

TEMMUZ 2019

Yüksek Lisans Tezi- Matematik

FİLİZ ÖZSOY

TÜRKİYE CUMHURİYETİ
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÖZEL EĞRİLERDEN ÜRETİLEN REGLE YÜZEYLER

MATEMATİK
YÜKSEK LİSANS TEZİ

FİLİZ ÖZSOY
TEMMUZ 2019

ÖZEL EĞRİLERDEN ÜRETİLEN REGLE YÜZYLER

Gaziantep Üniversitesi

Matematik

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Doç. Dr. İlkey GÜVEN

Filiz ÖZSOY

Temmuz 2019

TÜRKİYE CUMHURİYETİ
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tezin Başlığı : Özel Eğrilerden Üretilen Regle Yüzeyler

Öğrencinin , Adı Soyadı: Filiz ÖZSOY

Sınav Tarihi : 10.07.2019

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. A. Necmeddin YAZICI
Enstitü Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.



Prof. Dr. Adil KILIÇ
Enstitü Anabilim Dalı Başkanı

Bu tez tarafımda (tarafımızca) okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.



Doç. Dr. İlkey GÜVEN
Danışman

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:

Prof. Dr. Adil KILIÇ

Doç. Dr. İlkey GÜVEN

Doç. Dr. Mustafa DEDE

İmzası





©2019[Filiz ÖZSOY]

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilmek suretiyle tezde yer aldığını beyan ederim.

Filiz ÖZSOY

ABSTRACT

RULED SURFACES CREATED BY SPECIAL CURVES

ÖZSOY, Filiz

M.Sc. in Mathematics

Supervisor: Assoc.Prof. Dr. İlkey GÜVEN

44 pages

The ruled surfaces are surfaces formed by a line moving along a curve. In this study; special ruled surfaces have been produced by taking base curves different curves. Based on Frenet curve and the W-direction curve of the Frenet curve, two different ruled surfaces were formed. Gaussian and mean curvatures and distribution parameters of these new ruled surfaces were calculated, their developability and minimalities were examined. A comparison was made between these surfaces and properties and results were found. In addition, normal and binormal surfaces which are special ruled surfaces were obtained by taking the base curve as a W-Direction curve. The characterizations of these surfaces were given and base curves were investigated that ,of being asymptotic curve ,geodesic curve and line of curvature. Examples of the specified surfaces were also given.

Key Words: Ruled Surfaces, Frenet Vektors, Gaussian Curvature, Mean Curvature, W-Direction Curve, Base Curve, Developable Surface, Distribution Parameter.

ÖZET

ÖZEL EĞRİLERDEN ÜRETİLEN REGLE YÜZEYLER

ÖZSOY, Filiz

Yüksek Lisans Tezi, Matematik

Danışman: Doç. Dr. İlkay GÜVEN

Temmuz 2019

44 sayfa

Regle yüzeyler bir doğrunun, bir eğri boyunca hareket etmesi ile meydana gelen yüzeylerdir. Bu çalışmada; dayanak eğrileri, farklı eğriler alınarak özel regle yüzeyler üretilmiştir. Dayanak eğrisi Frenet eğrisi ve Frenet eğrisinin W-direction eğrisi alınarak iki farklı regle yüzey oluşturulmuştur. Bu yeni regle yüzeylerin Gauss ve ortalama eğrilikleri, dağılma parametreleri hesaplanmış, açılabilirlikleri ve minimallikleri incelenmiştir. Bu yüzeyler arasında karşılaştırma yapıp, özellikler ve sonuçlar bulunmuştur. Ayrıca dayanak eğrisi W-direction eğrisi alınarak, özel regle yüzeyler olan normal ve binormal yüzeyler elde edilmiştir. Bu yüzeylerin karakterizasyonları da verilip, dayanak eğrilerinin asimptotik eğri, geodezik eğri ve eğrilik çizgisi olma durumları incelenmiştir. Belirtilen yüzeylerle ilgili örnekler de verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Regle Yüzey, Frenet Vektörleri, Gauss Eğriliği, Ortalama Eğril

iği, İntegral Eğrisi, Dayanak Eğrisi, Açılabilir Yüzey, Dağılma

Parametresi.



“Canum aileme”

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden danışman hocam, Sayın Doç.Dr. İlkey GÜVEN'e sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Ders aşamasında bilgilerinden yaralandığım bölüm hocalarıma, tez jüri üyelerine teşekkürlerimi sunarım. Son olarak her anımda yanımda olan sevgili aileme teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ABSTRACT	v
ÖZET.....	vi
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	x
SEMBOLLER LİSTESİ	xi
BÖLÜM I: GİRİŞ.....	1
BÖLÜM II: TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Temel Kavramlar.....	3
2.1.1. Genel Anlamda Regle Yüzeyler.....	5
BÖLÜM III: GİRİŞ	30
3.1.W-Direction Eğrileriyle Oluşturulan Regle Yüzeyler.....	30
3.1.1.W-Direction Eğrileriyle Üretilen Regle Yüzeyler.....	35
KAYNAKLAR	43

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1	Frenet eğrisiyle oluşturulan teğet regle yüzey.....	27
Şekil 2.2	Frenet eğrisiyle oluşturulan normal regle yüzey.....	27
Şekil 2.3	W-Direction eğrisiyle oluşturulan normal regle yüzey.....	28
Şekil 2.4	Frenet eğrisiyle oluşturulan binormal regle yüzey.....	28
Şekil 2.5	W-Direction eğrisiyle oluşturulan binormal regle yüzey.....	29
Şekil 3.1	W-Direction eğrisiyle oluşturulan normal regle yüzey.....	42
Şekil 3.2	W-Direction eğrisiyle oluşturulan binormal regle yüzey.....	42

SEMBOLLER LİSTESİ

E^3	3-boyutlu Öklid uzayı
$\langle, \rangle$	Lorentz iç çarpım
$\ \cdot \ $	E_1^3 uzayında norm
$\mathbf{W}$	Darboux vektörü
$\mathbf{T}$	Frenet eğrinin teğet vektörü
$\mathbf{N}$	Frenet normal vektörü
$\mathbf{B}$	Frenet binormal vektörü
$\bar{\mathbf{T}}$	İntegral Eğrisinin teğet vektörü
$\bar{\mathbf{N}}$	İntegral Eğrisinin teğet vektörü
$\bar{\mathbf{B}}$	İntegral Eğrisinin teğet vektörü
$\mathbf{K}$	Gauss eğriliği
$\mathbf{H}$	Ortalama eğrilik
κ	Eğrinin eğriliği
τ	Eğrinin burulması
λ	Regle yüzeyin dağılma parametresi

BÖLÜM I

GİRİŞ

Diferansiyel geometride, yüzeyler, fizik, mühendislik, bilgisayar grafikleri gibi birçok disiplinde başlıca yere ve kavramlara sahiptir. Bu yüzeylerin en önemlilerinden biri Gaspard Monge tarafından ortaya konan regle yüzeydir. Herhangi bir regle yüzey, herhangi bir eğri boyunca bir doğrunun sürekli hareketinin bir sonucu olarak meydana gelir. Bu eğrilere sırasıyla dayanak eğrisi ve doğrultman denir. Ayrıca regle yüzeyler özellikle kinematic, bilgisayar destekli tasarım, bilgisayar destekli geometrik tasarım, mimari ve diğer birçok alanda uygulama alanına sahiptir. Bunlara ek olarak açılabilir yüzey ve minimal yüzey gibi yüzeylerin bazı sınıflarının araştırılması klasik diferansiyel geometrinin temel amaçlarından biridir.

Öklid uzayında regle yüzeyler ile ilgili temel kavramlar birçok kaynakta mevcuttur. Bunlardan bazıları Blaschke' nin (1949) (Kerim Erim tarafından çeviri) "Diferansiyel Geometri Dersleri", Müller' in (1963) "Kinematik Dersleri", Şenatalar' ın (1978) "Diferansiyel Geometri (Eğriler ve Yüzeyler Teorisi)", Biran' ın (1981) "Diferansiyel Geometri Dersleri", Hacısalihoğlu' nun (1983-1994) "Diferansiyel Geometri I-II" ve (1983b) "Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi" ve Sabuncuoğlu' nun (2006) "Diferansiyel Geometri" adlı kitaplarıdır. Valeontis' in (1986) "Parallel PÄquidistante Regelflachen" adlı çalışmasında paralel p-equidistant regle yüzeyler tanımlanarak bazı karakteristik özellikler verilmiştir. Masal' ın (1994), Masal ve Kuruoğlu' nun (1999, 2000a ve 2000b) çalışmalarında paralel pequidistant regle yüzeylerin integral invaryantları, şekil operatörleri ve küresel göstergeleri hesaplanmıştır. Güven (2010) doktora tezinde regle yüzeylerin Gauss eğriliklerini hesaplayarak bazı yeni sonuçlara ulaşmıştır. Sarioğlugil ve ark. (2011) çizgiler uzayındaki bir paralel p-equidistant dual centroit eğrisinin oluşturduğu regle yüzeyin integral invaryantları üzerinde çalışmışlardır. Şenyurt (2012) tarafından ani Pfaff vektörünün oluşturduğu paralel p-equidistant regle yüzeylerin integral invaryantları

bulunmuştur. As ve Şenyurt (2013) çalışmalarında asli normal vektörler paralel alınarak elde edilen equidistant regle yüzeylerin bazı özelliklerini vermişlerdir.



BÖLÜM II

TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1.1 Bir $M \subset E^3$ yüzeyi verilsin. $\forall P \in M$ noktasında E^3 ün tamamen M de kalan bir doğrusu varsa M ye bir regle yüzey ve $P \in M$ noktasından geçen, M de kalan bu doğruya da regle yüzeyin doğrultmanı denir.

Regle yüzeylerin parametrik denklemini elde etmek için yüzey üzerinde bulunan ve doğrultmanları kesen diferensiyellenebilir bir

$$\alpha: I \rightarrow E^3$$

$$t \rightarrow \alpha(t)$$

eğrisi alalım. Bu eğriye regle yüzeyin dayanak eğrisi denir. M regle yüzeyinin α dayanak eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki doğrultmanı üzerindeki değişken bir nokta β ve $\alpha(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t))$ birim doğrultmanı olmak üzere, β ,

$$\beta: IR \rightarrow M$$

$$v \rightarrow \beta(v) = \alpha(t) + v \alpha(t)$$

şeklindedir. Böylece regle yüzeyin parametrik denklemi

$$\varphi: I \times IR \rightarrow E^3$$

$$(t, v) \rightarrow \varphi(t, v) = \alpha(t) + v \alpha(t)$$

dönüşümü ile verilir.

Tanım 2.1.2 Bir $\varphi(s, v)$ regle yüzeyinin ana doğruları boyunca teğet düzlemleri aynı kalıyorsa regle yüzeye açılabilir denir.

Tanım 2.1.3 Regle yüzeyin komşu iki ana doğrusu arasındaki en kısa uzaklığın bu iki komşu ana doğrular arasındaki açığa oranına regle yüzeyin dağılma parametresi(dralı)denir.

Tanım 2.1.4 $\alpha: I \rightarrow E^3$, $\|\alpha'(t)\| = 1$ olacak şekilde bir eğri olsun. Bu durumda t ye α eğrisinin yay parametresi adı verilir (Hacısalıhoğlu 1993)

Tanım 2.1.5 $\alpha: I \rightarrow E^3$ eğrisinin t yay parametresi $\alpha'(t) = \frac{d\varphi}{dt}$ olmak üzere, $\alpha'(t)$ yi $T(t)$ ile gösterelim. $T(t)$ ye, $\alpha(t)$ noktasında γ nın birim teğet vektörü denir. α 'nın eğriliği $\kappa(t) = \|\alpha''(t)\|$ ile tanımlanır. Eğer $\kappa(t) \neq 0$ ise $\alpha(t)$ noktasında α eğrisinin $N(t)$ birim asli normal vektörü de $\alpha''(t) = \kappa(t).N(t)$ ile verilir. $B(t) = T(t) \times N(t)$ birim vektörüne, $\alpha(t)$ noktasında α eğrisinin birim binormal vektörü denir. Böylece Frenet Serret formülü aşağıdaki şekilde verilir:

$$T'(t) = \kappa(t).N(t)$$

$$N'(t) = -\kappa(t).T(t) + \tau(t).B(t)$$

$$B'(t) = -\tau(t).N(t)$$

Burada $\tau(t)$, $\alpha(t)$ noktasında α eğrisinin torsiyonudur (Izumiya ve Takeuchi 2001).

