

**T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI**

**ÖZEL POLİNOMLAR SINIFININ İŞLEMSEL MATRİS
ÖZELLİKLERİ VE GECİKMELİ İNTEGRO DİFERANSİYEL
DENKLEMLERE UYGULAMALARI**

Ülker BAŞAR

**Danışman
Prof. Dr. Mehmet SEZER**



MANİSA-2022

**T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI**

**ÖZEL POLİNOMLAR SINIFININ İŞLEMSEL MATRİS
ÖZELLİKLERİ VE GECİKMELİ İNTEGRO DİFERANSİYEL
DENKLEMLERE UYGULAMALARI**

Ülker BAŞAR

**Danışman
Prof. Dr. Mehmet SEZER**



MANİSA-2022

Ülker
BAŞAR

ÖZEL POLİNOMLAR SINIFININ İŞLEMSEL MATRİS ÖZELLİKLERİ VE
GEÇİKMELİ İNTEGRO DİFERANSİYEL DENKLEMLERE
UYGULAMALARI

2022

TEZ ONAYI

Ülker Başar tarafından hazırlanan “ **Özel Polinomlar Sınıfının İşlemsel Matris Özellikleri ve Gecikmeli İntegro Diferansiyel Denklemlere Uygulamaları** ” adlı tez çalışması 31/08/2022 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**’nda **DOKTORA TEZİ** olarak savunulmuş ve **oybirliği** ile başarılı olarak kabul edilmiştir.

Danışman **Prof. Dr. Mehmet SEZER**
Manisa Celal Bayar Üniversitesi

Jüri Üyesi **Prof. Dr. Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL**
Dokuz Eylül Üniversitesi

Jüri Üyesi **Doç. Dr. Gökşen BACAK TURAN**
Manisa Celal Bayar Üniversitesi

Jüri Üyesi **Doç. Dr. Ersin ASLAN**
Manisa Celal Bayar Üniversitesi

Jüri Üyesi **Doç. Dr. Ömür Kıvanç KÜRKÇÜ**
Konya Teknik Üniversitesi

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Ülker BAŞAR



İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER	I
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	IV
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	VI
TABLO DİZİNİ	VII
TEŞEKKÜR.....	VIII
ÖZET.....	IX
ABSTRACT.....	X
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	3
2.1. Kaynak Özetleri.....	3
2.2. Diferansiyel Denklemler ve Çözümleri İle İlgili Temel Kavramlar	3
2.3. Faktöriyel Fonksiyonları	5
2.3.1. Faktöriyel Fonksiyonlarının Tarihçesi	5
2.3.2. Faktöriyel Fonksiyonlarının Genel Özellikleri	7
2.3.3. Azalan Faktöriyel Fonksiyonu	7
2.3.4. Artan Faktöriyel Fonksiyonu	8
2.4. Stirling Sayıları.....	10
2.4.1. Stirling Sayılarının Tarihçesi	10
2.4.2. 1. Tür Stirling Sayıları	11
2.4.3. 2.Tür Stirling Sayıları	13
2.4.4. Faktöriyel Fonksiyonları ve Stirling Sayıları Arasındaki İlişki	15
2.5. Stirling Polinomları	15
2.5.1. Stirling Polinomlarının Tarihçesi	15
2.5.2. Stirling Polinomlarının Bazı Özellikleri	16
2.6. Genocchi Polinomları.....	18
2.6.1. Genocchi Polinomlarının Tarihçesi.....	18
2.6.2. Genocchi Polinomlarının Bazı Özellikleri	19
2.7. Legendre Polinomları	20
2.7.1. Legendre Polinomlarının Tarihçesi.....	20
2.7.2. Legendre Polinomlarının Bazı Özellikleri	22
2.7.3. Shifted Legendre Polinomları	24

2.7.4.	Genelleştirilmiş Shifted Legendre Polinomları.....	25
2.8.	Hata Analizi.....	26
2.9.	Tezin Amacı	26
3.	MATERYAL VE YÖNTEMLER	28
3.1.	Materyal.....	28
3.2.	Yöntem	28
3.2.1.	Yüksek Mertebeden Genelleştirilmiş Lineer Fonksiyonel İntegro Diferansiyel Denklemler İçin Artan ve Azalan Faktöriyel Fonksiyonları İle Matris Sıralama Metodu.....	28
3.2.1.1.	Temel Matris Bağlıntıları.....	30
3.2.1.2.	Çözüm Yöntemi.....	36
3.2.1.3.	Hata Analizi	39
3.2.2.	Yüksek Mertebeden Genelleştirilmiş Lineer Fonksiyonel İntegro Diferansiyel Denklemler İçin Stirling Polinomları İle Matris Sıralama Metodu 42	42
3.2.2.1.	Problemin Tanıtılması.....	42
3.2.2.2.	Çözüm Yöntemi.....	43
3.2.3.	Yüksek Mertebeden Genelleştirilmiş Lineer Fonksiyonel İntegro Diferansiyel Denklemler İçin Genocchi Polinomları İle Matris Sıralama Metodu 49	49
3.2.3.1.	Problemin Tanıtılması.....	50
3.2.3.2.	Temel Matris Bağlıntıları ve Çözüm Yöntemi	51
3.2.3.3.	Hata Analizi	56
3.2.4.	İkinci Mertebeden Lineer Gecikmeli Neutral İntegro Diferansiyel Denklemler İçin Shifted Legendre Polinomları İle Matris Sıralama Metodu....	57
3.2.4.1.	Problemin Tanıtılması.....	57
3.2.4.2.	Temel Matris Bağlıntıları ve Çözüm Yöntemi	59
3.2.5.	Yüksek Mertebeden Genelleştirilmiş Gecikmeli Lineer Fonksiyonel İntegro Diferansiyel Denklemler İçin Stirling Matris Sıralama Metodu ..	64
3.2.5.1.	Temel Matris Bağlıntıları.....	65
3.2.5.2.	Çözüm Yöntemi	67
3.2.5.3.	Hata Analizi	70
4.	ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA	72
4.1.	Yüksek Mertebeden Genelleştirilmiş Lineer Fonksiyonel İntegro Diferansiyel Denklemler İçin Artan ve Azalan Faktöriyel Fonksiyonlarına Dayalı Matris Sıralama Metodu İle İlgili Nümerik Örnekler.....	72

4.2. Yüksek Mertebeden Genelleştirilmiş Lineer Fonksiyonel İntegro Diferansiyel Denklemler İçin Stirling Polinomlarına Dayalı Matris Sıralama Metodu İle İlgili Örnekler	100
4.3. Yüksek Mertebeden Genelleştirilmiş Lineer Fonksiyonel İntegro Diferansiyel Denklemler İçin Genocchi Polinomlarına Dayalı Matris Sıralama Metodu İle İlgili Örnekler	108
4.4. İkinci Mertebeden Lineer Gecikmeli Neutral İntegro Diferansiyel Denklemler İçin Shifted Legendre Polinomlarına Dayalı Matris Sıralama Metodu İle İlgili Örnekler.....	114
4.5. Yüksek Mertebeden Genelleştirilmiş Gecikmeli Lineer Fonksiyonel İntegro Diferansiyel Denklemler Sistemi İçin Stirling Matris Sıralama Metodu İle İlgili Nümerik Örnekler	120
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	124
KAYNAKLAR	127
ÖZGEÇMİŞ	Hata! Yer işareti tanımlanmamış.

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

N	Kesme Sınırı
$K(x, t)$	İntegralin Çekirdeği
$x^{(m)}$	Faktöriyel Fonksiyonu
$(x)_n$	Azalan Faktöriyel Fonksiyonu
$(x)^{\bar{n}}$	Artan Faktöriyel Fonksiyonu
$S_1(n, k)$	1. Tür Stirling Sayıları
$S_2(n, k)$	2. Tür Stirling Sayıları
$S_n(x)$	Stirling Polinomları
$G_n(x)$	Genocchi Polinomları
G_n	Genocchi Sayıları
B_n	Bernoulli Sayıları
$L_n(x)$	Legendre Polinomları
$P_n(x)$	Shifted Legendre Polinomları
$P_n^*(x)$	Genelleştirilmiş Shifted Legendre Polinomları
$w(x, t)$	Legendre Polinomlarının Üreteç Fonksiyonu
δ_{nm}	Kronecker Delta Fonksiyonu
$w(x)$	Ağırlık Fonksiyonu
$R_N(x)$	Rezidüel Hata Fonksiyonu

$\bar{R}_N$	Ortalama Hatanın Üst Sınırı
$e_{jN}(x)$	Hata Fonksiyonu
$E_{jN,M}(x)$	Düzeltilmiş Hata Fonksiyonu
$\bar{\chi}(x)$	Artan Faktöriyel Fonksiyonunun Matris Gösterimi
$\underline{\chi}(x)$	Azalan Faktöriyel Fonksiyonunun Matris Gösterimi
A	Bilinmeyen Katsayılar Matrisi
$\bar{S}$	1. Tür Stirling Sayılarından Oluşan Katsayılar Matrisi
$\underline{S}$	2. Tür Stirling Sayılarından Oluşan Katsayılar Matrisi
B	Taylor Polinomlarının Türev Geçiş Matrisi
T	Stirling Polinomlarının Geçiş Matrisi
$L(x)$	Legendre Polinomlarının Taban Matrisi
$P(x)$	Shifted Legendre Polinomlarının Taban Matrisi
$y(x)$	Tam Çözüm
$y_N(x)$	Yaklaşık Çözüm
$[U; \lambda]$	Koşullar İçin Arttırılmış Matris
$[W; G]$	Temel Denkleme Ait Arttırılmış Matris

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 2.1. Louis François Antoine Arbogast (1759-1803)	6
Şekil 2.2. Bazı azalan faktöriyel fonksiyonlarının grafiği	8
Şekil 2.3. Bazı artan faktöriyel fonksiyonlarının grafiği.....	10
Şekil 2.4. James Stirling (1692-1770).....	11
Şekil 2.5. Bazı Stirling polinomları	17
Şekil 2.6. Angelo Genocchi (1817-1889)	18
Şekil 2.7. Bazı Genocchi polinomlarının grafiği	20
Şekil 2.8. Adrien Marie Legendre (1752-1833).....	21
Şekil 2.9. Bazı Legendre polinomları	22
Şekil 2.10. Bazı Shifted Legendre polinomları.....	25
Şekil 4.1. Örnek 4.1.7. 'nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması	89
Şekil 4.2. Örnek 4.1.7. için mutlak hatalar	90
Şekil 4.3. Örnek 4.1.8.'in tam ve yaklaşık çözümlerinin kıyaslanması	93
Şekil 4.4. Örnek 4.1.8. için mutlak hatalar	94
Şekil 4.5. Örnek 4.1.9.'un mutlak hataları	98
Şekil 4.6. Örnek 4.1.9.'un rezidüel hataları	99
Şekil 4.7. Örnek 4.1.9.'un düzeltilmiş mutlak hataları	100
Şekil 4.8. Örnek 4.3.2.'nin mutlak hataları	113
Şekil 4.9. Örnek 4.4.3.'ün rezidüel hataları	120

TABLO DİZİNİ

Sayfa

Tablo 2.1. Tanım 2.10.'a göre 1. tür Stirling sayıları	12
Tablo 2.2. Tanım 2.12.'ye göre 1. tür Stirling sayıları	13
Tablo 2.3. Tanım 2.16'ya göre 2. tür Stirling Sayıları	14
Tablo 4.1. Örnek 4.1.7. için mutlak hatalar	90
Tablo 4.2. Örnek 4.1.8. için mutlak hatalar	93



TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında bana destek olan, bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Mehmet SEZER'e, bilgi ve tecrübesi ile lisansüstü öğrenim hayatımın tüm zorlu aşamalarında maddi manevi her yönden yardımcı olan, tecrübeleri ile beni aydınlatan ve desteğini hiç eksik etmeyen, kendisini tanımaktan büyük onur duyduğum sevgili hocalarım Sayın Doç. Dr. Ersin ARSLAN'a, Doç. Dr. Gökşen BACAK TURAN'a ve Sayın Prof. Dr. Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL'e, yüksek lisans eğitimim sırasında desteğini esirgemeyen Sayın Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK'e yürekten çok teşekkür ederim. Bu günlere gelmemde önemli desteği olan tüm değerli hocalarım ve öğretmenlerime, tüm hayatım boyunca beni maddi ve manevi olarak destekleyen ve hep yanımda olan, canımdan çok sevdiğim ailem, Hatice BAŞAR ve Celal BAŞAR'a çok teşekkür ederim. Son olarak doktora eğitimim süresince yanımda yer alan sevgili arkadaşlarım, Doç. Dr. Ömür Kıvanç KÜRKÇÜ, Dr. Deniz ELMACI ve Seda ÇAYAN'a da destekleri için teşekkür ederim.

Ülker BAŞAR
Manisa, 2022

ÖZET

Doktora Tezi

Özel Polinomlar Sınıfının İşlemsel Matris Özellikleri ve Gecikmeli İntegro Diferansiyel Denklemlere Uygulamaları

Ülker BAŞAR

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mehmet SEZER

Bu tez çalışmasının amacı, fen bilimleri ve mühendislik gibi alanlarda karşımıza çıkan fonksiyonel integro diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini, özel polinom ailelerine dayalı matris sıralama metotları kullanarak elde etmektir. Bu metotlar, özel polinomların matris bağıntısından, sıralama noktalarından ve temel matris denklemlerinden oluşmaktadır. Çözüm sürecinde, denklemler ve koşullar sıralama noktaları ile birlikte matris formuna dönüştürülerek, özel polinom ailelerinin katsayılarına sahip cebirsel denklem sistemine indirgenir; sonra bu sistem çözülerek problemin yaklaşık çözümüne ulaşılır. Aynı zamanda, kalan (residual) fonksiyonla bağlantılı hata analizi gerçekleştirilir ve bazı açıklayıcı örnekler sunulur. Elde edilen sonuçlar tablo ve grafikler ile açıklanır; metotların uygulanabilirliği ve etkinliği yorumlanır.

Çalışma, beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, fonksiyonel integro diferansiyel denklemlerin ve çözüm yöntemlerinin tarihi gelişimi, kullanım alanları ile ilgili genel bilgiler verilmekte, bazı özel polinom aileleri tanıtılmakta ve tez çalışmasının amacı verilmektedir. İkinci bölümde, bu denklemler ile ilgili temel kavramlar, nümerik çözümleri için kullanılan farklı yöntemler ve hata analizleri ile ilgili kaynak özetleri bulunmaktadır. Üçüncü bölümde ise özel polinomlara dayanan sıralama metotları, matris bağıntıları, çözüm yöntemleri ve hata analizleri açıklanmaktadır. Dördüncü bölümde, farklı problem çeşitleri için nümerik örnekler verilerek, sonuçlar tablolar ve grafikler yardımıyla karşılaştırılmaktadır. Son olarak, beşinci bölümde ise sonuç ve öneriler kısmı yer almaktadır.

Anahtar Kelimeler: Özel polinom aileleri, fonksiyonel integro diferansiyel denklemler, sıralama noktaları, matris sıralama metodu, hata analizi.

ABSTRACT

PhD Thesis

The Operational Matrix Properties of the Class of Special Polynomials and Their Applications to Delay Integro Differential Equations

Ülker BAŞAR

**Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Prof. Dr. Mehmet SEZER

The aim of this thesis study is to obtain the approximate solutions of the delay functional integro differential equations arising in science and engineering by using matrix collocation methods based on the classes of special polynomials. These methods are made up of the matrix relations of the polynomials, collocation points and a fundamental matrix equation. In the method, equations and given conditions with the collocation points are reduced to an algebraic system with the special polynomial coefficients by putting them in the matrix forms; then, by solving this system, the approximate solutions of the problem are obtained. Also, the error analysis related to residual functions is performed and some illustrative examples are presented. The obtained results are demonstrated by tables and graphics; the usability and efficiency of the methods are interpreted.

The study consists of five parts. In the first part, the general development of the functional integro differential equations and the family of special polynomials and orthogonal polynomials solution methods, historical informations and fundamental properties are given. Finally, in this chapter also the aim of the thesis work are given. In the second part, basic concepts about these equations, different methods used for their numerical solutions, resource summaries about the family of special polynomials and error analysis are available. In the third part, special polynomials collocation method, matrix relations, method of solution and error analysis are explained. In the fourth section, numerical examples are given for each problem type and the results are shown with the help of tables and graphs. Finally, in the fifth section, conclusions and suggestions are included.

Keywords: Family of special polynomials, Functional integro differential equations, Collocation points, Matrix collocation method, Error analysis.

2022, 133 pages

1. GİRİŞ

Bilindiği üzere günümüzde bilim, teknoloji ve sanayinin hızlı gelişimi ile birlikte karşılaşılan doğal ve fiziksel olayların bilimsel olarak incelenmesi, davranışlarının yorumlanması oldukça zordur. Bu güçlüğü yenebilmek adına günlük hayatımızda karşımıza çıkan doğal problemlerin yorumlanmasında matematiksel modellemelere başvurulmaktadır [1]. Mühendislik, biyoloji, mekanik, endüstri, fizik gibi birçok farklı alanda karşılaşılan bu problemler matematiksel olarak diferansiyel ve integral denklemlerin bir araya gelmesiyle oluşturulan integro diferansiyel denklemler ile modellenenbilmektedir [2]. Modellemelerde integro diferansiyel denklemlerin sık sık kullanılmasının sebebi ise bu denklemlerin alt yapısını oluşturan çeşitli denklem formlarına kolayca indirgenebilmesi ve içerisinde yer alan diferansiyel-integral kısımların yapısının, modelleme türüne ve amacına uygun olarak geliştirilebilmesinden kaynaklanmaktadır. Modellemelerde kullanılan bu tip denklemler için temelde kullanılan analitik yöntemler çözüm sunamamakta ya da yetersiz kalmaktadır. Söz konusu bu gelişmelerle birlikte farklı yazarlar tarafından yeni hesaplamalara dayalı farklı metotlar günümüzde de geliştirilmeye devam etmektedir. Yüksek mertebeden integro diferansiyel denklemler ve gecikmeli, integral, fark gibi çeşitli diferansiyel denklem formlarının çözümü için; Taylor [3], Dickson [4], Bessel [5], Bernstein [6], Chebyshev [7], Legendre [8], Laguerre [9], Morgan-Voyce [10] ve Hermite [11] polinomlarına dayalı matris sıralama metotları geliştirilmiştir. Ayrıca, inverse replacement [12], Adomian decomposition [13], variational iteration [14], homotopy perturbation [15], Runge-Kutta [16] gibi metotlarda kullanılmaktadır.

Yukarıda bahsedilen özel polinomlara dayalı matris sıralama metotlarının, problemlerin çözümünün elde edilmesinde literatürde yer alan farklı türdeki çözüm metotları ile karşılaştırıldığında oldukça verimli sonuçlar verdikleri gözlemlenmiştir. Esas olarak, özel polinomlara dayalı matris sıralama metodu ele alınan denklem türlerini bir matris denklem sistemine dönüştürmeye dayanmaktadır. Elde edilen matris denklemi, doğrusal denklemler için bilinmeyen özel polinomların katsayılarından oluşan bir matris denklem sistemine, doğrusal olmayan denklemlerde ise sıralama noktaları yardımıyla oluşturulan doğrusal olmayan cebirsel denklem sistemine karşılık gelmektedir. Bu sistemlerin çözümünden bulunan özel polinomların katsayıları aracılığıyla, ele alınan denklem türlerinin (lineer diferansiyel denklemler,

lineer diferansiyel fark denklemleri, genelleştirilmiş pantograph denklemler, gecikmeli homojen olmayan diferansiyel denklemler, Fredholm-Volterra integro diferansiyel denklemler ve kısmi diferansiyel denklemler gibi) özel polinomların seri açılımına dayalı yaklaşık çözümleri elde edilebilmektedir.

Beş bölümden oluşan bu tez çalışmasının asıl amacı, ele alınan yüksek mertebeden lineer fonksiyonel integro diferansiyel denklem sınıfları için Artan ve Azalan faktöriyel fonksiyonları, Stirling polinomları, Shifted Legendre polinomları ve Genocchi polinomları kullanılarak, matrislerin cebirsel işlemlerine dayalı bu polinomların matris sıralama metotlarını geliştirmektir. Çalışmanın birinci bölümünde tezin giriş kısmı, ikinci bölümünde ise yüksek mertebeden lineer fonksiyonel integro diferansiyel denklemler, Artan ve Azalan faktöriyel fonksiyonları, Stirling polinomları, Shifted Legendre polinomları ve son olarak Genocchi polinomlarına ilişkin genel tanımlar, teoremler ve aralarındaki önemli bağıntılar yer almaktadır. Üçüncü bölümde ise her bir diferansiyel denklem formuna uygun olarak geliştirilen faktöriyel sıralama metodu, Stirling sıralama metodu, Shifted Legendre sıralama metodu ve Genocchi sıralama metodu verilmiştir. Dördüncü bölümde, bir önceki bölümde önerilen metotların işleyişini ve tutarlılığını göstermek amacıyla temel nümerik örneklere, tablolar ve grafikler ile desteklenerek yer verilmiştir. Elde edilen sonuçlar tam çözümler ile karşılaştırılmış, farklı özel polinom aileleri kullanılarak test edilmiş, rezidüel ve mutlak hata analizleri yapılmıştır. Ayrıca literatürde yer alan diğer çalışmalar ile karşılaştırılması yapılmıştır. Beşinci ve son bölümde ise bu çalışmadan elde edilen sonuçlar tartışılmış, tezin literatüre neler kazandırdığı, gelecekte hangi tür çalışmalar ile desteklenebileceği hakkında fikirler okuyucuya sunulmuştur.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Kaynak Özetleri

Bu bölümde, yüksek mertebeden lineer fonksiyonel diferansiyel denklemler ile ilgili temel kavramlar verilmektedir. Bunun yanında farklı türdeki diferansiyel denklemlerin sınıflandırılması ile ilgili de ayrıntılı bilgiler sunulmaktadır. Literatürde yer alan farklı diferansiyel denklem formlarının çözümü için kullanılan birbirinden farklı metotlar incelenir. Ayrıca bu çalışmada oldukça önemli bir yere sahip olan yüksek mertebeden lineer fonksiyonel integro diferansiyel denklemlerin çözümünü bulmak için kullanılacak olan Artan ve Azalan faktöriyel fonksiyonları, Stirling polinomları, Shifted Legendre polinomları ve Genocchi polinomları ile ilgili temel bağıntılar ve teoremler hakkında bu kısımda geniş bilgiye yer verilmektedir. Tüm bunların dışında, diferansiyel denklem türlerinin tam çözümleri ile özel polinomlara dayalı matris sıralama metodunun uygulanması sonucunda elde edilen yaklaşık çözümlerin karşılaştırılması aşamasında kullanılacak olan hata analizi ile ilgili gerekli bilgiler ve teoremlerde içerikte sunulmaktadır.

2.2. Diferansiyel Denklemler ve Çözümleri İle İlgili Temel Kavramlar

Tanım 2.1. Bir veya daha çok bağımlı değişken, bir veya daha çok bağımsız değişken ve bağımlı değişkenlerin bağımsız değişkenlere göre türevlerini veya diferansiyellerini içeren bağıntıya “*diferansiyel denklem*” denir [17].

Tanım 2.2. Bir diferansiyel denklem içinde bulunan en yüksek mertebeli türevin mertebesine “*diferansiyel denklemin mertebesi*”; türevlerine göre polinom şeklinde yazılabilen bir diferansiyel denklemde, en yüksek mertebeli türevin derecesine (yani kuvvetine) de “*diferansiyel denklemin derecesi*” denir [17].

Tanım 2.3. y bağımlı ve x bağımsız değişkenli n . mertebeden bir

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

adi diferansiyel denklemi;

$$a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y = b(x) \quad (2.1)$$

şeklinde ifade edilirse “*linear diferansiyel denklem*” adını alır ve ayrıca (2.1) diferansiyel denkleminde $b(x) \neq 0$ ise denkleme “*homojen olmayan*”, $b(x) = 0$ ise denkleme “*homojen linear diferansiyel denklem*” denir. O halde n . mertebeden homojen linear diferansiyel denklemin genel formu şu şekilde olur:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \quad (2.2)$$

Aynı zamanda (2.1) veya (2.2) denkleminde $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ katsayıları (veya en az biri) x bağımsız değişkenine bağlı fonksiyonlarsa, diferansiyel denklem “*değişken katsayılı*”; katsayıların tümü sabitse “*sabit katsayılı linear diferansiyel denklem*” adını alırlar [17].

Tanım 2.4. Denklem yapılarında türev, integral, fark ve bunların çeşitli kombinasyonlarını bulunduran veya argümanlarında ilerleme, gecikme gibi sapmaların bulunduğu denklemlere “*fonksiyonel diferansiyel denklemler*” denir [17].

Gecikmeli diferansiyel denklemler fonksiyonel diferansiyel denklemlerin içinde yer alır. Genel olarak n . mertebeden t gecikmeli diferansiyel denklemin genel hali,

$$y^{(n)}(x) = F\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x), y(x-t), y'(x-t), \dots, y^{(n)}(x-t)\right)$$

şeklinde ifade edilir.

Örneğin, birinci mertebeden genel formdaki bir diferansiyel fark denklemi,

$$a_0 u'(x) + a_1 u'(x-\tau) + b_0 u(x) + b_1 u(x-\tau) = f(x)$$

biçiminde tanımlansın. Eğer, diferansiyel denklemde $a_0 \neq 0$ ve $a_1 = 0$ ise “*retarded tipi*”; $a_0 \neq 0$ ve $a_1 \neq 0$ ise “*neutral tipi*”; $a_0 = 0$ ve $a_1 \neq 0$ ise “*advanced tipi*” olarak tanımlanır. Ayrıca, $a_0 = a_1 = 0$ veya $b_0 = b_1 = 0$ durumlarında diferansiyel denklem “*pure fark denklemi*” olarak adlandırılır. $a_0 = b_0 = 0$ veya $a_1 = b_1 = 0$ durumlarında ise, diferansiyel denkleme “*adi diferansiyel denklem*” denir [17].

Tanım 2.5. Genel formu

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x,t) u(t) dt, \quad u^{(n)}(x) = \frac{d^n u(x)}{dx^n}$$

şeklinde olan n . mertebeden türevli, $g(x)$ ve $h(x)$ integral sınırlarına sahip bir integro diferansiyel denklemde, λ sabit bir parametre, $K(x,t)$ iki değişkenli ve integralin çekirdeği olarak tanımlanan bilinen bir fonksiyon ve $u(x)$ bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere denkleme “*integro diferansiyel denklem*” denir. Burada özel olarak, integralin sınır değerleri $g(x)=a$ ve $h(x)=b$ sabit sayılar olacak şekilde tanımlanırsa denkleme “*Fredholm integro diferansiyel denklemi*”; integralin sınır değerlerinden en az biri bir değişkene bağlı olduğu takdirde ($g(x)=a$ ve $h(x)=x$ gibi) denkleme “*Volterra integro diferansiyel denklemi*” denir. Her iki tipteki integral formlarını içeren diferansiyel denklem ise “*Volterra-Fredholm integro diferansiyel denklemi*” olarak adlandırılır. Bunların dışında, $u(x)$ fonksiyonu sadece integralin içerisinde yer aldığı takdirde denklem “*birinci tip*”; $u(x)$ fonksiyonu hem integralin içinde hem de dışında yer alırsa denklem “*ikinci tip*” olarak tanımlanır [17].

Tanım 2.6. x tek bağımsız değişken, n bağımlı değişken $y_1, y_2, \dots, y_n$ ve bağımlı değişkenlerin bağımsız değişkene göre türevlerini içeren n adi diferansiyel denklemden oluşan sistem

$$\begin{aligned} F_1(x, y_1, y_1', \dots, y_2, y_2', \dots, y_n, y_n') &= 0 \\ F_2(x, y_1, y_1', \dots, y_2, y_2', \dots, y_n, y_n') &= 0 \\ &\vdots \\ F_n(x, y_1, y_1', \dots, y_2, y_2', \dots, y_n, y_n') &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Bu denklem sistemlerine “*adi diferansiyel denklem sistemi*” denir [17].

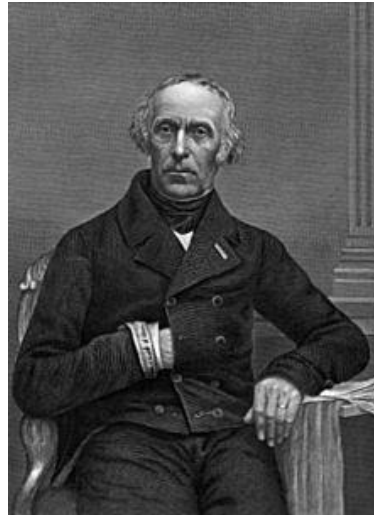
2.3. Faktöriyel Fonksiyonları

2.3.1. Faktöriyel Fonksiyonlarının Tarihçesi

Fransız matematikçi Louis Franois Antoine Arbogast (1759-1803), aritmetik olarak değişim ile ilerleyen terimlerin sabit bir terim ile ifade edilmesinin faktöriyel

ile tanımlanabileceğini ilk sunan kişidir. İlerleyen zamanlarda ise İsviçreli matematikçi Leonard Euler (1707-1783) tam sayı olmayan sayılar için geleneksel integral formunu kullanarak faktöriyel fonksiyonunu genişletmiş ve bulduğu fonksiyona Gama fonksiyonu adını vermiştir. Burada kullanılan Gama fonksiyonuna ikinci tür Eulerian integrali de denilmektedir. Daha sonraları faktöriyel fonksiyonunun öneminin fark edilmesi ile birlikte matematik alanında önemli isimler; Adrien Marie Legendre (1752-1833), Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Cristoph Gudermann (1798-1852), Joseph Liouville (1809-1882), Karl Weierstrass (1815-1897), Charles Hermite (1822-1901) ve daha nice bu alanda çalışmışlardır. Diğer matematikçilerden bağımsız olarak çalışan James Stirling (1692-1770) bu çalışmalarının sonucunda $n!$ notasyonunu ilk kullanan matematikçi olmuştur. Günümüzde çok yaygın olarak kullanılan bu notasyonun ilk kim tarafından ileri sürüldüğü maalesef çok bilinmemektedir.

Faktöriyel fonksiyonları analizin temelini oluşturmaktan dolayı günümüzde de oldukça ilgi çekmektedir. Bu nedenle birçok yazar tarafından matematiğin farklı dallarında farklı amaçlar ile günümüzde de kullanılmaktadır. Faktöriyel fonksiyonlarının Stirling polinomları ile oldukça yakın bir ilişkisi bulunmaktadır. Bu ilişki nedeniyle farklı birçok özel polinom ailesi ile aralarında bağlantılar kurulabilmektedir. Elde edilebilen bu ilişkiler örüntüsü matematik literatürü için oldukça fazla önem arz etmektedir.



Şekil 2.1. Louis François Antoine Arbogast (1759-1803)

2.3.2. Faktöriyel Fonksiyonlarının Genel Özellikleri

Tanım 2.7. m pozitif bir tamsayı ve h bir rasyonel sayı olsun. $x^{(m)}$ aşağıdaki şekilde tanımlanır [18]:

$$x^{(m)} = x(x-h)(x-2h)\dots(x-[m-1]h), \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Eğer $m = 0$ ise $x^{(m)} = 1$ yani $x^{(0)} = 1$ olur. Özel durumda $x = m$, $h = 1$ alınırsa,

$$m^{(m)} = m(m-1)(m-2)\dots 2.1 = m!$$

olur. m negatif bir tamsayı olsun. O zaman $x^{(-m)}$ şu şekilde tanımlanır:

$$x^{(-m)} = \frac{1}{(x+h)(x+2h)\dots(x+mh)} = \frac{1}{(x+mh)^{(m)}}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

olur [18].

Ayrıca $x^{(m)}$ fonksiyonlarını Euler Gama fonksiyonu yardımıyla da tanımlayabiliriz. Faktöriyel fonksiyonlarında $m = 1, 2, 3, \dots$ yazılırsa faktöriyel polinomları elde edilir ve bu polinomların katsayıları bize 1. ve 2. tür Stirling sayılarını verir [18]. ($h = 1$ alalım.)

Ayrıca faktöriyel fonksiyonu tamsayı olmayan sayılar için hesaplanırsa Pochhammer polinomları elde edilebilir [19].

2.3.3. Azalan Faktöriyel Fonksiyonu

Tanım 2.8. [20] $x \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere;

$$(x)_n = \begin{cases} \prod_{k=0}^{n-1} (x-k) = x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1), & n > 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlanan $(x)_n$ fonksiyonuna “Azalan faktöriyel fonksiyonu” denir. Azalan faktöriyel fonksiyonu negatif tamsayılar için şu şekilde tanımlanır, $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere;

$$(x)_{-n} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}.$$

Uyarı 2.1. $h = 1$ için $x^{(m)} = (x)_{\underline{m}}$ dir [20].

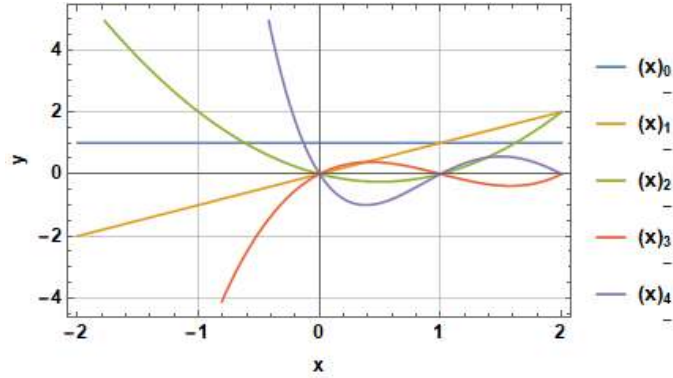
Özellik 2.1. Azalan faktöriyel fonksiyonları, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere;

- i. $(x)_{\underline{n+1}} = (x-n)(x)_{\underline{n}}$
- ii. $(x+1)_{\underline{n}} - (x)_{\underline{n}} = n(x)_{\underline{n-1}}$
- iii. $(x)_{\underline{n}} = \frac{x!}{(x-n)!}$
- iv. $(n)_{\underline{n}} = n!$

sırasıyla verilen tüm bu temel özellikleri sağlamaktadır [21].

Dördüncü dereceye kadar olan azalan faktöriyel fonksiyonlarının açık hali sırasıyla aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} (x)_{\underline{0}} &= 1, \\ (x)_{\underline{1}} &= x, \\ (x)_{\underline{2}} &= x(x-1) = x^2 - x, \\ (x)_{\underline{3}} &= x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x, \\ (x)_{\underline{4}} &= x(x-1)(x-2)(x-3) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x. \end{aligned}$$



Şekil 2.2. Bazı azalan faktöriyel fonksiyonlarının grafiği

2.3.4. Artan Faktöriyel Fonksiyonu

Tanım 2.9. [20] $x \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere;

$$(x)^{\bar{n}} = \begin{cases} \prod_{k=0}^{n-1} (x+k) = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1), & n > 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanan $(x)^{\bar{n}}$ fonksiyonuna “*Artan faktöriyel fonksiyonu*” denir. Artan faktöriyel fonksiyonu negatif tamsayılar için şu şekilde tanımlanır, $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere;

$$(x)^{\bar{-n}} = \frac{1}{(x-1)(x-2)\dots(x-n)}$$

dir.

Uyarı 2.2. (Murray, 1971) tarafından artan faktöriyel fonksiyonları ile 1. tür Stirling sayıları arasındaki ilişkiyi gösteren bağlantı,

$$S_1(n, k) = \frac{1}{k!} \frac{d^n}{dx^n} (x)^{\bar{k}} \Big|_{x=0}$$

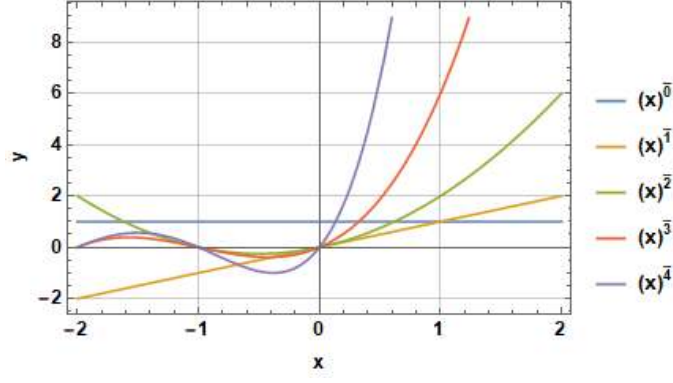
biçiminde verilmiştir [18].

Özellik 2.2. Artan faktöriyel fonksiyonları $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere aşağıda verilen tüm özellikleri sağlar [21]:

- i. $(x)^{\bar{n+1}} = (x+n)(x)^{\bar{n}}$
- ii. $(x)^{\bar{n}} - (x-1)^{\bar{n}} = n(x)^{\bar{n-1}}$
- iii. $(x)^{\bar{n}} = \frac{(x+n-1)!}{(x-1)!} = \binom{x+n-1}{n} n!.$

Dördüncü dereceye kadar olan artan faktöriyel fonksiyonlarının açık hali sırasıyla aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} (x)^{\bar{0}} &= 1, \\ (x)^{\bar{1}} &= x, \\ (x)^{\bar{2}} &= x(x+1) = x^2 + x, \\ (x)^{\bar{3}} &= x(x+1)(x+2) = x^3 + 3x^2 + 2x, \\ (x)^{\bar{4}} &= x(x+1)(x+2)(x+3) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x. \end{aligned}$$



Şekil 2.3. Bazı artan faktöriyel fonksiyonlarının grafiği

2.4. Stirling Sayıları

2.4.1. Stirling Sayılarının Tarihçesi

Bu bölümde binom katsayılarının yakın akrabası olarak bilinen Stirling sayılarını tanıtacağız. Stirling sayıları literatürde ilk kez İskoç matematikçi James Stirling (1692-1770) tarafından kullanılmıştır. Stirling sayıları, 1. tür Stirling sayıları ve 2. tür Stirling sayıları olmak üzere ikiye ayrılmaktadır. James Stirling tarafından keşfedilen bu sayıların özel polinom aileleri ile aralarında oldukça yakın bir ilişki olduğu tespit edilmiştir. Bu nedenle kombinatorik analizde çok önemli bir yere sahiptir ve kullanım alanı oldukça geniştir.

Bu sayıların oldukça uzun bir geçmişleri olmasına rağmen sabit bir notasyon şekilleri bulunmamaktadır. Bu konu üzerinde çalışan birçok farklı matematikçi, birbirlerinden çok farklı ifade biçimleri kullanmışlardır. Örneğin, Sırp matematikçi

Jovan Karamata (1902-1967) 1. tür Stirling sayılarını $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ ve 2. tür Stirling sayılarını

ise $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$ ile gösterirken, Amerikalı matematikçi Murray R. Spiegel (1923-1991) 1. tür

Stirling sayılarını $s(n, k)$ ve 2. tür Stirling sayılarını ise $S(n, k)$ ile göstermiştir.

Bizde yapılan bu tez çalışması boyunca 1. tür Stirling sayılarını $S_1(n, k)$ ve 2. tür Stirling sayılarını ise $S_2(n, k)$ ifadelerini kullanarak temsil edeceğiz.



Şekil 2.4. James Stirling (1692-1770)

2.4.2. 1. Tür Stirling Sayıları

Tanım 2.10. n, k negatif olmayan tam sayılar ve $k < n$ olmak üzere, n elemanlı bir küme üzerinde tanımlı k tane ayrık devirin çarpımından oluşan permütasyonların sayısına “1. tür Stirling sayıları” denir ve $S_1(n, k)$ ile gösterilir [18].

