

**T.C.  
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ÖZDEĞER ATAMA PROBLEMİNİN ÇİFT TANK DENGELEME SİSTEMİNE  
UYGULAMASI**

**ÖZGÜL AYABAKAN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
KONTROL VE OTOMASYON MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI  
KONTROL VE OTOMASYON MÜHENDİSLİĞİ PROGRAMI**

**DANIŞMAN  
YRD. DOÇ.DR. İLKER ÜSTOĞLU**

**İSTANBUL, 2015**

**T.C.**  
**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ÖZDEĞER ATAMA PROBLEMİNİN ÇİFT TANK DENGELEME SİSTEMİNE**  
**UYGULAMASI**

Özgül AYABAKAN tarafından hazırlanan tez çalışması 04.03.2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

**Tez Danışmanı**

Yrd. Doç. Dr. İlker ÜSTOĞLU  
Yıldız Teknik Üniversitesi

**Jüri Üyeleri**

Doç. Dr. Kayhan GÜLEZ  
Yıldız Teknik Üniversitesi

\_\_\_\_\_

Yrd. Doç. Dr. İlker ÜSTOĞLU  
Yıldız Teknik Üniversitesi

\_\_\_\_\_

Yrd. Doç. Dr. Tufan KUMBASAR  
İstanbul Teknik Üniversitesi

\_\_\_\_\_

## ÖNSÖZ

---

Öncelikle bana güvenip danışmanlığımı kabul etmesi ve yüksek lisans çalışmam boyunca her zaman her konuda destek olması sebebiyle değerli hocam Yrd. Doç. Dr. İlker ÜSTOĞLU'na, laboratuvar çalışmalarım sırasında yardımlarını benden esirgemeyen Sayın Selin YAMAN'a, her şartta bana güvenen ve hep destek olan değerli hayat arkadaşım sevgili eşim Tarık AYABAKAN'a ve aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Şubat, 2015

Özgül AYABAKAN

## İÇİNDEKİLER

|                                                                                                                                       | Sayfa |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| SİMGE LİSTESİ.....                                                                                                                    | vi    |
| KISALTMA LİSTESİ .....                                                                                                                | vii   |
| ŞEKİL LİSTESİ.....                                                                                                                    | viii  |
| ÇİZELGE LİSTESİ .....                                                                                                                 | ix    |
| ÖZET.....                                                                                                                             | x     |
| ABSTRACT.....                                                                                                                         | xii   |
| BÖLÜM 1                                                                                                                               |       |
| GİRİŞ .....                                                                                                                           | 14    |
| 1.1 Literatür Özeti.....                                                                                                              | 14    |
| 1.2 Tezin Amacı.....                                                                                                                  | 14    |
| 1.3 Hipotez .....                                                                                                                     | 15    |
| BÖLÜM 2                                                                                                                               |       |
| ÇİFT TANK SIVI SEVİYE DENGELEME SİSTEMİ .....                                                                                         | 16    |
| 2.1 Sistemin Tanıtılması .....                                                                                                        | 16    |
| 2.2 Matematiksel Model .....                                                                                                          | 18    |
| 2.3 Çift Tank Sıvı Seviye Dengeleme Sisteminde Durum Geri Beslemeli<br>Özdeğer Atama İşlemi .....                                     | 22    |
| 2.4 Çift Tank Sıvı Seviye Dengeleme Sistemi Deney Seti-Simulink Veri Bağlantı<br>Yapısı .....                                         | 25    |
| 2.5 Çift Tank Sıvı Seviye Dengeleme Sistemi Deney Seti Uygulamalarında Elde<br>Edilen Sonuçlar.....                                   | 26    |
| BÖLÜM 3                                                                                                                               |       |
| DÖRTLÜ TANK SİSTEMİ MODELİNDE KUTUP ATAMA İŞLEMİNDE ÇEŞİTLİ<br>ALGORİTMALARIN UYGULANMASI VE ELDE EDİLEN SONUÇLARIN KARŞILAŞTIRILMASI | 27    |
| 3.1 Giriş.....                                                                                                                        | 27    |

|       |                                                                                      |    |
|-------|--------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.2   | Tek Girişli Özdeğer Atama Problemi İçin Sayısal Metodlar .....                       | 31 |
| 3.2.1 | Tek Girişli Özdeğer Atama Problemi İçin Özyineli (Recursive) RQ Uygulama Metodu..... | 31 |
| 3.2.2 | Tek Girişli Özdeğer Atama Problemi İçin Dolaylı RQ Algoritma.....                    | 33 |
| 3.3   | Çok Girişli Özdeğer Atama Problemi İçin Sayısal Metotlar.....                        | 34 |
| 3.3.1 | Özyineli Çok Girişli Özdeğer Atama Algoritması .....                                 | 34 |
| 3.3.2 | Çok Girişli Özdeğer Atama Problemi İçin Doğrudan QR Algoritma ...                    | 36 |
| 3.3.3 | Çok Girişli Özdeğer Atama Problemi İçin Schur Metodu.....                            | 36 |
| 3.4   | Dörtlü Tank Sıvı Seviye Dengeleme Sistemi .....                                      | 40 |

#### BÖLÜM 4

|                                                                            |    |
|----------------------------------------------------------------------------|----|
| DÖRTLÜ TANK SIVI SEVİYE DENGELEME SİSTEMİNİN FREKANS BÖLGESİNDE ANALİZİ .. | 50 |
| 4.1 Giriş.....                                                             | 50 |
| 4.2 Bağlı Kazanç Dizisi .....                                              | 51 |
| 4.3 Bağlı Kazanç Sayısı .....                                              | 52 |
| 4.4 Sütun Köşegen Baskınlık .....                                          | 54 |

#### BÖLÜM 5

|                         |    |
|-------------------------|----|
| SONUÇ VE ÖNERİLER ..... | 59 |
| KAYNAKLAR .....         | 60 |
| ÖZGEÇMİŞ .....          | 62 |

## SİMGE LİSTESİ

---

|               |                                              |
|---------------|----------------------------------------------|
| $K_p$         | Pompa akış sabiti                            |
| $V_{p\_max}$  | Pompanın max. voltajı                        |
| $V_{p\_peak}$ | Pompanın tepe voltajı                        |
| $D_{out1}$    | 1.çıkış deliği çapı                          |
| $D_{out2}$    | 2.çıkış deliği çapı                          |
| $K_{L1,2}$    | 1. ve 2. tankın su seviye sensör hassasiyeti |
| $g$           | Yerçekimi sabiti                             |

## KISALTMA LİSTESİ

---

|      |                            |
|------|----------------------------|
| SISO | Single Input Single Output |
| MIMO | Multi Input Multi Output   |
| RGA  | Relative Gain Array        |
| QTS  | Quadruple Tank System      |
| TITO | Two Input Two Output       |

## ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

|                                                                                                            |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Şekil 2. 1 Çift Tank Sıvı Seviye Dengeleme Sistemi [1] .....                                               | 16 |
| Şekil 2. 2 Sistem Konfigürasyonları [1] .....                                                              | 17 |
| Şekil 2. 3 Durum Geribesleme Yapısı [7] .....                                                              | 23 |
| Şekil 2. 4 Simulink Modeli .....                                                                           | 24 |
| Şekil 2. 5 Tank-1 için sistem çıkışları .....                                                              | 24 |
| Şekil 2. 6 Q2-USB Veri toplama kartı [8] .....                                                             | 25 |
| Şekil 2. 7 Deney seti kablo bağlantı yapısı [1] .....                                                      | 25 |
| Şekil 3. 1 Durum Geribesleme Yapısı [6] .....                                                              | 28 |
| Şekil 3. 2 Dörtlü Tank Sıvı Seviye Dengeleme Sistemi [14] .....                                            | 40 |
| Şekil 3. 3 Kazanç matrislerinin koşul sayıları .....                                                       | 47 |
| Şekil 3. 4 Özyineli çok girişli özdeğer atama algoritması .....                                            | 47 |
| Şekil 3. 5 Doğrudan(Explicit) QR çok girişli özdeğer atama algoritması .....                               | 48 |
| Şekil 3. 6 Schur Metodu .....                                                                              | 48 |
| Şekil 4. 1 İki giriş iki çıkışlı sistem için geri besleme yapısı .....                                     | 50 |
| Şekil 4. 2 $\gamma_1 = 0.6$ ve $\gamma_2 = 0.6$ için RGA-sayısı çizimi .....                               | 53 |
| Şekil 4. 3 $\gamma_1 = 0.6$ ve $\gamma_2 = 0.2$ için RGA-sayısı çizimi .....                               | 53 |
| Şekil 4. 4 $\gamma_1 = 0.3$ ve $\gamma_2 = 0.7$ değerleri için Nyquist dizisi çizimi .....                 | 55 |
| Şekil 4. 5 $\gamma_1 = 0.7$ ve $\gamma_2 = 0.3$ değerleri için Nyquist dizisi çizimi .....                 | 55 |
| Şekil 4. 6 Birim basamak girişlere sistem cevabı .....                                                     | 56 |
| Şekil 4. 7 $\gamma_1 = 0.6$ ve $\gamma_2 = 0.7$ değerleri için Nyquist dizisi çizimi .....                 | 57 |
| Şekil 4. 8 $\gamma_1 = 0.6$ ve $\gamma_2 = 0.2$ değerleri için Perron-Frobenius özdeğerlerinin çizimi .... | 57 |



## ÇİZELGE LİSTESİ

---

|                                                                   | Sayfa |
|-------------------------------------------------------------------|-------|
| Çizelge 2. 1 Sistem Parametreleri [1].....                        | 18    |
| Çizelge 3. 1 Sistem Parametreleri [15].....                       | 40    |
| Çizelge 3. 2 Pompalardan tanklara üretilen akışlar [15].....      | 42    |
| Çizelge 3. 3 Dört Tank Sistemi için Parametre Değerleri [14]..... | 45    |
| Çizelge 3. 4 Sistemin Çalışma Değerleri [14].....                 | 45    |
| Çizelge 4. 1 Kontrol edilebilirlik endeksleri.....                | 58    |

## ÖZDEĞER ATAMA PROBLEMİNİN ÇİFT TANK DENGELEME SİSTEMİNE UYGULAMASI

Özgül AYABAKAN

Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Yrd. Doç.Dr. İlker ÜSTOĞLU

Çift tank sıvı seviye dengeleme sistemi çapraz olarak yerleştirilmiş iki adet eş tanktan oluşmaktadır ve kontrol teorisi uygulama eğitimlerinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Yapı olarak bir-giriş bir-çıkışlı (SISO) olması bir çok teorelin kolayca denenmesini sağlamaktadır. İki adet çift tanklı deney seti ile SISO sistem çok girişli çok çıkışlı-MIMO yapıya dönüştürülebilir. Yeni yapı dörtlü tank sistemi-QTS adını alır. Bu sistem özellikle sağ yarı düzlemde bulunan sıfırların performans limitleyici etkilerini veya giriş- çıkış eşleme problemini incelemede kullanılır.

Çalışmada çift tank sıvı seviye dengeleyici sistem ve QTS incelenerek lineer olmayan ve lineer matematiksel modelleri çıkarılmıştır. Öncelikle deney setinde çift tank sistemin lineerleştirilmiş modeline durum geri besleme ile özdeğer atama problemi incelenmiştir. Burada ihtiyaç duyulan sistem durumları ekstra olarak tasarlanan durum gözleyici ile elde edilmiştir. Daha sonra elde edilen kestirilmiş durumlar geribesleme katsayılarıyla çarpılarak ve sonra bunları toplayarak kontrol işareti üretilmiştir. Yapmış olduğumuz işlemler kontrol teorisi literatüründe “separation principle-ayrıştırma prensibi” olarak yer almaktadır. Böylelikle gözleyici ve durum geri besleme yapısı ayrı ayrı tasarlanarak birlikte kullanımı mümkün olmaktadır.

Sonrasında QTS’nin MIMO yapısında uygulanmak üzere kutup atama probleminde genel olarak kullanılan Ackerman, Bass-Gura metotlarından farklı olarak beş adet farklı algoritma sunulmuş ve MIMO yapıya uygun olan üç farklı algoritma durum geri

beslemeli özdeğer atama probleminde incelenmiştir. Daha sonra elde edilen sonuçlar karşılaştırılmış ve bize en iyi sonucu veren algoritma ortaya koyulmaya çalışılmıştır.

İki giriş iki çıkışlı-TITO dörtlü tank sisteminde MIMO yapısı itibariyle giriş-çıkışlar arasında etkileşim bulunmaktadır. Bu nedenle en iyi giriş-çıkış çiftinin bulunması gerekmektedir. Bize en iyi giriş-çıkış çiftini veren Bağlı kazanç dizisi-RGA, Nyquist dizisi ve köşegen baskınlık konuları da çalışmada incelenmiş ve elde edilen sonuçlar ortaya koyulmuştur.

**Anahtar Kelimeler:** Çift tank sistemi, dörtlü tank sistemi, özdeğer atama, durum gözleyici, bağlı kazanç dizisi, Nyquist dizisi

**APPLICATION OF EIGENVALUE ASSIGNMENT PROBLEM TO COUPLED  
TANK SYSTEM**

Özgül AYABAKAN

Department of Control and Automation Engineering

MSc. Thesis

Adviser: Asst. Prof. İlker ÜSTOĞLU

The Coupled-Tank system consists of two tanks of uniform cross sections and has been widely used for control education. It is a SISO system and by this way wide range of control theory can easily be applied to system. Two Coupled-Tank plants can also be used simultaneously and coupled to obtain more complex Multi-Input-Multi-Output (MIMO) experiment named Quadruple Tank System-QTS. This system is especially used to analyze performance limitations due to multivariable right half-plane zeros or input-output pairing problems.

This paper presents the non-linear and linear mathematical modeling of coupled-tank and quadruple tank system. First of all eigenvalue assignment problem with state feedback has been studied on coupled-tank experiment set by calculating system states with an observer. Then control signal is generated with the help of multiplication of feedback matrix and estimated states. This combination of observer and state feedback is known as separation principle.

After that pole assignment problem has been studied on five algorithms different from well-known Ackerman and Bass-Gura formula for MIMO Quadruple Tank System. We used three of them for our system. Results we had from the algorithms for our system are compared. After comparison the most efficient algorithm is proposed.

Multivariable systems exhibit complex dynamics because of the interactions between inputs and outputs. For this reason best input-output pair must be determined for the system performance. In this thesis we also studied on the relative gain array, Nyquist array and diagonal dominance problems for quadruple tank system two determine best input-pairs and analyze system performance.

**Keywords:** Coupled tank system, quadruple tank system, pole assignment, state observer, relative gain array, Nyquist array

### GİRİŞ

#### 1.1 Literatür Özeti

Çift tank sıvı seviye dengeleme sistemi çapraz olarak yerleştirilmiş iki adet eş tanktan oluşmaktadır ve kontrol teorisi uygulama eğitimlerinde yaygın olarak kullanılmaktadır[1]. Yapı olarak bir-giriş bir-çıkışlı (SISO) olması birçok teorelin kolayca denenmesini sağlamaktadır. Yakın dönemde yapılan çalışmalarda; Abbas, H. ve diğerleri lineer olmayan yapısında Kayan Kipli Kontrol uygulamasını farklı giriş sinyalleri ile çalışmış[2] iken Mahapatro, S.R. ve diğerleri ise yapmış olduğu çalışmada sistem üzerinde LQR-kontrol ile elde ettiği sonuçları ortaya koymuştur[3].

İki adet çift tanklı deney seti ile SISO sistem çok girişli çok çıkışlı-MIMO yapıya dönüştürülebilir. Yeni yapı dörtlü tank sistemi-QTS adını alır. Bu sistem özellikle sağ yarı düzlemde bulunan sıfırların performans limitleyici etkilerini veya giriş- çıkış eşleme problemini incelemede kullanılır.