Tanım 2.1.6 $S \subset E^3$ de bir yüzey, $\alpha: I \rightarrow S$ birim hızlı bir eğri ve olsun. $\alpha''(t) = \alpha''(t)^T + \alpha''(t)^\perp$ olsun. $\|\alpha''(t)^T\| = k_g$ ve $\|\alpha''(t)^\perp\| = k_n$ ile gösterilen k_g ve k_n ye sırasıyla α eğrisinin geodezik ve normal eğriliği denir (Gray 1939)

Tanım 2.1.7 Birim hızlı her $\alpha: I \rightarrow E^3$ eğrisi için, $W(t) = \tau(t)T(t) + \kappa(t)B(t)$ vektör alanına, α eğrisinin Darboux vektör alanı denir (Hacısalıhoğlu 1993).

Tanım 2.1.8 β, E^3 de bir Frenet eğrisi ve W β 'nın Darboux vektörü olsun. $W(s)$ nin integral eğrisi W -direction eğrisi olarak adlandırılır. Yani β 'nın W -direction eğrisi $\bar{\beta}$, sonra $W(s) = \bar{\beta}'(s)$, buradan $W = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}(\tau T + \kappa B)$ şeklindedir.

2.2 Genel Anlamda Regle Yüzeyler

$$\varphi_1: I \times \mathbb{R} \rightarrow E^3$$

$$(t, v) \rightarrow \varphi_1(t, v) = \beta(t) + vX_1(t) \quad (2.1)$$

dayanak eğrisi β olan regle yüzeyi verilsin. Bu yüzeyin t ve v parametrelerine göre türevleri alınırsa ;

$$(\varphi_1)_t = \beta'(t) + v.X_1'(t) \quad (2.2)$$

$$(\varphi_1)_v = X_1(t) \quad (2.3)$$

$$(\varphi_1)_{tt} = \beta''(t) + v.X_1''(t) \quad (2.4)$$

$$(\varphi_1)_{vv} = 0 \quad (2.5)$$

şeklinde elde edilir.

Dayanak eğrisi $\beta(t)$ alınarak oluşturulan (2.1) eşitliğindeki regle yüzeyinin normali U_1 olmak üzere, (2.2) ve (2.3) eşitlikleri yerlerine yazıldığında ;

$$U_1 = \frac{(\varphi_1)_t \times (\varphi_1)_v}{\|(\varphi_1)_t \times (\varphi_1)_v\|} = \frac{(\beta'(t) + v.X_1'(t)) \times X_1(t)}{\|(\varphi_1)_t \times (\varphi_1)_v\|}$$
$$U_1 = \frac{(\beta'(t) \times X_1(t)) + v.(X_1'(t) \times X_1(t))}{\|(\varphi_1)_t \times (\varphi_1)_v\|} \quad (2.6)$$

şeklinde elde edilir.

$\varphi(t, v) = \beta(t) + v.X(t)$ regle yüzeyinin Gauss eğriliğini, ortalama eğriliğini ve dağılma parametresini veren eşitlikler

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad (2.7)$$

ve

$$H = \frac{Eg + Ge - 2Ff}{2(EG - F^2)} \quad (2.8)$$

burada $\langle \varphi_t, \varphi_t \rangle$, $F = \langle \varphi_t, \varphi_v \rangle$, $G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$, $e = \langle \varphi_{tt}, U \rangle$, $f = \langle \varphi_{tv}, U \rangle$ ve $g = \langle \varphi_{vv}, U \rangle$.

$$\lambda = \frac{\det(\frac{d\beta}{ds}, \delta, \frac{d\delta}{ds})}{\|\frac{d\delta}{ds}\|^2}. \quad (2.9)$$

Şimdi $\varphi_1(t, v) = \beta(t) + vX_1(t)$ denklemindeki regle yüzeyinin Gauus eğriliği, ortalama eğriliği ve dağılma parametresi (2.7) , (2.8) ve (2.9) te verilen eşitlikler yardımıyla bulunacaktır ;

$$E_1 = \langle (\varphi_1)_t, (\varphi_1)_t \rangle = \|(\varphi_1)_t\|^2 = \|\beta'(t) + v.X_1'(t)\|^2$$

$$F_1 = \langle (\varphi_1)_t, (\varphi_1)_v \rangle = \langle \beta'(t) + v.X_1'(t), X_1(t) \rangle$$

$$G_1 = \langle (\varphi_1)_v, (\varphi_1)_v \rangle = \|(\varphi_1)_v\|^2 = \|X_1(t)\|^2$$

$$e_1 = \langle (\varphi_1)_{tt}, U_1 \rangle \\ = \frac{1}{\|(\varphi_1)_t \times (\varphi_1)_v\|} \langle \beta''(t) + v.X_1''(t), \beta'(t) + vX_1'(t) \times X_1(t) \rangle$$

$$f_1 = \langle (\varphi_1)_{tv}, U_1 \rangle = \frac{1}{\|(\varphi_1)_t \times (\varphi_1)_v\|} \langle X_1'(t), (\beta'(t) + vX_1'(t)) \times X_1(t) \rangle$$

$$f_1 = \frac{1}{\|(\varphi_1)_t \times (\varphi_1)_v\|} \langle X_1'(t), (\beta'(t) \times X_1(t)) \rangle$$

$$g_1 = \langle (\varphi_1)_{vv}, U_1 \rangle = \langle 0, U_1 \rangle = 0$$

bu işlemlerde aşağıdaki kısaltmalar kullanılırsa ;

$$I_1 = X_1(t)$$

$$A_1 = \beta''(t) + v.X_1''(t)$$

$$B_1 = \beta'(t) \times X_1(t)$$

$$C_1 = X_1'(t) \times X_1(t)$$

$$D_1 = \beta'(t) + v.X_1'(t)$$

regle yüzeyin sırasıyla Gauss eğriliği, ortalama eğriliği ve dağılma parametresi

$$K_1 = \frac{e_1 g_1 - f_1^2}{E_1 G_1 - F_1^2}$$

$$= -\frac{1}{\|(\varphi_1)_t \times (\varphi_1)_v\|^2} \cdot \frac{\langle I_1', B_1 \rangle^2}{(\|D_1\|^2) \cdot \|I_1\|^2 - (\langle D_1, I_1 \rangle)^2} \quad (2.10)$$

$$H_1 = \frac{E_1 g_1 + G_1 e_1 - 2F_1 f_1}{2(E_1 G_1 - F_1^2)}$$

$$= \frac{1}{2\|(\varphi_1)_t \times (\varphi_1)_v\|^2} \cdot \frac{\|I_1\|^2 \cdot \langle A_1, B_1 + vC_1 \rangle - 2\langle D_1, I_1 \rangle \cdot \langle I_1', B_1 \rangle}{(\|D_1\|^2) \cdot \|I_1\|^2 - (\langle D_1, I_1 \rangle)^2} \quad (2.11)$$

ve

$$\lambda_{\varphi_1} = \frac{\det(\beta'(t), X_1(t), X_1'(t))}{\|X_1'(t)\|^2} \quad (2.12)$$

şeklinde elde edilir.

$$\varphi_2(t, v) = \bar{\beta}(t) + v.X_2(t) \quad (2.13)$$

dayanak eğrisi β 'nın integral eğrisi $\bar{\beta}$ alınarak oluşturulan regle yüzeyi verilsin. Bu yüzeyin t ve v parametrelerine göre türevleri alındığında;

$$(\varphi_2)_t = \bar{\beta}'(t) + v.X_2'(t) \quad (2.14)$$

$$(\varphi_2)_v = X_2(t) \quad (2.15)$$

$$(\varphi_2)_{tt} = \bar{\beta}''(t) + v.X_2''(t) \quad (2.16)$$

$$(\varphi_2)_{vv} = (0,0,0) \quad (2.17)$$

Dayanak eğrisi $\bar{\beta}(t)$ alınarak oluşturulan (2.13) deki regle yüzeyinin normali U_2 olmak üzere, (2.14) ve (2.15) eşitlikleri yerlerine yazıldığında;

$$U_2 = \frac{(\varphi_2)_t \times (\varphi_2)_v}{\|(\varphi_2)_t \times (\varphi_2)_v\|} = \frac{(\bar{\beta}'(t) + v \cdot X_2'(t)) \times X_2(t)}{\|(\varphi_2)_t \times (\varphi_2)_v\|}$$

$$U_2 = \frac{(\bar{\beta}'(t) \times X_2(t)) + v \cdot (X_2'(t) \times X_2(t))}{\|(\varphi_2)_t \times (\varphi_2)_v\|} \quad (2.18)$$

şeklinde elde edilir.

$\varphi_2(t, v) = \bar{\beta}(t) + v \cdot X_2(t)$ regle yüzeyinin Gauss eğriliğini, ortalama eğriliğini ve dağılma parametresini (2.7) , (2.8) ve (2.9) eşitlikleri yardımıyla hesaplandığında;

burada;

$$E_2 = \langle (\varphi_2)_t, (\varphi_2)_t \rangle = \|(\varphi_2)_t\|^2 = \|\bar{\beta}'(t) + v \cdot X_2'(t)\|^2$$

$$F_2 = \langle (\varphi_2)_t, (\varphi_2)_v \rangle = \langle \bar{\beta}'(t) + v \cdot X_2'(t), X_2(t) \rangle$$

$$G_2 = \langle (\varphi_2)_v, (\varphi_2)_v \rangle = \|(\varphi_2)_v\|^2 = \|X_2(t)\|^2$$

$$e_2 = \langle (\varphi_2)_{tt}, U_2 \rangle$$

$$= \frac{1}{\|(\varphi_2)_t \times (\varphi_2)_v\|} \langle \bar{\beta}''(t) + v \cdot X_2''(t), \bar{\beta}'(t) + v \cdot X_2'(t) \times X_2(t) \rangle$$

$$f_2 = \langle (\varphi_2)_{tv}, U_2 \rangle = \frac{1}{\|(\varphi_2)_t \times (\varphi_2)_v\|} \langle X_2'(t), (\bar{\beta}'(t) + v \cdot X_2'(t)) \times X_2(t) \rangle$$

$$f_2 = \frac{1}{\|(\varphi_2)_t \times (\varphi_2)_v\|} \langle X_2'(t), (\bar{\beta}'(t) \times X_2(t)) \rangle$$

$$g_2 = \langle (\varphi_2)_{vv}, U_2 \rangle = \langle 0, U_2 \rangle = 0$$

bu işlemlerde aşağıdaki kısaltmalar kullanılırsa;

$$I_2 = X_2(t)$$

$$A_2 = \bar{\beta}''(t) + v \cdot X_2''(t)$$

$$B_2 = \bar{\beta}'(t) \times X_2(t)$$

$$C_2 = X_2'(t) \times X_2(t)$$

$$D_2 = \bar{\beta}'(t) + v \cdot X_2'(t)$$

regle yüzeyin sırasıyla Gauss eğriliği, ortalama eğriliği ve dağılma parametresi

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{e_2 g_2 - f_2^2}{E_2 G_2 - F_2^2} \\ &= -\frac{1}{\|(\varphi_2)_t \times (\varphi_2)_v\|^2} \cdot \frac{\langle I_2', B_2 \rangle^2}{\|D_2\|^2 \cdot \|I_2\|^2 - (\langle D_2, I_2 \rangle)^2} \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{E_2 g_2 + G_2 e_2 - 2F_2 f_2}{2(E_2 G_2 - F_2^2)} \\ &= \frac{1}{2\|(\varphi_2)_t \times (\varphi_2)_v\|^2} \cdot \frac{\|I_2\|^2 \cdot \langle A_2, B_2 + vC_2 \rangle - 2\langle D_2, I_2 \rangle \cdot \langle I_2', B_2 \rangle}{\|D_2\|^2 \cdot \|I_2\|^2 - (\langle D_2, I_2 \rangle)^2} \end{aligned} \quad (2.20)$$

ve

$$\begin{aligned} \lambda_{\varphi_2} &= \frac{\det(\bar{\beta}'(t), X_2(t), X_2'(t))}{\|X_2'(t)\|^2} \\ &= \frac{\langle \bar{\beta}'(t), X_2(t) \times X_2'(t) \rangle}{\|X_2'(t)\|^2} \end{aligned} \quad (2.21)$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi (2.1) ve (2.13) deki regle yüzey denklemlerinde $X_1(t) = X_2(t)$ olsun. Regle yüzeylerin elde ettiğimiz (2.10), (2.11), (2.12), (2.19), (2.20) ve (2.21) eşitliklerinde sırasıyla Gauss eğriliğinde, ortalama eğriliğinde ve dağılma parametresinde $X_1(t) = X_2(t)$ olsun. Burada eğer , β birim hızlı bir eğri ise $\|\beta'(t)\| = 1$ ve $\beta'(t) = T$ olup , $W(t) = \bar{\beta}'(t)$ ve

$$W(t) = \frac{1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} (k_2 T + k_1 B) \text{ eşitliğinde}$$

$k_1 = 0$ ve $k_2 = 1$ alındığında $W = T$ olup $\lambda_{\varphi_1} = \lambda_{\varphi_2}, K_1 = K_2, H_1 = H_2$ eşitlikleri elde edilir.

