Nizip

İŞ DENEYİMİ

2008– : Araştırma Görevlisi
Çukurova Üniversitesi İktisadi ve
İdari Bilimler Fakültesi, Yöneylem
Anabilim Dalı

YABANCI DİL : İngilizce