

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



ÖZEL CEBİRSEL EĞRİLER ÜZERİNDE WEIERSTRASS SEMİGRUP

Gökhan ÇAĞLAR

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OCAK 2024

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÖZEL CEBİRSEL EĞRİLER ÜZERİNDE WEIERSTRASS SEMİGRUP

Gökhan ÇAĞLAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez .../.../20... tarihinde jüri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Nesrin TUTAŞ (Danışman)

Prof. Dr. Mustafa ALKAN

Dr. Öğr. Üyesi Zafer ŞANLI

ÖZET

ÖZEL CEBİRSEL EĞRİLER ÜZERİNDE WEIERSTRASS SEMİGRUP

Gökhan ÇAĞLAR

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Nesrin TUTAŞ

Ocak 2024, 45 sayfa

Nümerik semigrupların önemli bir örneği, bir eğrinin bir noktasındaki Weierstrass semigrupdur. Weierstrass semigruplar ve gonalite dizisinin cebirsel geometri, kodlama teorisi gibi matematiğin bir çok dalında uygulama alanı vardır. Weierstrass semigruplar ile gonalite dizileri, özellikle, yeni kodlar kurmak, minimum mesafe için sınırlar bulmak ve kodların boyutlarında iyileştirmeler yapmak amaçlı çalışmalarda önemli rol oynarlar.

Bu tezde; Hermityen, Suzuki fonksiyon cisimlerinin yanı sıra Skabelund (2018) tarafından kurulan ve Suzuki fonksiyon cisminin bir Kummer genişlemesi olan $y^q + y = x^{q_0}(x^q + x)$, $t^m = x^q + x$ ile tanımlanan $\tilde{S} = \mathbb{F}_q(x, y, t)/\mathbb{F}_q$ fonksiyon cisminin temel kavramları verilmiş, rasyonel noktalarda Weierstrass semigrupları araştırılmış ve Beelen vd. (2021), Bartoli vd. (2021) çalışmalarındaki teknikler ile yeniden elde edilmiştir, burada $n \geq 1$, $q_0 = 2^n$, $q = 2q_0^2$, $m = q - 2q_0 + 1$ dir. Ayrıca bir fonksiyon cisminde gonalite dizisi ile Weierstrass semigrubu arasındaki ilişki incelenmiş ve bazı cins değerleri için gonalite dizisi verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELEER: Artin-Schreier genişlemeleri, cebirsel fonksiyon cisimleri, gonalite dizisi, Hermityen fonksiyon cismi, Kummer genişlemeleri, maximal fonksiyon cisimleri, Skabelund maximal fonksiyon cismi, sonlu cisimler, Suzuki fonksiyon cismi, Weierstrass semigrup.

JÜRİ: Prof. Dr. Nesrin TUTAŞ

Prof. Dr. Mustafa ALKAN

Dr. Öğr. Üyesi Zafer ŞANLI

ABSTRACT

WEIERSTRASS SEMIGROUP ON SPECIAL ALGEBRAIC CURVES

Gökhan ÇAĞLAR

MSc Thesis in Matematik

Supervisor: Prof. Dr. Nesrin TUTAŞ

January 2024, 45 pages

An important example of numerical semigroups is the Weierstrass semigroup at a point on a curve. Weierstrass semigroups and gonality sequences have applications in many branches of mathematics such as algebraic geometry and coding theory. Weierstrass semigroups and gonality sequences, in particular, they play an important role in studies aimed at establishing new codes, finding limits for minimum distances, and making improvements in the size of codes.

In this thesis; Hermitian and Suzuki function fields along with the basic concepts of the function field $\tilde{S} = \mathbb{F}_q(x, y, t)/\mathbb{F}_q$, which is a Kummer extension of the Suzuki function field established by Skabelund (2018) as $y^q + y = x^{q_0}(x^q + x)$, $t^m = x^q + x$, are given, rational points on Weierstrass semigroups are investigated and also recovered by using techniques from the work of Beelen vd. (2021), Bartoli vd. (2021). Here $n \geq 1$, $q_0 = 2^n$, $q = 2q_0^2$, and $m = q - 2q_0 + 1$. In addition, the relationship between the gonality sequence in a function field and the Weierstrass semigroup is examined and the gonality sequence is given for some genus values.

KEYWORDS: Artin-Schreier extensions, algebraic function fields, gonality sequences, Hermitian function field, Kummer extensions, maximal function fields, Skabelund maximal function field, finite fields, Suzuki function field, Weierstrass semigroup.

COMMITTEE: Prof. Dr. Nesrin TUTAŞ

Prof. Dr. Mustafa ALKAN

Asst. Prof. Dr. Zafer ŞANLI

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması esas olarak dört bölümden oluşmaktadır. Konu hakkındaki genel ve tanıtıcı bilgiler birinci bölümde, “Giriş” başlığı altında verilmiştir.

İkinci bölümde, cebirsel fonksiyon cisimleri ve nümerik semigruplar teorilerinde çalışmamız için önemli yapılar, tez boyunca kullanılacak kavramlar ve bunlara ait gösterimler “Kaynak Taraması” başlığı altında tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde, kullanacağımız yöntemler ve materyaller verilmiştir. Hermit-yen, Suzuki fonksiyon cisimlerinin (eğrilerinin) yapısı, özellikleri ve rasyonel noktalar-daki Weierstrass semigrupları incelenmiştir.

Dördüncü bölümde ise bu tez çalışması boyunca elde edilen sonuçlar “Bulgular ve Tartışma” başlığı altında verilmiştir. Suzuki fonksiyon cisminin Kummer genişlemesi olan $\tilde{S}$ fonksiyon cismi tanıtılıp, özellikleri verilmiş ve ardından rasyonel noktalarda Weierstrass semigrubu incelenmiştir. Ayrıca gonallite dizileri ile Weierstrass semigrup arasındaki ilişki incelenmiştir.

Lisans eğitimimden bu yana benden bilgisini ve desteğini hiç esirgemeyen, akademik hayatımın oluşmasına katkıda bulunan sevgili danışmanım Prof. Dr. Nesrin TUTAŞ’a canıgönülden teşekkür ederim.

Benden maddi ve manevi desteğini bir an olsun esirgemeyen, her an yanımda olup her kararımı destekleyen meslektaşım, ağabeyim Doç. Dr. Umut ÇAĞLAR’a, emeklerini hiç esirgemeyen annem Semiha ÇAĞLAR’a ve bütün aileme çok teşekkür ederim.

Varlığını manevi olarak hep hissettiren ve depremden sonra hep yanımda olan sevgili Ceylan SAVAŞ’a içten teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	iii
AKADEMİK BEYAN	v
SİMGELER VE KISALTMALAR	vi
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK TARAMASI	3
2.1. Cebirsel Fonksiyon Cisimleri Teorisinde Temel Kavramlar	3
2.2. Nümerik Semigrup	9
2.3. Weierstrass Semigrup	11
2.4. Cebirsel Fonksiyon Cismi Genişlemeleri	12
2.5. Cebirsel Fonksiyon Cisminin Diferansiyeli	21
3. MATERYAL VE METOD	24
3.1. Hermityen Fonksiyon Cismi	24
3.2. Suzuki Fonksiyon Cismi	26
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	30
4.1. $\tilde{S}$ Fonksiyon Cismi ve Weierstrass Semigrup	30
4.2. Gonalite	37
5. SONUÇLAR	42
6. KAYNAKLAR	44
ÖZGEÇMİŞ	

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “ÖZEL CEBİRSEL EĞRİLER ÜZERİNDE WEIERSTRASS SEMİGRUP” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

.../.../20...
Gökhan ÇAĞLAR



SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}_0$	: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{Z}$	: Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks Sayılar Kümesi
$\mathbb{P}_F$	: F/K nın noktalarının kümesi
$\mathbb{D}_F$	: F/K nın bölenler grubu
$\mathcal{L}(D)$	: D böleninin Riemann-Roch Uzayı
$\deg D$	: D böleninin derecesi
$\dim \mathcal{L}(D)$	: $\mathcal{L}(D)$ uzayının boyutu
$i(D)$	: D böleninin özellik indeksi
A_F	: F/K nın adel uzayı
Ω_F	: F/K nın Weil diferansiyelleri uzayı
$F(H)$	: H nin Frobenius sayısı
$G(H)$	: H nin boşlukları kümesi
$g(H)$	: H nin boşluk sayısı
m_H	: H nin katlılığı
c_H	: H nin önderi
$Ap(H, n)$	: H nin n ye göre Apéry kümesi
$Ap(H)$	: H nin m_H ye göre Apéry kümesi
g_F	: F/K nın cinsi
$e(P' P)$	: P' noktasının P üzerinde dallanma indeksi
$f(P' P)$	: P' noktasının P üzerinde göreceli derecesi
$Con_{F'/F}(D)$	: D böleninin F'/F deki eşnormu
$d(P' P)$	: P üzerine P' nün fark katsayısı
$Diff(F'/F)$	: F'/F nin farkı

$Cotr_{F'/F}(w)$: w Weil diferansiyelinin F'/F deki eşizi

Δ_F : F/K nın diferansiyel uzayı

γ_r : F/K nın r -inci gonalitesi

$GS(F/K)$: F/K nın gonalite dizisi

γ_2 : F/K nın gonalitesi

$[t]$: t nin tam değeri



1. GİRİŞ

Nümerik semigruplar, Sylvester'in (1884) de ortaya attığı ve daha sonra Frobenius tarafından genelleştirilen ve literatürde Frobenius problemi olarak bilinen, aralarında asal olan pozitif tamsayıların pozitif katları cinsinden yazılamayan en büyük pozitif tamsayıyı bulma problemi ile ilgili yapılan çalışmalarla geliştirilmiştir.

Nümerik semigruplar teorisi cebirsel geometri ve kodlama teorisi gibi bir çok uygulama alanı bulmuştur. Cebirsel geometrik kodlar (veya Goppa kodlar), cebirsel eğri üzerinde özel koşullara sahip G ve D gibi iki bölgenin kullanılarak oluşturulan lineer kodlardır. G bölgenin tek bir P noktasının katı olarak alındığında elde edilen kodlar, tek nokta kodları olarak bilinir. Bu kodların parametreleri P noktasının Weierstrass semigrubu ile yakından ilişkilidir.

Bir P rasyonel noktasındaki Weierstrass semigrup

$$H(P) := \{\alpha \in \mathbb{N}_0 : \text{öyle bir } f \text{ fonksiyonu var ki } (f)_\infty = \alpha P\}$$

ve boşluk kümesi $\mathbb{N}_0 \setminus H(P)$ ile tanımlanır.

Gösterilmiştir ki, G bölgenin çok noktalı olması durumunda daha iyi parametrelili kodlar elde edilebilmektedir. Eğer G nin destek kümesi $P_1, \dots, P_r$ gibi r nokta içerirse, karşılık gelen r -noktalı kodunun parametrelerini tahmin etmek için r noktanın Weierstrass semigrubu kullanılabilir. r elemanlı nokta kümesinin Weierstrass semigrubu, tek noktanın Weierstrass yarı grubunun bir doğal genellemesidir ve literatürde oldukça çalışılmıştır. Bir sonlu cisim üzerindeki nokta çifti için Weierstrass semigrubunun belirlendiği eğri ailelerine örnek olarak hipereliptik ve düzlemsel kuartik eğriler, Hermityen eğri ve Suzuki eğri aileleri verilebilir. Weierstrass semigrubun r noktaya genellemesi ile ilgili olarak Matthews (2004a,b) nin çalışmaları verilebilir.

Cebirsel gruplarla ilişkili üç önemli eğri ailesi: Hermityen, Suzuki ve Ree eğrileridir. Bu eğrilerin karakterizasyonu rasyonel noktaların sayısı, cinsleri ve otomorfizm grubu ile yapılabilir.

Hermityen eğri, herhangi bir q asal kuvveti için F_{q^2} üzerinde maksimal eğridir, çünkü rasyonel noktaları sayısı Hasse-Weil sınırını sağlar. $q = 2^{2t+1}, t \geq 1$ için Suzuki eğrisi F_{q^4} üzerinde maksimal eğridir ve $q = 3^{2t+1}, t \geq 0$ için Ree eğrisi F_{q^6} üzerinde maksimal eğridir. Bu eğriler, kendi cinslerine ait eğriler içindeki maksimum rasyonel nokta sayısına sahiptirler.

Maksimal eğriler uzun kodlara olanak tanıdıklarından geometrik Goppa kodlara yönelik uygulamalar için oldukça kullanışlı ve dikkat çekicidirler.

Matthews (2004a), Hermityen eğri üzerinde r farklı doğrudan (collinear) rasyonel noktanın Weierstrass semigrubunu belirlemiştir, $r \geq 2$.

Hansen ve Stichtenoth (1990), geometrik Goppa kodları Suzuki eğrisi üzerinde ele almışlar, kodların parametrelerini belirleyerek kodlar için üreteç ve kontrol matrislerini incelemişlerdir. Bir Suzuki eğrisi üzerindeki iki ayrı noktanın Weierstrass semigrubu Matthews (2004b) tarafından incelenmiştir.

Bu tez çalışması boyunca cebirsel fonksiyonlar teorisi kavramları ve gösterimleri kullanılacaktır.

p asal sayı, $q = p^s > 1$ olmak üzere, $y^q + y = x^{q+1}$ denklemiyle verilen $H = \mathbb{F}_{q^2}(x, y)/\mathbb{F}_{q^2}$ cebirsel fonksiyon cismi, Hermityen fonksiyon cismi olarak bilinir.

$n \geq 1$, $q_0 = 2^n$, $q = 2q_0^2$ olmak üzere, $y^q + y = x^{q_0}(x^q + x)$ denklemiyle tanımlanan $S = \mathbb{F}_q(x, y)/\mathbb{F}_q$ cebirsel fonksiyon cismi Suzuki fonksiyon cismidir.

Skabelund (2018), Suzuki eğrisinden (fonksiyon cismi) hareketle F_{q^4} üzerinde bir maksimal fonksiyon cismi oluşturmuştur. $\tilde{S}/\mathbb{F}_q$ fonksiyon cismi, $n \geq 1$, $q_0 = 2^n$, $q = 2q_0^2$, $m = q - 2q_0 + 1$ olmak üzere,

$$\tilde{S} = \mathbb{F}_q(x, y, t), \quad y^q + y = x^{q_0}(x^q + x), \quad t^m = x^q + x$$

ile tanımlanır. Beelen vd. (2021), bu fonksiyon cisminin Weierstrass semigrubunu $\mathbb{F}_q$ ve $\mathbb{F}_{q^4}$ rasyonel noktaları üzerinde incelemiştir. Bunun yanı sıra, fonksiyon cismi ve semigruba ait birçok özellik Skabelund (2018) ve Beelen vd. (2021) tarafından verilmiştir.

Bu tez çalışmasında, $\tilde{S}$ fonksiyon cisminin özellikleri incelenerek, herhangi bir P noktasında Weierstrass semigrubunun yapısı Beelen vd. (2021) teknikleriyle belirlenmiştir. Ayrıca, $q_0 = 2$ için, Suzuki fonksiyon cisminin gonality dizisi (bakınız, Tanım 4.6) ve bazı özellikleri ele alınmıştır. Weierstrass semigrubu ve gonality dizisi arasındaki benzerlik gözlemlenmiştir.

2. KAYNAK TARAMASI

2.1. Cebirsel Fonksiyon Cisimleri Teorisinde Temel Kavramlar

Bu bölümde, cebirsel fonksiyon cisimleri teorisinin temel kavramları tanımlanacak ve bu konunun temel özellikleri incelenecektir. Aksi belirtilmedikçe, K bir cismi gösterecektir. Kavramların detayı için Chevalley (1951); Salvador (2009) ve Stichtenoth (2009) kaynakları önerilir.

Tanım 2.1. K , F cisminin bir altcismi olmak üzere, K üzerinde aşkın olan bir $x \in F$ için F , $K(x)$ üzerinde sonlu cebirsel genişleme ise F ye K üzerinde bir değişkenli cebirsel fonksiyon cismi denir, kısaca F/K ile gösterilir.

$$\left. \begin{array}{c} F \\ | \\ K(x) \\ | \\ K \end{array} \right\} \text{Sonlu cebirsel genişleme}$$

Tanım 2.2. F/K bir cebirsel fonksiyon cismi olmak üzere, F nin K üzerinden cebirsel elemanlarının oluşturduğu cisme F/K nin sabitler cismi denir ve $\tilde{K}$ ile gösterilir. $K = \tilde{K}$ ise K ya F nin tüm sabitler cismi denir.

Bir değişkenli cebirsel fonksiyon cismine örnek olarak rasyonel fonksiyon cismi $K(x)$ verilebilir. $K(x)$ in sıfırdan farklı her elemanı sonlu sayıda indirgenemez polinomun kuvvetlerinin çarpımı olarak, sıralanış dışında, tek türlü yazılabilir. Bu durumun F de nasıl olacağını görebilmek amacıyla değerlendirme halkalarından yararlanılır.

Tanım 2.3. F/K bir cebirsel fonksiyon cismi ve $\mathcal{O}$, F nin bir althalkası olmak üzere,

1. $K \subsetneq \mathcal{O} \subsetneq F$,
2. Her $z \in F$ için $z \in \mathcal{O}$ veya $z^{-1} \in \mathcal{O}$

sağlanırsa $\mathcal{O}$ halkasına F/K nin bir değerlendirme halkası denir. Bir $\mathcal{O}$ değerlendirme halkasının maksimal idealine F/K nin bir noktası (place) denir ve F/K nin tüm noktalarından oluşan küme $\mathbb{P}_F$ ile gösterilir.

F/K nin bir $\mathcal{O}$ değerlendirme halkası aslında F/K nin yerel (lokal) halkasıdır. $P := \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}^*$, $\mathcal{O}$ halkasının tek maksimal idealidir, tek üreteçlidir ve $\mathcal{O}$, tek üreteçli ideal bölgesidir. Değerlendirme halkalarının özelliklerini ayrıntıları için Chevalley (1951); Salvador (2009) ve Stichtenoth (2009) önerilir.

Tanım 2.4. F/K bir cebirsel fonksiyon cismi olmak üzere, $v : F \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ fonksiyonu

1. $v(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$,
2. Her $0 \neq a \in K$ için $v(a) = 0$,
3. Öyle bir $t \in F$ vardır ki $v(t) = 1$,
4. Her $x, y \in F$ için $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$,
5. Her $x, y \in F$ için $v(x \cdot y) = v(x) + v(y)$

koşullarını sağlarsa bu fonksiyona, F/K nın bir ayrık değerlendirme (discrete valuation) denir.

Özel olarak, $v(x) \neq v(y)$ ise $v(x + y) = \min\{v(x), v(y)\}$ dir. F/K bir cebirsel fonksiyon cisminde $P = t\mathcal{O}$ ise her $z \in F \setminus \{0\}$ için $z = t^n u$ olacak biçimde bir $u \in \mathcal{O}^*$ ve $n \in \mathbb{Z}$ vardır (Stichtenoth (2009)). Dolayısıyla,

$$v_P : F \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}, v_P(z) = \begin{cases} \infty, & z = 0 \\ n, & z \neq 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan v_P bir ayrık değerlendirme fonksiyonudur. Belirtilmelidir ki, v_P , sadece P noktasının seçimine bağlıdır. Burada, “ ∞ ”, her $m, n \in \mathbb{Z}$ için $\infty + \infty = \infty + n = n + \infty = \infty$ ve $\infty > m$ özelliklerini sağlayan $\mathbb{Z}$ de olmayan bir sembolü temsil etmektedir.