Şimdi (2.1) ile verilen regle yüzey denkleminde $X_1(t) = T$ alınıp teğet vektör ile oluşturulan regle yüzeyi elde edilir. Daha önce oluşturulan kısaltmalarda $X_1(t) = T$ alınıp gerekli hesaplamalar yapıldığında aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$I_1 = X_1(t) = T$$

$$A_1 = \beta''(t) + v.X_1''(t) = T' + v.T''$$

$$B_1 = \beta'(t) \times X_1(t) = T \times T = 0$$

$$C_1 = X_1'(t) \times X_1(t) = T' \times T$$

$$D_1 = \beta'(t) + v.X_1'(t) = T + v.T'$$

elde edilen bu eşitlikleri kullanarak regle yüzeyinin Gauss eğriliği, ortalama eğriliği ve dağılma parametresi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$K_1 = \frac{e_1 g_1 - f_1^2}{E_1 G_1 - F_1^2} = -\frac{1}{\|(\varphi_1)_t \times (\varphi_1)_v\|^2} \cdot \frac{\langle I_1', B_1 \rangle^2}{(\|D_1\|^2) \cdot \|I_1\|^2 - (\langle D_1, I_1 \rangle)^2} = 0$$

olduğundan yüzey üzerindeki noktalar flat(düz)tır ve paraboliktir.

$$H_1 = \frac{E_1 g_1 + G_1 e_1 - 2F_1 f_1}{2(E_1 G_1 - F_1^2)} \\ = \frac{1}{2\|(\varphi_1)_t \times (\varphi_1)_v\|^2} \cdot \frac{\|I_1\|^2 \cdot \langle A_1, B_1 + vC_1 \rangle - 2\langle D_1, I_1 \rangle \cdot \langle I_1', B_1 \rangle}{(\|D_1\|^2) \cdot \|I_1\|^2 - (\langle D_1, I_1 \rangle)^2}$$

$$H_1 = \frac{1}{2\|(\varphi_1)_t \times (\varphi_1)_v\|^2} \frac{-v^2 k_1^2 k_2}{k_1^2 - 1}$$

burada $k_2 = 0$ alındığında yüzey minimal olur.

$$\lambda_{\varphi_1} = \frac{\det(\beta'(t), X_1(t), X_1'(t))}{\|X_1'(t)\|^2} = \frac{\langle \beta'(t), X_1(t) \times X_1'(t) \rangle}{\|X_1'(t)\|^2}$$

$$= \frac{\langle T, T \times T' \rangle}{\|T'\|^2} = 0$$

olduğundan yüzey açılabilir.

Şimdi (2.13) ile verilen regle yüzey denkleminde $X_2(t) = \bar{T}$ alıp W- Direction eğrisi ile oluşturulan teğet regle yüzeyi elde edilsin. Daha önce oluşturulan kısaltmalarda $X_2(t) = \bar{T}$ alınıp gerekli hesaplamalar yapıldığında aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\bar{T} = \frac{k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} T + \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} B = W \text{ dır.}$$

$$I_2 = X_2(t) = \bar{T}$$

$$A_2 = \bar{\beta}''(t) + v.X_2''(t) = W' + v.\bar{T}'' = \bar{T}' + v.\bar{T}''$$

$$B_2 = \bar{\beta}'(t) \times X_2(t) = W \times \bar{T} = \bar{T} \times \bar{T} = 0$$

$$C_2 = X_2'(t) \times X_2(t) = \bar{T}' \times \bar{T} = \frac{1}{k_1^2 + k_2^2} (k_2 T' + k_1 B') \times (k_2 T + k_1 B) = 0$$

$$D_2 = \bar{\beta}'(t) + v.X_2'(t) = W + v.\bar{T}' = \bar{T} + v.\bar{T}' = \frac{1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} (k_2 T + k_1 B)$$

$$K_2 = \frac{e_2 g_2 - f_2^2}{E_2 G_2 - F_2^2} = - \frac{1}{\|(\varphi_2)_t \times (\varphi_2)_v\|^2} \cdot \frac{\langle I_2', B_2 \rangle^2}{\|D_2\|^2 \cdot \|I_2\|^2 - (\langle D_2, I_2 \rangle)^2} = 0$$

olduğundan yüzey üzerindeki noktalar flat(düz)tır ve paraboliktir.

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{E_2 g_2 + G_2 e_2 - 2F_2 f_2}{2(E_2 G_2 - F_2^2)} \\ &= \frac{1}{2\|(\varphi_2)_t \times (\varphi_2)_v\|^2} \cdot \frac{\|I_2\|^2 \cdot \langle A_2, B_2 + vC_2 \rangle - 2\langle D_2, I_2 \rangle \cdot \langle I_2', B_2 \rangle}{\|D_2\|^2 \cdot \|I_2\|^2 - (\langle D_2, I_2 \rangle)^2} \\ &= \frac{0}{0} \end{aligned}$$

olduğundan belirsizliği elde edilir.

$$\lambda_{\varphi_2} = \frac{\det(\bar{\beta}'(t), X_2(t), X_2'(t))}{\|X_2'(t)\|^2} = \frac{\langle \bar{\beta}'(t), X_2(t) \times X_2'(t) \rangle}{\|X_2'(t)\|^2}$$

$$= \frac{\langle W, \bar{T} \times \bar{T}' \rangle}{\|\bar{T}'\|^2} = \frac{\langle \bar{T}, \bar{T} \times \bar{T}' \rangle}{\|\bar{T}'\|^2} = 0$$

olduğundan yüzey açılabilir.

Şimdi (2.11) ile verilen regle yüzey denkleminde $X_1(t) = N$ alıp normal yüzey elde edilsin. Daha önce oluşturulan kısaltmalarda $X_1(t) = N$ alınıp gerekli hesaplamalar yapıldığında aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$I_1 = X_1(t) = N$$

$$A_1 = \beta''(t) + v.X_1''(t) = T' + v.N''$$

$$B_1 = \beta'(t) \times X_1(t) = T \times N = B$$

$$C_1 = X_1'(t) \times X_1(t) = N' \times N = -k_1 B - k_2 T$$

$$D_1 = \beta'(t) + v.X_1'(t) = T + v.N' = T + v.(-k_1 T + k_2 B)$$

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{e_1 g_1 - f_1^2}{E_1 G_1 - F_1^2} = -\frac{1}{\|(\varphi_1)_t \times (\varphi_1)_v\|^2} \cdot \frac{\langle I_1', B_1 \rangle^2}{(\|D_1\|^2) \cdot \|I_1\|^2 - (\langle D_1, I_1 \rangle)^2} \\ &= \frac{k_2^2}{1 - 2vk_1 + k_1^2 + k_2^2} \end{aligned}$$

olup burada eğer $k_2 = 0$ olursa yüzey üzerindeki noktalar flat (düz) ve parabolik olur.

$$H_1 = \frac{1}{2\|(\varphi_1)_t \times (\varphi_1)_v\|^2} \cdot \frac{\|I_1\|^2 \cdot \langle A_1, B_1 + vC_1 \rangle - 2\langle D_1, I_1 \rangle \cdot \langle I_1', B_1 \rangle}{(\|D_1\|^2) \cdot \|I_1\|^2 - (\langle D_1, I_1 \rangle)^2} = 0$$

olduğundan yüzey minimaldir.

$$\lambda_{\varphi_1} = \frac{\det(\beta'(t), X_1(t), X_1'(t))}{\|X_1'(t)\|^2} = \frac{\langle \beta'(t), X_1(t) \times X_1'(t) \rangle}{\|X_1'(t)\|^2} = \frac{\langle T, N \times N' \rangle}{\|N'\|^2}$$

$$\lambda_{\varphi_1} = \frac{k_2}{k_1^2 + k_2^2}$$

burada $k_2 = 0$ olursa yüzey açılabilir.

Şimdi (2.13) ile verilen regle yüzey denkleminde $X_2(t) = \bar{N}$ alıp W-Direction eğrisi ile oluşturulan normal yüzey elde edilsin. Daha önce oluşturulan kısaltmalarda $X_2(t) = \bar{N}$ alınıp gerekli hesaplamalar yapıldığında aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$I_2 = X_2(t) = \bar{N} = \frac{1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} (-k_1 T + k_2 B)$$

$$A_2 = \bar{\beta}''(t) + v.X_2''(t) = \bar{T}' + v.\bar{N}''$$

$$B_2 = \bar{\beta}'(t) \times X_2(t) = \bar{T} \times \bar{N} = -N$$

$$C_2 = X_2'(t) \times X_2(t) = \bar{N}' \times \bar{N}$$

$$D_2 = \bar{\beta}'(t) + v.X_2'(t) = \bar{T} + v.\bar{N}' = \frac{1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} (k_2 T + k_1 B - v.(k_1^2 + k_2^2)N)$$

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{e_2 g_2 - f_2^2}{E_2 G_2 - F_2^2} = -\frac{1}{\|(\varphi_2)_t \times (\varphi_2)_v\|^2} \cdot \frac{\langle I_2', B_2 \rangle^2}{\|D_2\|^2 \cdot \|I_2\|^2 - (\langle D_2, I_2 \rangle)^2} \\ &= -\frac{1}{\|(\varphi_2)_t \times (\varphi_2)_v\|^2} \cdot \frac{k_1^2 + k_2^2}{1 + v^2(k_1^2 + k_2^2)} \end{aligned}$$

olduğundan normal yüzey üzerindeki noktalar flat(düz) ve parabolik değildir.

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{E_2 g_2 + G_2 e_2 - 2F_2 f_2}{2(E_2 G_2 - F_2^2)} \\ &= \frac{1}{2\|(\varphi_2)_t \times (\varphi_2)_v\|^2} \cdot \frac{\|I_2\|^2 \cdot \langle A_2, B_2 + vC_2 \rangle - 2\langle D_2, I_2 \rangle \cdot \langle I_2', B_2 \rangle}{\|D_2\|^2 \cdot \|I_2\|^2 - (\langle D_2, I_2 \rangle)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan yüzey minimaldir.

$$\lambda_{\varphi_2} = \frac{\det(\bar{\beta}'(t), X_2(t), X_2'(t))}{\|X_2'(t)\|^2} = \frac{\langle \bar{\beta}'(t), X_2(t) \times X_2'(t) \rangle}{\|X_2'(t)\|^2} = \frac{\langle \bar{T}, \bar{N} \times \bar{N}' \rangle}{\|\bar{N}'\|^2}$$

$$\lambda_{\varphi_2} = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$$

olduğundan normal yüzey açılabilir değildir.

Şimdi (2.1) ile verilen regle yüzey denkleminde $X_1(t) = B$ alıp binormal regle yüzeyi elde edilsin. Daha önce oluşturulan kısaltmalarda $X_1(t) = B$ alınıp gerekli hesaplamalar yapıldığında aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$I_1 = X_1(t) = B$$

$$A_1 = \beta''(t) + v.X_1''(t) = T' + v.B''$$

$$B_1 = \beta'(t) \times X_1(t) = T \times B = -N$$

$$C_1 = X_1'(t) \times X_1(t) = B' \times B = -k_2 T$$

$$D_1 = \beta'(t) + v.X_1'(t) = T + v.B' = T + v.(-k_2 N)$$

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{e_1 g_1 - f_1^2}{E_1 G_1 - F_1^2} = -\frac{1}{\|(\varphi_1)_t \times (\varphi_1)_v\|^2} \cdot \frac{\langle I_1', B_1 \rangle^2}{(\|D_1\|^2) \cdot \|I_1\|^2 - (\langle D_1, I_1 \rangle)^2} \\ &= -\frac{1}{\|(\varphi_1)_t \times (\varphi_1)_v\|^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{k_2^2} + v^2} \neq 0 \end{aligned}$$

olduğundan yüzey üzerindeki noktalar flat(düz) ve parabolik değildir.