#### 1.2 Tezin Amacı

Çalışmada çift tank sıvı seviye dengeleyici sistem ve QTS incelenerek lineer olmayan ve lineer matematiksel modelleri çıkarımı, SISO ve MIMO sistemler üzerinde kontrol teorisinin önemli problemlerinin uygulamasının deneysel ve simülasyon ortamında gösterimi amaçlanmıştır.

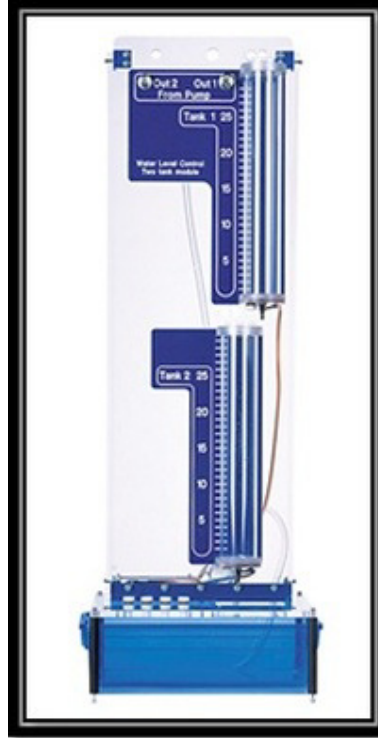
Uygulaması yapılan kontrol teorisi problemler SISO sistem için; gözleyici tasarımı ve kutup atama problemlerinin birlikte kullanılarak deneysel ortamda gerçekleşmesi iken MIMO sistem için kutup atama problemlerinin incelenmesi ve frekans bölgesinde analizi şeklindedir.

### 1.3 Hipotez

Çift tank sıvı seviye dengeleme sistemi birçok kontrol teorisinin kolayca denenmesini sağlamaktadır. Çalışmada SISO yapılı çift tank sıvı seviye dengeleme sistemi deneysel ortamda durum geri beslemeli özdeğer atama problemi ile kontrol edilmeye çalışılmıştır. Sonrasında QTS'nin MIMO yapısında uygulanmak üzere kutup atama probleminde genel olarak kullanılan Ackerman, Bass-Gura metotlarından farklı olarak beş adet farklı algoritma sunulmuş MIMO yapıya uygun olan üç farklı algoritma durum geri beslemeli özdeğer atama probleminde incelenmiştir. Daha sonra elde edilen sonuçlar karşılaştırılmış bize en iyi sonucu veren algoritma ortaya koyulmaya çalışılmış ve son olarak frekans bölgesinde analiz yapmak için bağıl kazanç dizisi-RGA, Nyquist dizisi ve köşegen baskınlık konuları da çalışmada incelenmiş ve elde edilen sonuçlar ortaya koyulmuştur.

### ÇİFT TANK SIVI SEVİYE DENGELEME SİSTEMİ

#### 2.1 Sistemin Tanıtılması



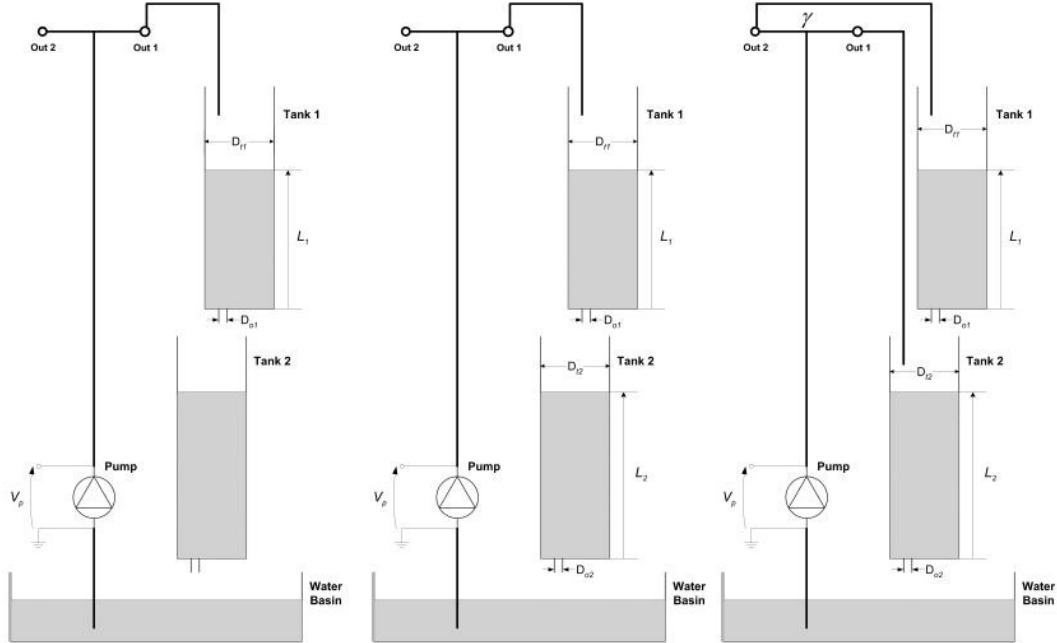
Şekil 2. 1 Çift Tank Sıvı Seviye Dengeleme Sistemi [1]

Çift tank sıvı seviye dengeleme sistemi alt kısmında bulunan sıvı havzası ve sıvı pompası ile çapraz yerleştirilmiş iki adet tanktan oluşur. Çalışmada sıvı olarak su kullanılmıştır. Sistem kapalı döngü ile otomatik olarak su havzasındaki suyu tanklarda dolaştırır. Üstte bulunan (birinci) tank, altta bulunan (ikinci) tanka su geçişi sağlayacak şekilde oluşturulmuştur. İkinci tanktaki su ise su havzasına dökülür. Her iki tankta sıvı çıkışı



tankların alt kısmında bulunan çıkış deliğinden gerçekleşir. Çıkış deliklerinden akış hızı değişik büyüklükteki delikli vidalar ile ayarlanabilir. Birinci tankın çıkışında bozucu etki sağlamak için dreyn vanası koyulmuştur. Böylelikle sıvı çıkışı direk su havzasına verilebilir. Sistemin her iki çıkışı farklı yarı çaplara sahip delikli çıkış vidalarına sahiptir. Bu çıkışlar normalde kapalıdır ancak kullanılmak istenen konfigürasyona göre gerekli bağlantılar yapılarak açılır. Her tanktaki su seviyesi tankların tabanında bulunan basınca duyarlı sensörler ile ölçülür [1].

Bu sistem ile farklı kontrol teorileri su seviyesini dengelemede kullanılabilir. Çalışmada kontrol teorisinde önemli yer tutan durum geri beslemeli özdeğer atama ile su seviyesi istenilen değerlerde tutulmaya çalışılmıştır. Özdeğer atama işlemini sistemin durumları ile yapabilmek için durum gözleyici de kullanılmıştır.



Şekil 2. 2 Sistem Konfigürasyonları [1]

Sistemde çalışılabilecek üç farklı konfigürasyon mevcuttur. Özellikleri aşağıdaki gibidir.

- 1.Konfigürasyonda SISO sistemde pompa birinci tankı besler ve ikinci tank kullanılmamaktadır. Birinci tankın sıvı seviyesini kontrol etmek için kontrolör tasarlanır.
- 2.Konfigürasyonda SISO sistemde pompa birinci tankı besler ve birinci tank çıkışı ikinci tanka akış sağlar. İkinci tankın sıvı seviyesini kontrol etmek için kontrolör tasarlanır.

3.Konfigürasyonda SISO sistemde pompa birinci ve ikinci tankı besler ve aynı zamanda birinci tank ikinci tankı besler. İkinci tankın sıvı seviyesini kontrol etmek için kontrolör tasarlanır.

Ayrıca iki tane deney seti kullanılarak MIMO sistem olarak çalışmalar yapılabilir [1].

## 2.2 Matematiksel Model

Çift-tank sıvı seviye dengeleme sistemine ait ve matematiksel model çıkarımında kullanılacak parametreler aşağıdaki çizelgedeki gibidir.

Çizelge 2. 1 Sistem Parametreleri [1]

| Sembol        | Tanım                                      | Değer   | Birim      |
|---------------|--------------------------------------------|---------|------------|
| $K_p$         | Pompa akış sabiti                          | 3.3     | $cm^3/s/V$ |
| $V_{p\_max}$  | Pompanın max. voltajı                      | 12      | V          |
| $V_{p\_peak}$ | Pompanın tepe voltajı                      | 22      | V          |
| $D_{out1}$    | 1.çıkış deliği çapı                        | 0.635   | cm         |
| $D_{out2}$    | 2.çıkış deliği çapı                        | 0.47625 | cm         |
| $L_{1\_max}$  | 1.tankın max yüksekliği                    | 30      | cm         |
| $D_{t1}$      | 1.tankın iç çapı                           | 4.445   | cm         |
| $K_{L1,2}$    | 1.ve 2.tankın su seviye sensör hassasiyeti | 6.1     | cm/V       |
| $L_{2\_max}$  | 2.tankın max yüksekliği                    | 30      | cm         |
| $D_{t2}$      | 2.tankın iç çapı                           | 4.445   | cm         |
| $g$           | Yerçekimi sabiti                           | 981     | $cm/s^2$   |

Elde edeceğimiz matematiksel model konfigürasyon bire aittir. Birinci konfigürasyonda hatırlanacağı üzere sadece birinci tank beslenmektedir ve ikinci tank dikkate alınmamaktadır. Dolayısıyla sistem girişi pompaya uygulanan voltaj ve çıkış tank bire ait su seviyesidir. Bu nedenle elde edilecek matematiksel model sistem giriş-çıkışlarını içerecek şekilde aşağıdaki formatta olmalıdır [4][5].

$$\frac{\partial}{\partial t} L_1 = f(L_1, V_p) \quad (2.1)$$

Tank 1'in çıkış hızı  $F_{o1}$  olarak gösterilsin ve

$$F_{o1} = A_{o1} v_{o1} \quad (2.2)$$

olarak tanımlansın.

Tank 1 çıkış deliği alanı

$$A_{o1} = \frac{1}{4} \pi D_{o1}^2 \quad (2.3)$$

ve Bernoulli denklemini küçük delikler için uygularsak Tank 1 çıkış akış hızı  $v_{o1}$

$$v_{o1} = \sqrt{2} \sqrt{g L_1} \quad cm/sn \quad (2.4)$$

ve

$$F_{o1} = A_{o1} \sqrt{2} \sqrt{g L_1} \quad cm^3/sn \quad (2.5)$$

olarak yazılabilir. Ayrıca tank 1 için kütle denge prensibini kullanırsak,  $L_1$  için müteakip birinci dereceden diferansiyel denklemi bulabiliriz.

$$A_{t1} \left( \frac{\partial}{\partial t} L_1 \right) = F_{i1} - F_{o1} \quad cm^3/sn \quad (2.6)$$

Tank-1 in hacimsel su giriş hızı uygulanan pompa voltajı ile orantılıdır ve aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$F_{i1} = K_p V_p \quad cm^3/sn \quad (2.7)$$

Denklem (2.7) ve (2.5)'teki eşitlikleri (2.6)'daki ifadelerin yerine koyup tekrar düzenleyecek olursak

$$\frac{\partial}{\partial t} L_1 = \frac{K_p V_p - A_{o1} \sqrt{2} \sqrt{g L_1}}{A_{t1}} \quad cm/sn \quad (2.8)$$

Yukarıdaki nihai eşitlik bize su seviyesindeki değişimi verir ve  $L_1$ 'e uygulanan karekök işlemi nedeniyle elde edilen sonuç doğrusal değildir [4].

İkinci konfigürasyonun matematiksel modelini elde etmek için birinci konfigürasyona benzer işlemleri tekrar etmemiz gerekmektedir [4][5].

Tank 2'nin çıkış hızı  $F_{o2}$  olarak gösterilsin ve

$$F_{o2} = A_{o2} v_{o2} \quad (2.9)$$

olarak tanımlansın.

Tank 2 çıkış deliği alanı

$$A_{o2} = \frac{1}{4} \pi D_{o2}^2 \quad (2.10)$$

ve Bernoulli denklemini küçük delikler için uygularsak Tank 2 çıkış akış hızı  $v_{o2}$

$$v_{o2} = \sqrt{2} \sqrt{g L_2} \quad cm/sn \quad (2.11)$$

ve

$$F_{o2} = A_{o2} \sqrt{2} \sqrt{g L_2} \quad cm^3/sn \quad (2.12)$$

olarak yazılabilir. Ayrıca tank 2 için kütle denge prensibini kullanırsak,  $L_2$  için müteakip birinci dereceden diferansiyel denklemi bulabiliriz.

$$A_{t2} \left( \frac{\partial}{\partial t} L_2 \right) = F_{i2} - F_{o2} \quad cm^3/sn \quad (2.13)$$

Tank 2'nin hacimsel su girişi aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$F_{i2} = A_{o1} \sqrt{2} \sqrt{g L_1} \quad cm^3/sn \quad (2.14)$$

Denklem (2.14) ve (2.12)'deki eşitlikleri (2.13)'deki ifadelerin yerine koyup tekrar düzenleyecek olursak

$$\frac{\partial}{\partial t} L_2 = \frac{-A_{o2} \sqrt{2} \sqrt{g L_2} + A_{o1} \sqrt{2} \sqrt{g L_1}}{A_{t2}} \quad cm/sn \quad (2.15)$$

Yukarıdaki nihai eşitlik bize su seviyesindeki değişimi verir ve  $L_2$ 'e uygulanan karekök işlemi nedeniyle elde edilen sonuç birinci konfigürasyonda olduğu gibi doğrusal değildir[4]. Her ne kadar sistemde denge noktası belirlenmiş olsa da istenen denge noktasından  $(L_{10}, L_{20}, V_{p0})$   $L_{11}$ ,  $L_{21}$  değerleri ile yükseklikte ve  $V_{p1}$  değeri ile voltajda sapmalar meydana gelmektedir. Dolayısıyla  $L_1 = L_{10} + L_{11}$ ,  $L_2 = L_{20} + L_{21}$  ve  $V_p = V_{p0} + V_{p1}$  toplamı olur.

Doğrusal olmayan model üzerinden çalışmaları gerçekleştirmek oldukça zordur. Bu nedenle elde ettiğimiz modeli doğrusallaştırmamız gerekmektedir. Bunu gerçekleştirmeden önce doğrusallaştırma işlemi için yapmamız gereken birkaç hesaplama daha bulunmaktadır. Denge noktasında (2.8) ve (2.15)'deki eşitliklerin türev terimleri sıfır (0) olur ve eşitliklerin yeni hali,

$$K_p V_{p0} - A_{o1} \sqrt{2} \sqrt{g L_{10}} = 0 \quad (2.16)$$

$$-A_{o2}\sqrt{2}\sqrt{g L_{20}} + A_{o1}\sqrt{2}\sqrt{g L_{10}} = 0 \quad (2.17)$$

olur.