Bundan sonra $P \in \mathbb{P}_F$ noktasına karşılık gelen değerlendirme halkası için $\mathcal{O}$ yerine $\mathcal{O}_P$ gösterimini kullanacağız. $P, \mathcal{O}_P$ ve v_P arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_P &= \{z \in F : v_P(z) \geq 0\}, \\ \mathcal{O}_P^* &= \{z \in F : v_P(z) = 0\}, \\ P &= \{z \in F : v_P(z) > 0\}. \end{aligned}$$

Tanım 2.5. F/K bir cebirsel fonksiyon cismi ve $P \in \mathbb{P}_F$ olsun. Bir $z \in F$ için $v_P(z) = m > 0$ ise P noktasına z elemanının m katlı sıfırı, $v_P(z) = n < 0$ ise P noktasına z elemanının n katlı kutbu denir.

F/K bir cebirsel fonksiyon cismi ve $z \in F$, K üzerinde aşkın bir eleman olmak üzere, z elemanının F de en az bir sıfırı ve kutbu vardır. Böylece, $\mathbb{P}_F$ kümesinin boştan farklı olduğu rahatlıkla görülür.

Örnek 2.6. (Stichtenoth (2009)) Herhangi bir K cismi üzerindeki rasyonel fonksiyonlardan oluşan cisim

$K(x) = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} : f, g \in K[x], g(x) \neq 0 \right\}$ dir. $p(x)$, K üzerinde indirgenemez polinom olmak üzere $K(x)$ cisminin değerlendirme halkaları,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{p(x)} &: = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} : f, g \in K[x], p(x) \nmid g(x), g(x) \neq 0 \right\}, \\ \mathcal{O}_\infty &: = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} : f, g \in K[x], g(x) \neq 0, \deg f \leq \deg g \right\} \end{aligned}$$

dir ve maksimal idealleri, sırasıyla,

$$P_{p(x)} = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} : f, g \in K[x], p(x) \mid f(x), p(x) \nmid g(x), g(x) \neq 0 \right\},$$

$$P_\infty = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} : f, g \in K[x], g(x) \neq 0, \text{der } f < \text{der } g \right\}$$

şeklinde dir. Özel olarak, $\alpha \in K$ için $p(x) = x - \alpha$ ya karşılık gelen $K(x)$ in noktası $P_\alpha := P_{x-\alpha}$ ile gösterilir. Bu durumda,

$$\mathbb{P}_{K(x)} = \left\{ P_{p(x)} : p(x), K \text{ üzerinde indirgenemez polinom} \right\} \cup \{P_\infty\}$$

olur.

Teorem 2.7 (Zayıf Yaklaşım Teoremi). F/K bir cebirsel fonksiyon cismi, $P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathbb{P}_F$ nin birbirinden farklı noktaları ve $x_1, \dots, x_n \in F$, $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda, öyle bir $x \in F$ vardır ki, her $i = 1, \dots, n$ için $v_{P_i}(x - x_i) = r_i$ dir.

İspat. Ayrıntılı ispat için referansımız Stichtenoth (2009) dir. □

Teorem 2.7 kullanılarak $\mathbb{P}_F$ nin sonsuz bir küme olduğu görülebilir.

Tanım 2.8 de fonksiyon cisminin bölenler grubu ve ilişkili temel kavramlar ifade edilmektedir. Ayrıntılı bilgi için Chevalley (1951); Salvador (2009) ve Stichtenoth (2009) kaynakları incelenebilir.

Tanım 2.8. F/K bir cebirsel fonksiyon cismi, $P \in \mathbb{P}_F$ ve $\mathcal{O}_P$, P ye karşılık gelen değerlendirme halkası olsun.

1. $\mathcal{O}_P/P$ cismine P noktasının kalan sınıfları cismi denir ve F_P ile gösterilir, F_P nin K üzerinden vektör uzayı olarak boyutuna P noktasının derecesi denir ve $\text{der } P = [F_P : K]$ ile gösterilir. $\text{der } P = 1$ ise P noktasına F/K cebirsel fonksiyon cisminin rasyonel noktasıdır denir.
2. $\mathbb{P}_F$ nin ürettiği serbest abel grubuna F/K nin bölenler grubu denir ve $\mathbb{D}_F$ ile gösterilir.
3. $D \in \mathbb{D}_F$ ise $D = \sum_{P \in \mathbb{P}_F} n_P \cdot P$, sonlu sayıda P hariç her $P \in \mathbb{P}_F$ için $n_P = 0$ dir. $v_P(D) := n_P$ tamsayısına D böleninin P noktasındaki değerlendirme (valuation) denir.
4. $D_1, D_2 \in \mathbb{D}_F$ olmak üzere, her $P \in \mathbb{P}_F$ için $v_P(D_1) \leq v_P(D_2)$ ise $D_1 \leq D_2$ denir. Ayrıca, $D_1 \leq D_2$ ve $D_1 \neq D_2$ ise $D_1 < D_2$ şeklinde yazılır.
5. Her $P \in \mathbb{P}_F$ ve bir $D \in \mathbb{D}_F$ böleni için $0 \leq v_P(D)$ ise D bölenine pozitif bölen denir.

6. Bir $D \in \mathbb{D}_F$ için $\sum_{P \in \mathbb{P}_F} v_P(D)$ der P tamsayısına D böleninin derecesi denir, der D ile gösterilir.
7. $D_1, D_2 \in \mathbb{D}_F$ için $D_2 = D_1 + (x)$ olacak şekilde $x \in F \setminus \{0\}$ varsa D_1 ve D_2 ye denk bölenler denir ve $D_1 \sim D_2$ şeklide gösterilir. Ayrıca bir $D \in \mathbb{D}_F$ böleninin denklik sınıfı $[D]$ ile gösterilir.
8. Bir $0 \neq z \in F$ için

$$R := \{P \in \mathbb{P}_F : P, z \text{ nin bir sıfırı}\}, S := \{P \in \mathbb{P}_F : P, z \text{ nin bir kutbu}\}$$

olsun. Bu durumda,

$$(z)_0^F := \sum_{P \in R} v_P(z) P$$

$$(z)_\infty^F := \sum_{P \in S} (-v_P(z)) P$$

bölenlerine, sırasıyla, z nin sıfır böleni ve kutup böleni denir. Ayrıca,

$$(z)^F := (z)_0^F - (z)_\infty^F$$

bölenine z nin esas böleni denir.

9. Bir $D \in \mathbb{D}_F$ için K cismi üzerinde bir vektör uzayı olan $\mathcal{L}(D) := \{x \in F : (x) \geq -D\} \cup \{0\}$ kümesine, D nin Riemann-Roch Uzayı denir.

Kolayca görülebilir ki, $\mathcal{L}(0) = K$ ve $D < 0$ ise $\mathcal{L}(D) = \{0\}$ dir.

Lemma 2.9. F/K cebirsel fonksiyon cisminin iki böleni A, B ve $A \leq B$ olsun. O halde $\mathcal{L}(A) \subseteq \mathcal{L}(B)$ ve

$$\text{boy}(\mathcal{L}(B) / \mathcal{L}(A)) \leq \text{der } B - \text{der } A$$

dır.

İspat. Ayrıntılı ispat için referansımız Stichtenoth (2009) dir. □

Teorem 2.10. F/K bir cebirsel fonksiyon cismi ve $x \in F \setminus \{0\}$, K üzerinde bir aşkın eleman olsun. Bu durumda der $(x)_0 = \text{der } (x)_\infty = [F : K(x)]$ dir ve (x) esas böleninin derecesi sıfırdır.

İspat. Ayrıntılı ispat için referansımız Stichtenoth (2009) dir. □

Sonuç 2.11. F/K cebirsel fonksiyon cisminin iki böleni A, B ve $A \sim B$ olsun. O halde boy $\mathcal{L}(A) = \text{boy } \mathcal{L}(B)$ ve der $A = \text{der } B$ dir. Ayrıca der $A < 0$ ise boy $\mathcal{L}(A) = 0$ dir.

İspat. Ayrıntılı ispat için referansımız Stichtenoth (2009) dir. □

Her $D \in \mathbb{D}_F$ için der D – boy $\mathcal{L}(D) < \gamma$ olacak biçimde bir $\gamma \in \mathbb{Z}$ vardır (Stichtenoth (2009)). Bu durum F/K cebirsel fonksiyon cismi için cins (genus) tanımını anlamlı kılar.

Tanım 2.12. F/K bir cebirsel fonksiyon cismi ise

$$g_F := \max \{ \text{der } D - \text{boy } \mathcal{L}(D) + 1 : D \in \mathbb{D}_F \}$$

sayısına F/K nın cinsi (genus) denir ve g_F ile gösterilir.

Kolayca görülebilir ki, $g_F \geq 0$ dır. $D \in \mathbb{D}_F$ için, $i(D) = \text{boy } \mathcal{L}(D) - \text{der } D + g_F - 1$ sayısına D böleninin özellik indeksi (index of speciality) denir. Özel olarak, Riemann-Roch teoremi bu sayının $i(D) \geq 0$ ve der D yeterince büyükse $i(D) = 0$ olduğunu ifade eder.

Tanım 2.13. F/K bir cebirsel fonksiyon cismi,

$$\begin{array}{ccc} \alpha : & \mathbb{P}_F & \rightarrow F \\ & P & \rightarrow \alpha(P) \end{array}$$

fonksiyon olmak üzere, sonlu sayıda P noktası hariç her P noktası için $\alpha(P) \in \mathcal{O}_P$ ise α ya F/K nın bir adeli denir. F/K nın adeller kümesi K cismi üzerinden bir vektör uzayıdır, bu uzaya F/K nın adel uzayı denir ve A_F ile gösterilir.

$D \in \mathbb{D}_F$ için,

$$A_F(D) = \{ \alpha \in A_F \mid v_P(\alpha) \geq -v_P(D) \text{ her } P \in \mathbb{P}_F \}$$

kümesi A_F nin K -altuzayıdır.

Tanım 2.14. F/K bir cebirsel fonksiyon cismi ve $w : A_F \rightarrow K$ fonksiyonu K üzerinde bir doğrusal dönüşüm olsun.

1. Uygun bir $D \in \mathbb{D}_F$ için $w(A_F(D) + F) = 0$ ise w ye bir Weil diferansiyeli denir ve F/K nın Weil diferansiyelleri kümesi Ω_F , F cismi üzerinden vektör uzayıdır, Ω_F ye F/K nın Weil diferansiyelleri uzayı denir.
2. $0 \neq w \in \Omega_F$ için $w(A_F(B) + F) = 0$, $w(A_F(D) + F) = 0$ ve $D \leq B$ koşulları sağlanırsa B bölenine w Weil diferansiyelinin böleni denir, $B = (w)$ ile gösterilir.
3. $0 \neq w \in \Omega_F$ ve $P \in \mathbb{P}_F$ için $v_P(w) := v_P((w))$ ile tanımlanır. $v_P(w) > 0$ ise P noktasına w nun sıfırı, $v_P(w) < 0$ ise P noktasına w nun kutbu denir. Her $P \in \mathbb{P}_F$ için $v_P(w) \geq 0$ ise w Weil diferansiyeline düzenli (regular) denir.
4. Bir Weil diferansiyelinin bölenine F/K nın bir kanonik böleni denir.

Her $D \in \mathbb{D}_F$ için $\Omega_F(D) = \{ w \in \Omega_F : w(A_F(D) + F) = 0 \}$, K cismi üzerinden

Ω_F nin bir altuzayıdır ve boy $\Omega_F(D) = i(D)$ dir (Stichtenoth (2009)). Özel olarak, boy $\Omega_F(0) = i(0) = g_F$ dir.

$0 \neq x \in F, 0 \neq w \in \Omega_F$ ise $(xw) = (x) + (w)$ dir ve kanonik iki bölen denktir. $D \in \mathbb{D}_F, W = (w)$ olsun. Bu durumda, $\mu : \mathcal{L}(W - D) \rightarrow \Omega_F(D), \mu(x) = xw$ ile tanımlanan μ dönüşümü bir K cismi üzerinden bir izomorfizmdir (Stichtenoth (2009)). Weil diferansiyelleri hakkında ayrıntılı bilgi için Stichtenoth (2009) ve Salvador (2009) kaynakları incelenebilir.

Teorem 2.15 (Riemann-Roch Teoremi). F/K bir cebirsel fonksiyon cismi ve $W, F/K$ nın bir kanonik böleni olmak üzere, her $D \in \mathbb{D}_F$ için boy $\mathcal{L}(D) = \text{der } D + 1 - g_F + \text{boy } \mathcal{L}(W - D)$ dir, burada $g_F, F/K$ nın cinsidir.

İspat. Ayrıntılı ispat için referansımız Stichtenoth (2009) dir. □

Riemann-Roch teoreminin bazı önemli sonuçları şöyle ifade edilebilir:

1. W kanonik bölen olmak üzere Riemann-Roch teoreminde $D = 0$ ve $D = W$ alınırsa $\text{der } W = 2g_F - 2$, boy $\mathcal{L}(W) = g_F$ dir.
2. Riemann-Roch teoremi ve Sonuç 2.11 den doğrudan görülebilir ki, $D \in \mathbb{D}_F$ için $\text{der } D \geq 2g_F - 1$ ise boy $\mathcal{L}(D) = \text{der } D + 1 - g_F$ dir.

Teorem 2.16 (Clifford Teoremi). F/K bir cebirsel fonksiyon cismi ve $D \in \mathbb{D}_F$ için $0 \leq \text{der } D \leq 2g_F - 2$ ise boy $\mathcal{L}(D) \leq 1 + \frac{1}{2}\text{der } D$ dir.

İspat. Ayrıntılı ispat için referansımız Stichtenoth (2009) dir. □

F/K nın, rasyonel fonksiyonlar cismi olması için gerek ve yeter koşul $g_F = 0$ ve uygun bir $D \in \mathbb{D}_F$ için $\text{der } D = 1$ olmasıdır (Stichtenoth (2009)).

Tanım 2.17. F/K bir cebirsel fonksiyon cismi, $P \in \mathbb{P}_F$ ve $\iota_P : F \hookrightarrow A_F$ yerel gömülüştür olsun.

1. $x \in F$ için $\iota_P(x), P \in \mathbb{P}_F$ için P bileşeni x , diğer bileşenleri sıfır olan adeldir.
2. $w \in \Omega_F$ weil diferansiyeli için $w_P : F \rightarrow K, w_P(x) := w(\iota_P(x))$ ile tanımlanan doğrusal dönüşüme w nin yerel bileşeni denir.

Lemma 2.18. $w \in \Omega_F$ ve $\alpha = (\alpha_P) \in A_F$ olsun. Sonlu sayıda P noktası için $w_P(\alpha_P) \neq 0$ ve

$$w(\alpha) = \sum_{P \in \mathbb{P}_F} w_P(\alpha_P) \quad \text{dir.}$$

İspat. Ayrıntılı ispat için referansımız Stichtenoth (2009) dir. □

Örnek 2.19. (Stichtenoth (2009)) $F = K(x)$ rasyonel fonksiyon cismi ve P_∞ , x elemanının kutbu olsun. Bu durumda,

1. $-2P_\infty$ kanonik bölendir.
2. Öyle tek türlü belirli $(\eta) = -2P_\infty$ ile $\eta \in \Omega_{K(x)}$ Weil diferansiyeli vardır ki, $\eta_{P_\infty}(x^{-1}) = -1$ dir.
3. η Weil diferansiyelinin η_{P_∞} ve η_{P_a} yerel bileşenleri,

$$\eta_{P_\infty}((x-a)^n) = \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ -1, & n = -1 \end{cases}, \eta_{P_a}((x-a)^n) = \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ 1, & n = -1 \end{cases}$$

dir. Ayrıntılı bilgi için Stichtenoth (2009) ve Salvador (2009) kaynaklarına bakılması önerilir.

2.2. Nümerik Semigrup

Bu bölümde nümerik semigrup teorisinin temel kavramları ve temel özellikleri verilecektir. Nümerik semigrup hakkında ayrıntı için Rosales ve Garcia-Sanchez (2009) incelenebilir.

Aksi belirtilmedikçe, $\mathbb{N}$ ile pozitif tamsayılar kümesini, $\mathbb{N}_0$ ile $\mathbb{N} \cup \{0\}$ kümesini göstereceğiz.

Tanım 2.20. $H \subseteq \mathbb{N}_0$ bir monoid olmak üzere, $\mathbb{N}_0 \setminus H$ sonlu bir küme ise H kümesine nümerik semigrup denir.

$\mathbb{N}_0$, aşık bir nümerik semigruptur. $\mathbb{N}_0$ içinde A tarafından üretilen monoid $\langle A \rangle$ ile gösterilir. $A = \{n_1, n_2, \dots, n_r\} \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere, $\langle A \rangle = \{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_rx_r \mid x_1, x_2, \dots, x_r \in \mathbb{N}_0\}$ kümesinin nümerik semigrup olması için gerek ve yeter koşul $\text{obeb}(A) = 1$ olmasıdır (Rosales ve Garcia-Sanchez (2009)).

Tanım 2.21. H bir nümerik semigrup olsun. Bu durumda,

1. $\mathbb{N}_0 \setminus H$ kümesine H nin boşluklar kümesi denir ve $G(H)$ ile gösterilir.
2. $G(H)$ nin eleman sayısına H nin cinsi (genus) denir ve $g(H)$ ile gösterilir.
3. $G(H)$ nin en büyük elemanına H nin Frobenius sayısı denir ve $F(H)$ ile gösterilir.
4. H nin sıfırdan farklı en küçük elemanına H nin katlılığı (multiplicity) denir ve m_H ile gösterilir.
5. Her $n \in \mathbb{N}_0$ için $x+n \in H$ olacak şekilde en küçük x doğal sayısına H nin önderi (conductor) denir ve c_H ile gösterilir.
6. $0 \neq n \in H$ için,

$$Ap(H, n) = \{s \in H \mid s - n \notin H\}$$

kümesine H de n nin Apéry kümesi denir.

Aksi belirtilmedikçe, “ $\lfloor \cdot \rfloor$ ” sembolü, kümenin eleman sayısını gösterecektir.

Tanımdan kolayca görüleceği gibi $m_H = \min\{a \in H \mid a > 0\}$, $g(H) = |\mathbb{N}_0 \setminus H|$ ve $c_H = 1 + \max\{a \in G(H)\} = 1 + F(H)$ dir.

Bu çalışma boyunca $Ap(H, m_H) = Ap(H)$ ile gösterilecektir.

$Ap(H)$ kümesi $\mathbb{Z}$ nin $\text{mod } m_H$ ye göre oluşan denklik sınıflarının bir tam temsilci kümesidir ve buradan $|Ap(H)| = m_H$ dir. Ayrıca $Ap(H)$ nin tanımı gereği, $\mathbb{Z}$ nin $\text{mod } m_H$ ye göre oluşan denklik sınıflarından her birinin, H içindeki temsilcileri arasında en küçükleri $Ap(H)$ kümesinin elemanlarıdır.