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{E_1 g_1 + G_1 e_1 - 2F_1 f_1}{2(E_1 G_1 - F_1^2)} \\ &= \frac{1}{2\|(\varphi_1)_t \times (\varphi_1)_v\|^2} \cdot \frac{\|I_1\|^2 \cdot \langle A_1, B_1 + vC_1 \rangle - 2\langle D_1, I_1 \rangle \cdot \langle I_1', B_1 \rangle}{(\|D_1\|^2) \cdot \|I_1\|^2 - (\langle D_1, I_1 \rangle)^2} \\ H_1 &= \frac{1}{2\|(\varphi_1)_t \times (\varphi_1)_v\|^2} \cdot \frac{v^3 k_1 k_2^2 - k_1}{1 + v^2 k_2^2} \end{aligned}$$

$v^3 k_2^2 - 1 = 0$ koşulunda yüzey minimaldir.

$$\lambda_{\varphi_1} = \frac{\det(\beta'(t), X_1(t), X_1'(t))}{\|X_1'(t)\|^2} = \frac{\langle \beta'(t), X_1(t) \times X_1'(t) \rangle}{\|X_1'(t)\|^2} = \frac{\langle T, B \times B' \rangle}{\|B'\|^2}$$

$$\lambda_{\varphi_1} = \frac{1}{k_2}$$

olduğundan yüzey açılabilir değildir.

Şimdi (2.13) ile verilen regle yüzey denkleminde $X_2(t) = \bar{B}$ alıp W-Direction eğrisi ile oluşturulan binormal yüzey elde edilsin. Daha önce oluşturulan kısaltmalarda $X_2(t) = \bar{B}$ alınıp gerekli hesaplamalar yapıldığında aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$I_2 = X_2(t) = \bar{B} = \bar{T} \times \bar{N}$$

$$A_2 = \bar{\beta}''(t) + v.X_2''(t) = W' + v.\bar{T}'' = \bar{T}' + v.\bar{B}''$$

$$B_2 = \bar{\beta}'(t) \times X_2(t) = W \times \bar{T} = \bar{T} \times \bar{B} = -\bar{N}$$

$$C_2 = X_2'(t) \times X_2(t) = \bar{B}' \times \bar{B} = 0$$

$$D_2 = \bar{\beta}'(t) + v.X_2'(t) = W + v.\bar{T}' = \bar{T} + v.\bar{B}'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} (k_2 T + k_1 B) - v.N'$$

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{e_2 g_2 - f_2^2}{E_2 G_2 - F_2^2} = -\frac{1}{\|(\varphi_2)_t \times (\varphi_2)_v\|^2} \cdot \frac{\langle I_2', B_2 \rangle^2}{\|D_2\|^2 \cdot \|I_2\|^2 - (\langle D_2, I_2 \rangle)^2} \\ &= -\frac{1}{\|(\varphi_2)_t \times (\varphi_2)_v\|^2} - \frac{1}{k_1^2 + k_2^2} \neq 0 \end{aligned}$$

olduğundan yüzey üzerindeki noktalar flat (düz) ve parabolik değildir.

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{E_2 g_2 + G_2 e_2 - 2F_2 f_2}{2(E_2 G_2 - F_2^2)} \\ &= \frac{1}{2\|(\varphi_2)_t \times (\varphi_2)_v\|^2} \cdot \frac{\|I_2\|^2 \cdot \langle A_2, B_2 + vC_2 \rangle - 2\langle D_2, I_2 \rangle \cdot \langle I_2', B_2 \rangle}{\|D_2\|^2 \cdot \|I_2\|^2 - (\langle D_2, I_2 \rangle)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan yüzey minimaldir.

$$\begin{aligned} \lambda_{\varphi_2} &= \frac{\det(\bar{\beta}'(t), X_2(t), X_2'(t))}{\|X_2'(t)\|^2} = \frac{\langle \bar{\beta}'(t), X_2(t) \times X_2'(t) \rangle}{\|X_2'(t)\|^2} = \frac{\langle W, \bar{T} \times \bar{T}' \rangle}{\|\bar{T}'\|^2} \\ &= \frac{\langle \bar{T}, \bar{B} \times \bar{B}' \rangle}{\|\bar{B}'\|^2} = \frac{1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \end{aligned}$$

olduğundan yüzey açılabilir değildir.

Şimdi (2.1) denkleminde verilen regle yüzey denkleminde özel olarak $X_1(t) = (0,0,t)$ olsun ($t \in \mathbb{R}$). Burada gerekli hesaplamalar yapıldığında;

$$\varphi_1(t, v) = \beta(t) + v \cdot X_1(t)$$

$$\varphi_1(t, v) = \beta(t) + v \cdot (0,0,t)$$

$$X_1'(t) = (0,0,1)$$

$$\lambda_{\varphi_1} = \frac{\det(\beta'(t), X_1(t), X_1'(t))}{\|X_1'(t)\|^2} = \frac{\langle \beta'(t), X_1(t) \times X_1'(t) \rangle}{\|X_1'(t)\|^2}$$

$X_1(t) \times X_1'(t) = (0,0,0)$ olup $\lambda_{\varphi_1} = 0$ elde edilir. $X_1(t) = (0,0,t)$ yüzeyinin oluşturduğu regle yüzey açılabilir.

$$I_1 = X_1(t) = (0,0,t)$$

$$A_1 = \beta''(t) + v \cdot X_1''(t) = \beta''(t) + v \cdot (0,0,0) = \beta''(t)$$

$$B_1 = \beta'(t) \times X_1(t) = \beta'(t) \times (0,0,t)$$

$$C_1 = X_1'(t) \times X_1(t) = (0,0,0)$$

$$D_1 = \beta'(t) + v \cdot X_1'(t) = \beta'(t) + v \cdot (0,0,1)$$

$$K_1 = \frac{e_1 g_1 - f_1^2}{E_1 G_1 - F_1^2} = -\frac{1}{\|(\varphi_1)_t \times (\varphi_1)_v\|^2} \cdot \frac{\langle I_1', B_1 \rangle^2}{(\|D_1\|^2) \cdot \|I_1\|^2 - (\langle D_1, I_1 \rangle)^2} = 0$$

olduğundan regle yüzey üzerindeki noktalar flat(düz)tır ve paraboliktir.

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{E_1 g_1 + G_1 e_1 - 2F_1 f_1}{2(E_1 G_1 - F_1^2)} \\ &= \frac{1}{2\|(\varphi_1)_t \times (\varphi_1)_v\|^2} \cdot \frac{\|I_1\|^2 \cdot \langle A_1, B_1 + vC_1 \rangle - 2\langle D_1, I_1 \rangle \cdot \langle I_1', B_1 \rangle}{(\|D_1\|^2) \cdot \|I_1\|^2 - (\langle D_1, I_1 \rangle)^2} \\ &= \frac{1}{2\|(\varphi_1)_t \times (\varphi_1)_v\|^2} \cdot \\ &\quad \frac{t^2 \cdot \langle \beta''(t), \beta'(t) \times (0,0,t) \rangle}{\|\beta'(t)\|^2 + v^2 + 2v \cdot \langle \beta'(t), (0,0,1) \rangle t^2 - (\langle \beta'(t) + v \cdot (0,0,1), (0,0,t) \rangle)^2} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Şimdi (2.13) denklemiyle verilen regle yüzey denkleminde $X_2(t) = (t, 0, 0)$ olsun ($t \in \mathbb{R}$). Buradan gerekli hesaplamalar yapıldığında; W-Direction eğrisiyle oluşturulan regle yüzeyin Gauss eğriliği, ortalama eğriliği ve dağılma parametresi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$I_2 = X_2(t) = (t, 0, 0)$$

$$A_2 = \bar{\beta}''(t) + v \cdot X_2''(t) = \bar{\beta}''(t) + v \cdot (0, 0, 0) = \bar{\beta}''(t)$$

$$B_2 = \bar{\beta}'(t) \times X_2(t) = \bar{\beta}'(t) \times (t, 0, 0)$$

$$C_2 = X_2'(t) \times X_2(t) = (1, 0, 0) \times (t, 0, 0)$$

$$D_2 = \bar{\beta}'(t) + v \cdot X_2'(t) = \bar{\beta}'(t) + v \cdot (1, 0, 0)$$

$$K_2 = \frac{e_2 g_2 - f_2^2}{E_2 G_2 - F_2^2} = -\frac{1}{\|(\varphi_2)_t \times (\varphi_2)_v\|^2} \cdot \frac{\langle I_2', B_2 \rangle^2}{\|D_2\|^2 \cdot \|I_2\|^2 - (\langle D_2, I_2 \rangle)^2} = 0$$

olduğundan yüzey üzerindeki noktalar flat(düz) tır ve paraboliktir.

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{E_2 g_2 + G_2 e_2 - 2F_2 f_2}{2(E_2 G_2 - F_2^2)} \\ &= \frac{1}{2\|(\varphi_2)_t \times (\varphi_2)_v\|^2} \cdot \frac{\|I_2\|^2 \cdot \langle A_2, B_2 + vC_2 \rangle - 2\langle D_2, I_2 \rangle \cdot \langle I_2', B_2 \rangle}{\|D_2\|^2 \cdot \|I_2\|^2 - (\langle D_2, I_2 \rangle)^2} \\ &= \frac{1}{2\|(\varphi_1)_t \times (\varphi_1)_v\|^2} \cdot \\ &\quad \frac{t^2 \cdot \langle \bar{\beta}''(t), \bar{\beta}'(t) \times (t, 0, 0) \rangle}{\|\bar{\beta}'(t)\|^2 + v^2 + 2v \cdot \langle \bar{\beta}'(t), (1, 0, 0) \rangle t^2 - (\langle \bar{\beta}'(t) + v \cdot (1, 0, 0), (t, 0, 0) \rangle)^2} \neq 0 \end{aligned}$$

olduğundan yüzey minimal değildir.

$$\lambda_{\varphi_2} = \frac{\det(\bar{\beta}'(t), X_2(t), X_2'(t))}{\|X_2'(t)\|^2} = \frac{\langle \bar{\beta}'(t), (t, 0, 0) \times (1, 0, 0) \rangle}{\|X_2'(t)\|^2} = 0$$

olduğundan yüzey açılabilir.

Örnek:

$$\beta(t) = \left(\frac{3}{5} \sin t, 1 + \cos t, \frac{4}{5} \sin t \right) \text{ eğrisi verilsin.}$$

$\beta'(t) = \left(\frac{3}{5} \cos t, -\sin t, \frac{4}{5} \cos t\right)$. $\|\beta'(t)\| = 1$ olduğundan eğri birim hızlı (t yay parametreli) eğridir.

Bu eğrinin Frenet vektör alanları hesaplandığında;

$$T = \beta'(t) = \left(\frac{3}{5} \cos t, -\sin t, \frac{4}{5} \cos t\right)$$

$$N = \frac{\beta''(t)}{\|\beta''(t)\|} = \left(-\frac{3}{5} \sin t, -\cos t, -\frac{4}{5} \sin t\right)$$

$$B = T \times N = \left(\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5}\right)$$

şeklinde elde edilir.

Eğrinin eğrilikleri hesaplanırsa;

$$k_1 = \|\beta''(t)\| = 1$$

$$k_2 = \frac{\langle \beta'(t), \beta''(t) \times \beta'''(t) \rangle}{\|\beta'(t) \times \beta''(t)\|} = 0$$

şeklinde bulunur.

Bu eğrinin Darboux vektörü ile integral eğrisi hesaplandığında;

$$W(t) = \frac{1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} (k_2 T + k_1 B) = \left(\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5}\right)$$

$$\bar{\beta}(t) = \int W(t) dt = \int \left(\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5}\right) dt = \left(\frac{4}{5}t + c_1, c_2, -\frac{3}{5}t + c_3\right)$$

şeklinde elde edilir.

Bu eğrinin W-direction eğrisinin Frenet elemanları $\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}$ hesaplandığında;

$$\bar{T} = \frac{1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} (k_2 T + k_1 B) = \left(\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5}\right)$$

$$\bar{N} = \frac{1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} (-k_1 T + k_2 B) = \left(-\frac{3}{5} \cos t, \sin t, -\frac{4}{5} \cos t\right)$$

$$\bar{B} = \bar{T} \times \bar{N} = \left(\frac{3}{5} \sin t, \cos t, \frac{4}{5} \sin t\right)$$

şeklinde elde edilir.

Bu eğrinin dayanak eğrisi $\beta(t) = \left(\frac{3}{5} \sin t, 1 + \cos t, \frac{4}{5} \sin t\right)$ olan regle yüzey $\varphi_1(t, v) = \left(\frac{3}{5} \sin t, 1 + \cos t, \frac{4}{5} \sin t\right) + v \cdot X_1(t)$ ve dayanak eğrisi bu eğrinin integral eğrisi $\bar{\beta}(t) = \left(\frac{4}{5} t, 0, -\frac{3}{5} t\right)$ olan regle yüzey $\varphi_2(t, v) = \left(\frac{4}{5} t, 0, -\frac{3}{5} t\right) + v \cdot X_2(t)$ şeklinde elde edilir.