Tanım 2.11. 1. tür Stirling sayıları $S_1(n, k)$ aşağıdaki üreteç fonksiyonu yardımıyla tanımlanır [18]:

$$\frac{(\log(1+t))^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} S_1(n, k) \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < 1.$$

Özellik 2.3. Bu 1.tür Stirling sayıların bazı özellikleri sırasıyla,

- i. $k > n$ ise $S_1(n, k) = 0$,
- ii. $k = 0, n = 0$ ise $S_1(0, 0) = 1$,
- iii. $n > 0, k = 0$ ise $S_1(n, 0) = 0$,
- iv. $k = 1$ ise $S_1(n, 1) = (n-1)!$,
- v. $k = n$ ise $S_1(n, n) = 1$,

vi. $n > 0, k = 2$ ise $S_1(n, 2) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

olarak verilebilir [18].

Tablo 2.1. Tanım 2.10.'a göre 1. tür Stirling sayıları

n	$S_1(n, 1)$	$S_1(n, 2)$	$S_1(n, 3)$	$S_1(n, 4)$	$S_1(n, 5)$	$S_1(n, 6)$	$S_1(n, 7)$	$S_1(n, 8)$
1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0
3	2	3	1	0	0	0	0	0
4	6	11	6	1	0	0	0	0
5	24	50	35	10	1	0	0	0
6	120	274	225	85	15	1	0	0
7	720	1764	1624	735	175	21	1	0
8	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1

Tanım 2.12. n, k negatif olmayan tam sayılar olmak üzere $(x)_n$, azalan faktöriyel fonksiyonunun açılımındaki x^k 'li terimlerin katsayılarına “1. tür Stirling sayıları” denir. Matematiksel gösterimi ise,

$$(x)_n = \sum_{k=0}^n S_1(n, k) x^k$$

şeklinde olacaktır [18].

Tanım 2.13. 1. tür Stirling sayıları $S_1(n, k)$ için rekürans bağıntısı,

$$S_1(n+1, k) + nS_1(n, k) = S_1(n, k-1)$$

eşitliği ile verilir [22].

Tanım 2.14. n, k negatif olmayan tam sayılar olmak üzere,

$$\sum_{k=0}^n S_1(n, k) = n!$$

eşitliği sağlanır [20].

Tanım 2.15. $n \geq 1, k$ bir tamsayı ve $k < n$ için,

$$\sum_{k=1}^n S_1(n+1, k) = 0$$

ifadesi yazılır [23].

Tablo 2.2. Tanım 2.12.'ye göre 1. tür Stirling sayıları

n	$S_1(n,1)$	$S_1(n,2)$	$S_1(n,3)$	$S_1(n,4)$	$S_1(n,5)$	$S_1(n,6)$	$S_1(n,7)$	$S_1(n,8)$
1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	-1	1	0	0	0	0	0	0
3	2	-3	1	0	0	0	0	0
4	-6	11	-6	1	0	0	0	0
5	24	-50	35	-10	1	0	0	0
6	-120	274	-225	85	-15	1	0	0
7	720	-1764	1624	-735	175	-21	1	0
8	-5040	13068	-13132	6769	-1960	322	-28	1

2.4.3. 2. Tür Stirling Sayıları

Tanım 2.16. n, k negatif olmayan tam sayılar olmak üzere, n elemanlı bir kümenin k tane ayırık ve boş olmayan alt kümeye parçalanışlarının sayısına “2. tür Stirling sayıları” denir ve $S_2(n, k)$ şeklinde gösterilir [24].

Tanım 2.17. 2. tür Stirling sayıları aşağıdaki üretic fonksiyonu ile tanımlanır [18]:

$$\frac{(e^t - 1)^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} S_2(n, k) \frac{t^n}{n!}.$$

Tanım 2.18. 2. tür Stirling sayıları $S_2(n, k)$ için rekürans bağıntısı,

$$kS_2(n, k) + S_2(n, k-1) = S_2(n+1, k)$$

denklemini ile verilir [22].

Özellik 2.4. 2. tür Stirling sayılarının bazı temel özellikleri,

- i. $n = k = 0$ ise $S_2(0, 0) = 1$,

- ii. $n > 0, k = 0$ ise $S_2(n, 0) = 0$,
- iii. $k = 1$ ise $S_2(n, 1) = 1$,
- iv. $k = n$ ise $S_2(n, n) = 1$,
- v. $k > n$ ise $S_2(n, k) = 0$,
- vi. $k = n - 1$ ise $S_2(n, n - 1) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$,
- vii. $k = 2$ ise $S_2(n, 2) = 2^{n-1} - 1$

bağıntıları ile sırasıyla verilebilir [22].

Tablo 2.3. Tanım 2.16'ya göre 2. tür Stirling Sayıları

n	$S_2(n, 1)$	$S_2(n, 2)$	$S_2(n, 3)$	$S_2(n, 4)$	$S_2(n, 5)$	$S_2(n, 6)$	$S_2(n, 7)$	$S_2(n, 8)$
1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0
3	1	3	1	0	0	0	0	0
4	1	7	6	1	0	0	0	0
5	1	15	25	10	1	0	0	0
6	1	31	90	65	15	1	0	0
7	1	63	301	350	140	21	1	0
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1

Tanım 2.19. $n \geq 1$ için,

$$S_2(n+1, n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

eşitliği vardır [18].

Tanım 2.20. $1 \leq n \leq k$ için 2. tür Stirling sayılarının açık formu,

$$S_2(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{0 \leq j \leq k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n$$

olarak gösterilebilir [25].

2.4.4. Faktöriyel Fonksiyonları ve Stirling Sayıları Arasındaki İlişki

- $(x)_n = \sum_{k=1}^n S_1(n, k) x^k$, buradaki $S_1(n, k)$ 1. tür Stirling sayılarıdır.
- $x^n = \sum_{k=1}^n S_2(n, k) (x)^{\bar{k}}$, buradaki $S_2(n, k)$ 2. tür Stirling sayılarıdır.

Formülde n yerine değerler vererek ilk 5 terimini yazalım bu fonksiyonların katsayıları bize 1. ve 2. tür Stirling sayılarını verecektir [18].

$(x)_1 = x$	$x = (x)^{\bar{1}}$
$(x)_2 = x^2 - x$	$x^2 = (x)^{\bar{2}} + (x)^{\bar{1}}$
$(x)_3 = x^3 - 3x^2 + 2x$	$x^3 = (x)^{\bar{3}} + 3(x)^{\bar{2}} + (x)^{\bar{1}}$
$(x)_4 = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$	$x^4 = (x)^{\bar{4}} + 7(x)^{\bar{3}} + 6(x)^{\bar{2}} + (x)^{\bar{1}}$
$(x)_5 = x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x$	$x^5 = (x)^{\bar{5}} + 15(x)^{\bar{4}} + 25(x)^{\bar{3}} + 10(x)^{\bar{2}} + (x)^{\bar{1}}$

Örneğin;

$$(x)_5 = S_1(5, 1)x - S_1(5, 2)x^2 + S_1(5, 3)x^3 - S_1(5, 4)x^4 + S_1(5, 5)x^5$$

faktöriyel fonksiyonu açılımındaki $(x)_5$ 'in katsayıları ile yukarıdaki fonksiyon eşitliğindeki katsayıları karşılaştırırsak;

$$S_1(5, 1) = 24, S_1(5, 2) = 50, S_1(5, 3) = 35, S_1(5, 4) = 10, S_1(5, 5) = 1$$

olarak bulunur [26].

2.5. Stirling Polinomları

2.5.1. Stirling Polinomlarının Tarihçesi

Stirling polinomları birçok ilginç özelliğe sahiptir ve matematiğin çok sayıda farklı alt dalında kullanılmaktadırlar. Örneğin, matematiksel fizik, istatistiksel fizik, kombinatorik analiz ve sayılar teorisi v.b. Bu çalışmada yaklaşım teorisi alanında, integro diferansiyel denklemleri çözmek için geliştirilen matris sıralama yöntemini oluşturmak için kullanılacaklardır.

Birinci tür ve ikinci tür Stirling sayıları ilk kez James Stirling (1692-1770) tarafından keşfedilmiş ve yıllar geçtikçe de farklı yazarlar tarafından çalışılmaya başlanmıştır. Stirling polinomları; Stirling sayıları, Bernoulli sayıları ve genelleştirilmiş Bernoulli polinomları ile oldukça yakın ilişkilidir. Stirling polinomlarının çeşitli varyasyonları literatürde yer almaktadır. Stirling polinomları, Isador M. Sheffer tarafından ilk kez kullanılan Sheffer dizisinin bir üyesidir ve merkezi binom katsayıları olarak da bazı kaynaklarda anılmaktadır. Ayrıca Stirling polinomları, Norlund polinomlarının (genelleştirilmiş Bernoulli polinomlarının) özel bir halidir. Stirling polinomları ile Stirling sayıları ve genelleştirilmiş Bernoulli polinomları arasındaki bağıntılar literatürde sunulmuştur. Umral calculus alanında detaylı bir şekilde incelenen tüm Sheffer dizi örnekleri ile de aralarındaki bağıntıları incelemek mümkündür.

2.5.2. Stirling Polinomlarının Bazı Özellikleri

Tanım 2.21. Stirling polinomlarının üreteç fonksiyonu;

$$\left(\frac{t}{1-e^{-t}} \right)^{x+1} = \sum_{k=0}^{\infty} S_k(x) \frac{t^k}{k!}$$

bağıntısı ile verilir [25].

Özellik 2.5. $S_k(x)$ Stirling polinomları ve $B_k^\alpha(x)$ genelleştirilmiş Bernoulli polinomları (Norlund polinomları) arasındaki ilişki,

$$S_k(x) = B_k^{(x+1)}(x+1)$$

eşitliği ile verilir [25].

Özellik 2.6. $S_k(x)$ Stirling polinomlarının bazı temel özellikleri;

$$i. \quad S_n(m) = \frac{(-1)^n}{\binom{m}{n}} S_1(m+1, m-n+1), \quad m \geq n, \quad m \in \mathbb{N},$$

$$ii. \quad S_k(-m) = \frac{(-1)^k}{\binom{k+m-1}{k}} S_2(k+m-1, m-1),$$

iii. $S_k(k) = k!$,

iv. $S_k(0) = (-1)^k B_k$, B_k Bernoulli sayıları,

v. $S_k(1) = (-1)^{k+1} ((k-1)B_k + kB_{k-1})$, B_k Bernoulli sayıları,

olarak verilebilir [27].

İlk 6 Stirling polinomu $0 \leq n \leq 5$ için $S_n(x)$;

$$S_0(x) = 1,$$

$$S_1(x) = \frac{x+1}{2},$$

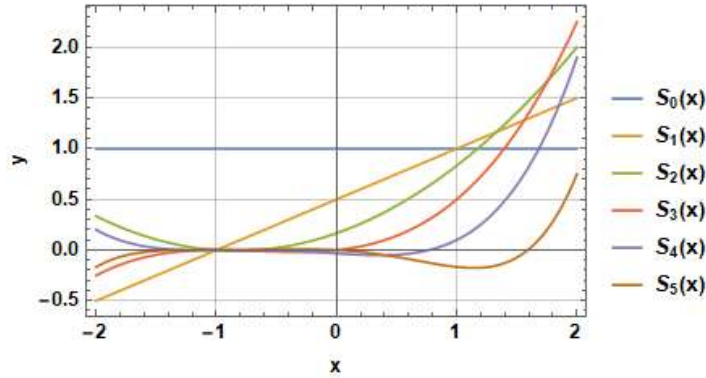
$$S_2(x) = \frac{3x^2 + 5x + 2}{12},$$

$$S_3(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + x}{8},$$

$$S_4(x) = \frac{15x^4 + 30x^3 + 5x^2 - 18x - 8}{240},$$

$$S_5(x) = \frac{3x^5 + 5x^4 - 5x^3 - 13x^2 - 6x}{96}$$

sırasıyla açık halleri verilmiştir [27].



Şekil 2.5. Bazı Stirling polinomları

Teorem 2.1. [28] $n \geq 0$ için $S_n(x)$ Stirling polinomları aşağıdaki kapalı form ile hesaplanabilir:

$$S_n(x) = (-1)^n n! \sum_{k=0}^n \left[\sum_{j=k}^n \frac{S_1(j+1, k+1)}{(n+j)!} \sum_{i=0}^j (-1)^i \binom{n+j}{j-i} S_2(n+i, i) \right] x^k. \quad (2.5)$$

Yukarıda verilen ifadeyi kısaltırsak,

$$S_n(x) = (-1)^n n! \sum_{k=0}^n T_{nk} x^k, \quad (n = 0, 1, \dots, N, n \geq 0)$$

burada kısaltma işleminde kullanılan T_{nk} ifadesinin açık hali,

$$T_{nk} = \sum_{j=k}^n \frac{S_1(j+1, k+1)}{(n+j)!} \sum_{i=0}^j (-1)^i \binom{n+j}{j-i} S_2(n+i, i)$$

olarak belirtilmiştir.

2.6. Genocchi Polinomları

2.6.1. Genocchi Polinomlarının Tarihçesi

Araştırmalara göre Genocchi polinomları ve sayılarının oldukça eski bir tarihi bulunmaktadır. Bu özel polinomlar ailesinin geçmişteki izlerine bakılırsa ilk olarak Angelo Genocchi (1817-1889) tarafından ileri sürüldüğü gözlemlenebilmektedir. Günümüzde Genocchi sayıları ve polinomları üzerine araştırmalar yapılan oldukça ilgi çekici bir alan olarak görülmektedir. Bu nedenle birçok yazar tarafından konu üzerinde çalışmalar yapılmaktadır. Genocchi sayıları ve polinomları matematiğin birçok dalında kullanılmaktadır. Örneğin, sayılar teorisi, p-adic analitik sayılar teorisi, modül teorisi gibi.



Şekil 2.6. Angelo Genocchi (1817-1889)

2.6.2. Genocchi Polinomlarının Bazı Özellikleri

Tanım 2.22. $t \in \mathbb{C}$ olsun. Herhangi bir x karmaşık sayısı için $G_n(x)$ Genocchi polinomları,

$$\left(\frac{2t}{e^t + 1} \right) e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < \pi$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır [27].

Tanım 2.23. Genocchi sayılarının üreteç fonksiyonu,

$$\left(\frac{2t}{e^t + 1} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \frac{t^n}{n!}$$

şeklindedir [29].

Tanım 2.24. G_k Genocchi sayıları ve $G_n(x)$ Genocchi polinomları olmak üzere aralarındaki bağıntı,

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} G_k x^{n-k}. \quad (2.6)$$

biçiminde verilebilir [30].

Özellik 2.7. Genocchi polinomlarının bazı temel özellikleri sırasıyla,

- i. $G_n = 2(1 - 2^n) B_n$ burada B_n Bernoulli sayılarıdır.
- ii. $\int_0^1 G_n(x) G_m(x) dx = \frac{2(-1)^n n! m!}{(m+n)!} G_{m+n}, \quad (n, m \geq 1)$
- iii. $\frac{dG_n(x)}{dx} = n G_{n-1}(x), \quad (n \geq 2)$
- iv. $G_n(1) + G_n(0) = 0, \quad (n > 1)$
- v. $G_n(t) = \int_0^t n G_{n-1}(x) dx + G_n, \quad (n \geq 1)$
- vi. $n \in \mathbb{N}$ için $G_n(1-x) = (-1)^{n+1} G_n(x)$

biçiminde verilir [31].

Dördüncü dereceye kadar olan Genocchi polinomlarının açık hali sırasıyla,

$$G_1(x) = 1,$$

$$G_2(x) = 2x - 1,$$

$$G_3(x) = 3x^2 - 3x,$$

$$G_4(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1,$$

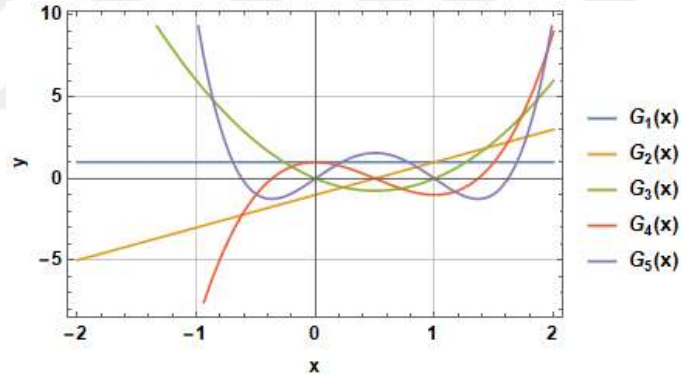
$$G_5(x) = 5x^4 - 10x^3 + 5x$$

olacak şekilde yazılır [31].

Özellik 2.8. [31] Bazı Genocchi sayıları, sırasıyla,

$$G_1 = 1, G_2 = -1, G_4 = 1, G_6 = -3, G_8 = 17, \dots$$

$$G_3 = G_5 = G_7 = \dots = 0.$$



Şekil 2.7. Bazı Genocchi polinomlarının grafiği

2.7. Legendre Polinomları

2.7.1. Legendre Polinomlarının Tarihçesi

Bu kısımda, ortogonal polinomların türevlenebilme, integrallenebilme ve süreklilik gibi önemli özelliklere sahip olması nedeniyle, araştırmacılar, diferansiyel ve integral denklem gibi denklemlerin yaklaşık çözümlerini bu polinomlar cinsinden

arama yoluna gitmişlerdir. Matematik bilimine ve kendisinden sonra gelen matematikçilere olan önemli katkılarından dolayı Fransız matematikçi Adrien Marie Legendre'in (1752-1833) ismiyle anılan Legendre polinomları da ortogonal polinomlar ailesi içerisinde önemli bir yere sahiptir. Fransız Matematikçi Adrien Marie Legendre'nin ilk olarak kullandığı polinomlara kendisini onurlandırmak amacıyla İngiliz matematikçi Isaac Todhunter tarafından Legendre polinomları ismi verilmiştir. Legendre polinomlarının temel özellikleri ve notasyonu da kendisi tarafından oluşturulmuştur. Bu bölümde, Legendre polinomları ve bu polinomların önemli özellikleri verilmiştir.

Legendre polinomları tekil Sturm-Liouville problemlerinin örnekleridir [32]. Ayrıca sınır değer problemlerinin çözümlerinin bulunmasında ve akışkanlar dinamiği hesaplamalarında oldukça geniş çaplı kullanılmaktadır [33]. Diğer taraftan, Shifted Legendre polinomlarına dayalı nümerik metotlar lineer ve nonlineer neutral integro diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bulunmasında da oldukça etkilidir [34].

1994'lü yılların başlarından itibaren, Taylor matris ve Taylor sıralama metotları lineer diferansiyel, integral, integro diferansiyel, fark, integro fark ve integro diferansiyel denklem sistemlerinin çözümlerini bulmak için Sezer tarafından kullanılmaya başlanmıştır [3, 35, 36].



Şekil 2.8. Adrien Marie Legendre (1752-1833)

2.7.2. Legendre Polinomlarının Bazı Özellikleri

Tanım 2.26. Legendre polinomları, x 'in keyfi reel veya kompleks değerleri için

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

Rodrigues formülü ile tanımlanır [37].

Burada $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ olmak üzere, bazı Legendre polinomlarının açık hali ve grafikleri;

$$L_0(x) = 1,$$

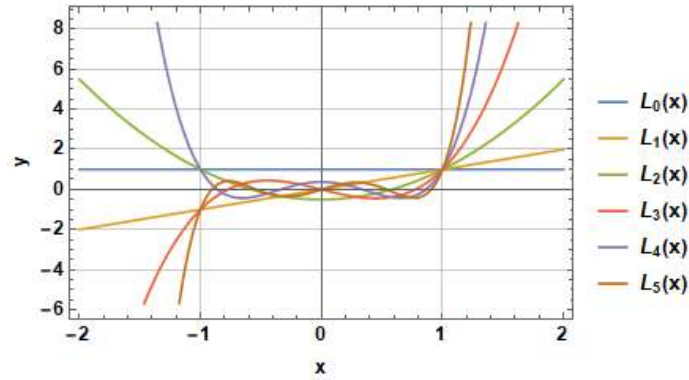
$$L_1(x) = x,$$

$$L_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$L_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$L_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$

$$L_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).$$



Şekil 2.9. Bazı Legendre polinomları

Ayrıca Legendre polinomları için;

$$(x^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{2n-2k}$$

binom açılımı ve (2.8)'in yardımıyla, $\lfloor n \rfloor$, n 'den küçük en büyük tamsayıyı belirtmek üzere, n . dereceden Legendre polinomunun genel gösterimi,

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k! (n-k)! (n-2k)!} x^{n-2k}$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n-2k}{n} x^{n-2k}, \quad -1 \leq x \leq 1$$

şeklinde ifade edilir [37]. Legendre polinomlarının üreteç fonksiyonu,

$$w(x, t) = (1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}}$$

biçiminde olup üreteç fonksiyonu yardımıyla Legendre polinomunun temel özellikleri elde edilir. Diğer yandan,

$$w(x, t) = (1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n$$

seri açılımı da mevcuttur. Ayrıca Legendre polinomları için,

$$L_n(1) = 1, L_n(-1) = (-1)^n, L_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots 2n}, L_{2n+1}(0) = 0$$

eşitlikleri sağlanır [37].

Özellik 2.9. Legendre polinomlarının temel özellikleri aşağıda sıralanmıştır:

i. Rekürans bağıntıları;

$$L'_{n+1}(x) - xL'_n(x) = (n+1)L_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$xL'_n(x) - L'_{n-1}(x) = nL_n(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

ile verilir [38].

ii. Legendre polinomlarının en önemli özelliklerinden biri, $[-1, 1]$ aralığında

$p(x) = 1$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olmalarıdır. Burada,

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

olarak tanımlanan Kronecker delta fonksiyonu yardımıyla,

$$\int_{-1}^1 L_m(x) L_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}$$

biçiminde yazılabildikleri için ortogonaldirler [39].

2.7.3. Shifted Legendre Polinomları

Burada $[-1,1]$ aralığında ortogonal olan $L_n(x)$ Legendre polinomlarına $x \rightarrow 2x-1$ dönüşümü uygulanarak $[0,1]$ aralığında ortogonalliğe sahip olan $P_n(x) = L_n(2x-1)$ Shifted Legendre polinomları elde edilir. Dolayısıyla Legendre polinomları için verilen ilk rekürans bağıntısı Shifted Legendre polinomları için

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)(2x-1)P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$$

ya da

$$P_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)(2x-1)}{n+1} P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x), \quad n=1,2,3,\dots$$

olarak bulunur. Shifted Legendre polinomları,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} \frac{(n+k)! x^k}{(n-k)!(k!)^2}, \quad k=0,1,2,3,\dots \quad (2.9)$$

genel gösterimine sahiptir.

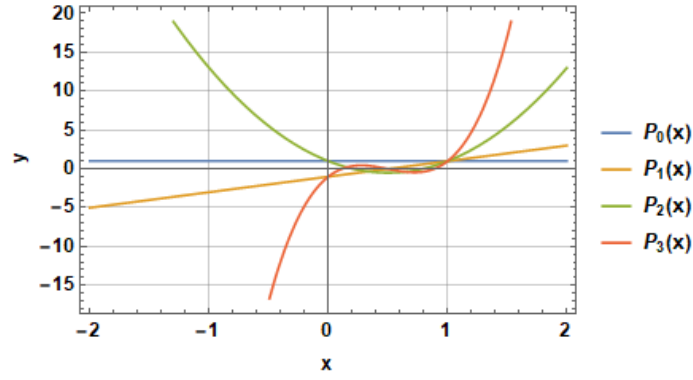
Ayrıca $P_n(1) = 1$ ve $P_n(0) = (-1)^n$ olup $n=0,1,2,3$ değerleri için bazı Shifted Legendre polinomları aşağıdaki şekildedir:

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = 2x-1,$$

$$P_2(x) = 6x^2 - 6x + 1,$$

$$P_3(x) = 20x^3 - 30x^2 + 12x - 1.$$



Şekil 2.10. Bazı Shifted Legendre polinomları

Legendre polinomlarında $[-1,1]$ aralığında var olan ortogonallik özelliği Shifted Legendre polinomları için $[0,1]$ aralığında mevcut olup

$$\int_0^1 P_m(x) P_n(x) dx = \frac{1}{2n+1} \delta_{nm}$$

bağıntısı ile verilir.

2.7.4. Genelleştirilmiş Shifted Legendre Polinomları

Klasik Legendre polinomları,

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n-2k}{n} x^{n-2k}, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad -1 \leq x \leq 1$$

ile tanımlıdır ve $[-1,1]$ aralığında ortogonaldır. Bu polinomlar ailesini $[a,b]$ aralığında ortogonal ve tanımlı hale getirebilmemiz mümkündür. $L_n(x)$ Legendre polinomları ile $[a,b]$ da tanımlı $P_n^*(x)$ genelleştirilmiş Shifted Legendre polinomları arasındaki bağıntı,

$$P_n^*(x) = L_n\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

bağıntısı yardımıyla açıklanabilmektedir [40]. Genelleştirilmiş Shifted Legendre polinomlarını rekürans bağıntısı yardımıyla da üretmek mümkündür [40].

$$(n+1)P_{n+1}^*(x) = (2n+1)\left(\frac{2x-b-a}{b-a}\right)P_n^*(x) - nP_{n-1}^*(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Kullanılan bu rekürans bağıntısında başlangıç koşulları, $P_0^*(x) = 1$, $P_1^*(x) = \frac{2x-b-a}{b-a}$ olarak kullanılmaktadır. Yazılan bu polinomlar $[a, b]$ aralığında ortogonaldirler. Ortogonalliklerini göstermek için

$$\int_a^b P_m^*(x) P_n^*(x) dx = \begin{cases} \frac{b-a}{2n+1}, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

bağıntısı kullanılabilmektedir [40].

2.8. Hata Analizi

Lineer fonksiyonel integro diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bulunabilmesi için problem ve koşulların incelenmesi, farklı nümerik metotların uygulanması ve gerçek çözüme en yakın çözüm yaklaşımının tespit edilmesi gerekir. Bu arada elde edilen nümerik çözümün gerçek çözüme en yakın çözüm olabilmesi için iyileştirilmesi gerekir. Yapılan bu iyileştirme sürecine hata analizi adı verilir. Böylelikle yapılan hata analizi sonucunda gerçek çözüme en yakın çözüm elde edilebilir ve yapılan hata miktarı en aza indirgenebilir.

Rezidüel Hata: Diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan sıralama metotlarından elde edilen yaklaşık çözümün problemde yerine yazılması sonucu elde edilen hata türüdür. Elde edilen bu hata türü problemin mutlak hatasından ya da farklı yöntemlerle elde edilmiş olan diğer hata türlerinden daha küçük olabilmektedir. Kullanılan bu hata türü çözümün gerçek çözüme en yakın hale getirilebilmesinde oldukça önemli bir araçtır [36].

2.9. Tezin Amacı

Bu tez çalışmasının amacı, Shifted Legendre polinomları, Stirling polinomları, Genocchi polinomları ve Artan-Azalan faktöriyel fonksiyonları kullanılarak, yüksek mertebeden genelleştirilmiş lineer fonksiyonel integro diferansiyel denklemlerin, belli başlangıç, sınır ya da karışık koşullar altında yaklaşık çözümleri için matris sıralama metotlarını geliştirmek, elde edilen çözümleri hata analizi yaparak iyileştirmek, dolayısıyla bu türdeki diferansiyel denklemlerin tam çözümüne en yakın çözümlerini

araştırmak ve hata tahminlerini yapmaktır. Ayrıca, Shifted Legendre polinomları, Stirling polinomları, Genocchi polinomları ve Artan-Azalan faktöriyel fonksiyonları ile bu türdeki denklemlerin matris sıralama metodu ile çözülebilmesi için geliştirilen metotlarla literatüre özgün bir çalışma kazandırmaktır.



3. MATERYAL VE YÖNTEMLER

3.1. Materyal

Bu çalışmada; adi diferansiyel denklemler, yüksek mertebeden Fredholm tipi integro diferansiyel denklemler, yüksek mertebeden lineer diferansiyel fark denklemleri, oransal ve değişken gecikmeli pantograph tipindeki integro diferansiyel denklemler gibi farklı sınıftan denklemleri kapsayan “*genelleştirilmiş lineer fonksiyonel integro diferansiyel denklemler sınıfı*” ile beraber bunların çözüm yöntemlerinde temel oluşturan, Artan ve Azalan faktöriyel fonksiyonları, Stirling polinomları, Genocchi polinomları, Shifted Legendre polinomları ve Taylor polinomları gibi, “*özel polinom ve fonksiyonlar*” materyal olarak kullanılmaktadır.

Burada ele alınan problemler; bahsedilen özel polinom aileleri ve fonksiyonları ile birlikte sıralama noktalarına dayalı işlemsel temel matris bağıntılarını kullanarak, verilen denklem ve koşulların bir cebirsel matris denklemler sistemine indirgenmesiyle çözümün hesaplanması esasına dayanmaktadır. Ayrıca, elde edilen bu cebirsel matris denklemler sistemlerinin çözümüyle yaklaşık çözümler elde edilmekte, kalan fonksiyonları (rezidüel fonksiyonları) ile de ortalama değer teoremine dayalı rezidüel hata analizi yöntemi uygulanabilmektedir. Böylece, çözümlerin doğruluğu ve tutarlılığı gösterilebilmekte, elde edilen sonuçlar tablo ve grafiklerle desteklenerek, tam çözüme en yakın değerlerin bulunabildiği kanıtlanmaktadır.

3.2. Yöntem

3.2.1. Yüksek Mertebeden Genelleştirilmiş Lineer Fonksiyonel İntegro Diferansiyel Denklemler İçin Artan ve Azalan Faktöriyel Fonksiyonları İle Matris Sıralama Metodu

Çalışmanın bu kesiminde, yüksek mertebeden genelleştirilmiş lineer fonksiyonel integro diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinin bulunması amacıyla geliştirilen artan ve azalan faktöriyel fonksiyonlarına dayalı matris sıralama metodu oluşturulmaktadır.

Burada ele alınan yüksek mertebeden genelleştirilmiş lineer fonksiyonel integro diferansiyel denklem

$$\sum_{k=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} D_{kj}(x) = f(x) + \sum_{r=0}^{m_3} \sum_{s=0}^{m_4} I_{rs}(x), \quad (3.1)$$

$$(\max \{m_1, m_3\} = m, \{x, t, u_{rs}(x), v_{rs}(x)\} \in [a, b])$$

biçiminde tanımlanmaktadır. Denklemden,

- $D_{kj}(x) = P_{kj}(x) y^{(k)}(h_{kj}(x))$, (fonksiyonel diferansiyel kısım)
- $I_{rs}(x) = \int_{u_{rs}(x)}^{v_{rs}(x)} K_{rs}(x, t) y^{(r)}(g_{rs}(t)) dt$, (fonksiyonel integro diferansiyel kısım)

olarak düşünülmüştür. (3.1)'de ele alınan lineer fonksiyonel integro diferansiyel denklemin yaklaşık çözümlerini bulmak için kullanılan karışık koşullar

$$\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^L a_{j,k,l} y^{(k)}(\gamma_l) = \lambda_j; \quad (j = 1, 2, \dots, m, a \leq \gamma_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_L = b) \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanmıştır [34]. Burada, $P_{kj}(x)$, $h_{kj}(x)$, $g_{rs}(t)$ ve $f(x)$ fonksiyonları bilinen, $[a, b]$ aralığında tanımlı, sürekli ve m . mertebeden türevlenebilen fonksiyonlardır. Ayrıca, a_{kj} , b_{kj} , γ_l ve λ_j uygun olarak seçilen sabitlerdir; $y(x)$ ise bulunması gereken bilinmeyen fonksiyondur. Bu yöntem esas olarak, sırasıyla,

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N \overline{a_n}(x) \bar{n}; \quad (a \leq x \leq b) \quad (3.3)$$

ve

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N \underline{a_n}(x) \underline{n}; \quad (a \leq x \leq b) \quad (3.4)$$

formundaki sonlu artan ve azalan faktöriyel fonksiyon serilerine dayanmaktadır. Buna göre, çözümler, artan ve azalan faktöriyel fonksiyonlar cinsinden bulunmaktadır. Burada, $(x) \bar{n}$ ve $(x) \underline{n}$, $n = 0, 1, \dots, N$, sırasıyla, artan ve azalan faktöriyel fonksiyonlarıdır; $\overline{a_n}$ ve $\underline{a_n}$, $n = 0, 1, \dots, N$ bulunması gereken artan ve azalan faktöriyel fonksiyonlarının bilinmeyen katsayılarıdır ve N ise $N \geq m$ olacak şekilde seçilen herhangi bir pozitif tamsayıdır. Ayrıca, çözüm yönteminde kullanılacak olan sıralama noktaları aşağıdaki şekilde tanımlanabilir [3]:

$$x_i = a + \frac{b-a}{N} i, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (\text{standart}) \quad (3.5)$$

veya

$$x_i = \frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{\pi i}{N}\right), \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (\text{Chebyshev-Lobatto}). \quad (3.6)$$

Yukarıda verilen sıralama noktalarından istenilen biri kullanılarak (3.1) için cebirsel matris denklem sistemleri elde edilebilecektir. Biz bu çalışmamızda (3.5) ile verilen standart sıralama noktalarını kullanmayı tercih ettik.

3.2.1.1. Temel Matris Bağlılıları

Bu bölümde verilen (3.1) yüksek mertebeden genelleştirilmiş lineer fonksiyonel integro diferansiyel denklem formunun her bir terimini matris formuna getireceğiz. İlk olarak, (3.1) diferansiyel denkleminin, belirtilen (3.5) veya (3.6) sıralama noktalarına göre (3.3) ve (3.4) ile tanımlanan artan ve azalan faktöriyel fonksiyonlarının sonlu serisi formunda bir yaklaşık çözümü olduğu kabul edilecektir. Bu yaklaşık çözümlerin matris formları;

$$y(x) \cong y_N(x) = \bar{\chi}(x) \bar{A} \quad (\text{artan faktöriyel fonksiyonları için}) \quad (3.7)$$

ve

$$y(x) \cong y_N(x) = \underline{\chi}(x) \underline{A} \quad (\text{azalan faktöriyel fonksiyonları için}) \quad (3.8)$$

olarak tanımlanmaktadır. Buradaki matrisler,

$$\bar{\chi}(x) = \begin{bmatrix} (x)^{\bar{0}} & (x)^{\bar{1}} & \dots & (x)^{\bar{N}} \end{bmatrix}, \quad \underline{\chi}(x) = \begin{bmatrix} (x)_{\underline{0}} & (x)_{\underline{1}} & \dots & (x)_{\underline{N}} \end{bmatrix}$$

ve

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \dots & \bar{a}_N \end{bmatrix}^T, \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{a}_0 & \underline{a}_1 & \dots & \underline{a}_N \end{bmatrix}^T$$

şeklinde gösterilir.

Şimdi (2.3) ve (2.4) deki faktöriyel fonksiyonları $(x)^{\bar{n}}$ ve $(x)_{\underline{n}}$ ile beraber, Kesim 2.4.4. deki faktöriyel fonksiyonları ve Stirling sayıları arasındaki bağıntıları kullanarak (3.7) ve (3.8) ile tanımlanan $\bar{\chi}(x)$ ve $\underline{\chi}(x)$ matrislerinin en açık hallerini aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (x)^{\bar{0}} \\ (x)^{\bar{1}} \\ (x)^{\bar{2}} \\ \vdots \\ (x)^{\bar{N}} \end{bmatrix}}_{(\bar{\chi}(x))^T} = \underbrace{\begin{bmatrix} S_1(0,0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ S_1(1,0) & S_1(1,1) & 0 & \dots & 0 \\ S_1(2,0) & S_1(2,1) & S_1(2,2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ S_1(N,0) & S_1(N,1) & S_1(N,2) & \dots & S_1(N,N) \end{bmatrix}}_{(\bar{S})^T} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^N \end{bmatrix}}_{(X(x))^T}$$

veya kısaca

$$\bar{\chi}(x) = X(x) \bar{S} \quad (3.9)$$

ve

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^N \end{bmatrix}}_{(X(x))^T} = \underbrace{\begin{bmatrix} S_2(0,0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ S_2(1,0) & S_2(1,1) & 0 & \dots & 0 \\ S_2(2,0) & S_2(2,1) & S_2(2,2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ S_2(N,0) & S_2(N,1) & S_2(N,2) & \dots & S_2(N,N) \end{bmatrix}}_{(\underline{S})^T} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} (x)_0 \\ (x)_1 \\ (x)_2 \\ \vdots \\ (x)_N \end{bmatrix}}_{(\underline{\chi}(x))^T}$$

veya kısaca

$$\underline{\chi}(x) = X(x) \underline{S}^{-1}. \quad (3.10)$$

Ayrıca, artan ve azalan faktöriyel fonksiyonlarının özelliklerinden $\bar{\chi}^{(k)}(x)$ ve $\underline{\chi}^{(k)}(x)$ matrisleri ve türevleri ile $X^{(k)}(x)$ matris formunun arasında oluşturulan rekürans bağıntıları aşağıdaki gibi elde edilmektedir:

$$\bar{\chi}^{(k)}(x) = X^{(k)}(x) \bar{S} = X(x) \mathbf{B}^k \bar{S}; \quad (k=0,1,\dots,m) \quad (3.11)$$

ve

$$\underline{\chi}^{(k)}(x) = X^{(k)}(x) \underline{S}^{-1} = X(x) \mathbf{B}^k \underline{S}^{-1}; \quad (k=0,1,\dots,m). \quad (3.12)$$

Aynı zamanda, Taylor polinomlarına dayalı $X(x)$ matrisi ile onun türevleri olan $X^{(k)}(x)$ matrisi arasındaki bağıntı,

$$X^{(k)}(x) = X(x) \mathbf{B}^k, \quad (k=0,1,\dots,m) \quad (3.13)$$

ile verilir, burada verilen terimlerin matris formları,

$$X(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^N \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \mathbf{B}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

biçimindedir. $\overline{\chi}(x)$ artan faktöriyel fonksiyonu ve $\underline{\chi}(x)$ azalan faktöriyel fonksiyonunun (3.9) ve (3.10) bağıntıları ile verilen özelliklerinden yararlanarak, $\overline{\mathbf{S}}$ ve $\underline{\mathbf{S}}$ matrislerinin aşağıdaki gibi olduğu görülmektedir:

$$(\overline{\mathbf{S}})^T = \begin{bmatrix} S_1(0,0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ S_1(1,0) & S_1(1,1) & 0 & \dots & 0 \\ S_1(2,0) & S_1(2,1) & S_1(2,2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_1(N,0) & S_1(N,1) & S_1(N,2) & \dots & S_1(N,N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)},$$

$$(\underline{\mathbf{S}})^T = \begin{bmatrix} S_2(0,0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ S_2(1,0) & S_2(1,1) & 0 & \dots & 0 \\ S_2(2,0) & S_2(2,1) & S_2(2,2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_2(N,0) & S_2(N,1) & S_2(N,2) & \dots & S_2(N,N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}.$$

Dolayısıyla, (3.7)-(3.13) bağıntılarını kullanarak, $y_N(x)$ çözüm fonksiyonunun türevlerinin matris formları;

$$y_N(x) = \mathbf{X}(x) \overline{\mathbf{S}} \mathbf{A} \quad (3.14)$$

ve

$$y_N(x) = \mathbf{X}(x) \underline{\mathbf{S}}^{-1} \mathbf{A} \quad (3.15)$$

ve türevlerinin matris formları;

$$y_N^{(k)}(x) = \mathbf{X}^{(k)}(x) \overline{\mathbf{S}} \mathbf{A} = \mathbf{X}(x) \mathbf{B}^k \overline{\mathbf{S}} \mathbf{A}, \quad (k=0,1,\dots) \quad (3.16)$$

ve

$$y_N^{(k)}(x) = \mathbf{X}^{(k)}(x) \underline{\mathbf{S}}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{X}(x) \mathbf{B}^k \underline{\mathbf{S}}^{-1} \mathbf{A}, \quad (k=0,1,\dots) \quad (3.17)$$

olarak elde edilir.