Rosales ve Garcia-Sanchez (2009) dan, H nümerik semigrubu ve bu nümerik semigrubun cinsi, önderi, $Ap(H)$ üzerinden şu şekilde verilebilir:

1. $H = \{a + km_H \mid a \in Ap(H), k \geq 0\}$.
2. $g(H) = \frac{1}{m_H}(\sum_{a \in Ap(H)} a) - \frac{m_H-1}{2} = \sum_{a \in Ap(H)} (\lfloor \frac{a}{m_H} \rfloor)$.
3. $c_H = 1 + \max\{a \in Ap(H)\} - m_H$.

$A \subset H$ kümesi $\mathbb{Z}$ nin $\text{mod } m_H$ ye göre oluşan denklik sınıflarının bir tam temsilci kümesi ise,

$$A = Ap(H) \iff g(H) = \sum_{a \in A} (\lfloor \frac{a}{m_H} \rfloor) \quad (2.1)$$

elde edilir ve buradan açıkça görülür ki,

$$A \neq Ap(H) \iff g(H) < \sum_{a \in A} (\lfloor \frac{a}{m_H} \rfloor)$$

dir. H bir nümerik semigrup olmak üzere, $a \in H$ ise $F(H) - a \notin H$ olduğundan,

$$g(H) \geq \frac{F(H) + 1}{2}$$

olduğu kolayca görülür ve buradan $c_H \leq 2g(H)$ dir.

H bir nümerik semigrup ve $c_H = 2g(H)$ ise H nümerik semigrubu bir simetrik semigrup olarak adlandırılır.

Önerme 2.22. $a, b \in \mathbb{N}$ ve $obeb(a, b) = 1$ olsun.

1. $F(< a, b >) = (a-1)(b-1) - 1$.
2. $g(< a, b >) = \frac{(a-1)(b-1)}{2}$.

İspat. Ayrıntılı ispat için referansımız Rosales ve Garcia-Sanchez (2009) dir. $\square$

Örnek 2.23. $H = \langle 5, 7, 8 \rangle = \{0, 5, 7, 8, 10, 12, 13, \rightarrow\}$ kümesi bir nümerik semigrup-tur ve $m_H = 5$ tir. H nümerik semigrubunun Apéry kümesi $Ap(H) = \{0, 7, 8, 14, 16\}$ dir ve bu küme, $\mathbb{Z}$ nin $\text{mod } 5$ e göre oluşan denklik sınıflarının her birinin, H içinde uzanan temsilcileri arasında en küçükleridir. Apéry kümesi kullanılarak, $g(H) = \sum_{a \in Ap(H)} (\lfloor \frac{a}{5} \rfloor) = 7$ ve $F(H) = \max\{a \in Ap(H)\} - 5 = 11$ elde edilir.

2.3. Weierstrass Semigrup

Bu bölümde, F/K cebirsel fonksiyon cismi ve K, F içinde cebirsel kapalı kabul edilecektir.

Önerme 2.24. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $P \in \mathbb{P}_F$ için $n \geq 2g_F$ ise $(x)_\infty = nP$ olacak biçimde bir $x \in F$ vardır.

İspat. $n \geq 2g_F > 2g_F - 1$ olduğundan Teorem 2.15 ve Sonuç 2.11 den boy $\mathcal{L}(nP) = n \text{ der } P + 1 - g_F$ dir. Ayrıca benzer biçimde, $n - 1 \geq 2g_F - 1$ olduğundan boy $\mathcal{L}((n - 1)P) = (n - 1) \text{ der } P + 1 - g_F = (n \text{ der } P + 1 - g_F) - \text{der } P$ dir. Buradan görülebilir ki, $\mathcal{L}((n - 1)P) \subsetneq \mathcal{L}(nP)$ dir. O halde, öyle bir $x \in \mathcal{L}(nP) \setminus \mathcal{L}((n - 1)P)$ vardır ki $(x) \geq -nP$ ve $(x) \not\geq -(n - 1)P$ dir. Buradan $(x) = -nP$ ve böylece $(x)_\infty = nP$ elde edilir. $\square$

Tanım 2.25. $P \in \mathbb{P}_F$ için $n \geq 0$ olsun. $(x)_\infty = nP$ olacak biçimde bir $x \in F$ var ise n sayısına P noktasında bir kutup sayısı, aksi halde bir boşluk sayısı denir.

$P \in \mathbb{P}_F$ için $\mathcal{L}(0) \subseteq \mathcal{L}(P) \subseteq \mathcal{L}(2P) \subseteq \dots \subseteq \mathcal{L}((j - 1)P) \subseteq \mathcal{L}(jP) \subseteq \dots$ Riemann-Roch uzayları dizisinde $j \in \mathbb{N}$ sayısının P noktasında bir kutup sayısı olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{L}((j - 1)P) \subsetneq \mathcal{L}(jP)$ olmasıdır. $j \in \mathbb{N}$ sayısının P noktasında bir boşluk sayısı olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{L}((j - 1)P) = \mathcal{L}(jP)$ olmasıdır.

Teorem 2.26 (Weierstrass Boşluk Teoremi). F/K bir cebirsel fonksiyon cismi, $P \in \mathbb{P}_F$, der $P = 1$ ve $g_F > 0$ olsun. Bu durumda, F/K bir cebirsel fonksiyon cisminin P noktasında tam g_F tane boşluk sayısı vardır. Bu sayılar $i_1, i_2, \dots, i_{g_F}$ ise $0 < i_1 = 1$ ve $i_g \leq 2g_F - 1$ dir.

İspat. $P \in \mathbb{P}_F$ ve der $P = 1$ olsun. Önerme 2.24 den, P noktasının her boşluk sayısı $2g_F - 1$ sayısından küçüktür veya eşittir. 0 sayısı ise P noktasının kutbudur. i sayısının P noktasının bir boşluğu olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{L}((i - 1)P) = \mathcal{L}(iP)$ olmasıdır.

$K = \mathcal{L}(0) \subseteq \mathcal{L}(P) \subseteq \mathcal{L}(2P) \subseteq \dots \subseteq \mathcal{L}((2g_F - 1)P)$ vektör uzayı dizisini göz önüne alırsak, boy $\mathcal{L}(0) = 1$ ve Teorem 2.15 ve Sonuç 2.11 den boy $\mathcal{L}((2g_F - 1)P) = g$ dir. Her i için boy $\mathcal{L}(iP) \leq \text{boy } \mathcal{L}((i - 1)P) + 1$ dir. Böylece, $1 \leq i \leq 2g_F - 1$ için $\mathcal{L}((i - 1)P) \subsetneq \mathcal{L}(iP)$ olacak şekilde tam $g_F - 1$ tane $\mathcal{L}(iP)$ uzayı vardır. Ancak,

bu dizide $2g_F$ tane uzay ve 0 sayısı P noktasının kutbu olduğundan P noktasının boşluk sayısı g_F tanedir. Son olarak 1 sayısı P noktasının kutbu olamaz. Çünkü aksi halde, kutup sayıları toplama işlemi ile bir semigrup olduğundan her $n \in \mathbb{N}$, P noktasının kutbu olur ve bu durum $g_F > 0$ olması ile çelişir. $\square$

F/K bir cebirsel fonksiyon cismi olmak üzere, F/K nın sadece sonlu sayıda P noktası için kutup sayıları kümesi diğerlerinden farklıdır, bu noktalara Weierstrass noktaları denir (Stichtenoth (2009)).

Tanım 2.27. Bir F/K cebirsel fonksiyon cisminin herhangi bir $P \in \mathbb{P}_F$ noktası için

$$H(P) = \{i \in \mathbb{N}_0 \mid (x)_\infty = iP \text{ olacak şekilde } x \in F \text{ vardır}\}$$

kümesine, F/K nın P noktasındaki Weierstrass semigrubu denir.

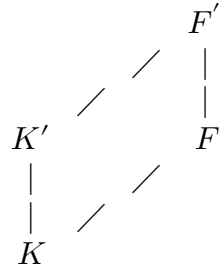
$H(P)$ nümerik semigruptur ve der $P = 1$ ise Weierstrass Boşluk teoreminden görülebilir ki, $H(P)$ nin boşluklarının sayısı g_F sayısına eşittir.

2.4. Cebirsel Fonksiyon Cismi Genişlemeleri

Bu bölümde, fonksiyon cismi genişlemeleri ve bu genişlemelerde değerlendirme halkaları, noktalar, bölenler gibi temel yapıların davranışları incelenecektir. K bir mükemmel cisim olmak üzere F/K cebirsel fonksiyon cismi ve K, F içinde cebirsel kapalı kabul edilecektir.

Tanım 2.28. F/K bir cebirsel fonksiyon cismi olmak üzere,

1. $F/K, F'/K'$ cebirsel fonksiyon cisimleri, $F \subseteq F'$ cebirsel cisim genişlemesi, $K \subseteq K', F'$ cisminin tüm sabitler cismi K' ve F cisminin tüm sabitler cismi K ise F'/K' ye F/K nın bir cebirsel fonksiyon cismi genişlemesi denir.



2. $F' = FK'$ ise, F'/K' cebirsel fonksiyon cismi genişlemesine F/K cebirsel fonksiyon cisminin bir sabitler cismi genişlemesi denir.
3. F'/F sonlu genişleme ise F'/K' cebirsel fonksiyon cismi genişlemesine, F/K nın bir sonlu cebirsel fonksiyon cismi genişlemesi denir.

$F'/K', F/K$ nın bir cebirsel fonksiyon cismi genişlemesi ise bu genişlemenin önemli bir kaç özelliğini aşağıdaki şekilde sıralayabiliriz.

1. K'/K cebirsel genişlemedir ve $F \cap K' = K$ dır.
2. F'/K' , F/K nın bir sonlu genişlemesi olması için gerek ve yeter koşul $[K' : K]$ nın sonlu olmasıdır.
3. $F_1 := FK'$ ise F_1/K' , F/K nın sabitler cismi genişlemesi ve F'/K' , F_1/K' nün sonlu genişlemesidir.

Bu özellikler, Stichtenoth (2009); Chevalley (1951) ve Salvador (2009) gibi kaynaklarda ayrıntılı olarak incelenmiş ve ispatları verilmiştir.

Tanım 2.29. F'/K' , F/K nın cebirsel fonksiyon cismi genişlemesi $P \in \mathbb{P}_F$ ve $P' \in \mathbb{P}_{F'}$ olsun. $P \subseteq P'$ ise $P' \in \mathbb{P}_{F'}$ noktasına $P \in \mathbb{P}_F$ noktasının bir genişlemesi denir ve $P' \mid P$ ile gösterilir.

Lemma 2.30. F'/K' , F/K nın bir cebirsel fonksiyon cismi genişlemesi, P ve P' sırasıyla $P' \mid P$ olacak şekilde F/K ve F'/K' nün noktaları ve $\mathcal{O}_P$ ve $\mathcal{O}_{P'}$ bu noktalara karşılık gelen değerlendirme halkaları, v_P ve $v_{P'}$ ise bu noktaların ayrık değerlendirmeleri olsun. Bu durumda,

1. $\mathcal{O}_P \subseteq \mathcal{O}_{P'}$ dır.
2. Her $z \in F$ için $v_{P'}(z) = e \cdot v_P(z)$ olacak şekilde $e \in \mathbb{N}$ vardır.

İspat. Ayrıntılı ispat için referansımız Stichtenoth (2009) dir. □

Yukarıdaki lemmada varlığı söylenen $F_P = \mathcal{O}_P/P$ kalan sınıfları cisminden $F'_{P'} = \mathcal{O}_{P'}/P'$ kalan sınıfları cismine $x \in \mathcal{O}_P$ iken $x(P) \mapsto x(P')$ ile tanımlanan bir kanonik gömme dönüşümü vardır. Böylece, $F_P, F'_{P'}$ nin bir altcismidir.

Tanım 2.31. Lemma 2.30 deki e sayısına, P' noktasının P üzerinde dallanma indeksi denir ve $e(P' \mid P)$ ile gösterilir. $e = 1$ ise $P' \mid P$ ye dallanmamış, $e > 1$ ise $P' \mid P$ ye dallanmış nokta denir. $f(P' \mid P) := [F'_{P'} : F_P]$ sayısına, P' noktasının P üzerinde göreceli derecesi denir.

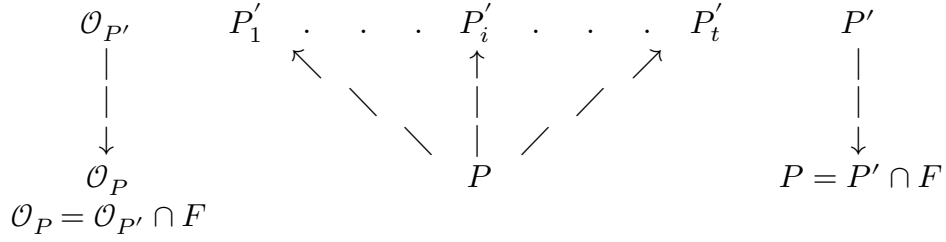
$f(P' \mid P)$ sonlu veya sonsuzdur. Ancak $e(P' \mid P)$ sayısı her zaman bir doğal sayıdır.

Teorem 2.32. Her $P' \in \mathbb{P}_{F'}$ için $P' \mid P$ olacak şekilde tam bir tane $P \in \mathbb{P}_F$ vardır ve bu nokta $P = P' \cap F$ formundadır. Diğer taraftan, her $P \in \mathbb{P}_F$ için $P' \mid P$ olacak şekilde en az bir en fazla sonlu sayıda $P' \in \mathbb{P}_{F'}$ vardır.

İspat. Ayrıntılı ispat için referansımız Stichtenoth (2009) dir. □

F'/K' , F/K nın cebirsel fonksiyon cismi genişlemesi, $P \in \mathbb{P}_F$, $1 \leq i \leq t$, $P', P'_i \in \mathbb{P}_{F'}$ noktalarına karşılık gelen değerlendirme halkaları $\mathcal{O}_P, \mathcal{O}_{P'}$ ve $\mathcal{O}_{P'_i}$ olsun.

Aşağıdaki diyagram, noktaların ve değerlendirme halkalarının bu genişlemedeki davranışlarını görselleştirir.



Lemma 2.33. $F''/K'', F'/K'$ nün ve $F'/K', F/K$ nın bir cebirsel fonksiyon cismi genişlemesi, $P'' \in \mathbb{P}_{F''}, P' \in \mathbb{P}_{F'}, P \in \mathbb{P}_F$ ve $P'' \mid P', P' \mid P$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} e(P'' \mid P) &= e(P'' \mid P') e(P' \mid P), \\ f(P'' \mid P) &= f(P'' \mid P') f(P' \mid P) \end{aligned}$$

dir.

İspat. Ayrıntılı ispat için referansımız Stichtenoth (2009) dir. □

Tanım 2.34. $F'/K', F/K$ nın bir cebirsel fonksiyon cismi genişlemesi olsun.

$P \in \mathbb{P}_F$ için $\sum_{P' \mid P} e(P' \mid P)$ P' bölenine P nin F'/F deki eşnormu (conorm) denir ve $Con_{F'/F}(P)$ ile gösterilir, buradaki toplam P noktasının her $P' \in \mathbb{P}_{F'}$ genişlemesini tarar.

Eşnorm fonksiyonu $Con_{F'/F}(\sum_{P \in \mathbb{P}_F} n_P P) = \sum_{P \in \mathbb{P}_F} n_P Con_{F'/F}(P)$ olarak düzenlenerek $\mathbb{D}_F$ den $\mathbb{D}_{F'}$ ye bir homomorfizme genişletilebilir: $F'' \supseteq F' \supseteq F$ fonksiyon cisimleri olsun. Her $D \in \mathbb{D}_F$ böleni için

$$Con_{F''/F}(D) = Con_{F''/F'}(Con_{F'/F}(D))$$

dir (Stichtenoth (2009)).

Önerme 2.35. $F'/K', F/K$ nın bir cebirsel genişlemesi olsun. Her $x \in F \setminus \{0\}$ için F/K içinde, sırasıyla, $(x)_0^F, (x)_\infty^F, (x)^F$ bölenleri x elemanının sıfır, kutup ve esas bölenleri olsun. $\mathbb{D}_{F'}$ grubunda, sırasıyla, x elemanının sıfır, kutup ve esas bölenleri,

$$\begin{aligned} Con_{F'/F}((x)_0^F) &= (x)_0^{F'} \\ Con_{F'/F}((x)_\infty^F) &= (x)_\infty^{F'} \\ Con_{F'/F}((x)^F) &= (x)^{F'} \end{aligned}$$

dir.

İspat. Ayrıntılı ispat için referansımız Stichtenoth (2009) dir. □

Teorem 2.36 (Temel Eşitlik). $F'/K', F/K$ nın bir sonlu cebirsel fonksiyon cismi genişlemesi, $P \in \mathbb{P}_F, P_1, P_2, \dots, P_m \in \mathbb{P}_{F'}$ ve $P_i | P, 1 \leq i \leq m$ olsun. Bu durumda,

$$\sum_{i=1}^m e(P_i | P) f(P_i | P) = [F' : F]$$

dir.

İspat. Ayrıntılı ispat için referansımız Stichtenoth (2009) dir. □

Sonuç 2.37. $F'/K', F/K$ nın bir sonlu cebirsel fonksiyon cismi genişlemesi ve $P \in \mathbb{P}_F$ olsun.

1. $|\{P' \in \mathbb{P}_{F'} : P' | P\}| \leq [F' : F]$.
2. $P' \in \mathbb{P}_{F'}, P' | P$ ise $e(P' | P) \leq [F' : F]$ ve $f(P' | P) \leq [F' : F]$ dir.
3. Her $D \in \mathbb{D}_F$ böleni için $\text{der}(Con_{F'/F}(D)) = \frac{[F':F]}{[K':K]}$ der D dir.

İspat. Ayrıntılı ispat için referansımız Stichtenoth (2009) dir. □

Tanım 2.38. $F'/K', F/K$ nın derecesi n olan bir cebirsel fonksiyon cismi genişlemesi ve $P \in \mathbb{P}_F$ olsun.

1. $P \in \mathbb{P}_F$ noktasının F' cisminde tam n tane genişlemesi var ise P noktasına F'/F genişlemesinde tamamen parçalanmıştır denir.
2. $P \in \mathbb{P}_F$ noktasının F' cisminde $e(P' | P) = n$ olacak şekilde tek bir genişlemesi var ise P noktasına F'/F genişlemesinde tümünden dallanmıştır denir.
3. $P \in \mathbb{P}_F, P' \in \mathbb{P}_{F'}$ ve $P' | P$ olmak üzere $e(P' | P) > 1$ ve K nın karakteristiği $e(P' | P)$ sayısını bölmez ise P' ye P nin bir uysal(tame) genişlemesi denir. $e(P' | P) > 1$ ve K nın karakteristiği $e(P' | P)$ sayısını bölüyor ise P' ye P nin bir vahşi(wild) genişlemesi denir.