Şimdi φ_1 regle yüzeyinde $X_1(t)=T$ olsun.

$$\varphi_1(t, v) = \left(\frac{3}{5} \sin t, 1 + \cos t, \frac{4}{5} \sin t\right) + v \cdot \left(\frac{3}{5} \cos t, -\sin t, \frac{4}{5} \cos t\right)$$

$\varphi_1(t, v) = \left(\frac{3}{5} \sin t + v \cdot \frac{3}{5} \cos t, 1 + \cos t - v \cdot \sin t, \frac{4}{5} \sin t + v \cdot \frac{4}{5} \cos t\right)$ bu yüzeyin t ve v parametrelerine göre türevleri alındığında;

$$(\varphi_1)_t = \left(\frac{3}{5} \cos t - v \cdot \frac{3}{5} \sin t, -\sin t - v \cdot \cos t, \frac{4}{5} \cos t - v \cdot \frac{4}{5} \sin t\right)$$

$$(\varphi_1)_t = \left(\frac{3}{5} (\cos t - v \cdot \sin t), -\sin t - v \cdot \cos t, \frac{4}{5} (\cos t - v \cdot \sin t)\right)$$

$$(\varphi_1)_v = \left(\frac{3}{5} \cos t, -\sin t, \frac{4}{5} \cos t\right)$$

$$(\varphi_1)_{tt} = \left(\frac{3}{5} (-\sin t - v \cdot \cos t), -\cos t + v \cdot \sin t, \frac{4}{5} (-\sin t - v \cdot \cos t)\right)$$

$$(\varphi_1)_{tv} = \left(-\frac{3}{5} \sin t, -\cos t, -\frac{4}{5} \sin t\right)$$

$$(\varphi_1)_{vv} = (0, 0, 0)$$

elde edilir.

Bu yüzeyin normali hesaplandığında;

$$U_1 = \frac{(\varphi_1)_t \times (\varphi_1)_v}{\|(\varphi_1)_t \times (\varphi_1)_v\|} = \frac{\left(-\frac{4v}{5}, 0, \frac{3v}{5}\right)}{v} = \left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right)$$

elde edilir. Bu regle yüzeyin Gauss eğriliği, ortalama eğriliği ve dağılma parametresi için aşağıdaki hesaplamalar yapıldığında;

$$E_1 = \langle (\varphi_1)_t, (\varphi_1)_t \rangle = 1 + v^2$$

$$F_1 = \langle (\varphi_1)_t, (\varphi_1)_v \rangle = 1$$

$$G_1 = \langle (\varphi_1)_v, (\varphi_1)_v \rangle = 1$$

$$e_1 = \langle (\varphi_1)_{tt}, U_1 \rangle = 0$$

$$f_1 = \langle (\varphi_1)_{tv}, U_1 \rangle = 0$$

$$g_1 = \langle (\varphi_1)_{vv}, U_1 \rangle = \langle 0, U_1 \rangle = 0$$

$$K_1 = \frac{e_1 g_1 - f_1^2}{E_1 G_1 - F_1^2} = 0$$

olup yüzey üzerindeki noktalar flat(düz)tır ve paraboliktir.

$$H_1 = \frac{E_1 g_1 + G_1 e_1 - 2F_1 f_1}{2(E_1 G_1 - F_1^2)} = \frac{0}{0}$$

belirsizliği elde edilir.

$$\lambda_{\varphi_1} = \frac{\det(\beta'(t), X_1(t), X_1'(t))}{\|X_1'(t)\|^2} = \frac{\langle \beta'(t), X_1(t) \times X_1'(t) \rangle}{\|X_1'(t)\|^2} = 0$$

olduğundan yüzey açılabilir.

Şimdi φ_1 regle yüzeyinde $X_1(t) = N$ olsun.

$\varphi_1(t, v) = \left(\frac{3}{5} \sin t, 1 + \cos t, \frac{4}{5} \sin t\right) + v \cdot \left(-\frac{3}{5} \sin t, -\cos t, -\frac{4}{5} \sin t\right)$ yüzeyin t ve v parametrelerine göre türevleri alındığında;

$$(\varphi_1)_t = \left(\frac{3}{5} (\cos t - v \cdot \cos t), -\sin t + v \cdot \sin t, \frac{4}{5} (\cos t - v \cdot \cos t)\right)$$

$$(\varphi_1)_v = \left(-\frac{3}{5} \sin t, -\cos t, -\frac{4}{5} \sin t\right)$$

$$(\varphi_1)_{tt} = \left(\frac{3}{5} (-\sin t + v \cdot \sin t), -\cos t + v \cdot \cos t, \frac{4}{5} (-\sin t + v \cdot \sin t)\right)$$

$$(\varphi_1)_{tv} = \left(-\frac{3}{5} \cos t, \sin t, -\frac{4}{5} \cos t\right)$$

$$(\varphi_1)_{vv} = (0, 0, 0)$$

elde edilir. Yüzeyin normali hesaplandığında;

$$U_1 = \frac{(\varphi_1)_t \times (\varphi_1)_v}{\|(\varphi_1)_t \times (\varphi_1)_v\|} = \frac{\left(\frac{4}{5}(1-v), 0, \frac{3}{5}(v-1)\right)}{1-v} = \left(\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5}\right)$$

şeklinde bulunur.

Yüzeyin Gauss eğriliği, ortalama eğriliği ve dağılma parametresi için aşağıdaki hesaplamalar yapıldığında;

$$E_1 = \langle (\varphi_1)_t, (\varphi_1)_t \rangle = (1-v)^2$$

$$F_1 = \langle (\varphi_1)_t, (\varphi_1)_v \rangle = 0$$

$$G_1 = \langle (\varphi_1)_v, (\varphi_1)_v \rangle = 1$$

$$e_1 = \langle (\varphi_1)_{tt}, U_1 \rangle = 0$$

$$f_1 = \langle (\varphi_1)_{tv}, U_1 \rangle = 0$$

$$g_1 = \langle (\varphi_1)_{vv}, U_1 \rangle = \langle 0, U_1 \rangle = 0$$

$$K_1 = \frac{e_1 g_1 - f_1^2}{E_1 G_1 - F_1^2} = 0$$

olduğundan yüzey üzerindeki noktalar flat(düz)tır ve paraboliktir.

$$H_1 = \frac{E_1 g_1 + G_1 e_1 - 2F_1 f_1}{2(E_1 G_1 - F_1^2)} = 0$$

olduğundan yüzey minimaldir.

$$\lambda_{\varphi_1} = \frac{\det(\beta'(t), (t), X_1'(t))}{\|X_1'(t)\|^2} = \frac{\langle \beta'(t), X_1(t) \times X_1'(t) \rangle}{\|X_1'(t)\|^2} = 0$$

olduğundan yüzey açılabilir.

Şimdi φ_2 regle yüzeyinde $X_2(t) = \overline{N}$ olsun.

$$\varphi_2(t, v) = \left(\frac{4}{5}t + c_1, c_2, -\frac{3}{5}t + c_3 \right) + v \cdot \left(-\frac{3}{5} \cos t, \sin t, -\frac{4}{5} \cos t \right)$$

Yüzeyin t ve v parametrelerine göre türevleri alındığında;

$$(\varphi_2)_t = \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5} v \sin t, v \cos t, -\frac{3}{5} + \frac{4}{5} v \sin t \right)$$

$$(\varphi_2)_v = \left(-\frac{3}{5} \cos t, \sin t, -\frac{4}{5} \cos t \right)$$

$$(\varphi_2)_{tt} = \left(\frac{3}{5} v \cos t, -v \sin t, \frac{4}{5} v \cos t \right)$$

$$(\varphi_2)_{tv} = \left(\frac{3}{5} \sin t, \cos t, \frac{4}{5} \sin t \right)$$

$$(\varphi_2)_{vv} = (0, 0, 0)$$

elde edilir.

Yüzeyin normalini hesaplandığında;

$$U_2 = \frac{(\varphi_2)_t \times (\varphi_2)_v}{\|(\varphi_2)_t \times (\varphi_2)_v\|} = \frac{\left(-\frac{4}{5}v + \frac{3}{5} \sin t, \cos t, \frac{3}{5}v + \frac{4}{5} \sin t \right)}{\sqrt{v^2 + 1}}$$

şeklinde bulunur.

Yüzeyin Gauss eğriliği, ortalama eğriliği ve dağılma parametresi için aşağıdaki hesaplamalar yapıldığında;

$$E_2 = \langle (\varphi_2)_t, (\varphi_2)_t \rangle = v^2 + 1$$

$$F_2 = \langle (\varphi_2)_t, (\varphi_2)_v \rangle = 0$$

$$G_2 = \langle (\varphi_2)_v, (\varphi_2)_v \rangle = \|(\varphi_2)_v\|^2 = 1$$

$$e_2 = \langle (\varphi_2)_{tt}, U_2 \rangle = 0$$

$$f_2 = \langle (\varphi_2)_{tv}, U_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{v^2 + 1}}$$

$$g_2 = \langle (\varphi_2)_{vv}, U_2 \rangle = \langle 0, U_2 \rangle = 0$$

$$K_2 = \frac{e_2 g_2 - f_2^2}{E_2 G_2 - F_2^2} = \frac{1}{(v^2 + 1)^2} \neq 0$$

olduğundan yüzey üzerindeki noktalar flat(düz) ve parabolik değildir.

$$H_2 = \frac{E_2 g_2 + G_2 e_2 - 2F_2 f_2}{2(E_2 G_2 - F_2^2)} = 0$$

olduğundan yüzey minimaldir.

$$\lambda_{\varphi_2} = \frac{\det(\bar{\beta}'(t), X_2(t), X_2'(t))}{\|X_2'(t)\|^2} = \frac{\langle \bar{\beta}'(t), X_2(t) \times X_2'(t) \rangle}{\|X_2'(t)\|^2} = \frac{\langle \bar{T}, \bar{N} \times \bar{N}' \rangle}{\|\bar{N}'\|^2}$$

$$\lambda_{\varphi_2} = 1 \neq 0$$

olduğundan yüzey açılabilir değildir.

Şimdi φ_1 regle yüzeyinde $X_1(t) = B$ olsun.

$$\varphi_1(t, v) = \left(\frac{3}{5} \sin t, 1 + \cos t, \frac{4}{5} \sin t \right) + v \cdot \left(\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5} \right)$$

$$\varphi_1(t, v) = \left(\frac{3}{5} \sin t + v \cdot \frac{4}{5}, 1 + \cos t, \frac{4}{5} \sin t - v \cdot \frac{3}{5} \right)$$

yüzeyinin t ve v türevleri alındığında;

$$(\varphi_1)_t = \left(\frac{3}{5} \cos t, -\sin t, \frac{4}{5} \cos t \right)$$

$$(\varphi_1)_v = \left(\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5} \right)$$

$$(\varphi_1)_{tt} = \left(-\frac{3}{5} \sin t, -\cos t, -\frac{4}{5} \sin t \right)$$

$$(\varphi_1)_{tv} = (0, 0, 0)$$

$$(\varphi_1)_{vv} = (0, 0, 0)$$

elde edilir.

Yüzeyin normali hesaplandığında;

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{(\varphi_1)_t \times (\varphi_1)_v}{\|(\varphi_1)_t \times (\varphi_1)_v\|} = \frac{\left(\left(\frac{3}{5} \cos t, -\sin t, \frac{4}{5} \cos t\right) \times \left(\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5}\right)\right)}{\left\|\left(\frac{3}{5} \cos t, -\sin t, \frac{4}{5} \cos t\right) \times \left(\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5}\right)\right\|} \\ &= \left(\frac{3}{5} \sin t, \cos t, \frac{4}{5} \sin t\right) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Yüzeyin Gauss eğriliği, ortalama eğriliği ve dağılma parametresi için aşağıdaki hesaplamalar yapıldığında;

$$E_1 = \langle (\varphi_1)_t, (\varphi_1)_t \rangle = 1$$

$$F_1 = \langle (\varphi_1)_t, (\varphi_1)_v \rangle = 0$$

$$G_1 = \langle (\varphi_1)_v, (\varphi_1)_v \rangle = 1$$

$$e_1 = \langle (\varphi_1)_{tt}, U_1 \rangle = -1$$

$$f_1 = \langle (\varphi_1)_{tv}, U_1 \rangle = 0$$

$$g_1 = \langle (\varphi_1)_{vv}, U_1 \rangle = \langle 0, U_1 \rangle = 0$$

$$K_1 = \frac{e_1 g_1 - f_1^2}{E_1 G_1 - F_1^2} = 0$$

olduğundan yüzey üzerindeki noktalar flat (düz)tır ve paraboliktir.

$$H_1 = \frac{E_1 g_1 + G_1 e_1 - 2F_1 f_1}{2(E_1 G_1 - F_1^2)} = -\frac{1}{2} \neq 0$$

olduğundan yüzey minimal değildir.

$$\lambda_{\varphi_1} = \frac{\det(\beta'(t), X_1(t), X_1'(t))}{\|X_1'(t)\|^2} = \frac{\langle \beta'(t), X_1(t) \times X_1'(t) \rangle}{\|X_1'(t)\|^2} = 0$$

olduğundan yüzey açılabilir.