Yüksek mertebeden lineer fonksiyonel integro diferansiyel denklemleri genelleştirebilmek için (3.16) ve (3.17) bağıntılarında $x \rightarrow h_{kj}(x)$ yerine yazılırsa $k=0,1,...,m_1$ için problemin diferansiyel kısmında oluşan yeni bağıntılar takiben sırasıyla elde edilir:

$$y_N^{(k)}(h_{kj}(x)) = X(h_{kj}(x)) \mathbf{B}^k \overline{\mathbf{S}} \mathbf{A} \quad (3.18)$$

ve

$$y_N^{(k)}(h_{kj}(x)) = X(h_{kj}(x)) \mathbf{B}^k \underline{\mathbf{S}}^{-1} \underline{\mathbf{A}}. \quad (3.19)$$

Burada, $X(h_{kj}(x))$ matrisi

$$X(h_{kj}(x)) = \begin{bmatrix} 1 & h_{kj}(x) & (h_{kj}(x))^2 & \dots & (h_{kj}(x))^N \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Böylece (3.1), (3.18) ve (3.19) bağıntıları kullanılarak, problemin fonksiyonel diferansiyel kısmı için,

$$D_{kj}(x) = P_{kj}(x) y^{(k)}(h_{kj}(x)) = P_{kj}(x) X(h_{kj}(x)) \mathbf{B}^k \overline{\mathbf{S}} \mathbf{A} \quad (3.20)$$

ve

$$D_{kj}(x) = P_{kj}(x) y^{(k)}(h_{kj}(x)) = P_{kj}(x) X(h_{kj}(x)) \mathbf{B}^k \underline{\mathbf{S}}^{-1} \underline{\mathbf{A}}$$

sonuçlarına ulaşılır. Ayrıca (3.16) ve (3.17) bağıntılarında $t \rightarrow g_{rs}(t)$ yerine konulursa problemin integral kısmı için aşağıdaki matris bağıntıları elde edilir:

$$y^{(r)}(g_{rs}(t)) = X(g_{rs}(t)) \mathbf{B}^r \overline{\mathbf{S}} \mathbf{A}, \quad (r=0,1,...) \quad (3.21)$$

ve

$$y^{(r)}(g_{rs}(t)) = X(g_{rs}(t)) \mathbf{B}^r \underline{\mathbf{S}}^{-1} \underline{\mathbf{A}}, \quad (r=0,1,...).$$

Böylece (3.1)-(3.2) probleminin integral kısmı da (3.20)deki diferansiyel kısım gibi genelleştirilmiş olur. Şimdi, (3.1)-(3.2) probleminde tanımlanan fonksiyonel integro diferansiyel denklemin integral parçasındaki $K_{rs}(x,t)$ çekirdek fonksiyonunun matris formu da Taylor açılımı kullanılarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir [36]:

$$\mathbf{K}_{rs}(x,t) = X(x) \mathbf{K}_{rs} X^T(t), \quad \mathbf{K}_{rs} = [k_{ij}^{rs}]; \quad k_{ij}^{rs} = \frac{1}{i!j!} \cdot \frac{\partial k^{i+j}(0,0)}{\partial x^i \partial t^j}, \quad (i,j=0,1,...,N).$$

Burada $\mathbf{K}_{rs} = [k_{ij}^{rs}]$ ifadesi $(0,0)$ noktasında değer alan $\mathbf{K}_{rs}(x,t)$ fonksiyonunun Taylor katsayılar matrisi olarak verilmektedir [36].

Verilen (3.1) denkleminin fonksiyonel integro diferansiyel kısmında, çekirdek fonksiyonunun matris formu ile (3.21) matrisi yerine konularak,

$$\begin{aligned} I_{rs}(x) &= \int_{u_{rs}(x)}^{v_{rs}(x)} \mathbf{K}_{rs}(x,t) y^{(r)}(g_{rs}(t)) dt \\ &= \int_{u_{rs}(x)}^{v_{rs}(x)} \mathbf{X}(x) \mathbf{K}_{rs} \mathbf{X}^T(t) \mathbf{X}(g_{rs}(t)) dt \mathbf{B}^r \overline{\mathbf{S} \mathbf{A}} \\ &= \mathbf{X}(x) \mathbf{K}_{rs} \int_{u_{rs}(x)}^{v_{rs}(x)} \mathbf{X}^T(t) \mathbf{X}(g_{rs}(t)) dt \mathbf{B}^r \overline{\mathbf{S} \mathbf{A}} \end{aligned}$$

elde edilir ve gerekli işlemler yapılarak fonksiyonel integro kısmının matris formu,

$$I_{rs}(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{K}_{rs} \mathbf{Q}_{rs}(x) \mathbf{B}^r \overline{\mathbf{S} \mathbf{A}} \quad (\text{artan faktöriyel fonksiyonları için}) \quad (3.22)$$

ve

$$I_{rs}(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{K}_{rs} \mathbf{Q}_{rs}(x) \mathbf{B}^r \underline{\mathbf{S}^{-1} \mathbf{A}} \quad (\text{azalan faktöriyel fonksiyonları için})$$

biçiminde oluşturulur. Burada, $\mathbf{Q}_{rs}(x)$ ifadesinin açık hali, aşağıdaki yol izlenerek bulunmaktadır [4]:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{rs}(x) &= \int_{u_{rs}(x)}^{v_{rs}(x)} \mathbf{X}^T(t) \mathbf{X}(g_{rs}(t)) dt \\ &= \int_{u_{rs}(x)}^{v_{rs}(x)} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & g_{rs}(t) & \dots & (g_{rs}(t))^N \end{bmatrix} dt \\ &= \int_{u_{rs}(x)}^{v_{rs}(x)} \left[t^m (g_{rs}(t))^n \right] dt, \quad (m, n = 0, 1, \dots, N) \end{aligned}$$

$$[q_{mm}^{rs}(x)] = \left[\int_{u_{rs}(x)}^{v_{rs}(x)} t^m (g_{rs}(t))^n dt \right], \quad \mathbf{Q}_{rs}(x) = \begin{bmatrix} q_{00}^{rs}(x) & q_{01}^{rs}(x) & \dots & q_{0N}^{rs}(x) \\ q_{10}^{rs}(x) & q_{11}^{rs}(x) & \dots & q_{1N}^{rs}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{N0}^{rs}(x) & q_{N1}^{rs}(x) & \dots & q_{NN}^{rs}(x) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}.$$

Böylece (3.1) ile verilen genelleştirilmiş fonksiyonel integro diferansiyel denklemde (3.20) ve (3.22) matris bağıntıları yerine konulursa,

$$\sum_{k=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} \mathbf{P}_{kj}(x) \mathbf{X}(h_{kj}(x)) \mathbf{B}^k \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{A}} - \sum_{r=0}^{m_3} \sum_{s=0}^{m_4} \mathbf{X}(x) \mathbf{K}_{rs} \mathbf{Q}_{rs}(x) \mathbf{B}^r \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{A}} = f(x)$$

ve

$$\sum_{k=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} \mathbf{P}_{kj}(x) \mathbf{X}(h_{kj}(x)) \mathbf{B}^k \underline{\mathbf{S}}^{-1} \underline{\mathbf{A}} - \sum_{r=0}^{m_3} \sum_{s=0}^{m_4} \mathbf{X}(x) \mathbf{K}_{rs} \mathbf{Q}_{rs}(x) \mathbf{B}^r \underline{\mathbf{S}}^{-1} \underline{\mathbf{A}} = f(x)$$

matris denklemleri elde edilir. Daha sonra elde edilen bu denklemlerde (3.5) ile tanımlanan sıralama noktaları yerine konulursa, $i = 0, 1, 2, \dots, N$ için, artan ve azalan faktöriyel fonksiyonlarıyla bağlantılı iki cebirsel matris denklemler sistemi

$$\sum_{k=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} \mathbf{P}_{kj}(x_i) \mathbf{X}(h_{kj}(x_i)) \mathbf{B}^k \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{A}} - \sum_{r=0}^{m_3} \sum_{s=0}^{m_4} \mathbf{X}(x_i) \mathbf{K}_{rs} \mathbf{Q}_{rs}(x_i) \mathbf{B}^r \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{A}} = f(x_i)$$

ve

$$\sum_{k=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} \mathbf{P}_{kj}(x_i) \mathbf{X}(h_{kj}(x_i)) \mathbf{B}^k \underline{\mathbf{S}}^{-1} \underline{\mathbf{A}} - \sum_{r=0}^{m_3} \sum_{s=0}^{m_4} \mathbf{X}(x_i) \mathbf{K}_{rs} \mathbf{Q}_{rs}(x_i) \mathbf{B}^r \underline{\mathbf{S}}^{-1} \underline{\mathbf{A}} = f(x_i)$$

olarak elde edilir. Bu iki sistem aşağıdaki gibi iki matris denklemleri olarak yazılabilir;

$$\left\{ \sum_{k=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} \mathbf{P}_{kj} \mathbf{X}_{kj} \mathbf{B}^k - \sum_{r=0}^{m_3} \sum_{s=0}^{m_4} \bar{\mathbf{X}} \bar{\mathbf{K}}_{rs} \bar{\mathbf{Q}}_{rs} \mathbf{B}^r \right\} \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{F} \quad (3.23)$$

ve

$$\left\{ \sum_{k=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} \mathbf{P}_{kj} \mathbf{X}_{kj} \mathbf{B}^k - \sum_{r=0}^{m_3} \sum_{s=0}^{m_4} \bar{\mathbf{X}} \bar{\mathbf{K}}_{rs} \bar{\mathbf{Q}}_{rs} \mathbf{B}^r \right\} \underline{\mathbf{S}}^{-1} \underline{\mathbf{A}} = \mathbf{F}. \quad (3.24)$$

Aynı zamanda (3.23) ve (3.24) denklemlerine (artan ve azalan faktöriyel fonksiyonları için) problemin temel matris denklemleri denir. Burada temel matris denklemlerinde yer alan ifadelerin açık matris formları aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\mathbf{P}_{kj} = \text{diag} \left[P_{kj}(x_0) \quad P_{kj}(x_1) \quad \dots \quad P_{kj}(x_N) \right],$$

$$\bar{X} = \text{diag} [X(x_0) \quad X(x_1) \quad \dots \quad X(x_N)]_{(N+1)x(N+1)^2},$$

$$\bar{K}_{rs} = \text{diag} [K_{rs} \quad K_{rs} \quad \dots \quad K_{rs}]_{(N+1)^2 x(N+1)^2},$$

$$X_{kj} = \begin{bmatrix} X(h_{kj}(x_0)) \\ X(h_{kj}(x_1)) \\ \vdots \\ X(h_{kj}(x_N)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h_{kj}(x_0) & h_{kj}^2(x_0) & \dots & h_{kj}^N(x_0) \\ 1 & h_{kj}(x_1) & h_{kj}^2(x_1) & \dots & h_{kj}^N(x_1) \\ 1 & h_{kj}(x_2) & h_{kj}^2(x_2) & \dots & h_{kj}^N(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & h_{kj}(x_N) & h_{kj}^2(x_N) & \dots & h_{kj}^N(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1)x(N+1)},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)x(N+1)}, \quad B^0 = I \quad (\text{birim matris})$$

$$\bar{Q}_{rs} = \begin{bmatrix} Q_{rs}(x_0) \\ Q_{rs}(x_1) \\ \vdots \\ Q_{rs}(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1)^2 x(N+1)}, \quad F = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1)x1}.$$

3.2.1.2. Çözüm Yöntemi

Burada (3.1)-(3.2) denklemleri ile tanıttığımız problemimizi (3.23) ve (3.24) bağıntıları ile artan ve azalan faktöriyel fonksiyonları için cebirsel matris denklemler formuna dönüştürdük. Şimdi (3.23) ve (3.24) bağıntılarını kısaca,

$$\overline{W} \overline{A} = \overline{F} \Leftrightarrow [\overline{W}; \overline{F}] \quad (3.25)$$

ve

$$\underline{W} \underline{A} = \underline{F} \Leftrightarrow [\underline{W}; \underline{F}]$$

kapalı formları olacak şekilde ifade edebiliriz [3]. (3.25) bağıntısı ile verilen $[\overline{\mathbf{W}}; \overline{\mathbf{F}}]$ ve $[\underline{\mathbf{W}}; \underline{\mathbf{F}}]$ arttırılmış matrisleri yapılan işlemler sonucunda elde edilir. Bu matrisleri daha açık şekilde aşağıdaki gibi yazabiliriz;

$$[\overline{\mathbf{W}}; \overline{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} \overline{w}_{00} & \overline{w}_{01} & \dots & \overline{w}_{0N}; & \overline{f}(x_0) \\ \overline{w}_{10} & \overline{w}_{11} & \dots & \overline{w}_{1N}; & \overline{f}(x_1) \\ \overline{w}_{20} & \overline{w}_{21} & \dots & \overline{w}_{2N}; & \overline{f}(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{w}_{N0} & \overline{w}_{N1} & \dots & \overline{w}_{NN}; & \overline{f}(x_N) \end{bmatrix}, [\underline{\mathbf{W}}; \underline{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} \underline{w}_{00} & \underline{w}_{01} & \dots & \underline{w}_{0N}; & \underline{f}(x_0) \\ \underline{w}_{10} & \underline{w}_{11} & \dots & \underline{w}_{1N}; & \underline{f}(x_1) \\ \underline{w}_{20} & \underline{w}_{21} & \dots & \underline{w}_{2N}; & \underline{f}(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{w}_{N0} & \underline{w}_{N1} & \dots & \underline{w}_{NN}; & \underline{f}(x_N) \end{bmatrix}$$

Diğer taraftan (3.2) ile belirtilen karışık koşullara karşılık gelen matris formları,

$$\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=1}^L a_{j,k,l} y^{(k)}(\gamma_l) = \lambda_j; \quad (j=0,1,2,\dots,m-1, a \leq \gamma_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_L = b)$$

bağıntısı kullanılarak,

$$\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=1}^L a_{j,k,l} \mathbf{X}(\gamma_l) \mathbf{B}^k \overline{\mathbf{S}} \overline{\mathbf{A}} = \lambda_j, \quad \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=1}^L a_{j,k,l} \mathbf{X}(\gamma_l) \mathbf{B}^k \underline{\mathbf{S}} \underline{\mathbf{A}} = \lambda_j$$

şeklinde elde edilirler. Elde edilen matris formları kısaca, artan ve azalan faktöriyel fonksiyonları için ayrı ayrı,

$$\overline{\mathbf{U}}_j \overline{\mathbf{A}} = \overline{\lambda}_j; \quad (j=0,1,2,\dots,m-1) \quad (3.26)$$

ve

$$\underline{\mathbf{U}}_j \underline{\mathbf{A}} = \underline{\lambda}_j; \quad (j=0,1,2,\dots,m-1)$$

biçiminde yazılırlar [3]. (3.26) denklemi,

$$[\overline{\mathbf{U}}_j; \overline{\lambda}_j] = \begin{bmatrix} \overline{u}_{00} & \overline{u}_{01} & \dots & \overline{u}_{0N}; & \overline{\lambda}_0 \\ \overline{u}_{10} & \overline{u}_{11} & \dots & \overline{u}_{1N}; & \overline{\lambda}_1 \\ \overline{u}_{20} & \overline{u}_{21} & \dots & \overline{u}_{2N}; & \overline{\lambda}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{u}_{m-1,0} & \overline{u}_{m-1,1} & \dots & \overline{u}_{m-1,N}; & \overline{\lambda}_{m-1} \end{bmatrix}, [\underline{\mathbf{U}}_j; \underline{\lambda}_j] = \begin{bmatrix} \underline{u}_{00} & \underline{u}_{01} & \dots & \underline{u}_{0N}; & \underline{\lambda}_0 \\ \underline{u}_{10} & \underline{u}_{11} & \dots & \underline{u}_{1N}; & \underline{\lambda}_1 \\ \underline{u}_{20} & \underline{u}_{21} & \dots & \underline{u}_{2N}; & \underline{\lambda}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{u}_{m-1,0} & \underline{u}_{m-1,1} & \dots & \underline{u}_{m-1,N}; & \underline{\lambda}_{m-1} \end{bmatrix}$$

arttırılmış matris formunda yazılabilirler [36].

Sonuç olarak, (3.1)-(3.2) probleminin çözümünü (3.3) artan faktöriyel fonksiyonunun sonlu serisi ve (3.4) azalan faktöriyel fonksiyonunun sonlu serisi

formunda bulmak için, (3.25) arttırılmış matrislerinin son veya herhangi m satırının silinip yerine koşullara karşılık gelen (3.25) satır matrislerinin konulmasıyla elde edilmek istenen $\begin{bmatrix} \bar{\tilde{W}}; \bar{\tilde{F}} \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} \underline{\tilde{W}}; \underline{\tilde{F}} \end{bmatrix}$ arttırılmış matrisleri elde edilir. Elde edilen bu matrisler açık olarak,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{\tilde{W}}; \bar{\tilde{F}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{w}_{00} & \bar{w}_{01} & \dots & \bar{w}_{0N}; & \bar{f}(x_0) \\ \bar{w}_{10} & \bar{w}_{11} & \dots & \bar{w}_{1N}; & \bar{f}(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{w}_{N-m,0} & \bar{w}_{N-m,1} & \dots & \bar{w}_{N-m,N}; & \bar{f}(x_{N-m}) \\ \bar{u}_{00} & \bar{u}_{01} & \dots & \bar{u}_{0N}; & \bar{\lambda}_0 \\ \bar{u}_{10} & \bar{u}_{11} & \dots & \bar{u}_{1N}; & \bar{\lambda}_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{u}_{m-1,0} & \bar{u}_{m-1,1} & \dots & \bar{u}_{m-1,N}; & \bar{\lambda}_{m-1} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \underline{\tilde{W}}; \underline{\tilde{F}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \underline{w}_{00} & \underline{w}_{01} & \dots & \underline{w}_{0N}; & \underline{f}(x_0) \\ \underline{w}_{10} & \underline{w}_{11} & \dots & \underline{w}_{1N}; & \underline{f}(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{w}_{N-m,0} & \underline{w}_{N-m,1} & \dots & \underline{w}_{N-m,N}; & \underline{f}(x_{N-m}) \\ \underline{u}_{00} & \underline{u}_{01} & \dots & \underline{u}_{0N}; & \underline{\lambda}_0 \\ \underline{u}_{10} & \underline{u}_{11} & \dots & \underline{u}_{1N}; & \underline{\lambda}_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{u}_{m-1,0} & \underline{u}_{m-1,1} & \dots & \underline{u}_{m-1,N}; & \underline{\lambda}_{m-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

biçiminde yazılırlar. Bu matrisler, artan ve azalan faktöriyel fonksiyonlarının katsayılarından oluşan, bilinmeyenlerin $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{N-1}$ ve $\underline{a}_0, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{N-1}$ olduğu N bilinmeyenli N tane denklemi içeren bir cebirsel denklem sistemine karşılık gelir. Eğer $rank \bar{W} = rank \begin{bmatrix} \bar{W}; \bar{F} \end{bmatrix} = N+1$ ya da $\bar{W}$ matrisinin tersi varsa, $\bar{A} = (\bar{W})^{-1} \bar{F}$ yazılabilir. Aynı şekilde azalan faktöriyel fonksiyonları için de $rank \underline{W} = rank \begin{bmatrix} \underline{W}; \underline{F} \end{bmatrix} = N+1$ ya da $\underline{W}$ matrisinin tersi varsa, $\underline{A} = (\underline{W})^{-1} \underline{F}$ yazılabilir [4]. Böylece faktöriyel fonksiyonları için $\bar{A}$ ve $\underline{A}$ matrisleri, yani $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{N-1}$ ve $\underline{a}_0, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{N-1}$ bilinmeyen katsayıları, tek olarak elde edilir.

Dolayısıyla, (3.1) yüksek mertebeden lineer genelleştirilmiş fonksiyonel integro diferansiyel denkleminin de (3.2) karışık koşulları altında (3.3) artan

faktöriyel fonksiyonu ve (3.4) azalan faktöriyel fonksiyonunun sonlu serisi formunda tek bir çözüme sahip olduğu gözlemlenir.

3.2.1.3. Hata Analizi

Elde edilen çözümlerin doğruluğu, rezidüel hata analizi adı verilen bir teknik kullanılarak kolayca kontrol edilebilir. (3.3) artan faktöriyel fonksiyonunun sonlu serisi ve (3.4) azalan faktöriyel fonksiyonunun sonlu serisi, (3.1) - (3.2) probleminin yaklaşık çözümleri olduğu için, $y_N(x)$ fonksiyonu ve türevleri, (3.1) denkleminde yerine konulduğunda denklemi yaklaşık olarak sağlamalıdır; yani $x = x_l \in [a, b]$, $l = 0, 1, 2, \dots$ için

$$R_N(x_l) = \sum_{k=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} D_{kj}(x_l) - \sum_{r=0}^{m_3} \sum_{s=0}^{m_4} I_{rs}(x_l) - f(x_l) \cong 0$$

veya

$$R_N(x_l) \leq 10^{-k_l}, \quad (k_l, \text{ herhangi bir pozitif tam sayı})$$

olmalıdır. Eğer $\max 10^{-k_l} = 10^{-k}$ (k herhangi bir pozitif tam sayı) önceden belirlenirse, bu durumda noktaların her birinde $R_N(x_l)$ farkı önceden belirlenen 10^{-k} 'dan daha küçük oluncaya kadar N kesme sınırı artırılır. Eğer N yeterince büyük olduğunda, $R_N(x_l) \rightarrow 0$ olursa yapılan hata azalır [51].

Diğer yandan, $R_N(x)$ ile tanımlanan rezidüel hata fonksiyonu ve $[a, b]$ aralığında $|R_N(x)|$ fonksiyonunun ortalama değeri yardımıyla çözümün doğruluğu kontrol edilebilir ve hata tahmini yapılabilir. Aynı zamanda, Ortalama Değer Teoremi kullanılarak, ortalama hatanın üst sınırı $\overline{R_N}$ aşağıdaki gibi tahmin edilebilir:

$$\left| \int_a^b R_N(x) dx \right| \leq \int_a^b |R_N(x)| dx \quad \text{ve} \quad \left| \int_a^b R_N(x) dx \right| = (b-a) |R_N(c)|, \quad (a \leq c \leq b)$$

$$\left| \int_a^b R_N(x) dx \right| = (b-a) |R_N(c)| \leq \int_a^b |R_N(x)| dx$$

$$\left| R_N(c) \right| \leq \frac{\int_a^b |R_N(x)| dx}{b-a} = \overline{R_N}$$

Böylece rezidüel fonksiyon ve Ortalama Değer Teoremi kullanılarak, hatanın üst sınırı belirlenebilir ve elde edilen yaklaşık çözümün verimliliği buradan gözlemlenebilir [41]. Ayrıca, nümerik sonuçların doğruluğunu kanıtlamak için mutlak hatalar,

$$\text{Mutlak hata} = \left| u_N(x) - u_{tam}(x) \right|$$

biçiminde bulunur.

Yakınsaklık Kriteri

Bu çalışmada seçilen bazı nümerik model problemlerin rezidüel fonksiyonlarını kullanarak, artan ve azalan faktöriyel fonksiyonlarına dayalı çözümlerin yakınsaklığını araştırdık. Etkili bir hata analizi uygulayabilmek için ilk olarak rezidüel fonksiyonları kullanarak çözümleri iyileştirdik [42]. $R_N(x)$ rezidüel fonksiyonu kullanılarak artan ve azalan faktöriyel fonksiyonlarının yakınsaklık yaklaşımı tanımlandı. $R_N(x)$ rezidüel fonksiyonunun Taylor serisi formundaki açılımı;

$$R_N(x) = \Omega_0 x^0 + \Omega_1 x^1 + \dots + \Omega_N x^N = \sum_{i=0}^N \Omega_i x^i$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$R_N(x) : [a, b] \rightarrow R \quad \text{ya da} \quad R_N(x) : [a + \varepsilon, b - \varepsilon] \rightarrow R ;$$

ε ihmal edilebilir düzeyde küçük bir değerdir.

Teorem 3.1. Banach uzayında rezidüel fonksiyon serisi $\{R_N(x)\}_{N=2}^{\infty}$ yakınsaktır ve Banach uzayında $\tilde{s}_N$, $0 < \tilde{s}_N < 1$ aralığında bir sabit olmak üzere aşağıdaki eşitsizliği sağlar;

$$\|R_{N+1}(x)\| \leq \tilde{s}_N \|R_N(x)\|.$$

İspat 3.1. [42] Rezidüel hata serisinin, $\{R_N(x)\}_{N=m}^{\infty}$, Banach uzayında bir Cauchy dizisi olduğunun gösterilmesi gereklidir. Bu nedenle, $\|R_{N+1}(x)\|$ aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$\begin{aligned}\|R_{N+1}(x)\| &= \sup \left\{ \left| \sum_{i=0}^N \Omega_i x^i \right| : x \in [a, b] \vee x \in [a + \varepsilon, b - \varepsilon] \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \sum_{i=0}^N |\Omega_i x^i| : x \in [a, b] \vee x \in [a + \varepsilon, b - \varepsilon] \right\} \\ &= |R_{N+1}(b)|\end{aligned}$$

buradan b noktasındaki eşitsizlik yeniden yazılabilir,

$$\|R_{N+1}(b)\| \leq \tilde{s}_N \|R_N(b)\|.$$

Bu eşitsizliği kullanarak,

$$|R_{N+1}(b)| \leq |R_{N+1}(b) - R_N(b)| \leq (\tilde{s}_N - 1) |R_N(b)|$$

bağıntısı elde edilir. Eşitsizliği genelleştirirsek,

$$|R_{N+1}(b) - R_N(b)| \leq (\tilde{s}_N - 1) |R_N(b)| \leq (\tilde{s}_N - 1)^2 |R_{N-1}(b)| \leq \dots \leq (\tilde{s}_N - 1)^{N-1} |R_m(b)|$$

olur. $\forall N, K \in \mathbb{N}$ ve $N \geq K$ olacak şekilde

$$\begin{aligned}|R_N(b) - R_K(b)| &\leq |R_N(b) - R_{N-1}(b) + \dots + R_{K+1}(b) - R_K(b)| \\ &\leq |R_N(b) - R_{N-1}(b)| + \dots + |R_{K+1}(b) - R_K(b)| \\ &\leq (\tilde{s}_N - 1)^{N-1} |R_m(b)| + \dots + (\tilde{s}_N - 1)^{K-1} |R_m(b)| \\ &= \frac{1 - (\tilde{s}_N - 1)^{N-2-K}}{1 - (\tilde{s}_N - 1)} (\tilde{s}_N - 1)^{K-1} |R_m(b)|\end{aligned}$$

bağıntısı elde edilir. Eğer $\tilde{s}_N < 1$ olursa, o zaman $\lim_{N, K \rightarrow \infty} |R_N(b) - R_K(b)| = 0$ olur. Böylece

$\{R_N(x)\}_{N=m}^{\infty}$ bağıntısı Banach uzayında bir Cauchy dizisi olur ve yakınsaktır.

3.2.2 Yüksek Mertebeden Genelleştirilmiş Lineer Fonksiyonel İntegro Diferansiyel Denklemler İçin Stirling Polinomları İle Matris Sıralama Metodu

Çalışmanın bu kısmında, karışık koşullar altında incelenecek olan fonksiyonel gecikmeli yüksek mertebeden genelleştirilmiş lineer Volterra-Fredholm integro diferansiyel denklemleri çözmek için, Stirling polinomlarına dayalı yeni bir operasyonel (işlemsel) matris sıralama metodu geliştirilmiştir. Bu yöntem, sıralama noktaları aracılığıyla bahsi geçen denklemleri lineer cebirsel matris denklemler sistemine dönüştürmektedir. Sistemin katsayılar matrisi Stirling polinomlarına dayalı olarak oluşturulmaktadır. Ayrıca, oluşturulan bu yöntemin işlerliğini ve doğruluğunu test etmek amacıyla bazı sayısal örnekler hata analizleri ile birlikte verilmiştir. Bu çalışma içerisinde, bahsedilen diğer özel polinom aileleri kullanılarak elde edilen sonuçlar, literatürde daha önceden yapılmış benzer çalışmalardan gözlemlenen sonuçlarla karşılaştırılmaktadır. Dahası elde edilen nümerik sonuçlar tablolar ve grafikler yardımıyla açıklanmaktadır. Metodun doğruluğunu teyit etmek için çalışma içerisinde hata analizine de ayrıca yer verilmiştir.

3.2.2.1. Problemin Tanıtılması

Bu çalışmada (3.1) bağıntısı ile tanımlanan, fonksiyonel gecikmeli yüksek mertebeden genelleştirilmiş lineer fonksiyonel integro diferansiyel denklemler (advanced, neutral ya da retarded tipi) incelenmektedir. Burada Stirling polinomlarına dayalı matris bağıntıları geliştirilmiş olup, (3.1) tipi denklemlerin yaklaşık çözümleri için farklı bir teknik sunulmuştur.

$$\sum_{k=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} D_{kj}(x) = f(x) + \sum_{r=0}^{m_3} \sum_{s=0}^{m_4} I_{rs}(x), \quad (3.27)$$
$$\left(\max \{m_1, m_3\} = m, \{x, t, u_{rs}(x), v_{rs}(x)\} \in [a, b] \right)$$

Bu denklemde,

$$\bullet D_{kj}(x) = P_{kj}(x) y^{(k)}(h_{kj}(x)), \text{ (fonksiyonel diferansiyel kısım)}$$
$$\bullet I_{rs}(x) = \int_{u_{rs}(x)}^{v_{rs}(x)} K_{rs}(x, t) y^{(r)}(g_{rs}(t)) dt, \text{ (fonksiyonel integral kısım)}$$

ifadeleri kullanılmıştır. Denklemin karışık koşulları,

$$\sum_{k=0}^{m-1} \left(a_{ik} y^{(k)}(a) + b_{ik} y^{(k)}(b) \right) = \lambda_i, \quad (i = 0, 1, \dots, m-1) \quad (3.28)$$

olarak tanımlanmaktadır [41]. Bu problemde $P_{kj}(x)$, $h_{kj}(x)$, $g_{rs}(t)$ ve $f(x)$; $a \leq x, t \leq b$ aralığında tanımlı, sürekli ve bilinen fonksiyonlardır. $y(x)$ fonksiyonu ise bilinmeyen fonksiyondur ve ayrıca a_{ik} , b_{ik} ve λ_i katsayıları reel ya da kompleks uygun seçilmiş sabitlerdir. Bu çalışmanın amacı, (3.27)–(3.28) bağıntıları ile verilen problemin çözümünü Stirling polinomuna dayalı yeni bir işlemsel matris sıralama metodu ile bulmaktır. Sonlu Stirling serisi aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n S_n(x), \quad (a \leq x \leq b) \quad (3.29)$$

burada $S_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$ için Stirling polinomlarıdır. a_n bulunması gereken Stirling polinomunun katsayılarıdır ve N , $N \geq m$ koşulunu sağlamak üzere seçilmiş herhangi bir pozitif tamsayıdır. Problem (3.27)–(3.28)'in (3.29) bağıntısı ile verilen nümerik çözümünü bulmak için, kullanılan sıralama noktaları,

$$x_i = a + \frac{b-a}{N} i, \quad i = 0, 1, \dots, N \text{ (standart)} \quad (3.30)$$

ya da

$$x_i = \frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{\pi i}{N}\right), \text{ (Chebyshev-Lobatto)}$$

eşitliklerinden biri olarak seçilebilmektedir [41]. Bu çalışmada (3.30) standart sıralama noktaları kullanılmaktadır.

3.2.2.2. Çözüm Yöntemi

Burada, (3.27)–(3.28) ile verilen problem, (3.29) formunda bir yaklaşık çözümünü bulmak için temel matris denklemine dönüştürülür. İlk olarak, (3.27) denkleminin yaklaşık çözümünü elde etmek amacıyla, $[a, b]$ aralığında tanımlı sonlu Stirling polinomları kullanılarak, çözüm (3.29) formunda bulunmaktadır. Bu yaklaşık çözümün matris formu,

$$y(x) \cong y_N(x) = S(x)A \quad (3.31)$$

ile verilir. Burada $S_n(x)$ polinomunun ve katsayılarının matris formlarını açık halde yazabiliriz;

$$S(x) = [S_0(x) \ S_1(x) \ \dots \ S_N(x)], \ A = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_n]^T.$$

(2.5) ile tanımlanan Stirling polinomlarını kullanarak, $i = 0, 1, 2, \dots, N$ için, $S_n(x)$ 'i standart tabanlı matris formuna dönüştürebiliriz:

$$S(x) = X(x)T. \quad (3.32)$$

(3.32) yardımıyla Stirling polinomlarının türevlerinin matris formu,

$$S^{(k)}(x) = X^{(k)}(x)T = X(x)B^kT, \ (k = 0, 1, \dots, m) \quad (3.33)$$

ile verilir. (3.33)'te türevleri için kullanılan matris formlarının açık halleri,

$$X(x) = [1 \ x \ x^2 \ \dots \ x^N],$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \ (B^0 = I, \text{ yani birim matristir.})$$

biçimindedir.

$$T^T = \begin{bmatrix} (-1)^0 0! T_{00} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ (-1)^1 1! T_{10} & (-1)^1 1! T_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ (-1)^2 2! T_{20} & (-1)^2 2! T_{21} & (-1)^2 2! T_{22} & 0 & \dots & 0 \\ (-1)^3 3! T_{30} & (-1)^3 3! T_{31} & (-1)^3 3! T_{32} & (-1)^3 3! T_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^N N! T_{N0} & (-1)^N N! T_{N1} & (-1)^N N! T_{N2} & (-1)^N N! T_{N3} & \dots & (-1)^N N! T_{NN} \end{bmatrix}$$

(3.32)–(3.33)'te bahsedilen T matris formunun oluşturulmasında kullanılan T_{nk} elemanlarını, (2.5) bağıntısında verilen $S_n(x)$ Stirling polinomlarının binom açılım özelliğine başvurarak elde edebiliriz.

(3.31) ve (3.32) bağıntılarından,

$$y_N(x) = X(x)TA$$

elde edilir ve türevlerinin gösterimi de

$$y_N^{(k)}(x) = X^{(k)}(x)TA = X(x)B^kTA, \quad (k=0,1,\dots) \quad (3.34)$$

eşitliği ile verilir. (3.34) bağıntısında $x \rightarrow h_{kj}(x)$ konulursa, $k=0,1,\dots,m_1$ için aşağıdaki ifade elde edilir:

$$y_N^{(k)}(h_{kj}(x)) = X(h_{kj}(x))B^kTA. \quad (3.35)$$

Burada Taylor polinomunun katsayılar matrisinin genelleştirilmiş hali açık şekilde takiben verilmiştir;

$$X(h_{kj}(x)) = \begin{bmatrix} 1 & h_{kj}(x) & (h_{kj}(x))^2 & \dots & (h_{kj}(x))^N \end{bmatrix}.$$

(3.27) ve (3.35)'de verilen matris bağıntıları kullanılarak (3.36) matris eşitliği tanımlanabilir:

$$D_{kj}(x) = P_{kj}(x)y^{(k)}(h_{kj}(x)) = P_{kj}(x)X(h_{kj}(x))B^kTA. \quad (3.36)$$

Ayrıca (3.34)'deki matris bağıntısında $t \rightarrow g_{rs}(t)$ yazılırsa (3.27)–(3.28) probleminin fonksiyonel integro diferansiyel kısmı için bir matris formu elde edilir;

$$y^{(r)}(g_{rs}(t)) = X(g_{rs}(t))B^rTA, \quad (r,s=0,1,\dots). \quad (3.37)$$

Şimdi, $I_{rs}(x)$ denklemin integral kısmında yer alan $K_{rs}(x,t)$ çekirdek fonksiyonunun açık halini verelim [41]:

$$K_{rs}(x,t) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N k_{ij} x^i t^j,$$

$$k_{ij}^{rs} = \frac{1}{i!j!} \cdot \frac{\partial k^{i+j}(0,0)}{\partial x^i \partial t^j}, \quad (i,j=0,1,\dots,N)$$

$K_{rs}(x,t)$ çekirdek fonksiyonunun matris formunu, Taylor polinomlarını kullanarak aşağıdaki gibi yazabiliriz [41]:

$$K_{rs}(x,t) = X(x)K_{rs}X^T(t).$$

(3.27) denkleminin fonksiyonel integro diferansiyel kısmının matris denklemine dönüştürülmüş halini (3.37) yardımıyla verelim:

$$\begin{aligned}
I_{rs}(x) &= \int_{u_{rs}(x)}^{v_{rs}(x)} K_{rs}(x,t) y^{(r)}(g_{rs}(t)) dt \\
&= \int_{u_{rs}(x)}^{v_{rs}(x)} X(x) K_{rs} X^T(t) X(g_{rs}(t)) B^r T A dt \\
&= X(x) K_{rs} \int_{u_{rs}(x)}^{v_{rs}(x)} X^T(t) X(g_{rs}(t)) B^r T A dt.
\end{aligned}$$

Yapılan kısaltma işleminden sonra matris formunun yeni hali;

$$I_{rs}(x) = X(x) K_{rs} \mathcal{Q}_{rs}(x) B^r T A \quad (3.38)$$

ile verilir. (3.38) 'de kullanılan kısaltmanın açık halini detaylıca yazmak gerekirse,

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_{rs}(x) &= \int_{u_{rs}(x)}^{v_{rs}(x)} X^T(t) X(g_{rs}(t)) dt \\
&= \int_{u_{rs}(x)}^{v_{rs}(x)} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & g_{rs}(t) & (g_{rs}(t))^2 & \dots & (g_{rs}(t))^N \end{bmatrix} dt \\
&= \int_{u_{rs}(x)}^{v_{rs}(x)} \left[t^m (g_{rs}(t))^n \right] dt, \quad (m, n = 0, 1, \dots, N) \\
[q_{mn}^{rs}(x)] &= \left[\int_{u_{rs}(x)}^{v_{rs}(x)} \left[t^m (g_{rs}(t))^n \right] dt \right],
\end{aligned}$$

olur [41]; matris gösterimi ise,

$$\mathcal{Q}_{rs}(x) = \begin{bmatrix} q_{00}^{rs}(x) & q_{01}^{rs}(x) & q_{02}^{rs}(x) & \dots & q_{0N}^{rs}(x) \\ q_{10}^{rs}(x) & q_{11}^{rs}(x) & q_{12}^{rs}(x) & \dots & q_{1N}^{rs}(x) \\ q_{20}^{rs}(x) & q_{21}^{rs}(x) & q_{22}^{rs}(x) & \dots & q_{2N}^{rs}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{N0}^{rs}(x) & q_{N1}^{rs}(x) & q_{N2}^{rs}(x) & \dots & q_{NN}^{rs}(x) \end{bmatrix}.$$

Sonuç olarak, (3.36) – (3.38) ile verilen bağıntıların yardımıyla temel matris denklemini oluşturabiliriz:

$$\sum_{k=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} P_{kj}(x) X(h_{kj}(x)) B^k T A - \sum_{r=0}^{m_3} \sum_{s=0}^{m_4} X(x) K_{rs} \mathcal{Q}_{rs}(x) B^r T A = f(x).$$

Temel matris denkleminde $x = x_i$, ($i = 0, 1, \dots, N$) olacak şekilde (3.30) standart sıralama noktalarını yerine koyarsak, bir cebirsel matris denklem sistemi elde etmiş oluruz.

$$\sum_{k=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} P_{kj}(x_i) X(h_{kj}(x_i)) B^k T A - \sum_{r=0}^{m_3} \sum_{s=0}^{m_4} X(x_i) K_{rs} Q_{rs}(x_i) B^r T A = f(x_i)$$

ya da kısaca matris denkleminin kompakt hali

$$\left\{ \sum_{k=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} P_{kj} X_{kj} B^k - \sum_{r=0}^{m_3} \sum_{s=0}^{m_4} \bar{X} \bar{K}_{rs} \bar{Q}_{rs} B^r \right\} T A = F. \quad (3.39)$$

Denklem (3.39) 'da kullanılan matris formları,

$$P_{kj} = \text{diag} \begin{bmatrix} P_{kj}(x_0) & P_{kj}(x_1) & P_{kj}(x_2) & \dots & P_{kj}(x_N) \end{bmatrix},$$

$$X_{kj} = \begin{bmatrix} X(h_{kj}(x_0)) \\ X(h_{kj}(x_1)) \\ X(h_{kj}(x_2)) \\ \vdots \\ X(h_{kj}(x_N)) \end{bmatrix}, \quad \bar{X} = \text{diag} \begin{bmatrix} X(x_0) & X(x_1) & X(x_2) & \dots & X(x_N) \end{bmatrix},$$

$$\bar{K}_{rs} = \text{diag} \begin{bmatrix} K_{rs} & K_{rs} & K_{rs} & \dots & K_{rs} \end{bmatrix}, \quad \bar{Q}_{rs} = \begin{bmatrix} Q_{rs}(x_0) \\ Q_{rs}(x_1) \\ Q_{rs}(x_2) \\ \vdots \\ Q_{rs}(x_N) \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{bmatrix}$$

olarak belirlenmiştir. (3.39) ile verilen bu temel matris denklemi kısaca $WA = F$ ya da $[W; F]$ arttırılmış matrisi biçiminde özetlenebilir [41]. Burada $[W; F]$ 'nin açık hali ise,

$$[W; F] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & w_{02} & \dots & w_{0N}; & f(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1N}; & f(x_1) \\ w_{20} & w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2N}; & f(x_2) \\ w_{30} & w_{31} & w_{32} & \dots & w_{3N}; & f(x_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{N0} & w_{N1} & w_{N2} & \dots & w_{NN}; & f(x_N) \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

biçimindedir. Bu sistem $(N+1)$ tane lineer cebirsel denklemden oluşmaktadır ve burada $a_0, a_1, \dots, a_N$ bulunması istenen problemin bilinmeyen katsayılarıdır.