Teorem 2.36 ile verilen temel eşitlikten aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

1. $P \in \mathbb{P}_F$ noktasının F'/F genişlemesinde tamamen parçalanması için gerek ve yeter koşul F' cisminin her $P' | P$ noktası için $e(P' | P) = f(P' | P) = 1$ olmasıdır.
2. $P \in \mathbb{P}_F$ noktası F'/F genişlemesinde tümünden dallanmış ise $P' | P$ olan tam bir tane $P' \in \mathbb{P}_{F'}$ noktası vardır.

Tanım 2.39. F/K bir cebirsel fonksiyon cismi olmak üzere,

1. R bir halka olsun. $K \subseteq R \subseteq F$ ve R bir cisim değilse, R ye F/K nin bir althalkası denir.
2. $\emptyset \neq S \subset \mathbb{P}_F$ olsun.
 $\mathcal{O}_S = \{z \in F : v_P(z) \geq 0, \text{ her } P \in S\}$
 kümesini alalım. $S \subset \mathbb{P}_F, \emptyset \neq S$ için $R \subseteq F$ halkası $R = \mathcal{O}_S$ ise R ye F/K nin holomorfik halkası denir.

Tanım 2.40. $R, F/K$ cebirsel fonksiyon cisminin bir althalkası olsun.

1. $f(z) = 0$ olacak şekilde monik, indirgenemez bir $f(X) \in R[X]$ varsa $z \in F$ elemanına R üzerinde integraldir denir.
2. $ic_F(R) = \{z \in F : z, R \text{ üzerinde integraldir}\}$ kümesine F içinde R nin integral kapanışı denir.
3. R nin kesirler cismi $F_0 \subseteq F$ olsun. $ic_{F_0}(R) = R$ ise R ye integral kapalıdır denir.

F/K nin bir holomorfik halkasının kesirler cismi F dir ve integral kapalıdır.

Teorem 2.41. F/K bir cebirsel fonksiyon cismi ve F'/F bir sonlu ayrılabilir genişleme olsun. $P \in \mathbb{P}_F$ için $ic_{F'}(\mathcal{O}_P) = \mathcal{O}'_P$ ise $\mathcal{O}'_P = \bigcap_{P'|P} \mathcal{O}_{P'}$ ve $\mathcal{O}'_P = \sum_{k=1}^n \mathcal{O}_P \cdot u_i$ olacak şekilde F'/F nin bir $u_1, \dots, u_n$ tabanı vardır.

İspat. Ayrıntılı ispat için referansımız Stichtenoth (2009) dir. □

Burada ki $u_1, \dots, u_n$ tabanına $\mathcal{O}_P$ üzerinde $\mathcal{O}'_P$ nin integral tabanı veya P noktası için F'/F nin bir yerel integral tabanı denir.

F' den F ye iz (trace) dönüşümünü $Tr_{F'/F}$ ile gösterelim. İz dönüşümü ile ilgili ayrıntılı bilgi için Hungerford (1974) kaynağına bakılması önerilir.

Tanım 2.42. F/K bir cebirsel fonksiyon cismi, F'/F bir sonlu ayrılabilir genişleme, K' F' içinde cebirsel kapalı, $P \in \mathbb{P}_F$ ve $ic_{F'}(\mathcal{O}_P) = \mathcal{O}'_P$ olsun.

$$C_P = \{z \in F' : Tr_{F'/F}(z \cdot \mathcal{O}'_P) \subseteq \mathcal{O}_P\}$$

kümesine $\mathcal{O}_P$ üzerinde tamamen modül kümesi denir.

Önerme 2.43. F/K bir cebirsel fonksiyon cismi, F'/F bir sonlu ayrılabilir genişleme, K', F' içinde cebirsel kapalı, $P \in \mathbb{P}_F$ ve $ic_{F'}(\mathcal{O}_P) = \mathcal{O}'_P$ olsun.

1. $C_P = t \cdot \mathcal{O}'_P$ olacak şekilde $t \in F'$ elemanı vardır ve her $P' \mid P$ için $v_{P'}(t) \leq 0$ dir. Her $t' \in F'$ ve her $P' \mid P$ için $C_P = t' \cdot \mathcal{O}'_P$ olması için gerek ve yeter koşul $v_{P'}(t) = v_{P'}(t')$ olmasıdır.

2. Sonlu sayıda $P \in \mathbb{P}_F$ haricinde her $P \in \mathbb{P}_F$ için $C_P = \mathcal{O}'_P$ dir.

İspat. Ayrıntılı ispat için referansımız Stichtenoth (2009) dir. □

Tanım 2.44. F/K bir cebirsel fonksiyon cismi, F'/F bir sonlu ayrılabilir genişleme, K' , F' içinde cebirsel kapalı, $P \in \mathbb{P}_F$, $ic_{F'}(\mathcal{O}_P) = \mathcal{O}'_P$ ve $C_P = t.\mathcal{O}'_P$ olsun. $P' \mid P$ için $-v_{P'}(t)$ sayısına P üzerine P' nün fark katsayısı (different exponent) denir ve $d(P' \mid P)$ ile gösterilir.

$$Diff(F'/F) = \sum_{P \in \mathbb{P}_F} \sum_{P' \mid P} d(P' \mid P) P'$$

bölenine F'/F nin farkı (different) denir.

F/K bir cebirsel fonksiyon cismi, F'/F bir sonlu ayrılabilir genişleme, K' , F' içinde cebirsel kapalı olsun. F' nün adel uzayını $A_{F'}$ ile gösterelim.

$$\mathbf{A}_{F'/F} := \{\alpha \in A_{F'} : P', Q' \in \mathbb{P}_{F'}, P' \cap F = Q' \cap F \text{ ise } \alpha_{P'} = \alpha_{Q'}\}$$

$A_{F'}$ nün F' üzerinden bir altuzayıdır. $Tr_{F'/F}, A_{F'/F}$ den A_F ye F üzerinden, yine $Tr_{F'/F}$ ile göstereceğimiz, bir doğrusal dönüşüme genişletilebilir. Her $\alpha \in \mathbf{A}_{F'/F}$ için $P' \mid P$, $P' \in \mathbb{P}_{F'}$ olmak üzere $(Tr_{F'/F}(\alpha))_P := Tr_{F'/F}(\alpha_{P'})$ dür.

Teorem 2.45. $w, F/K$ nın bir Weil diferansiyeli olsun. Bu durumda, her $\alpha \in \mathbf{A}_{F'/F}$ için,

$$Tr_{K'/K}(w'(\alpha)) = w(Tr_{F'/F}(\alpha))$$

koşulunu sağlayan F'/K' nün tek türlü belirli bir w' Weil diferansiyeli vardır. w' diferansiyeline w nın F'/F deki eşizi (cotrace) denir, $w' = Cotr_{F'/F}(w)$ ile gösterilir. $w \neq 0$ ve $(w) \in \mathbb{D}_F$, w in bir böleni ise

$$(Cotr_{F'/F}(w)) = Con_{F'/F}((w)) + Diff(F'/F)$$

dir. F'/F sabitler cismi genişlemesi ise, $(w') = Con_{F'/F}((w))$ dir.

İspat. Ayrıntılı ispat için referansımız Stichtenoth (2009) dir. □

Teorem 2.46 (Hurwitz-Cins Formülü). F'/K' , F/K nın bir sonlu ayrılabilir cebirsel fonksiyon cismi genişlemesi, g_F ve $g_{F'}$, sırasıyla F/K ve F'/K' nün cinsi olsun. Bu durumda,

$$2g_{F'} - 2 = \frac{[F' : F]}{[K' : K]} (2g_F - 2) + der Diff(F'/F)$$

dir.

İspat. Ayrıntılı ispat için referansımız Stichtenoth (2009) dir. $\square$

Teorem 2.47 (Dedekind Fark Teoremi). F'/K' , F/K nın bir sonlu ayrılabilir cebirsel fonksiyon cismi genişlemesi ve K' , F' içinde cebirsel kapalı olsun. $P \in \mathbb{P}_F$ olmak üzere her $P' \mid P$ için,

1. $d(P' \mid P) \geq e(P' \mid P) - 1$
2. $d(P' \mid P) = e(P' \mid P) - 1$ olması için gerek ve yeter koşul K nın karakteristiği $e(P' \mid P)$ sayısını bölmemesidir. Ayrıca K nın karakteristiği 0 ise $d(P' \mid P) = e(P' \mid P) - 1$ dir.

İspat. Ayrıntılı ispat için referansımız Stichtenoth (2009) dir. $\square$

Teorem 2.48. $F' = FK'$, F/K cebirsel fonksiyon cisminin bir sabitler cismi genişlemesi olsun.

1. F' nün tüm sabitler cismi K' dır.
2. F'/F dallanmamıştır. Yani her $P \in \mathbb{P}_F$ ve her $P' \mid P$ için $P' \mid P$ dallanmamıştır.
3. F'/K' ve F/K nın cinsleri aynıdır.
4. Her $A \in \mathbb{D}_F$ için $\text{der}_{F'/F}(A) = \text{der } A$ dir.
5. Her $A \in \mathbb{D}_F$ için $\text{boy } \mathcal{L}(\text{Con}_{F'/F}(A)) = \text{boy } \mathcal{L}(A)$ dir.
6. W , F/K nın kanonik böleni ise $\text{Con}_{F'/F}(W)$, F'/K' nün bir kanonik bölenidir.

İspat. Ayrıntılı ispat için referansımız Stichtenoth (2009) dir. $\square$

F'/F bir Galois genişlemesi ise F'/K' , F/K cebirsel fonksiyon cisminin bir Galois genişlemesidir.

Teorem 2.49. F'/K' , F/K cebirsel fonksiyon cisimleri olsun. F'/K' , F/K nın bir Galois genişlemesi, $P \in \mathbb{P}_F$ nin iki genişlemesi $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_{F'}$ ise $P_2 = f(P_1)$ olacak şekilde $f \in \text{Gal}(F'/F)$ vardır. Başka bir deyişle, Galois grubu P nin genişlemeleri üzerinde geçişlidir.

İspat. Ayrıntılı ispat için referansımız Stichtenoth (2009) dir. $\square$

Bu teoremin bir sonucu olarak, $P \in \mathbb{P}_F$ nin genişlemeleri $P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathbb{P}_{F'}$ ise $1 \leq i, j \leq n$ için $e(P_i \mid P) = e(P_j \mid P)$, $f(P_i \mid P) = f(P_j \mid P)$ ve $d(P_i \mid P) = d(P_j \mid P)$ olduğu görülebilir. Burada $e(P) = e(P_i \mid P)$ sayısına F'/F içinde P nin dallanma indeksi denir.

Kummer ve Artin-Schreier genişlemelerinde noktaların dallanma davranışı aşağıdaki teoremler ile verilir.

Teorem 2.50 (Kummer Genişlemeleri). F/K bir cebirsel fonksiyon cismi olsun. K , birimin $n - \text{inci}$ ilkel kökünü içersin, $n > 1$ ve n ile K nin karakteristiği aralarında asal olsun. $u \in F$; $d > 1$, $d \mid n$ ve her $w \in F$ için $u \neq w^d$ koşullarını sağlayan bir eleman olsun. $F' = F(y)$, $y^n = u$ ise F'/F genişlemesine, F cisminin bir Kummer genişlemesi denir. Bu durumda,

1. $\Phi(T) = T^n - u$, y elemanının F üzerinde minimal polinomudur. F'/F , derecesi $[F' : F] = n$ olan Galois genişlemesidir, F'/F nin Galois grubu devirlidir ve $\zeta \in K$ birimin $n - \text{inci}$ kökü olmak üzere, F'/F nin otomorfizmleri, $\sigma(y) = \zeta y$ ile verilir.
2. $P' \in \mathbb{P}_{F'}$, $P \in \mathbb{P}_F$ nin bir genişlemesi olsun. $r_P := \text{obeb}(n, v_P(u))$ için $e(P' | P) = \frac{n}{r_P}$ ve $d(P' | P) = \frac{n}{r_P} - 1$ dir.
3. K' , F' nün tüm sabitler cismi, g_F , F/K nün ve $g_{F'}$, F'/K' nün cinsi ise

$$g_{F'} = 1 + \frac{n}{[K' : K]} \left(g_F - 1 + \frac{1}{2} \sum_{P \in \mathbb{P}_F} \left(1 - \frac{r_P}{n} \right) \cdot \text{der } P \right)$$

dir.

İspat. Ayrıntılı ispat için referansımız Stichtenoth (2009) dir. □

Teorem 2.51 (Artin-Schreier Genişlemeleri). $p > 0$ asal sayısı için F/K , karakteristiği p olan bir cebirsel fonksiyon cismi ve her $w \in F$ için $u \neq w^p - w$ koşulunu sağlayan bir $u \in F$ elemanı olsun. $F' = F(y)$, $y^p - y = u$ ise F'/F genişlemesine F nin bir Artin Schreier genişlemesi denir. Her $P \in \mathbb{P}_F$ için,

$$m_p := \begin{cases} m, & z \in F \text{ var öyle ki } v_p(u - (z^p - z)) = -m < 0, m \not\equiv 0 \pmod{p}, \\ -1, & z \in F \text{ var öyle ki } v_p(u - (z^p - z)) \geq 0, \end{cases}$$

olmak üzere,

1. F'/F , derecesi p olan bir devirli Galois genişlemesidir. $v = 0, 1, \dots, p-1$ için $\sigma(y) = y + v$, F'/F nin bir otomorfizmidir.
2. P noktasının F'/F genişlemesinde dallanmamış olması için gerek ve yeter koşul $m_p = -1$ olmasıdır.
3. P noktasının F'/F genişlemesinde tümünden dallanmış olması için gerek ve yeter koşul $m_p > 0$ olmasıdır. P noktasının tek genişlemesi $P' \in \mathbb{P}_{F'}$ olsun. Bu durumda, $d(P' | P) = (p-1)(m_p + 1)$ dir.

4. En az bir $Q \in \mathbb{P}_F$ noktası için $m_Q > 0$ ise K, F' cisminde cebirsel kapalıdır ve

$$g_{F'} = p \cdot g_F + \frac{p-1}{2} \left(-2 + \sum_{P \in \mathbb{P}_F} (m_P + 1) \text{ der } P \right)$$

dir.

İspat. Ayrıntılı ispat için referansımız Stichtenoth (2009) dir. □

Tanım 2.52. F'/F bir Galois genişlemesi ve $G = \text{Gal}(F'/F)$ olsun. $P \in \mathbb{P}_F$ nin bir genişlemesi $P' \in \mathbb{P}_{F'}$ olmak üzere, her $i \geq -1$ için,

$$G_i(P' | P) = \{\sigma \in G \mid v_{P'}(\sigma(z) - z) \geq i + 1, \forall z \in \mathcal{O}_{P'}\}$$

kümesine $P' | P$ nin i -inci dallanma grubu denir ve $G_i = G_i(P' | P)$ ile gösterilir. G_i grubunun G nin bir altgrubu olduğu kolayca görülebilir.

Önerme 2.53. F'/F bir Galois genişlemesi ve $P \in \mathbb{P}_F$ nin bir genişlemesi $P' \in \mathbb{P}_{F'}$ olmak üzere,

1. $|G_0| = e(P' | P)$
2. $\sigma \in G_0, i \geq 0, t \in P'$ ve $v_{P'}(t) = 1$ ise

$$\sigma \in G_i \iff v_{P'}(\sigma(t) - t) \geq i + 1$$

dir.

İspat. Ayrıntılı ispat için referansımız Stichtenoth (2009) dir. □

Teorem 2.54 (Hilbert Fark Formülü). F'/F bir Galois genişlemesi ve $P \in \mathbb{P}_F$ nin bir genişlemesi $P' \in \mathbb{P}_{F'}$ olmak üzere,

$$d(P' | P) = \sum_{i=0}^{\infty} (|G_i(P' | P)| - 1)$$

dir.

İspat. Ayrıntılı ispat için referansımız Stichtenoth (2009) dir. □

Fonksiyon cisimlerinin bileşiminde (composite) dallanmayı anlamak için genellikle Abhyankar lemmasından yardım alırız.

Teorem 2.55 (Abhyankar Lemması). F'/F bir sonlu ayrılabilir cebirsel fonksiyon cismi genişlemesi olsun. $F \subseteq F_1, F_2 \subseteq F'$ ara cisimleri ile $F' = F_1 F_2$ olduğunu kabul ede-

lim. $P' \in \mathbb{P}_{F'}$, $P \in \mathbb{P}_F$ noktasının bir genişlemesi ve $i = 1, 2$ için $P_i := P' \cap F_i$ olsun. $P_1 \mid P$ ve $P_2 \mid P$ genişlemelerinden en az birinin uysal (tame) olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$e(P' \mid P) = \text{oket} \{e(P_1 \mid P), e(P_2 \mid P)\}$$

dir.

İspat. Ayrıntılı ispat için referansımız Stichtenoth (2009) dir. □

Sonuç 2.56. F'/F bir sonlu ayrılabilir cebirsel fonksiyon cismi genişlemesi, $F' = F_1 F_2$, $F \subseteq F_1, F_2 \subseteq F'$, $P \in \mathbb{P}_F$ olmak üzere,

1. P noktası F_1/F ve F_2/F içinde dallanmamışsa, P noktası F'/F içinde de dallanmamıştır.
2. P noktası F_1/F içinde tamamen parçalanmış bir nokta ise, P noktasının her genişlemesi $Q \in \mathbb{P}_{F_2}$, F'/F_2 içinde tamamen parçalanmıştır.

İspat. Ayrıntılı ispat için referansımız Stichtenoth (2009) dir. □

2.5. Cebirsel Fonksiyon Cisminin Diferansiyeli

Bu bölümde, türev ve diferansiyel kavramlarını açıklayıp, bu kavramların Weil diferansiyeli ile olan ilişkileri incelenecektir. K bir mükemmel cisim olmak üzere, F/K cebirsel fonksiyon cismi ve K, F içinde cebirsel kapalı kabul edilecektir.

Tanım 2.57. M, F üzerinde bir modül ve $\delta : F \rightarrow M$ fonksiyonu K üzerinde bir doğrusal dönüşüm olsun. Her $u, v \in F$ için

$$\delta(u.v) = u.\delta(v) + v.\delta(u)$$

eşitliği sağlanırsa δ fonksiyonuna F/K cebirsel fonksiyon cisminin türevi (derivation) denir.

Lemma 2.58. $x, F/K$ nın bir ayrılabilir elemanı ve $\delta_1, \delta_2 : F \rightarrow M, F/K$ nın iki türevi olsun. $\delta_1(x) = \delta_2(x)$ ise $\delta_1 = \delta_2$ dir.

İspat. Ayrıntılı ispat için referansımız Stichtenoth (2009) dir. □

Tanım 2.59. $x, F/K$ nın bir ayrılabilir elemanı olsun. F/K nın öyle tek türlü belirli δ_x fonksiyonu vardır ki $\delta_x : F \rightarrow F$ ve $\delta_x(x) = 1$ dir. Bu fonksiyona x e göre türev denir. $\text{Der}_F = \{\eta : F \rightarrow F \mid \eta, F/K \text{ nın türevi}\}$ kümesine F/K nın türev modülü denir.

Lemma 2.60. $x, F/K$ nın bir ayrılabilir elemanı olsun.