Şimdi φ_2 regle yüzeyinde $X_2(t) = \bar{B}$ olsun.

$$\varphi_2(t, v) = \left(\frac{4}{5}t + c_1, c_2, -\frac{3}{5}t + c_3 \right) + v \cdot \left(\frac{3}{5} \sin t, \cos t, \frac{4}{5} \sin t \right)$$

yüzeyin t ve v parametrelerine göre türevleri alındığında;

$$(\varphi_2)_t = \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5} v \cos t, -v \sin t, -\frac{3}{5} + \frac{4}{5} v \cos t \right)$$

$$(\varphi_2)_v = \left(\frac{3}{5} \sin t, \cos t, \frac{4}{5} \sin t \right)$$

$$(\varphi_2)_{tt} = \left(-\frac{3}{5} v \sin t, -v \cos t, -\frac{4}{5} v \sin t \right)$$

$$(\varphi_2)_{tv} = \left(\frac{3}{5} \cos t, -\sin t, \frac{4}{5} \cos t \right)$$

$$(\varphi_2)_{vv} = (0, 0, 0)$$

elde edilir.

Yüzeyin normali hesaplandığında;

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{(\varphi_2)_t \times (\varphi_2)_v}{\|(\varphi_2)_t \times (\varphi_2)_v\|} \\ &= \frac{\left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5} v \cos t, -v \sin t, -\frac{3}{5} + \frac{4}{5} v \cos t \right) \times \left(\frac{3}{5} \sin t, \cos t, \frac{4}{5} \sin t \right)}{\left\| \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5} v \cos t, -v \sin t, -\frac{3}{5} + \frac{4}{5} v \cos t \right) \times \left(\frac{3}{5} \sin t, \cos t, \frac{4}{5} \sin t \right) \right\|} \\ &= \frac{\left(\frac{3}{5} \cos t - \frac{4}{5} v, -\sin t, \frac{4}{5} \cos t + \frac{3}{5} v \right)}{\sqrt{v^2 + 1}} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Yüzeyin Gauss eğriliği, ortalama eğriliği ve dağılma parametresi için aşağıdaki hesaplamalar yapıldığında;

$$E_2 = \langle (\varphi_2)_t, (\varphi_2)_t \rangle = v^2 + 1$$

$$F_2 = \langle (\varphi_2)_t, (\varphi_2)_v \rangle = 0$$

$$G_2 = \langle (\varphi_2)_v, (\varphi_2)_v \rangle = \|(\varphi_2)_v\|^2 = 1$$

$$e_2 = \langle (\varphi_2)_{tt}, U_2 \rangle = -\frac{v}{\sqrt{v^2 + 1}}$$

$$f_2 = \langle (\varphi_2)_{tv}, U_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{v^2 + 1}}$$

$$g_2 = \langle (\varphi_2)_{vv}, U_2 \rangle = \langle 0, U_2 \rangle = 0$$

$$K_2 = \frac{e_2 g_2 - f_2^2}{E_2 G_2 - F_2^2} = \frac{v^2}{(v^2 + 1)} \neq 0$$

olduğundan yüzey üzerindeki noktalar flat(düz) ve parabolik değildir.

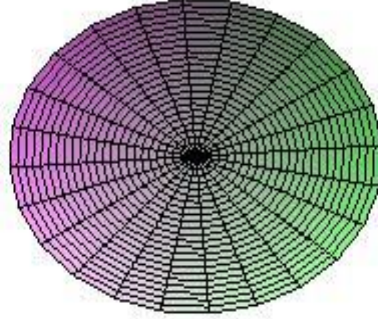
$$H_2 = \frac{E_2 g_2 + G_2 e_2 - 2F_2 f_2}{2(E_2 G_2 - F_2^2)} = \frac{-v}{2} (v^2 + 1)^{-3/2} \neq 0$$

şeklinde bulunur.

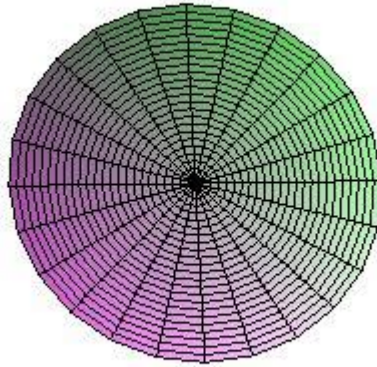
$$\lambda_{\varphi_2} = \frac{\det(\bar{\beta}'(t), X_2(t), X_2'(t))}{\|X_2'(t)\|^2} = \frac{\langle \bar{\beta}'(t), X_2(t) \times X_2'(t) \rangle}{\|X_2'(t)\|^2} = \frac{\langle \bar{T}, \bar{B} \times \bar{B}' \rangle}{\|\bar{B}'\|^2}$$

$$\lambda_{\varphi_2} = 2 \neq 0$$

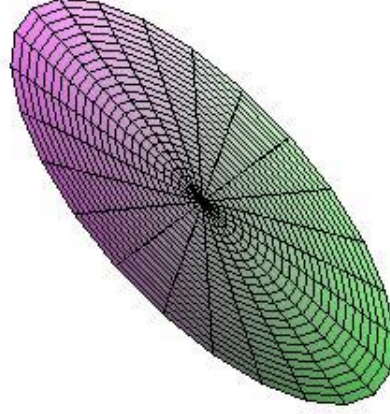
olduğundan yüzey açılabilir değildir.



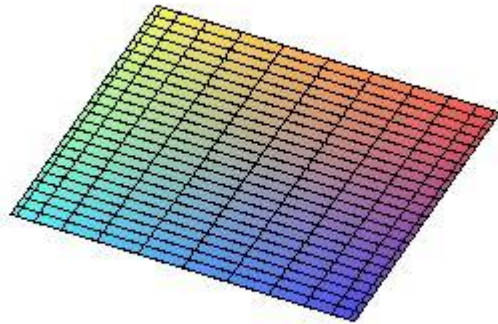
Şekil 2.1 β ile oluşturulan teğet yüzey



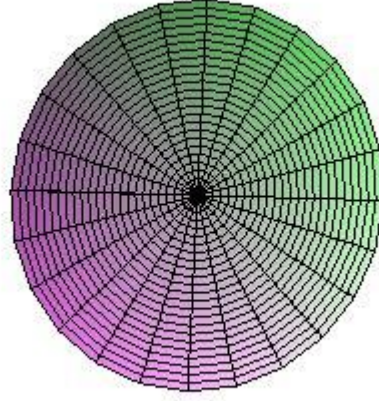
Şekil 2.2 β ile oluşturulan normal yüzey



Şekil 2.3 $\bar{\beta}$ ile oluşturulan normal yüzey



Şekil 2.4 β ile oluşturulan binormal yüzey



Şekil 2.5 $\bar{\beta}$ ile oluşturulan binormal yüzey

BÖLÜM III

GİRİŞ

3.1 W-Direction Eğrileriyle Oluşturulan Özel Regle Yüzeyler

Eğriler teorisi Öklid uzayındaki eğrileri ya da diğer yüzeyleri diferansiyel ya da integral hesabı kullanarak ele alan geometrinin bir alt dalıdır. Eğriler teorisinde en çok çalışılan konulardan biri, involüt-evolüt eğri çiftleri, Bertrand eğri çiftleri, Mannheim eğri çiftleri ve W-direction eğrileri ile ilişkili eğrilerdir. Bu eğrilerle çalışma, eğrilerin özelliklerini ve karakterizasyonlarını elde edebilmenin güzel bir yönüdür.

Eğrileri karakterize etmek için en çok kullanılan eğriler, genel helis, silindirik helis ve slant helistir. E^3 'te genel bir helis teğet vektör alanı ile sabit bir doğrultu, sabit açı yapar. Slant helis, normal vektör alanı ile sabit bir doğrultunun sabit açı yaptığı eğridir. İzumiya ve Takeuchi göstermişlerdir ki bir eğrinin slant helis olması için gerek ve yeter şart geodezik eğrilik fonksiyonu olan

$$\delta(s) = \left(\frac{\kappa^2}{\kappa^2 + \tau^2} \cdot \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' \right) (s) \quad (3.1)$$

nin sabit olmasıdır.[6]

Macit ve Döldül, E^3 'te bir Frenet eğrisinin W-direction eğrisini ve V-direction eğrisini, B_1 – *direction* eğrisi, B_2 – *direction* eğrisi ve E^4 'te, B_2 -direction eğrisini tanımlamışlardır. Bu eğriler W-direction çatısı ya da Frenet çatısı vektör alanlarının integral eğrileri olarak verilmiştir. [11]

Aynı zamanda W-direction eğrilerinin küresel göstergeleri Güven, Nurkan, Tor tarafından incelenmiştir.[12] Frenet elemanları, eğrilerin eğriliği ve torsiyonu ile teğetsel gösterge eğriliği ve binormal gösterge eğriliğini elde etmişlerdir. Bu gösterge eğrilerinin genel helis ve slant helis olma durumlarının karakterizasyonlarını vermişlerdir.

Bu çalışmada, dayanak eğrilerini W-direction eğrisi alınarak özel regle yüzey olan normal ve binormal yüzeyler araştırılmıştır. Açılabilir ve minimal olma, ve dayanak eğrisinin asimptotik eğri, geodezik eğri, asli doğrultu olma konusunda önemli sonuçlar verilmiştir. Bu yüzeylere de örnekler verilmiştir.

$\beta: I \rightarrow E^3$ bir eğri, $\{T, N, B\}$ bu eğrinin Frenet vektörleri olsun. $T(s) = \beta'(s)$ vektörüne β 'nin teğet vektörü denir. $\|\beta'(s)\| = 1$ ise β birim hızlı eğridir. β 'nin eğriliğini veren $\kappa(s) = \|\beta''(s)\|$ dir. β 'nin normal vektör alanı $N(s)$ olmak üzere $\beta''(s) = \kappa(s).N(s)$ şeklindedir. β 'nin binormal vektör alanı $B(s) = T(s) \times N(s)$ şeklindedir.

Frenet vektörleri

$$T'(s) = -\kappa(s).N(s)$$

$$N'(s) = -\kappa(s).T(s) + \tau(s).B(s)$$

$$B'(s) = -\tau(s).N(s)$$

burada $\tau(s)$ β eğrisini torsiyonu ve $\tau(s) = \langle N(s), B'(s) \rangle$ ya da $\tau(s) = \|\beta''(s)\|$ şeklindedir.

Ayrıca, t yay parametrelili β eğrisinin Frenet vektörleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir,

$$T(s) = \beta'(s)$$

$$N(s) = \frac{\beta''(s)}{\|\beta''(s)\|} \quad (3.2)$$

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

Birim hızlı bir $\beta: I \rightarrow E^3$ eğrisi için,

$$W(s) = \tau(s)T(s) + \kappa(s)B(s) \quad (3.3)$$

vektör alanı β eğrisinin Darboux vektör alanıdır, burada β eğrisinin eğriliği $\kappa \neq 0$ dir.

$\beta: I \rightarrow E^n$ birim hızlı eğrisi Frenet eğrisi ise $\beta'' \neq 0$ ve eğriliği sıfırdan farklıdır.

Tanım 3.1.1 β , E^3 de bir Frenet eğrisi ve W β 'nın Darboux vektörü olsun. $W(s)$ nin integral eğrisi W -direction eğrisi olarak adlandırılır. Yani β 'nın W -direction eğrisi $\bar{\beta}$, sonra $W(s) = \bar{\beta}'(s)$, buradan $W = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} (\tau T + \kappa B)$ şeklindedir.[11]

β eğrisinin W -direction eğrisi $\bar{\beta}$, Frenet elemanları $\{T, N, B, \tau, \kappa\}$ ve bu eğrinin W -direction eğrisinin Frenet elemanları $\{\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}, \bar{\tau}, \bar{\kappa}\}$ şeklindedir. Bir Frenet eğrisinin Frenet elemanları ile bu eğrinin W -direction eğrisinin Frenet elemanları arasındaki ilişki [11]aşağıdaki gibidir;

$$\begin{aligned}\bar{T} &= \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} T + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} B \\ \bar{N} &= -\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} T + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} B\end{aligned}\tag{3.4}$$

$$\bar{B} = -N$$

$$\bar{\tau} = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}, \quad \bar{\kappa} = \frac{|\tau \kappa' - \tau' \kappa|}{\kappa^2 + \tau^2}$$

Teorem 3.1.1 Genel helis olmayan β eğrisinin integral eğrisi $\bar{\beta}$ olsun. $\bar{\beta}$ genel helis ise gerek ve yeter şart β slant helistir.[11]

Teorem 3.1.2 Düzlemsel olmayan β eğrisinin integral eğrisi $\bar{\beta}$ olsun. β genel helis ise gerek ve yeter şart $\bar{\beta}$ düzlemseldir.[11]

Teorem 3.1.3 Bir eğri genel helis ise gerek ve yeter şart $\frac{\tau}{\kappa} = \text{sabit}$ olmasıdır.[13]

Bir doğru parçasının R^3 te bir eğriye dayanarak eğri boyunca hareket etmesi sonucu oluşan yüzey regle yüzey olarak adlandırılır. Bir regle yüzeyin genel formu

$$\varphi(s, v) = \beta(s) + v \cdot \delta(s)\tag{3.5}$$

şeklindedir. Burada β dayanak eğrisidir. Regle yüzey denkleminde kullandığımız β eğrisinin türevi β' sıfır değildir aynı şekilde δ sıfır değildir.

Regle yüzeyin dayanak eğrileri asimptotik eğrilerdir. Ayrıca regle yüzeyin Gauss eğriliği her zaman pozitif değildir. Regle yüzey açılabilir ise gerek ve yeter şart

dağılma parametresinin sıfır olmasıdır ve regle yüzeyin minimal olması için gerek ve yeter şartın yüzeyin ortalama eğriliğinin sıfır olmasıdır.[4]

Bir regle yüzeyin genel formu $\varphi(s, v) = \beta(s) + v \cdot \delta(s)$ şeklindedir.

Normal ve binormal yüzeylerin oluşturduğu regle yüzeyler aşağıdaki gibidir;

$$\varphi(s, v) = \beta(s) + v \cdot N(s) \quad (3.6)$$

$$\varphi(s, v) = \beta(s) + v \cdot B(s) \quad (3.7)$$

burada α s yay parametrelili bir eğri ve $\{T, N, B, \}$ bu eğrinin Frenet vektörleridir.[5,6]

$\varphi(s, v) = \beta(s) + v \cdot \delta(s)$ regle yüzeyinin dağılma parametresi λ aşağıdaki gibi hesaplanır;

$$\lambda = \frac{\det\left(\frac{d\beta}{ds}, \delta, \frac{d\delta}{ds}\right)}{\left\|\frac{d\delta}{ds}\right\|^2}. \quad (3.8)$$

φ regle yüzeyinin standart birim normal vektörü U olmak üzere;

$$U = \frac{\varphi_s \times \varphi_v}{\|\varphi_s \times \varphi_v\|} \quad (3.9)$$

burada $\varphi_s = \frac{d\varphi}{ds}$ ve $\varphi_v = \frac{d\varphi}{dv}$ dir.

$\varphi(s, v) = \beta(s) + v \cdot \delta(s)$ regle yüzeyinin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliğini veren eşitlikler aşağıdaki gibidir;

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad (3.10)$$

ve

$$H = \frac{Eg + Ge - 2Ff}{2(EG - F^2)} \quad (3.11)$$

burada $E = \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle$, $F = \langle \varphi_s, \varphi_v \rangle$, $G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$, $e = \langle \varphi_{ss}, U \rangle$, $f = \langle \varphi_{sv}, U \rangle$ ve $g = \langle \varphi_{vv}, U \rangle$.(bkz[13])

Şimdi bir yüzeyin Darboux çatısı kavramını verilsin. β s yay parametrelili eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun. α eğrili yüzey üzerindeki $\{T, V, U\}$ çatısı Darboux çatısı olarak adlandırılır burada T β 'nın birim tanjant vektörü, U yüzeyin birim normali, $V = U \times T$ şeklindeki birim vektördür. Bu vektörler ve onların türevleri arasındaki ilişkiler ;[13]

$$\begin{bmatrix} T' \\ V' \\ U' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_g & \kappa_n \\ -\kappa_g & 0 & \tau_g \\ -\kappa_n & -\tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ V \\ U \end{bmatrix}$$

burada; κ_g geodezik eğrilik, κ_n normal eğrilik ve τ_g geodezik torsiyondur.

Regle yüzeyin dayanak eğrisi β olmak üzere, yüzeyin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik torsiyonu sırasıyla;[13]

$$\kappa_g = \langle U \times T, T' \rangle \quad (3.12)$$

$$\kappa_n = \langle \beta'', U \rangle \quad (3.13)$$

ve

$$\tau_g = \langle T, U \times U' \rangle . \quad (3.14)$$

şeklindedir.

Bir yüzey üzerinde yatan bir β eğrisi için aşağıdaki ifadeler geçerlidir.[1]

- 1) β geodezik eğridir gerek ve yeter şart yüzey üzerindeki eğrinin geodezik eğriliği sıfırdır.
- 2) β asimptotik eğridir gerek ve yeter şart yüzey üzerindeki eğrinin normal eğriliği sıfırdır.
- 3) β asli doğrultudur gerek ve yeter şart yüzey üzerindeki eğrinin geodezik torsiyonu sıfırdır.

3.2 W-Direction Eğrileriyle Üretilen Regle Yüzeyler

Bu bölümde dayanak eğrisi W-Direction eğrisi alınarak oluşturulan regle yüzeyler incelenecektir.

β s yay parametrelili bir eğri ve β nın integral eğrisi $\bar{\beta}$ olsun. β nın integral eğrisi $\bar{s}$ yay parametrelili $\bar{\beta}$ eğrisi olup burada $s = \bar{s}$ alınır.(bkz[2])

$$\varphi_1(s, v) = \beta(s) + v.N(s)$$

$$\varphi_2(s, v) = \beta(s) + v.B(s)$$

regle yüzeylerinde dayanak eğrisi β 'nın integral eğrisi olan $\bar{\beta}$ alınarak oluşturulan normal ve binormal regle yüzeyler aşağıdaki gibidir;

$$\varphi_1 = \bar{\beta}(s) + v\bar{N}(s) \quad (3.1)$$

$$\varphi_2 = \bar{\beta}(s) + v\bar{B}(s). \quad (3.2)$$

Not: Bir β genel helis eğrisinin integral eğrisi düzlemseldir. Düzlemsel eğrilerin Frenet vektörleri olmadığından normal ve binormal yüzeyleri oluşturulamaz. Bu yüzden normal ve binormal yüzeyler oluşturulurken genel helis olmayan eğrileri alınacaktır.

Teorem 3.2.1 β 'nın W-Direction eğrisi $\bar{\beta}$ ile oluşturulan normal ve binormal yüzeyler açılabilir değildir.

İspat: (2.13) eşitliği kullanılarak ,(3.1) ve (3.2) daki W-Direction eğrisiyle oluşturulan normal ve binormal regle yüzeylerin dağılma parametreleri aşağıdaki gibi bulunur;

$$\lambda_{\varphi_1} = \frac{\det(\frac{d\bar{\beta}}{ds}, \bar{N}, \frac{d\bar{N}}{ds})}{\left\| \frac{d\bar{N}}{ds} \right\|^2}$$
$$\lambda_{\varphi_2} = \frac{\det(\frac{d\bar{\beta}}{ds}, \bar{B}, \frac{d\bar{B}}{ds})}{\left\| \frac{d\bar{B}}{ds} \right\|^2}$$

(3.4) te verilen denklemleri dikkate alındığında ve

$$\frac{d\bar{N}}{ds} = -\left(\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}\right)' T - \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} N + \left(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}\right)' B$$

$$\frac{d\bar{B}}{ds} = \kappa T - \tau B$$

bu eşitlikler elde edilir.

$$\lambda_{\varphi_1} = \frac{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{5}{2}}}{(\tau\kappa' - \tau'\kappa)^2 + (\kappa^2 + \tau^2)^3}$$

$$\lambda_{\varphi_2} = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}.$$

olduğundan dağılma parametreleri sıfırdan farklı olup normal ve binormal yüzeyler açılabilir değildir.

Teorem 3.2.2 β s yay parametrelili bir eğri ve bu eğrinin eğriliği κ ve τ torsiyonu olsun. $\kappa\kappa' + \tau\tau' = 0$ ve $\tau'\kappa - \kappa'\tau$ sabit ise β 'nın W-Direction eğrisiyle oluşturulan normal yüzey minimaldir. Eğer $\kappa\kappa' + \tau\tau' = 0$ olduğunda β 'nın W-Direction eğrisiyle oluşturulan binormal yüzey minimal değildir.

İspat (3.1) ve (3.2) denklemlerindeki normal ve binormal yüzeylerin minimalliklerinin incelenmesi için ortalama eğrilikleri hesaplınsın. (3.1) deki normal yüzey için (3.4) denklemleri kullanıldığında, aşağıdaki denklemler;

$$E_1 = \langle (\varphi_1)_s, (\varphi_1)_s \rangle = A^2 + C^2 + D^2$$

$$F_1 = \langle (\varphi_1)_s, (\varphi_1)_v \rangle = -AX + DY = 0$$

$$G_1 = \langle (\varphi_1)_v, (\varphi_1)_v \rangle = 1$$

$$\begin{aligned} e_1 &= \langle (\varphi_1)_{ss}, U_1 \rangle \\ &= \frac{1}{Z_1} (-(A' + C\kappa)CY - (AY + DX)(A\kappa - C' - D\tau) \\ &\quad - (D' - C\tau)CX) \end{aligned}$$

$$f_1 = \langle (\varphi_1)_{sv}, U_1 \rangle = \frac{1}{Z_1} (C(-X'Y - -Y'X) + \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}(AY + DX))$$

$$g_1 = \langle (\varphi_1)_{vv}, U_1 \rangle = \langle 0, U_1 \rangle = 0$$

burada

$$X = \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}, \quad Y = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}$$

$$Z_1 = \|(\varphi_1)_s \times (\varphi_1)_v\|,$$

$$U_1 = \frac{1}{Z_1} \left((-CY)\vec{T} - (AY + DX)\vec{N} - (CX)\vec{B} \right),$$

$$A = Y - vX',$$

$$C = v\sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \quad \text{ve} \quad D = X + vY'.$$

(3.2) daki regle yüzey için;

$$E_2 = \langle (\varphi_2)_s, (\varphi_2)_s \rangle = 1 + v^2 + (\kappa^2 + \tau^2)$$

$$F_2 = \langle (\varphi_2)_s, (\varphi_2)_v \rangle = 0$$

$$G_2 = \langle (\varphi_1)_v, (\varphi_1)_v \rangle = 1$$

$$e_2 = \langle (\varphi_1)_{ss}, U_2 \rangle = \frac{1}{Z_2} \left(v \cdot \frac{\kappa \kappa' + \tau \tau'}{\kappa^2 + \tau^2} \right) + \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' \frac{\kappa^2 (1 + v^2 + (\kappa^2 + \tau^2))}{\kappa^2 + \tau^2}$$

$$f_2 = \langle (\varphi_1)_{sv}, U_2 \rangle = \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{Z_2} (AY + DX)$$

$$g_2 = \langle (\varphi_1)_{vv}, U_2 \rangle = \langle 0, U_2 \rangle = 0$$

burada

$$Z_2 = \sqrt{(1 + v^2 + (\kappa^2 + \tau^2))}, \quad \text{ve}$$

$$U_2 = \frac{1}{Z_2} \left((X - v\tau)\vec{T} - (Y + v\kappa)\vec{B} \right),$$

(3.11) eşitliği kullanıldığında, ortalama eğriliği;

$$H_1 = \frac{e_1}{2E_1}$$

$$H_2 = \frac{e_2}{2E_2}$$

Eğer $\kappa \kappa' + \tau \tau' = 0$ ve $\tau' \kappa - \kappa' \tau$ sabit, buradan $e_1 = 0$. β genel helis değilse $(\frac{\tau}{\kappa})' \neq 0$ ve $\kappa^2 (1 + v^2 + (\kappa^2 + \tau^2)) > 0$. Eğer $\kappa \kappa' + \tau \tau' = 0$ olursa $e_2 \neq 0$ olup binormal yüzey minimal değildir.

Teorem 3.2.3 β , s yay parametrelili bir eğri olsun. Eğer $1 + v(\frac{\tau}{\kappa})' \frac{\kappa^2}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} = 0$

olursa, normal yüzey üzerindeki integral eğrisi $\bar{\beta}$ geodezik eğridir. Ayrıca binormal yüzey üzerindeki integral eğrisi $\bar{\beta}$ geodezik eğridir.

İspat: $\bar{\beta}$ integral eğrisiyle oluşturulan yüzeylerin geodezik eğrilikleri (3.1) ve (3.2) da verilen normal ve binormal yüzeylere göre bulunduğu;

$$\kappa_{g_1} = \langle U_1 \times \bar{T}, \bar{T}' \rangle$$

$$\kappa_{g_2} = \langle U_2 \times \bar{T}, \bar{T}' \rangle$$

Bir önceki ispata benzer olarak yapıldığında ve $\bar{T} = Y\vec{T} + X\vec{B}$, eşitliğinden

$$U_1 \times \bar{T} = \frac{1}{Z_1} (AY + DX)(Y\vec{B} - X\vec{T})$$

$$U_2 \times \bar{T} = -\frac{1}{Z_2} \vec{N}.$$

Sonuç olarak $\bar{T}' = Y'\vec{T} + X'\vec{B}$, alınır

$$\kappa_{g_1} = -\frac{1}{Z_1} (AY + DX)(Y\vec{B} - X\vec{T})$$

$$\kappa_{g_2} = 0.$$

Uygun ifadeler kullanılarak ve $Y'X - YX' = \frac{\tau' \kappa - \kappa' \tau}{\kappa^2 + \tau^2}$, alındığında son olarak;

$$\kappa_{g_1} = -\frac{1}{Z_1} (1 + v(\frac{\tau}{\kappa})' \frac{\kappa^2}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}) (\frac{\tau}{\kappa})' \frac{\kappa^2}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}$$

$(\frac{\tau}{\kappa})' \neq 0$ olduğundan ve $\kappa \neq 0$, sonuç belirgindir.

Teorem 3.2.4 β , s yay parametrelili herhangi bir eğri olsun. Normal yüzey üzerindeki integral eğrisi $\bar{\beta}$ asimptotik eğridir. Binormal yüzey üzerindeki integral eğrisi $\bar{\beta}$ asimptotik eğri değildir.

İspat: $\bar{\beta}$ integral eğrisiyle oluşturulan yüzeylerin normal eğriliklerini (3.1) ve (3.2) da verilen normal ve binormal yüzeylere göre (3.13) eşitliği yardımıyla bulunduğunda;

$$\kappa_{n_1} = \langle \bar{\beta}'', U_1 \rangle$$

$$\kappa_{n_2} = \langle \bar{\beta}'', U_2 \rangle.$$

$\bar{\beta}'' = \bar{T}' = Y'\bar{T} + X'\bar{B}$ yazarsak ve U_1, U_2 ile $\bar{\beta}''$ nokta çarpımı yapıldığında,

$$\kappa_{n_1} = -\frac{C}{Z_1}(XX' + YY')$$

$$\kappa_{n_2} = \frac{1}{Z_2}(Y'X - YX')$$

$$XX' + YY' = 0 \text{ olduğundan ve } Y'X - YX' = \frac{\tau' \kappa - \kappa' \tau}{\kappa^2 + \tau^2},$$

$$\kappa_{n_1} = 0$$

$$\kappa_{n_2} = \frac{1}{Z_2} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' \frac{\kappa^2}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}$$

elde edilir.

Bu yüzden normal yüzey üzerindeki integral eğrisi $\bar{\beta}$ asimptotik eğridir. $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \neq 0$ olduğundan ve $\kappa \neq 0$ olduğundan $\kappa_{n_2} \neq 0$.

Teorem 3.2.5 β , s yay parametrelili bir eğri olsun. Eğer $1 + v\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \frac{\kappa^2}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} = 0$

olursa, normal yüzey üzerindeki integral eğrisi $\bar{\beta}$ asli doğrultudur. Ayrıca binormal yüzey üzerindeki integral eğrisi $\bar{\beta}$ asli doğrultu olması için gerek ve yeter şart

$$\kappa + \tau + v(\kappa - \tau)\sqrt{\kappa^2 + \tau^2} = 0 \text{ olmasıdır.}$$

İspat: (3.1) ve (3.2) da verilen normal ve binormal yüzeylerin $\bar{\beta}$ integral eğrisi üzerindeki yüzeylerin geodezik torsiyonları hesaplandığında (3.14) eşitliği kullanılarak;

$$\tau_{g_1} = \langle \bar{T}, U_1 \times U_1' \rangle$$

$$\tau_{g_2} = \langle \bar{T}, U_2 \times U_2' \rangle.$$

Bazı hesaplamalardan sonra $r = -\frac{CY}{Z_1}$, $q = -\frac{AY+DX}{Z_1}$, $t = -\frac{CX}{Z_1}$, ve $K = (\frac{X-v\tau}{Z_2})'$, $L = \frac{X+Y+v(\kappa-\tau)}{Z_2}$, $M = (\frac{Y+v\kappa}{Z_2})'$ kısaltmaları kullanıldığında,

$$\begin{aligned} U_1 \times U_1' &= \left(\frac{CX}{Z_1} (r\kappa + q' - t\tau) - \frac{AY+DX}{Z_1} (q\tau + t') \right) \vec{T} \\ &\quad + \left(\frac{CY}{Z_1} (q\tau + t') - \frac{CX}{Z_1} (r' - q\kappa) \right) \vec{N} \\ &\quad + \left(\frac{AY+DX}{Z_1} (r' - q\kappa) - \frac{CY}{Z_1} (r\kappa + q' - t\tau) \right) \vec{B} \\ U_2 \times U_2' &= \left(\frac{Y+v\kappa}{Z_2} \right) L \cdot \vec{T} + \left(\left(\frac{X-v\tau}{Z_2} \right) M - \left(\frac{Y+v\kappa}{Z_2} \right) K \right) \vec{N} \\ &\quad + \left(\frac{X-v\tau}{Z_2} \right) L \cdot \vec{B} \end{aligned}$$

$\bar{T} = Y\vec{T} + X\vec{B}$ eşitliği dikkate alındığında, son olarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir;

$$\begin{aligned} \tau_{g_1} &= \frac{1}{Z_1^2} \left[1 + v \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' \frac{\kappa^2}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \right] \\ &\quad \cdot \left[\sqrt{\kappa^2 + \tau^2} + \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' \kappa^2 \left(\frac{v}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} - \frac{C}{\kappa^2 + \tau^2} \right) \right] \\ \tau_{g_2} &= \frac{\kappa + \tau + v(\kappa - \tau)\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{Z_2^2 \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}. \end{aligned}$$

Eğer $1 + v \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' \frac{\kappa^2}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} = 0$ olduğunda $\tau_{g_1} = 0$ olur. Ayrıca $\tau_{g_2} = 0$ olması için

gerek ve yeter şart $\kappa + \tau + v(\kappa - \tau)\sqrt{\kappa^2 + \tau^2} = 0$ olmasıdır.

Örnek : β bir slant helis olmak üzere

$$\beta(s) = \left(-\frac{3}{2}\cos\left(\frac{s}{2}\right) - \frac{1}{6}\cos\left(\frac{3s}{2}\right), -\frac{3}{2}\sin\left(\frac{s}{2}\right) - \frac{1}{6}\sin\left(\frac{3s}{2}\right), \sqrt{3}\cos\left(\frac{s}{2}\right)\right)$$

β eğrisinin integral eğrisi şu şekilde bulunur;

$$\bar{\beta}(s) = \left(-\frac{9s}{8} - 6\sin\left(\frac{s}{2}\right) - \frac{3}{4}\sin(s), -\frac{1}{16}\sin(2s) - \frac{1}{2}\cos(s), \frac{\sqrt{3}s}{2}\right)$$

burada c_1, c_2, c_3 sabittir.[11]

$\bar{\beta}$ integral eğrisinin normal vektörünü ve binormal vektörünü hesaplandığında ;[12]

$$\bar{N} = (-\sin s, \cos s, 0)$$

$$\bar{B} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos s, \frac{\sqrt{3}}{2}\sin s, -\frac{1}{2}\right)$$

şeklinde elde edilir.

$\bar{\beta}$ integral eğrisinin normal yüzeyi ve binormal yüzeyi sırasıyla;

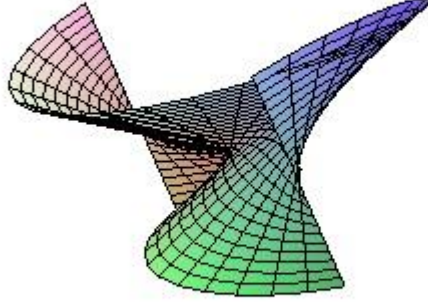
$$\varphi_1(s, v) = \bar{\beta}(s) + v\bar{N}(s)$$

$$\begin{aligned} &= \left(-\frac{9s}{8} - 6\sin\left(\frac{s}{2}\right) - \frac{3}{4}\sin(s), -\frac{1}{16}\sin(2s) - v\sin s \right. \\ &\quad \left. + c_1, -\frac{1}{2}\cos s + v\cos s + c_2, \frac{\sqrt{3}s}{2} + c_3\right) \end{aligned}$$

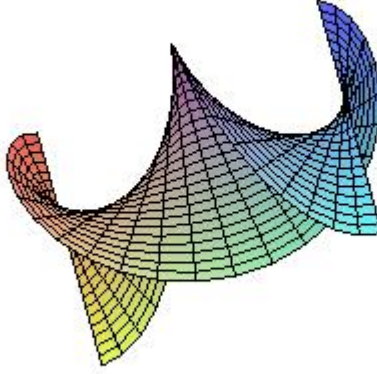
ve

$$\varphi_2(s, v) = \bar{\beta}(s) + v\bar{B}(s)$$

$$\begin{aligned} &= \left(-\frac{9s}{8} - 6\sin\left(\frac{s}{2}\right) - \frac{3}{4}\sin(s), -\frac{1}{16}\sin(2s) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos s \right. \\ &\quad \left. + c_1, -\frac{1}{2}\cos s + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin s + c_2, \frac{\sqrt{3}s}{2} - v\frac{1}{2} + c_3\right) \end{aligned}$$



Şekil 3.1 $\bar{\beta}$ ile oluşturulan normal yüzey



Şekil 3.2 $\bar{\beta}$ ile oluşturulan binormal yüzey

KAYNAKLAR

- [1] M.P Do Carmo, (1976) *Differential Geometry of Curves and Surfaces*,Pentice-Hall.,New Jersey.
- [2] J.H. Choi, Y.H. Kim. (2012). Associated curves of a Frenet curve and their Applications, *Applied Math. and Comp.*, **218** 9116-9124.
- [3] J.H. Choi, Y.H. Kim. (2012).A.T. Ali, Some Associated Curves of Frenet Non-lightlike Curves in E_1^3 , *J. Math. Anal. Appl.*, **394** 712-723.
- [4] A. Gray. 1993. *Modern Diferential Geometry of Curves and Curfaces with Mat hematica*, Second ed., Boca Raton, FL: Crc Press.
- [5] S. Izumiya, N. Takeuchi. (2003). *Special Curves and Ruled Surfaces*, Beitrage zur Alg.and Geo. Contributions to Alg. and Geo., **44(1)** 203-212.
- [6] S. Izumiya, N. Takeuchi. (2004). *New Special Curves and Developable Surfaces* Turk J.Math., **28** 153-163.
- [7] T. Körpınar, M.T. Sariaydın, E. Turhan. (2013) *.Associated Curves According To Bishop Frame in Euclidean 3-space*, Advanced Modelling Optimization, **15** 713-717.
- [8] L. Kula, Y. Yaylı. (2005). On Slant Helix and Its Spherical İndicatrix, *Applied Math. and Comp .*,**169** 600-607.

- [9] L.Kula,N.Ekmekci,Y. Yaylı, Kılarslan.(2010).Characterizations of Slant Helices in Euclidean 3-space, Turk. J..of Math., **34** 261-273.
- [10] Kruppa, E. 1957. *Analytische und Constructive Diferential Geometrie*,Springer Verlag, Wien.
- [11] N. Macit, M. Döldül. (2014). *Some New Associated Curves of a Frenet Curve in E^3 and E^4* , Turk. J..of Math., **38** 1023-1037.
- [12] S.K. Nurkan, I.A. Güven, M.K. Karacan, *Characterizations of Adjoint Curves in Euclidean 3-space*, (submitted).
- [13] B. O.neill. (2006). *Elementary Diferential Geometry*, Academic Press.
- [14] A. Turgut, H.H. Hacısalihoglu. (1997). *Spacelike Ruled Surfaces in The Minkowski 3-space*, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. Math., **46** 83-91.
- [15] A. Turgut, H.H. Hacısalihoglu. (1997). *Timelike Ruled Surfaces in The Minkowski 3-space*, Far East J. Math. Sci.**5(1)** 83-90.
- [16] Y. Yu, H. Liu, S.D. Jung. (2014). *Structure and Characterization of Ruled Surfaces in Euclidean 3-space* , Applied Math. and Comp .,**233** 252-259.