(3.28) karışık koşullarının matris formu, kısaca, kompakt formda

$$U_j A = \lambda_j \text{ ya da } [U_j; \lambda_j]$$

olarak yazılabilir; burada

$$U_j = \sum_{k=0}^{m-1} (a_{ik} y^{(k)}(a) + b_{ik} y^{(k)}(b)) = \lambda_i, \quad (i, k = 0, 1, \dots, m-1)$$

ya da daha açık hali ile

$$[U_j; \lambda_j] = \begin{bmatrix} u_{00} & u_{01} & u_{02} & \dots & u_{0N}; & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1N}; & \lambda_1 \\ u_{20} & u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2N}; & \lambda_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{m-1,0} & u_{m-1,1} & u_{m-1,2} & \dots & u_{m-1,N}; & \lambda_{m-1} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

biçiminde gösterilebilir [41].

Denklem (3.27)'nin (3.28) karışık koşulları altında yaklaşık çözümünü elde etmek için (3.41) bağıntısı ile verilen matrisin son m satırı (herhangi seçilen m satırda olabilir) (3.40) formunda belirtilen matrisin m satırında yerine konularak $\tilde{W}A = \tilde{F}$ ya da kısaca $[\tilde{W}; \tilde{F}]$ arttırılmış çözüm matrisi elde edilir [41]. Eğer $\text{rank} \tilde{W} = \text{rank} [\tilde{W}; \tilde{F}] = N+1$, koşulu sağlanıyorsa o zaman matrisin tersi alınabilir ve katsayılar matrisi $A = (\tilde{W})^{-1} \tilde{F}$ eşitliği ile bulunabilir. Burada A matrisi $(a_0, a_1, \dots, a_N)$ bilinmeyen katsayılar matrisi) tek şekilde tanımlıdır. Arttırılmış çözüm matrisinin açık hali,

$$[\tilde{W}; \tilde{F}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & w_{02} & \dots & w_{0N}; & f(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1N}; & f(x_1) \\ w_{20} & w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2N}; & f(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{N-m,0} & w_{N-m,1} & w_{N-m,2} & \dots & w_{N-m,N}; & f(x_{N-m}) \\ u_{00} & u_{01} & u_{02} & \dots & u_{0N}; & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1N}; & \lambda_1 \\ u_{20} & u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2N}; & \lambda_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{m-1,0} & u_{m-1,1} & u_{m-1,2} & \dots & u_{m-1,N}; & \lambda_{m-1} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

şeklindedir [41].

(3.42) matrisinin çözümü ile elde edilen katsayılar (3.27) - (3.28) probleminin yaklaşık çözümü için aranan katsayılardır. Bu nedenle, arzu edilen çözüm bilinmeyen katsayıların tek şekilde elde edilmesinden dolayı tektir. Sonuç olarak, (3.42) bağıntısından elde edilen katsayıları yerine koyarsak, Stirling polinomlarına dayalı (3.29) çözümü elde edilir. Eğer $\det(\tilde{W}) = 0$ ya da $\text{rank}\tilde{W} = \text{rank}[\tilde{W}; \tilde{F}] < N + 1$ ise o zaman özel bir çözüm bulabiliriz; yoksa $\tilde{W} \neq \text{rank}[\tilde{W}; \tilde{F}]$, durumunda ise çözüm bulunamaz [41].

3.2.3. Yüksek Mertebeden Genelleştirilmiş Lineer Fonksiyonel İntegro Diferansiyel Denklemler İçin Genocchi Polinomları İle Matris Sıralama Metodu

Diğer polinom tabanlı sıralama yöntemlerine farklı bir bakış açısı kazandırmak amaçlı bu çalışmamızda, Appell polinomlar ailesinin önemli bir üyesi ve semi ortogonal polinomlardan biri olan Genocchi polinomları kullanılarak, Genocchi sıralama metodu geliştirilmiştir. Ayrıca rezidüel hata fonksiyonu yardımıyla uygulanan hata analizinde önerilen yöntemden elde edilen sonuçların güvenilirliği ve verimliliği gözlemlenmiştir. Literatür incelemesi yapıldığında yüksek mertebeden genelleştirilmiş fonksiyonel gecikmeli integro diferansiyel denklemlerin en genel formunun çözümü için kullanılan Genocchi sıralama metodu, daha önceden yapılan çalışmalara bir alternatif oluşturmaktadır. Bu nedenle, ilk amacımız yüksek mertebeden genelleştirilmiş fonksiyonel gecikmeli integro diferansiyel denklemlerin en genel formunu tanıtmak, ikinci amacımız ise bu formdaki denklemlerin matris sıralama metodu ile çözülebilmesi için Genocchi polinomları temel alınarak Genocchi sıralama metodunu oluşturmaktır. Çalışmamızda önerilen tekniğin işlevinin gösterilebilmesi için dördüncü bölümde nümerik örnekler verilmiş, tablolar ve grafikler ile bu örnekler açıklanmış, hata analizi yapılarak elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.

3.2.3.1. Problemin Tanıtılması

Bu çalışmada, (3.1) ve (3.27) denklemleri ile önceki kısımlarda tanıtılan yüksek mertebeden genelleştirilmiş fonksiyonel gecikmeli integro diferansiyel denklemi;

$$\sum_{k=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} P_{kj}(x) y^{(k)}(h_{kj}(x)) = f(x) + \sum_{r=0}^{m_3} \sum_{v=0}^{m_4} \lambda_{rv} \int_{u_{rv}(t)}^{v_{rv}(t)} K_{rv}(x,t) y^{(r)}(g_{rv}(t)) dt, \quad (3.43)$$

$$(a \leq x, t \leq b)$$

olarak tekrar göz önüne alınmış ve $m = \max\{m_1, m_3\}$ olmak üzere,

$$\sum_{k=0}^m (a_{ik} y^{(k)}(a) + b_{ik} y^{(k)}(b)) = \psi_i, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, m-1) \quad (3.44)$$

karışık koşulları altında incelenmiştir [41].

(3.43)–(3.44) probleminde $P_{kj}(x)$, $f(x)$, $K_{rv}(x,t)$, $h_{kj}(x)$, $g_{rv}(t)$, $u_{rv}(x)$ ve $v_{rv}(x)$ fonksiyonları $a \leq x, t \leq b$ aralığında $(a \leq u_{rv}(x) < v_{rv}(x) \leq b)$ tanımlıdır; λ_{rv} , uygun olarak seçilmiş bir sabit sayıdır. Ayrıca $h_{kj}(x)$ ve $g_{rv}(t)$ fonksiyonları en genel yapıda seçilmiş fonksiyonel gecikme terimleridirler. Bu nedenle, bu fonksiyonları aşağıdaki şekillerde seçmek mümkündür [42]:

- $h_{kj}(x) = x$ ve $g_{rv}(t) = t$ fonksiyonları için standart form,
- $h_{kj}(x) = x - \tau_{kj}$ ve $g_{rv}(t) = t - \sigma_{rv}$ fonksiyonları için sabit gecikmeli form,
- $h_{kj}(x) = x - \tau_{kj}(x)$ ve $g_{rv}(t) = t - \sigma_{rv}(t)$ fonksiyonları için değişken gecikmeli form,
- $h_{kj}(x) = \alpha_{kj}x$ ve $g_{rv}(t) = \beta_{rv}t$ fonksiyonları için oransal gecikmeli form.

Bundan dolayı, (3.43) bağıntısı ile verilen denklemi gecikmeli, fark, diferansiyel, integro diferansiyel ve integral denklemler gibi farklı türdeki diferansiyel denklem formlarına dönüştürmek oldukça kolaydır.

Bu kesimde (3.43)–(3.44) probleminin yaklaşık çözümleri,

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=1}^N y_n G_n(x) \quad (3.45)$$

ile tanımlanan sonlu Genocchi serisi formunda araştırılmaktadır.

NOT: Burada $y_n, (n=1,2,...,N; N \in \mathbb{N})$, (3.45) çözüm fonksiyonunun bilinmeyen katsayılarıdır. Metot uygulanırken matrisler ve matrislerin kendi aralarındaki işlemsel ilişkilerinde sıralama noktalarına başvurulacaktır. Bu kesimde sıralama noktaları olarak

$$x_i = a + \left(\frac{b-a}{N} \right) i, \quad (i=1,2,...,N, a = x_1 < ... < x_N = b). \quad (3.46)$$

standart form kullanılmıştır [41]. Ayrıca, sıralama noktaları olarak (3.30) 'da tanımlanan Chebyshev-Lobatto noktaları da kullanılabilir.

3.2.3.2. Temel Matris Bağlılıkları ve Çözüm Yöntemi

(3.43)–(3.44) problemini çözmek için Genocchi matris sıralama metodu uygulanacaktır. İlk olarak, (3.43) bağıntısı ile verilen denklemi

$$D(x) = f(x) + I(x),$$

şekilde yazabiliriz. Burada $D(x)$, (3.43) denkleminin fonksiyonel diferansiyel kısmı ve $I(x)$, (3.43) denkleminin fonksiyonel integro diferansiyel kısmıdır. (3.43)–(3.44) probleminin (3.45) Genocchi polinom çözümleri ile türevlerinin matris formları aşağıdaki şekildedir:

$$y(x) \cong y_N(x) = G(x)Y,$$

$$G(x) = X(x)M \Rightarrow y(x) = X(x)MY \quad (3.47)$$

ve $(k=0,1,...)$ olmak üzere, (3.47) 'nin türevlerinin matris formu;

$$y^{(k)}(x) = X^{(k)}(x)MY,$$

$$X^{(k)}(x) = X(x)B^k \Rightarrow y^{(k)}(x) = X(x)B^kMY \quad (3.48)$$

(3.48) 'de kullanılan matrislerin açık gösterimleri,

$$\mathbf{X}(x) = [1 \quad x \quad x^2 \quad \cdots \quad x^{N-1}], \mathbf{Y} = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_N]^T,$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} G_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} G_2 & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} G_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} G_3 & \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} G_2 & \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} G_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \begin{pmatrix} N \\ 0 \end{pmatrix} G_N & \begin{pmatrix} N \\ 1 \end{pmatrix} G_{N-1} & \begin{pmatrix} N \\ 2 \end{pmatrix} G_{N-2} & \cdots & \begin{pmatrix} N \\ N-1 \end{pmatrix} G_1 \end{bmatrix}.$$

NOT: $\mathbf{M}^T$ matrisinin oluşumunda (2.7) bağıntısı ile verilen Genocchi polinomlarının binom açılım özelliği kullanılmıştır. İstenildiği takdirde, (2.6) bağıntısı da (2.7) yerine kullanılabilir.

Şimdi, (3.43)–(3.44) bağıntıları ile verilen problemin fonksiyonel diferansiyel kısmı $D(x)$ ve fonksiyonel integro diferansiyel kısmı, $I(x)$ 'in en genel haldeki matris formları sırasıyla verilecektir. (3.48) denkleminde $x \rightarrow h_{kj}(x)$ yazılırsa,

$$y^{(k)}(h_{kj}(x)) = \mathbf{X}(h_{kj}(x)) \mathbf{B}^k \mathbf{M} \mathbf{Y}, \quad (3.49)$$

elde edilir. Burada

$$\mathbf{X}(h_{kj}(x)) = [1 \quad h_{kj}(x) \quad h_{kj}^2(x) \quad \cdots \quad h_{kj}^{N-1}(x)].$$

Benzer şekilde,

$$y^{(r)}(g_{rv}(t)) = \mathbf{X}(g_{rv}(t)) \mathbf{B}^r \mathbf{M} \mathbf{Y}. \quad (3.50)$$

(3.43) denkleminin fonksiyonel diferansiyel kısmı olan $D(x)$ 'in matris denklemine dönüştürülmüş halini veren (3.49) bağıntısı ile (3.46) sıralama noktalarını göz önüne alırsak, $D(x)$ 'in temel matris denklemini,

$$D = \sum_{k=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} P_{kj} X_{kj} B^k MY \quad (3.51)$$

şeklinde bulunur. (3.51)'de kullanılan matris formları,

$$D = \begin{bmatrix} D(x_1) \\ D(x_2) \\ \vdots \\ D(x_N) \end{bmatrix}, P_{kj} = \begin{bmatrix} P_{kj}(x_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_{kj}(x_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_{kj}(x_N) \end{bmatrix},$$

$$X_{kj} = \begin{bmatrix} X(h_{kj}(x_1)) \\ X(h_{kj}(x_2)) \\ \vdots \\ X(h_{kj}(x_{N-1})) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h_{kj}(x_1) & \cdots & h_{kj}^{N-1}(x_1) \\ 1 & h_{kj}(x_2) & \cdots & h_{kj}^{N-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & h_{kj}(x_N) & \cdots & h_{kj}^{N-1}(x_N) \end{bmatrix}.$$

(3.43)–(3.44) probleminin fonksiyonel integro diferansiyel kısmında yer alan çekirdek fonksiyonu $K_{rv}(x, t)$ 'nin matris formunda gösterimi,

$$K_{rv}(x, t) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} c_{ij}^{rv} x^i t^j \Rightarrow K_{rv}(x, t) = X(x) C_{rv} X^T(t), \quad (3.52)$$

ile verilir. (3.52)'de verilen C_{rv} fonksiyonunu açık halde yazarsak,

$$C_{rv} = [c_{ij}^{rv}], \quad c_{ij}^{rv} = \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j} K_{rv}(0,0)}{\partial x^i \partial t^j}, \quad (i, j = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

şeklindedir [41]. (3.52)'yi (3.43) denkleminde yerine yazarsak, $I(x)$ fonksiyonunun her bir terimini matris formuna dönüştürmüş oluruz.

$$[I(x)] = \sum_{r=0}^{m_3} \sum_{v=0}^{m_4} \lambda_{rv} X(x) C_{rv} Q_{rv}(x) B^r MY. \quad (3.53)$$

(3.53) 'de yapılan kısaltma işlemi ile ilgili detaylı bilgiye,

$$\mathbf{Q}_{rv}(x) = \int_{u_{rv}(x)}^{g_{rv}(x)} \mathbf{X}^T(t) \mathbf{X}(g_{rv}(t)) dt = \left[\int_{u_{rv}(t)}^{g_{rv}(t)} t^m g_{rv}^n(t) dt \right] = [q_{mn}^{rv}(x)],$$

$$(m, n = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

aracılığıyla ulaşılabilir [42]. (3.46) bağıntısı ile verilen sıralama noktalarını (3.53) 'te yerine yazarsak, $\mathbf{I}(x)$ 'in temel matris denklemini,

$$\tilde{\mathbf{I}} = \sum_{r=0}^{m_3} \sum_{v=0}^{m_4} \lambda_{rv}(\bar{\mathbf{X}})(\bar{\mathbf{C}}_{rv})(\tilde{\mathbf{Q}}_{rv}) \mathbf{B}^r \mathbf{M} \mathbf{Y},$$

$$(3.54)$$

şeklinde buluruz. (3.54) 'te yer alan matrislerin açık halleri,

$$\tilde{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} I(x_1) \\ I(x_2) \\ \vdots \\ I(x_N) \end{bmatrix}_{(N \times 1)}, \quad \bar{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(x_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{X}(x_N) \end{bmatrix}_{(N \times N^2)},$$

$$\bar{\mathbf{C}}_{rv} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{rv} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_{rv} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_{rv} \end{bmatrix}_{(N^2 \times N^2)}, \quad \tilde{\mathbf{Q}}_{rv} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{rv}(x_1) \\ \mathbf{Q}_{rv}(x_2) \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_{rv}(x_N) \end{bmatrix}_{(N^2 \times N)}$$

biçiminde gösterebiliriz. Ayrıca, (3.51) ve (3.54) ile belirtilen matris formlarını göz önünde bulundurarak, (3.43)–(3.44) probleminin temel matris denklemini aşağıdaki gibi elde ederiz:

$$\underbrace{\left\{ \sum_{k=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} \mathbf{P}_{kj} \mathbf{X}_{kj} \mathbf{B}^k - \sum_{r=0}^{m_3} \sum_{v=0}^{m_4} \lambda_{rv}(\bar{\mathbf{X}})(\bar{\mathbf{C}}_{rv})(\tilde{\mathbf{Q}}_{rv}) \mathbf{B}^r \right\}}_{\mathbf{W}} \mathbf{M} \mathbf{Y} = \mathbf{F}$$

ya da

$$\underbrace{\{\mathbf{D} - \tilde{\mathbf{I}}\}}_{\mathbf{W}} \mathbf{Y} = \mathbf{F}.$$

N tane bilinmeyen $\{y_1, y_2, \dots, y_N\}$ katsayıları için N tane cebirsel denklem içeren bir denklem sistemine karşı gelen bu temel matris denklemini, kısaca kompakt formda,

$$\mathbf{W}\mathbf{Y} = \mathbf{F} \text{ ya da } [\mathbf{W} ; \mathbf{F}], \quad (3.55)$$

olarak yazabiliriz [41]. Burada

$$\mathbf{F} = [f(x_1) \quad f(x_2) \quad \dots \quad f(x_N)]^T.$$

(3.43) ile (3.44) karışık koşulları arasındaki matris bağıntısı,

$$\mathbf{U}_i \mathbf{Y} = \psi_i \Rightarrow [\mathbf{U}_i ; \psi_i], (i = 0, 1, 2, \dots, m-1) \quad (3.56)$$

ile verilir [41]. Detaylıca karışık koşulların matris formunu açıklamak gerekirse;

$$\mathbf{U}_i = [u_{i1} \quad u_{i2} \quad \dots \quad u_{iN}] = \sum_{k=0}^{m-1} [a_{ik} \mathbf{X}(a) + b_{ik} \mathbf{X}(b)] \mathbf{B}^k \mathbf{M} \mathbf{Y}.$$

(3.55) matrisinin m satırı silinip yerine (3.56) ile verilen karışık koşul matrisinin satırları yazılırsa, arttırılmış sonuç matrisi,

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & \dots & w_{1N}; & f(x_1) \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & \dots & w_{2N}; & f(x_2) \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} & \dots & w_{3N}; & f(x_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{N-m,1} & w_{N-m,2} & w_{N-m,3} & \dots & w_{N-m,N}; & f(x_{N-m}) \\ u_{01} & u_{02} & u_{03} & \dots & u_{0N}; & \psi_0 \\ u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1N}; & \psi_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2N}; & \psi_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{m-1,1} & u_{m-1,2} & u_{m-1,3} & \dots & u_{m-1,N}; & \psi_{m-1} \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

şeklinde elde edilir. (3.57)'de $\text{rank} \tilde{\mathbf{W}} = \text{rank} [\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{F}}] = N$ 'dir. Bu nedenle, $\mathbf{Y}$ bilinmeyen çözüm polinomunun katsayıları matrisi, $\mathbf{Y} = (\tilde{\mathbf{W}})^{-1} \tilde{\mathbf{F}}$ şeklinde tek türlü elde edilir [41]. Sonuç olarak, bu katsayılar (3.45) çözüm formunda yazılır ve

böylece (3.43)–(3.44) probleminin Genocchi polinomlarına dayalı yaklaşık çözümü elde edilir.

3.2.3.3. Hata Analizi

Genocchi matris sıralama metodu uygulanarak elde edilen sonuçların hata analizleri rezidüel hata fonksiyonu yardımıyla yapılabilmektedir [43]. (3.43)–(3.44) ile verilen problemin Genocchi matris sıralama metodu uygulanarak elde edilen yaklaşık çözümlerinin kontrolü ve rezidual hata tahmini için, Kesim 3.2.1.3. de tanımlanan prosedür kullanılmaktadır.

Diğer yandan, (3.45) bağıntısında elde edilen Genocchi polinom çözümünün rezidüel fonksiyona dayalı hata tahmini ve iyileştirme tekniği de, aşağıda kısaca özetlenmiştir:

$$R_N(x) = L[y_N(x)] - f(x),$$

$$L[y_N(x)] = D(x) - I(x) \text{ ve } e_N(x) = y(x) - y_N(x) \text{ (hata fonksiyonu)}$$

olmak üzere, hata denklemi

$$L[e_N(x)] = L[y(x)] - L[y_N(x)] = -R_N(x), \quad (3.58)$$

ve karşı gelen

$$\sum_{k=0}^{m_1-1} [a_{jk} e_N^{(k)}(a) + b_{jk} e_N^{(k)}(b)] = 0 \quad (3.59)$$

homojen koşullar ($j = 0, 1, \dots, m-1$) ile beraber hata problemi kurulur. Oluşturulan (3.58)–(3.59) hata problemi çözülerek

$$e_{N,M}(x) = \sum_{n=0}^M y_n^* G_n(x), \quad (3.60)$$

sonlu hata yaklaşım serisi elde edilir. (3.60) 'da bahsedilen $e_{N,M}(x)$, düzeltilmiş tahmini hata fonksiyonu olarak da adlandırılır.

İyileştirilmiş Genocchi polinom çözümü de $y_{N,M}(x) = y_N(x) + e_{N,M}(x)$; $N < M$ olur [43]. Rezidüel hata fonksiyonu, rezidüel düzeltme ve bunların teorisi ile ilgili detaylı bilgiye literatürde yer alan [3-4] kaynaklarından ulaşılabilir.

Ayrıca belirgin hata hesaplamaları δ_N ve σ_N , [42] kaynağında belirtildiği gibi, aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\delta_{N-1} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} e_{N-1}^2(x_i)} \text{ ve } \sigma_{N-1} = \sqrt{\sum_{i=1}^N e_N^2(x_i)} / \sqrt{\sum_{i=1}^N y^2(x_i)}; \quad (3.61)$$

burada $x_1, x_2, \dots, x_N$ (3.46) 'da verilen standart sıralama noktalarıdır. Rezidüel hata analizi uygulandıktan sonra düzeltilmiş hatalar elde edilir.

3.2.4. İkinci Mertebeden Lineer Gecikmeli Neutral Integro Diferansiyel Denklemler İçin Shifted Legendre Polinomları İle Matris Sıralama Metodu

3.2.4.1. Problemin Tanıtılması

Bu çalışmada, ikinci mertebeden lineer neutral tipli fonksiyonel integro diferansiyel denklemlerin değişken sınırlar ve değişken gecikmeler içeren başlangıç koşulları altında yaklaşık çözümlerini bulmak için sonlu Shifted Legendre serisi ve sıralama noktaları yardımıyla yeni bir işlemsel matris sıralama metodu sunulmuştur. Kullanılan bu yöntem, Shifted Legendre polinomları ve bunların türevlerini içeren matris formlarının kullanılmasına dayandırılmaktadır. Bundan dolayı, problemin çözümü bilinmeyen Shifted Legendre polinomlarının katsayıları cinsinden yazılan bir matris denkleminin çözümüne dönüştürülmüştür ve elde edilen çözümler $[a, b]$ aralığında tanımlı ortogonal Shifted Legendre polinomları ya da Taylor polinomları cinsinden elde edilmiştir. Ayrıca, ana denklemde uygulanan etkili bir rezidüel hata analizi tekniği kullanılarak da diferansiyel denklemin hatası inşaa edilmiş ve Shifted Legendre polinomları yardımıyla uygulanan matris sıralama metodu sonucunda elde edilen yaklaşık çözümler düzeltilmiştir. Bunun yanı sıra, Shifted Legendre polinomları türünden elde edilen düzeltilmiş yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının bir üst sınırı verilmiştir. Sonuç olarak, kullanılan yöntemin uygulanabilirliği ve etkinliğini görmek

için bazı sayısal örnekler tablolar ve grafikler ile birlikte verilmiştir ve böylece elde edilen sonuçlar tartışılmıştır. Yapılan tüm nümerik hesaplamalar için Mathematica ve Matlab programları kullanılmıştır.

Bu çalışmada, sonlu Shifted Legendre matris sıralama metodu, değişken gecikmeli ikinci mertebeden lineer neutral tipli fonksiyonel integro diferansiyel denklemleri çözmek için aşağıdaki formda verilmiştir:

$$\sum_{j=0}^2 Q_j(x) y^{(j)}(x) + \sum_{k=0}^2 R_k(x) y^{(k)}(x - \tau(x)) = F(x) + \int_{u(x)}^{v(x)} K(x, t) y(t) dt. \quad (3.62)$$

Bu denklem,

$$\sum_{k=0}^1 a_{kl} y^{(k)}(0) = \lambda_l, \quad (l = 0, 1) \quad (3.63)$$

başlangıç koşulları altında incelenmiştir. Burada $Q_j(x)$, $R_k(x)$, $\tau(x)$, $F(x)$, $K(x, t)$, $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonları $a \leq x, t \leq b$ aralığında tanımlıdır. a_{kl} ve λ_l ise duruma uygun olarak seçilmiş sabitlerdir. (3.62) bağıntısında verilen lineer fonksiyonel integro diferansiyel denklem, değişken gecikmeli neutral diferansiyel denklemin ve fonksiyonel sınırlara sahip Volterra tipli integral denklemin bir kombinasyonu biçiminde oluşturulmuştur.

Bu çalışmadaki amacımız Shifted Legendre polinomlarına dayalı bir işlemsel matris sıralama metodu geliştirmek ve (3.62)–(3.63) ile verilen problemimize yaklaşık bir nümerik çözüm sunmaktır. Bu çözümün, Sonlu Shifted Legendre seri formu,

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n P_n^*(x), \quad a \leq x \leq b \quad (3.64)$$

olduğu varsayılır. Burada a_n , $n = 0, 1, \dots, N$ bilinmeyen katsayılar ve $P_n^*(x)$ ise Shifted Legendre polinomlarıdır. Shifted Legendre polinomları (2.9) yardımıyla aşağıdaki gibi tanımlanır [40]:

$$P_n^*(x) = L_n(\alpha x + \beta), \quad \alpha = \frac{2x}{b-a}, \quad \beta = \frac{a+b}{b-a}, \quad a \leq x \leq b. \quad (3.65)$$

Bu arada $L_n(x)$, $n = 0, 1, \dots, N$ için $w(x) = 1$ ağırlık fonksiyonuna göre $[-1, 1]$ aralığında ortogonal olan klasik Legendre polinomlarını temsil eder. Klasik Legendre polinomları aşağıda gösterilen bağıntı aracılığıyla üretilebilir [39]:

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n-2k}{n} x^{n-2k}, \quad (n = 0, 1, \dots, N, \quad -1 \leq x \leq 1) \quad (3.66)$$

burada

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ çift sayı} \\ \frac{n-1}{2}, & n \text{ tek sayı} \end{cases}.$$

Çalışmanın bu bölümünde, Taylor polinomları ve Shifted Legendre polinomları arasında kurulan matris bağıntıları gösterilecektir ve çalışmanın diğer kısımlarında bahsedilen matris sıralama metodu modifiye edilerek, fonksiyonel gecikmeli ikinci mertebeden lineer neutral integro diferansiyel denklemleri çözmek için kullanılacaktır.

3.2.4.2. Temel Matris Bağıntıları ve Çözüm Yöntemi

Çalışmanın bu kesiminde, (3.62) – (3.63) bağıntıları ile verilen ana problemin ilgili matris formları elde edilecektir. Bu nedenle, (3.64) bağıntısı ile verilen yaklaşık çözümü sonlu Shifted Legendre serisi türünden

$$y(x) \cong y_N(x) = \mathbf{P}^*(x) \mathbf{A} \quad (3.67)$$

matris formuna dönüştürebiliriz. Burada

$$\mathbf{P}^*(x) = \begin{bmatrix} P_0^*(x) & P_1^*(x) & \dots & P_N^*(x) \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_N \end{bmatrix}^T.$$

Ek olarak, (3.66) bağıntısında verilen Legendre polinomlarının üreteç fonksiyonu kullanılarak [39], $\mathbf{P}^*(x)$ matris formu aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\mathbf{L}(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{D}; \quad \mathbf{X}(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & \dots & x^N \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}^*(x) = \mathbf{L}(\alpha x + \beta) = \mathbf{X}(\alpha x + \beta) \mathbf{D} = \mathbf{X}(x) \mathbf{B}(\alpha, \beta) \mathbf{D}; \quad (3.68)$$

burada,

$$\mathbf{X}(\alpha x + \beta) = \mathbf{X}(x) \mathbf{B}(\alpha, \beta); \quad \alpha = \frac{2}{b-a}, \quad \beta = -\frac{a+b}{b-a},$$

$$\mathbf{B}(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} \alpha^0 \beta^0 & \binom{1}{0} \alpha^0 \beta^1 & \binom{2}{0} \alpha^0 \beta^2 & \dots & \binom{N}{0} \alpha^0 \beta^N \\ 0 & \binom{1}{1} \alpha^1 \beta^0 & \binom{2}{1} \alpha^1 \beta^1 & \dots & \binom{N}{1} \alpha^1 \beta^{N-1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} \alpha^2 \beta^0 & \dots & \binom{N}{2} \alpha^2 \beta^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{N}{N} \alpha^N \beta^0 \end{bmatrix},$$

N 'nin tek sayı değerleri için;

$$\mathbf{D}^T = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^0}{2^0} \binom{0}{0} \binom{0}{0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^0}{2^1} \binom{1}{0} \binom{2}{1} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{(-1)^1}{2^2} \binom{2}{1} \binom{2}{2} & 0 & \frac{(-1)^0}{2^2} \binom{2}{0} \binom{4}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \frac{(-1)^{\frac{N-1}{2}}}{2^N} \binom{N}{\frac{N-1}{2}} \binom{N+1}{N} & 0 & \dots & \frac{(-1)^0}{2^N} \binom{N}{0} \binom{2N}{N} \end{bmatrix}$$

ve N 'nin çift sayı değerleri için;

$$\mathbf{D}^T = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^0}{2^0} \binom{0}{0} \binom{0}{0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^0}{2^1} \binom{1}{0} \binom{2}{1} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{(-1)^1}{2^2} \binom{2}{1} \binom{2}{2} & 0 & \frac{(-1)^0}{2^2} \binom{2}{0} \binom{4}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{(-1)^{\frac{N}{2}}}{2^N} \binom{N}{\frac{N}{2}} \binom{N}{N} & 0 & \frac{(-1)^{\frac{N-2}{2}}}{2^N} \binom{N}{\frac{N-2}{2}} \binom{N+2}{N} & \dots & \frac{(-1)^0}{2^N} \binom{N}{0} \binom{2N}{N} \end{bmatrix}$$

Ayrıca, (3.68) bağıntısını (3.67)'de yerine koyarsak, $y_N(x)$ çözüm fonksiyonunun matris formunu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$y_N(x) = \mathbf{P}^*(x) \mathbf{A} = \mathbf{X}(x) \mathbf{B}(\alpha, \beta) \mathbf{D} \mathbf{A} \quad (3.69)$$

ve (3.69)'un türevi

$$y_N^{(k)}(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{B}^k \mathbf{B}(\alpha, \beta) \mathbf{D} \mathbf{A}; \quad (3.70)$$

$\mathbf{B}$ matrisi,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

ile verilir [3].

Diğer taraftan, fonksiyonel gecikme içeren kısmının matris formu, (3.70) kullanılarak,

$$\begin{aligned} y_N^{(k)}(x - \tau(x)) &= \mathbf{X}(x - \tau(x)) \mathbf{B}^k \mathbf{B}(\alpha, \beta) \mathbf{D} \mathbf{A} \\ &= \mathbf{X}(x) \mathbf{B}(1, -\tau(x)) \mathbf{B}^k \mathbf{B}(\alpha, \beta) \mathbf{D} \mathbf{A} \end{aligned} \quad (3.71)$$

ile verilir.

(3.71) bağıntısında ortaya çıkan geçiş matrisi,

$$\mathbf{B}(1, -\tau(x)) = \begin{bmatrix} \binom{0}{0}(-\tau(x))^0 & \binom{1}{0}(-\tau(x))^1 & \binom{2}{0}(-\tau(x))^2 & \dots & \binom{N}{0}(-\tau(x))^N \\ 0 & \binom{1}{1}(-\tau(x))^0 & \binom{2}{1}(-\tau(x))^1 & \dots & \binom{N}{1}(-\tau(x))^{N-1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2}(-\tau(x))^0 & \dots & \binom{N}{2}(-\tau(x))^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{N}{N}(-\tau(x))^0 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Volterra integral kısmın matris formu (3.52) ve (3.69) bağıntıları kullanılarak,

$$\begin{aligned} V(x) &= \int_{u(x)}^{v(x)} K(x, t) y(t) dt = \int_{u(x)}^{v(x)} \mathbf{X}(x) \mathbf{K} \mathbf{X}^T(t) \mathbf{X}(t) \mathbf{B}(\alpha, \beta) \mathbf{D} \mathbf{A} dt \\ &= \mathbf{X}(x) \mathbf{K} \mathbf{I}(x) \mathbf{B}(\alpha, \beta) \mathbf{D} \mathbf{A} \end{aligned} \quad (3.72)$$

elde edilir. Bahsi geçen (3.72) eşitliğinde kullanılan kısaltma işleminin açıklaması,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(x) &= \int_{u(x)}^{v(x)} \mathbf{X}^T(t) \mathbf{X}(t) dt = [\mathbf{r}_{pq}(x)], \\ \mathbf{r}_{pq}(x) &= \frac{(v(x))^{p+q+1} - (u(x))^{p+q+1}}{p+q+1}, \quad (p, q = 0, 1, \dots, N) \end{aligned}$$

biçiminde yapılır ve integral kısmın çekirdek fonksiyonu (3.52) yardımıyla,

$$\mathbf{K} = [\mathbf{k}_{mn}]; \quad \mathbf{k}_{mn} = \frac{1}{m!n!} \cdot \frac{\partial^{m+n} K(0,0)}{\partial x^m \partial t^n}, \quad (m, n = 0, 1, \dots, N)$$

ile hesaplanmaktadır [4]. Sonuç olarak, (3.62)–(3.63) ile verilen ana problemimizdeki tüm fonksiyonların matris dönüşümleri olan (3.71) ve (3.72) bağıntılarını, (3.62) denkleminde yerine koyarsak, temel matris formumuzu aşağıdaki biçimde elde etmiş oluruz:

$$\left\{ \sum_{j=0}^2 \mathbf{Q}_j(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{B}^j + \sum_{k=0}^2 \mathbf{R}_k(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{B}(1, -\tau(t)) \mathbf{B}^k - \mathbf{X}(x) \mathbf{K} \mathbf{I}(x) \right\} \mathbf{B}(\alpha, \beta) \mathbf{D} \mathbf{A} = \mathbf{F}(x). \quad (3.73)$$

(3.73) bağıntısı ve (3.30) 'da $x_i = \frac{b-a}{N}i$, ($i = 0,1,...,N$) ile verilen sıralama

noktaları kullanılarak, elde edilen matris denklem sistemini basitleştirebilir ve temel matris denklemini,

$$\left\{ \sum_{j=0}^2 Q_j X B^j + \sum_{k=0}^2 R_k \bar{X} \bar{B}(\tau) - \bar{X} \bar{K} \bar{I} \right\} B(\alpha, \beta) D A = F \quad (3.74)$$

ya da kısaca kompakt formda,

$$W A = F \Leftrightarrow [W; F]$$

biçiminde yazabiliriz [41]. Çözümüne ulaşmak için kullanılan matrislerin açık gösterimleri,

$$X = \begin{bmatrix} X(x_0) \\ X(x_1) \\ \vdots \\ X(x_N) \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} F(x_0) \\ F(x_1) \\ \vdots \\ F(x_N) \end{bmatrix}, \bar{I} = \begin{bmatrix} I(x_0) \\ I(x_1) \\ \vdots \\ I(x_N) \end{bmatrix}, \bar{B}(\tau) = \begin{bmatrix} B(1, -\tau(x_0)) \\ B(1, -\tau(x_1)) \\ \vdots \\ B(1, -\tau(x_N)) \end{bmatrix},$$

$$Q_j = \text{diag} [Q_j(x_0) \quad Q_j(x_1) \quad \dots \quad Q_j(x_N)],$$

$$R_k = \text{diag} [R_k(x_0) \quad R_k(x_1) \quad \dots \quad R_k(x_N)],$$

$$\bar{X} = \text{diag} [X(x_0) \quad X(x_1) \quad \dots \quad X(x_N)],$$

$$\bar{K} = \text{diag} [K \quad K \quad \dots \quad K],$$

sırasıyla oluşturulabilir. Ayrıca (3.63) başlangıç koşullarında, (3.70) matris bağıntısını kullanarak, başlangıç koşullarının matris formu

$$\sum_{k=0}^1 a_{kl} X(0) B^k B(\alpha, \beta) D A = \lambda_l, \quad (l = 0,1)$$

ya da kısaca

$$U A = \lambda \Rightarrow [U; \lambda] \quad (3.75)$$

ile verilebilir [41]. Burada

$$U = \sum_{k=0}^1 a_{kl} X(0) B^k B(\alpha, \beta) D,$$

$$U = \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \end{bmatrix}, \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}$$

olmaktır. Sonuç olarak, (3.75) bağıntısı ile verilen koşul matrisini, (3.74) temel matris denkleminde herhangi iki satırın silinip yerine başlangıç koşullarının konulması ile oluşturulan arttırılmış sonuç matrisini elde ederiz [41]:

$$\left[\tilde{W}; \tilde{F} \right] \text{ ya da } \tilde{W}A = \tilde{F}. \quad (3.76)$$

Eğer, $\text{rank} \tilde{W} = \text{rank} \left[\tilde{W}; \tilde{F} \right] = N + 1$ ise, o zaman matrisin tersi alınabilir ve $A = (\tilde{W})^{-1} \tilde{F}$ olur. Bu nedenle, bilinmeyen katsayılar matrisi olarak tanımlanan A (burada katsayılar $a_0, a_1, \dots, a_N$) tek şekilde tanımlanabilir ve böylece (3.62)–(3.63) ile verilen temel problemimizin Shifted Legendre polinomlarına dayalı yaklaşık çözümü tek şekilde belirlenebilir [4].

3.2.5. Yüksek Mertebeden Genelleştirilmiş Gecikmeli Lineer Fonksiyonel İntegro Diferansiyel Denklem Sistemi İçin Stirling Matris Sıralama Metodu

Çalışmanın bu kesiminde, değişken katsayılı lineer fonksiyonel diferansiyel denklem sisteminin, başlangıç koşulları altında yaklaşık çözümünü bulmak için Stirling polinomlarına dayalı bir matris sıralama metodu önerilmektedir. Bu teknik, lineer fonksiyonel diferansiyel denklem sistemini, sonlu Stirling serisi ve sıralama noktaları yardımıyla, bir matris denklemine dönüştürmektedir. Kullanılan metodun sayısal örnekleri fizik, biyoloji, kimya, mekanik, ekonomi gibi birçok farklı bilim dalında yer alan model problemlerde karşımıza çıkmaktadır [44]. Metodun doğruluğunun ve geçerliliğinin gösterilebilmesi için farklı hata analizi yöntemlerinden biri kullanılmaktadır.