1. Her $\eta \in \text{Der}_F$ için $\eta = \eta(x) \cdot \delta_x$ dir.
2. $y, F/K$ nın bir ayrılabilir elemanı ise $\delta_y = \delta_y(x) \cdot \delta_x$ dir.

İspat. Ayrıntılı ispat için referansımız Stichtenoth (2009) dir. □

Tanım 2.61. $A = \{(u, x) \in F \times F \mid x \text{ ayrılabilir eleman}\}$ kümesi üzerinde $\sim$ bağıntısını tanımlayalım:

$$(u, x) \sim (v, y) \iff v = u \cdot \delta_y(x)$$

Açıkça görülebilir ki $\sim$ bağıntısı A kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

1. A nın $\sim$ denklik bağıntısına göre oluşan denklik sınıflarına F/K nın diferansiyeli denir ve bu denklik sınıfının bir temsilcisi $(u, x) \in A$ nın oluşturduğu diferansiyel $u \, dx$ ile gösterilir.

$\Delta_F = \{u \, dx \mid u \in F, x \text{ ayrılabilir eleman}\}$ kümesi F/K nın bütün diferansiyellerinin kümesidir.

$w \in F$ ve $z, F/K$ nın bir ayrılabilir elemanı ise $u \, dx = (u \cdot \delta_z(x)) \, dz$ ve $v \, dy = (v \cdot \delta_z(y)) \, dz$ dir. $u \, dx + v \, dy = (u \cdot \delta_z(x) + v \cdot \delta_z(y)) \, dz$, $w(u \, dx) = (wu) \, dx$ işlemleri ile Δ_F , F cismi üzerinde vektör uzayıdır.

2. $t \in F, F/K$ nın ayrılabilir elemanı değilse $dt = 0$ olacak şekilde

$$\begin{aligned} d : F &\rightarrow \Delta_F \\ t &\rightarrow d(t) = dt \end{aligned}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. (Δ_F, d) çiftine F/K cebirsel fonksiyon cisminin diferansiyel modülü denir.

3. Örnek 2.19 de verilen $(\eta) = -2P_\infty$, $\eta \in \Omega_{K(x)}$ kullanılarak $x \in F \setminus K$, F/K nın bir ayrılabilir elemanı olmak üzere

$$\begin{aligned} \delta : F &\rightarrow \Omega_F \\ x &\rightarrow \delta(x) = \text{cotr}_{F/K(x)}(\eta) \end{aligned}$$

fonksiyonunu tanımlayabiliriz. $x \in F, F/K$ nın bir ayrılabilir elemanı değilse $\delta(x) = 0$ dir ve her Weil diferansiyeli $w \in \Omega_F$ için $w = z \cdot \delta(x)$, $z \in F$ şeklinde yazılabilir.

Teorem 2.62. F/K bir cebirsel fonksiyon cismi ve $x \in F, F/K$ nın bir ayrılabilir elemanı olsun.

1. Yukarıda tanımladığımız d ve δ fonksiyonları F/K nın türevleridir.
- 2.

$$\begin{aligned} f : \Delta_F &\rightarrow \Omega_F \\ z \, dx &\rightarrow z \, \delta(x) \end{aligned}$$

fonksiyonu Δ_F diferansiyel uzayının, Ω_F Weil diferansiyeli uzayı üzerine bir izomorfizmdir ve $f \circ d = \delta$ dir.

İspat. Ayrıntılı ispat için referansımız Stichtenoth (2009) dir. □

Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak Δ_F diferansiyel uzayını, Weil diferansiyel uzayı Ω_F ile özdeşleştirebiliriz ve Teorem 2.45 yı kullanarak $w = z dx \neq 0$ diferansiyelinin bölünü,

$$\begin{aligned} (z dx) &= (z\delta(x)) = (z) + (\delta(x)) = (z) + (\text{cotr}_{F/K(x)}(-2P_\infty)) \\ &= (z) + \text{Con}_{F/K(x)}(-2P_\infty) + \text{Diff}(F/K(x)) \\ &= (z) + -2(x)_\infty + \text{Diff}(F/K(x)) \end{aligned}$$

elde edilir. Özel olarak,

$$(dx) = -2(x)_\infty + \text{Diff}(F/K(x)) \tag{2.2}$$

dir.

3. MATERYAL VE METOD

Bu bölümde cebirsel fonksiyon cisimlerinin iki örneği olan Hermityen ve Suzuki cebirsel fonksiyon cisimlerinin cinsleri, rasyonel noktaları, diferansiyelleri incelenecektir. Başka cebirsel fonksiyon cisim örnekleri için Hirschfeld vd. (2008) ve Stichtenoth (2009) kaynaklarına bakılması önerilir.

Tanım 3.1. $\mathbb{F}_q$ bir sonlu cisim, $F/\mathbb{F}_q$ cinsi g_F olan bir cebirsel fonksiyon cismi ve $F/\mathbb{F}_q$ nun rasyonel nokta sayısı $N(F)$ olmak üzere,

$$N(F) = q + 1 + 2g_F q^{1/2}$$

ise $F/\mathbb{F}_q$ cebirsel fonksiyon cismine maksimaldir denir.

3.1. Hermityen Fonksiyon Cismi

Tanım 3.2. p asal sayı, $q = p^s > 1$ ve $H = \mathbb{F}_{q^2}(x, y)$ olmak üzere,

$$y^q + y = x^{q+1}$$

denklemlerle tanımlanmış $H/\mathbb{F}_{q^2}$ cebirsel fonksiyon cismine Hermityen (Hermitian) fonksiyon cismi denir.

Önerme 3.3. p asal sayı, $q = p^s > 1$, $0 \neq a \in K$ ve $F = K(x, y)$ olmak üzere, $y^q + ay = f(x) \in K[x]$ denklemlerle tanımlanmış F/K , karakteristiği p olan bir fonksiyon cismi olsun. der $f = m > 0$, $\text{obeb}(m, p) = 1$ ve $T^q + aT$ denkleminin kökleri K cisminin elemanları olmak üzere,

1. $[F : K(x)] = q$ ve F nin tüm sabitler cismi K dir.
2. $F/K(x)$ Galois genişlemesidir. $A = \{\gamma \in K \mid \gamma^q + a\gamma = 0\}$ kümesi K nin bir toplamsal alt grubudur ve mertebesi q dur. Her $\sigma \in \text{Gal}(F/K(x))$ için tek türlü belirli $\gamma \in A$ vardır ve $\sigma(y) = y + \gamma$ dir. Ayrıca

$$\begin{array}{ccc} g : & \text{Gal}(F/K(x)) & \rightarrow A \\ & \sigma & \rightarrow \gamma \end{array}$$

bir grup izomorfizmidir.

3. $P_\infty \in \mathbb{P}_{K(x)}$ in tek genişlemesi $Q_\infty \in \mathbb{P}_F$ dir. $Q_\infty \mid P_\infty$ tümünden dallanmıştır ve der $Q_\infty = 1$ dir. Ayrıca $K(x)$ in $F/K(x)$ içinde, P_∞ dışında dallanmış noktası yoktur.
4. F/K nin cinsi g_F olmak üzere $g_F = \frac{(q-1)(m-1)}{2}$ dir.
5. dx diferansiyelinin böleni $(dx) = ((q-1)(m-1) - 2)Q_\infty = (2g_F - 2)Q_\infty$ dir.
6. x ve y nin kutup bölenleri $(x)_\infty = qQ_\infty$ ve $(y)_\infty = mQ_\infty$ dir.
7. Her $r \geq 0$ için $x^i y^j$ elemanları $\mathcal{L}(rQ_\infty)$ uzayının bir tabanıdır, burada $qi + mj \leq r$, $i \geq 0$, $0 \leq j \leq q-1$ dir.

8. Her $\alpha \in K$ için aşağıdaki durumlardan biri geçerlidir:
- (a) $T^q + aT = f(\alpha)$ denkleminin K içinde q farklı kökü vardır.
 - (b) $T^q + aT = f(\alpha)$ denkleminin K içinde hiç kökü yoktur.
 - (a) durumunda, her $\beta, \beta^q + a\beta = f(\alpha)$ için $P_{\alpha, \beta} \mid P_\alpha$ olacak şekilde tek bir $P_{\alpha, \beta} \in \mathbb{P}_F$ genişlemesi vardır ve buradan $P_\alpha \in \mathbb{P}_{K(x)}$ için derecesi 1 olan q farklı genişlemesi vardır.
 - (b) durumunda, $P_\alpha \in \mathbb{P}_{K(x)}$ in bütün genişlemelerinin derecesi 1 den büyüktür.

İspat. Ayrıntılı ispat için referansımız Stichtenoth (2009) dir. □

Lemma 3.4. $H/\mathbb{F}_{q^2}$, Tanım 3.2 ile verilen Hermityen fonksiyon cismi ve bu fonksiyon cisminin rasyonel nokta sayısı $N(H)$ olmak üzere,

1. $H/\mathbb{F}_{q^2}$ nin cinsi $g_H = \frac{q(q-1)}{2}$ dir.
2. $H/\mathbb{F}_{q^2}$ nin $q^3 + 1$ rasyonel noktası vardır.
3. $H/\mathbb{F}_{q^2}$ bir maksimal fonksiyon cismidir.
4. $P_\infty \in \mathbb{P}_{\mathbb{F}_{q^2}(x)}$ in tek genişlemesi $Q_\infty \in \mathbb{P}_H$ dir ve $Q_\infty \mid P_\infty$ tümünden dallanmıştır. Ayrıca dx diferansiyelinin böleni $(dx) = (q(q-1) - 2)Q_\infty$ dur.
5. Her $r \geq 0$ için $x^i y^j$ elemanları $\mathcal{L}(rQ_\infty)$ uzayının bir tabanıdır, burada $qi + (q+1)j \leq r, i \geq 0, 0 \leq j \leq q-1$ dir.
6. $H/\mathbb{F}_{q^2}$ nin $Q_\infty \in \mathbb{P}_H$ noktasındaki Weierstrass semigrubu $H(Q_\infty) = \langle q, q+1 \rangle$ dir ve $H(Q_\infty)$ simetriktir.

İspat. 1, 4 ve 5 doğrudan Önerme 3.3 ün bir özel halidir.

2. Önerme 3.3 den $P_\infty \in \mathbb{P}_{\mathbb{F}_{q^2}(x)}$ in tek genişlemesi $Q_\infty \in \mathbb{P}_H$ ve der $Q_\infty = 1$ dir. $H/\mathbb{F}_{q^2}$ nin derecesi 1 olan diğer genişlemeleri ise $P_\alpha = P_{x-\alpha} \in \mathbb{P}_{\mathbb{F}_{q^2}(x)}$ noktalarının genişlemeleridir. $\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q$ sonlu ayrılabilir genişleme olduğundan,

$$\begin{array}{ccc} Tr : \mathbb{F}_{q^2} & \rightarrow & \mathbb{F}_q \\ \beta & \rightarrow & \beta^q + \beta \end{array}$$

fonksiyonu örtendir. O halde $\alpha^{q+1} \in \mathbb{F}_q$ ise $Tr(\beta) = \beta^q + \beta = \alpha^{q+1}$ olacak şekilde $\beta \in \mathbb{F}_{q^2}$ vardır ve buradan $\alpha^{q+1} \in \mathbb{F}_q$ ise $T^q + T = \alpha^{q+1}$ denkleminin $\mathbb{F}_{q^2}$ içinde bir kökü vardır. Aksine $T^q + T = \alpha^{q+1}$ denkleminin $\mathbb{F}_{q^2}$ içinde bir kökü γ olsun. O halde $Tr(\gamma) = \gamma^q + \gamma = \alpha^{q+1}$ ve buradan $\alpha^{q+1} \in \mathbb{F}_q$ olur. Yani $\alpha^{q+1} \in \mathbb{F}_q \iff T^q + T = \alpha^{q+1}$ denkleminin $\mathbb{F}_{q^2}$ içinde bir kökü vardır. $\mathbb{F}_{q^2}^*$ bir devirli gruptur ve mertebesi $q^2 - 1 = (q+1)(q-1)$ dir. $\mathbb{F}_q^*, \mathbb{F}_{q^2}^*$ in bir devirli altgrubu olduğundan $\alpha^{q+1} \in \mathbb{F}_q \iff \alpha \in \mathbb{F}_{q^2}$ dir. O halde der $Q_\infty = 1$ ve her $\alpha \in \mathbb{F}_{q^2}$, $T^q + T = \alpha^{q+1}$ denkleminin kökü olduğunda Önerme 3.3 den $H/\mathbb{F}_{q^2}$ nin $q^3 + 1$ rasyonel noktası vardır.

3. $H/\mathbb{F}_{q^2}$ nin cinsi $g_H = \frac{q(q-1)}{2}$ olduğundan $N(H) = q^2 + 1 + 2g_H q = q^3 + 1$ dir ve buradan $H/\mathbb{F}_{q^2}$ bir maksimal fonksiyon cismidir.

6. $Obeb(q, q+1) = 1$ olduğundan $A = \langle q, q+1 \rangle$ kümesi bir nümerik semigrup-tur ve boşluk sayısı (cinsi) $g(A) = \frac{q(q-1)}{2}$ dir. Önerme 3.3 den x ve y nin kutup bölenleri $(x)_\infty = qQ_\infty$ ve $(y)_\infty = (q+1)Q_\infty$ olduğundan $q \in H(Q_\infty)$, $q+1 \in H(Q_\infty)$ ve buradan $A \subseteq H(Q_\infty)$ olur. Weierstrass boşluk teoreminden $H(Q_\infty)$ un $\frac{q(q-1)}{2}$ boşluğu vardır ve buradan $A = H(Q_\infty) = \langle q, q+1 \rangle$ elde edilir.

$H(Q_\infty)$ Weierstrass semigrubunun en büyük boşluk sayısı (Frobenius sayısı), $F(H(Q_\infty)) = F_H = (q-1)q - 1$ dir. $2g_H - 1 = (q-1)q - 1 = F_H$ olduğundan $H(Q_\infty)$ nümerik semigrubu simetrik semigruptur. $\square$

Örnek 3.5. Lemma 3.4 de $q = 3$ alınırsa, $H(Q_\infty) = \langle 3, 4 \rangle = \{0, 3, 4, 6, 8, 9, 11, \rightarrow\}$ nümerik semigrubu elde edilir ve $H(Q_\infty)$ nümerik semigrubunun boşluk kümesi $\{1, 2, 5\}$ dir. Aynı şekilde $q = 4$ alınırsa, nümerik semigrubunun boşluk kümesinin $\{1, 2, 3, 6, 7, 11\}$ olduğu görülebilir.

Hermityen fonksiyon cisminin otomorfizm grubu, rasyonel noktalar üzerinde geçişli etki eder. Bu nedenle, herhangi bir rasyonel $Q \in \mathbb{P}_H$ noktasındaki Weierstrass semigrubu $H(Q)$ ise $H(Q) = H(Q_\infty)$ dur.

3.2. Suzuki Fonksiyon Cismi

Tanım 3.6. $n \geq 1$, $q_0 = 2^n$, $q = 2q_0^2$ ve $S = \mathbb{F}_q(x, y)$ olmak üzere,

$$y^q + y = x^{q_0}(x^q + x)$$

denklemlerle tanımlanmış $S/\mathbb{F}_q$ cebirsel fonksiyon cismine Suzuki fonksiyon cismi denir.

$S/\mathbb{F}_q(x)$ içinde $P_\infty \in \mathbb{P}_{\mathbb{F}_q(x)}$ noktasının en az bir en fazla sonlu sayıda genişlemesi olduğundan $Q_\infty \mid P_\infty$ olacak şekilde $Q_\infty \in \mathbb{P}_S$ vardır. $e(Q_\infty \mid P_\infty) = t$ olsun ve buradan $v_{Q_\infty}(x) = -t < 0$ olur. S üzerinde $v = y^{2q_0} + x^{2q_0+1}$ ve $w = y^{2q_0}x + v^{2q_0}$ fonksiyonları tanımlanırsa,

$$v^{q_0} = y + x^{q_0+1}, \quad w^{q_0} = v + yx^{q_0}$$

ilişkisi elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} v_{Q_\infty}(y) &= \frac{q_0 + q}{q} v_{Q_\infty}(x) = -t(1 + \frac{1}{2q_0}) \\ v_{Q_\infty}(v) &= \frac{q_0 + 1}{q_0} v_{Q_\infty}(x) = -t(1 + \frac{1}{q_0}) \\ v_{Q_\infty}(w) &= \frac{2q_0 v_{Q_\infty}(y) + q v_{Q_\infty}(x)}{q} = -\frac{t}{q}(1 + 2q_0 + q) \end{aligned}$$

elde edilir. $v_{Q_\infty}(w) \in \mathbb{Z}$ olduğundan $q \leq t$ dir. $x \in S = \mathbb{F}_q(x, y) \setminus \mathbb{F}_q$ için $(x)_\infty = [\mathbb{F}_q(x, y) : \mathbb{F}_q(x)]$ olduğundan $t \leq [\mathbb{F}_q(x, y) : \mathbb{F}_q(x)] \leq q$ dur ve buradan

$t = q$ elde edilir. O halde, $e(Q_\infty \mid P_\infty) = q$, $P_\infty \in \mathbb{P}_{\mathbb{F}_q(x)}$ tümten dallanmıştır ve $[\mathbb{F}_q(x, y) : \mathbb{F}_q(x)] = q$ dur. Ayrıca x, y, v, w fonksiyonlarının kutup bölenleri,

$$\begin{aligned} (x)_\infty &= qQ_\infty \\ (y)_\infty &= (q + q_0)Q_\infty \\ (v)_\infty &= (q + 2q_0)Q_\infty \\ (w)_\infty &= (q + 2q_0 + 1)Q_\infty \end{aligned} \tag{3.1}$$

biçiminde elde edilir.

Lemma 3.7. $S/\mathbb{F}_q$ Suzuki fonksiyon cisminin cinsi $g_S = q_0(q - 1)$ ve dx diferansiyelinin böleni $(dx)_S = (2q_0(q - 1) - 2)Q_\infty$ dur.