$V_{p0}$ 'ı bulmak için (2.16)'yı düzenleyecek olursak bize denge noktasındaki pompa voltajını verir. Elde edeceğimiz sonuç fonksiyonu ise aşağıda belirtildiği üzere  $L_{10}, K_p$  cinsinden olur.

$$V_{p0} = \frac{A_{o1}\sqrt{2}\sqrt{g L_{10}}}{K_p} \quad (2.18)$$

Çizelge 2.1'de bulunan "Sistem Parametreleri"nden  $K_p$  voltaj sabiti ve (2.3) eşitliği hesaplanarak  $A_{o1}$  yerine koyulduğunda ve sistemi tutmak istediğimiz seviye  $L_{10} = 15$  cm olarak kabul edildiğinde sonuç,

$$V_{p0} = 9.26 \text{ V olur.}$$

$L_{10}$ 'ı bulmak için (2.17)'yi düzenleyecek olursak bize sıvının denge seviyesini verir. Elde edeceğimiz sonuç fonksiyonu ise aşağıda belirtildiği üzere  $L_{20}$  cinsinden olur.

$$L_{10} = \frac{A_{o2}^2 L_{20}}{A_{o1}^2} \quad (2.19)$$

Sistem parametrelerini yerine koyduğumuzda  $L_{10} = 15$  cm olarak bulunur.

$$f(L_1, V_p) = f(L_{10}, V_{p0}) + \left( \frac{\partial}{\partial L_1} f(L_{10}, V_{p0}) \right) (L_1 - L_{10}) + \left( \frac{\partial}{\partial V_p} f(L_{10}, V_{p0}) \right) (V_p - V_{p0}) \quad (2.20)$$

$$f(L_2, L_1) = f(L_{20}, L_{10}) + \left( \frac{\partial}{\partial L_2} f(L_{20}, L_{10}) \right) (L_2 - L_{20}) + \left( \frac{\partial}{\partial L_1} f(L_{20}, L_{10}) \right) (L_1 - L_{10}) \quad (2.21)$$

Taylor Serisi yaklaşımını (2.20) ve (2.21)'e uygularsak sistemin lineer modeli aşağıdaki gibi olur.

$$\frac{\partial}{\partial t} L_1 = \frac{K_p V_{p0} - A_{o1}\sqrt{2}\sqrt{g L_{10}}}{A_{t1}} - \frac{1}{2} \frac{A_{o1}\sqrt{2} g L_{11}}{\sqrt{g L_{10}} A_{t1}} + \frac{K_p V_{p1}}{A_{t1}} \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} L_2 = \frac{A_{o1}\sqrt{2}\sqrt{g L_{10}} - A_{o2}\sqrt{2}\sqrt{g L_{20}}}{A_{t2}} - \frac{1}{2} \frac{A_{o2}\sqrt{2} g L_{21}}{\sqrt{g L_{20}} A_{t2}} + \frac{1}{2} \frac{A_{o1}\sqrt{2} g L_{11}}{\sqrt{g L_{10}} A_{t2}} \quad (2.23)$$

$V_{p0}$  'ı (2.18)'deki eşitliğini kullanarak (2.22)'de yalnız bırakırsak Tank 1 su seviyeleme sistemi için , (2.17) ve (2.23)'ü kullanarak yapılacak olan sadeleştirmeler ile Tank 2 su seviyeleme sistemi için doğrusal hareket denklemimiz aşağıdaki gibi elde edilmiş olur[4].

$$\frac{\partial}{\partial t} L_{11} = -\frac{1}{2} \frac{A_{o1}\sqrt{2} g L_{11}}{\sqrt{g L_{10} A_{t1}}} + \frac{K_p V_{p1}}{A_{t1}} \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} L_{21} = -\frac{1}{2} \frac{A_{o2}\sqrt{2} g L_{21}}{\sqrt{g L_{20} A_{t2}}} + \frac{1}{2} \frac{A_{o1}\sqrt{2} g L_{11}}{\sqrt{g L_{10} A_{t2}}} \quad (2.25)$$

Durum uzay modelimiz ise aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} \dot{L}_{11} \\ \dot{L}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11} \\ L_{21} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{K_p}{A_{t1}} \\ 0 \end{bmatrix} v \quad (2.26)$$

ve

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \frac{A_{o1}\sqrt{2} g}{\sqrt{g L_{10} A_{t1}}}, \lambda_2 = \frac{1}{2} \frac{A_{o2}\sqrt{2} g}{\sqrt{g L_{10} A_{t2}}} \quad (2.27)$$

### 2.3 Çift Tank Sıvı Seviye Dengeleme Sisteminde Durum Geri Beslemeli Özdeğer Atama İşlemi

Sistem durum uzay modeli (2.26) ve (2.27)'de Çizelge 2.1'deki değerler yerine koyulduğunda aşağıdaki gibi olur.

$$A = \begin{bmatrix} -0.0656 & 0 \\ 0.0656 & -0.0656 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.213 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$$C = [0 \quad 1] \quad (2.30)$$

$$D = 0 \quad (2.31)$$

Sistem kutuplarının yeri  $(-0.0656, -0.0656)$  ve sıfırının yeri  $(-0.1025)$ 'dir.

Kontrol edilebilir (A,B) çiftine sahip sistemimizde, kutup atama işlemi için atamak istediğimiz yeni kutupların yerlerini  $(-0.1025, -1.3)$  olarak belirliyoruz. Yeni kutuplarımızın biri sistem sıfırının üzerine diğeri ise 20 kat uzağa olacak şekilde belirlenmiştir.

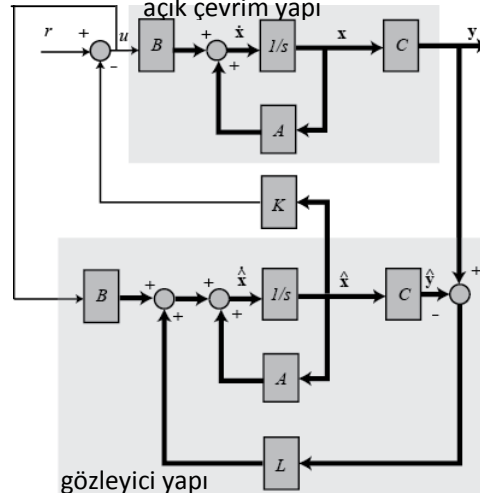
Atamak istediğimiz kutuplar bölüm 3.1'de detayları anlatılmış olan durum geri besleme ile atanacaktır. Bunun için ihtiyacımız olan geribesleme kazanç matrisini MATLAB *place* komutu ile bulmak mümkündür. MATLAB-place komutu Ackermann yöntemini kullanmaktadır. SISO sistemlerde tüm kutup atama yöntemleri ile kazanç matrisinin

sonucu tek olduğu için ilave bir yöntem denenmemiştir [6]. Ancak MIMO sistemin inceleneceği üçüncü bölümde kutup atama ile ilgili farklı yöntemler incelenecektir.

Kutup atama için elde ettiğimiz kazanç matrisi aşağıdaki gibidir.

$$K = [0.4909 \ 9.0646] \quad (2.32)$$

Kutup atama işlemi durum geri besleme yöntemi ile yapılacaktır. Ancak sistemin durumlarını ölçüp sisteme besleme gibi olanağımız olmadığından tasarlanan gözleyici ile durumlar kestirilmiş olarak elde edilmeye çalışılmıştır.



Şekil 2. 3 Durum Geribesleme Yapısı [7]

Daha sonra elde edilen kestirilmiş durumlar geribesleme katsayılarıyla çarpılarak ve sonra bunları toplayarak kontrol işareti üretilmiştir. Yapmış olduğumuz işlemler kontrol teorisi literatüründe “separation principle-ayrıştırma prensibi” olarak yer almaktadır. Böylelikle gözleyici ve durum geribesleme yapısı ayrı ayrı tasarlanarak birlikte kullanımı mümkün olmaktadır.

(A,C) çifti tam gözlemlenebilir olduğu için gözleyici kazanç matrisini belirleyen değerler serbest olarak (-10,-20) seçilmiştir.

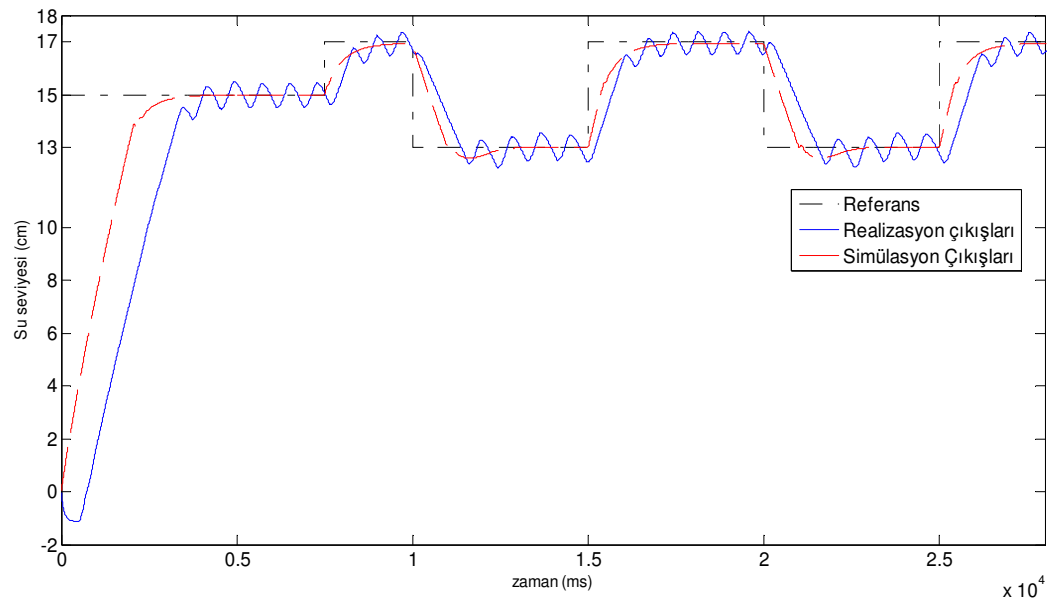
### Coupled-Tank Experiment

#### - Configuration #1 - Tank 1 Level Loop

The diagram illustrates the control architecture for the Tank 1 Level Loop. Key components include:

- Setpoint and Reference:** The reference is the *Tank 1 Level Setpoint:  $L_{r,1}$  (cm)*. A *Position Setpoint* is also provided.
- Control Loop:** The error signal is calculated as the difference between the setpoint and the *Coupled-Tank: Actual Plant* output. This error is processed by a PI controller with gains  $K_{p,1}$  (V/cm) and  $K_{i,1}$  (V/cm/s). The controller output is limited by an *AKP Voltage Limit*.
- Plant and Simulation:** The limited control signal drives the *Coupled-Tank: Actual Plant*, which produces the output  $V_p$  (V). A *Coupled-Tank Simulation* block provides a reference output  $L_1$  (cm).
- Observer and Feedback:** An *observer* block estimates the system states, which are used to calculate the *Operating Level* ( $L_{10}$ ) and the *Initial Setting Period* ( $TS$ ). The *Operating Level* is also used to calculate the *Delta Type Conversion*.
- Tracking Mode:** A *Tracking OFF* / *Tracking ON* switch is used to toggle between setpoint tracking and simulation-based control.

Sistem 15 cm seviyesinde kontrol edilmeye çalışılmıştır. Elde edilen çıkışlar aşağıdaki gibidir.



24



## 2.4 Çift Tank Sıvı Seviye Dengeleme Sistemi Deney Seti-Simulink Veri Bağlantı

### Yapısı

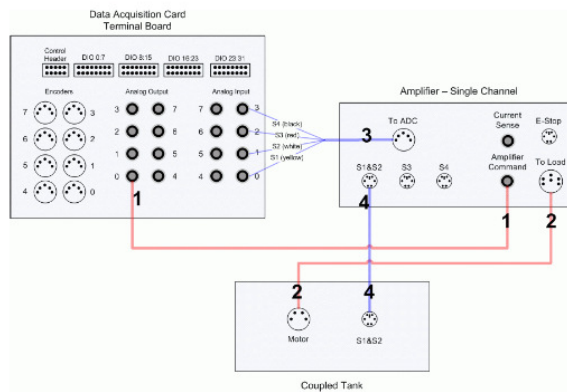
Bu bölümde deney setinden toplanan verilerin MATLAB-Simulink programına aktarılmasını sağlayan veri toplama kartı (Data Acquisition Card) hakkında bilgi verilecektir.



Şekil 2. 6 Q2-USB Veri toplama kartı [8]

Veri toplama kartları fiziksel ortamdaki işaretleri alan ve bilgisayar veri yoluna aktarılacak biçimde dijital bilgiye çeviren kartlardır. Çeşitli konfigürasyonlarda analog ve dijital giriş/çıkışlar içeren bu kartlar, test düzeneğinin amacına uygun olarak seçilir.

Deney setimizde Quanser firmasının USB arayüzü ile veri toplanmasını sağlayan ürünü Q2-USB Veri Toplama Paneli kullanılmıştır. Deney seti ve bilgisayar arasında gerekli bağlantıların yapılması ile deney setinde üretilen analog sinyallerin sayısal olarak bilgisayara aktarılması sağlanır. Quanser güç yükseltici ve QUARC kontrol tasarım yazılımı ile bağlantı oluşturulduğunda güvenilir hızlı veri akışı sağlanabilir. QUARC kontrol tasarım yazılımı sayesinde, veri toplama kartı ile elde edilen veriler Simulink ortamına aktarılabilir [8]. Böylelikle referans, simulasyon ve gerçek sistem çıkışları tek yapıda incelenebilir.



Şekil 2. 7 Deney seti kablo bağlantı yapısı [1]

## **2.5 Çift Tank Sıvı Seviye Dengeleme Sistemi Deney Seti Uygulamalarında Elde Edilen Sonuçlar**

Şekil 2.5 'e baktığımızda sistemde yapısal olarak 0.1 saniye kadar ters aşım ile zaman gecikmesi olduğu görülmektedir. Bu süre suyun tank seviyesinin ölçüldüğü sensörlere değmesine kadar geçen süredir. Ayrıca sistem, referans değeri simulasyonda planladığı şekilde takip ettiğinden tasarlanan gerçeğin başarılı olduğu değerlendirilmektedir.

---

**DÖRTLÜ TANK SİSTEMİ MODELİNDE KUTUP ATAMA İŞLEMİNDE ÇEŞİTLİ  
ALGORİTMALARIN UYGULANMASI VE ELDE EDİLEN SONUÇLARIN  
KARŞILAŞTIRILMASI****3.1 Giriş**

Bu bölümde dört tanklı sıvı seviye dengeleme sisteminde kontrol teorisinin önemli problemlerinden biri olan kutup atama problemini inceleyeceğiz. Kutup atama işlemleri durum geri beslemesi ile yapılacaktır. Lineer sistemimiz

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (3.2)$$

ve  $x(t)$  durum vektörü bilinmekte iken

$$u(t) = v(t) - Kx(t) \quad (3.3)$$

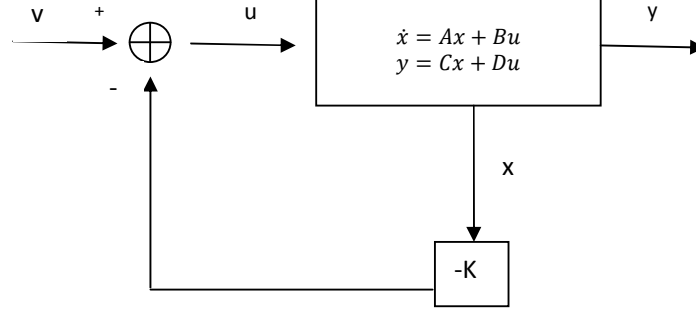
olmak üzere  $K$  sabit matris ve  $v(t)$  referans giriş vektörüdür.

Giriş vektörü  $u(t)$  sisteme tekrar beslendiğinde, elde ettiğimiz yeni sistem:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + Bv(t) \quad (3.4)$$

$$y(t) = (C - DK)x(t) + Dv(t) \quad (3.5)$$

Elde ettiğimiz yeni sistemde bulacağımız  $K$  matrisi yeni sistemimizi kararlı kılacak olan matristir. Dolayısı ile durum geri besleme ile kararlı kılma problemimiz, verilen  $(A, B)$  matrisleri ile  $A - BK$  yı kararlı kılan  $K$  matrisini bulmak olarak tanımlanabilir. Grafikselsel olarak aşağıdaki gibi tanımlanabilir.



Şekil 3. 1 Durum Geribesleme Yapısı [6]

Özdeğerlerin kompleks düzlemde olması istenilen yerlere (3.3) kontrol kanunu ile atanması durumu, geribesleme ile özdeğer atama olarak adlandırılır. Kontrol teorisi literatüründeki genel kullanımı ise kutup-yerleştirme problemidir [6].

Problemimiz matematiksel olarak aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  ( $m \leq n$ ) ve  $\Lambda$  kompleks konjuge altında kapalı olarak  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  iken  $\Omega(A - BK) = \Lambda$  eşitliğinde  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  matrisini bulunuz. Burada  $\Omega(R)$ ,  $R$ 'nin spektrumudur.

K matrisi durum geri besleme matrisidir. Teorem 3.1 K matrisinin varlığı ve tekliğini sağlayan koşulları verir.

### **Teorem 3.1: Durum geri besleme ile özdeğer atama teoremi**

Özdeğer atama probleminin ancak ve ancak  $(A, B)$  kontrol edilebilir ise her  $\Lambda$  için çözümü vardır. Çözüm ancak ve ancak tek girişli sistem için tektir. Çok girişli sistemlerde, problemin çözümü mümkün ise, birçok çözümü vardır.

Özdeğer atama probleminin çözümü için birçok yöntem bulunmaktadır. Ancak bazı yöntemler (Ackermann formülü, Bass-Gura formülü vs.) teorik olarak doğru olsalar da hesaplamaya dayalı metotlara dayanmazlar. Bu durumun öncelikli nedeni bu yöntemlerin kontrol edilebilir  $(A, B)$  çiftinin kontrolör-doğal forma dönüşümüne dayalı olmasıdır. Ayrıca dönüştürülen matris yüksek koşul sayılıdır. Bizim kullanacağımız yöntemler hesaba dayalı metotlar kullanan yöntemlerdir. Kullanacağımız yöntemler  $(A, B)$  çifti kontrolör-Hessenberg formuna dönüşümüne veya A matrisinin Schur formuna dönüşümüne dayanır.

**Algoritma 3.1:** Özdeğer atama problemi için genelleştirilmiş algoritma

Bu yöntemlerde kullanılan algoritmaları genelleştirmek mümkündür. Çünkü yapı olarak benzerdirler. Kullanışlı sayısal olarak etkili bir algoritma kontrol edilebilir (A,B) çiftinin kanonik forma indirgenmesinde iyi koşul sayılara sahip dönüşümü kullanarak yapılmasına dayalı olmalıdır. Kontrolör-Hessenber formu bunun için uygundur.

**Basamak 1** Kontrol edilebilir (A,B) çifti ilk olarak Hessenberg çiftine (H,  $\tilde{B}$ ) dönüştürülmelidir. Bunun için ortogonal P matrisi oluşturulur.

$$P A P^T = H \quad (3.6)$$

indirgenmemiş blok üst Hessenberg matrisi,

$$PB = \tilde{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

$B_1$  üst üçgendir.

*Not:* Tek girişli durumlarda, kontrolör-Hessenberg çifti (H,  $\tilde{b}$ ) dir. Burada H , indirgenmemiş blok üst Hessenberg matrisi ve  $\tilde{b} = Pb = \beta e_1, \beta \neq 0$ .

**Basamak 2** Özdeğer atama problemi (H,  $\tilde{B}$ ) çifti için H ve  $\tilde{B}$  özel formları kullanılarak çözülmüştür. Bu basamakta aşağıdaki eşitlikteki F matrisi bulunur.

$$\Omega(H - \tilde{B}F) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \quad (3.8)$$

*Not:* Tek girişli durumlarda, bu basamakta satır vektörü  $f^T$  bulunur.  $\Omega(H - \beta e_1 f^T) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$

**Basamak 3** Asıl problemimizdeki geri besleme K matrisi, dönüştürülen Hessenberg problemindeki geri besleme matrisi F ile (A,B) çiftini (H,  $\tilde{B}$ ) çiftine dönüştüren P ortogonal matris çarpımı ile yeniden elde edilir :

$$K = FP \quad (3.9)$$

$$\text{Not: } \Omega(H - \tilde{B}F) = \Omega(PAP^T - PBFPP^T) = \Omega(P(A - BK)P^T) = \Omega(A - BK)$$

Basamak 1’de bahsettiğimiz kontrol edilebilir (A,B) çiftinden Hessenberg çiftine (H,  $\tilde{B}$ ) yapılacak dönüşüm için aşağıda yer alan Staircase algoritması kullanılmalıdır.

**Algoritma 3.2 Staircase Algoritması:**  $A$   $n \times n$  ve  $B$   $n \times m$  ( $m \leq n$ ).

**Basamak 1**  $B$  matrisini QR faktörizasyonu kullanarak üçgenleştir. Ortogonal  $P_1$  matrisi ve permutasyon matrisi  $E_1$  elde et

$$P_1 B E_1 = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

$B_1$   $n_1 \times m$  üst üçgen matrisi ve  $n_1 = \text{rank}(B) = \text{rank}(B_1)$ .

**Basamak 2**  $A$  ve  $B'$ 'yi tekrar düzenle

$$P_1 A P_1^T = H = \begin{pmatrix} H_{11}^{(1)} & H_{12}^{(1)} \\ H_{21}^{(1)} & H_{22}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

$$\tilde{B} = P_1 B = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} E^T \equiv \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

hesapla,  $n_1 \leq n$ .

$$H_{11}^{(1)} \text{ } n_1 \times n_1 \text{ ve } H_{21}^{(1)} (n - n_1) \times n_1 \quad (3.13)$$

Eğer  $H_{21}^{(1)} = 0$  ise dur.

**Basamak 3**  $H_{21}^{(1)}$  matrisini QR faktörizasyonu kullanarak üçgenleştir. Ortogonal  $\widehat{P}_2$  matrisi ve permutasyon matrisi  $E_2$  elde et

$$\widehat{P}_2 H_{21}^{(1)} E_2 = \begin{pmatrix} H_{21}^{(*)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

$H_{21}^{(*)}$   $n_2 \times n_1$  boyutlu ve  $n_2 = \text{rank}(H_{21}^{(1)}) = \text{rank}(H_{21}^{(*)})$  ve  $n_2 \leq n_1$ .

Eğer  $n_1 + n_2 = n$  ise dur.

$$P_2 = \text{diag}(I_{n_1}, \widehat{P}_2) = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & \widehat{P}_2 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

$I_{n_1}$  matrisi birim matrisin ilk  $n_1$  satır ve sütunlarından oluşmaktadır.

$$H_2 = P_2 H_1 P_2^T = \begin{pmatrix} H_{11}^{(1)} & H_{12}^{(2)} & H_{13}^{(2)} \\ H_{21}^{(2)} & H_{22}^{(2)} & H_{23}^{(2)} \\ 0 & H_{32}^{(2)} & H_{33}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

matrisini hesapla.

$H_{22}^{(2)}$   $n_2 \times n_2$  boyutlu ve  $H_{32}^{(2)} (n - n_1 - n_2) \times n_2$  boyutludur ve  $H_{21}^{(2)} = H_{21}^{(*)} E_2^T$ .

$$P \equiv P_2 P_1 \quad (3.17)$$

yeniden hesapla.

Eğer  $H_{32}^{(2)} = 0$  ise dur. ( $\tilde{B}$  matrisi değişmeden kalacaktır.)

#### Basamak 4

$H_{32}^{(2)}$  matrisinin rankını elde etmek için üçgenleştir.  $\widehat{P}_3$  ve  $E_3$ 'ü bul.

$$\widehat{P}_3 H_{32}^{(2)} E_3 = \begin{pmatrix} H_{32}^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

$n_3 = \text{rank}(H_{32}^{(2)})$ ;  $n_3 \leq n_2$  ve eğer  $n_1 + n_2 + n_3 = n$  ise dur. Değilse  $P_3, H_3$ ü hesapla ve  $P$  yi yukarıdaki gibi yeniden düzenle. ( $\tilde{B}$  matrisi değişmeden kalacaktır.)

**Basamak 5** Süreci  $k \leq n$  için devam ettir, algoritma aşağıdaki Hessenberg çiftinin  $(H, \tilde{B})$  elemanlarını verecektir.

$$H \equiv \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & \cdots & H_{1k} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & \cdots & H_{2k} \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & H_{k,k-1} & H_{kk} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

$$\tilde{B} \equiv \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

### 3.2 Tek Girişli Özdeğer Atama Problemi İçin Sayısal Metodlar

#### 3.2.1 Tek Girişli Özdeğer Atama Problemi İçin Özyineli (Recursive) RQ Uygulama Metodu

QR stratejisinin uygulanması zordur. Çünkü  $R_i$  in biriktirilmesi gerekmektedir: süreç pahalı ve kararsızdır [9].

QR faktörizasyonu yerine RQ faktörizasyonunun kullanılması sayısal olarak kullanışlıdır. Yapacağımız gösterimler bunun üzerine olacaktır.

$$H_1 = H \quad (3.21)$$

ve

$i = 1, 2, \dots, n$  için RQ'yi hesapla

$$R_i Q_i = H_i - \lambda_i I \quad (3.22)$$

$$H_{i+1} = Q_i R_i + \lambda_i I \quad (3.23)$$

$$\emptyset(H) = R_1 R_2 \cdots R_n Q_n Q_{n-1} \cdots Q_1 \quad (3.24)$$

ve

$$Q = Q_n Q_{n-1} \cdots Q_1 \quad (3.25)$$

$$R = R_1 R_2 \cdots R_n \quad (3.26)$$

düzenlemesinden sonra

$$f^T = \alpha e_n^T \emptyset(H) \quad (3.27)$$

eşitliğini

$$f^T = \alpha e_n^T R Q = \alpha \rho e_n^T Q \quad (3.28)$$

olarak yazabiliriz.

Burada  $\rho = \prod_{i=1}^n r_{nn}^{(i)}$  ve  $r_{nn}^{(i)}$   $R_i$  nin  $(n, n)$  girişidir. Özyineli RQ uygulama metodunun açık algoritması aşağıdaki gibidir.

### Algoritma 3.3 Özyineli RQ Algoritması

**Girişler**  $H$  indirgenmemiş üst Hessenberg matrisi ve  $S = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  sayı takımı ve kompleks konjuge altında kapalı.

**Çıkış**  $f$  geribesleme vektörü ve  $\Omega(H - e_1 f^T) = S$

$$\textbf{Basamak 1} \quad H_1 = H \quad (3.29)$$

**Basamak 2**  $i = 1, 2, \dots, n$  için

$$R_i Q_i = H_i - \lambda_i I \quad (3.30)$$

$$H_{i+1} = Q_i R_i + \lambda_i I \quad (3.31)$$

$$\textbf{Basamak 3} \quad \rho = \prod_{i=1}^n r_{nn}^{(i)} \text{ ve } r_{nn}^{(i)} \quad (3.32)$$

için

$$f = \alpha \rho e_n^T Q_n Q_{n-1} \cdots Q_1 \quad (3.33)$$

hesapla.



### 3.2.2 Tek Girişli Özdeğer Atama Problemi İçin Dolaylı RQ Algoritma

#### Algoritma 3.4

**Giriş:**  $H$  indirgenmemiş  $n \times n$  Hessenberg matrisi [10],  $\beta \neq 0$  ve  $\Omega = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$

**Çıkış:**  $k$  öyle ki  $\lambda(H - \beta e_1 k^t) = \Omega$

**Basamak 1**  $H_1 = H, \beta_1 = \beta, \hat{Q} = I$  ve  $k = 0$

$i = 1, 2, \dots, n - 1$  için

$$e_n^t(H_i - \lambda_i I)P_i^t = \alpha e_n^t \quad (3.34)$$

ve  $P_i$ 'yi hesapla

$U_i P_i H_i P_i^t U_i^t$  üst Hessenberg matrisi ve  $H_i$ 'yi hesapla

$$Q_i = \begin{bmatrix} y_i^t \\ \hat{Q}_i \end{bmatrix} = U_i P_i \quad (3.35)$$

ve

$$\tau = e_i^t(H_i - \lambda_i I)Q_i^t e_1 / \beta_i \quad (3.36)$$

hesapla

$$\beta_{i+1} = q_{21}^{(i)} \beta_i \quad (3.37)$$

hesapla

$$Q_i H_i Q_i^t = \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & H_{i+1} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

ve  $H_{i+1}$  hesapla

$$k = k + \tau \hat{Q}^t y_i^t \quad (3.39)$$

hesapla

$$\hat{Q} = \tilde{Q}_i \hat{Q} \quad (3.40)$$

hesapla

$$\textbf{Basamak 2} \tau = (H_n - \lambda_n) / \beta_n \quad (3.41)$$

hesapla

$$k = k + \tau \hat{Q}^t \quad (3.42)$$

hesapla

### 3.3 Çok Girişli Özdeğer Atama Problemi İçin Sayısal Metotlar

#### 3.3.1 Özyineli Çok Girişli Özdeğer Atama Algoritması

Kontrolör-Hessenberg çifti  $(H, \tilde{B})$  dönüşümü yapılmış ve  $S = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  takımı verilmiş olsun. Algoritma,  $F$  geri besleme matrisinin kolayca hesaplanabileceği, tekil olmayan  $L$  matrisini oluşturur. Çok girişli yapıda  $H$  matrisinin blok Hessenberg matris yapısında olması bir avantajdır. Böylelikle  $L$  matrisi bloklar içerisinde hesaplanabilir. Buradaki gösterimde blok satır-satır hesaplaması ile  $L$  matrisi bulunacaktır [11].

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & & & 0 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \Lambda_{k,k-1} & \Lambda_{kk} \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

yapısında özdeğerler  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$   $\Lambda$  matrisinin köşegen bloklarında yer almaktadır.

$$LH - \Lambda L = L \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} F \quad (3.44)$$

eşitliğinde  $L$  ve  $R$  matrislerinin  $F$  matrisini bilmeden bulunabildiği kolaylıkla görülmektedir.  $L$  matrisi

$$L = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_k \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

olarak hesaplanabilir. Eğer  $L_k, L_k = (0, 0, \dots, I_{n_k})$  olarak seçilirse,  $L$  tekil olmayacaktır. Blok satırları aşağıdaki gibi eşitlersek

$$LH - \Lambda H = L \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} F \quad (3.46)$$

ve  $i = k - 1, k - 2, \dots, 2, 1$

$$\Lambda_{i+1,i} L_i = L_{i+1} H - \Lambda_{i+1,i+1} L_{i+1} = \tilde{L}_i \quad (3.47)$$

yapısından  $\Lambda_{i+1,i}$  ve  $L_i$  matrisleri  $QR$  faktörizasyon ile bulunabilir.  $L$  ve  $R$  bulunduktan sonra,  $F$  matrisi yukarıdaki denklemden blok lineer sistem çözülerek elde edilebilir.

### Algoritma 3.5 Çok girişli özdeğer atama problemi için Özyineli Algoritma

#### Girişler

$A$  –  $n \times n$  durum matrisi

$B$  –  $n \times m$  giriş matrisi ( $m \leq n$ )

$S = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  sayı takımı ve kompleks konjuge altında kapalı

**Kabuller**  $(A, B)$  kontrol edilebilir

**Çıkış**  $K$  geribesleme matrisi,  $\Omega(A - BK) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$

**Basamak 1** Staircase algoritması ile  $(A, B)$  çifti kontrolör-Hessenberg  $(H, \tilde{B})$  çiftine indirgenir. Bunun için  $P$  ortogonal matrisi oluşturulur.  $P A P^T = H$ ,  $k$  köşegen bloklu indirgenmemiş blok üst Hessenberg matrisi ve

$$PB = \tilde{B} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

$R$  üst üçgendir ve tam ranklıdır.

**Basamak 2**  $S$  ayrıştırılır  $S = \cup \Omega(\Lambda_{ii})$ ,  $\Lambda_{ii}$   $n_i \times n_i$  köşegen matristir.  $(H = (H_{ij}); H_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i})$  içindeki blokların boyutları  $n_i$ leri tanımlar

**Basamak 3**  $L_k = (0, \dots, 0, I_{n_k})$  olarak tanımla

**Basamak 4**  $i = k - 1, \dots, 1$  için

$$1.1 \tilde{L}_i \equiv L_{i+1}H - \Lambda_{i+1,i+1}L_{i+1} \quad (3.49)$$

hesapla

$$1.2 \tilde{L}_i^T: \tilde{L}_i^T = QR \quad (3.50)$$

ayrışımını hesapla

$$1.3 L_i = Q_1^T \text{ olarak tanımla. } Q_1, Q = (Q_1, Q_2) \text{ matrisinin } n_i \text{ sütunlarıdır.}$$

**Basamak 5**  $L_{11}$   $L_1$  in ilk  $n_1$  sütunu olmak üzere  $(L_{11}R)F = L_1H - \Lambda_{11}L_1$  lineer sistemden  $F$ 'i bul.

**Basamak 6** Asıl problemin geri besleme matrisi  $K$ 'yı hesapla:  $K \equiv FP$

### 3.3.2 Çok Girişli Özdeğer Atama Problemi İçin Doğrudan QR Algoritma

Çok girişli QR algoritma Miminis ve Paige (1988) tarafından yayınlanmıştır [12]. Yukarıda bahsettiğimiz genelleştirilmiş algoritma adımlarını takip etmektedir. Üç ana adımda sonuca gidilebilir.

#### Algoritma 3.6

**Basamak 1** Kontrol edilebilir  $(A, B)$  çifti kontrolör-Hessenberg çiftine  $(H, \tilde{B})$  dönüştürülür:

$$PAP^T = \begin{pmatrix} H_{11} & & & \\ H_{21} & \ddots & & H_{ij} \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & H_{k,k-1} & H_{kk} \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

ve

$$PBU = \tilde{B} = \begin{pmatrix} B_{11} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

$B_{11}$  matrisi ve  $H$  içindeki alt köşegen bloklar  $(R, 0)$  formundadır ve  $R$  tekil olmayan üst üçgen bir matristir.

**Basamak 2** Ortogonal matris  $Q$  ve geribesleme matrisi  $F$  oluşturulur. Öyle ki  $\Omega(Q^T(H - \tilde{B}F)Q) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  (3.53)

**Basamak 3** Asıl problemimizin geribesleme matrisi  $K$  ikinci basamaktaki Hessenberg probleminde bulunan  $F$  geri besleme matrisinden aşağıdaki gibi elde edilir :

$$K = UFP \quad (3.54)$$

### 3.3.3 Çok Girişli Özdeğer Atama Problemi İçin Schur Metodu

Bu metotta diğer algoritmalarda kullandığımız genelleştirilmiş algoritmayı kullanmayacağız. Çünkü Schur metodunda çok girişli özdeğer atama problemi sistemimizin  $A$  matrisinin gerçek Schur formuna-RSF'ye indirgenmesi ile bulunur [13].

$$R = QAQ^T = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

$A$  matrisinin RSF si ve  $\hat{B} = QB$  dönüştürülmüş kontrol matrisi.

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

olarak yazarsak  $(A, B)$  kontroledilebilir olduğu için  $(A_2, B_2)$  de kontroledilebilirdir.

A matrisinin RSF'si  $R$  şu şekilde derecelendirilmiştir;  $A_1$  "iyi" özdeğerleri taşır,  $A_2$  "kötü" özdeğerleri taşır. İyi özdeğerler kalmasını istediğimiz, kötü özdeğerler ise yeniden atamak istediğimiz özdeğerlerdir.

Buradaki önemli soru  $A_1$ 'in değişmemesi ve  $A_2$ 'nin de yeniden istediğimiz yerlere atanmasını sağlayacak geribesleme matrisi  $F$ 'nin nasıl belirleneceğidir.

Eğer geri besleme matrisi  $F, F = (0, F_2)$  formunda belirlenirse geribesleme matrisi  $(R, \hat{B})$  uygulandıktan sonra

$$R - \hat{B}F = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 - B_1F_2 \\ 0 & A_2 - B_2F_2 \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

elde edilir. Burada  $R - \hat{B}F$  özdeğerleri  $A_1$  ve  $A_2 - B_2F_2$  birleşimidir. Problemimiz  $A_2 - B_2F_2$  yapısında istenen spektrumu sağlayacak  $F_2$ 'yi bulmaya indirgenmiştir.  $A_2$  köşegen blokları skaler  $1 \times 1$  veya  $2 \times 2$  matris olduğu için yapmamız gereken aşağıdaki prosedür ile  $p = 1$  veya  $2$  olmak üzere  $p \times p$  matrisine özdeğer atamaktır.

### **Algoritma 3.7 ( $p = 1$ veya $2$ ) özdeğerlerini atama algoritması**

#### **Girişler**

$M - p$  boyutlu durum matrisi

$G - (p \times m)$  boyutlu kontrol matrisi

$\Gamma_p -$  kompleks konjuge altında kapalı  $p$  kompleks sayıları

$r - G$ 'nin rankı

#### **Çıkış**

$F_p -$  Spektrumu  $\Gamma_p$  olan geri besleme matrisi  $(M - GF_p)$

**Varsayım**  $(M, G)$  kontroledilebilir.

**Basamak 1**  $G$ 'nin tekil değer ayrışımını yap.  $U$  ve  $V$ 'yi bul.  $\hat{G} r \times r$  boyutlu matris ve

$$G = U(\hat{G}, 0)V^T \quad (3.58)$$

**Basamak 2**

$$M: \hat{M} = U^T M U \quad (3.59)$$

**Basamak 3** Eğer  $r = p$  ise

$$\hat{F}_p = (\hat{G})^{-1}(\hat{M} - J) \quad (3.60)$$

hesapla.  $J$   $p \times p$  boyutlu ve özdeğerleri  $\Gamma_p$ . Basamak 6'ya git.

**Basamak 4**  $\Gamma_2 = \{\lambda_1, \lambda_2\}$  ve

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

**Basamak 5**

$$\hat{F}_p = (\hat{F}_{p1}, \hat{F}_{p2}) \quad (3.63)$$

hesapla:

$$\hat{F}_{p1} = (m_{11} + m_{22} - \lambda_1 - \lambda_2)/\beta \quad (3.64)$$

$$\hat{F}_{p2} = \left(\frac{m_{22}}{m_{21}}\right)\hat{F}_{p1} - (m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} - \lambda_1\lambda_2)/(m_{21}\beta) \quad (3.65)$$

**Basamak 6**

$$F_p = V \begin{bmatrix} \hat{F}_p \\ 0 \end{bmatrix} U^T \quad (3.66)$$

hesapla

Algoritma 3.7  $A_2$  nin tüm özdeğerlerini atamak için kullanılabilir. Özdeğerlerden 1 veya 2 tanesini bir seferde değiştirerek bu işlem yapılır. Süreç  $A_2$ 'nin son  $p \times p$  bloğu ile başlar ve daha sonra yukarıdaki algoritma kullanılarak bu blok ile yapılan atama işlemi tamamlanır. Yeni bir  $p \times p$  köşegen blok ortogonal benzerlik kullanılarak hareket ettirilir ve atama prosedürü yeni blok için tekrarlanır.

İstenen geribesleme matrisi yukarıda elde ettiğimiz geribesleme matrislerinin bileşimi ile elde edilir. Genel prosedür ise aşağıdaki gibidir:

### Algoritma 3.8 Çok girişli özdeğer atama problemi için Schur algoritması

#### Girişler

$A$  –  $n \times n$  durum matrisi

$B$  –  $n \times m$  giriş matrisi

$S$  –sayı takımı ve kompleks konjuge altında kapalı

**Çıkış**  $K$  –geribesleme matrisi.  $\Gamma$  takımı altındaki sayılar  $A - BK$  nın spektrumudur.

**Varsayım**  $(A, B)$  kontrol edilebilir.

**Basamak 1**  $A$  matrisini  $RSF$  ye dönüştür.

$$A \equiv Q A Q^T = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

$A_1$   $r \times r$  ,  $A_2$   $(n - r) \times (n - r)$  boyutlarında olup;  $A_1$  iyi özdeğerlere ve  $A_2$  kötü özdeğerlere sahiptir.

$B \equiv Q B$  olarak yeniden düzenlenir ve  $\hat{Q} = Q$  olur.

**Basamak 2**  $K \equiv 0$  ve  $i = r + 1$

**Basamak 3**  $i > n$  ise dur.

**Basamak 4**  $M$ 'yi  $A$ 'nın içindeki son blokta  $p$ . dereceye eşitle ( $p = 1$  veya  $2$ ).  $G$ 'yi  $B$ 'nin son  $p$  satırlarına eşitle.

**Basamak 5** Algoritma 6.7'yi  $P$  özdeğerlerini  $S$ 'den kaydırmak için kullanarak  $F_p$  yi hesapla.

**Basamak 6**  $K$  ve  $A$ 'yı yeniden hesapla:

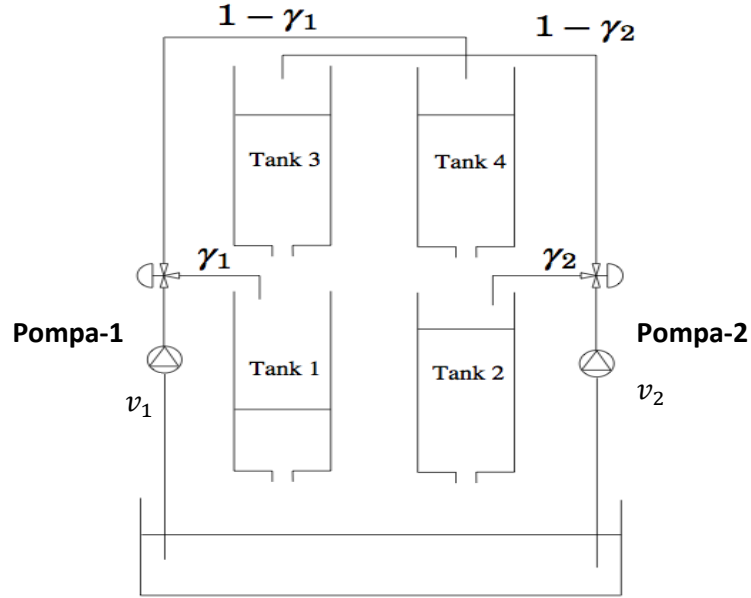
$$K \equiv K - (0, F_p) Q \quad (3.68)$$

$$A \equiv A - B(0, F_p) \quad (3.69)$$

**Basamak 7**  $A$ 'nın son bloğunu  $Q$  içindeki dönüşümleri toplayarak  $(i, i)$  konumuna getir.

**Basamak 8**  $i \equiv i + p$  ve Basamak 3'e geri dön.

### 3.4 Dörtlü Tank Sıvı Seviye Dengeleme Sistemi



Şekil 3. 2 Dörtlü Tank Sıvı Seviye Dengeleme Sistemi [14]

Dörtlü tank sistemi dört adet su tankı ve iki adet pompadan oluşur. Amaç tank 1 ve tank 2'deki su seviyelerini pompalar ile kontrol etmektir. Sistem girişleri  $v_1$  ,  $v_2$  voltajları ve çıkışlar tank 1 ve tank 2'nin  $h_1$  ,  $h_2$  su seviyeleridir [14].

Sistem parametreleri aşağıdaki gibidir.

Çizelge 3. 1 Sistem Parametreleri [15]

| Değişken    | Tanım                             | Birim    |
|-------------|-----------------------------------|----------|
| $h_i$       | Tank su seviyesi                  | cm       |
| $\bar{h}_i$ | Kalıcı hal su seviyeleri          | cm       |
| $x_i$       | Su seviyelerindeki sapmalar       | Cm       |
| $q_i$       | Pompalardan tanklara su akışı     | $cm^3/s$ |
| $v_j$       | Pompa voltaj değerleri            | V        |
| $\bar{v}_j$ | Kalıcı hal pompa voltaj değerleri | V        |



Çizelge 3. 1 Sistem Parametreleri (Devamı) [15]

|            |                                      |           |
|------------|--------------------------------------|-----------|
| $u_j$      | Voltajlardaki sapma değerleri        | V         |
| $\gamma_j$ | Akış hızları                         | 0-1       |
| $A_i$      | Tankın yatay kesit alanı             | $cm^2$    |
| $a_i$      | Çıkış ağzı yatay kesit alanı         | $cm^2$    |
| $g$        | Yer çekimine bağlı ivme              | $cm/s^2$  |
| $k_i$      | Pompa akış sabiti                    | $cm^3/sV$ |
| $k_c$      | Su seviyesi-voltaj dönüşüm katsayısı | $V/cm$    |

Sistemin matematiksel modeline geçmeden önce bazı temel denklemleri incelememiz gerekmektedir [15].

**Kütle denge denklemi:** Her bir tankımız için ;

$$\dot{V} = A_i \cdot \dot{h}_i = q_{giriş} - q_{çıkış} \quad (3.70)$$

$V$ :tanktaki suyun hacmi

$q_{giriş}$  :içeriye akış

$q_{çıkış}$ :dışarıya akış

**Bernoulli Kanunu:** Sıkıştırılamayan sıvılar için Bernoulli kanunu değerlendirildiğinde;

$$p + \frac{1}{2}\rho v_w^2 + \rho gh = sabit \quad (3.71)$$

su yüzeyinde ( $v_w = 0$ ) ve her tankın tabanında ( $h = 0$ ) ve sonuç denklemlerini birbirinden çıkardığımızda, dışarıya akışı :

$$q_{çıkış} = a_i \cdot v_w = a_i \sqrt{2g} \cdot \sqrt{h_i} \quad (3.72)$$

olarak elde edilir.

$v_w$ :suyun hızı(çıkış)

## Doğrusal olmayan denklem

Çizelge 3. 2 Pompalardan tanklara üretilen akışlar [15]

|            | TANK-1                   | TANK-2                   | TANK-3                         | TANK-4                         |
|------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| 1.Pompadan | $\gamma_1 k_p \cdot v_1$ | -                        | -                              | $(1 - \gamma_1) k_p \cdot v_1$ |
| 2.Pompadan | -                        | $\gamma_2 k_p \cdot v_2$ | $(1 - \gamma_2) k_p \cdot v_2$ |                                |

Denklemler 3.70 ve 3.72 ile Çizelge 3.2'deki ifadeler dört tank sistemi için aşağıdaki doğrusal olmayan denklemleri sağlar:

$$\begin{aligned}
 \dot{h}_1 &= -\frac{a_1}{A_1} \sqrt{2gh_1} + \frac{a_3}{A_1} \sqrt{2gh_3} + \frac{\gamma_1 k_1}{A_1} v_1 \\
 \dot{h}_2 &= -\frac{a_2}{A_2} \sqrt{2gh_2} + \frac{a_4}{A_2} \sqrt{2gh_4} + \frac{\gamma_2 k_2}{A_2} v_2 \\
 \dot{h}_3 &= -\frac{a_3}{A_3} \sqrt{2gh_3} + \frac{(1 - \gamma_2) k_2}{A_3} v_2 \\
 \dot{h}_4 &= -\frac{a_4}{A_4} \sqrt{2gh_4} + \frac{(1 - \gamma_1) k_1}{A_4} v_1
 \end{aligned} \tag{3.73}$$

**Kalıcı hal (steady state):** Denge noktasında tüm zaman değişkenleri bazı sabit değerlere karşılık gelir. Her tank için  $\dot{h}_i = 0$  değerini alır. Dört denklem için altı kalıcı hal değerleri elde edilmiş olur  $(\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3, \bar{h}_4, \bar{v}_1, \bar{v}_2)$ . Tank 1 ve tank 2'nin seviyelerini kontrol etmek istediğimiz için,  $\bar{h}_1, \bar{h}_2$  yi seçeriz ve sistem denklemlerini aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{1}{A_i} (a_i \sqrt{2g} \cdot \sqrt{\bar{h}_3} + \gamma_1 k_p \cdot \bar{v}_1 - a_i \sqrt{2g} \cdot \sqrt{\bar{h}_1}) \\
 0 &= \frac{1}{A_i} (a_i \sqrt{2g} \cdot \sqrt{\bar{h}_4} + \gamma_2 k_p \cdot \bar{v}_2 - a_i \sqrt{2g} \cdot \sqrt{\bar{h}_2}) \\
 0 &= \frac{1}{A_i} ((1 - \gamma_2) k_p \cdot \bar{v}_2 - a_i \sqrt{2g} \cdot \sqrt{\bar{h}_3}) \\
 0 &= \frac{1}{A_i} ((1 - \gamma_1) k_p \cdot \bar{v}_1 - a_i \sqrt{2g} \cdot \sqrt{\bar{h}_4})
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

(3.74)'ün son iki denklemi  $a_i\sqrt{2g} \cdot \sqrt{\bar{h}_3} = (1 - \gamma_2)k_p \cdot \bar{v}_2$  ve  $(1 - \gamma_1)k_p \cdot \bar{v}_1 = a_i\sqrt{2g} \cdot \sqrt{\bar{h}_4}$  olduğunu gösterir. Bu ifadeler ile (3.74)'ün ilk iki denklemini birlikte değerlendirdiğimizde bize aşağıdaki doğrusal olmayan denklemleri verir:

$$\begin{bmatrix} a_i\sqrt{2g} \cdot \sqrt{\bar{h}_1} \\ a_i\sqrt{2g} \cdot \sqrt{\bar{h}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 k_p & (1 - \gamma_2)k_p \\ (1 - \gamma_1)k_p & \gamma_2 k_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 k_p & (1 - \gamma_2)k_p \\ (1 - \gamma_1)k_p & \gamma_2 k_p \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} a_i\sqrt{2g} \cdot \sqrt{\bar{h}_1} \\ a_i\sqrt{2g} \cdot \sqrt{\bar{h}_2} \end{bmatrix}$$

Kalan dört kalıcı hal değerlerimiz ise aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2g}}{k_p(\gamma_1 + \gamma_2 - 1)} \begin{bmatrix} \gamma_2 & \gamma_2 - 1 \\ \gamma_1 - 1 & \gamma_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_i \cdot \sqrt{\bar{h}_1} \\ a_i \cdot \sqrt{\bar{h}_2} \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

$$\bar{h}_3 = \left( \frac{(1 - \gamma_2)k_p \cdot \bar{v}_2}{a_i\sqrt{2g}} \right)^2 \quad (3.77)$$

$$\bar{h}_4 = \left( \frac{(1 - \gamma_1)k_p \cdot \bar{v}_1}{a_i\sqrt{2g}} \right)^2 \quad (3.78)$$

**Doğrusallaştırma:** Şimdi sistemin durum uzay modelini elde etmeye çalışacağız:

$h = [h_1 \ h_2 \ h_3 \ h_4]^T$  ve  $v = [v_1 \ v_2]^T$  vektörleri ve benzer olarak  $\bar{h}$ ,  $\bar{v}$  olmak üzere sistemi  $\dot{h} = f(h, v)$  olarak yazabiliriz. Denklem (3.73)'te görüldüğü üzere sistem kalıcı hal değerlerinin kare-köklü ifadelerini içermektedir. Bu nedenle  $f(h, v)$  fonksiyonu doğrusal değildir.

Eğer sistemin  $A, B, C, D$  matrisleri ile durum uzay modelini yazmak istersek sistemin kalıcı halini  $(\bar{h}, \bar{v})$  doğrusallaştırmamız gerekir. Kalıcı halde  $\dot{h} = f(\bar{h}, \bar{v}) \equiv 0$  olur. Böylece Taylor serisi açılımı ile sistem matrislerini elde edebiliriz.

$$\dot{x} = \dot{h} \approx f(\bar{h}, \bar{v}) + \frac{\partial f(h, v)^T}{\partial h} \cdot (h - \bar{h}) + \frac{\partial f(h, v)^T}{\partial v} \cdot (v - \bar{v}) \quad (3.79)$$

$$A = \frac{\partial f(h, v)^T}{\partial h} \quad (3.80)$$

$$B = \frac{\partial f(h, v)^T}{\partial v} \quad (3.81)$$

$$x = (h - \bar{h}) \quad (3.82)$$

$$u = (v - \bar{v}) \quad (3.83)$$

Yukarıdaki denklemlerde  $x$  su seviyelerinin kalıcı değerlerden sapmalarını

$(x_i := h_i - \bar{h}_i)$ ,  $u$  ise pompa voltajının kalıcı değerlerden sapmalarını  $(u_i := v_i - \bar{v}_i)$

ifade eder.

**Durum uzay gösterimi:** Sistemi doğrusallaştırarak  $A, B$  ve  $C$  kolaylıkla bulunmaktadır.

Sistem çıkışları  $y_1 = x_1$  ve  $y_2 = x_2$  şeklindedir. Sistemin durum uzay gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 & \frac{A_3}{A_1 T_3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} & 0 & \frac{A_4}{A_2 T_4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 k_1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_2 k_2}{A_2} \\ 0 & \frac{(1-\gamma_2)k_2}{A_3} \\ \frac{(1-\gamma_1)k_1}{A_4} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_c & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

zaman sabiti  $T_i$ ;

$$\frac{1}{T_i} = \frac{a_i \sqrt{2g}}{A_i} \cdot \frac{1}{2\sqrt{h_1}} \quad (3.86)$$

**Transfer fonksiyonu matrisi:** (3.84) ve (3.85)'in Laplace dönüşümü ile dört tank sisteminin transfer fonksiyonu matrisi elde edilir:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (3.87)$$

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = G(s) \cdot \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{T_1 \gamma_1 k_p}{a(1+sT_1)} & \frac{T_1(1-\gamma_2)k_p}{a(1+sT_3)(1+sT_1)} \\ \frac{T_2(1-\gamma_2)k_p}{a(1+sT_4)(1+sT_2)} & \frac{T_2 \gamma_2 k_p}{a(1+sT_2)} \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

Bu bölümün buraya kadarki kısmında özdeğer atama problemi ve problem çözümünde kullanacağımız algoritmalar ile problemi uygulayacağımız model hakkında bilgiler verdik. Problemin uygulanması için kullanacağımız dört tank sisteminin parametre değerleri ve durum uzay modeli aşağıdaki gibidir.

Çizelge 3. 3 Dört Tank Sistemi için Parametre Değerleri [14]

| Parametreler | Birimler     | Değerler |
|--------------|--------------|----------|
| $A_1, A_3$   | $[cm^2]$     | 28       |
| $A_2, A_4$   | $[cm^2]$     | 32       |
| $a_1, a_3$   | $[cm^2]$     | 0.071    |
| $a_2, a_4$   | $[cm^2]$     | 0.057    |
| $k_c$        | $[V / cm]$   | 0.5      |
| $g$          | $[cm / s^2]$ | 981      |

Çizelge 3. 4 Sistemin Çalışma Değerleri [14]

| Çalışma Değerleri        | Birimler      | Değerler     |
|--------------------------|---------------|--------------|
| $(\bar{h}_1, \bar{h}_2)$ | $[cm]$        | (12.4, 12.7) |
| $(\bar{h}_3, \bar{h}_4)$ | $[cm]$        | (1.8, 1.4)   |
| $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ | $[V]$         | (3.00, 3.00) |
| $(k_1, k_2)$             | $[cm^2 / Vs]$ | (3.33, 3.35) |
| $(\gamma_1, \gamma_2)$   | -             | (0.70, 0.60) |

$$A = \begin{bmatrix} -0.24038 & 0 & 0.1310 & 0 \\ 0 & -0.2852 & 0 & 0.0873 \\ 0 & 0 & -0.1310 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0873 \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.0245 & 0 \\ 0 & 0.02115 \\ 0 & 0.0141 \\ 0.0105 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

yukarıdaki modele sahip dört tank sisteminin aşağıda verilen kutuplarına bakacak olursak;

$\{-0.2852, -0.24038, -0.131, -0.0873\}$  sisteme ait dört kutbun eksenin sol tarafında olduğunu görürüz. Kutup atama işlemi ile olmasını istediğimiz yeni kutuplar  $\{-6, -5, -1 + 0.2j, -1 - 0.2j\}$  olsun. Sırasıyla yukarıda bahsettiğimiz algoritmaları kutup atama problemimize uyguladığımızda elde ettiğimiz kazanç matrisleri şöyledir. (Uygulamalar Mathematica Advanced Numerical Methods-Pole Assignment Methods toolbox ile yapılacaktır.)

Özyineli çok girişli algoritma ile elde ettiğimiz kazanç matrisimiz:

$$K_1 = \begin{pmatrix} -1203.87 & -988.453 & 1447.41 & 3431.87 \\ -77.4553 & -1311.37 & 2372.48 & 165.711 \end{pmatrix} \quad (3.93)$$

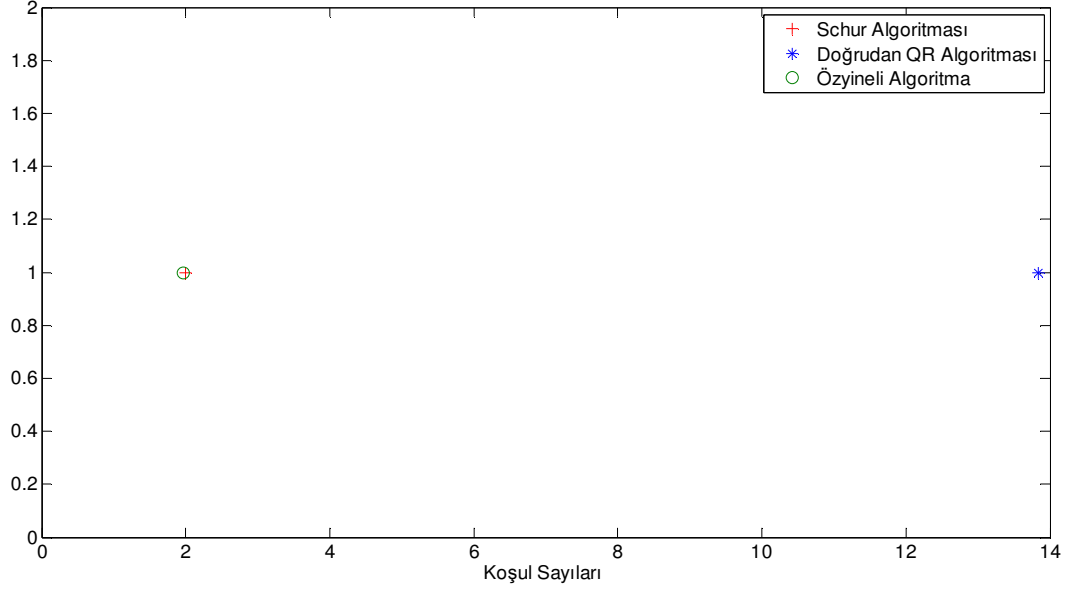
Doğrudan QR algoritması ile elde ettiğimiz durum kazanç matrisimiz

$$K_2 = \begin{pmatrix} -190.952 & -96.5654 & 143.031 & 605.508 \\ 7317.01 & -2620.71 & 4681.18 & 795.368 \end{pmatrix} \quad (3.94)$$

Schur algoritması ile elde ettiğimiz kazanç matrisimiz aşağıdaki gibi olur.

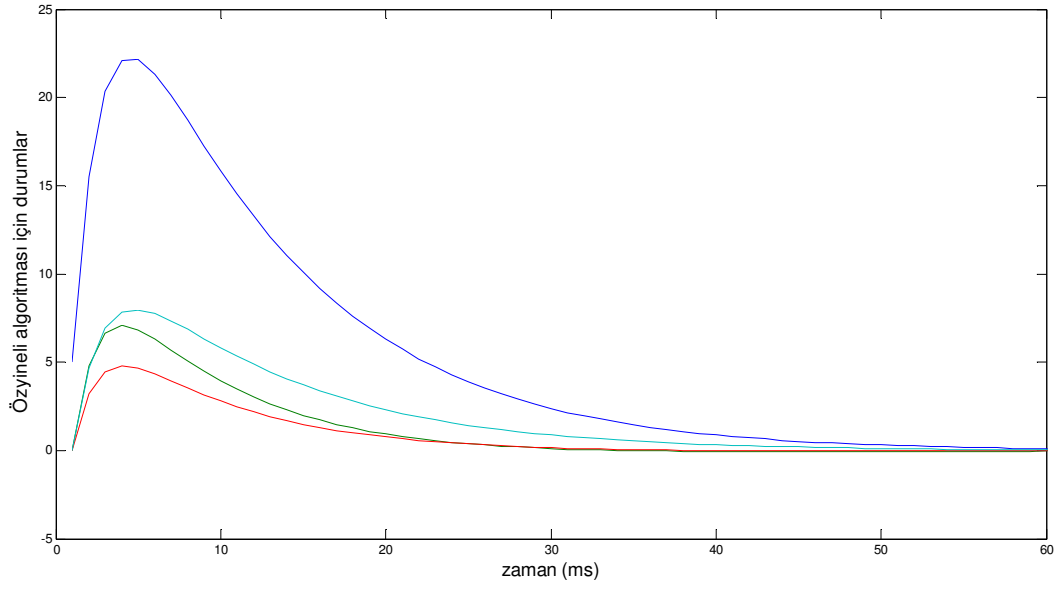
$$K_3 = \begin{pmatrix} -1230.94 & -176.132 & 243.329 & 3429.18 \\ -666.216 & -1318.37 & 2432 & 1580.09 \end{pmatrix} \quad (3.95)$$

Elde ettiğimiz kazanç matrislerine baktığımızda çok girişli sistemlerde çözüm tek değildir. Her algoritmada farklı sonuç elde edilir. Bu nedenle Matlab cond(k) komutu ile koşul sayılarını elde ederek algoritmaların performansına göre hangisini kullanmamız gerektiğine karar vereceğiz.

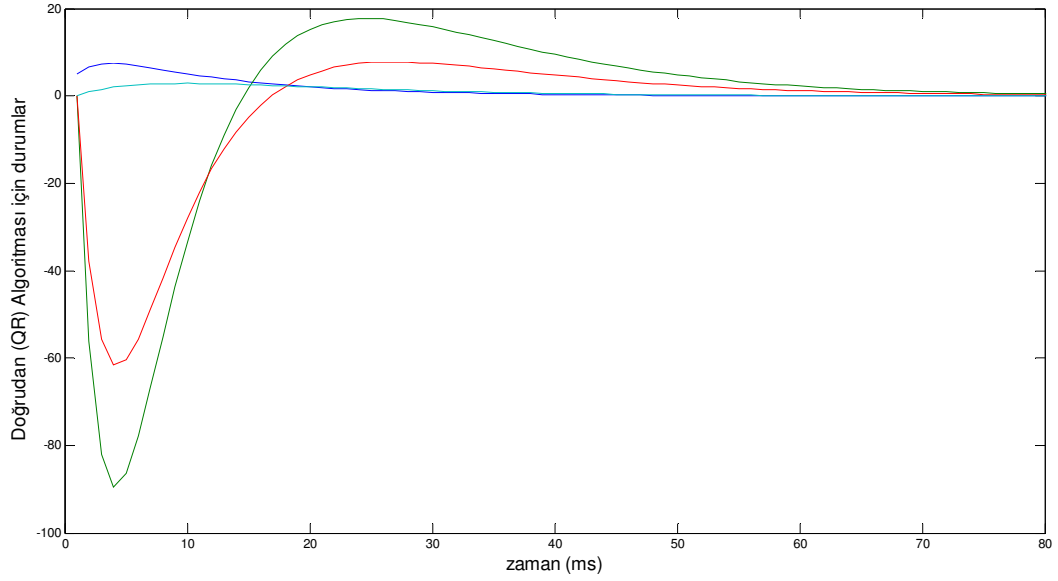


Şekil 3. 8 Kazanç matrislerinin koşul sayıları

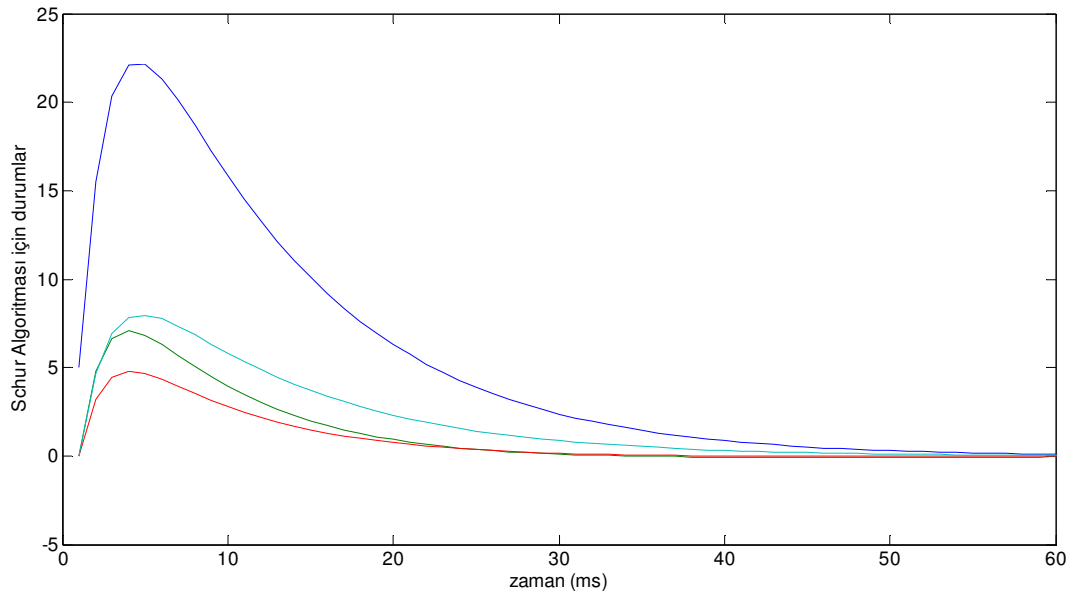
Koşul sayıları Özyineli algoritma için 1.9721, Doğrudan QR algoritma için 13.843, Schur Metodu için ise 2.0025'tir.



Şekil 3. 9 Özyineli çok girişli özdeğer atama algoritması



Şekil 3. 10 Doğrudan(Explicit) QR çok girişli özdeğer atama algoritması



Şekil 3. 11 Schur Metodu

Geçici hal cevaplarına baktığımızda ise en çok aşımı Doğrudan (Explicit) QR, en az aşım ve en çabuk oturma schur metodu ile özyineli algoritma sağlamaktadır.

Kazanç matrisleri ve koşul sayılarından anlaşılacağı üzere en küçük koşul sayısı Schur Metodu ve çok girişli özyineli özdeğer atama algoritması ile elde edilmektedir. Her üç algoritma da özdeğerlerin istenilen yerlere atanmasını sağlamış olsa da küçük koşul değerli algoritmalar tercih edilir. Çünkü küçük koşul değerleri aynı zamanda daha iyi

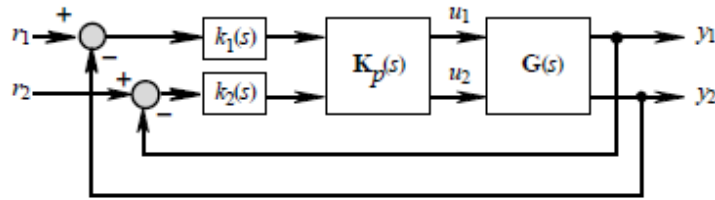


geçici (transient) hal cevabı sağlar. Bu nedenle en az aşım ve en çabuk oturma avantajları ile en kullanışlı algoritmaların Schur Metodu ve çok girişli özyineli özdeğer atama algoritması olduğu değerlendirilmektedir [6].

## DÖRTLÜ TANK SIVI SEVİYE DENGELEME SİSTEMİNİN FREKANS BÖLGESİNDE ANALİZİ

### 4.1 Giriş

Çok değişkenli sistemler giriş-çıkışlar arasındaki etkileşimler nedeniyle karmaşık yapıya sahiptirler. Böyle sistemlerde tek giriş tek çıkışlı sistemlere uygulanan yöntemleri direkt olarak kullanmak mümkün değildir. Eğer sisteme değişkenler arasındaki ilişkiyi azaltacak veya kaldıracak bir ön düzenleyici tasarlanır ise sistem döngülerinde tek giriş tek çıkışlı sistemler için kullanılan yöntemler uygulanabilir.



Şekil 4. 12 İki giriş iki çıkışlı sistem için geri besleme yapısı

İki giriş iki çıkışlı sistem yapısını gösteren Şekil 4.1’de  $K_p(s)$ , sistemdeki etkileşimleri azaltmak için tasarlanmış olan çok değişkenli ön düzenleyici ve  $k_1(s)$  ile  $k_2(s)$  ise tek döngülü düzenleyicilerdir.

Dört tank sıvı seviye dengeleme sistemi de çok değişkenli yapıya sahip olduğu için giriş-çıkışlar arasındaki etkileşimin incelenmesi gerekir. Bu amaçla çalışmada kontrol teorisinde çok değişkenli yapılarıdaki etkileşimleri azaltmakta kullanılan yöntemlerden bağıl kazanç dizisi (relative gain array-RGA), Nyquist dizisi ve Perron-Frobenius prosedürü ele alınmıştır.

## 4.2 BAĞIL KAZANÇ DİZİSİ

Çok değişkenli sistemlerin kontrolünde giriş-çıkışlar arasındaki en iyi eşleme RGA,  $R(s)$  ile sağlanabilir [16].  $R(s)$  dizisi transfer fonksiyon matrisi  $G(s)$  ile bu matrisin tersinin transpozunun,  $G^{-T}(s) = (G^T(s))^{-1} = (G^{-1}(s))^T$ , eleman-eleman çarpımı (Hadamard veya Schur çarpımı) ile edilir.

$$R(s) = G(s) G^{-T}(s) \quad (4.1)$$

Genellikle RGA sıfır frekansında değerlendirilir. Dolayısıyla  $s = 0$  için,

$$R(0) = G(0) G^{-T}(0) \quad (4.2)$$

olur. Kare sistemler için RGA tekil özelliğe sahiptir yani her satır ve sütundaki tüm elemanların toplamı her zaman 1 (bir)'dir. 0-1 aralığındaki kazançlar daha makul etkileşim sağlar, etkileşimleri en aza indirmek için kazanç değerlerinin 1'e yakın olanları seçilir. 0.5 civarı değerleri ise en kötü etkileşime neden olur ve 5'den büyük olan kazançlar şiddetli döngü etkileşimi olduğu anlamına gelir. Eğer değer 0.5'den büyük ise kontrol çifti diğer kontrol döngülerinden daha fazla etkiye sahiptir. Ancak değer 0.5'den küçük ise diğer kontrol döngüleri kontrol çiftini etkiler ve diğer kontrol döngülerden kaynaklanan etki kontrol çiftinden daha fazla olur.

Dörtlü tank sistemimiz için sıfır frekansı  $G(0)$  için RGA aşağıdaki gibi olur.

$$RGA|_{s=0} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2 - 1} & -\frac{(\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1)}{\gamma_1 + \gamma_2 - 1} \\ -\frac{(\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1)}{\gamma_1 + \gamma_2 - 1} & \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2 - 1} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Sıfır frekansı için RGA, kalıcı durumların kontrolünde hassas giriş-çıkış çiftleri vermektedir. Ancak kontrol edilen sistemin ilgilenilen frekans bandında sistemin dinamiklerini göz ardı edebilir. RGA 'nın frekans değişkenine bağlı olduğu durumda formu aşağıdaki gibi olur.

$$RGA(s) = \frac{1}{p(s)} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

ve

$$p(s) = \gamma_1 \gamma_2 T_3 T_4 s^2 + \gamma_1 \gamma_2 (T_3 + T_4) s + (\gamma_1 + \gamma_2 - 1) \quad (4.5)$$

$$\alpha = \gamma_1 \gamma_2 (T_3 T_4 s^2 + (T_3 + T_4) s + 1) \quad (4.6)$$

$$\beta = (\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1) \quad (4.7)$$

Yeni bir polinom ifadesi ile sadeleştirmek istersek

$$q(s) = \frac{(\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1)}{p(s)} \quad (4.8)$$

Frekansa bağlı RGA aşağıdaki gibi formüle edilebilir.

$$RGA(s) = \begin{pmatrix} 1 + q(s) & -q(s) \\ -q(s) & 1 + q(s) \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Bu durumda 1. çıkışın kontrolü için en iyi girişin 1. giriş ve 2. çıkışın kontrolü için en iyi girişin 2. giriş olduğu kabul edilmiştir. Eğer bir ön düzenleyici dikkate alınır ve uygun permütasyon matrisi sistem girişlerine uygulanıp, çıkışlar {1, 2} için girişler {2, 1} olarak yeniden düzenlenirse frekans bağımlı RGA

$$RGA_{\{2,1\}}(s) = \begin{pmatrix} -q(s) & 1 + q(s) \\ 1 + q(s) & -q(s) \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

şeklinde olur.

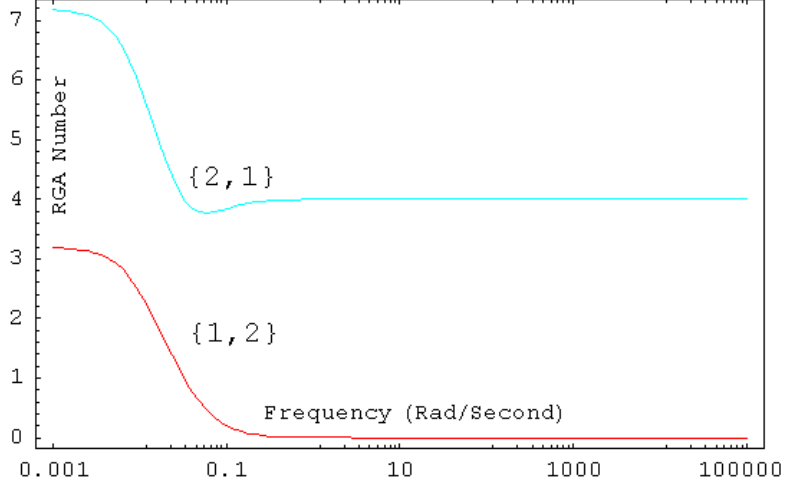
### 4.3 Bağıl Kazanç Sayısı

Bağıl kazanç sayısı (RGA-number) RGA ile birim matris farkının mutlak değerlerinin toplamı olarak tanımlanan frekansa bağlı skaler değerdir.

$$RGA - sayısl = \sum_{i,j=1}^n |(RGA(jw) - I_n)_{ij}| \quad (4.11)$$

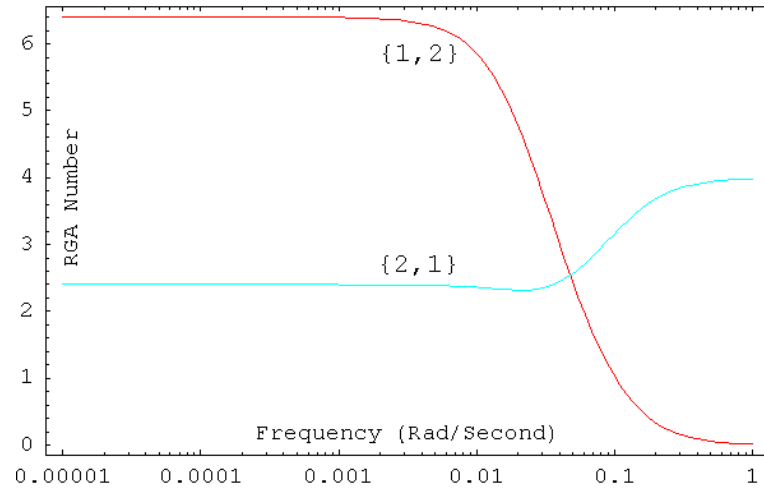
RGA sayısının daha iyi bir parametre olduğu söylenebilir; RGA-sayısı ne kadar küçük olursa o frekanstaki sistemin etkileşimi daha az olur. Dörtlü tank sistemi için giriş permütasyonu sırasıyla {1, 2} ve {2, 1} olursa, RGA-sayısı  $4|q(jw)|$  ve  $4|1 + q(jw)|$  olur.

Eğer  $\gamma_1 = 1$  ve  $\gamma_2 \in [0, 1]$  veya  $\gamma_2 = 1$  ve  $\gamma_1 \in [0, 1]$  olursa RGA-sayısının hesaplanması, giriş seti  $\{1, 2\}$ 'nin tüm diğer frekanslar için en iyisi olduğu durumunu ortaya çıkarır ve RGA-sayısı tüm frekans değerleri için tam olarak sıfırdır.



Şekil 4. 13  $\gamma_1 = 0.6$  ve  $\gamma_2 = 0.6$  için RGA-sayısı çizimi

Yukarıdaki şekilde  $\{1, 2\}$  giriş seti (kırmızı renkte olan) diğer çalışma frekansları da göz önüne alındığında en iyi olanıdır.  $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$  toplamını veren tüm seçimlerde, RGA-sayısı çizimi tüm giriş permutasyonları için aynıdır ve RGA-sayısı oldukça yüksektir. Bu da tüm eşlemelerin aynı önemde olduğu anlamına gelir. Bu durumda sistemin orjinde sıfırı olduğu dikkate alınmalıdır. Şekil 4.3  $\gamma_1 = 0.6$  ve  $\gamma_2 = 0.2$  için RGA-sayısı için çizim gösterilmiştir.



Şekil 4. 14  $\gamma_1 = 0.6$  ve  $\gamma_2 = 0.2$  için RGA-sayısı çizimi

Burada, giriş-çıkış çiftlerinin oldukça yüksek frekans dinamiklerinde değiştirilmesi gerektiği gözlenmektedir. Şekil 4.3'de görüldüğü üzere RGA-sayısı çizimi bazı değerlerde kesişmektedir. Bu durum bazı frekans bandında giriş-çıkış çiftinin değiştirilmesini gerektirmektedir. Değişimin yapılacağı kritik frekanslar aşağıdaki denklemin çözümü ile tespit edilir.

$$4|q(jw)| = 4|1+q(jw)| \quad (4.12)$$

Denklemin çözümünde  $\text{Re}[q(jw)] = -0.5$  olur ve  $\text{Im}[q(jw)]$  keyfi olarak seçilebilir. Şekil 4.3 için kritik frekans  $w_{cr} = 0.0479947586$  rad/s. Genel olarak kritik frekans  $c + bw^2 + aw^4$  polinomunun gerçek kökü  $w$  dır.

$$a = \gamma_1^2 \gamma_2^2 T_3^2 T_4^2 \quad (4.13)$$

$$b = \gamma_1^2 \gamma_2^2 (T_3^2 + T_4^2) \quad (4.14)$$

$$c = (\gamma_1 + \gamma_2 - 1)(2\gamma_1\gamma_2 - \gamma_1 - \gamma_2 + 1) \quad (4.15)$$

Eğer  $c = 0$  olursa tüm RGA-sayılarının kesişiminde olan kritik frekans değeri  $w = 0$ 'dır ve bu halde  $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ 'dir.

$a, b$  ve  $w$  gerçek ve pozitif sayılar iken  $c$ 'nin negatif olması gerekmektedir. Bu durumda  $\gamma_1 + \gamma_2 < 1$  olur. Sonuç olarak her iki RGA-sayısı çizimleri ancak ve ancak  $\gamma_1 + \gamma_2 \leq 1$  iken kesişir.

#### 4.4 Sütun Köşegen Baskınlık

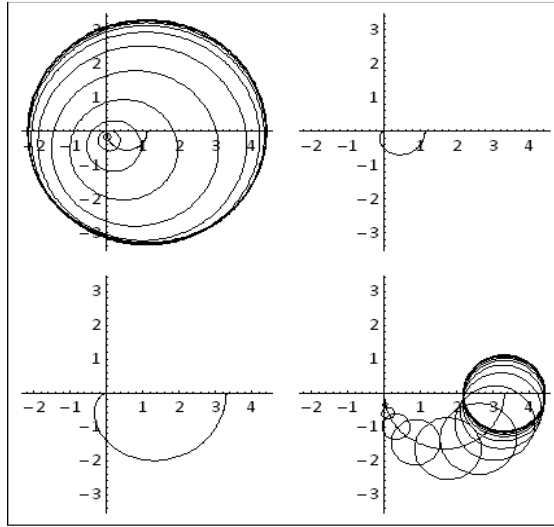
Rasyonel  $p \times p$  matrisi  $G(s)$  denklemi,  $j = 1, 2, \dots, p$  ancak  $i \neq j$  iken D yarı çemberi üzerinde ve 4.16 sağlanıyor ise Nyquist D-hattında sütun köşegen baskındır.

$$|g_{ii}(jw)| > \sum_{i=1}^p |g_{ij}(jw)| \quad \forall s \quad (4.16)$$

Bir sistemin sütun köşegen baskınlığı satır baskın *Gershgorin çemberlerinin* Nyquist dizisinin köşegen terimlerine yerleştirilmesi ile grafiksel olarak tespit edilebilir [17]. Bunu elde etmek için  $w_k$  frekansının tüm değerleri için  $j = 1, 2, \dots, p$  ancak  $i \neq j$  iken aşağıdaki denklem yarıçapında

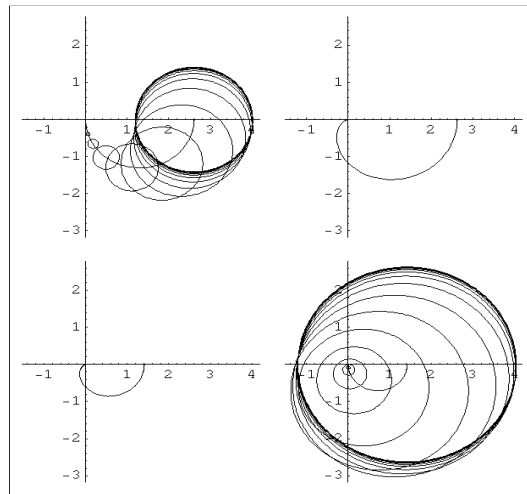
$$r_i^c = \sum_{i=1}^p |g_{ij}(jw_k)| \quad (4.17)$$

çemberler,  $g_{ij}(s)$  köşegen elemanlarının merkezlerine,  $s = jw_k$  iken değerlendirildiğinde çizilir. Bir sistem eğer Nyquist dizisinin köşegen terimlerine yerleştirilen *Gershgorin çemberleri* tarafından oluşturulan bantların hiçbiri birleştirilen köşegen eleman çiziminin orjinini kapsamıyor ise sütun köşegen baskındır [18].  $\gamma_1 = 0.3$  ve  $\gamma_2 = 0.7$  değerleri için Nyquist dizisi çizimi Şekil 4.4 de olduğu gibidir.



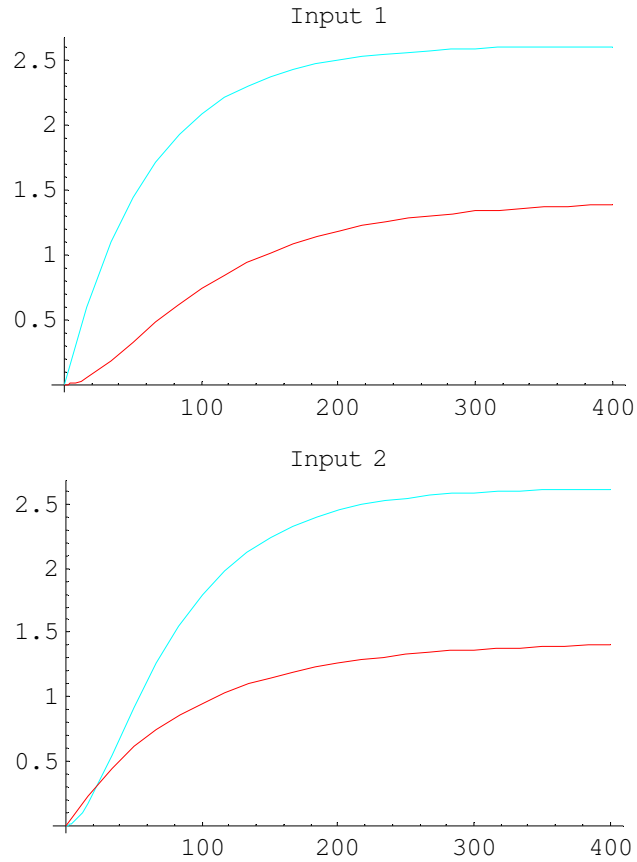
Şekil 4. 15  $\gamma_1 = 0.3$  ve  $\gamma_2 = 0.7$  değerleri için Nyquist dizisi çizimi

Diğer taraftan  $\gamma_1 = 0.7$  ve  $\gamma_2 = 0.3$  olursa Nyquist çizimi Şekil 4.5 deki gibi olur.



Şekil 4. 16  $\gamma_1 = 0.7$  ve  $\gamma_2 = 0.3$  değerleri için Nyquist dizisi çizimi

Şekil 4.4 de görüldüğü üzere Nyquist dizisinin  $\{1,1\}$  elemanları için düşük-frekanslarda,  $w=0$  iken 1.12 gerçek değerinde başlayan Gershgorin sütun baskın daireleri orjini kapsamaktadır. Dolayısıyla sistem düşük frekanslarda sütun köşegen baskın değildir. Ancak Nyquist dizisinin  $\{2, 2\}$  elemanları için çiziminde ,  $w=0$  iken 3.31 gerçek değerinde başlayan daireler düşük frekanslarda orjini kapsamamaktadır.  $\{1,1\}$  elemanları için yapılan çizimde Gershgorin dairelerinin boyutlarının azalması yüksek frekanslarda sütun köşegen baskınlığının olduğunu bize gösterir. Şekil 4.6 daki açık-çevrim sistemin birim basamak girişe olan simulasyon çizimi de bu durumu onaylamaktadır.



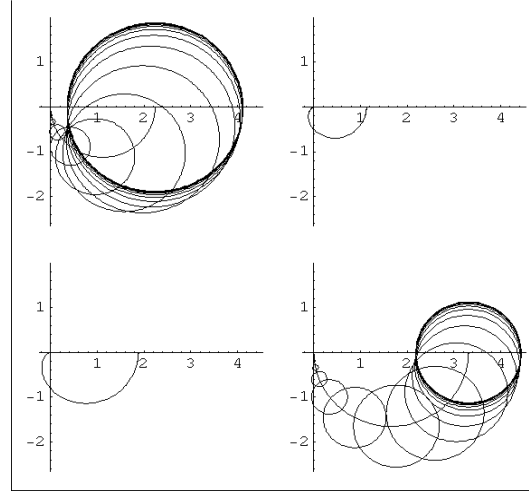
Şekil 4. 17 Birim basamak girişlere sistem cevabı

$\gamma_1 = 0.6$  ve  $\gamma_2 = 0.7$  değerleri için Nyquist dizisi çizimi Şekil 4.7 deki gibi olur.

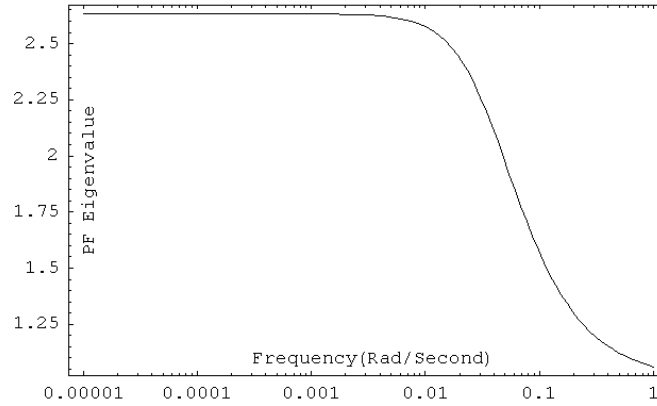
Ayrıca,  $\gamma_1 + \gamma_2 < 1$  durumu için Perron-Frobenius olarak adlandırılan özdeğerin 2 den büyük olduğu gösterilebilir. Bu durumda sistem düşük frekanslarda köşegen baskın



yapılamaz. Örnek olarak  $\gamma_1=0.6$  ve  $\gamma_2=0.2$  değerleri için yapılan ve Şekil 4.8’de verilen Perron-Frobenius özdeğerlerinin çizimi verilmiştir.



Şekil 4. 18  $\gamma_1=0.6$  ve  $\gamma_2=0.7$  değerleri için Nyquist dizisi çizimi



Şekil 4. 19  $\gamma_1=0.6$  ve  $\gamma_2=0.2$  değerleri için Perron-Frobenius özdeğerlerinin çizimi

Ayrıca kontrol edilebilirlik testinin ortaya çıkardığı üzere sistem kontrol edilebilirdir ve kontrol edilebilirlik endeksleri  $\{2, 2\}$ 'dir. Bu durum da dörtlü tank sisteminin ancak ve ancak her iki giriş kanalının aktif olduğu anlamına gelmektedir. Eğer  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$  ise bu endeksler  $\{1, 1\}$ 'dir, başka bir ifade ile kontrol edilebilir alt uzay iki boyutludur.

Diğer taraftan eğer sadece  $\gamma_1=1$  veya sadece  $\gamma_2=1$  ise, kontrol edilebilirlik endekslerinin sırasıyla  $\{1, 2\}$  ve  $\{2, 1\}$ 'dir. Bu durumda kontrol edilebilirlik alt uzayı üç boyutludur. Çizelge 4.1’de kontrol edilebilirlik endeksleri detaylı olarak gösterilmiştir.

Çizelge 4. 2 Kontrol edilebilirlik endeksleri

| $\gamma_1$         | $\gamma_2$         | Kontrol edilebilirlik endeksi |
|--------------------|--------------------|-------------------------------|
| 0                  | 1                  | {1, 1}                        |
| 1                  | 0                  | {1, 1}                        |
| 1                  | 1                  | {1, 1}                        |
| 1                  | $0 < \gamma_2 < 1$ | {1, 2}                        |
| $0 < \gamma_1 < 1$ | 1                  | {2, 1}                        |
| $0 < \gamma_1 < 1$ | 0                  | {2, 2}                        |
| $0 < \gamma_1 < 1$ | $0 < \gamma_2 < 1$ | {2, 2}                        |
| 0                  | $0 < \gamma_2 < 1$ | {2, 2}                        |
| 0                  | 0                  | {2, 2}                        |

### SONUÇ VE ÖNERİLER

Çift tank ve dörtlü tank sıvı seviye dengeleme sistemleri çeşitli kontrol teorisi uygulamalarında kullanılmaktadır. Dinamik yapıları incelendiğinde lineer değildir ve bu nedenle lineerleştirilmesi gerekmektedir.

Bu çalışmada çift tanklı sistemin lineerleştirilmiş yapısı incelenmiştir. Durum gözleyici ile elde edilen kestirilmiş durumlar, geribesleme yapılarak özdeğer atama işleminde kullanılmıştır. Böylece tasarlanan sistemde durum gözleyici ve durum geri besleme yapısı birlikte kullanılmıştır. Sistem referans değeri simülasyonda planladığı şekilde takip ettiğinden ve su seviyesini istediğimiz değerlerde dengelediğinden tasarlanan gerçeklemenin başarılı olduğu değerlendirilmektedir.

Çalışmada özdeğer atama probleminde çeşitli algoritmalar dört tanklı sistem üzerinde uygulanmıştır. Durum geri besleme ile yapılan özdeğer atama işlemi sonunda istediğimiz özdeğerlerin tüm algoritmalar ile atanabildiği görülmüştür. Durum geri besleme ile özdeğer atamada üç farklı algoritma kullanılmıştır. Kullanılan 3 (üç) farklı algoritmalarından elde edilen sonuçlara göre kazanç matrisi çözümünün her algoritma için farklı olduğu görülmüştür. Bu nedenle kullanılması gereken en uygun algoritmayı belirlemek için elde edilen kazanç matrisleri, koşul sayıları ve özdeğer atama sonrası geçici hal cevapları karşılaştırılmıştır. Karşılaştırmalar sonucunda Schur Metodu ve Özyineli algoritma, en az aşım ve en çabuk oturma avantajları ile en kullanışlı algoritmalar olarak değerlendirilmektedir.

## KAYNAKLAR

---

- [1] Quanser Coupled Water Tanks User Manual
- [2] Abbas, H., Asghar, S. ve Qamar, S., (2012). "Sliding Mode Control for Coupled-Tank Liquid Level Control System," Frontiers of Information Technology (FIT), 17-19 December 2012,325-330.
- [3] Mahapatro, S.R.; Subudhi, B.; Ghosh, S., (2014). "An experimental evaluation of optimal control design for coupled tank system," Automation, Control, Energy and Systems (ACES), 1-2 February 2014, 1-5.
- [4] Quanser Coupled Water Tanks Instructor Manual
- [5] Quanser Coupled Water Tanks Student Handout
- [6] Datta,B.N., (2003). Numerical Methods for Linear Control Systems, Elsevier.
- [7] <http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=Introduction&section=ControlStateSpace> , 12 Ocak 2015
- [8] Quanser Peripherals Brochure
- [9] Datta, B. N., (1987). "An algorithm to assign eigenvalues in a Hessenberg matrix: Single-input case." IEEE Transactions on Automatic Control, 5:414–417.
- [10] Arnold, M. ve Datta, B. N., (1998). "Single-input eigenvalue assignment algorithms: A close look." SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 2:444–467.
- [11] Arnold, M. ve Datta, B. N., (1990). "An algorithm for the multi-input eigenvalue assignment problem." IEEE Transactions on Automatic Control, 10:1149–1152.
- [12] Minimis, G. S. ve Paige. C. C., (1988). "A direct algorithm for pole assignment of time-invariant multi-input linear systems using state feedback." Automatica,3:343–356.
- [13] Varga, A., (1981). "Schur method for pole assignment." IEEE Transactions on Automatic Control,2:517–519.
- [14] Johansson, K. H. ve Nunes, J. L. R., (1998). "A Multivariable Laboratory Process With An Adjustable Zero." Proceedings of the American Control Conference Philadelphia, Pennsylvania.
- [15] Quad Tanks Experiment Manual,Swiss Federal Institute of Technology, 18 October 2010.
- [16] Bristol, E. H., (1966). "On a new measure of interaction for multivariable process control" IEEE Transactions on Automatic Control, 1:133–134.

- [17] Rosenbrock, H. H., (1970). State-Space and Multivariable Theory, Nelson, London.
- [18] Patel, R. V. ve Munro, N. (1982). Multivariable System Theory and Design, Pergamon Press, Oxford.

## ÖZGEÇMİŞ

---

### KİŞİSEL BİLGİLER

**Adı Soyadı** : Özgül AYABAKAN  
**Doğum Tarihi ve Yeri** : 23.04.1986 İzmir  
**Yabancı Dili** : İngilizce  
**E-posta** :ozgulayakabakan35@gmail.com

### ÖĞRENİM DURUMU

| Derece | Alan                                | Okul/Üniversite  | Mezuniyet Yılı |
|--------|-------------------------------------|------------------|----------------|
| Lisans | Elektrik-Elektronik<br>Mühendisliği | Deniz Harp Okulu | 2008           |
| Lise   | Fen-Matematik                       | Şemikler Lisesi  | 2004           |

### YAYINLARI

#### Bildiri

1. Üstoğlu, İ., Örenbaş, H. ve Ayabakan, Ö., (2015). "Frequency Domain Analysis of the Quadruple Tank System", ICTAEECE 2015, 18 February 2015, İstanbul.