Yüksek mertebeden değişken katsayılı lineer fonksiyonel diferansiyel denklem sisteminin genel formu

$$\sum_{k=0}^m \sum_{j=1}^J P_{ij}^k(x) y_j^{(k)}(\alpha_{jk}x + \beta_{jk}) = g_i(x), \quad (i = 1, 2, \dots, J, \quad 0 \leq a \leq x \leq b) \quad (3.77)$$

şeklinde ve başlangıç koşulları

$$y_j^{(k)}(a) = \lambda_{jk}, \quad (j=1,2,\dots,J, k=0,1,\dots,m-1) \quad (3.78)$$

biçiminde ifade edilir. Burada $y_j^{(0)}(x) = y_j(x)$, $(j=1,2,\dots,J)$ bilinmeyen fonksiyonlar olmak üzere, $P_{ij}^{(k)}(x)$ ve $g_i(x)$, $[a,b]$ aralığında tanımlı ve türevlenebilen fonksiyonlar; λ_{jk} , α_{jk} ve β_{jk} ise seçilen uygun sabitlerdir. Bu kesimdeki amaç (3.78) ile verilen başlangıç koşulları altında (3.77) denklem sisteminin

$$y_j(x) = \sum_{n=0}^N a_{jn} S_n(x), \quad (j=1,2,\dots,J) \quad (3.79)$$

ile tanımlanan sonlu Stirling seri açılımı biçiminde yaklaşık çözümlerini araştırmaktır. Burada a_{jn} , $(n=0,1,2,\dots,N)$ bilinmeyen çözüm polinomunun katsayılarıdır ve (2.5) bağıntısında verilen $S_n(x)$, $(n=0,1,\dots,N)$ Stirling polinomları [28], kısaca,

$$S_n(x) = (-1)^n n! \sum_{k=0}^n T_{nk} x^k, \quad (n=0,1,\dots,N, n \geq 0);$$

$$T_{nk} = \sum_{j=k}^n \frac{S_1(j+1, k+1)}{(n+j)!} \sum_{i=0}^j (-1)^i \binom{n+j}{j-i} S_2(n+i, i)$$

ile gösterilir.

Ayrıca, (3.77)–(3.78) probleminin ilgili temel matris denklemlerinin oluşturulmasında,

$$x_r = a + \frac{b-a}{N} r; \quad (r=0,1,\dots,N). \quad (3.80)$$

ile tanımlanan sıralama noktaları kullanılmaktadır [41].

3.2.5.1. Temel Matris Bağıntıları

Bu kesimde, önce (3.77) denklem sisteminin (3.79) ile tanımlanan sonlu Stirling serisi biçimindeki çözümünü matris formuna dönüştürülür. Bu amaçla (2.5) bağıntısı kullanılarak $S_n(x)$ Stirling polinomlarının matris formu

$$\mathbf{S}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{T} \quad (3.81)$$

olarak elde edilir. Burada,

$$\mathbf{S}(x) = [S_0(x) \ S_1(x) \ S_2(x) \ \dots \ S_N(x)],$$

$$\mathbf{X}(x) = [1 \ x \ x^2 \ \dots \ x^N],$$

$$\mathbf{T}^T = \begin{bmatrix} (-1)^0 0! T_{00} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ (-1)^1 1! T_{10} & (-1)^1 1! T_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ (-1)^2 2! T_{20} & (-1)^2 2! T_{21} & (-1)^2 2! T_{22} & 0 & \dots & 0 \\ (-1)^3 3! T_{30} & (-1)^3 3! T_{31} & (-1)^3 3! T_{32} & (-1)^3 3! T_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^N N! T_{N0} & (-1)^N N! T_{N1} & (-1)^N N! T_{N2} & (-1)^N N! T_{N3} & \dots & (-1)^N N! T_{NN} \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanmıştır. Ayrıca (3.79) ile verilen $y_j(x)$ yaklaşık çözümleri

$$y_j(x) = \mathbf{S}(x)\mathbf{A}_j, \quad (j=1,2,\dots,J) \quad (3.82)$$

matris formuna dönüştürülür. Burada

$$\mathbf{A}_j = [a_{j0} \ a_{j1} \ a_{j2} \ \dots \ a_{jN}]^T$$

bilinmeyen çözüm katsayıları matrisidir. Sonra (3.81) ve (3.82) matris bağıntıları kullanılarak,

$$y_j(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{T}\mathbf{A}_j \quad (3.83)$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca $\mathbf{X}^{(k)}(x)$ ve $\mathbf{X}(x)$ matrisleri arasında

$$\mathbf{X}^{(k)}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{B}^k \quad (3.84)$$

matris bağıntısı mevcuttur. Burada $\mathbf{B}$ matrisi,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

ile tanımlıdır [41]. (3.83) ve (3.84) bağıntılarını birlikte kullanarak,

$$y_j^{(k)}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{B}^k\mathbf{T}\mathbf{A}_j, \quad (j=1,2,\dots,J). \quad (3.85)$$

bağıntısı elde edilir. Diğer yandan, (3.85) bağıntısında $x \rightarrow \alpha_{jk}x + \beta_{jk}$ yerine yazılırsa,

$$y_j^{(k)}(\alpha_{jk}x + \beta_{jk}) = X(\alpha_{jk}x + \beta_{jk})B^kTA_j, \quad (j=1,2,...,J) \quad (3.86)$$

matris bağıntısı kurulur. Diğer taraftan $X(\alpha_{jk}x + \beta_{jk})$ matrisi ile $X(x)$ matrisi arasındaki

$$X(\alpha_{jk}x + \beta_{jk}) = X(x)B(\alpha_{jk}, \beta_{jk}) \quad (3.87)$$

bağıntısının olduğu iyi bilinmektedir [41]. Burada $\alpha_{jk} \neq 0$ ve $\beta_{jk} = 0$ için

$$B(\alpha_{jk}, 0) = \begin{bmatrix} \alpha_{jk}^0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{jk}^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{jk}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{jk}^N \end{bmatrix}$$

veya $\alpha_{jk} \neq 0$ ve $\beta_{jk} \neq 0$ için

$$B(\alpha_{jk}, \beta_{jk}) = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} \alpha_{jk}^0 \beta_{jk}^0 & \binom{1}{0} \alpha_{jk}^0 \beta_{jk}^1 & \binom{2}{0} \alpha_{jk}^0 \beta_{jk}^2 & \dots & \binom{N}{0} \alpha_{jk}^0 \beta_{jk}^N \\ 0 & \binom{1}{1} \alpha_{jk}^1 \beta_{jk}^0 & \binom{2}{1} \alpha_{jk}^1 \beta_{jk}^1 & \dots & \binom{N}{1} \alpha_{jk}^1 \beta_{jk}^{N-1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} \alpha_{jk}^2 \beta_{jk}^0 & \dots & \binom{N}{2} \alpha_{jk}^2 \beta_{jk}^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{N}{N} \alpha_{jk}^N \beta_{jk}^0 \end{bmatrix}$$

ile ifade edilir. Sonuç olarak, (3.87) bağıntısını (3.86) denkleminde yerine yazarsak,

$$y_j^{(k)}(\alpha_{jk}x + \beta_{jk}) = X(x)B(\alpha_{jk}, \beta_{jk})B^kTA_j, \quad (j=1,2,...,J) \quad (3.88)$$

matris bağıntısı elde edilir.

3.2.5.2. Çözüm Yöntemi

İlk olarak, (3.77)–(3.78) problemi için önceki kısımda elde edilen (3.88) bağıntısı kullanılarak $(i, j=1,2,...,J)$ için,

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k(x) \mathbf{Y}^{(k)}(\alpha_k x + \beta_k) = \mathbf{F}(x)$$

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k(x) \bar{\mathbf{X}}(x) \bar{\mathbf{B}}(\alpha_k, \beta_k) (\bar{\mathbf{B}})^k \bar{\mathbf{T}} \mathbf{A} = \mathbf{F}(x). \quad (3.89)$$

matris denklemi kurulur. (3.89) ifadesinde verilen her bir terimin matris formunun açık hali,

$$\mathbf{P}_k(x) = \begin{bmatrix} P_{11}^k(x) & P_{12}^k(x) & \dots & P_{1J}^k(x) \\ P_{21}^k(x) & P_{22}^k(x) & \dots & P_{2J}^k(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{J1}^k(x) & P_{J2}^k(x) & \dots & P_{JJ}^k(x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_J(x) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Y}^{(k)}(\alpha_k x + \beta_k) = \begin{bmatrix} y_1^{(k)}(\alpha_{1k} x + \beta_{1k}) \\ y_2^{(k)}(\alpha_{2k} x + \beta_{2k}) \\ \vdots \\ y_{Jk}^{(k)}(\alpha_{Jk} x + \beta_{Jk}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x) \mathbf{B}(\alpha_{1k}, \beta_{1k}) \mathbf{B}^k \mathbf{T} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{X}(x) \mathbf{B}(\alpha_{2k}, \beta_{2k}) \mathbf{B}^k \mathbf{T} \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}(x) \mathbf{B}(\alpha_{Jk}, \beta_{Jk}) \mathbf{B}^k \mathbf{T} \mathbf{A}_J \end{bmatrix}$$

$$= \bar{\mathbf{X}}(x) \bar{\mathbf{B}}(\alpha_k, \beta_k) (\bar{\mathbf{B}})^k \bar{\mathbf{T}} \mathbf{A}$$

biçiminde tanımlanır. Burada ek olarak kullanılan yardımcı matrislerinde açık hali,

$$\bar{\mathbf{B}}(\alpha_k, \beta_k) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}(\alpha_{1k}, \beta_{1k}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{B}(\alpha_{2k}, \beta_{2k}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{B}(\alpha_{Jk}, \beta_{Jk}) \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{B}}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{B}^k \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{X}}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(x) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{X}(x) \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{T} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{T} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_J \end{bmatrix}$$

şeklinde verilir. (3.89) denkleminde, (3.80) ile tanımlanan eşit aralıklı sıralama noktaları yerine konulursa yapılan işlem sonucunda aşağıda verilen matris denklem sistemi

$$\sum_{k=0}^m P_k(x_r) \bar{X}(x_r) \bar{B}(\alpha_k, \beta_k) (\bar{B})^k \bar{T}A = F(x_r), \quad (r=0,1,\dots,N) \quad (3.90)$$

elde edilir. Ya da kısaca (3.90) denklem sistemine karşılık gelen temel matris denklemini, kompakt formda,

$$\sum_{k=0}^m P_k \bar{X} \bar{B}(\alpha_k, \beta_k) (\bar{B})^k \bar{T}A = F \quad (3.91)$$

şeklinde olur. (3.91) bağıntısında verilen matrislerin açık halleri,

$$P_k = \begin{bmatrix} P_k(x_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_k(x_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P_k(x_N) \end{bmatrix}, \quad \bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{X}(x_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{X}(x_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{X}(x_N) \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} F(x_0) \\ F(x_1) \\ \vdots \\ F(x_N) \end{bmatrix}, \quad \bar{B}(\alpha_k, \beta_k) = \begin{bmatrix} \bar{B}(\alpha_k, \beta_k) \\ \bar{B}(\alpha_k, \beta_k) \\ \vdots \\ \bar{B}(\alpha_k, \beta_k) \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Aynı zamanda, (3.91) temel matris denklemini, kısaca,

$$WA = F \text{ ya da } [W; F] \quad (3.92)$$

şeklinde yazılabilir [36]. (3.92) 'de yapılan kısaltma işlemi,

$$W = \sum_{k=0}^m P_k \bar{X} \bar{B}(\alpha_k, \beta_k) (\bar{B})^k \bar{T} = [w_{p,q}], \quad (p, q = 1, 2, \dots, J(N+1)).$$

Ek olarak burada $J(N+1)$ lineer cebirsel denklem ile $J(N+1)$ bilinmeyen çözüm polinomunun katsayılarını içeren bir denklem sistemi elde ederiz. Diğer taraftan, (3.85) matris bağıntısını kullanarak, (3.78) 'de verilen başlangıç koşullarının matris formu için, $j = 1, 2, \dots, J$, $k = 0, 1, \dots, m-1$ olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} y_1^{(k)}(a) \\ y_2^{(k)}(a) \\ \vdots \\ y_J^{(k)}(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(a)B^k T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X(a)B^k T & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & X(a)B^k T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{1k} \\ \lambda_{2k} \\ \vdots \\ \lambda_{Jk} \end{bmatrix}$$

gösterimini elde ederiz. Kompakt formda gösterilirse,

$$U_k A = \lambda_k \text{ ya da } [U_k; \lambda_k] \quad (3.93)$$

biçiminde yazılabilir.

(3.92) ile tanımlanan $[W; F]$ matrisinin herhangi Jm satırının yerine (3.93) ile tanımlanan $[U_k; \lambda_k]$ karışık koşulların matris formu yazılarak, yeni $[\tilde{W}; \tilde{F}]$ arttırılmış matrisi elde edilir. Eğer $\tilde{W}$ matrisi tersinir matris ise yani $rank \tilde{W} = rank [\tilde{W}; \tilde{F}] = J(N+1)$ koşulu sağlanıyorsa, $A = (\tilde{W})^{-1} \tilde{F}$ yazılabilir. Böylece, A katsayılar matrisi tek olarak belirlenir ve (3.79) çözümü tek olarak bulunmuş olur [36].

3.2.5.3. Hata Analizi

Bu kısımda, (3.77)–(3.78) bağıntıları ile verilen temel problemin Stirling polinomları yardımıyla bulunan yaklaşık çözümleri için rezidüel hata düzeltme yöntemi adı verilen bir hata tahmin tekniği sunulmuştur. Böylece kullanılan bu teknikle yaklaşık çözüm iyileştirilebilir. İlk olarak, kullanılan bu yöntemin rezidüel fonksiyonu (3.94) ile tanımlanabilir:

$$R_{iN}(x) = L[y_{iN}(x)] - f_i(x), \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (3.94)$$

(3.94) 'te $L[y_{iN}(x)] \cong f_i(x)$ ve (3.77)–(3.78) probleminin (3.79) 'da verilen Stirling polinomları yardımıyla bulunan yaklaşık çözümleri $y_{iN}(x)$, $i = 0, 1, 2, \dots, k$ şeklinde verilmiştir. Daha sonra $y_{jN}(x)$ fonksiyonu ile problem,

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=0}^m \sum_{j=1}^J P_{ij}^{(k)}(x) y_j^{(k)}(\alpha_{jk}x + \beta_{jk}) = f_i(x) + R_{iN}(x), \quad i = 1, 2, \dots, k \\ y_j^{(k)}(a) = \lambda_{jk}, \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad k = 0, 1, \dots, m-1 \end{array} \right\}$$

ile tanımlanmıştır. Ayrıca hata fonksiyonu $e_{jN}(x)$, (3.95) ile tanımlanır:

$$e_{jN}(x) = y_j(x) - y_{jN}(x) \quad (3.95)$$

burada $y_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, k$, (3.77)–(3.78) bağıntıları ile verilen problemin tam çözümüdür.

(3.77), (3.78), (3.91) ve (3.94) bağıntıları kullanılarak hata fonksiyonunun oluşturduğu diferansiyel denklem sistemi

$$L[e_{iN}(x)] = L[y_i(x)] - L[y_{iN}(x)] = -R_{iN}(x)$$

elde edilir ve hata problemi,

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=0}^m \sum_{j=1}^J P_{ij}^{(k)}(x) e_{jN}^{(k)}(\alpha_{jk}x + \beta_{jk}) = -R_{iN}(x), \quad i = 1, 2, \dots, k \\ e_{jN}^{(k)}(a) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad k = 0, 1, \dots, m-1 \end{array} \right\} \quad (3.96)$$

biçiminde oluşturulmuştur. Hata problemi (3.96), çalışmanın 3.2.3. kısmında verilen yöntem vasıtasıyla (3.60) 'daki gibi elde edilebilir. Böylece, $e_{jN}(x)$ fonksiyonu için $e_{jN,M}(x)$ yaklaşımı (3.97) 'de verilir.

$$e_{jN,M}(x) = \sum_{n=0}^M a_{jN}^* S_n(x), \quad M > N, \quad j = 1, 2, \dots, J. \quad (3.97)$$

Sonuç olarak $y_{jN,M}(x) = y_{jN}(x) + e_{jN,M}(x)$ ile gösterilen düzeltilmiş Stirling polinomları cinsinden çözümü $y_{jN}(x)$ ve $e_{jN,M}(x)$ polinomları türünden elde edilir. Ek olarak $e_{jN}(x) = y_j(x) - y_{jN}(x)$ ile hata fonksiyonunu, $e_{jN,M}(x)$ ile tahmin edilmiş hata fonksiyonunu ve $E_{jN,M}(x) = e_{jN}(x) - e_{jN,M}(x) = y_j(x) - y_{jN,M}(x)$ ile de düzeltilmiş hata fonksiyonunu gösterebiliriz [35].

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Çalışmanın bu bölümünde, çalışma kapsamında kullanılan metotların doğruluğu, verimliliği ve etkileri araştırılmıştır. Bu nedenle, farklı denklem formları için önerilen metotlar araştırma bulgularına dayandırılmış ve metotların işleyişi örneklerle desteklenmiştir. Problemlerin çözümlerinin hesaplanmasında, grafiklerin çizilmesinde ve karşılaştırma tablolarında yer alan bulguların bulunmasında Mathematica ve MATLAB programlama dillerinden yardım alınmıştır. Örnekler için gerekli hata analizleri yapılarak sonuçlar iyileştirilmiş, literatürde yer alan farklı çözüm teknikleri ile bu çalışmada kullanılan metotların sonuçları karşılaştırılmıştır.

4.1. Yüksek Mertebeden Genelleştirilmiş Lineer Fonksiyonel İntegro Diferansiyel Denklemler İçin Artan ve Azalan Faktöriyel Fonksiyonlarına Dayalı Matris Sıralama Metodu İle İlgili Nümerik Örnekler

Örnek 4.1.1. İkinci mertebeden lineer

$$y''(x) - xy(x) = 2 + x - x^3$$

diferansiyel denkleminin, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$ koşulları altındaki çözümünü inceleyelim. Problemin tam çözümü $y = x^2 - 1$. Problemin matris formundaki genel yapısı,

$$\sum_{k=0}^2 P_k(x) y^{(k)}(x) = f(x)$$

ya da açık hali,

$$P_0(x) y^{(0)}(x) + P_1(x) y^{(1)}(x) + P_2(x) y^{(2)}(x) = f(x)$$

biçimindedir. Ayrıca burada

$$P_0(x) = -x, P_1(x) = 0, P_2(x) = 1, f(x) = 2 + x - x^3$$

şeklindedir. $N = 2$ için artan faktöriyel fonksiyonlarına dayalı

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^2 \overline{a_n}(x)^{\bar{n}},$$

formundaki çözümler aranacaktır. $N = 2$ için sıralama noktaları

$$\left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1 \right\}$$

olarak hesaplanır. Problemin temel matris denklemi;

$$\sum_{k=0}^2 P_k X B^k \bar{S} \bar{A} = F,$$

$$W = P_0 X B^0 \bar{S} + P_2 X B^2 \bar{S}$$

şeklindedir. Burada;

$$P_k = \begin{bmatrix} P_k(x_0) & 0 & 0 \\ 0 & P_k(x_1) & 0 \\ 0 & 0 & P_k(x_2) \end{bmatrix}, P_0(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, P_2(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{X}(x_0) & 0 & 0 \\ 0 & \bar{X}(x_1) & 0 \\ 0 & 0 & \bar{X}(x_2) \end{bmatrix}, \bar{X}(x) = \begin{bmatrix} X(x) & 0 \\ 0 & X(x) \end{bmatrix},$$

$$(\bar{B})^k = \text{diag}[B^k \quad B^k \quad \dots \quad B^k], F = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \end{bmatrix},$$

$$\bar{S}^T = \begin{bmatrix} S_1(0,0) & 0 & 0 \\ S_1(1,0) & S_1(1,1) & 0 \\ S_1(2,0) & S_1(2,1) & S_1(2,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Probleme karşılık gelen $[\bar{W}; \bar{F}]$ matrisi;

$$\bar{W} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{17}{8} \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \bar{F} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{19}{8} \\ 2 \end{bmatrix}, [\bar{W}; \bar{F}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2; & 2 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{17}{8}; & \frac{19}{8} \\ -1 & -1 & 0; & 2 \end{bmatrix}$$

olup koşullara karşılık gelen matris;

$$y(0) = -1 \Rightarrow X(0) \bar{S} \bar{A} = -1, y'(0) = X(0) B \bar{S} \bar{A} = 0,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{A} = -1, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \bar{A} = 0$$

şeklindedir. Böylece probleme ait koşul matrisi;

$$[\bar{U}_j; \bar{\lambda}_j] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0; & -1 \\ 0 & 1 & 1; & 0 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Böylece probleme ait arttırılmış matris;

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{W}}; \bar{\mathbf{F}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2; & 2 \\ 1 & 0 & 0; & -1 \\ 0 & 1 & 1; & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu matrise karşılık gelen lineer cebirsel denklemin çözülmesiyle bilinmeyen katsayılar matrisi $\bar{\mathbf{A}} = [-1 \ -1 \ 1]^T$ olarak bulunur. Katsayıları sonlu kesilmiş artan faktöriyel polinomları ile birlikte çözüm formunda yerine yazıldığında $y_2(x)$ yaklaşık çözümü $y_2(x) = -1 + x^2$ olarak elde edilir. Böylece tam çözüme ulaşılır.

Örnek 4.1.2. Örnek 4.1.1.'de tanımlanan lineer diferansiyel denkleminin $y(0) = -1$ ve $y'(0) = 0$ başlangıç koşulları altında, azalan faktöriyel fonksiyonlarına dayalı

$$y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 \underline{a}_n(x)_n,$$

formundaki çözümünü araştıralım. $N=2$ için sıralama noktaları

$$\left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1 \right\}$$

olarak hesaplanır. Problemin temel matris denklemi,

$$\left\{ \mathbf{P}_0 \mathbf{X} \mathbf{B}^0 \underline{\mathbf{S}}^{-1} + \mathbf{P}_2 \mathbf{X} \mathbf{B}^2 \underline{\mathbf{S}}^{-1} \right\} \underline{\mathbf{A}} = \mathbf{F}$$

şeklindedir. Burada,

$$\underline{\mathbf{S}}^T = \begin{bmatrix} S_2(0,0) & 0 & 0 \\ S_2(1,0) & S_2(1,1) & 0 \\ S_2(2,0) & S_2(2,1) & S_2(2,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\underline{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{S}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Probleme karşılık gelen $[\underline{\mathbf{W}}; \underline{\mathbf{F}}]$ matrisi;

$$[\underline{\mathbf{W}}; \underline{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2; & 2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{13}{8}; & \frac{19}{8} \\ -1 & -1 & 2; & 2 \end{bmatrix}$$

olup, koşullara karşılık gelen matris;

$$y(0) = -1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{A} = [-1] , [\underline{U}_0; \underline{\lambda}_0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0; & -1 \end{bmatrix},$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{A} = [0], [\underline{U}_1; \underline{\lambda}_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1; & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\underline{U}_j; \underline{\lambda}_j] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0; & -1 \\ 0 & 1 & -1; & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Böylece probleme ait arttırılmış matris;

$$[\underline{\tilde{W}}; \underline{\tilde{F}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0; & -1 \\ 0 & 1 & -1; & 0 \\ -1 & -1 & 2; & 2 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Bu matrise karşılık gelen lineer cebirsel denklemin çözülmesiyle azalan faktöriyel fonksiyonlarına dayalı bilinmeyen katsayılar matrisi $\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ olur ve kesilmiş çözüm serisinde yerine yazıldığında $y_2(x)$ yaklaşık çözümü $y_2(x) = -1 + x^2$ olarak elde edilir. Böylece tam çözüme ulaşılır.

Örnek 4.1.3. İkinci mertebeden değişken katsayılı fonksiyonel gecikmeli Volterra tipi integro diferansiyel denkleminin,

$$y''(x) - e^x y'(x^2 - x) + y(x^2) = f(x) + \int_x^{x+1} 2te^{-x^2} y'(t^2) dt; (0 \leq x \leq 2),$$

$$f(x) = -2e^{-x^2} x(x+1)(2x+1) + e^x (1 - 2(x-1)x) + x^4 - x^2 + 1$$

$y(0) = y'(0) = -1$ başlangıç koşulları altındaki çözümünü inceleyelim. Problemin tam çözümü $y(x) = x^2 - x - 1$ dir. $N = 2$ için azalan faktöriyel fonksiyonlarına dayalı

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^2 \underline{a}_n(x)_{\underline{n}} \Rightarrow y_2(x) = \underline{X}(x) \underline{S} \underline{A}$$

formundaki çözümler aranacaktır. $N = 2$ için sıralama noktaları

$$\{x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2\}$$

olarak hesaplanır. Problemin matris denklemi açık bir şekilde aşağıdaki gibi yazılır;

$$\begin{aligned}
& P_{00}(x)y^{(0)}(h_{00}(x)) + P_{10}(x)y^{(1)}(h_{10}(x)) + P_{20}(x)y^{(2)}(h_{20}(x)) \\
& = f(x) + \int_{u_{10}}^{v_{10}} K_{10}(x,t)y^{(1)}(g_{10}(t))dt
\end{aligned}$$

burada

$$\begin{aligned}
& P_{00}(x)=1, P_{10}(x)=-e^x, P_{20}(x)=1, h_{00}(x)=x^2, h_{10}(x)=x^2-x, h_{20}(x)=x, \\
& u_{10}(x)=x, v_{10}(x)=x+1, K_{10}(x)=2te^{-x^2}, g_{10}(t)=t^2
\end{aligned}$$

şeklinde olup, problemin temel matris denklemi;

$$\left\{ \sum_{k=0}^2 \sum_{j=0}^0 P_{kj} X_{kj} B^k - \sum_{r=0}^1 \sum_{s=0}^0 \bar{X} \bar{K}_{rs} \bar{Q}_{rs} B^r \right\} \underline{S} \underline{A} = \underline{F} \Rightarrow \underline{W} \underline{A} = \underline{F} \Leftrightarrow [\underline{W}; \underline{F}]$$

biçimindedir. Burada

$$X_{00} = \begin{bmatrix} X(h_{00}(x_0)) \\ X(h_{00}(x_1)) \\ X(h_{00}(x_2)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix},$$

$$X_{10} = \begin{bmatrix} X(h_{10}(0)) \\ X(h_{10}(1)) \\ X(h_{10}(2)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, X_{20} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$P_{00} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_{10} = \begin{bmatrix} -e^0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^1 & 0 \\ 0 & 0 & -e^2 \end{bmatrix}, P_{20} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$K_{10} = [k_{mn}^{10}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \bar{K}_{10} = \begin{bmatrix} K_{10} & 0 & 0 \\ 0 & K_{10} & 0 \\ 0 & 0 & K_{10} \end{bmatrix}$$

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} X(0) & 0 & 0 \\ 0 & X(1) & 0 \\ 0 & 0 & X(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \underline{S} = \begin{bmatrix} S_1(0,0) & S_1(1,0) & S_1(2,0) \\ 0 & S_1(1,1) & S_1(2,1) \\ 0 & 0 & S_1(2,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_{10} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{10}(0) \\ \mathbf{Q}_{10}(1) \\ \mathbf{Q}_{10}(2) \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_{10}(0) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_{10}(1) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{7}{3} & \frac{31}{5} \\ \frac{3}{2} & \frac{15}{4} & \frac{63}{6} \\ \frac{7}{3} & \frac{31}{5} & \frac{127}{7} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_{10}(2) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{19}{3} & \frac{211}{5} \\ \frac{5}{2} & \frac{65}{4} & \frac{665}{6} \\ \frac{19}{3} & \frac{211}{5} & \frac{2059}{7} \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 \\ e - 12e^{-1} + 1 \\ -3e^2 - 60e^{-4} + 13 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanan matrislerdir. Probleme karşılık gelen $\underline{\mathbf{W}}$ matrisi;

$$\underline{\mathbf{W}} = \left\{ \mathbf{P}_{00} \mathbf{X}_{00} \mathbf{B}^0 + \mathbf{P}_{10} \mathbf{X}_{10} \mathbf{B} + \mathbf{P}_{20} \mathbf{X}_{20} \mathbf{B}^2 - \overline{\mathbf{X}} \overline{\mathbf{K}}_{10} \overline{\mathbf{Q}}_{10} \mathbf{B} \right\} \underline{\mathbf{S}}$$

$$\Rightarrow \underline{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1-e & 4-e \\ 1 & 19-e^2 & 222-5e^2 \end{bmatrix}.$$

Burada probleme karşılık gelen $[\underline{\mathbf{W}}; \underline{\mathbf{F}}]$ matrisi;

$$[\underline{\mathbf{W}}; \underline{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & ; & 2 \\ 1 & 1-e & 4-e & ; & e - 12e^{-1} + 1 \\ 1 & 19-e^2 & 222-5e^2 & ; & -3e^2 - 60e^{-4} + 13 \end{bmatrix}$$

olup verilen koşullara karşılık gelen genişletilmiş matris ise;

$$y(0) = -1 \Rightarrow \mathbf{X}(0) \underline{\mathbf{S}} \underline{\mathbf{A}} = -1 \Rightarrow [1 \quad 0 \quad 0; \quad -1],$$

$$y'(0) = -1 \Rightarrow \mathbf{X}(0) \mathbf{B} \underline{\mathbf{S}} \underline{\mathbf{A}} = -1 \Rightarrow [0 \quad 1 \quad 1; \quad -1]$$

ya da açık hali,

$$[\underline{\mathbf{U}}_j; \underline{\lambda}_j] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0; & -1 \\ 0 & 1 & 1; & -1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Böylece probleme ait genişletilmiş matris;

$$[\underline{\tilde{\mathbf{W}}}; \underline{\tilde{\mathbf{F}}}] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1; & 2 \\ 1 & 0 & 0; & -1 \\ 0 & 1 & 1; & -1 \end{bmatrix}$$

biçiminde olacaktır. Bu sistemin çözümüyle bilinmeyen katsayılar matrisi $\underline{\mathbf{A}}$;

$$\underline{A} = [-1 \quad -2 \quad 1]^T$$

olarak bulunur. $y_2(x)$ tam çözümü

$$y_2(x) = X(x) \underline{S} \underline{A} \Rightarrow y_2(x) = x^2 - x - 1$$

olarak hesaplanmış olur.

Benzer şekilde $N=2$ için artan faktöriyel fonksiyonlarına dayalı

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^2 \bar{a}_n(x)^{\bar{n}}, (0 \leq x \leq 2, N=2) \Rightarrow y_2(x) = X(x) \bar{S} \bar{A}$$

formundaki çözümler aranacaktır. Problemin temel matris denklemi;

$$\left\{ \sum_{k=0}^2 \sum_{j=0}^0 P_{kj} X_{kj} B^k - \sum_{r=0}^1 \sum_{s=0}^0 \bar{X} \bar{K}_{rs} \bar{Q}_{rs} B^r \right\} \bar{S} \bar{A} = \bar{F} \Rightarrow \bar{W} \bar{A} = \bar{F} \Leftrightarrow [\bar{W}; \bar{F}]$$

şeklindedir. Burada

$$\bar{W} = \{P_{00} X_{00} B^0 + P_{10} X_{10} B + P_{20} X_{20} B^2 - \bar{X} \bar{K}_{10} \bar{Q}_{10} B\} \bar{S},$$

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} S_2(0,0) & S_2(1,0) & S_2(2,0) \\ 0 & S_2(1,1) & S_2(2,1) \\ 0 & 0 & S_2(2,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

olarak hesaplanan matrislerdir. Probleme karşılık gelen $[\bar{W}; \bar{F}]$ matrisi;

$$[\bar{W}; \bar{F}] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & ; & 2 \\ 1 & 1-e & 2+e & ; & e-12e^{-1}+1 \\ 1 & 19-e^2 & 194-3e^2 & ; & -3e^2-60e^{-4}+13 \end{bmatrix}$$

olup verilen koşullara karşılık gelen genişletilmiş koşul matrisi ise;

$$y(0) = -1 \Rightarrow X(0) \bar{S} \bar{A} = -1 \Rightarrow [1 \quad 0 \quad 0; \quad -1],$$

$$y'(0) = -1 \Rightarrow X(0) B \bar{S} \bar{A} = -1 \Rightarrow [0 \quad 1 \quad -1; \quad -1]$$

ya da açık hali

$$[\bar{U}_j; \bar{\lambda}_j] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0; & -1 \\ 0 & 1 & -1; & -1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Böylece probleme ait genişletilmiş sonuç matrisi;

$$[\tilde{W}; \tilde{F}] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3; & 2 \\ 1 & 0 & 0; & -1 \\ 0 & 1 & -1; & -1 \end{bmatrix}$$

biçiminde olacaktır. Bu sistemin çözümüyle elde edilen bilinmeyen katsayılar matrisi

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

olarak bulunur. $y_2(x)$ tam çözümü $y_2(x) = x^2 - x - 1$ olarak hesaplanmış olur.

Örnek 4.1.4. Burada Örnek 4.1.3.'deki problemi, $0 \leq x \leq 2$ aralığında $f(x) = e^x - e^{2x+1} + 1$ olacak şekilde $y(0) = y'(0) = 1$ başlangıç koşulları altındaki çözümünü inceleyelim. Problemin tam çözümü ise $y(x) = e^x$ dir. Örnek 4.1.3.'deki problemin $N=2$ için azalan faktöriyel fonksiyonlarına dayalı

$$y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n(x) \Rightarrow y_2(x) = \mathbf{X}(x) \underline{\mathbf{S}} \underline{\mathbf{A}}, \quad (0 \leq x \leq 2)$$

formundaki çözümleri aranacaktır. Probleme karşılık gelen $[\underline{\mathbf{W}}; \underline{\mathbf{F}}]$ matrisi,

$$\underline{\mathbf{W}} \underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{F}} \Leftrightarrow [\underline{\mathbf{W}}; \underline{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & ; & 2-e \\ 1 & 1-e & 4-e & ; & e-e^3+1 \\ 1 & 19-e^2 & 222-5e^2 & ; & e^2-e^5+1 \end{bmatrix}$$

olup, buradaki matrislerin açık hali,

$$\underline{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1-e & 4-e \\ 1 & 19-e^2 & 222-5e^2 \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-e \\ e-e^3+1 \\ e^2-e^5+1 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Verilen problemin başlangıç koşullarına karşılık gelen koşul matrisi ise,

$$y(0) = 1 \Rightarrow \mathbf{X}(0) \underline{\mathbf{S}} \underline{\mathbf{A}} = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0; & 1 \end{bmatrix},$$

$$y'(0) = 1 \Rightarrow \mathbf{X}(0) \mathbf{B} \underline{\mathbf{S}} \underline{\mathbf{A}} = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1; & 1 \end{bmatrix}$$

ya da kompakt formu,

$$[\underline{\mathbf{U}}_j; \underline{\lambda}_j] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0; & 1 \\ 0 & 1 & 1; & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Böylece probleme ait genişletilmiş sonuç matrisi,

$$[\tilde{\underline{\mathbf{W}}}; \tilde{\underline{\mathbf{F}}}] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1; & 2-e \\ 1 & 0 & 0; & 1 \\ 0 & 1 & 1; & 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde olacaktır. Bu sistemin çözümüyle, bilinmeyen katsayılar matrisi

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & e-2 & 3-e \end{bmatrix}^T$$

olarak bulunur. Sonuç olarak, $y_2(x)$ yaklaşık çözümü

$$y_2(x) = \mathbf{X}(x) \underline{\mathbf{S}} \underline{\mathbf{A}} \Rightarrow y_2(x) = 1 + x + (3-e)x^2$$

elde edilir.

Aynı yöntemi kullanarak $N=2$ için artan faktöriyel fonksiyonlarına dayalı

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^2 \overline{a_n}(x) \overline{a_n}, (0 \leq x \leq 2) \Rightarrow y_2(x) = \mathbf{X}(x) \overline{\mathbf{S}} \overline{\mathbf{A}}$$

formundaki çözümler aranacaktır. Burada polinomun katsayılar matrisi

$$\overline{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} S_2(0,0) & S_2(1,0) & S_2(2,0) \\ 0 & S_2(1,1) & S_2(2,1) \\ 0 & 0 & S_2(2,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Probleme karşılık gelen çözüm matrisi,

$$\overline{\mathbf{W}} \overline{\mathbf{A}} = \overline{\mathbf{F}} \Leftrightarrow [\overline{\mathbf{W}}; \overline{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & ; & 2-e \\ 1 & 1-e & 2+e & ; & e-e^3+1 \\ 1 & 19-e^2 & 194-3e^2 & ; & e^2-e^5+1 \end{bmatrix}$$

olup verilen başlangıç koşullarına karşılık gelen koşul matrisi ise,

$$y(0)=1 \Rightarrow \mathbf{X}(0) \overline{\mathbf{S}} \overline{\mathbf{A}} = 1 \Rightarrow [1 \quad 0 \quad 0; \quad 1],$$

$$y'(0)=1 \Rightarrow \mathbf{X}(0) \mathbf{B} \overline{\mathbf{S}} \overline{\mathbf{A}} = 1 \Rightarrow [0 \quad 1 \quad -1; \quad 1]$$

ya da kompakt formu,

$$[\overline{\mathbf{U}}_j; \overline{\lambda}_j] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0; & 1 \\ 0 & 1 & -1; & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Böylece probleme ait genişletilmiş matris,

$$[\overline{\tilde{\mathbf{W}}}; \overline{\tilde{\mathbf{F}}}] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3; & 2-e \\ 1 & 0 & 0; & 1 \\ 0 & 1 & -1; & 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde olacaktır. Bu matris denklem sisteminin çözümüyle, bilinmeyen katsayılar matrisi,

$$\overline{\mathbf{A}} = [1 \quad 4-e \quad 3-e]^T$$

olarak bulunur. Artan faktöriyel fonksiyonlarına dayalı $y_2(x)$ yaklaşık çözümü,

$$y_2(x) = 1 + x + (3-e)x^2$$

biçiminde elde edilir.

Örnek 4.1.5. Birinci mertebeden sabit katsayılı, fonksiyonel sınırlı, gecikmeli Volterra tipi

$$y'(x) - y(x-1) = \int_{x-1}^x y(t)dt, \quad (0 \leq x \leq 1),$$

integro diferansiyel denkleminin, $y(0)=1$ başlangıç koşulu altında çözümlerini arayacağız. Problemin tam çözümü ise $y(x) = e^x$ dir. Burada $f(x)=0$ ve $N=2$ için sırasıyla azalan ve artan faktöriyel fonksiyonlarına dayalı

$$y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 \underline{a}_n(x), \quad (0 \leq x \leq 1)$$

ve

$$y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 \overline{a}_n(x), \quad (0 \leq x \leq 1)$$

formunda çözümlerini arayalım. Ayrıca $N=2$ için sıralama noktaları

$$\left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1 \right\}$$

şeklinde olup, problemin temel matris denklemi,

$$P_{00}(x)y^{(0)}(h_{00}(x)) + P_{10}(x)y^{(1)}(h_{10}(x)) = f(x) + \int_{u_{00}}^{v_{00}} K_{00}(x,t)y^{(0)}(g_{00}(t))dt$$

formundadır. Burada, açık hali

$$P_{00}(x) = -1, P_{10}(x) = 1, P_{20}(x) = 1, h_{00}(x) = x-1, h_{10}(x) = x, \\ u_{00}(x) = x-1, v_{00}(x) = x, K_{00}(x,t) = 1, g_{00}(t) = t.$$

Problemin azalan faktöriyel fonksiyonlarına dayalı temel matrisin düzenlenmiş hali,

$$\left\{ \sum_{k=0}^1 \sum_{j=0}^0 P_{kj} X_{kj} B^k - \sum_{r=0}^0 \sum_{s=0}^0 \bar{X} \bar{K}_{rs} \bar{Q}_{rs} B^r \right\} \underline{S} \underline{A} = \underline{F}$$

olarak bulunur. Probleme karşılık gelen $[\underline{W}; \underline{F}]$ matrisi,

$$[\underline{W}; \underline{F}] = \begin{bmatrix} -2 & 5/2 & 7/6 & ; & 0 \\ -2 & 3/2 & 13/6 & ; & 0 \\ -2 & 1/2 & 13/6 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

iken artan faktöriyel fonksiyonlarına dayalı temel matris denklemi ve $[\overline{W}; \overline{F}]$ matrisi,

$$\left\{ \sum_{k=0}^1 \sum_{j=0}^0 P_{kj} X_{kj} B^k - \sum_{r=0}^0 \sum_{s=0}^0 \bar{X} \bar{K}_{rs} \bar{Q}_{rs} B^r \right\} \overline{S} \overline{A} = \overline{F}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{W}; \bar{F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5/2 & -23/6; & 0 \\ -2 & 3/2 & -5/6; & 0 \\ -2 & 1/2 & 7/6 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Problemin koşullara karşılık gelen koşul matrisleri ise,

$$y(0)=1 \Rightarrow X(0)\underline{S}\underline{A}=1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0; & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$y(0)=1 \Rightarrow X(0)\bar{S}\bar{A}=1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0; & 1 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Böylece probleme ait azalan faktöriyel fonksiyonlarına dayalı genişletilmiş sonuç matrisi

$$\begin{bmatrix} \tilde{W}; \tilde{F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5/2 & 7/6 & ; & 0 \\ -2 & 3/2 & 13/6; & 0 \\ 1 & 0 & 0 & ; & 1 \end{bmatrix}$$

olup sistemin yaklaşık çözümüne karşılık gelen $\underline{A}$ bilinmeyen katsayılar matrisi

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 12/11 & 6/11 \end{bmatrix}^T$$

olarak hesaplanır. Problemin artan faktöriyel fonksiyonlarına dayalı genişletilmiş sonuç matrisi,

$$\begin{bmatrix} \tilde{W}; \tilde{F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5/2 & -23/6; & 0 \\ -2 & 3/2 & -5/6; & 0 \\ 1 & 0 & 0 & ; & 1 \end{bmatrix}$$

olup sistemin yaklaşık çözümüne karşılık gelen $\bar{A}$ bilinmeyen katsayılar matrisi,

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 18/11 & 6/11 \end{bmatrix}^T$$

olarak hesaplanır. Böylece $N=2$ için sırasıyla azalan ve artan faktöriyel fonksiyonlarına dayalı yaklaşık çözümler,

$$y_2(x) = \underline{\chi}(x)\underline{A} = X(x)\underline{S}\underline{A} = 1 + 12/11x + 6/11x^2$$

ve

$$y_2(x) = \bar{\chi}(x)\bar{A} = X(x)\bar{S}\bar{A} = 1 + 12/11x + 6/11x^2$$

hesaplanmış olur. Benzer şekilde aynı problemi $N > 2$ için de hesaplayarak yaklaşık çözümler elde edilebilir.

Örnek 4.1.6. İkinci mertebeden fonksiyonel gecikmeli değişken katsayılı

$$y''(x) - xy'(x^2 - x) + y(x^2) = f(x) + 3 \int_0^1 y(t) dt$$

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 1$$

Fredholm tipi integro diferansiyel denklemin $y(0) = -1$ ve $y'(0) = 0$ başlangıç koşulları altındaki çözümünü inceleyelim. Yukarıda bahsedilen problemin tam çözümü ise $y(x) = x^2 + 1$ dir. $N=2$ için azalan faktöriyel fonksiyonlarına dayalı

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^2 \frac{a_n}{n!} (x)_n \Rightarrow y_2(x) = \underline{X}(x) \underline{S} \underline{A}$$

formundaki çözümler aranacaktır. $N=2$ için sıralama noktaları

$$\left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1 \right\}$$

olarak hesaplanır. Problemin temel matris formu,

$$\begin{aligned} & P_{00}(x) y^{(0)}(h_{00}(x)) + P_{10}(x) y^{(1)}(h_{10}(x)) + P_{20}(x) y^{(2)}(h_{20}(x)) \\ & = f(x) + \int_{u_{00}}^{v_{00}} K_{00}(x, t) y^{(0)}(g_{00}(t)) dt \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada,

$$P_{00}(x) = 1, P_{10}(x) = -x, P_{20}(x) = 1, h_{00}(x) = x^2, h_{10}(x) = x^2 - x, h_{20}(x) = x,$$

$$u_{00}(x) = 0, v_{00}(x) = 1, K_{10}(x, t) = 2te^{-x^2}, g_{00}(t) = t$$

olarak elde edilir. Problemin temel matris denklemi,

$$\left\{ \sum_{k=0}^2 \sum_{j=0}^0 P_{kj} \underline{X}_{kj} \underline{B}^k - \sum_{r=0}^0 \sum_{s=0}^0 \overline{X} \overline{K}_{rs} \overline{Q}_{rs} \underline{B}^r \right\} \underline{S} \underline{A} = \underline{F} \Rightarrow \underline{W} \underline{A} = \underline{F} \Leftrightarrow [\underline{W}; \underline{F}];$$

şeklindedir. Burada gerekli işlemler yapılırsa $\underline{W}$ matrisi,

$$\underline{W} = \left\{ \underline{P}_{00} \underline{X}_{00} \underline{B}^0 + \underline{P}_{10} \underline{X}_{10} \underline{B} + \underline{P}_{20} \underline{X}_{20} \underline{B}^2 - \overline{X} \overline{K}_{00} \overline{Q}_{00} \underline{B}^0 \right\} \underline{S}$$

$$\underline{W} = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ -2 & -\frac{7}{4} & \frac{49}{16} \\ -2 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Burada,

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \underline{F} = \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{11}{6} \\ 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde hesaplanmıştır. Probleme karşılık gelen $[\underline{W}; \underline{F}]$ matrisi,

$$[\underline{W}; \underline{F}] = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & ; & -1 \\ -2 & -\frac{7}{4} & \frac{49}{16} & ; & -\frac{11}{16} \\ -2 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} & ; & 0 \end{bmatrix}$$

olup, verilen başlangıç koşullarına karşılık gelen koşul matrisi,

$$y(0) = 1 \Rightarrow X(0) \underline{S} \underline{A} = -1 \Rightarrow [1 \quad 0 \quad 0; \quad 1],$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow X(0) \underline{B} \underline{S} \underline{A} = 0 \Rightarrow [0 \quad 1 \quad -1; \quad 0]$$

ya da genişletilmiş koşul matrisi,

$$[\underline{U}_j; \underline{\lambda}_j] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0; & -1 \\ 0 & 1 & 1; & -1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Böylece probleme ait genişletilmiş sonuç matrisi,

$$[\underline{\tilde{W}}; \underline{\tilde{F}}] = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2}; & -1 \\ 1 & 0 & 0; & 1 \\ 0 & 1 & -1; & 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde olacaktır. Bu sistemin çözümüyle, azalan faktöriyel polinomuna dayalı bilinmeyen katsayılar matrisi

$$\underline{A} = [1 \quad 1 \quad 1]^T$$

olarak bulunur. Sonuç olarak $y_2(x)$ tam çözümü

$$y_2(x) = X(x) \underline{S} \underline{A} \Rightarrow y_2(x) = x^2 + 1$$

olarak hesaplanmış olur.

Benzer şekilde, $N=2$ için artan faktöriyel fonksiyonlarına dayalı

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^2 \bar{a}_n(x)^{\bar{n}}, \quad (0 \leq x \leq 1) \Rightarrow y_2(x) = X(x) \bar{S} \bar{A}$$

formundaki çözümler aranacaktır. Problemin temel matris denklemi;

$$\left\{ \sum_{k=0}^2 \sum_{j=0}^0 P_{kj} X_{kj} B^k - \sum_{r=0}^1 \sum_{s=0}^0 \bar{X} \bar{K}_{rs} \bar{Q}_{rs} B^r \right\} \bar{S} \bar{A} = \bar{F} \Rightarrow \bar{W} \bar{A} = \bar{F} \Leftrightarrow [\bar{W}; \bar{F}]$$

şeklindedir. Burada

$$\bar{W} = \{P_{00} X_{00} B^0 + P_{10} X_{10} B^1 + P_{20} X_{20} B^2 - \bar{X} \bar{K}_{00} \bar{Q}_{00} B^0\} \bar{S},$$

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

olarak ele alınmıştır. Probleme karşılık gelen $[\bar{W}; \bar{F}]$ matrisi;

$$[\bar{W}; \bar{F}] = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}; & -1 \\ -2 & -\frac{7}{4} & -\frac{7}{16}; & -\frac{11}{16} \\ -2 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}; & 0 \end{bmatrix}$$

olup, verilen başlangıç koşullarına karşılık gelen koşul matrisleri;

$$y(0) = 1 \Rightarrow X(0) \bar{S} \bar{A} = -1 \Rightarrow [1 \quad 0 \quad 0; \quad 1],$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow X(0) B \bar{S} \bar{A} = 0 \Rightarrow [0 \quad 1 \quad 1; \quad 0],$$

ya da genişletilmiş koşul matrisi;

$$[\bar{U}; \bar{\lambda}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0; & 1 \\ 0 & 1 & 1; & 0 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Böylece probleme ait genişletilmiş çözüm matrisi;

$$[\bar{\tilde{W}}; \bar{\tilde{F}}] = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}; & 2 \\ 1 & 0 & 0; & 1 \\ 0 & 1 & 1; & 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde olacaktır. Bu matris denklem sisteminin çözümüyle, artan faktöriyel fonksiyonlarına dayalı bilinmeyen katsayılar matrisi

$$\bar{A} = [1 \quad -1 \quad 1]^T$$

olarak bulunur. $y_2(x)$, tam çözümü $y_2(x) = x^2 + 1$ hesaplanmış olur.

Örnek 4.1.7. Burada Örnek 4.1.4.'de verilen problemin, $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ aralığında,

$$f(x) = e^x - e^{2x+1} + 1$$

olacak şekilde $y(0) = y'(0) = 1$ başlangıç koşulları altında çözümlerini arayacağız.

Problemin tam çözümü ise $y(x) = e^x$ dir. $N=2$ için azalan faktöriyel fonksiyonlarına dayalı

$$y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 \underline{a}_n(x) \Rightarrow y_2(x) = \underline{X}(x) \underline{S} \underline{A}, \left(0 \leq x \leq \frac{1}{2}\right)$$

formundaki çözümleri aranacaktır. $N=2$ için sıralama noktaları

$$\left\{x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{2}\right\}$$

olarak hesaplanır. Problemin temel matris denklemi;

$$\left\{ \sum_{k=0}^2 \sum_{j=0}^0 \underline{P}_{kj} \underline{X}_{kj} \underline{B}^k - \sum_{r=0}^1 \sum_{s=0}^0 \overline{\underline{X}} \underline{K}_{rs} \overline{\underline{Q}}_{rs} \underline{B}^r \right\} \underline{S} \underline{A} = \underline{F} \Rightarrow \underline{W} \underline{A} = \underline{F} \Leftrightarrow [\underline{W}; \underline{F}]$$

şeklindedir. Burada;

$$\underline{W} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -\frac{43}{32} - \sqrt[4]{e} & -\frac{13}{8} - \frac{5}{8} \sqrt[4]{e} \\ 1 & -\frac{5}{4} - \sqrt{e} & -\frac{47}{16} - \frac{1}{2} \sqrt{e} \end{bmatrix}, \underline{F} = \begin{bmatrix} 2-e \\ 1 + \sqrt[4]{e} - \sqrt{e^3} \\ 1 + \sqrt{e} - e^2 \end{bmatrix}$$

olup, probleme karşılık gelen $[\underline{W}; \underline{F}]$ matrisi;

$$[\underline{W}; \underline{F}] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & ; & 2-e \\ 1 & -\frac{43}{32} - \sqrt[4]{e} & -\frac{13}{8} - \frac{5}{8} \sqrt[4]{e} & ; & 1 + \sqrt[4]{e} - \sqrt{e^3} \\ 1 & -\frac{5}{4} - \sqrt{e} & -\frac{47}{16} - \frac{1}{2} \sqrt{e} & ; & 1 + \sqrt{e} - e^2 \end{bmatrix}$$

olup koşullara karşılık gelen matris;

$$y(0) = 1 \Rightarrow \underline{X}(0) \underline{S} \underline{A} = 1 \Rightarrow [1 \ 0 \ 0; \ 1]$$

ve

$$y'(0) = 1 \Rightarrow \underline{X}(0) \underline{B} \underline{S} \underline{A} = 1 \Rightarrow [0 \ 1 \ 1; \ 1]$$

biçiminde elde edilir. Sonuç olarak koşul matrisi,

$$[\underline{U}_j; \underline{\lambda}_j] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0; & 1 \\ 0 & 1 & 1; & 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Böylece probleme ait arttırılmış matris;

$$[\underline{\tilde{W}}; \underline{\tilde{F}}] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1; & 2-e \\ 1 & 0 & 0; & 1 \\ 0 & 1 & 1; & 1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Bu matrise karşılık gelen lineer cebirsel denklemin çözülmesiyle bilinmeyen katsayılar matrisi

$$\underline{A} = [1 \quad e-2 \quad 3-e]^T ;$$

olarak bulunur. Sonuç olarak $N=2$ için $y_2(x)$ yaklaşık çözümü

$$y_2(x) = X(x) \underline{S} \underline{A} = 1 + x + (3-e)x^2 \cong 1 + x + 0.2817181715409549x^2$$

şeklinde bulunur. Azalan faktöriyel fonksiyonlarına dayalı yaklaşık çözümler $N = 3, 4, 5$ için aşağıdaki gibi hesaplanmıştır;

$$y_3(x) = 1 + x + 0.5957433041553974x^2 + 0.31402513261444315x^3,$$

$$y_4(x) = 1 + 1.0000000000000004x + 0.543786942380469x^2 + 0.22671219528274839x^3 + 0.035356575556762214x^4,$$

$$y_5(x) = 1 + 1.00000000000000075x + 0.49428312966114785x^2 + 0.16041039806044544x^3 + 0.036571796198957875x^4 + 0.01558276386080765x^5$$

Benzer şekilde $N=2$ için artan faktöriyel fonksiyonlarına dayalı

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N \overline{a_n}(x)^{\overline{n}} \Rightarrow y_2(x) = X(x) \overline{S^*} \overline{A}$$

formundaki çözümleri aranacaktır. Burada

$$\overline{S^*} = \begin{bmatrix} S_1(0,0) & -S_1(1,0) & S_1(2,0) \\ 0 & S_1(1,1) & -S_1(2,1) \\ 0 & 0 & S_1(2,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi kullanılmıştır. Probleme karşılık gelen $[\overline{\mathbf{W}}; \overline{\mathbf{F}}]$ matrisi,

$$\overline{\mathbf{W}}\overline{\mathbf{A}} = \overline{\mathbf{F}} \Leftrightarrow [\overline{\mathbf{W}}; \overline{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & ; & 2-e \\ 1 & -\frac{43}{32}-\sqrt[4]{e} & \frac{17}{16}+\frac{11}{18}\sqrt[4]{e} & ; & 1+\sqrt[4]{e}-\sqrt{e^3} \\ 1 & -\frac{5}{4}-\sqrt{e} & -\frac{7}{16}+\frac{3}{2}\sqrt{e} & ; & 1+\sqrt{e}-e^2 \end{bmatrix}$$

olup koşullara karşılık gelen matris;

$$y(0)=1 \Rightarrow \mathbf{X}(0)\overline{\mathbf{S}}^*\overline{\mathbf{A}}=1 \Rightarrow [1 \ 0 \ 0; \ 1]$$

ve

$$y'(0)=1 \Rightarrow \mathbf{X}(0)\overline{\mathbf{B}}\overline{\mathbf{S}}^*\overline{\mathbf{A}}=1 \Rightarrow [0 \ 1 \ -1; \ 1]$$

ya da kısaca koşul matrisi,

$$[\overline{\mathbf{U}}_j; \overline{\lambda}_j] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0; & 1 \\ 0 & 1 & -1; & 1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Böylece probleme ait arttırılmış sonuç matrisi;

$$[\overline{\mathbf{W}}; \overline{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3; & 2-e \\ 1 & 0 & 0; & 1 \\ 0 & 1 & -1; & 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde elde edilir. Bu matrise karşılık gelen lineer cebirsel denklemin çözülmesiyle bilinmeyen katsayılar matrisi

$$\overline{\mathbf{A}} = [1 \ 4-e \ 3-e]^T$$

olarak bulunur. Katsayıları çözüm serisinde yerine yazıldığında $y_2(x)$ yaklaşık çözümüne

$$y_2(x) = \mathbf{X}(x)\overline{\mathbf{B}}\overline{\mathbf{S}}^*\overline{\mathbf{A}} = 1+x+(3-e)x^2 \cong 1+x+0.2817181715409549x^2$$

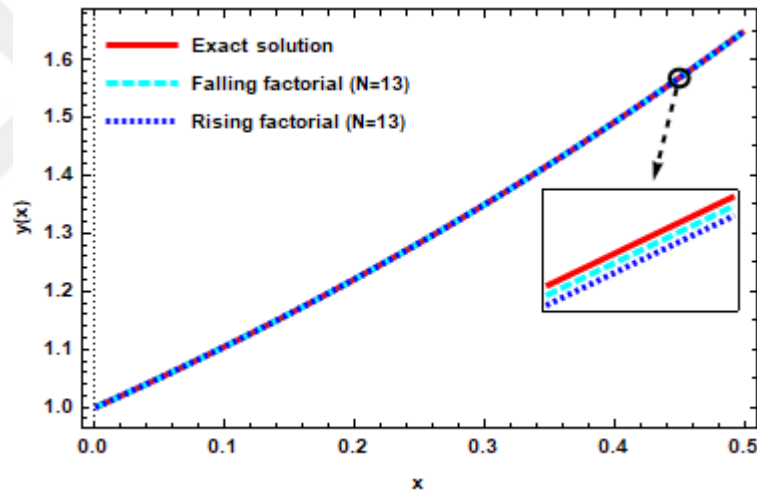
ulaşılır. Burada $N=3,4,5$ için artan faktöriyel fonksiyonlarına dayalı yaklaşık çözümler aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$y_3(x) = 1+x+0.5957433041553981x^2+0.3140251326144428x^3,$$

$$y_4(x) = 1 + 0.9999999999999972x + 0.5437869423804604x^2 + 0.2267121952827308x^3 + 0.03535657555676802x^4,$$

$$y_5(x) = 1 + 1.00000000000000202x + 0.49428312966114263x^2 + 0.16041039806045695x^3 + 0.03657179619894591x^4 + 0.015582763860805832x^5$$

olarak bulunur. Faktöriyel fonksiyonlarına dayalı matris sıralama metodu ile elde edilen yaklaşık çözümler ile problemin tam çözümü Şekil 4.1. de karşılaştırılmıştır. Şekil 4.1. den görüleceği üzere problemin tam çözümü ile karşılaştırıldığında, azalan faktöriyel polinomlarına dayalı matris sıralama metodu ile elde edilen yaklaşık çözümler, artan faktöriyel polinomlarına dayalı matris sıralama metodu ile elde edilen yaklaşık çözümlerden daha yakın sonuçlar vermiştir.



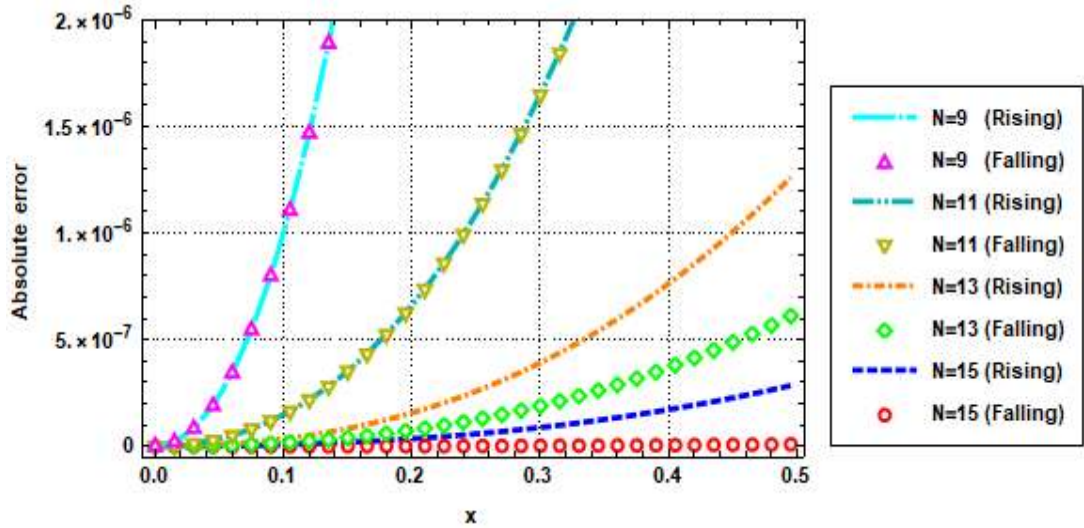
Şekil 4.1. Örnek 4.1.7. 'nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

Örnek 4.1.7. probleminin faktöriyel polinomlarına dayalı matris sıralama metodu ile farklı N değerleri için elde edilen yaklaşık çözümlerinin mutlak hataları Tablo 4.1. de kıyaslanmıştır. Tablo 4.1. den görülebileceği üzere $N = 15$ için azalan faktöriyel fonksiyonlarına dayalı matris sıralama metodu ile elde edilen mutlak hata, artan faktöriyel fonksiyonlarına dayalı matris sıralama metodu ile elde edilen mutlak hatadan daha küçüktür.

Tablo 4.1. Örnek 4.1.7. için mutlak hatalar

x	Azalan faktöriyel fonksiyonları				Artan faktöriyel fonksiyonları			
	N=9	N=11	N=13	N=15	N=9	N=11	N=13	N=15
0.1	9.98E-07	1.48E-07	1.70E-08	2.63E-10	9.98E-07	1.48E-07	3.52E-08	7.96E-09
0.2	4.45E-06	6.61E-07	7.63E-08	1.17E-09	4.45E-06	6.63E-07	1.57E-07	3.55E-08
0.3	1.11E-05	1.65E-06	1.90E-07	2.93E-09	1.11E-05	1.65E-06	3.92E-07	8.86E-08
0.4	2.16E-05	3.21E-06	3.70E-07	5.71E-09	2.16E-05	3.22E-06	7.64E-07	1.72E-07
0.5	3.66E-05	5.43E-06	6.27E-07	9.66E-09	3.66E-05	5.44E-06	1.29E-06	2.92E-07

Şekil 4.2. de farklı N değerleri için azalan faktöriyel fonksiyonlarına dayalı matris sıralama metodu ile elde edilen mutlak hatalar ve artan faktöriyel fonksiyonlarına dayalı matris sıralama metodu ile elde edilen mutlak hatalar karşılaştırılmıştır. Şekil 4.2. den görülebileceği üzere N değerleri arttıkça elde edilen sonuçlar iyileşmektedir.

**Şekil 4.2.** Örnek 4.1.7. için mutlak hatalar

Nümerik çözümler için yakınsaklık kriteri kullanılarak $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ için aşağıdaki

şekilde hata analizi yapılabilir:

$$\|R_{N+1}(x)\| = \sup \left\{ \left| \sum_{i=0}^N \Omega_i x^i \right| : x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \right\} \leq \sup \left\{ \sum_{i=0}^N |\Omega_i x^i| : x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \right\} = \left| R_{N+1} \left(\frac{1}{2} \right) \right|$$

ve

$$\left| R_{N+1} \left(\frac{1}{2} \right) \right| \leq \tilde{s}_N \left| R_N \left(\frac{1}{2} \right) \right|.$$

Azalan faktöriyel fonksiyonlarına dayalı elde edilen yaklaşık çözümler için rezidüel hata dizisi aşağıdaki şekilde hesaplanabilir:

$$\tilde{s}_N = \left\{ \frac{\left| R_3 \left(\frac{1}{2} \right) \right|}{\left| R_2 \left(\frac{1}{2} \right) \right|}, \frac{\left| R_4 \left(\frac{1}{2} \right) \right|}{\left| R_3 \left(\frac{1}{2} \right) \right|}, \frac{\left| R_5 \left(\frac{1}{2} \right) \right|}{\left| R_4 \left(\frac{1}{2} \right) \right|}, \dots, \frac{\left| R_{10} \left(\frac{1}{2} \right) \right|}{\left| R_9 \left(\frac{1}{2} \right) \right|}, \frac{\left| R_{11} \left(\frac{1}{2} \right) \right|}{\left| R_{10} \left(\frac{1}{2} \right) \right|}, \frac{\left| R_{12} \left(\frac{1}{2} \right) \right|}{\left| R_{11} \left(\frac{1}{2} \right) \right|}, \frac{\left| R_{13} \left(\frac{1}{2} \right) \right|}{\left| R_{12} \left(\frac{1}{2} \right) \right|}, \frac{\left| R_{14} \left(\frac{1}{2} \right) \right|}{\left| R_{13} \left(\frac{1}{2} \right) \right|}, \frac{\left| R_{15} \left(\frac{1}{2} \right) \right|}{\left| R_{14} \left(\frac{1}{2} \right) \right|}, \dots \right\}$$

$$\tilde{s}_N = \{0.003679, 0.958115, 0.304495, \dots, 0.419787, 0.267641, 0.205494, 0.614928, 0.197109, 0.079913, \dots\}$$

Burada, $\left\{ R_N \left(\frac{1}{2} \right) \right\}_{N=2}^{\infty}$ serisi $\left| R_{N+1} \left(\frac{1}{2} \right) \right| \leq \tilde{s}_N \left| R_N \left(\frac{1}{2} \right) \right|$ eşitsizliğini $0 < \tilde{s}_N < 1$

aralığında sağlamaktadır. Bu nedenle, rezidüel hata fonksiyonu serisi yakınsaktır.

Benzer şekilde, artan faktöriyel fonksiyonlarına dayalı elde edilen yaklaşık çözümlerin rezidüel hata fonksiyonları dizisi aşağıdaki gibi elde edilmektedir:

$$\tilde{s}_N = \left\{ \frac{\left| R_3 \left(\frac{1}{2} \right) \right|}{\left| R_2 \left(\frac{1}{2} \right) \right|}, \frac{\left| R_4 \left(\frac{1}{2} \right) \right|}{\left| R_3 \left(\frac{1}{2} \right) \right|}, \frac{\left| R_5 \left(\frac{1}{2} \right) \right|}{\left| R_4 \left(\frac{1}{2} \right) \right|}, \dots, \frac{\left| R_{10} \left(\frac{1}{2} \right) \right|}{\left| R_9 \left(\frac{1}{2} \right) \right|}, \frac{\left| R_{11} \left(\frac{1}{2} \right) \right|}{\left| R_{10} \left(\frac{1}{2} \right) \right|}, \frac{\left| R_{12} \left(\frac{1}{2} \right) \right|}{\left| R_{11} \left(\frac{1}{2} \right) \right|}, \frac{\left| R_{13} \left(\frac{1}{2} \right) \right|}{\left| R_{12} \left(\frac{1}{2} \right) \right|}, \frac{\left| R_{14} \left(\frac{1}{2} \right) \right|}{\left| R_{13} \left(\frac{1}{2} \right) \right|}, \frac{\left| R_{15} \left(\frac{1}{2} \right) \right|}{\left| R_{14} \left(\frac{1}{2} \right) \right|}, \dots \right\}$$

$$\tilde{s}_N = \{0.003679, 0.958115, 0.304495, \dots, 0.419780, 0.268240, 0.121547, 0.999998, 0.606195, 0.369613, \dots\}$$

Bu nedenle, $0 < \overline{s}_N < 1$ olduğu için rezidüel hata fonksiyon dizisi yakınsaktır.

Örnek 4.1.8. Dördüncü mertebeden lineer fonksiyonel Volterra tipi integro diferansiyel denklemini,

$$y^{(4)}(x) + \sin(x)y''\left(x - \frac{1}{100}\right) - \cos(x)y(x) = f(x) + \int_{\cos(x)}^{2\cos(x)} e^{x+t} y\left(t - \frac{1}{100}\right) dt,$$

$x \geq 0$ için $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$ ve $y'''(0) = 0$ başlangıç koşulları altında çözümünü araştıralım. Burada

$$\begin{aligned} f(x) = & \cos(x) - \cos^2(x) - \sin(x)\cos\left(\frac{1}{100} - x\right) \\ & - \frac{1}{2}e^{x+\cos(x)}\left(\sin\left(\frac{1}{100} - \cos(x)\right) - \cos\left(\frac{1}{100} - \cos(x)\right)\right) \\ & - \frac{1}{2}e^{x+\cos(x)}e^{\cos(x)}\left(\cos\left(\frac{1}{100} - 2\cos(x)\right) - \sin\left(\frac{1}{100} - 2\cos(x)\right)\right) \end{aligned}$$

biçimindedir ve problemin tam çözümü ise $y(x) = \cos(x)$ dir. Problemin temel matris denklemini,

$$\begin{aligned} & P_{00}(x)y^{(0)}(h_{00}(x)) + P_{20}(x)y^{(2)}(h_{20}(x)) + P_{40}(x)y^{(4)}(h_{40}(x)) \\ & = f(x) + \int_{u_{00}}^{v_{00}} K_{00}(x,t)y^{(0)}(g_{00}(t))dt \end{aligned}$$

biçiminde açık halde yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned} P_{00}(x) = & -\cos(x), \quad P_{20}(x) = \sin(x), \quad P_{40}(x) = 1, \quad h_{00}(x) = x, \quad h_{20}(x) = x - \frac{1}{100}, \\ h_{40}(x) = & x, \quad u_{00}(x) = \cos(x), \quad v_{00}(x) = 2\cos(x), \quad K_{00}(x,t) = e^{x+t}, \quad g_{00}(t) = t - \frac{1}{100}. \end{aligned}$$

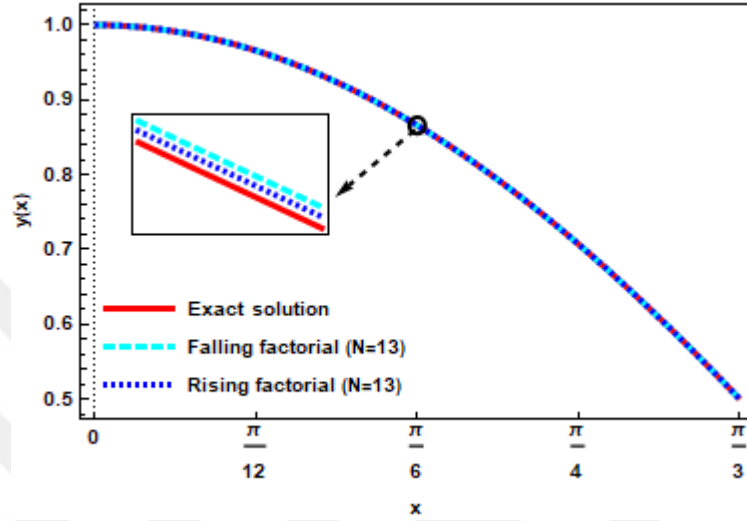
Çalışmanın 3.2.1. kısmında yer verilen metot takip edilirse farklı N değerleri için yaklaşık çözümlere ulaşılabilir. Problemin azalan faktöriyel fonksiyonlarına dayalı matris sıralama metodu için temel matris denklemini aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\underline{W} = \{P_{00}X_{00}B^0 + P_{20}X_{20}B^2 + P_{40}X_{40}B^4 - \overline{X}K_{00}\overline{Q_{00}}B^0\}\underline{S}.$$

Problemin artan faktöriyel fonksiyonlarına dayalı matris sıralama metodu için temel matris denklemini aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\overline{W} = \{P_{00}X_{00}B^0 + P_{20}X_{20}B^2 + P_{40}X_{40}B^4 - \overline{X}K_{00}\overline{Q_{00}}B^0\}\overline{S}^*.$$

Şekil 4.3.'te Örnek 4.1.8.'de verilen problemin tam çözümü ile elde edilen yaklaşık çözümleri karşılaştırılmıştır. Şekil 4.3.'ten görülebileceği üzere artan faktöriyel fonksiyonlarına dayalı elde edilen yaklaşık çözümler, azalan faktöriyel fonksiyonlarına dayalı elde edilen yaklaşık çözümlerden, tam çözüme daha yakın bir sonuç vermektedir.



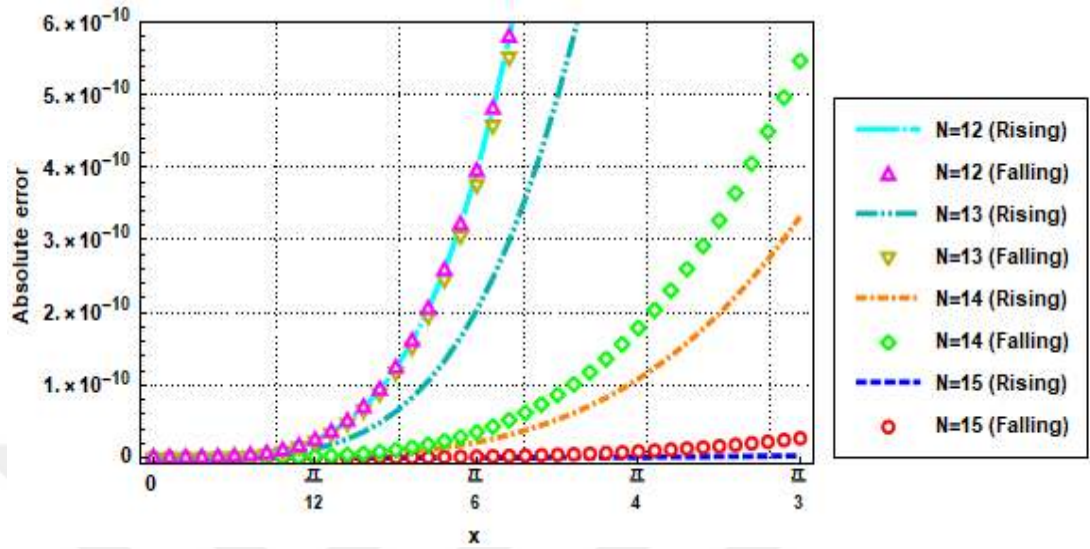
Şekil 4.3. Örnek 4.1.8.'in tam ve yaklaşık çözümlerinin kıyaslanması

Tablo 4.2. de faktöriyel fonksiyonlarına dayalı matris sıralama metodu kullanılarak elde edilen mutlak hatalar ile Mott matris sıralama metodu yardımıyla elde edilen mutlak hatalar karşılaştırılmıştır [60]. Tablo 4.2. den görülebileceği üzere faktöriyel fonksiyonlarına dayalı elde edilen sonuçlar Mott matris sıralama metoduna dayalı sonuçlardan daha iyi sonuç vermiştir.

Tablo 4.2. Örnek 4.1.8. için mutlak hatalar

x	Azalan faktöriyel fonksiyonları			Artan faktöriyel fonksiyonları			Mott matris sıralama metodu N=9 [60]
	N=9	N=11	N=12	N=9	N=11	N=12	
0.2	7.53E-09	1.35E-11	9.11E-12	7.53E-09	1.35E-11	9.08E-12	9.16E-09
0.4	1.23E-07	2.17E-10	1.49E-10	1.23E-07	2.16E-10	1.49E-10	1.50E-07
0.6	6.30E-07	1.07E-09	7.68E-10	6.30E-07	1.07E-09	7.66E-10	7.66E-07
0.8	1.97E-06	3.26E-09	2.42E-09	1.97E-06	3.26E-09	2.41E-09	2.40E-06
1	4.71E-06	7.56E-09	5.78E-09	4.71E-06	7.55E-09	5.76E-09	5.71E-06

Şekil 4.4. te farklı N değerleri için artan ve azalan faktöriyel fonksiyonlarına dayalı matris sıralama metodu ile elde edilen mutlak hatalar karşılaştırılmıştır.



Şekil 4.4. Örnek 4.1.8. için mutlak hatalar

Örnek 4.1.8. için faktöriyel fonksiyonlarına dayalı matris sıralama metodu ile elde edilen yaklaşık çözümlerin yakınsaklığı $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ aralığında aşağıdaki gibi hesaplanmıştır:

$$\|R_{N+1}(x)\| = \sup \left\{ \left| \sum_{i=0}^N \Omega_i x^i \right| : x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \right\} \leq \sup \left\{ \sum_{i=0}^N |\Omega_i x^i| : x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \right\} = \left| R_{N+1} \left(\frac{\pi}{3} \right) \right|$$

ve

$$\left| R_{N+1} \left(\frac{\pi}{3} \right) \right| \leq \tilde{s}_N \left| R_N \left(\frac{\pi}{3} \right) \right|.$$

Azalan faktöriyel fonksiyonlarına dayalı matris sıralama metodu ile elde edilen yaklaşık çözümlerin rezidüel hata dizisi aşağıdaki gibi hesaplanmıştır:

$$\tilde{s}_N = \left\{ \dots, \frac{\left| R_{11} \left(\frac{\pi}{3} \right) \right|}{\left| R_{10} \left(\frac{\pi}{3} \right) \right|}, \frac{\left| R_{12} \left(\frac{\pi}{3} \right) \right|}{\left| R_{11} \left(\frac{\pi}{3} \right) \right|}, \frac{\left| R_{13} \left(\frac{\pi}{3} \right) \right|}{\left| R_{12} \left(\frac{\pi}{3} \right) \right|}, \frac{\left| R_{14} \left(\frac{\pi}{3} \right) \right|}{\left| R_{13} \left(\frac{\pi}{3} \right) \right|}, \dots \right\}$$

$$\tilde{s}_N = \{ \dots, 0.112078, 0.024348, 0.032571, 0.849287, \dots \}$$

Bu nedenle, $0 < \tilde{s}_N < 1$ olduğu için rezidüel hata fonksiyonu yakınsaktır.

Benzer şekilde, artan faktöriyel fonksiyonlarına dayalı yaklaşık çözümlerin rezidüel hata dizisi aşağıdaki gibi hesaplanmıştır:

$$\tilde{s}_N = \left\{ \dots, \frac{\left| R_{11}\left(\frac{\pi}{3}\right) \right|}{\left| R_{10}\left(\frac{\pi}{3}\right) \right|}, \frac{\left| R_{12}\left(\frac{\pi}{3}\right) \right|}{\left| R_{11}\left(\frac{\pi}{3}\right) \right|}, \frac{\left| R_{13}\left(\frac{\pi}{3}\right) \right|}{\left| R_{12}\left(\frac{\pi}{3}\right) \right|}, \frac{\left| R_{14}\left(\frac{\pi}{3}\right) \right|}{\left| R_{13}\left(\frac{\pi}{3}\right) \right|}, \dots \right\}$$

$$\tilde{s}_N = \{ \dots, 0.112066, 0.024397, 0.175996, 0.181868, \dots \}$$

Böylece, $0 < \tilde{s}_N < 1$ olur. Rezidüel hata fonksiyonlar dizisi bir Cauchy dizisidir ve bu nedenle yakınsaktır.

Örnek 4.1.9. Birinci mertebeden değişken sınırlı,

$$y'(x) - y(x-1) = \int_{x-1}^x y(t) dt, \quad x \geq 0$$

gecikmeli lineer Volterra tipi integro diferansiyel denkleminin, $y(0) = 1$ başlangıç koşulu altında yaklaşık çözümlerini inceleyeceğiz. Problemin tam çözümü $y(x) = e^x$ dir. Burada $f(x) = 0$ olmak üzere $N = 2$ için sırasıyla azalan faktöriyel fonksiyonlarına dayalı

$$y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 \underline{a}_n(x)_{\underline{n}}, \quad (0 \leq x \leq 1)$$

formunda çözümler arayacağız. Problemin sıralama noktaları $N = 2$ için

$$\left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1 \right\}$$

olarak hesaplanmıştır. Problemin temel matris denkleminin açık hali,

$$P_{00}(x) y^{(0)}(h_{00}(x)) + P_{10}(x) y^{(1)}(h_{10}(x)) = f(x) + \int_{u_{00}}^{v_{00}} K_{00}(x, t) y^{(0)}(g_{00}(t)) dt$$

burada

$$\begin{aligned} P_{00}(x) &= -1, P_{10}(x) = 1, P_{20}(x) = 1, h_{00}(x) = x-1, h_{10}(x) = x, \\ u_{00}(x) &= x-1, v_{00}(x) = x, K_{00}(x, t) = 1, g_{00}(t) = t. \end{aligned}$$

şeklindedir. Böylece problemin temel matris denkleminin kompakt formu,

$$\left\{ \sum_{k=0}^1 \sum_{j=0}^0 \mathbf{P}_{kj} \mathbf{X}_{kj} \mathbf{B}^k - \sum_{r=0}^0 \sum_{s=0}^0 \bar{\mathbf{X}} \bar{\mathbf{K}}_{rs} \bar{\mathbf{Q}}_{rs} \mathbf{B}^r \right\} \underline{\mathbf{S}} \underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{F}}$$

biçimindedir. Probleme karşılık gelen $[\underline{\mathbf{W}}; \underline{\mathbf{F}}]$ matrisi;

$$[\underline{\mathbf{W}}; \underline{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} -2 & 5/2 & -23/6 & ; & 0 \\ -2 & 3/2 & -5/6 & ; & 0 \\ -2 & 1/2 & 7/6 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

formundadır. Probleme ait koşullara karşılık gelen koşul matrisi,

$$y(0) = 1 \Rightarrow \mathbf{X}(0) \underline{\mathbf{S}} \underline{\mathbf{A}} = 1 \Rightarrow [1 \quad 0 \quad 0; \quad 1]$$

şeklindedir. Probleme ait arttırılmış sonuç matrisi,

$$[\tilde{\underline{\mathbf{W}}}; \tilde{\underline{\mathbf{F}}}] = \begin{bmatrix} -2 & 5/2 & -23/6 & ; & 0 \\ -2 & 3/2 & -5/6 & ; & 0 \\ 1 & 0 & 0 & ; & 1 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanmıştır. Burada arttırılmış sonuç matrisi $[\tilde{\underline{\mathbf{W}}}; \tilde{\underline{\mathbf{F}}}]$ ye karşılık gelen lineer cebirsel denklem sisteminin çözülmesiyle bilinmeyen katsayılar matrisi,

$$\underline{\mathbf{A}} = [1 \quad 1/6 \quad 6/11]^T$$

olarak hesaplanır.

$N = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ için elde edilen azalan faktöriyel fonksiyonlarına dayalı yaklaşık çözümler aşağıda sırasıyla verilmiştir:

$$y_2(x) = 0.54545454545454545454545454545455x^2 + 1.0909090909090909090909090909091x + 1,$$

$$y_3(x) = 0.19367854741089441829186281102892x^3 + 0.53261600537995965030262273032952x^2 + 0.98722259583053127101546738399462x + 1,$$

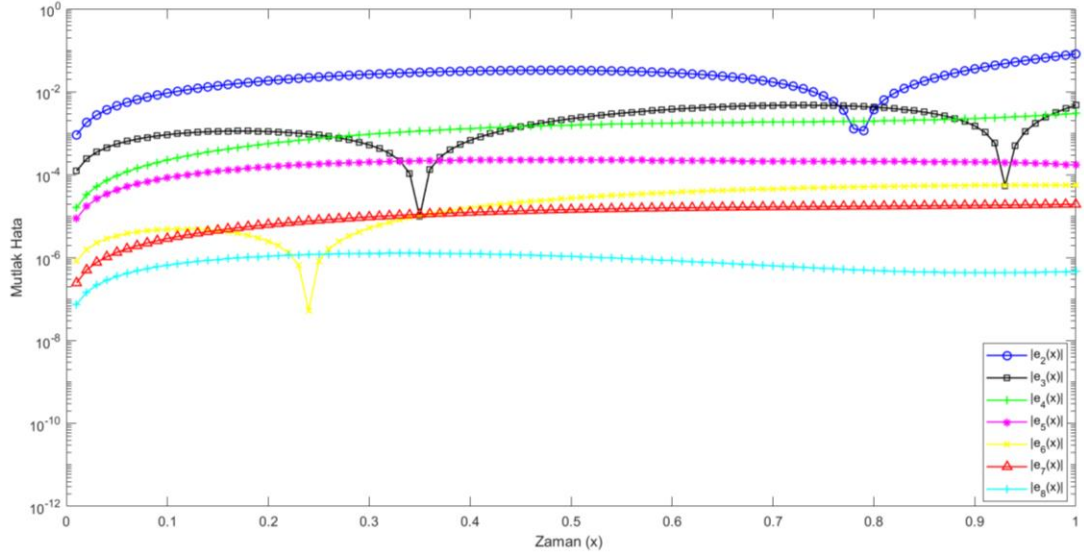
$$y_4(x) = 0.050080859721425217799572225989879x^4 + 0.17528300902498826229850279096458x^3 + 0.49141843601648494965830246752569x^2 + 0.99848714069591527987897125567322x + 1,$$

$$y_5(x) = 0.01024802570717183239357161994576x^5 + \\ 0.043554109255481220086547722303294x^4 + \\ 0.16379761088630844997893198922156x^3 + \\ 0.49997555418867983129116439044992x^2 + \\ 1.000878383903426233070277362458x + 1,$$

$$y_6(x) = 0.0017332924365300022423452830366841x^6 + \\ 0.0086664621824835193913960651457273x^5 + \\ 0.040924960306224727676904784345879x^4 + \\ 0.16670902948298171354635233143426x^3 + \\ 0.5003912283069980419802913473859x^2 + \\ 0.99991280120743662729321243887171x + 1,$$

$$y_7(x) = 0.00025024689039570598017916958077933x^7 + \\ 0.0014389196181400001612986361276825x^6 + \\ 0.00818217956912376925262750382295x^5 + \\ 0.041687333512079398063852192501955x^4 + \\ 0.16678937749958324841467738330891x^3 + \\ 0.49993843674603677200950213599384x^2 + \\ 0.99997589452639248659010506870004x + 1,$$

$$y_8(x) = 0.000031531893177463190375796331377245x^8 + \\ 0.00020495730173116102163996532503631x^7 + \\ 0.0013634259005523790924101906751886x^6 + \\ 0.0083392002474042051230179034559953x^5 + \\ 0.041696953237101311558828083125849x^4 + \\ 0.16664622350884622010601041064426x^3 + \\ 0.49999248218649758828237630869928x^2 + \\ 1.0000075199840439330294800113208x + 1.$$



Şekil 4.5. Örnek 4.1.9.'un mutlak hataları

$N = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ için problemin rezidüel hataları sırasıyla aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır:

$$R_2(x) = 0.090909090909090909090909090909091,$$

$$R_3(x) = 0.010759919300605245460659045057162,$$

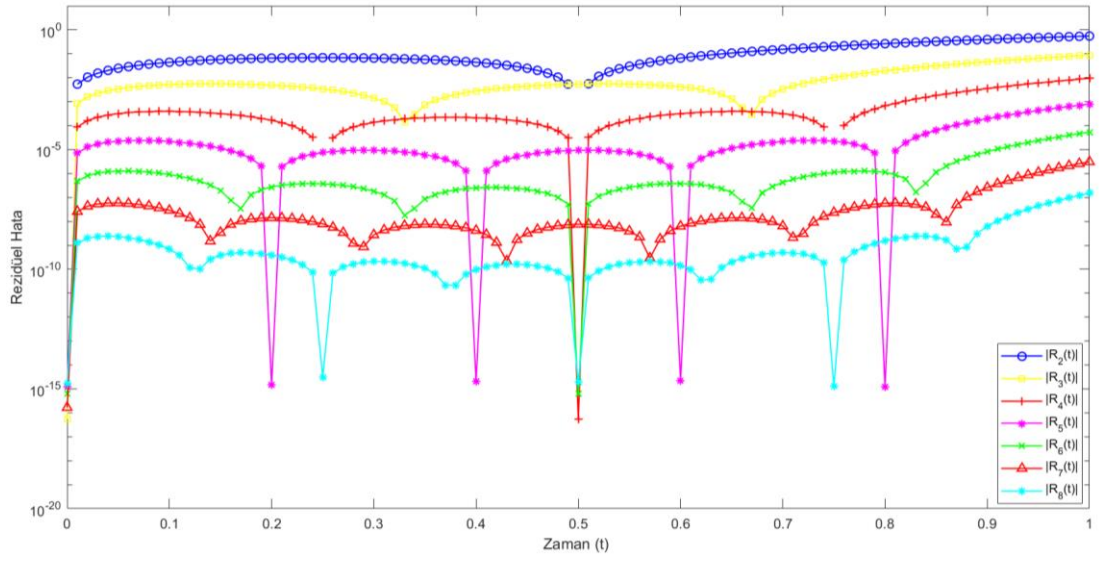
$$R_4(x) = 0.00073034587093745109291042829568574,$$

$$R_5(x) = 0.000051923330248340379688976042871218,$$

$$R_6(x) = 0.0000026111474831928157904124633757549,$$

$$R_7(x) = 0.00000013311872011068968621973273607006,$$

$$R_8(x) = 0.0000000052871741967132002460093089167361.$$



Şekil 4.6. Örnek 4.1.9.'un rezidüel hataları

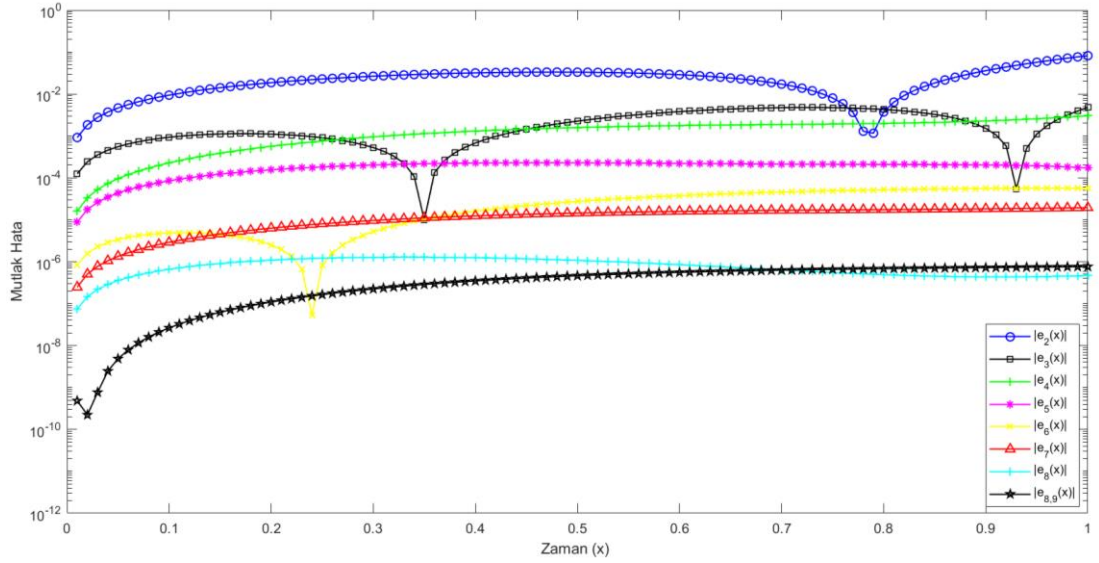
Örnek 4.1.9.'un düzeltilmiş mutlak hatasını bulmak için hata denklemi

$$e'_8(x) - e_8(x-1) = \int_{x-1}^x e_8(t) dt, \quad x \geq 0, \quad e(0) = 0.$$

formunda yazılır. Gerekli hesaplamalar $M = 9$ için yapıldığında, düzeltilmiş mutlak hataları Şekil 4.7. de ve düzeltilmiş çözüm,

$$\begin{aligned} y_{8,9}(x) = & 0.0000035254369778016429276502538558979x^9 + \\ & 0.000025559413313151460434946397881628x^8 + \\ & 0.00019474771738112375067913766002459x^7 + \\ & 0.0013900828490019941827387627703017x^6 + \\ & 0.0083392723378694624535579129606449x^5 + \\ & 0.04166133709871196292044356890294x^4 + \\ & 0.16666437358524642829487802386801x^3 + \\ & 0.50000377727188031809039687591162x^2 + \\ & 0.99999991432150556018237735032839x + 1 \end{aligned}$$

olarak bulunur.



Şekil 4.7. Örnek 4.1.9.'un düzeltilmiş mutlak hataları

4.2. Yüksek Mertebeden Genelleştirilmiş Lineer Fonksiyonel İntegro Diferansiyel Denklemler İçin Stirling Polinomlarına Dayalı Matris Sıralama Metodu İle İlgili Örnekler

Örnek 4.2.1. [61] Birinci mertebeden değişken katsayılı değişken gecikmeli

$$y'(x) = 3x - x^2 + x^2 y(x) - y(x - x^2) + xy(x - x^2 - 1), \quad (0 \leq x \leq 1)$$

diferansiyel denkleminin $y(0) = -1$ başlangıç koşulu altındaki çözümlerini Stirling polinomlarına dayalı matris sıralama metodu ile arayalım. Burada problemin tam çözümü $y(x) = x - 1$ dir. Denklemin genel formu

$$\sum_{k=0}^1 \sum_{j=0}^2 P_{kj}(x) y^{(k)}(h_{kj}(x)) = f(x)$$

şeklindedir. Burada bilinen fonksiyonlar

$$P_{00}(x) = -x^2, P_{10}(x) = 1, P_{01}(x) = 1, P_{02}(x) = -x, h_{00}(x) = x, h_{10}(x) = x, \\ h_{02}(x) = x - x^2 - 1, h_{01}(x) = x - x^2, f(x) = 3x - x^2$$

olarak görülmektedir. $N=2$ için Stirling seri çözümünü bulmak üzere sıralama noktalarını,

$$x_i = a + \left(\frac{b-a}{N} \right) i, \quad (i = 0, 1, 2) \Rightarrow \left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1 \right\}$$

olarak belirleriz. Bu sıralanma noktalarını kullanarak, verilen prosedüre göre, problemin temel matris denklemi

$$\left\{ \sum_{k=0}^1 \sum_{j=0}^2 \mathbf{P}_{kj} \mathbf{X}_{kj} \mathbf{B}^k \right\} \mathbf{T} \mathbf{A} = \mathbf{F}$$

olarak kurulur. Gerekli işlemlerden sonra matris bağıntılarının açık halleri,

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{4} \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_{00} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_{10} = \mathbf{P}_{01} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_{02} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{X}_{10} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(0) \\ \mathbf{X}\left(\frac{1}{2}\right) \\ \mathbf{X}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_{00} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{X}_{01} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{X}_{02} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -\frac{3}{4} & \frac{9}{16} \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Yukarıda açık halleri verilen matrisleri, temel matris denkleminde yerine yazarsak ve düzenlersek,

$$[\mathbf{W}; \mathbf{F}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{7}{12}; & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{7}{8} & \frac{325}{128}; & \frac{5}{4} \\ 1 & 2 & \frac{23}{12}; & 2 \end{bmatrix}$$

arttırılmış matrisini elde ederiz. Diğer yandan, başlangıç koşulunun matris formu ise

$$[\mathbf{U}; \boldsymbol{\lambda}] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6}; & -1 \end{bmatrix}$$

biçiminde elde edilir. Sonuç matrisi ve koşul matrisi göz önüne alınarak, yeni arttırılmış sonuç matris formu,

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{7}{12}; & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6}; & -1 \\ 1 & 2 & \frac{23}{12}; & 2 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Bu matris denklem sistemi çözülürse bilinmeyen katsayılar matrisi

$$\mathbf{A} = [-2 \quad 2 \quad 0]^T$$

olur. Sonuç olarak, $N=2$ için;

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n S_n(x) = -2S_0(x) + 2S_1(x) = x - 1$$

çözümü elde edilir ki bu çözüm de problemin tam çözümüdür.

Örnek 4.2.2. Birinci mertebeden değişken katsayılı ve değişken gecikmeli

$$y'(x) - x^2 y(x) + y(x - x^2) - xy(x - x^2 - 1) = \frac{1}{2} + 3x - x^2 + \int_0^1 y(t) dt, \quad (0 \leq x, t \leq 1)$$

lineer Fredholm integro diferansiyel denkleminin, $y(0) = -1$ başlangıç koşulu altında, $N=2$ için Stirling polinomlarına dayalı matris sıralama metodu ile çözümünü araştıralım. Probleminin tam çözümü $y(x) = x - 1$ dir. Burada $N=2$ için Stirling seri çözümünü bulmak üzere sıralama noktalarını

$$x_i = a + \left(\frac{b-a}{N} \right) i, \quad (i = 0, 1, 2) \Rightarrow \left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1 \right\}$$

olarak belirleriz. Problemin temel matris denklemi;

$$\left\{ \sum_{k=0}^1 \sum_{j=0}^2 \mathbf{P}_{kj} \mathbf{X}_{kj} \mathbf{B}^k - \sum_{r=0}^0 \sum_{s=0}^0 \overline{\mathbf{X}} \mathbf{K}_{rs} \overline{\mathbf{Q}}_{rs} \mathbf{B}^r \right\} \mathbf{T} \mathbf{A} = \mathbf{F}; \quad \mathbf{W} \mathbf{A} = \mathbf{F} \Leftrightarrow [\mathbf{W}; \mathbf{F}]$$

olarak kurulur. Geliştirilen yöntemle göre gerekli işlemler yapıldığında, temel matris denkleminin arttırılmış matris formu,

$$[\mathbf{W}; \mathbf{F}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8}; & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1151}{384}; & \frac{7}{4} \\ 0 & \frac{5}{4} & -\frac{35}{24}; & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

ile probleme ait başlangıç koşulunun arttırılmış matris formu,

$$[U_0; \lambda_0] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6}; & -1 \end{bmatrix},$$

birleştirilerek, problemin yeni arttırılmış sonuç matrisi,

$$[\tilde{W}; \tilde{F}] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8}; & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6}; & -1 \\ 0 & \frac{5}{4} & \frac{35}{24}; & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Böylece, bu arttırılmış sonuç matrisinin çözümü bize Stirling polinomunun $A = [-2 \ 2 \ 0]^T$ katsayılar matrisini verir. Dolayısıyla Stirling polinomuna dayalı çözüm

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n S_n(x) \Rightarrow y_2(x) = -2S_0(x) + 2S_1(x)$$

veya

$$y_2(x) = x - 1$$

olarak elde edilir.

Örnek 4.2.3. İkinci mertebeden fonksiyonel sınırlı gecikmeli

$$(x^2 + 1)y''(0.2x) + xy'(x-1) - (x-1)y(x+2) + y(x) = f(x) + 2 \int_0^1 xy'(t)dt + \int_0^{\left(\frac{x+1}{2}\right)} (xt^2 + tx^2)y''(t)dt, \quad (0 \leq x, t \leq 1)$$

lineer Fredholm-Volterra integro diferansiyel denklemini, $y(0) = -1$ ve $y'(1) = 3$ başlangıç koşulları altında Stirling polinomlarına dayalı matris sıralama metodu ile çözelim. Burada $f(x) = -\frac{x^4}{3} - \frac{5x^3}{2} - x^2 - \frac{14x}{3} + 6$ olarak ele alındı. Öncelikle problemin yaklaşık çözümü, $N=2$ için

$$y_N(x) = \sum_{n=0}^2 a_n S_n(x)$$

ile tanımlı sonlu Stirling serisi formunda düşünüldü. Temel matris denklemindeki ifadeler,

$$P_{00}(x) = 1, P_{01}(x) = -(x-1), P_{10}(x) = x, P_{20}(x) = x^2 + 1,$$

$$v_{20}(x) = \frac{x}{2} + 1, K_{10}(x, t) = x, K_{20}(x, t) = xt^2 + tx^2$$

şeklinde verilmiştir. $N=2$ için sıralama noktaları $\left\{x_0=0, x_1=\frac{1}{2}, x_2=1\right\}$ şeklinde

düşünülmüş, Stirling matris sıralama metodu uygulandı. Problemin temel matris denklemleri açıkça,

$$\left\{P_{00}X_{00}B^0 + P_{01}X_{01}B^0 + P_{10}X_{10}B^1 + P_{20}X_{20}B^2 - \overline{X}\overline{K}_{10}\overline{Q}_{10}B^1 - \overline{X}\overline{K}_{20}\overline{Q}_{20}B^2\right\}TA = F$$

biçiminde yazılır. Gerekli işlemler yapıldıktan sonra matrislerin açık halleri,

$$P_{00} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_{01} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, P_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_{20} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$X_{00} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, X_{01} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & \frac{5}{2} & \frac{25}{4} \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}, X_{10} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, X_{20} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{10} & \frac{1}{100} \\ 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{25} \end{bmatrix},$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \overline{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \overline{K}_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\overline{Q}_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}, F = [6 \quad 37/12 \quad -5/2]^T$$

$$\overline{K}_{20} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \overline{Q}_{20} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 5/4 & 25/32 & 125/192 \\ 25/32 & 125/192 & 625/1024 \\ 125/192 & 625/1024 & 625/1024 \\ 3/2 & 9/8 & 9/8 \\ 9/8 & 9/8 & 81/64 \\ 9/8 & 81/64 & 243/160 \end{bmatrix},$$

olarak elde edilir. Başlangıç koşulları kullanılarak koşulların matris formu,

$$y(0) = -1 \Rightarrow [U_0; -1] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6}; & -1 \end{bmatrix} \text{ ve}$$

$$y'(1) = 3 \Rightarrow [U_1; \lambda_1] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{11}{2}; & 3 \end{bmatrix}$$

olur. Sonuç matrisi ve koşulların matris formları göz önüne alınarak arttırılmış matris formu,

$$[\tilde{W}; \tilde{F}] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 8/3; & 6 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6}; & -1 \\ 0 & 1/2 & 11/12; & 3 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Bu matris denklem sistemi çözülürse bilinmeyen katsayılar matrisi

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \frac{-4}{3} & 4 \end{bmatrix}^T$$

olur. Dolayısıyla, $N=2$ için,

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n S_n(x) = -1 + x + x^2$$

çözümü elde edilir ki bu çözüm de problemin tam çözümüdür. Benzer şekilde $N > 2$ seçilmesi durumunda da kullanılan aynı yöntemle tam çözüm elde edilebilir.

Örnek 4.2.4. Birinci mertebeden değişken katsayılı ve değişken gecikmeli

$$y'(x) - x^2 y(x) + y(x - x^2) = x - x^3$$

lineer fonksiyonel diferansiyel denklemini, $y(0) = -1$ başlangıç koşulu altındaki çözümünü inceleyelim.

Problemin tam çözümü $y(x) = x - 1$ dir. $N = 2$ için Stirling polinomlarına dayalı

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n S_n(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

formundaki çözümler aranacaktır. $N = 2$ için sıralama noktaları

$$\left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1 \right\}$$

olarak hesaplanır. Problemin temel matris denklemini kurmak için, önce genel hali ve terimlerin açık formları,

$$\sum_{k=0}^1 \sum_{j=0}^1 P_{kj}(x) y^{(k)}(h_{kj}(x)) = f(x),$$

$$\sum_{k=0}^1 \left(P_{k0}(x) y^{(k)}(h_{k0}(x)) + P_{k1}(x) y^{(k)}(h_{k1}(x)) \right) = f(x),$$

$$P_{00}(x) y^{(0)}(h_{00}(x)) + P_{01}(x) y^{(0)}(h_{01}(x)) + P_{10}(x) y^{(1)}(h_{10}(x)) + P_{11}(x) y^{(1)}(h_{11}(x)) = f(x)$$

şeklinde yazılır. Burada, bilinen terimler

$$P_{00}(x) = -x^2, P_{10}(x) = 1, P_{01}(x) = 1,$$

$$h_{00}(x) = x, h_{10}(x) = x, h_{01}(x) = x - x^2, f(x) = x - x^3$$

biçiminde yazılabilir. Problemin temel matris formu,

$$y(x) = S(x)A = X(x)TA,$$

$$y^{(k)}(x) = X(x)B^kTA, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m), \quad y^{(k)}(h_{kj}(x)) = X(h_{kj}(x))B^kTA,$$

$$X(h_{kj}(x)) = \begin{bmatrix} 1 & h_{kj}(x) & (h_{kj}(x))^2 & \dots & (h_{kj}(x))^N \end{bmatrix}$$

$$\sum_{k=0}^1 \sum_{j=0}^1 P_{kj} X_{kj} B^kTA = F,$$

$$\{P_{00}X_{00}B^0 + P_{01}X_{01}B^0 + P_{10}X_{10}B^1\}TA = F,$$

şeklindedir. Burada,

$$X_{00} = \begin{bmatrix} X(0) \\ X\left(\frac{1}{2}\right) \\ X(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad X_{01} = \begin{bmatrix} X(0) \\ X\left(\frac{1}{4}\right) \\ X(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_{10} = \begin{bmatrix} X(0) \\ X\left(\frac{1}{2}\right) \\ X(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_{00} = \begin{bmatrix} P_{00}(0) & 0 & 0 \\ 0 & P_{00}(1/2) & 0 \\ 0 & 0 & P_{00}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{01} = \mathbf{P}_{10} = \begin{bmatrix} P_{01}(0) & 0 & 0 \\ 0 & P_{01}(1/2) & 0 \\ 0 & 0 & P_{01}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f(0) \\ f\left(\frac{1}{2}\right) \\ f(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{8} \\ 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Probleme karşılık gelen $[\mathbf{W}; \mathbf{F}]$ matrisi;

$$[\mathbf{W}; \mathbf{F}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{7}{12}; & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{9}{8} & \frac{27}{32}; & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}; & 0 \end{bmatrix}$$

olup, koşullara karşılık gelen matris;

$$y(0) = -1 \Rightarrow [\mathbf{U}_0; \lambda_0] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6}; & -1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Böylece probleme ait arttırılmış matris;

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{7}{12}; & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6}; & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}; & 0 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Bu matrise karşılık gelen lineer cebirsel denklemin çözülmesiyle

$\mathbf{A} = [-2 \quad 2 \quad 0]^T$ katsayılar matrisi belirlenir; $y_2(x) = x - 1$ çözümü bulunur ki bu çözüm aynı zamanda problemin tam çözümüdür.

4.3. Yüksek Mertebeden Genelleştirilmiş Lineer Fonksiyonel İntegro Diferansiyel Denklemler İçin Genocchi Polinomlarına Dayalı Matris Sıralama Metodu İle İlgili Örnekler

Örnek 4.3.1. Birinci mertebeden değişken katsayılı fonksiyonel gecikmeli

$$y'(x) + (x+1)y'(e^x) + e^x y(x) - xy(e^x - 1) = 4 + 5x - e^x$$

diferansiyel denklemini, $y(0) = -1$ başlangıç koşulu altındaki çözümünü inceleyelim.

Burada problemin tam çözümü $y(x) = 2x - 1$ dir. $N=2$ için Genocchi polinomlarına dayalı

$$y(x) \cong \sum_{n=1}^3 a_n G_n(x) \Rightarrow y(x) = G(x)Y = X(x)MY$$

formundaki çözümler aranacaktır. $N=2$ için sıralama noktaları

$$\left\{ x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = 1 \right\}$$

olarak hesaplanır. Problemin genel formu,

$$\sum_{k=0}^1 \sum_{j=0}^1 P_{kj}(x) y^{(k)}(h_{kj}(x)) = f(x)$$

şeklindedir. Burada bilinen fonksiyonlar açıkça,

$$P_{00}(x) = e^x, P_{10}(x) = 1, P_{01}(x) = -x, P_{11}(x) = x+1, h_{00}(x) = x, h_{10}(x) = x,$$

$$h_{01}(x) = e^x - 1, h_{11}(x) = e^x, f(x) = 4 + 5x - e^x$$

biçiminde yazılabilir. Problemin temel matris denklemi,

$$\{P_{00}X_{00}B^0 + P_{10}X_{10}B^1 + P_{01}X_{01}B^0 + P_{11}X_{11}B^1\}MY = F$$

şeklindedir. Burada,

$$P_{00} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}, P_{01} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, P_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$X_{10} = \begin{bmatrix} X(0) \\ X\left(\frac{1}{2}\right) \\ X(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, X_{01} = \begin{bmatrix} X(0) \\ X\left(e^{\frac{1}{2}} - 1\right) \\ X(e-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \left(e^{\frac{1}{2}} - 1\right) & \left(e^{\frac{1}{2}} - 1\right)^2 \\ 1 & (e-1) & (e-1)^2 \end{bmatrix},$$

$$X_{00} = \begin{bmatrix} X(0) \\ X\left(\frac{1}{2}\right) \\ X(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} f(0) \\ f\left(\frac{1}{2}\right) \\ f(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 + \frac{5}{2} - e^{\frac{1}{2}} \\ 9 - e \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanan matrislerdir. Probleme karşılık gelen $[W; F]$ matrisi,

$$[W; F] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & ; & 3 \\ \left(e^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\right) & \left(\frac{13}{2} - e^{\frac{1}{2}}\right) & \left(\frac{-15}{2} + \frac{51}{4}e^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}e\right) & ; & \left(\frac{13}{2} - e^{\frac{1}{2}}\right) \\ (e-1) & (9-e) & (-9 + 21e - 3e^2) & ; & (9-e) \end{bmatrix}$$

olup, verilen koşula karşılık gelen genişletilmiş matris ise,

$$y(0) = -1 \Rightarrow [U_0; \lambda_0] = [1 \quad -1 \quad 0; \quad -1]$$

biçiminde olacaktır. Böylece probleme ait genişletilmiş matris

$$[\tilde{W}; \tilde{F}] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & ; & 3 \\ 1 & -1 & 0 & ; & -1 \\ (e-1) & (9-e) & (-9 + 21e - 3e^2); & (9-e) \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır. Bu sistemin çözümüyle bilinmeyen Genocchi katsayılar matrisi

$$Y = [0 \quad 1 \quad 0]^T$$

şeklinde bulunur. Böylece, Genocchi polinomlarına dayalı çözüm $y_2(x) = 2x - 1$ olarak elde edilir. Bu da verilen problemin tam çözümüdür.

Örnek 4.3.2. Birinci mertebeden değişken katsayılı fonksiyonel gecikmeli Volterra tipi,

$$y'(x) - x^2 y(x) + y(x - x^2) = (x - x^2) e^{-x} + \int_{x-x^2}^{x-\ln(x+1)} y(t) dt$$

integro diferansiyel denkleminin $y(0)=1$ başlangıç koşulu altındaki çözümlerini arayacağız. Burada $N=3$ için $0 \leq x \leq 1$ aralığında sıralama noktaları

$\left\{x_1=0, x_2=\frac{1}{2}, x_3=1\right\}$ olup, problemin tam çözümü de $y(x)=e^{-x}$ dir. $N=3$ için

Genocchi polinomlarına dayalı

$$y(x) \cong \sum_{n=1}^3 y_n G_n(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

formundaki çözümler aranacaktır. Çözümün bulunması için gerekli birkaç matris denkleminin formu,

$$y(x) = G(x)Y = X(x)MY; \quad y^{(k)}(x) = X(x)B^kMY,$$

$$X(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}^t, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanmıştır. Problemin temel denkleminin açık hali,

$$\sum_{k=0}^1 \sum_{j=0}^1 P_{kj}(x) y^{(k)}(h_{kj}(x)) = f(x) + \sum_{r=0}^0 \sum_{s=0}^0 \lambda_{rs} \int_{u_{rs}}^{v_{rs}} K_{rs}(x, t) y^{(r)}(h_{rs}(t)) dt,$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^1 P_{0j}(x) y^{(0)}(h_{0j}(x)) + P_{1j}(x) y^{(1)}(h_{1j}(x)) = f(x) + \lambda_{00} \int_{u_{00}}^{v_{00}} K_{00}(x, t) y^{(0)}(t) dt \\ & P_{00}(x) y^{(0)}(h_{00}(x)) + P_{10}(x) y^{(1)}(h_{10}(x)) + P_{01}(x) y^{(0)}(h_{01}(x)) + P_{11}(x) y^{(1)}(h_{11}(x)) \\ & = f(x) + \lambda_{00} \int_{u_{00}}^{v_{00}} K_{00}(x, t) y^{(0)}(t) dt \end{aligned}$$

Burada bilinen fonksiyonlar,

$$P_{00}(x) = -x^2, \quad P_{10}(x) = 1, \quad P_{01}(x) = 1, \quad h_{00}(x) = x, \quad h_{10}(x) = x, \quad h_{01}(x) = x - x^2,$$

$$f(x) = (x - x^2)e^{-x}, \quad K_{00}(x, t) = 1, \quad u_{00}(x) = x - x^2, \quad v_{00}(x) = x - \ln(x+1), \quad g_{00}(t) = t$$

şeklinde bulunmuştur. Problemin temel matris denklemi,

$$(P_{00}X_{00}B^0 + P_{10}X_{10}B^1 + P_{01}X_{01}B^0 - \lambda_{00}\bar{X}\bar{C}_{00}\bar{Q}_{00}B^0)MY = F,$$

$$W = (P_{00}X_{00}B^0 + P_{10}X_{10}B^1 + P_{01}X_{01}B^0 - \lambda_{00}\bar{X}\bar{C}_{00}\bar{Q}_{00}B^0)M$$

şeklindedir. Burada,

$$\mathbf{P}_{00} = \begin{bmatrix} P_{00}(0) & 0 & 0 \\ 0 & P_{00}(1/2) & 0 \\ 0 & 0 & P_{00}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{10} = \begin{bmatrix} P_{10}(0) & 0 & 0 \\ 0 & P_{10}(1/2) & 0 \\ 0 & 0 & P_{10}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{01} = \begin{bmatrix} P_{01}(0) & 0 & 0 \\ 0 & P_{01}(1/2) & 0 \\ 0 & 0 & P_{01}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_{00} = \begin{bmatrix} X(h_{00}(0)) \\ X(h_{00}(1/2)) \\ X(h_{00}(1)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{X}_{10} = \begin{bmatrix} X(h_{00}(0)) \\ X(h_{00}(1/2)) \\ X(h_{00}(1)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_{01} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/4 & 1/16 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(0) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(1/2) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X}(1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_{00} = [c_{ij}^{00}], c_{ij}^{00} = 1, (i, j = 0, 1, 2) \Rightarrow \mathbf{C}_{00} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{C}}_{00} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{00} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_{00} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{C}_{00} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_{00}(x) = \int_{u_{00}(x)}^{v_{00}(x)} \mathbf{X}^T(t) \mathbf{X}(g_{00}(t)) dt = \int_{x-x^2}^{x-\ln(x+1)} \mathbf{X}^T(t) \mathbf{X}(t) dt = \left[\frac{t^{m+n+1}}{m+n+1} \right]_{x-x^2}^{x-\ln(x+1)}$$

$$\mathbf{q}_{mn}^{00}(x) = \frac{(x-\ln(x+1))^{m+n+1} - (x-x^2)^{m+n+1}}{m+n+1}, (m, n = 0, 1, 2)$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_{00} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{00}(0) \\ \mathbf{Q}_{00}(1/2) \\ \mathbf{Q}_{00}(1) \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1/2) \\ f(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

olarak matrisler hesaplanmıştır. Probleme karşılık gelen $[W;F]$ matrisi,

$$[W;F] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3; & 0 \\ 0.9054651081 & 1.398098046 & -0.440564574; & \frac{1}{4}e^{\frac{-1}{2}} \\ -0.3068528194 & 0.2126941666 & 3.112345131; & 0 \end{bmatrix}$$

olup, verilen koşula karşılık gelen koşul matrisi ise,

$$y(0) = 1 \Rightarrow X(0)MY = 1 \Rightarrow [U_j; \lambda_j] = [1 \quad -1 \quad 0; \quad 1]$$

şeklindedir. Böylece problem ait genişletilmiş matris

$$[\tilde{W};\tilde{F}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3; & 0 \\ 1 & -1 & 0; & 1 \\ -0.3068528194 & 0.2126941666 & 3.112345131; & 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde olacaktır. Bu matris sisteminin çözümüyle bilinmeyen katsayılar matrisi bulunur ve problemin yaklaşık çözümü

$$y_2(x) = 0.39599816235606666303681322460761x^2 - x + 1$$

şeklinde hesaplanmış olur.

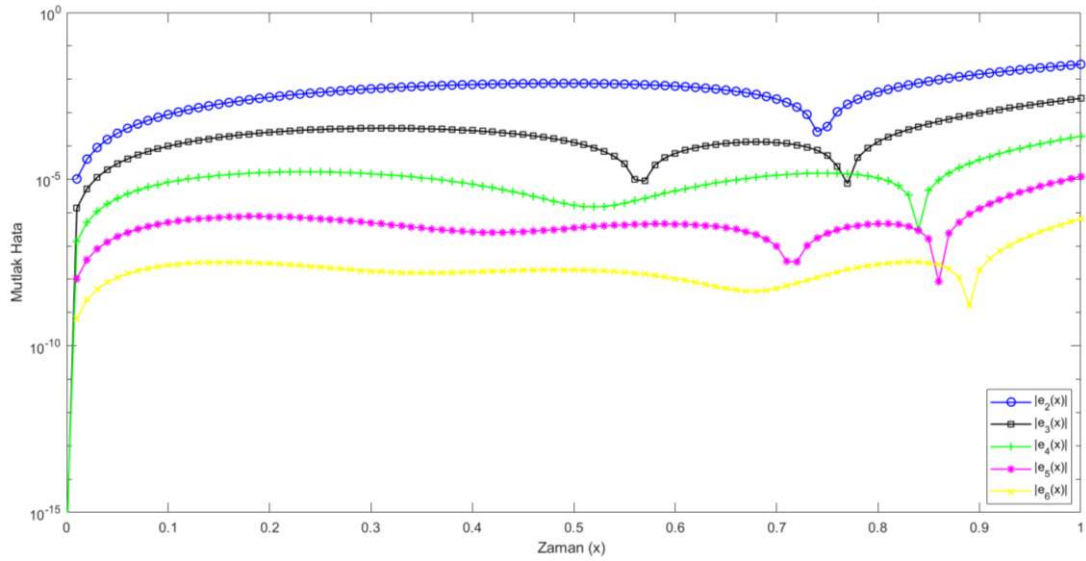
$N = 3, 4, 5, 6$ değerleri için problemin yaklaşık çözümleri aşağıdaki gibi hesaplanmış; mutlak hatalar da Şekil 4.12 de gösterilmiştir.

$$y_3(x) = -0.12081780051791024543916819311562x^3 + \\ 0.4860230027071027747442855115878x^2 - \\ 0.99999999999999986122212192185543x + \\ 0.99999999999999991673327315311326,$$

$$y_4(x) = 0.02886114684326103116407402637833x^4 - \\ 0.15937472629194573275901447573233x^3 + \\ 0.49858805240113508727706204126662x^2 - \\ 0.99999999999999989244714448943796x + \\ 0.99999999999999980571097069059761,$$

$$\begin{aligned}
y_5(x) = & -0.0056230868393107129570712698907187x^5 + \\
& 0.03946002815066533195558634572464x^4 - \\
& 0.16585773527122456456883714537298x^3 + \\
& 0.49988801547059724423183874053578x^2 - \\
& 1.000000000000000040766001685455x + \\
& 1.0000000000000000011926223897341,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_6(x) = & 0.00092058233066127562573346954089004x^6 - \\
& 0.0078401585999677673196987803816427x^5 + \\
& 0.041404429552202234323353413625313x^4 - \\
& 0.16659740262518681319084054570645x^3 + \\
& 0.49999264070448598518917743271928x^2 - \\
& 0.9999999999999997609334209669463x + \\
& 0.9999999999999998341170676097178
\end{aligned}$$



Şekil 4.8. Örnek 4.3.2.'nin mutlak hataları

4.4. İkinci Mertebeden Lineer Gecikmeli Neutral Integro Diferansiyel Denklemler İçin Shifted Legendre Polinomlarına Dayalı Matris Sıralama Metodu İle İlgili Örnekler

Örnek 4.4.1. Birinci mertebeden değişken katsayılı ve değişken gecikmeli

$$y'(x) - x^2 y(x) + y(x - x^2) - xy(x - x^2 - 1) = 3x - x^2, \quad (0 \leq x \leq 1)$$

diferansiyel denkleminin $y(0) = -1$ başlangıç koşulu altındaki çözümlerini Shifted Legendre polinomlarına dayalı matris sıralama metodu ile arayalım. Burada problemin tam çözümü $y(x) = x - 1$ dir. İlk olarak, hesaplanacak yaklaşık çözümü,

$$y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n P_n^*(x)$$

sonlu Shifted Legendre serisine dayalı olarak tanımlanmıştır. Denklemin çözümünde kullanılacak sıralama noktaları, $N = 2$ için

$$\left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1 \right\}$$

olacak biçimde seçilmiştir. Gerekli işlemler yapılarak problemin temel matris denklemini

$$\left\{ \sum_{j=0}^1 Q_j X B^j + \sum_{k=0}^1 R_k \bar{X} \bar{B}(\tau_k) \right\} B(2, -1) D A = F$$

veya kısaca

$$W A = F \Leftrightarrow [W; F]$$

şeklinde oluşturulur. burada $[W; F]$ matrisi

$$[W; F] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5; & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{11}{4} & -\frac{71}{16}; & \frac{5}{4} \\ 1 & 5 & -5; & 2 \end{bmatrix},$$

olarak hesaplanır. Problemin koşul matris formu;

$$[U_0; \lambda_0] = [1 \quad -1 \quad 1; \quad -1]$$

biçiminde elde edilir. Bu koşul matrisi, bulunan arttırılmış matrisinde yerine yazılırsa, yeni $[\tilde{W}; \tilde{F}]$ sonuç arttırılmış matrisi,

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5; & 0 \\ 1 & -1 & 1; & -1 \\ 1 & 5 & -5; & 2 \end{bmatrix}$$

formunda bulunur. Arttırılmış yeni sonuç matris formu çözülerek bilinmeyen Shifted Legendre katsayılarının matris formu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}^T$$

biçiminde elde edilir. Bulunan bilinmeyen çözüm polinomunun katsayıları, Shifted Legendre polinomları yardımıyla bizi $y_2(x) = x - 1$ çözümüne ulaştırır ki bu çözüm problemin aranan tam çözümüdür.

Örnek 4.4.2. İkinci mertebeden linear neutral tipi

$$y''(x) + y(x) - x^3 y''(x + x^2) + xy'(x + x^2) = 3x + 1 + 3 \int_{x-1}^x y(t) dt, \quad (0 \leq x, t \leq 2)$$

integro diferansiyel denklemini, $y(0) = 0, y'(0) = 0$ başlangıç koşulları altındaki çözümünü inceleyelim. Burada $f(x) = 3x + 1$ olmak üzere problemin tam çözümü $y(x) = x^2$ dir. $N = 2$ için Shifted Legendre polinomlarına dayalı

$$y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n P_n^*(x)$$

formundaki çözümler aranacaktır. $N = 2$ için sıralama noktaları

$$\{x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2\}$$

olarak hesaplanır. Problemin temel matris denklemi,

$$\left\{ \sum_{j=0}^2 \mathbf{Q}_j \mathbf{X} \mathbf{B}^j + \sum_{k=0}^2 \mathbf{R}_k \bar{\mathbf{X}} \bar{\mathbf{B}}(\tau) - \bar{\mathbf{X}} \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{I}} \right\} \mathbf{B}(\alpha, \beta) \mathbf{D} \mathbf{A} = \mathbf{F}$$

şeklindedir. Burada gerekli işlemler yapıldığında probleme karşılık gelen $[\mathbf{W}; \mathbf{F}]$ matrisi,

$$[\mathbf{W}; \mathbf{F}] = \begin{bmatrix} -2 & \frac{7}{2} & -5; & 1 \\ -2 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2}; & 4 \\ -2 & \frac{3}{2} & 10; & 7 \end{bmatrix}$$

olup, verilen koşullara karşılık gelen genişletilmiş matris ise,

$$[U_0; \lambda_0] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[U_1; \lambda_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Böylece probleme ait genişletilmiş sonuç matrisi,

$$[\tilde{W}; \tilde{F}] = \begin{bmatrix} -2 & \frac{7}{2} & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde olacaktır. Bu sistemin çözümüyle, bilinmeyen katsayılar matrisi

$$A = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 2 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}^T$$

olarak bulunur. Böylece problemin tam çözümü olan, $y_2(x) = x^2$ hesaplanmış olur.

Örnek 4.4.3. Birinci mertebeden değışken katsayılı lineer fonksiyonel Volterra tipi integro diferansiyel denkleminin,

$$y'(x) + e^{\frac{x}{2}} y\left(x + \frac{x}{2}\right) = 1 - e^{-x} - \int_0^x y(t) dt$$

$0 \leq x \leq 1$ aralığında, $y(0) = 1$ başlangıç koşulu altındaki çözümünü inceleyeceğiz.

Problemin tam çözümü ise $y(x) = e^{-x}$ dir. Burada bilinen fonksiyonlar,

$$Q_1(x) = 1, Q_0(x) = 0, R_0(x) = e^{\frac{x}{2}}, \tau(x) = \frac{x}{2}, g(x) = 1 - e^{-x},$$

$$a = 0, b = 1, K(x, t) = -1, u(x) = 0, v(x) = x$$

şeklindedir. Problemin Shifted-Legendre polinomlarına dayalı çözümü,

$$y(x) \cong \sum_{n=0}^2 a_n P_n^*(x) = P^*(x) A = X(x) B(\alpha, \beta) D A$$

formundadır. Burada $N = 2, a = 0, b = 1,$

$$\alpha = \frac{2}{b-a} = \frac{2}{1} = 2, \beta = -\frac{b+a}{b-a} = -\frac{1}{1} = -1$$

$$B(\alpha, \beta) = B(2, -1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix},$$

$$B(2, -1).D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

matrisleri hesaplanmıştır. $N=2$ için problemin sıralama noktaları

$$\{x_0 = 0, x_1 = 1/2, x_2 = 1\}$$

şeklindedir. Probleme ait temel matris denklemi,

$$(Q_1 X B^1 + R_0 \bar{X} \bar{B}(\tau) B^0 - \bar{X} \bar{K} \bar{I}) B(2, -1) D = F;$$

biçimindedir. Burada matrisler,

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{1/4} & 0 \\ 0 & 0 & e^{1/2} \end{bmatrix},$$

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B\left(1, \frac{x}{2}\right) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{x}{2} & \frac{x^2}{4} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{B}(\tau) = \begin{bmatrix} B(1, \tau(0)) \\ B\left(1, \tau\left(\frac{1}{2}\right)\right) \\ B(1, \tau(1)) \end{bmatrix}, B(1, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B\left(1, \frac{1}{4}\right) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B\left(1, \frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, I(x) = [r_{pq}(x)], r_{pq}(x) = \frac{x^{p+q+1}}{p+q+1}; p, q = 0, 1, 2$$

$$I(0) = [r_{pq}(0)], r_{pq}(0) = 0; p, q = 0, 1, 2; I(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$I\left(\frac{1}{2}\right) = \left[r_{pq}\left(\frac{1}{2}\right)\right], r_{pq}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1^{p+q+1}}{p+q+1}; p, q = 0, 1, 2; I\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{24} & \frac{1}{64} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{64} & \frac{1}{160} \end{bmatrix},$$

$$I(1) = [r_{pq}(1)], r_{pq}(1) = \frac{1^{p+q+1}}{p+q+1}; p, q = 0, 1, 2; I(1) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix},$$

$$\bar{I} = \begin{bmatrix} I(0) \\ I\left(\frac{1}{2}\right) \\ I(1) \end{bmatrix}, \bar{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K} \end{bmatrix}, \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ \frac{603}{338} & \frac{1617}{676} & -\frac{638}{3975} \\ \frac{1968}{743} & \frac{3936}{743} & \frac{1552}{103} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f(0) \\ f\left(\frac{1}{2}\right) \\ f(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - e^{-1/2} \\ 1 - e^{-1} \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanmışlardır. Problemde verilen koşula karşılık gelen genişletilmiş koşul matrisi ise,

$$y(0) = \mathbf{X}(0) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = 1 \Rightarrow [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = 1 \Rightarrow [1 \ -1 \ 1; \ 1]$$

şeklindedir. Böylece probleme ait genişletilmiş matris,

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5; & 0 \\ \frac{603}{338} & \frac{1617}{676} & -\frac{638}{3975}; & 1 - e^{-1/2} \\ 1 & -1 & 1; & 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde olacaktır. Bu sistemin çözümüyle, bilinmeyen katsayılar matrisi bulunur ve $N=2$ için yaklaşık çözüm,

$$y_2(x) = 0.39540x^2 - x + 1$$

olarak hesaplanır. $N=3,4,5$ için yaklaşık çözümler;

$$y_3(x) = -0.11816x^3 + 0.48464x^2 - x + 1,$$

$$y_4(x) = 0.02776x^4 - 0.15818x^3 + 0.49828x^2 - x + 1,$$

$$y_5(x) = -0.00532x^5 + 0.03896x^4 - 0.16560x^3 + 0.49984x^2 - x + 1$$

olarak bulunur. Problemin Shifted-Legendre polinomlarına dayalı matris sıralama metodu ile bulunan yaklaşık çözümleri üzerinde rezidüel hata analizi işlemi yapılırsa, elde edilen rezidüel fonksiyonlar

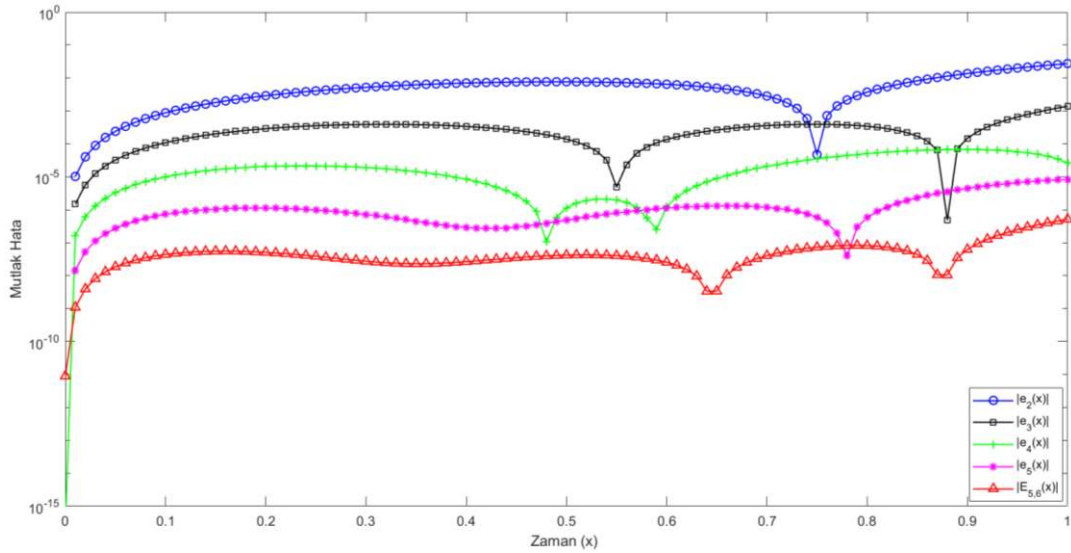
$$R_2 = 0.07086, R_3 = 0.00792, R_4 = 0.00066, R_5 = 5.296 \cdot 10^{-5}$$

olarak hesaplanmıştır. $M=6$ için düzeltilmiş çözüm ise,

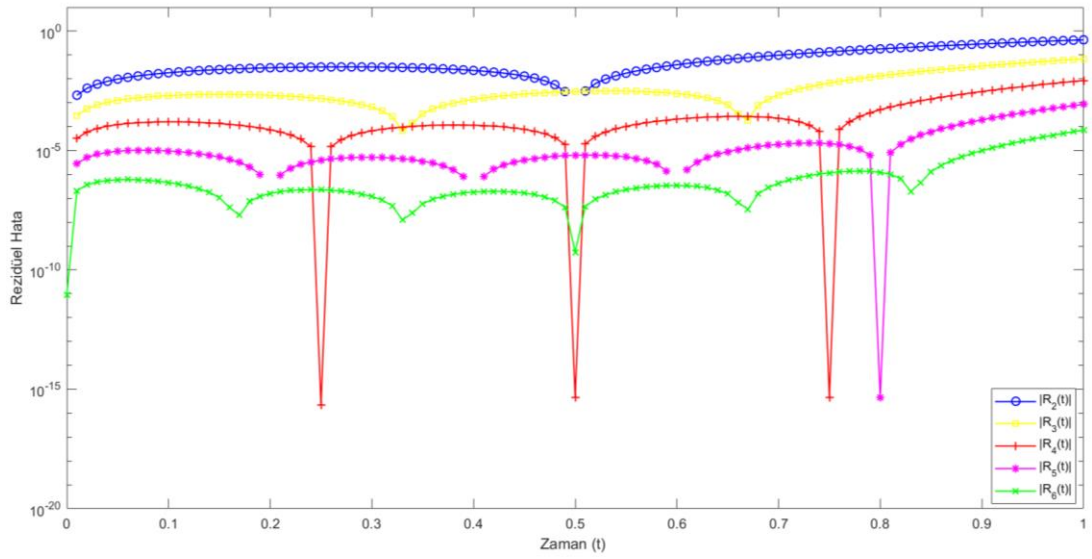
$$e_5'(x) + e^{\frac{x}{2}} e_5\left(x + \frac{x}{2}\right) = 1 - e^{-x} - \int_0^x e_5(t) dt, \quad e_5(0) = 0,$$

$$y_{5,6}(x) = 0.00086x^6 - 0.00770x^5 + 0.04130x^4 - 0.16656x^3 + 0.49999x^2 - x + 1$$

olarak bulunur.



Şekil 4.9. Örnek 4.4.3.'ün mutlak hataları



Şekil 4.9. Örnek 4.4.3.'ün rezidüel hataları

4.5. Yüksek Mertebeden Genelleştirilmiş Gecikmeli Lineer Fonksiyonel İntegro Diferansiyel Denklem Sistemi İçin Stirling Matris Sıralama Metodu İle İlgili Nümerik Örnekler

Örnek 4.5.1. Birinci mertebeden gecikmeli

$$\begin{cases} y_1'(x) - y_1(x-1) + y_2(x-1) = 4 - x \\ y_2'(x) + 2y_1(x-1) + y_2(x-1) = 5x - 6 \end{cases}$$

diferansiyel denklem sisteminin $y_1(0) = -1, y_2(0) = 0$ başlangıç koşulları altında çözümlerini Stirling polinomları cinsinden araştıralım. Problemin tam çözümü $y_1(x) = 2x - 1$ ve $y_2(x) = x$ 'dir. Burada sistemin genel yapısı;

$$\sum_{k=0}^1 \sum_{j=1}^2 P_{ij}^k(x) y_j^{(k)}(\alpha_{kj}x + \beta_{kj}) = f_i(x), \quad (i=1,2)$$

ya da açık hali ile,

$$\begin{aligned} & \bullet P_{11}^0(x) y_1^{(0)}(\alpha_{10}x + \beta_{10}) + P_{12}^0(x) y_2^{(0)}(\alpha_{20}x + \beta_{20}) + \\ & P_{11}^1(x) y_1^{(1)}(\alpha_{11}x + \beta_{11}) + P_{12}^1(x) y_2^{(1)}(\alpha_{21}x + \beta_{21}) = f_1(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bullet P_{21}^0(x) y_1^{(0)}(\alpha_{10}x + \beta_{10}) + P_{22}^0(x) y_2^{(0)}(\alpha_{20}x + \beta_{20}) + \\ & P_{21}^1(x) y_1^{(1)}(\alpha_{11}x + \beta_{11}) + P_{22}^1(x) y_2^{(1)}(\alpha_{21}x + \beta_{21}) = f_2(x) \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada bilinen fonksiyonlar,

$$P_{11}^0(x) = -1, \alpha_{10} = 1, \beta_{10} = -1, P_{12}^0(x) = 1, \alpha_{20} = 1, \beta_{20} = -1,$$

$$P_{11}^1(x) = 1, \alpha_{11} = 1, \beta_{11} = 0, P_{21}^0(x) = 2, \alpha_{10} = 1, \beta_{10} = -1,$$

$$P_{22}^0(x) = 1, \alpha_{20} = 1, \beta_{20} = -1, P_{22}^1(x) = 1, \alpha_{21} = 1, \beta_{21} = 0,$$

$$f_1(x) = 4 - x, f_2(x) = 5x - 6$$

olarak tanımlanır. $N=2$ için problemin çözümünü

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n S_n(x),$$

kesilmiş Stirling serisi formunda arayalım. Ayrıca $N=2$ için $a=0, b=1$ olmak üzere sıralama noktaları

$$\left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1 \right\}$$

şeklinde olup, problemin temel matris denklemi,

$$\sum_{k=0}^1 P_k \bar{X}^* \bar{B}(\alpha_k, \beta_k) (\bar{B})^k \bar{T} A = F,$$

$$W = P_0 \bar{X}^* \bar{B}(\alpha_0, \beta_0) (\bar{B})^0 \bar{T} + P_1 \bar{X}^* \bar{B}(\alpha_1, \beta_1) (\bar{B})^1 \bar{T}$$

biçimindedir. Burada,

$$P_k = \begin{bmatrix} P_k(0) & 0 & 0 \\ 0 & P_k\left(\frac{1}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & P_k(1) \end{bmatrix}, P_k(x) = \begin{bmatrix} P_{11}^k(x) & P_{12}^k(x) \\ P_{21}^k(x) & P_{22}^k(x) \end{bmatrix},$$

$$P_0(x) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, P_1(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{X}^* = \begin{bmatrix} \bar{X}(0) \\ \bar{X}\left(\frac{1}{2}\right) \\ \bar{X}(1) \end{bmatrix}, \bar{X}(x) = \begin{bmatrix} X(x) & 0 \\ 0 & X(x) \end{bmatrix},$$

$$\bar{B}(\alpha_0, \beta_0) = \begin{bmatrix} B(\alpha_{10}, \beta_{10}) & 0 \\ 0 & B(\alpha_{20}, \beta_{20}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B(1, -1) & 0 \\ 0 & B(1, -1) \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{B}}(\alpha_1, \beta_1) = \begin{bmatrix} B(\alpha_{11}, \beta_{11}) & 0 \\ 0 & B(\alpha_{21}, \beta_{21}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B(1,0) & 0 \\ 0 & B(1,0) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}(1,-1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}(1,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix},$$

$$(\bar{\mathbf{B}})^k = \text{diag}[\mathbf{B}^k \quad \mathbf{B}^k \quad \dots \quad \mathbf{B}^k], \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}(0) \\ \mathbf{F}\left(\frac{1}{2}\right) \\ \mathbf{F}(1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & 0 \\ 0 & \mathbf{T} \end{bmatrix},$$

olarak hesaplanan matrislerdir. Problemin temel matris denkleminde karşı gelen $[\mathbf{W}; \mathbf{F}]$ matrisi,

$$[\mathbf{W}; \mathbf{F}] = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{12} & 1 & 0 & 0; & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{12}; & -6 \\ -1 & \frac{1}{4} & \frac{31}{48} & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{48}; & \frac{7}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{24} & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{11}{16}; & -\frac{7}{2} \\ -1 & 0 & \frac{3}{4} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6}; & 3 \\ 2 & 1 & \frac{1}{3} & 1 & 1 & \frac{13}{12}; & -1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Problemin koşullarına karşılık gelen matris,

$$y_1(0) = \mathbf{X}(0)\mathbf{T}\mathbf{A}_1 = \lambda_{10}, \quad y_2(0) = \mathbf{X}(0)\mathbf{T}\mathbf{A}_2 = \lambda_{20},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \mathbf{A}_1 = -1, \quad \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \mathbf{A}_2 = 0,$$

şeklinde hesaplanır. Kapalı matris formu ise

$$[\mathbf{U}; \lambda] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0; & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6}; & 0 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Böylece probleme ait genişletilmiş matris,

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{12} & 1 & 0 & 0; & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{12}; & -6 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0; & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6}; & 0 \\ -1 & 0 & \frac{3}{4} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6}; & 3 \\ 2 & 1 & \frac{1}{3} & 1 & 1 & \frac{13}{12}; & -1 \end{bmatrix}$$

olup, sistemin tam çözümüne karşılık gelen bilinmeyen katsayılar matrisleri ise

$$\mathbf{A}_1 = [-3 \quad 4 \quad 0]^T, \quad \mathbf{A}_2 = [-1 \quad 2 \quad 0]^T$$

olarak hesaplanmıştır. Böylece $N=2$ için sistemin çözümü $y_1(x)=2x-1$ ve $y_2(x)=x$ tam çözümü sistemin çözümü olarak elde edilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Yüksek mertebeden lineer genelleştirilmiş fonksiyonel gecikmeli integro diferansiyel denklemler son dönemlerde oldukça ilgi gören bir çalışma alanı olmasından dolayı birçok matematikçi, fizikçi ve mühendisler gibi farklı bilim dallarından araştırmacılar tarafından derinlemesine araştırılan bir çalışma alanı haline gelmiştir. Bu formdaki denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek, nümerik bir sonuç bulmak çoğu zaman oldukça zordur ya da mümkün değildir. Bu nedenle bu tipteki denklemlerin gerçek çözümlerini elde etmek yerine nümerik metotlarla yaklaşık çözümlerinin bulunmasına ihtiyaç duyulmaktadır.

Bu amaç doğrultusunda yaptığımız bu çalışmada karışık koşullar altında incelenen yüksek mertebeden lineer genelleştirilmiş fonksiyonel integro diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinin bulunması için sonlu artan veya azalan faktöriyel fonksiyonları serisi, Stirling serisi, Shifted Legendre serisi ve Genocchi serisi ile sıralama noktalarına dayalı “Faktöriyel matris sıralama metodu”, “Stirling matris sıralama metodu”, “Shifted-Legendre matris sıralama metodu” ve son olarak “Genocchi matris sıralama metodu” adı verilen beş farklı polinom tabanlı yaklaşım tekniği geliştirilmiştir. Elde edilen sonuçlar metodun, gerçek hayat problemleri üzerinde doğru ve etkili bir biçimde uygulanabildiğini göstermiştir. Ayrıca, yöntemin işlerliğini ve sonuçlarının doğruluğunu göstermek için kalan fonksiyonuna ve Ortalama Değer Teoremine, rezidüel hata fonksiyonuna ve rezidüel düzeltme fonksiyonuna dayalı hata tahminleri yapılmıştır. Tablolardan ve grafiklerden, hata tahminleri ile beraber sunulan yöntemin verimliliği gözlemlenebilmiştir. Bu arada matris sıralama metodu ile ilgili örneklerde bulunan tam çözümlerin veya farklı değerler için bulunan yaklaşık çözümlerin sonuçları tablo ve grafikler de ayrıca belirtilmiş ve tartışılmıştır. Bu uygulamalara bağlı olarak farklı değerler için bulunan yaklaşık çözümlerin grafikleri gerçek çözümlerle birlikte karşılaştırılarak çizilmiştir. Bu grafiklerden çoğunlukla çözümlerin kesme sınırı yeterince arttırıldığında tam çözüme daha çok yaklaştığı yani yaklaşık çözümün tam çözüme yakınsadığı gözlemlenmiştir. Ancak kesme sınırının artması ile birlikte matris boyutlarının da oldukça yüksek oranda artması ve böylelikle yaklaşık çözümün hesaplanmasında kullanılan bilgisayar programlarının işletim sistemlerinin yavaşlaması, yaklaşık çözümün bulunma süresinin uzaması gibi bir takım sorunlar ortaya çıkmıştır. Ayrıca,

problemin kesin çözümü bilinmediği durumlarda bile, elde edilen çözümün hata üst sınırı yaklaşık olarak kalan fonksiyonu aracılığıyla tahmin edilebilmekte ve gerçek çözüme çok yakın yaklaşık çözümler ve aralığı sunulabilmektedir. Diğer taraftan, yapılan bu çalışmada gerçek hayat problemlerinin incelenmesiyle elde edilen yaklaşık çözümlerin sayısal değerleri ile gerçek çözümlerin karşılaştırılmalarından, önerilen yöntemin oldukça geçerli olduğu ve temel bilgisayar programlama dilleri ile birlikte uyumlu bir şekilde çalıştığı gözlemlenmiştir.

Sonuç olarak, sunulan beş farklı polinom ailesine dayalı matris sıralama metodunun uygulanabilirliği görülmüş, bilgisayarlar aracılığıyla elde edilen sonuçlar ile karşılaştırıldığında yöntemin doğruluğundan emin olunmuştur. Buna göre önerilen yöntemin yüksek mertebeden lineer fonksiyonel integro diferansiyel denklemler başta olmak üzere farklı diferansiyel denklem formlarının yaklaşık çözümleri için de yapılacak bazı düzenlemeler ile etkili bir yöntem olarak ortaya konulabileceği kanaatine varılmıştır.

Matris sıralama yönteminin diğer nümerik yöntemlere kıyasla oldukça önemli avantajları bulunmaktadır. Farklı polinom ailelerine bağlı matris sıralama yöntemi, literatürde kullanılan iteratif yöntemlerden farklı olarak bilgisayar programlarında kullanılan algoritmaların doğrudan ve net kodlamalarla kullanılabildiği veri depolaması gerektirmeyen bir yöntemdir. Böylelikle, çoğu gerçek hayat probleminin hesaplanma sürecinde diğer yöntemlere göre işlem kolaylığı avantajı sağlamaktadır.

Yapılan çalışmalar sonucunda, fen ve mühendislik alanlarında karşılaşılan doğal ve fiziki problemlerin çözümünde kullanılan tüm nümerik çözüm yöntemleri dışında, alternatif bir yöntem olarak sunulmuştur. Sunulan polinomlara dayalı matris sıralama yöntemi, fen ve mühendislikte başka bir kullanım olanağı ile birlikte araştırmacılara da farklı bir yöntem seçme imkanı sağlamaktadır. Aynı zamanda değişik uygulama alanlarında karşılaşılan gerçek hayat problemlerinin çözümünde, çözümün polinomlar aracılığıyla ifade edilebilmesi araştırmacılara kolaylık sağlamaktadır. Bu açıdan da kullanılan bu yöntemler bilim ve teknolojiye getireceği farklı bakış açıları ve yenilikler açısından oldukça önemlidir.

Bu alanda bundan sonrası için yapılması planlanan çalışmalar, farklı diferansiyel denklem türlerini (kısmi fonksiyonel integro diferansiyel denklemler, lineer olmayan fonksiyonel integro diferansiyel denklemler gibi) içeren doğal ve fiziki problemlerin ele alınıp, çözülmesi ve incelenmesiyle devam edecektir. Uygulanan bu nümerik yaklaşım yöntemi ile de bunların mühendislik, fizik, biyoloji, ekonomi gibi farklı bilim dallarında çeşitli modellere ve gerçek hayat problemlerine uygulanabilirliği araştırılacaktır. Tez çalışmasının tamamlanması ile birlikte elde edilen sonuçlar literatürde uygulanan diğer özel polinomlara dayalı matris sıralama yöntemlerine bir alternatif oluşturarak, elde edilen sonuçların karşılaştırılabilmesine imkan sağlamıştır.



KAYNAKLAR

- [1] Zeeshan, A., Atlas, M. Optimal solution of integro-differential equation of Suspension Bridge Model using Genetic Algorithm and Nelder-Mead method. *Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences*. 2017, 24, 310-314.
- [2] Jain, H. V., Byrne, H. M. Qualitative analysis of an integro-differential equation model of periodic chemotherapy. *Applied Mathematics Letters*. 2012, 25, 2132-2136.
- [3] Gülsu, M., Sezer, M. A Taylor polynomial approach for solving differential-difference equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2006, 186(2), 349-364.
- [4] Kürkçü, K. Ö., Arslan, E., Sezer, M. A numerical approach with error estimation to solve general integro-differential-difference equations using Dickson polynomials. *Applied Mathematics and Computation*. 2016, 276, 324-339.
- [5] Yüzbaşı, Ş., Şahin, N., Sezer, M. A Bessel collocation method for numerical solution of generalized pantograph equations. *Numerical Methods for Differential Equations*. 2012, 28(4), 1105-1123.
- [6] Işık, R. O., Güney, Z., Sezer, M. Bernstein series solutions of pantograph equations using polynomial interpolation. *Journal of Difference Equations and Applications*. 2012, 18(3), 357-374.
- [7] Deniz, S., Sezer, M. Rational Chebyshev collocation method for solving nonlinear heat transfer equations. *International Communications in Heat and Mass Transfer*. 2020, 114, <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2020.104595>.
- [8] Yalçınbaş, S., Sezer, M., Sorkun, H. H. Legendre polynomial solutions of high-order linear Fredholm integro-differential equations. *Applied Mathematics and Computation*. 2009, 210(2), 334-349.
- [9] Gülsu, M., Gürbüz, B., Öztürk, Y., Sezer, M. Laguerre polynomial approach for solving linear delay difference equations. *Applied Mathematics and Computation*. 2011, 217(15), 6765-6776.
- [10] Özel, M., Kürkçü, Ö. K., Sezer, M. Morgan-Voyce matrix method for generalized functional integro-differential equations of Volterra-type. *Journal of Science and Arts*. 2019, 2(47), 295-310.
- [11] Yalçınbaş, S., Aynığül, M., Sezer, M. A collocation method using Hermite polynomials for approximate solution of pantograph equations. *Journal of the Franklin Institute*. 2011, 348(6), 1128-1139.
- [12] Gogoi, T. K., Pandey, M., Das, R. Estimation of operating parameters of a reheat regenerative power cycle using simplex search and differential evolution based inverse methods. *Energy Conversion and Management*. 2015, 91, 204-218.
- [13] Hendi, F. A., Al-Qarni, M. M. The variational Adomian decomposition method for solving nonlinear two-dimensional Volterra-Fredholm integro-differential equation. *Journal of King Saud University - Science*. 2019, 31(1), 110-113.
- [14] Geng, F. A modified variational iteration method for solving Riccati differential equations. *Computers & Mathematics with Applications*. 2010, 60(7), 1868-1872.
- [15] Bota, C., Caruntu, B. Approximate analytical solutions of nonlinear differential equations using the Least Squares Homotopy Perturbation Method. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2017, 448(1), 401-408.
- [16] Fang, J., Zhan, R. High order explicit exponential Runge-Kutta methods for semilinear delay differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2021, 388, <https://doi.org/10.1016/j.cam.2020.113279>.

- [17] Sezer, M., Daşcıoğlu, A. Diferansiyel Denklemler Teori ve Problem Çözümleri 1. Dora Basım-Yayın Dağıtım Ltd. Şti., Osmangazi/Bursa, Türkiye, 2016, 290.
- [18] Murray, R. S. Schaum's Outline of Theory and Problems of Calculus of Finite Differences and Different Equations. McGraw-Hill Book Company, New York, ABD, 1961.
- [19] Knuth, D. E. Two Notes on Notation. The American Mathematical Monthly. 1992, 99(5), 403-422.
- [20] Mond, D., Krammer, D. Combinatorics Lecture Notes. Warwick Mathematics Institute, 2004.
- [21] Roman, S. The Lower Factorial Polynomial in The Umbral Calculus. Academic Press, New York, ABD, 1984, 28-29 and 56-63.
- [22] Arakawa, T., Ibukiyama, T., Kareko, M. Bernoulli Numbers and Zeta Functions. Springer, Japan, 2014, 25-34.
- [23] İbiş, B. Birleşik Analizde Stirling Sayıları ve Uygulamaları. Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, İstanbul, 2005. (Yüksek Lisans Tezi).
- [24] Çam, Ş. Stirling Sayıları. Matematik Dünyası Dergisi 2005 Bahar. İstanbul, 2005, 30-34.
- [25] Feng, Q., Bai, N. G. A closed form for Stirling polynomials in terms of Stirling numbers. Tbilisi Mathematical Journal. 2017, 10(4), 153-158.
- [26] Başar, Ü. Merkezi Faktöriyel Sayılarının Üreteç Fonksiyonları ve Uygulamaları. Akdeniz Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Antalya, 2016, 56 s. (Yüksek Lisans Tezi).
- [27] Roman, S. The Umbral Calculus. Academic Press Inc., New York, ABD, 1984, 102 s.
- [28] Kruchinin, D.V., Kruchinin, V.V. Application of a composition of generating functions for obtaining explicit formulas of polynomials. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2012, 404(1), 161-171.
<https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.03.009>
- [29] Şimşek, Y. A New Approach to q-Genocchi Numbers and Their Interpolation Functions. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2009, 71, 793-799.
- [30] Isah, A., Phang, C. Operational matrix based on Genocchi polynomials for solution of delay differential equations. Ain Shams Engineering Journal. 2018, 9(4), 2123-2128. <https://doi.org/10.1016/j.asej.2016.09.015>
- [31] Phang C., Isah A. New operational matrix of derivative for solving non-linear fractional differential equations via Genocchi polynomials. Journal of King Saud University-Science. 2019, 31(1), 1-7. <https://doi.org/10.1016/j.jksus.2017.02.001>
- [32] Everitt, W. N., Littlejohn L. L., Wellman, R. Legendre polynomials Legendre-Stirling numbers and the left-definite spectral analysis of the Legendre differential expressions, J. Comput. Appl. Math. 2002, 148, 213-238.
- [33] Yousefi, S., Razzaghi, M. Legendre wavelets method for the nonlinear Volterra-Fredholm integral equations. Math. Comput. Simulat. 2005, 70(1), 1-8.
- [34] Yüzbaşı, Ş., Sezer, M. Shifted Legendre approximation with the residual correction to solve pantograph-delay type differential equations. Applied Mathematical Modelling. 2015, 39, 6529-6542.
- [35] Gökmen, E., Sezer, M. Taylor collocation method for systems of high-order linear differential-difference equations with variable coefficients. Ain Shams Engineering Journal. 2013, 4(1), 117-125. <https://doi.org/10.1016/j.asej.2012.07.005>

- [36] Sezer, M., Akyüz-Daşcıoğlu, A. A Taylor method for numerical solution of generalized pantograph equations with linear functional argument. *J. Comput. Appl. Math.* 2007, 200, 217-225.
- [37] Koepf, W. *Hypergeometric Summation: An Algorithmic Approach to Summation and Special Function Identities*. Braunschweig, Germany, Vieweg, 1998.
- [38] Arfken, G. Legendre Functions Ch. 12 in *Mathematical Methods for Physicists* 3rd ed. Orlando, FL: Academic Press, 1985, 637-711.
- [39] Abramowitz, M., Stegun, I. A. Legendre Functions and Orthogonal Polynomials Ch. 22 in Chs. 8 and 22 in *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover, New York, ABD, 1972, 331-339 and 771-802.
- [40] Sedaghat, S., Nemati, S., Ordokhani, Y. Convergence Analysis of Spectral Method for Neutral Multipantograph Equations. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*. 2019, 43, 2261-2268. <https://doi.org/10.1007/s40995-017-0467-7>
- [41] Balcı, M. A., Sezer, M. Hybrid Euler–Taylor matrix method for solving of generalized linear Fredholm integro-differential difference equations. *Applied Mathematics and Computation*. 2016, 273, 33–41.
- [42] Kürkcü, Ö. K. Dickson ve graph-matching polinomlarının temel matris özellikleri ve fonksiyonel integro-diferansiyel denklemlere uygulamaları. Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Manisa, 2019, 199 s. (Doktora Tezi).
- [43] Gökmen, E., Yüksel, G., Sezer, M. A numerical approach for solving Volterra type functional integral equations with variable bounds and mixed delays. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2016, 311, 354-363. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2016.08.004>
- [44] Manob, A. H., Islam, T. M., Parvez, M. T., Kaykobad, M. Search trees and Stirling numbers. *Computers & Mathematics with Applications*. 2004, 48(5-6), 747-754. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2004.03.005>
- [45] Bloom, F. Asymptotic bounds for solutions to a system of damped integro-differential equations of electromagnetic theory. *J. Math. Anal. Appl.* 1980, 73, 524–542.
- [46] Babolian, E., Abbasbandy, S., Fattahzadeh, F. A numerical method for solving a class of functional and two dimensional integral equations. *Appl. Math. Comput.* 2008, 198, 35–43.
- [47] Yalçınbaş, S., Akkaya, T. A numerical approach for solving linear integro-differential difference equations with Boubaker polynomial bases. *Ain Shams Engineering Journal*. 2012, 3, 153-161. <http://dx.doi.org/10.1016/j.asej.2012.02.004>
- [48] Gülsu, M., Öztürk, Y., Sezer M. A new collocation method for solution of mixed linear integro-differential-difference equations. *Appl. Math. Comput.* 2010, 216(7), 2183–2198.
- [49] Yalçınbaş, S., Sezer, M. The approximate solution of high-order linear Volterra–Fredholm integro-differential equations in term of Taylor polynomials. *Appl. Math. Comput.* 2000, 112, 291–308.
- [50] Shahmorad, S. Numerical solution of the general form linear Fredholm–Volterra integro differential equations by the Tau method with an error estimation. *Applied Mathematics and Computation*. 2005, 167, 1418–1429.
- [51] Gülsu, M., Sezer, M. A Taylor collocation method for solving high-order linear pantograph equations with linear functional argument. *Numer. Methods Partial Differ. Equ.* 2011, 27, 1628–1638.

- [52] El-Safty, A., Salim, M. S., El-Khatib, M. A. Convergence of the spline function for delay dynamic system. *Int. J. Comput. Math.* 2003, 80, 509–518.
- [53] Aykutanalp, E. Z. Fonksiyonel Diferansiyel, İntegral ve İntegro- Diferansiyel Denklemlerin Boubaker Polinom Çözümleri ve Uygulamaları. Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Manisa, 2018, 88 s. (Yüksek Lisans Tezi).
- [54] Evans, D.J., Raslan, K. R. The Adomian decomposition method for solving delay differential equation, *Int. J. Comput. Math.* 2005, 82 (1), 49–54.
- [55] Yüzbaşı, Ş., Şahin, N., Sezer, M. Bessel polynomial solutions of high-order linear Volterra integro-differential equations. *Computers and Mathematics with Applications*. 2011, 62, 1940–1956.
- [56] Şaşmaz, E. Bernoulli ve Euler Polinomlarının Matris Özellikleri ve Gecikmeli İntegro Diferansiyel Denklemlere Uygulamaları. Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Manisa, 2018, 91 s. (Yüksek Lisans Tezi).
- [57] Oğuz, C. Delay İntegro-Diferansiyel Denklemler Sisteminin Sayısal Çözümleri ve Uygulamaları için Chelyshkov Matris Metodu. Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Manisa, 2017, 93 s. (Doktora Tezi).
- [58] Mollaoğlu, T. Volterra Tipi Gecikmeli Fonksiyonel İntegro - Diferansiyel Denklemler İçin Gegenbauer Polinom Yaklaşımı. Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Manisa, 2017, 74 s. (Yüksek Lisans Tezi).
- [59] Şahin, M. Fredholm Tipindeki Fonksiyonel İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Pell-Lucas Polinom Çözümleri Ve Uygulamaları. Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Manisa, 2017, 62 s. (Yüksek Lisans Tezi).
- [60] Kürkçü, Ö. K. A Numerical Method with A Control Parameter for Integro-Differential Delay Equations with State-Dependent Bounds via Generalized Mott Polynomial. *Math. Sci.* 2020, 14, 43–52.
- [61] Özel, M., Tarakçı, M., Sezer, M. A numerical approach for a nonhomogeneous differential equation with variable delays, *Mathematical Sciences* (2018) 12:145–155.