İspat. $f(T) = T^q + T - x^{q_0}(x^q + x)$ olsun. $f(T)$ nin kökleri $y + b$, $b \in \mathbb{F}_q$ olduğu rahatça görülebilir. Ayrıca $y, \mathbb{F}_q(x)$ üzerinde ayrılabilir eleman ve $Par(f, \mathbb{F}_q(x)) = \mathbb{F}_q(x, y)$ olduğundan $\mathbb{F}_q(x, y)/\mathbb{F}_q(x)$ bir Galois genişlemesidir ve

$$[\mathbb{F}_q(x, y) : \mathbb{F}_q(x)] = |Gal(\mathbb{F}_q(x, y)/\mathbb{F}_q(x))| = q$$

dur. O halde $\sigma \in Gal(\mathbb{F}_q(x, y)/\mathbb{F}_q(x))$ ise $\sigma(y) = y + b$, $b \in \mathbb{F}_q$ şeklindedir. $u = \frac{v}{w}$ ise $v_{Q_\infty}(v) - v_{Q_\infty}(w) = 1$ dir ve buradan u, Q_∞ un bir asal elemanıdır. Şimdi Önerme 2.53 ü kullanarak Q_∞ un i -inci dallanma gruplarını bulalım: $\sigma \in Gal(\mathbb{F}_q(x, y)/\mathbb{F}_q(x))$ ve $b \neq 0$ için,

$$\sigma(v) = (y + b)^{2q_0} + (x)^{2q_0+1} = y^{2q_0} + b^{2q_0} + x^{2q_0+1} = v + b^{2q_0}$$

ve aynı şekilde

$$\sigma(w) = w + b^{2q_0}x + b^2$$

elde edilir. Buradan $v_{Q_\infty}(\sigma(u) - u) = 2q_0 + 2$, Önerme 2.53 den $i = 0, 1, \dots, 2q_0 + 1$ için $|G_i| = q$ elde edilir ve $i \geq 2q_0 + 2$ ise G_i grupları yalnızca birimden oluşur. Yani $i \geq 2q_0 + 2$ ise $|G_i| = 1$ dir. Teorem 2.54 den,

$$\begin{aligned} d(Q_\infty \mid P_\infty) &= \sum_{i=0}^{\infty} |G_i(Q_\infty \mid P_\infty)| - 1 \\ &= \sum_{i=0}^{2q_0+1} |G_i(Q_\infty \mid P_\infty)| - 1 \\ &= (2q_0 + 2)(q - 1) \end{aligned}$$

dir. $\mathbb{F}_q(x)/\mathbb{F}_q$ fonksiyon cisminin cinsi $g = 0$ olduğundan, Teorem 2.46 dan,

$$\begin{aligned} 2g_S - 2 &= [\mathbb{F}_q(x, y) : \mathbb{F}_q(x)](2g - 2) + \text{derDiff}(\mathbb{F}_q(x, y)/\mathbb{F}_q(x)) \\ &= -2q + d(Q_\infty | P_\infty) \\ &= -2q + (2q_0 + 2)(q - 1) \end{aligned}$$

ve buradan $g_S = q_0(q - 1)$ elde edilir. Ayrıca, eşitlik (2.2) den

$$(dx)_S = -2qQ_\infty + d(Q_\infty | P_\infty) Q_\infty = (2q_0(q - 1) - 2)Q_\infty$$

elde edilir. □

Lemma 3.8. $S/\mathbb{F}_q$ Suzuki fonksiyon cisminin $Q_\infty \in \mathbb{P}_S$ noktasındaki Weierstrass semigrubu $H(Q_\infty) = \langle q, q + q_0, q + 2q_0, q + 2q_0 + 1 \rangle$ dir ve ayrıca $H(Q_\infty)$ bir simetrik semigruptur.

İspat. Weierstrass boşluk teoreminden $H(Q_\infty)$ un cinsi $g_S = g(H(Q_\infty)) = q_0(q - 1)$ dır. $H = \langle q, q + q_0, q + 2q_0, q + 2q_0 + 1 \rangle$ olsun. H bir nümerik semigruptur ve (3.1) eşitliklerinden $q, q + q_0, q + 2q_0, q + 2q_0 + 1 \in H(Q_\infty)$ dur. Buradan $H \subseteq H(Q_\infty)$ ve $g(H) \geq g_S = q_0(q - 1)$ elde edilir. $g(H) = g_S$ olduğunu gösterirsek ispat biter ve bunu göstermek için Apéry kümesini kullanacağız.

Öncelikle $A = \{a(q + q_0) + b(q + 2q_0) + c(q + 2q_0 + 1) : 0 \leq a \leq 1, 0 \leq b, c \leq q_0 - 1\}$ kümesinin $\mathbb{Z} \pmod{q}$ ya göre bir tam temsilci sınıfı olduğunu gösterelim:

A nın tüm elemanları farklı olduğundan $|A| = 2q_0^2 = q$ dur. A nın herhangi iki farklı elemanın $\mathbb{Z} \pmod{q}$ da denk olmadığını gösterirsek iddiamızı kanıtlamış oluruz. $h, h' \in A$, $h = a(q + q_0) + b(q + 2q_0) + c(q + 2q_0 + 1)$, $h' = a'(q + q_0) + b'(q + 2q_0) + c'(q + 2q_0 + 1)$ ve $h \equiv h' \pmod{q}$ olsun. $q_0 | q$ olduğundan $h \equiv h' \pmod{q_0}$ ise $c \equiv c' \pmod{q_0}$ ve buradan $c = c'$ elde edilir. Benzer şekilde $2q_0 | q$ olduğundan $h \equiv h' \pmod{2q_0}$ ise $aq_0 \equiv a'q_0 \pmod{2q_0}$ ve buradan $a = a'$ elde edilir. $a = a', c = c'$ olduğundan $h \equiv h' \pmod{q}$ ise $b2q_0 \equiv b'2q_0 \pmod{q}$ ve buradan $b = b'$ dır ve buradan iddiamız kanıtlanmış olur.

Bağıntı (2.1) den $g(H) \leq \sum_{h \in A} \lfloor \frac{h}{q} \rfloor$ dır.

$$\begin{aligned} \sum_{h \in A} \lfloor \frac{h}{q} \rfloor &= \sum_{h \in A} \frac{h - h \pmod{q}}{q} = \frac{1}{q} \sum_{h \in A} h - \frac{1}{q} \sum_{r=0}^{q-1} r \\ &= \frac{1}{q} \sum_{a=0}^1 \sum_{b=0}^{q_0-1} \sum_{c=0}^{q_0-1} (a(q + q_0) + b(q + 2q_0) + c(q + 2q_0 + 1)) - \frac{q-1}{2} \\ &= \frac{1}{q} (q_0^2(q + q_0) + q_0^2(q_0 - 1)(q + 2q_0) + q_0^2(q_0 - 1)(q + 2q_0 + 1)) - \frac{q-1}{2} \\ &= g_S \end{aligned}$$

ve buradan $g(H) = g_S$ olduğundan $H = H(Q_\infty)$ elde edilir. Ayrıca (2.1) bağıntısından $Ap(H(Q_\infty)) = A$ olduğu rahatça görülebilir. $H(Q_\infty)$ un en büyük boşluk sayısı,

$$\begin{aligned} \max\{z \in A\} - q &= q + q_0 + (q_0 - 1)(q + 2q_0) + (q_0 - 1)(q + 2q_0 + 1) - q \\ &= 2qq_0 - 2q_0 - 1 \\ &= 2g_S - 1 \end{aligned}$$

dir ve buradan $H(Q_\infty)$ bir simetrik semigruptur. $\square$

$S/\mathbb{F}_q$ Suzuki fonksiyon cismi, her $\alpha \in \mathbb{F}_q$ için $P_\alpha = P_{x-\alpha} \in \mathbb{P}_{\mathbb{F}_q(x)}$ in $S/\mathbb{F}_q(x)$ içinde derecesi 1 olan q farklı genişlemesi olduğundan $q^2 + 1$ rasyonel noktaya sahiptir ve bunlar her $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_q$ için $\mathbb{P}_{\alpha, \beta} \in \mathbb{P}_S$ formundadır. Yani $x - \alpha \in \mathbb{P}_{\alpha, \beta}, y - \beta \in \mathbb{P}_{\alpha, \beta}$ dir.

$S/\mathbb{F}_q$ Suzuki fonksiyon cisminin herhangi bir rasyonel noktası $Q \in \mathbb{P}_S$ olsun. Q nun Weierstrass semigrubu $H(Q)$ ise $H(Q) = H(Q_\infty)$ dur. Çünkü Hansen ve Stichtenoth (1990) daki Önerme 3.2 den $S/\mathbb{F}_q$ Suzuki fonksiyon cisminin $\mathbb{F}_q$ rasyonel otomorfizmleri grubu, rasyonel noktalar üzerinde geçişli etki eder.

Suzuki fonksiyon cismi $\mathbb{F}_q$ üzerinde optimal, $\mathbb{F}_{q^4}$ üzerinde ise maksimaldir (Hirschfeld vd. (2008)).

Suzuki fonksiyon cisminin $\mathbb{F}_q$ üzerinde rasyonel nokta sayısı $S(\mathbb{F}_q)$ ve $\mathbb{F}_{q^4}$ üzerinde rasyonel nokta sayısı $S(\mathbb{F}_{q^4})$ şeklinde gösterilirse, $P \in S(\mathbb{F}_{q^4}) \setminus S(\mathbb{F}_q)$ noktasının Weierstrass semigrubu Bartoli vd. (2021) tarafından ve birbirinden farklı P_1, P_2 rasyonel nokta çifti için Weierstrass semigrubu ise Matthews (2004b) tarafından incelenmiştir.

Örnek 3.9. $y^8 + y = x^2(x^8 + x)$ denklemiyle tanımlanmış $\mathbb{F}_8(x, y)/\mathbb{F}_8$ fonksiyon cisminin cinsi Lemma 3.7 ye göre $g_F = 14$ tür ve herhangi bir rasyonel $Q \in \mathbb{P}_F$ noktasındaki Weierstrass semigrubu $H(Q) = \langle 8, 10, 12, 13 \rangle$ tür. Ayrıca $H(Q)$ nun boşluk noktaları kümesi $G(Q) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 14, 15, 17, 19, 27\}$ dir.

Suzuki fonksiyon cismiyle ilgili daha fazla bilgi için Hansen ve Stichtenoth (1990) ve Hirschfeld vd. (2008) kaynakları incelenebilir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. $\tilde{S}$ Fonksiyon Cismi ve Weierstrass Semigrup

Hermityen fonksiyon cisminin Kummer genişlemesi olan $\tilde{H}/\mathbb{F}_q$ fonksiyon cismi, p asal sayı, $q_0 = p^s > 1$, $q = q_0^2$, $m = q - q_0 + 1$ olmak üzere,

$$\tilde{H} = \mathbb{F}_q(x, y, t), \quad y^{q_0} + y = x^{q_0+1}, \quad t^m = x^q - x$$

ile tanımlanır ve bu fonksiyon cisminin Giulietti-Korchmáros fonksiyon cismi denir. Giulietti-Korchmáros fonksiyon cismi çeşitli özellikleri ve uygulamaları açısından Giulietti ve Korchmáros (2009) tarafından incelenmiştir.

Bu bölümde $\tilde{H}/\mathbb{F}_q$ fonksiyon cisminin benzer şekilde inşa edilen Suzuki fonksiyon cisminin Kummer genişlemesi olan $\tilde{S}/\mathbb{F}_q$ fonksiyon cismi incelenecektir.

Tanım 4.1. $n \geq 1$, $q_0 = 2^n$, $q = 2q_0^2$, $m = q - 2q_0 + 1$ olmak üzere, $\tilde{S}/\mathbb{F}_q$ fonksiyon cismi,

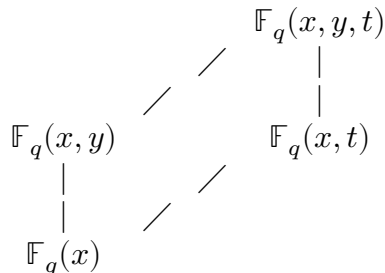
$$\tilde{S} = \mathbb{F}_q(x, y, t), \quad y^q + y = x^{q_0}(x^q + x), \quad t^m = x^q + x$$

ile tanımlanır.

$\tilde{S}/\mathbb{F}_q$ cebirsel fonksiyon cismi $\mathbb{F}_q(\tilde{S})$ biçiminde gösterilecektir. Ayrıca, $t^m = x^q + x$ denklemiyle tanımlanan $\mathbb{F}_q(x, t)/\mathbb{F}_q$ cebirsel fonksiyon cismi $\mathbb{F}_q(C_m)$ ve Suzuki fonksiyon cismi ise $\mathbb{F}_q(S)$ şeklinde gösterilecektir. Açık şekilde görülebilir ki $\mathbb{F}_q(x, y, t) = \mathbb{F}_q(x, t)\mathbb{F}_q(x, y)$ dir.

$\text{Par}(x^q + x, \mathbb{Z}_2, \overline{\mathbb{Z}_2}) = \mathbb{F}_q$ olduğundan Teorem 2.50 den görülebilir ki $\mathbb{F}_q(x)/\mathbb{F}_q$ rasyonel fonksiyon cisminin derecesi 1 olan her noktası (yani rasyonel noktaları), $\mathbb{F}_q(C_m)$ içinde tümünden dallanmıştır ve bu rasyonel noktalar dışında dallanmış nokta yoktur. Ayrıca yine aynı teoremden görülebilir ki $[\mathbb{F}_q(x, t) : \mathbb{F}_q(x)] = m$ ve $\mathbb{F}_q(x, t)/\mathbb{F}_q(x)$ bir Galois genişlemesidir.

Suzuki fonksiyon cismi bölümünde gösterildiği üzere, $\mathbb{F}_q(S)$ içinde $\mathbb{F}_q(x)/\mathbb{F}_q$ rasyonel fonksiyon cisminin tek dallanmış noktası P_∞ dur ve P_∞ tümünden dallanmıştır. Ayrıca $[\mathbb{F}_q(x, y) : \mathbb{F}_q(x)] = q$, $\mathbb{F}_q(x, y)/\mathbb{F}_q(x)$ bir Galois genişlemesidir ve Suzuki fonksiyon cismi $q^2 + 1$ rasyonel noktaya sahiptir.



Teorem 2.50 den $\mathbb{F}_q(x, y, t)/\mathbb{F}_q(x, y)$ bir Galois genişlemesidir ve $[\mathbb{F}_q(x, y, t) : \mathbb{F}_q(x, y)] = m$ dir. Teorem 2.55 dan Suzuki fonksiyon cisminin her rasyonel noktası ($q^2 + 1$ tane) $\mathbb{F}_q(x, y, t)/\mathbb{F}_q(x, y)$ içinde tümünden ve uysal dallanmıştır. Ayrıca Sonuç 2.56 den bu rasyonel noktalar dışında, $\mathbb{F}_q(x, y, t)/\mathbb{F}_q(x, y)$ içinde başka dallanmış nokta yoktur.

$P_\alpha = P_{x-\alpha} \in \mathbb{P}_{\mathbb{F}_q(x)}$, $\mathbb{F}_q(x, y)/\mathbb{F}_q(x)$ içinde tamamen parçalanmış olduğundan, $\mathbb{F}_q(x, t)/\mathbb{F}_q(x)$ içinde P_α nın her genişlemesi Sonuç 2.56 den $\mathbb{F}_q(x, y, t)/\mathbb{F}_q(x, t)$ içinde tamamen parçalanmıştır.

Lemma 4.2.

1. $\mathbb{F}_q(\tilde{S})$ fonksiyon cisminin cinsi $g_{\tilde{S}} = \frac{q^3 - 2q^2 + q}{2}$ dir.
2. $P_\infty \in \mathbb{P}_{\tilde{S}}$, $\mathbb{F}_q(\tilde{S})$ fonksiyon cismi içinde sonsuzdaki nokta olmak üzere, dx diferansiyelinin böleni

$$(dx)_{\tilde{S}} = (2q_0q^2 - 2q^2 + q - 2)P_\infty + (q - 2q_0) \sum_{P \in \mathbb{P}_{\tilde{S}}, P \neq P_\infty} P$$

dir.

İspat. 1. Hurwitz cins formülünden,

$$2g_{\tilde{S}} - 2 = [\mathbb{F}_q(x, y, t) : \mathbb{F}_q(x, y)] (2g_S - 2) + \text{der } Diff(\mathbb{F}_q(x, y, t)/\mathbb{F}_q(x, y))$$

ve

$$\begin{aligned} 2g_{\tilde{S}} - 2 &= m(2q_0(q - 1) - 2) + \text{der} \sum_{P \in \mathbb{P}_S} \sum_{P' | P} d(P' | P) P' \\ &= m(2q_0(q - 1) - 2) + \text{der} \sum_{P \in \mathbb{P}_S} \frac{e(P) - 1}{e(P)} \sum_{P' | P} e(P' | P) P' \\ &= m(2q_0(q - 1) - 2) + \sum_{P \in \mathbb{P}_S} \frac{e(P) - 1}{e(P)} \text{der} \left(\sum_{P' | P} e(P' | P) P' \right) \\ &= m(2q_0(q - 1) - 2) + \sum_{P \in \mathbb{P}_S} \frac{e(P) - 1}{e(P)} \text{der } Con_{\tilde{S}/S}(P) \\ &= m(2q_0(q - 1) - 2) + \sum_{P \in \mathbb{P}_S} \frac{e(P) - 1}{e(P)} [\mathbb{F}_q(x, y, t) : \mathbb{F}_q(x, y)] \text{der } P \\ &= m(2q_0(q - 1) - 2) + \sum_{P \in \mathbb{P}_S} (e(P) - 1) \text{der } P \\ &= m(2q_0(q - 1) - 2) + (m - 1)(q^2 + 1) \end{aligned}$$

ve $m = q - 2q_0 + 1$ olduğundan $g_{\tilde{S}} = \frac{q^3 - 2q^2 + q}{2}$ elde edilir.

2. $\eta \in \Omega_{\mathbb{F}_q(x)}$, Örnek 2.19 de verilen Weil diferansiyeli olmak üzere,

$$\begin{aligned}
 (dx)_{\tilde{S}} &= (Cotr_{\mathbb{F}_q(x,y,t)/\mathbb{F}_q(x)}(\eta)) \\
 &= Con_{\mathbb{F}_q(x,y,t)/\mathbb{F}_q(x)}((\eta)) + Diff(\mathbb{F}_q(x,y,t)/\mathbb{F}_q(x)) \\
 &= Con_{\mathbb{F}_q(x,y,t)/\mathbb{F}_q(x,y)}(((dx)_S)) + Diff(\mathbb{F}_q(x,y,t)/\mathbb{F}_q(x,y)) \\
 &= m(2q_0(q-1)-2)P_\infty + (m-1)P_\infty + (q-2q_0) \sum_{P \in \mathbb{P}_{\tilde{S}}, P \neq P_\infty} P \\
 &= (2q_0q^2 - 2q^2 + q - 2)P_\infty + (q - 2q_0) \sum_{P \in \mathbb{P}_{\tilde{S}}, P \neq P_\infty} P.
 \end{aligned}$$

□

Skabelund (2018) deki Teorem 3.1 den $\mathbb{F}_q(\tilde{S})$ fonksiyon cisminin $\mathbb{F}_{q^4}$ üzerinde maksimal olduğu Doğal Gömme Teoremi (Natural Embedding Theorem) kullanılarak gösterilebilir.

$\tilde{S}$ fonksiyon cisminin $\mathbb{F}_q$ üzerinde rasyonel nokta sayısı $\tilde{S}(\mathbb{F}_q)$ ve $\mathbb{F}_{q^4}$ üzerinde rasyonel nokta sayısı $\tilde{S}(\mathbb{F}_{q^4})$ şeklinde gösterilsin.

$\tilde{S}$ üzerinde $z = y^{2q_0} + x^{2q_0+1}$ ve $w = xy^{2q_0} + z^{2q_0}$ fonksiyonları tanımlanırsa,

$$z^q + z = x^{2q_0}(x^q + x), \quad w^q + w = y^{2q_0}(x^q + x)$$

ilişkisi elde edilir. $Q_\infty \in S(\mathbb{F}_q)$ noktasının tek genişlemesi $P_\infty \in \tilde{S}(\mathbb{F}_q)$, $P_\infty \mid Q_\infty$ tümünden dallanmış ve $t^m = x^q + x$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
 -v_{P_\infty}(x) &= e(P_\infty \mid Q_\infty) v_{Q_\infty}(x) = qm = q^2 - 2qq_0 + q \\
 -v_{P_\infty}(y) &= e(P_\infty \mid Q_\infty) v_{Q_\infty}(y) = m(q + q_0) = q^2 - qq_0 + q_0 \\
 -v_{P_\infty}(t) &= -\frac{qv_{P_\infty}(x)}{m} = q^2 \\
 -v_{P_\infty}(z) &= -\frac{(2q_0 + q)v_{P_\infty}(x)}{q} = q^2 - q + 2q_0 \\
 -v_{P_\infty}(w) &= \frac{2q_0v_{P_\infty}(y) + qv_{P_\infty}(x)}{q} = q^2 + 1
 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan x, y, z, t, w fonksiyonlarının kutup bölenleri,

$$\begin{aligned}(x)_{\infty} &= (q^2 - 2qq_0 + q)P_{\infty} \\ (y)_{\infty} &= (q^2 - qq_0 + q_0)P_{\infty} \\ (t)_{\infty} &= q^2 P_{\infty} \\ (z)_{\infty} &= (q^2 - q + 2q_0)P_{\infty} \\ (w)_{\infty} &= (q^2 + 1)P_{\infty}\end{aligned}\tag{4.1}$$

biçimindedir. İşlem kolaylığı için,

$$g_0 = q^2 - 2qq_0 + q, \quad g_1 = q^2 - qq_0 + q_0, \quad g_2 = q^2 - q + 2q_0, \quad g_3 = q^2, \quad g_4 = q^2 + 1$$

şeklinde gösterilsin ve bu sayıların ürettiği, $H = \langle g_0, g_1, g_2, g_3, g_4 \rangle$ nümerik semigrubunun katlılığı $m_H = g_0$ dir.

Lemma 4.3. $A = \{ag_1 + bg_2 + cg_3 + dg_4 : 0 \leq a \leq 1, 0 \leq b, d \leq q_0 - 1, 0 \leq c \leq q - 2q_0\}$ kümesi $\mathbb{Z}$ nin $\text{mod } g_0$ a göre bir tam temsilci sınıfı kümesidir.

İspat. A nın tüm elemanlarının birbirinden farklı olduğu rahatça görülebilir. O halde $|A| = 2q_0^2(q - 2q_0 + 1) = g_0$ dir. A nın herhangi iki farklı elemanını $h = ag_1 + bg_2 + cg_3 + dg_4$, $h' = a'g_1 + b'g_2 + c'g_3 + d'g_4$ alalım ve varsayalım ki $h \equiv h' \pmod{g_0}$ olsun. $q_0 | g_0$ olduğundan $h \equiv h' \pmod{q_0}$ ise $d \equiv d' \pmod{q_0}$ ve buradan $d = d'$ dir. Benzer şekilde $2q_0 | g_0$ olduğundan $h \equiv h' \pmod{2q_0}$ da bakıldığında $a = a'$, $q | g_0$ olduğundan $h \equiv h' \pmod{q}$ da bakıldığında $b = b'$ ve son olarak $h \equiv h' \pmod{g_0}$ için $cq \equiv c'q \pmod{(q - 2q_0 + 1)}$ ve buradan $c = c'$ elde edilir. O halde, $h \equiv h' \pmod{g_0}$ ise $h = h'$ ve $|A| = g_0$ olduğundan A kümesi $\mathbb{Z}$ nin $\text{mod } g_0$ a göre bir tam temsilci sınıfı kümesidir. $\square$

Teorem 4.4. Herhangi bir $P \in \tilde{S}(\mathbb{F}_q)$ noktasının Weierstrass semigrubu $H(P) = \langle q^2 - 2qq_0 + q, q^2 - qq_0 + q_0, q^2 - q + 2q_0, q^2, q^2 + 1 \rangle$ dir ve ayrıca $H(P)$ simetrik semigruptur.

İspat. $\tilde{S}(\mathbb{F}_q)$, $\tilde{S}$ nın otomorfizma grubunun etkisi altında bir yörünge oluşturduğundan herhangi bir $P \in \tilde{S}(\mathbb{F}_q)$ noktası için $H(P) = H(P_{\infty})$ dur (Beelen vd. (2021)).

Weierstrass boşluk teoreminden $H(P_{\infty})$ un cinsi $g_{\tilde{S}} = g(H(P_{\infty})) = \frac{q^3 - 2q^2 + q}{2}$ dir. $H = \langle q^2 - 2qq_0 + q, q^2 - qq_0 + q_0, q^2 - q + 2q_0, q^2, q^2 + 1 \rangle$ olsun. H bir nümerik semigruptur ve (4.1) eşitliklerinden $H \subseteq H(P_{\infty})$ dur. Buradan $g(H) \geq g_{\tilde{S}}$ elde edilir. $g(H) = g_{\tilde{S}}$ olduğu gösterilirse ispat biter ve bunu göstermek için Apéry kümesi kullanılacaktır.

Bağıntı (2.1) ve Lemma 4.3 den $g(H) \leq \sum_{h \in A} (\lfloor \frac{h}{g_0} \rfloor)$ dır.

$$\begin{aligned}
\sum_{h \in A} \lfloor \frac{h}{g_0} \rfloor &= \sum_{h \in A} \frac{h - h \bmod g_0}{g_0} = \frac{1}{g_0} \sum_{h \in A} h - \frac{1}{g_0} \sum_{r=0}^{g_0-1} r \\
&= \frac{1}{g_0} \sum_{a=0}^1 \sum_{b=0}^{q_0-1} \sum_{c=0}^{q-2q_0} \sum_{d=0}^{q_0-1} (ag_1 + bg_2 + cg_3 + dg_4) - \frac{g_0-1}{2} \\
&= \frac{q_0^2 m}{g_0} (g_1 + (q_0-1)g_2 + (q-2q_0)g_3 + (q_0-1)g_4) - \frac{g_0-1}{2} \\
&= \frac{q_0^2 m}{g_0} (q^3 - q^2 - 2q_0q + 2q - 1) - \frac{g_0-1}{2} \\
&= \frac{q^3 - q^2 - 2q_0q + 2q - 1}{2} - \frac{q^2 - 2q_0q + q - 1}{2} \\
&= g_{\tilde{S}}
\end{aligned}$$

ve buradan $g(H) = g_{\tilde{S}}$ olduğundan $H = H(P_{\infty}) = H(P)$ elde edilir. Ayrıca (2.1) bağıntısından $Ap(H(P)) = A$ olduğu açıktır. $H(P)$ nin en büyük boşluk sayısı (Frobenius sayısı),

$$\begin{aligned}
\max\{z \in A\} - g_0 &= g_1 + (q_0-1)g_2 + (q-2q_0)g_3 + (q_0-1)g_4 - g_0 \\
&= q^3 - q^2 - 2q_0q + 2q - 1 - q^2 + 2q_0q - q \\
&= 2g_{\tilde{S}} - 1
\end{aligned}$$

dir ve buradan $H(P)$ bir simetrik semigruptur. $\square$

Şimdi önceki yapılanlara benzer bir strateji ile $P \in \tilde{S}(\mathbb{F}_{q^4}) \setminus \tilde{S}(\mathbb{F}_q)$ noktasının Weierstrass semigrubunu bulalım:

$\mathbb{F}_{q^4}(\tilde{S})$ fonksiyon cismi, $\mathbb{F}_q(\tilde{S})$ fonksiyon cisminin bir sabit cisim genişlemesidir ve Teorem 2.48 dan cinsleri aynıdır.

$$\begin{aligned}
f_0 &= q^2 - q + 1, \\
f_1 &= q^2 - 2q_0 + 1, \\
f_2 &= q^2 - q_0 + 1, \\
f_3 &= q^2, \\
f_4 &= q^2 + 1, \\
g_i &= (i+1)q_0f_0 - if_4 - 1, \quad i = 0, 1, \dots, 2q_0 - 2, \\
h_j &= (2j+1)q_0f_0 - jf_4 - q_0, \quad j = 0, 1, \dots, q_0 - 2,
\end{aligned}$$

sayıları ile

$$A = \{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, g_i, h_j \mid i = 0, 1, \dots, 2q_0 - 2 \text{ ve } j = 0, 1, \dots, q_0 - 2\}$$

kümesi tanımlanırsa, $obeb(A) = 1$ olduğundan $\langle A \rangle$ bir nümerik semigrup ve $\langle A \rangle = H$ olsun. H nin katlılığı $m_H = f_0$ olduğu açıktır.

$P \in \tilde{S}(\mathbb{F}_{q^4}) \setminus \tilde{S}(\mathbb{F}_q)$ noktasının Weierstrass semigrubu $H(P)$ şeklinde gösterilirse Beelen vd. (2021) deki Önerme 4.3 den $A \subseteq H(P)$ dir. Buradan $H \subseteq H(P)$ ve $g(H) \geq g_{\tilde{S}}$ elde edilir.

$i \in \{0, 1, \dots, \frac{q(q-2)}{2}\}$ ve $i_1 \in \{0, 1, \dots, q_0 - 1\}$, $i_2 \in \{0, 1, \dots, 2q_0 - 1\}$, $i_3 \geq 0$ için $i = i_3q + i_2q_0 + i_1$ olmak üzere,

$$\sigma_1(i) = \begin{cases} i_3, & i_1 = 0 \text{ ve } i_2 = 0, \\ i_3 + 1 + \max\{q - q_0(i_2 + 2i_3 + 2), 0\}, & i_1 = 0 \text{ ve } i_2 \neq 0, \\ i_3 + 1 + \max\{q - q_0(\lfloor \frac{i_2}{2} \rfloor + i_1 + i_3 + 1), 0\}, & i_1 \neq 0, \end{cases}$$

ve

$i \in \{\frac{q(q-2)}{2} + 1, \dots, f_0 - 1\}$ için $i' = f_0 - 1 - i$ ve $i_1 \in \{0, 1, \dots, q_0 - 1\}$, $i_2 \in \{0, 1, \dots, 2q_0 - 1\}$, $i_3 \geq 0$ için $i' = i_3q + i_2q_0 + i_1$ olmak üzere,

$$\sigma_2(i) = \begin{cases} q - i_3 - 1 - \max\{q - q_0(i_2 + 2i_3 + 1), 0\}, & i_1 = q_0 - 1, \\ q - i_3 - 1 - \max\{q - q_0(\lfloor \frac{i_2}{2} \rfloor + i_1 + i_3 + 1), 0\}, & i_1 \neq q_0 - 1, \end{cases}$$

fonksiyonları ile

$$\sigma(i) = \begin{cases} \sigma_1(i), & i \in \{0, 1, \dots, \frac{q(q-2)}{2}\}, \\ \sigma_2(i), & i \in \{\frac{q(q-2)}{2} + 1, \dots, f_0 - 1\}, \end{cases}$$

parçalı fonksiyonu tanımlanırsa Beelen vd. (2021) deki Lemma 4.4 ve Lemma 4.5 den $\sigma(i)f_0 + i \in H$ dir.

$\{\sigma(i)f_0 + i \mid i = 0, 1, \dots, f_0 - 1\}$ kümesinin $\mathbb{Z}$ nin mod f_0 a göre oluşan denklik sınıflarının bir tam temsilci kümesi olduğu kolayca görülebilir. Bağıntı (2.1) den,

$$g(H) \leq \sum_{i=0}^{f_0-1} \lfloor \frac{\sigma(i)f_0 + i}{f_0} \rfloor = \sum_{i=0}^{f_0-1} (\sigma(i)) \quad (4.2)$$

elde edilir.

Teorem 4.5. $P \in \tilde{S}(\mathbb{F}_{q^4}) \setminus \tilde{S}(\mathbb{F}_q)$ noktasının Weierstrass semigrubu

$$H(P) = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, g_i, h_j \mid i = 0, 1, \dots, 2q_0 - 2 \text{ ve } j = 0, 1, \dots, q_0 - 2\} \rangle$$

dir ve $H(P)$ simetrik semigrupdur.

İspat. Weierstrass boşluk teoreminden $H(P)$ nin cinsi $g_{\tilde{S}} = \frac{q^3-2q^2+q}{2}$ dir. Yukarıda, A kümesinin ürettiği semigrup H olduğu söylenmiş ve $H \subseteq H(P)$, $g(H) \geq g_{\tilde{S}}$ olduğu elde edilmişti. $i \in \{0, 1, \dots, (q-1)^2\}$ için,

$$\sigma(i) + \sigma((q-1)^2 - i) = q - 1 \quad (4.3)$$

eşitliği Beelen vd. (2021) deki Lemma 4.6 dan görülebilir.

$i \in \{0, 1, \dots, \frac{q(q-2)}{2}\}$ ancak ve ancak $(q-1)^2 - i \in \{\frac{q(q-2)}{2} + 1, \dots, (q-1)^2\}$ olduğu açıktır. O halde,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{(q-1)^2} \sigma(i) &= \sum_{i=0}^{\frac{q(q-2)}{2}} \sigma(i) + \sum_{i=\frac{q(q-2)}{2}+1}^{(q-1)^2} \sigma(i) \\ &= \sum_{i=0}^{\frac{q(q-2)}{2}} \sigma(i) + \sum_{i=0}^{\frac{q(q-2)}{2}} \sigma((q-1)^2 - i) \\ &= \sum_{i=0}^{\frac{q(q-2)}{2}} (\sigma(i) + \sigma((q-1)^2 - i)) \\ &= \sum_{i=0}^{\frac{q(q-2)}{2}} (q-1) \\ &= \frac{q^3 - 3q^2}{2} + 2q - 1 \end{aligned} \quad (4.4)$$

elde edilir.

$i \in \{(q-1)^2 + 1, \dots, f_0 - 1\}$ ise $\sigma(i) = \sigma_2(i)$ dir ve $i' = f_0 - 1 - i \in \{0, 1, \dots, q-2\}$ olduğundan $i_1 \in \{0, 1, \dots, q_0 - 1\}$, $i_2 \in \{0, 1, \dots, 2q_0 - 1\}$, $i_3 = 0$ ve $i' = i_2q_0 + i_1$ şeklinde yazılabilir. Buradan, $i_1 = q_0 - 1$ ise

$$\sigma(i) = \sigma_2(i) = q - 1 - \max\{q - q_0(i_2 + 1), 0\} = q_0(i_2 + 1) - 1$$

ve benzer şekilde $i_1 \neq q_0 - 1$ ise

$$\sigma(i) = \sigma_2(i) = q - 1 - \max\{q - q_0(\lfloor \frac{i_2}{2} \rfloor + i_1 + 1), 0\} = q_0(\lfloor \frac{i_2}{2} \rfloor + i_1 + 1) - 1$$

elde edilir. O halde,

$$\sigma(i) = \sigma_2(i) = \begin{cases} q_0(i_2 + 1) - 1, & i_1 = q_0 - 1, \\ q_0(\lfloor \frac{i_2}{2} \rfloor + i_1 + 1) - 1, & i_1 \neq q_0 - 1, \end{cases}$$

dir ve $i' \in \{0, 1, \dots, q-2\}$ olduğundan $i_1 = q_0 - 1$ ise $i_2 \in \{0, 1, \dots, 2q_0 - 2\}$ dir.

Buradan,

$$\begin{aligned} \sum_{i=(q-1)^2+1}^{f_0-1} \sigma(i) &= \sum_{i_2=0}^{2q_0-2} (q_0(i_2+1)-1) + \sum_{i_2=0}^{2q_0-1} \sum_{i_1=0}^{q_0-2} (q_0(\lfloor \frac{i_2}{2} \rfloor + i_1 + 1) - 1) \\ &= \frac{q^2}{2} - \frac{3q}{2} + 1 \end{aligned} \quad (4.5)$$

dir. (4.4) ve (4.5) eşitliklerinden,

$$\sum_{i=0}^{f_0-1} \sigma(i) = \frac{q^3 - 3q^2}{2} + 2q - 1 + \frac{q^2}{2} - \frac{3q}{2} + 1 = g_{\tilde{S}}$$

elde edilir. (4.2) eşitsizliğinden $g(H) \leq g_{\tilde{S}}$ dir. O halde $g(H) = g_{\tilde{S}}$ ve buradan $H = H(P)$ elde edilir.

$g_{\tilde{S}} = \sum_{i=0}^{f_0-1} \lfloor \frac{\sigma(i)f_0+i}{f_0} \rfloor = \sum_{i=0}^{f_0-1} (\sigma(i))$ ve bağıntı (2.1) den $H(P)$ nin Apéry kümesi $Ap(H(P)) = \{\sigma(i)f_0 + i \mid i = 0, 1, \dots, f_0 - 1\}$ dir.

$i = (q-1)^2$ ise (4.3) eşitliğinden $\sigma(i) = q-1$ ve $\sigma(i)f_0 + i = q^3 - q^2 = 2g_{\tilde{S}} - 1 + f_0$ dir. $\sigma((q-1)^2)f_0 + (q-1)^2 \in Ap(H(P))$ ve Apéry kümesi tanımından $\sigma((q-1)^2)f_0 + (q-1)^2 - f_0 = 2g_{\tilde{S}} - 1$, $H(P)$ nin bir boşluğudur. Weierstrass boşluk teoreminden bu mümkün olan en büyük boşluk olduğundan $c_{H(P)} = 2g_{\tilde{S}}$ dir ve buradan $H(P)$ Weierstrass semigrubu bir simetrik semigruptur. $\square$

$P \notin \tilde{S}(\mathbb{F}_{q^4})$ noktasının Weierstrass semigrubu Beelen vd. (2021) tarafından incelenmiştir.

4.2. Gonalite

Tanım 4.6. F/K cebirsel fonksiyon cismi ve $r \in \mathbb{N}$ için,

$$\gamma_r = \min\{\text{der } A \mid A \in \mathbb{D}_F \text{ ve boy } \mathcal{L}(A) \geq r\}$$

sayısına F/K nın r -inci gonalitesi ve $GS(F/K) = (\gamma_r : r \in \mathbb{N})$ dizisine F/K nın gonalite dizisi denir. Özel olarak γ_2 sayısı, F/K cebirsel fonksiyon cisminin gonalitesi olarak adlandırılır.

Lemma 4.7. F/K en az bir rasyonel noktaya sahip cebirsel fonksiyon cismi ve bu fonksiyon cisminin cinsi g olmak üzere,

1. $\gamma_1 = 0$ ve $\gamma_2 = \min\{[F : K(x)] \mid x \in F \setminus K\}$ dir.
2. F/K nın gonalite dizisi mutlak artandır.
3. Her $r > g$ için $\gamma_r = r + g - 1$ dir.

4. $g \geq 1$ ise $\gamma_g = 2g - 2$ ve $1 \leq r \leq g$ ise $\gamma_r \geq 2r - 2$ dir.
5. $A = \{k \in \mathbb{N} \mid \gamma_r = k \text{ olacak şekilde } k \text{ yoktur}\}$ kümesinin eleman sayısı $|A| = g$ dir. Ayrıca $g \geq 1$ ise $1 \in A$ ve $2g - 1 \in A$ dir.
6. α bir tamsayı olsun. $\alpha \in GS(F/K) \iff 2g - 1 - \alpha \notin GS(F/K)$

İspat. 1. $\gamma_1 = 0$ olduğu açıktır.

$x \in F \setminus K$ için $A = (x)_\infty$ olsun. 1 ve x , $\mathcal{L}(A)$ içinde lineer bağımsız olduğundan $\text{boy } \mathcal{L}(A) \geq 2$ dir ve buradan her $x \in F \setminus K$ için Teorem 2.10 kullanılarak,

$$\gamma_2 \leq \text{der } A = [F : K(x)] \quad (4.6)$$

elde edilir.

$\text{der } A = \gamma_2$ olacak şekilde $A \in \mathbb{D}_F$ alalım. $\text{boy } \mathcal{L}(A) \geq 2$ olduğundan $A \sim A'$, $A' \geq 0$ olacak şekilde $A' \in \mathbb{D}_F$ bölüni vardır ve Sonuç 2.11 den $\text{der } A = \text{der } A'$, $\text{boy } \mathcal{L}(A) = \text{boy } \mathcal{L}(A')$ dür. $\text{Boy } \mathcal{L}(A') \geq 2$ olduğundan $x \in \mathcal{L}(A') \setminus K$ olacak şekilde $x \in F$ vardır. O halde $(x)_\infty \leq A'$ ve buradan

$$[F : K(x)] \leq \text{der } A' = \gamma_2 \quad (4.7)$$

elde edilir. (4.6) ve (4.7) eşitsizliklerinden $\gamma_2 = \min\{[F : K(x)] \mid x \in F \setminus K\}$ elde edilir.

2. $\gamma_i = \text{der } A$ olacak şekilde $A \in \mathbb{D}_F$ alalım. $P \in \mathbb{P}_F$ ve $\text{der } P = 1$ olmak üzere $A' = A - P$ olsun. O halde Lemma 2.9 dan $\text{boy } \mathcal{L}(A) - \text{boy } \mathcal{L}(A') \leq \text{der } A - \text{der } A' = 1$ ve buradan $\text{boy } \mathcal{L}(A') \geq i - 1$ elde edilir. $\text{Boy } \mathcal{L}(A') \geq i - 1$ ise $\gamma_{i-1} \leq \text{der } A' < \gamma_i$ dir. O halde F/K nın gonality dizisi mutlak artandır.

3. $\text{der } A = r + g - 1 > 2g - 1$ olacak şekilde bir $A \in \mathbb{D}_F$ bölüni için Sonuç 2.11 ve Teorem 2.15 dan $\text{boy } \mathcal{L}(A) = \text{der } A - g + 1 = r$ elde edilir. Buradan $\gamma_r \leq \text{der } A = r + g - 1$ dir.

Der $A' < r + g - 1$ ve $\text{boy } \mathcal{L}(A') \geq r$ olacak şekilde bir $A' \in \mathbb{D}_F$ bölüni olduğu varsayalım. O halde, $\text{der } B = r + g - 2 \geq 2g - 1$ olacak şekilde bir $B \in \mathbb{D}_F$ bölüni vardır. Sonuç 2.11 ve Teorem 2.15 dan $\text{boy } \mathcal{L}(B) = \text{der } B + 1 - g = r - 1$ elde edilir. $A' \leq B$ olduğundan Lemma 2.9 dan $\mathcal{L}(A') \subseteq \mathcal{L}(B)$ ve buradan $\text{boy } \mathcal{L}(A') \leq \text{boy } \mathcal{L}(B) = r - 1$ dir. Bu ise varsayımla bir çelişkidir. O halde, her $r > g$ için $\gamma_r = r + g - 1$ dir.

4. W bir kanonik bölün olsun. Teorem 2.15 dan $\text{der } W = 2g - 2$ ve $\text{boy } \mathcal{L}(W) = g$ dir. Buradan,

$$\gamma_g \leq 2g - 2 \quad (4.8)$$

elde edilir. $1 \leq r \leq g$ ise (4.8) eşitsizliğinden $0 \leq \gamma_r \leq 2g - 2$ dir. $\gamma_r = \text{der } A$ olacak şekilde bir $A \in \mathbb{D}_F$ bölüni için Teorem 2.16 den boy $\mathcal{L}(A) \leq 1 + \frac{\text{der } A}{2} = 1 + \frac{\gamma_r}{2}$ dir ve buradan $1 \leq r \leq g$ ise $\gamma_r \geq 2r - 2$ elde edilir. Ayrıca $r = g$ alınırsa

$$2g - 2 \leq \gamma_g \quad (4.9)$$

dir ve (4.8) ve (4.9) eşitsizliklerinden $\gamma_g = 2g - 2$ elde edilir.

5. $g = 0$ ise F/K rasyonel fonksiyon cismidir ve 3. özellikten A kümesi boş kümedir.

$g \geq 1$ olsun. O halde 1., 2., 3. özelliklerden,

$0 = \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_g = 2g - 2 < \gamma_{g+1} = 2g$ dir ve her $i \geq 1$ için $\gamma_{g+i} = k$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan $2g + 1 - (g + 1) = g$ tane $\gamma_r = k$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ yoktur. O halde $|A| = g$ elde edilir.

$g \geq 1$ için $\gamma_g = 2g - 2, \gamma_{g+1} = 2g$ ve gonalite dizisi mutlak artan olduğundan $\gamma_r = 2g - 1$ olacak şekilde r yoktur. O halde $2g - 1 \in A$ dir. Benzer şekilde $\gamma_1 = 0, \gamma_2 \geq 2$ ve gonalite dizisi mutlak artan olduğundan $1 \in A$ elde edilir.

6. $\alpha < 0$ ise $\alpha \notin GS(F/K)$ ve $2g - 1 - \alpha \geq 2g$ olduğundan $2g - 1 - \alpha \in GS(F/K)$ elde edilir. $\alpha > 2g - 1$ ise $\alpha \in GS(F/K)$ ve $2g - 1 - \alpha < 0$ olduğundan $2g - 1 - \alpha \notin GS(F/K)$ elde edilir.

$0 \leq \alpha \leq 2g - 1$ olsun. $0 = \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_g = 2g - 2$ olduğundan $0 \leq \gamma_i \leq 2g - 1$ olacak şekilde g tane gonalite sayısı vardır ve $i, k \in \{1, 2, \dots, g\}$ için $2g - 1 - \gamma_i \neq \gamma_k$ olduğu gösterilirse iddia kanıtlanmış olur. $A \in \mathbb{D}_F$ için $\text{der } A = \gamma_i$ olsun. $W, F/K$ nın bir kanonik bölüni olmak üzere, Teorem 2.15 dan boy $\mathcal{L}(W - A) \geq i + g - \text{der } A - 1 = i + g - \gamma_i - 1$ olur.

$k < i + g - \gamma_i - 1$ ise boy $\mathcal{L}(W - A) > k$ ve gonalite tanımından

$$\gamma_k \leq \text{der}(W - A) = \text{der } W - \text{der } A = 2g - 2 - \gamma_i$$

dir. O halde $\gamma_k \leq 2g - 2 - \gamma_i$ ise $\gamma_k \leq 2g - 1 - \gamma_i$ ve buradan $2g - 1 - \gamma_i \neq \gamma_k$ elde edilir.

$k \geq i + g - \gamma_i$ olsun ve $2g - 1 - \gamma_i = \gamma_k$ olduğunu varsayalım. $\gamma_k = \text{der } A'$ olsun ve Teorem 2.15 dan boy $\mathcal{L}(W - A') \geq k + g - \gamma_k - 1$ elde edilir. $2g - 1 - \gamma_i = \gamma_k$ ve $k \geq i + g - \gamma_i$ olduğundan boy $\mathcal{L}(W - A') \geq k - g + \gamma_i \geq i$ elde edilir. Boy $\mathcal{L}(W - A') \geq i$ ve $\text{der } W - A' = 2g - 2 - \gamma_k = \gamma_i - 1$ olduğundan $\gamma_i = \text{der } A$ olması ile çelişki elde edilir. O halde $2g - 1 - \gamma_i \neq \gamma_k$ dir. $\square$

Lemma 4.8. *F/K en az bir rasyonel noktaya sahip cebirsel fonksiyon cismi ve bu fonksiyon cisminin cinsi $g \geq 1$ olmak üzere,*

1. $g - \gamma_2 + 1 < r < g$ ise $\gamma_r = r + g - 2$ dir.
2. Her r için $\gamma_r \leq g - \lfloor \frac{g}{r} \rfloor + r - 1$ dir.

İspat. Ayrıntılı ispat için referansımız Lange (2012) dir. $\square$

Tanım 4.9. $F/\mathbb{F}_q$ cinsi g olan bir cebirsel fonksiyon cismi, $P \in \mathbb{P}_F$ bir rasyonel nokta ve $P \in \mathbb{P}_F$ noktasının Weierstrass semigrubunun katlılığı m olsun. $P \in \mathbb{P}_F$ noktasının Weierstrass semigrubu simetrik ve $F/\mathbb{F}_q$ fonksiyon cisminin rasyonel nokta sayısı $qm+1$ ise $F/\mathbb{F}_q$, $P \in \mathbb{P}_F$ noktasında bir kale (castle) fonksiyon cismi olarak adlandırılır.

Suzuki fonksiyon cismi, her rasyonel noktada bir kale (castle) fonksiyon cismi-dir. Bu konu hakkında ayrıntılı bilgi için Munuera vd. (2008) ve Munuera vd. (2009) kaynaklarına bakılması önerilir.

Lemma 4.10. $F/\mathbb{F}_q$ cinsi g olan $P \in \mathbb{P}_F$ noktasında bir kale fonksiyon cismi ve $P \in \mathbb{P}_F$ noktasının Weierstrass semigrubu elemanları küçükten büyüğe doğru sıralı olmak üzere $H(P) = \{0 = h_1, h_2, h_3, \dots\}$ olsun. $h_2 \leq q+1$ ise

1. $\gamma_2 = h_2$ dir.

2. $i \geq g - \gamma_2 + 2$ için $\gamma_i = h_i$ ve

$$\gamma_i = h_i = \begin{cases} i + g - 2, & g - \gamma_2 + 2 \leq i \leq g \\ i + g - 1, & i > g \end{cases}$$

dir.

İspat. Ayrıntılı ispat için referansımız Munuera vd. (2009) dir. $\square$

Pellikaan (1996) nin çalışmasında, Tanım 3.2 de verilmiş Hermityen fonksiyon cisminin gonalite dizisi, $k = \frac{1}{2}(j+1)(j+2) - i$, $0 \leq i \leq j$ olmak üzere

$$\gamma_k = \begin{cases} j(q+1) - i, & 1 \leq k \leq g_H \\ k + g_H - 1, & k > g_H \end{cases}$$

şeklinde elde edilir.

$$GS(H/\mathbb{F}_9) = (0, 3, 4, 6, 7, \rightarrow)$$

$$GS(H/\mathbb{F}_{16}) = (0, 4, 5, 8, 9, 10, 12, 13, \rightarrow)$$

$$GS(H/\mathbb{F}_{25}) = (0, 5, 6, 10, 11, 12, 15, 16, 17, 18, 20, 21, \rightarrow)$$

Hermityen fonksiyon cisminde, herhangi bir rasyonel noktanın Weierstrass semigrup elemanları küçükten büyüğe doğru sıralanırsa gonalite dizisinin terimleri ile aynı olduğu kolayca görülebilir.

Tanım 3.6 da verilen Suzuki fonksiyon cisminde $q_0 = 2$ alınırsa, $q = 8$ ve $g_S = 14$ elde edilir. Lange (2012) nin çalışmasında Brill–Noether teori ve Serre duality yardımıyla $\gamma_3 = 10$, $\gamma_4 = 12$, $\gamma_5 = 13$, $\gamma_6 = 16$, $\gamma_7 = 18$ olduğu gösterilmiştir.

Önceden $[S : \mathbb{F}_q(x)] = q$ olarak elde edilmişti. O halde Lemma 4.7 ve Lemma 4.8 kullanılarak,

$$GS(S/\mathbb{F}_8) = (0, 8, 10, 12, 13, 16, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 29, \rightarrow)$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca Suzuki fonksiyon cisminde $q_0 = 2$ için gonality sayıları γ_r ise $A = \{\gamma_r \mid r \in \mathbb{N}\}$ kümesi ile Örnek 3.9 da verilen kümenin eşit olduğu kolayca görülebilir.



5. SONUÇLAR

Weierstrass semigrupları hakkındaki araştırmalar, cebirsel geometrik kodların bir eğrinin bir veya daha fazla noktasındaki Weierstrass semigrubu ile ilişkileri nedeniyle son dönemde artmıştır. Bu semigruplar kodlama teorisinde minimum mesafedeki belirlediği sınırlar ve kodların boyutlarında yaptığı iyileştirmeler açısından önemlidir. Özel olarak maksimal eğriler uzun kodlara olanak tanıdıklarından geometrik kodlara yönelik uygulamalar için oldukça kullanışlı ve dikkat çekicidirler. Maksimal eğri ailelerinin iyi bilinen örnekleri Hermityen ve Suzuki eğrileridir.

Bu tez çalışmasında; Hermityen ve Suzuki fonksiyon cisimlerinin otomorfizm gruplarının geçişli olması nedeniyle, sonsuzdaki noktada, Weierstrass boşluk teoremi ve Apéry kümesinden yararlanarak Weierstrass semigrupları ifade edilmiştir. Beelen vd. (2021) ve Skabelund (2018) de verilen Suzuki fonksiyon cisminin bir Kummer genişlemesi,

$$\tilde{S} = \mathbb{F}_q(x, y, t), \quad y^q + y = x^{q_0}(x^q + x), \quad t^m = x^q + x$$

ile tanımlanan $\tilde{S}$ fonksiyon cisimlerinin temel kavramları ifade edilerek, rasyonel noktalarda Weierstrass semigrupları araştırılmıştır, burada $n \geq 1$, $q_0 = 2^n$, $q = 2q_0^2$, $m = q - 2q_0 + 1$ dir.

Hurwitz cins formülünden $\tilde{S}$ fonksiyon cisminin cinsi $g_{\tilde{S}} = \frac{q^3 - 2q^2 + q}{2}$ dir. Suzuki ve Hermityen fonksiyon cisimlerindeki yöntemle benzer şekilde, Weierstrass semigrup $P \in \tilde{S}(\mathbb{F}_q)$ için

$$H(P) = \langle q^2 - 2q_0q + q, q^2 - q_0q + q_0, q^2 - q + 2q_0, q^2, q^2 + 1 \rangle$$

ve $P \in \tilde{S}(\mathbb{F}_{q^4}) \setminus \tilde{S}(\mathbb{F}_q)$ için

$$H(P) = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, g_i, h_j \mid i = 0, 1, \dots, 2q_0 - 2 \text{ ve } j = 0, 1, \dots, q_0 - 2\} \rangle$$

dir, burada,

$$\begin{aligned} f_0 &= q^2 - q + 1, & f_1 &= q^2 - 2q_0 + 1, & f_2 &= q^2 - q_0 + 1, & f_3 &= q^2, & f_4 &= q^2 + 1, \\ g_i &= (i + 1)q_0f_0 - if_4 - 1, & & i &= 0, 1, \dots, 2q_0 - 2, \\ h_j &= (2j + 1)q_0f_0 - jf_4 - q_0, & & j &= 0, 1, \dots, q_0 - 2 \end{aligned}$$

dir.

Ayrıca, bu tez çalışmasında Weierstrass semigrubu ile gonality dizisi arasındaki ilişki incelenmiştir. Belirli koşullar altında bir fonksiyon cisminin herhangi bir noktasındaki Weierstrass semigrubunun elemanları küçükten büyüğe doğru sıralanırsa, belli bir noktadan sonra gonality dizisinin terimleri ile aynı olduğu görülmüştür. Hermityen fonksiyon cisminin gonality dizisi ile bir rasyonel noktasının Weierstrass semigrubu çıkarılır.

$q_0 = 2$ durumunda Suzuki fonksiyon cisminin bir rasyonel noktasının Weierstrass

semigrubu ile Suzuki fonksiyon cisminin gonality dizisi aynıdır ve

$$GS(S/\mathbb{F}_8) = (0, 8, 10, 12, 13, 16, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 29, \rightarrow)$$

dir.



6. KAYNAKLAR

- Bartoli, D., Montanucci M. ve Zini G. 2021. Weierstrass semigroups at every point of the Suzuki curve. *Acta Arithmetica*, 197, 1-20.
- Beelen, P., Landi, L. ve Montanucci, M. 2021. Weierstrass semigroups on the Skabelund maximal curve. *Finite Fields and Their Applications*, 72, 101811, Amerika.
- Chevalley, C. 1951. *Introduction to Theory of Algebraic Functions of One Variable*. American Mathematical Society Publishing, New York, 186 pp.
- Hansen, J.P. ve Stichtenoth, H. 1990. Group Codes on Certain Algebraic Curves With Many Rational Points. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing AAEC* 1, 1, 67-77.
- Hirschfeld, J. W. P., Korchmáros, G. ve Torres, F. 2008. *Algebraic Curves Over a Finite Field*. Princeton University Press, New Jersey, 744 p.
- Hungerford, T.W. 1974. *Algebra (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, New York, 502 p.
- Giulietti, M. ve Korchmáros, G. 2009. A new family of maximal curves over a finite field. *Mathematische Annalen*, 343, 229–245, Almanya.
- Lange, H. ve Martens, G. 2012. On the gonality sequence of an algebraic curve. *Manuscripta Math.* 137, 457-473, New York.
- Matthews, G.L. 2004a. The Weierstrass semigroup of an m-tuple of collinear points on a Hermitian curve. In: Mullen, G.L., Poli, A., Stichtenoth, H. (eds.) *Finite Fields and Applications*, pp. 12–24. Springer, Berlin (2004)
- Matthews, G.L. 2004b. Codes from the Suzuki function field. *IEEE Trans. Inf. Theory*. 50, 12, 3298–3302.
- Munuera, C., Sepúlveda, A. ve Torres, F. 2008. Algebraic Geometry Codes from Castle Curves. In: Barbero, Á. (eds) *Coding Theory and Applications. Lecture Notes in Computer Science*, 5228, Springer, Berlin, Heidelberg.
- Munuera, C., Sepúlveda, A. ve Torres, F. 2009. Castle curves and codes. *Advances in Mathematics of Communications*, 3, 4, 399-408, Amerika.
- Pellikaan, R. 1996. On special divisors and the two variable zeta function of algebraic curves over finite fields. *Arithmetic, Geometry, and Coding Theory: Proceedings of the International Conference held at Centre International de Rencontres de Mathématiques (CIRM)*, 175-184, Berlin.
- Rosales, J.C. ve Garcia-Sanchez, P.A. 2009. *Numerical Semigroups*. Springer, New York, 181 p.
- Salvador, G.D.V. 2009. *Topics in the Theory of Algebraic Function Fields*. Birkhauser, Boston.

- Skabelund, D.C. 2018. New maximal curves as ray class fields over Deligne-Lusztig curves. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 146, 2, 525–540, Amerika.
- Stichtenoth, H. 2009. *Algebraic Function Fields and Codes*. Springer Verlag, Berlin, 254, 350 p.



ÖZGEÇMİŞ

Gökhan ÇAĞLAR

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans 2020-2024	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Antalya
Lisans 2015-2020	Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya