

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



**ÖZEL SAYILAR, ÖZEL FONKSİYONLAR VE BİR KÜMENİN
ELEMENLARININ PERMÜTASYONLARINA GÖRE DE MONTMORT
SAYILARI (DERANGEMENT SAYILARI) ARASINDAKİ İLİŞKİLER**

Elif BOZO

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**MATEMATİK
ANABİLİM DALI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**HAZİRAN 2025
ANTALYA**

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



**ÖZEL SAYILAR, ÖZEL FONKSİYONLAR VE BİR KÜMENİN
ELEMENLARININ PERMÜTASYONLARINA GÖRE DE MONTMORT
SAYILARI (DERANGEMENT SAYILARI) ARASINDAKİ İLİŞKİLER**

Elif BOZO

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**MATEMATİK
ANABİLİM DALI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**HAZİRAN 2025
ANTALYA**

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ÖZEL SAYILAR, ÖZEL FONKSİYONLAR VE BİR KÜMENİN
ELEMENLARININ PERMÜTASYONLARINA GÖRE DE MONTMORT
SAYILARI (DERANGEMENT SAYILARI) ARASINDAKİ İLİŞKİLER**

Elif BOZO

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 30/06/2025 tarihinde jüri tarafından Oy birliği/Oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK (Danışman)

Prof. Dr. Mustafa ALKAN

Doç. Dr. İrem KÜÇÜKOĞLU

ÖZET

ÖZEL SAYILAR, ÖZEL FONKSİYONLAR VE BİR KÜMENİN ELEMENLARININ PERMÜTASYONLARINA GÖRE DE MONTMORT SAYILARI (DERANGEMENT SAYILARI) ARASINDAKİ İLİŞKİLER

Elif BOZO

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK

Haziran 2025, 44 sayfa

Bu tez çalışmasında, matematikte özellikle permütasyon ve kombinasyon alanlarında önemli bir yeri olan ve düzensizlik anlamına gelen Derangement kavramı ele alınmıştır. Sabit noktaya sahip olmayan, yani hiçbir elemanın yerinde kalmadığı permütasyonlara Derangement denir. Derangement kavramı ilk kez 1713 yılında Fransız matematikçi Pierre Remond de Montmort tarafından incelenmiş (Montmort 1713) ve ölümünden sonra “de Montmort sayıları” olarak da anılmıştır. Günümüzde ise genellikle Derangement sayıları olarak bilinmektedir.

Bu tezde Derangement sayıları ve polinomları incelenmiş; diğer özel sayılar ve polinomlarla olan ilişkileri, yeni özdeşlikler ve bağlantılı grafikler verilmiştir. Derangement yapıları, özellikle üreteç fonksiyonları, permütasyonlar ve grafiklerle olan ilişkileri üzerinde incelenmiştir. İlk olarak permütasyon gruplarına değinilmiş, ardından Derangement sayı ve polinom ailesi açıklanmış ve bazı yeni üreteç fonksiyonlarını içeren denklemler sunulmuştur. Bu denklemler yardımıyla Derangement sayıları ve polinomlarının diğer özel sayılarla ilişkileri verilmiştir. Ayrıca, ilgili polinom ailelerinin türevleri, integralleri, çeşitli özellikleri, grafiksel gösterimleri ve nümerik değerlerini içeren çizelgeler de bu tezde yer almaktadır.

ANAHTAR KELİMELELER: Bernoulli sayıları, Cauchy sayıları, Daehee sayıları, Derangement sayıları ve polinomları, Lineer rekürans bağıntısı, Permütasyon, Özel sayıları ve polinomları, Stirling sayıları, Üreteç fonksiyonları.

JÜRİ: Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK

Prof. Dr. Mustafa ALKAN

Doç. Dr. İrem KÜÇÜKOĞLU



ABSTRACT

RELATIONS AMONG SPECIAL NUMBERS, SPECIAL FUNCTIONS, AND DE MONTMORT NUMBERS (DERANGEMENT NUMBERS), BY PERMUTATIONS OF THE ELEMENTS OF A SET

Elif BOZO

MSc Thesis in MATHEMATICS

Supervisor: Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK

June 2025, 44 pages

In this thesis, the concept of Derangement, which holds particular importance in mathematics—especially in permutation and combination techniques—and denotes a state of disorder, is examined. A Derangement is defined as a permutation with no fixed points, meaning that none of the elements remain in their original positions. The concept was first studied in 1713 by the French mathematician Pierre Raymond de Montmort (Montmort, 1713) and, after his death, the numbers became known as de Montmort numbers. Now, they are commonly referred to as Derangement numbers.

In this thesis, Derangement numbers and polynomials are examined; their relationships with other special numbers and polynomials, new identities, and related graphs are presented. The structures of Derangements are investigated particularly with respect to generating functions, permutations, and graphs. Initially, permutation groups are discussed, followed by the introduction of the family of Derangement numbers and polynomials, along with several new equations involving generating functions. Using these equations, connections between Derangement numbers and polynomials and other special numbers are established. Additionally, the thesis includes tables containing the derivatives, integrals, various properties, graphical representations, and numerical values of the related polynomial families.

KEYWORDS: Bernoulli numbers, Cauchy numbers, Daehee numbers, Derangement numbers and polynomials, Generating functions, Linear recurrence relations, Permutation, Special numbers and polynomials, Stirling numbers.

COMMITTEE: Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK

Prof. Dr. Mustafa ALKAN

Assoc. Prof. Dr. İrem KÜÇÜKOĞLU



ÖNSÖZ

Matematiksel yapıların modellenmesinde önemli bir rol oynayan üreteç fonksiyonları, özellikle özel sayı ve polinom ailelerinin temel özelliklerinin incelenmesinde güçlü bir araç olarak öne çıkmaktadır. Bu fonksiyonlar, söz konusu sayı ve polinomların açık ya da kapalı formülleri bilinmeksizin; rekürans ilişkileri, türev bağlantıları, özdeşlikler ve hesaplama yöntemleri gibi pek çok özelliğin elde edilmesine olanak tanır. Ayrıca, farklı üreteç fonksiyonları arasında kurulan fonksiyonel ve diferansiyel denklemler aracılığıyla, özel sayılar ve polinomlar arasındaki ilişkiler daha sistematik bir biçimde analiz edilebilmektedir. Üstel fonksiyonlar ile birlikte ele alındığında, üreteç fonksiyonları ve özel sayı ve polinom aileleri, son yıllarda yalnızca teorik matematikte değil aynı zamanda başta fizik olmak üzere birçok uygulamalı bilim alanında da önemli bir yere sahip olmuştur. Özellikle matematiksel fizik, olasılık ve istatistik gibi disiplinlerde bu yapılar, karmaşık problemlerin çözülmesinde etkin biçimde kullanılmaktadır.

Bu tez çalışması, matematiğin temel alanlarından biri olan Kombinatorik analiz teorisi kapsamında yer alan Derangement sayı ve polinomlarının kapsamlı bir şekilde incelenmesini amaçlamaktadır. Derangement kavramı, ilk kez 18. yüzyılda Fransız matematikçi Pierre Remond de Montmort tarafından ortaya atılmış olup, günümüzde matematikteki önemini korumaktadır. Ayrıca, Derangement sayı ve polinom ailesinin şans oyunları gibi olasılık temelli uygulamalarda da kullanıldığı bilinmektedir.

Bu tezde, yüksek mertebeden Derangement sayı ve polinomlarının türev ve integral ilişkileri ile birlikte; 2. tür Peters tipli Simsek sayıları, 1. ve 2. tür Stirling sayıları, Bernoulli sayıları, 1. tür Cauchy sayıları ve Daehee sayılarıyla olan ilişkileri incelenmiş ve bu doğrultuda literatüre katkı sağlayacak yeni ilişkiler ortaya konmuştur. Bu kapsamda, özel sayı ve polinom aileleri arasındaki yapısal benzerlikler ve ilişkiler, üreteç fonksiyonları aracılığıyla değerlendirilmiş, elde edilen sonuçlar hem teorik hem de uygulamalı matematik açısından anlamlı çıkarımlar sunmaktadır.

Tez, Giriş, Kaynak Taraması, Materyal ve Metot, Bulgular ve Tartışma ile Sonuçlar olmak üzere beş ana bölümden oluşmaktadır.

Giriş bölümünde, Derangement sayı ve polinomları ile bunlarla ilişkili Peters tipli polinom aileleri, özel sayıların yapısı ve permütasyon temelli kombinatorik kavramların tarihsel gelişimi hakkında bilgi verilmiştir. Ardından, bu tez çalışmasının amacı ve kapsamı

detaylandırılmıştır. Derangement sayılarının ve polinomlarının diğer özel sayılarla olan bağıntıları, yeni tanımlanan üreteç fonksiyonları aracılığıyla incelenmiş ve bu doğrultuda alana katkı sunacak nitelikte yapısal ilişkiler elde edilmesi hedeflenmiştir.

Kaynak Taraması bölümünde, Derangement sayılarının ve polinomlarının temelini oluşturan permütasyon grupları tanıtılmış ve çeşitli örneklerle açıklanmıştır. Özellikle sabit noktasız permütasyonların matematiksel önemi ve bu yapıların üreteç fonksiyonlarıyla ifade edilmesi üzerinde durulmuştur.

Materyal ve Metot bölümünde, 2. tür Peters tipli Simsek sayıları ve polinomları başta olmak üzere; 1. ve 2. tür Stirling sayıları, Bernoulli sayıları, 1. tür Cauchy sayıları ve Daehee sayılarının tanımları, üreteç fonksiyonları ve temel özellikleri ele alınmıştır.

Bulgular ve Tartışma bölümünde ise, Materyal ve Metot bölümünde tanımları açıklanan sayı ve polinom aileleriyle ilgili olarak elde edilen özdeşlikler, bağıntılar ve üreteç fonksiyonları üzerinden çıkarılan formüller sunulmuştur. Bu aileler arasındaki ilişkiler hem analitik hem de kombinatorik yöntemlerle incelenmiş ve elde edilen sonuçlar, mevcut literatürdeki bilinen bağıntılarla karşılaştırılarak değerlendirilmiş, ayrıca türev ve integral uygulamalarına yer verilmiştir.

Tezin son bölümleri, elde edilen bulguların değerlendirildiği Sonuç bölümü ile çalışmalarda yararlanılan kaynakların yer aldığı Kaynakça bölümünden ve yazarın akademik geçmişini içeren Özgeçmiş bölümü ile tamamlanmaktadır.

Bu akademik yolculuk boyunca yolumu aydınlatan, her adımda bilgi ve tecrübesiyle bana ilham kaynağı olan; rehberliği yalnızca akademik düzeyde değil, aynı zamanda insani yönleriyle de cömertçe sunan çok kıymetli danışmanım Prof. Dr. Yılmaz Şimşek'e en derin saygı ve sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca her zaman yanımda olan, sevgi ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen kıymetli annem Sevdije Bozo'ya, sevgili babam Nevzat Bozo'ya ve canım kız kardeşim Ezgi Su Bozo'ya sonsuz teşekkür ederim. Onların desteği, bu süreci daha güçlü ve kararlı bir şekilde tamamlamamı sağladı. Ayrıca, her zaman yanımda olduklarını hissettiren diğer aile üyelerime de gönülden teşekkür ederim.

Ayrıca, bu süreçte manevi desteklerini her zaman hissettiren ve varlıklarıyla motivasyonumu ayakta tutan arkadaşlarım Seda, Elif Zeynep, Nejma ve Beyza'ya da teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖNSÖZ	v
AKADEMİK BEYAN	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
ÇİZELGELER DİZİNİ	xi
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK TARAMASI	3
2.1. Permütasyon Grupları	3
2.2. Derangement Sayıları ve Polinomları	5
3. MATERYAL VE METOT	11
3.1. Üreteç Fonksiyonlarıyla Tanımlanan Özel Sayılar ve Polinomlar	11
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	21
4.1. Derangement Sayıları ve Yüksek Mertebeden Derangement Sayıları	21
4.2. Yüksek Mertebeden Derangement Sayıları ile Birlikte Binom Tipli Polinomların Yeni Sınıfı için Üreteç Fonksiyonu	23
4.3. $P_m(x; k)$ Polinomlarının Türev Formülü	25
4.4. $P_m(x; k)$ Polinomlarının İntegral Formülü	26
4.5. d_n ve $Y_{n,2}(\lambda)$ Sayıları Arasındaki İlişki	28
4.6. $d_n, d_n^{(k)}, S_1(m, j), S_2(m, j)$, Bernoulli Sayıları ve Daehee Sayıları Arasındaki İlişkiler	30
5. SONUÇLAR	39
6. KAYNAKLAR	41
ÖZGEÇMİŞ	

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "ÖZEL SAYILAR, ÖZEL FONKSİYONLAR VE BİR KÜMENİN ELEMANLARININ PERMÜTASYONLARINA GÖRE DE MONTMORT SAYILARI (DERANGEMENT SAYILARI) ARASINDAKİ İLİŞKİLER" ”adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

30/06/2025

Elif BOZO

İmza



SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler:

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
B_n	: Bernoulli sayıları
$B_n(x)$	: Bernoulli polinomları
C_n	: 1. tür Cauchy sayıları
D_n	: Daehee sayıları
$D_n(x)$	: Daehee polinomları
d_n	: Derangement sayıları
$d_n(x)$	: Derangement polinomları
$d_n^{(k)}$	: Yüksek mertebeden Derangement sayıları
$d_{n,k}$	: k tane sabit noktaya sahip permütasyonlarının sayısı
f^{-1}	: f fonksiyonun tersi
$\binom{m}{j}$	: Binom katsayıları
I_s	: S_n kümesinin birim elemanı
$S_1(n, k)$	: 1. tür Stirling sayıları
$S_2(n, k)$	: 2. tür Stirling sayıları
S_n	: S kümesinin permütasyonu
$s_n(x; \lambda, \mu)$	: Peters polinomları
$s_n(\lambda, \mu)$	: Peters sayıları
$d(S_n)$	: S_n kümesinin eleman sayısı
$Y_{n,2}(x; \lambda)$	: 2. tür Peters tipli Simsek polinomları
$Y_{n,2}(\lambda)$	: 2. tür Peters tipli Simsek sayıları
$x^{(n)}$	: Artan faktöriyel
$(x)_n$	: Azalan faktöriyel
$[a]$	: a nın f altında yörüngesi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1	Bir kümenin permütasyon sayısı ile Derangement sayısını karşılaştırma grafiği	8
Şekil 4.2	Derangement ve 2. tür Peters tipli Simsek sayılarının karşılaştırma grafiği	29
Şekil 4.3	Derangement ve Bernoulli sayıları karşılaştırması	31
Şekil 4.4	Derangement ve 1. tür Cauchy sayıları karşılaştırması	32
Şekil 4.5	Derangement ve Daehee sayıları karşılaştırması	33
Şekil 4.6	Derangement ve 1. tür Stirling sayıları karşılaştırması	34
Şekil 4.7	Derangement ve 2. tür Stirling sayıları karşılaştırması	34

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1	1. tür Stirling sayılarının bazı değerleri	16
Çizelge 3.2	2. tür Stirling sayılarının bazı değerleri	17
Çizelge 3.3	Bernoulli sayılarının bazı değerleri	18
Çizelge 3.4	Daehee sayılarının bazı değerleri	19
Çizelge 3.5	1. tür Cauchy sayılarının bazı değerleri	20



1. GİRİŞ

Matematik tarihine baktığımızda, biçimsel kuvvet serileri yardımıyla tanımlanan üreteç fonksiyonlarının hem soyut matematikte hem de uygulamalı alanlarda önemli bir rol oynadığı açıkça görülmektedir. Üreteç fonksiyonları, sayma problemlerinin çözümünde ve özel sayılar ile polinomların temel özelliklerinin incelenmesinde vazgeçilmez araçlardır. Özel sayı ve polinom ailelerinin açık ya da kapalı formülleri bilinmeden, bu yapıların rekürans bağıntıları, hesaplama yöntemleri, simetrik özellikleri ve türev bağıntısı gibi önemli niteliklerinin ortaya konmasında üreteç fonksiyonları etkili bir yöntem sunar.

Bunun yanı sıra, üreteç fonksiyonları temelinde oluşturulan fonksiyonel ve diferansiyel denklemler, farklı özel sayı ve polinom grupları arasındaki ilişkilerin sistematik şekilde ortaya konmasını sağlar. Bu durum, matematiksel yapılar arasındaki karmaşık bağıntıların anlaşılmasını ve yeni teorik sonuçların geliştirilmesini kolaylaştırmaktadır. Ayrıca, üreteç fonksiyonlarının integral dönüşümleri altındaki davranışlarının incelenmesi, söz konusu sayı ve polinom ailelerinin bazı derin yapısal özelliklerinin keşfedilmesini mümkün kılar. Bu kapsamda, üreteç fonksiyonları birçok bilim dalında yaygın ve etkin biçimde kullanılmaktadır.

Derangement sayı ve polinomlarının üreteç fonksiyonları ise, sonlu gruplar üzerindeki permütasyonların özel bir alt kümesi olan sabit noktası olmayan permütasyonları tanımlamak üzere yapılandırılmıştır. Permütasyonlar üzerinde kapsamlı çalışmalar 18. yüzyılın sonlarına doğru başlamıştır. Özellikle Joseph-Louis Lagrange (1770) bu alanda derinlemesine incelemeler yapmıştır. Takip eden süreçte, Camille Jordan 19. yüzyılda bu konudaki çalışmaları genişletmiş ve modern grup teorisinin temellerini atmıştır. Arthur Cayley ise grup teorisine önemli katkılar sağlayarak, her grubun bir permütasyon grubuna izomorf olduğunu ifade eden Cayley Teoremi'ni geliştirmiştir. Bu teorem, grup yapılarının permütasyon grupları aracılığıyla incelenmesini mümkün kılarak matematikte önemli bir dönüm noktası olmuştur (Biggs 2002; Gallian 2016).

Bu bağlamda, tezde matematik tarihinin önemli kavramlarından biri olan üreteç fonksiyonları incelenmiştir. Üreteç fonksiyonları, matematiksel analiz, sayılar teorisi, fizik, kombinatorik, bilgisayar bilimleri, olasılık ve istatistik gibi farklı alanlarda temel araçlar-

dan biri olarak kabul edilmektedir.

Üreteç fonksiyonlarının temel ilkeleri, olasılık teoremine yaptığı katkılarla tanınan Fransız matematikçi Abraham de Moivre'in (1667–1754) çalışmalarına kadar uzanır. De Moivre, özellikle *The Doctrine of Chances* adlı eserinde, günümüzde üreteç fonksiyonlarının temelini oluşturan teknikleri kullanarak alanın öncülerinden olmuştur. Sonraki dönemde Pierre-Simon Laplace, bu teknikleri kuvvet serileri biçiminde sistematik hale getirerek matematiksel analizde üreteç fonksiyonlarının daha geniş kapsamda kullanılmasını sağlamıştır. 19. yüzyılda Camille Jordan'ın grup teorisi alanındaki katkıları ve Arthur Cayley'in Cayley Teoremi, permütasyon yapılarının matematiksel temellerini güçlendirmiş ve Derangement kavramının detaylı incelenmesine zemin hazırlamıştır (De Moivre 1718; Laplace 1812).

Bu tezde incelenen Derangement sayıları ve polinomları, sabit noktaya sahip olmayan permütasyonların özel durumu ile doğrudan bağlantılıdır. Derangement kavramı ilk olarak 18. yüzyılda Pierre Rémond de Montmort (1678–1719) tarafından ortaya konmuş ve Montmort'un 1713 tarihli *Essay d'analyse sur les jeux de hasard* adlı eserinde kapsamlı biçimde analiz edilmiştir. Montmort ile Nicolaus Bernoulli arasında 1710'lu yıllarda gerçekleşen yazışmalar, bu problemin matematiksel olasılık teoremindeki önemini artırmış ve Derangement kavramı hem teorik hem de uygulamalı matematikte yerini sağlamlaştırmıştır (Montmort 1713; Jordan 1870).

Tezin “Bulgular ve Tartışma” bölümünde ise Derangement sayı ve polinomlarının üreteç fonksiyonları tanımlarından hareketle elde edilen yeni teorem ve sonuçlar sunulmaktadır. Yüksek mertebeden Derangement sayılarının ve polinomlarının diğer özel sayı ve polinom aileleriyle olan analitik ilişkileri sistematik şekilde incelenmiştir. Özellikle 2. tür Peters tipli Simsek sayıları, Stirling sayıları, Bernoulli, Cauchy ve Daehee sayıları ile olan bağlantılar matematiksel bağıntılar çerçevesinde detaylandırılmıştır. Böylece literatürdeki mevcut sonuçlar genişletilmiş ve kombinatorik analiz ile özel sayılar teorisi alanlarına anlamlı katkılar sunabilecek özgün bulgular ortaya konmuştur. Bu tez çalışmasında verilen tüm grafikler, MATLAB R2024a sürümü kullanılarak hazırlanmıştır. Veriler MATLAB ortamında işlenmiş, karşılaştırmalı analizler görselleştirmeleri bu yazılım yardımıyla gerçekleştirilmiştir.

2. KAYNAK TARAMASI

Kaynak taraması bölümünde, bu tez çalışması kapsamında ele alınan Derangement sayı ve polinom ailesine ait üreteç fonksiyonlarının tanımları ve temel özelliklerine yer verilmiştir. Ayrıca, bu sayı ve polinom ailesinin temelini oluşturan permütasyon grupları ayrıntılı biçimde açıklanmıştır. Tezin teorik altyapısını oluşturmak amacıyla, konuyla ilgili olarak Riordan (1958) ve Stanley (1997) gibi alanında önde gelen yazarların kaynak kitaplarının yanı sıra, Derangement sayıları üzerine çalışmış pek çok araştırmacının bilimsel makalelerinden yararlanılmıştır. Tez boyunca kullanılan tüm bilgiler, ilgili kaynaklar belirtilerek sunulmuştur (Riordan 1985; Stanley 1997).

2.1. Permütasyon Grupları

Bu bölümde, sonlu kümeler üzerinde tanımlı permütasyonların yapısal özellikleri ele alınacaktır. Öncelikle permütasyon kavramı tanıtılacak ve temel nitelikleri ayrıntılı biçimde incelenecektir. Daha sonra, bir grup üzerinde tanımlanan eşleniklik bağıntısı açıklanacak ve bu bağıntı sonucunda oluşan denklik sınıfları değerlendirilecektir. Permütasyon gruplarını ayrıntılı biçimde ele alan Serge Lang'ın eseri bu bölümde temel başvuru kaynakları olarak kullanılmıştır (Lang 2002).

Tanım 2.1. $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ n elemanlı bir küme olmak üzere

$$S_n = \{f : S \rightarrow S \mid f \text{ birebir ve örten}\}$$

kümesine S nin permütasyonlarının kümesi denir ve f fonksiyonu

$$f := \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ f(a_1) & f(a_2) & \dots & f(a_n) \end{pmatrix}$$

şeklinde gösterilir (Lang 2002).

Tanım 2.2. S_n kümesinin birim elemanı I_s olarak adlandırılır. I_s , diğer bir deyişle özdeşlik fonksiyonudur ve

$$I_s := \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

şeklinde gösterilir. $f^{-1} \in S_n$ olduğu bilindiğinden, $ff^{-1} = I_s$ eşitliği sağlanır (Lang 2002).

Tanım 2.3. S_n kümesinin eleman sayısı

$$d(S_n) = n!$$

şeklinde hesaplanır.

S_n bir gruptur ve hatta n -inci mertebeden simetrik grup olarak adlandırılır (Lang 2002).

Örnek 2.4. $S = \{e, l, f\}$ şeklinde bir sonlu küme ele alındığında, S_3 kümesinin permütasyon sayısı

$$d(S_3) = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

olduğu görülür. Aşağıda S_3 kümesinin 6 adet permütasyonu verilmiştir:

$$\begin{aligned} \alpha &= \begin{pmatrix} e & l & f \\ e & l & f \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} e & l & f \\ l & e & f \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} e & l & f \\ e & f & l \end{pmatrix}, \\ \gamma &= \begin{pmatrix} e & l & f \\ l & f & e \end{pmatrix}, \quad \delta = \begin{pmatrix} e & l & f \\ f & l & e \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} e & l & f \\ f & e & l \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tanım 2.5. S_n sonlu kümesi üzerinde bir R bağıntısı tanımlanırsa,

$$R = \{(a, b) : a, b \in S \text{ ve } f^k(a) = b, k \in \mathbb{Z}\}$$

bağıntısı R 'nin bir denklik bağıntısı olduğunu ifade eder (Lang 2002).

Tanım 2.6. $a \in S$ için a 'nın denklik sınıfı

$$\begin{aligned} [a] &= \{b \in S : (a, b) \in R\} \\ &= \{b \in S : b = f^k(a)\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır ve bu kümeye a 'nın f altındaki yörüngesi denir (Lang 2002).

Denklik sınıfı şu şekilde de ifade edilebilir:

$$[a] = \{a, f(a), f^2(a), f^3(a), \dots, f^{r-1}(a)\}$$

Burada, $f^r(a) = a$ olacak şekilde r en küçük pozitif tam sayı olmak üzere,

$$f^r(a) = a$$

eşitliği sağlanır.

Tanım 2.7. f için bir sıralanış kümesi

$$(a, f(a), f^2(a), f^3(a), \dots, f^{r-1}(a))$$

şeklinde ifade edilir ve bu yapıya f 'nin bir devri denir (Lang 2002).

Örnek 2.8. S_3 kümesi için $\gamma \in S_3$ olduğunda,

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılır (Lang 2002).

Yukarıdaki örnekten yararlanılarak,

$$a \in S \text{ için } \gamma(a) = b, \gamma^2(a) = \gamma(\gamma(a)) = \gamma(b) = c, \gamma^3(a) = a$$

biçiminde a 'nın γ altındaki yörüngesi yazılabilir.

$$S = \{a, b, c\}$$

şeklinde olmak üzere, (a, b, c) ifadesi γ 'nın bir devri olarak adlandırılır (Lang 2002).

2.2. Derangement Sayıları ve Polinomları

Bu alt başlıkta Derangement sayıları ve polinomlarının tanımları incelenecek, ayrıca üreteç fonksiyonları, örnek ve grafiklerle açıklanacaktır.

Tanım 2.9 (Derangement). $\{1, 2, \dots, n\}$ kümesi için $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ bir permütasyonu olsun. Eğer bu permütasyon i bir sabit noktaya sahip değilse, yani $\forall m \in \mathbb{R}$ için $k_m \neq m$ koşulunu sağlıyorsa bu permütasyonuna 'Derangement' denir (Charalambides 2002).

Örnek 2.10. $\{E, L, I, F\}$ kümesinin permütasyonları (k_1, k_2, k_3, k_4) olsun. $\{E, L, I, F\}$ kümesinin 24 tane permütasyonu vardır fakat bunlardan kaç tane Derangementtir?

a) Sabit noktaya sahip olmayan 9 tane permütasyon (Derangementleri) vardır.

$$\begin{pmatrix} E & L & I & F \\ L & F & E & I \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E & L & I & F \\ L & I & F & E \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E & L & I & F \\ L & E & F & I \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} E & L & I & F \\ I & F & L & E \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E & L & I & F \\ I & F & E & L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E & L & I & F \\ I & E & F & L \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} E & L & I & F \\ F & E & L & I \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E & L & I & F \\ F & I & L & E \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E & L & I & F \\ F & L & I & E \end{pmatrix}.$$

b) 1 tane sabit noktaya sahip 8 tane permütasyon vardır.

$$\begin{pmatrix} E & L & I & F \\ E & I & F & L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E & L & I & F \\ L & F & I & E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E & L & I & F \\ I & L & F & E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E & L & I & F \\ F & L & E & I \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} E & L & I & F \\ E & F & L & I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E & L & I & F \\ L & I & E & F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E & L & I & F \\ I & E & L & F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E & L & I & F \\ F & F & I & L \end{pmatrix}.$$

c) 2 tane sabit noktaya sahip 6 tane permütasyon vardır.

$$\begin{pmatrix} E & L & I & F \\ E & L & F & I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E & L & I & F \\ E & F & I & L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E & L & I & F \\ E & I & L & F \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} E & L & I & F \\ F & L & I & E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E & L & I & F \\ I & L & E & F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E & L & I & F \\ L & E & I & F \end{pmatrix}.$$

d) 3 tane sabit noktaya sahip 0 tane permütasyon vardır.

e) 4 tane sabit noktaya sahip 1 tane permütasyon vardır:

$$\begin{pmatrix} E & L & I & F \\ E & L & I & F \end{pmatrix}.$$

Tanım 2.9'daki koşulları sağlayan permütasyonların sayısına ise Derangement sayısı denir.

Tanım 2.11 (Derangement sayıları). $n \in \mathbb{N}_0, t \in \mathbb{R}, |t| < 1$ olsun. d_n ile gösterilen Derangement sayıları aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$\frac{e^{-t}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \frac{t^n}{n!} \quad (2.1)$$

(Charalambides 2002).

(2.1) verilen bağıntı ile birlikte

$$d_0 = 1$$

kabul edilerek ve Cauchy çarpımı yardımıyla aşağıda verilen bağıntı elde edilir:

$$d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \quad (2.2)$$

(Charalambides 2002).

Tanım 2.12. (2.2) bağıntısından yararlanarak birkaç tane Derangement sayısı aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned}
 d_0 &= 1, \\
 d_1 &= 0, \\
 d_2 &= 1, \\
 d_3 &= 2, \\
 d_4 &= 9, \\
 d_5 &= 44, \\
 d_6 &= 256, \\
 d_7 &= 1954, \\
 d_8 &= 14833, \\
 d_9 &= 133496, \\
 d_{10} &= 1334961, \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Yukarıda verilen Derangement sayıları ile (2.2) bağıntısı kullanılarak ve $n = 1, 2, \dots$ ile $d_0 = 1$ başlangıç koşulu için aşağıdaki rekürans bağıntısı elde edilir:

$$d_n = nd_{n-1} + (-1)^n \quad (2.3)$$

(Charalambides 2002).

Sonuç 2.13. (2.2) bağıntısından ve

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

eşitliğinden yararlanılarak

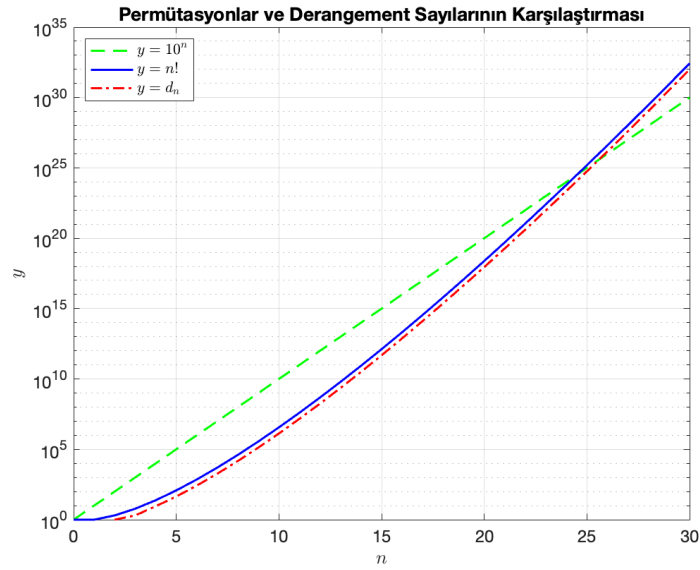
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{d_n}{n!} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} = e^{-1} \approx 0.367879 \dots$$

sonucu elde edilir.

Şekil 2.1, n elemanlı bir kümenin tüm permütasyonlarının sayısı olan $n!$, yaklaşık değeri 10^n ve Derangement sayısı olan d_n arasındaki ilişkiyi göstermektedir ve logaritmik y -ekseni sayesinde büyüme oranları daha belirgin şekilde karşılaştırılmıştır.

Derangement sayıları, $d_n \approx \frac{n!}{e}$ yaklaşımı ile $n!$ 'den sabit bir oranda daha küçük olup, $n!$ ile benzer bir büyüme gösterir. Grafik, bu iki büyüklüğün başlangıçta birbirine oldukça yakın olduğunu, ancak n arttıkça farkın belirginleştiğini ortaya koymaktadır. Buna karşın 10^n fonksiyonu, büyüme hızının daha yavaş kaldığını göstermektedir.

Sonuç olarak, bu grafik ile birlikte Derangement sayılarının faktöriyel büyüme gösterdiğini ve klasik permütasyon sayılarıyla yakın bir ilişki içerisinde olduğunu açıkça ortaya koymaktadır (Anonim 2025).



Şekil 2.1. Bir kümenin permütasyon sayısı ile Derangement sayısını karşılaştırma grafiği

Tanım 2.14 (Derangement polinomları). $n \in \mathbb{N}_0$, $t \in \mathbb{R}$, $|t| < 1$ olsun. Derangement polinomları aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$\frac{e^{(x-1)t}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x) \frac{t^n}{n!} \quad (2.4)$$

(Kim 2018b).

Teorem 2.15. $n \geq 0$ olmak üzere, Derangement polinomları ile Derangement sayıları arasındaki ilişki (2.4) bağıntısı kullanılarak aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} d_n(x) &= \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} d_m x^{n-m}, \\ &= n! \sum_{m=0}^n \frac{(x-1)^m}{m!} \end{aligned} \quad (2.5)$$

(Kim 2018b).

Örnek 2.16. (2.5) bağıntısından yararlanılarak birkaç tane Derangement polinomları aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned}
 d_0(x) &= 1, \\
 d_1(x) &= x, \\
 d_2(x) &= 2! \left(x + \frac{(x-1)^2}{2!} \right), \\
 d_3(x) &= 3! \left(x + \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} \right), \\
 d_4(x) &= 4! \left(x + \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} + \frac{(x-1)^4}{4!} \right), \\
 d_5(x) &= 5! \left(x + \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} + \frac{(x-1)^4}{4!} + \frac{(x-1)^5}{5!} \right), \\
 d_6(x) &= 6! \left(x + \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} + \frac{(x-1)^4}{4!} + \frac{(x-1)^5}{5!} + \frac{(x-1)^6}{6!} \right), \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Tanım 2.17 (*r*-Derangement sayıları). *r*-Derangement sayılarına ait üreteç fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\frac{t^r e^{-t}}{(1-t)^{r+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d_r(m) t^m}{m!}. \quad (2.6)$$

r = 0 durumunda bu ifade klasik Derangement sayılarına indirgenir ve

$$d_m := d_0(m)$$

şekilde gösterilir (Kim vd. 2018).

Yüksek mertebeden Derangement sayıları, klasik Derangement kavramının genelleştirilmiş biçimidir ve özellikle türevsel ilişkiler, üreteç fonksiyonları ve özel sayı dizileriyle kurulan bağıntılar üzerinden incelenir. Bu alanda yapılan çalışmalar, Derangement sayılarını Stirling, Bernoulli ve Cauchy sayıları gibi yapılarla ilişkilendirmiştir. Özellikle Comtet (1974), Riordan (1958) ve Brualdi (1977) gibi klasik kaynaklar, temel kombinatorik yapıların teorik temellerini atmıştır. Daha yakın dönemde ise Kim (2018), Derangement sayılarını analitik yöntemlerle ele alarak sayıların cebirsel ve uygulamalı yönleri üzerinde durmuştur. Yüksek mertebeden Derangement polinomları, hem kombinatorik hem

de analitik yaklaşımlarla ele alınarak, sayılar teorisi ve cebirsel yapılar arasında köprü kuran çalışmalarda kullanılmaktadır (Kim ve Jang 2010; Kim vd 2021).

Teorem 2.18. $t \neq 1$ olmak üzere, (2.6) bağıntısından yararlanılarak Derangement sayılarına ait yüksek mertebeden üreteç fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\left(\frac{e^{-t}}{1-t} \right)^k = \sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(k)} \frac{t^n}{n!} \quad (2.7)$$

(Bozo ve Simsek 2025).

Derangement tanımının aksine, sabit noktaya sahip permütasyonlar için, (2.1) numaralı tanımdan yararlanılarak aşağıdaki tanım verilmektedir.

Tanım 2.19. k tane sabit noktaya sahip permütasyonlarının sayısı ise aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$d_{n,k} = \frac{n!}{k!} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}$$

(Bozo ve Simsek 2024a).

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde, tez çalışmasında kullanılan özel sayı ve polinom aileleri ile bunlara ait üreteç fonksiyonlara ilişkin temel özellikler sunulacaktır. Ele alınan yapılar arasında, 2. tür Peters tipli Simsek sayıları, 1. ve 2. tür Stirling sayıları, Bernoulli sayıları, 1. tür Cauchy sayıları ve Daehee sayıları yer almaktadır. Söz konusu sayı ve polinom ailelerinin tanımları, karakteristik özellikleri ve aralarındaki analitik ilişkiler ayrıntılı biçimde incelenecektir.

3.1. Üreteç Fonksiyonlarıyla Tanımlanan Özel Sayılar ve Polinomlar

Üreteç fonksiyonları, matematiksel dizilerin ve serilerin analizinde vazgeçilmez bir araçtır. Özellikle kombinatorik problemlerde, sayı dizilerinin özelliklerini sistematik bir biçimde incelemek, kapalı formüller elde etmek ve karmaşık rekürans ilişkileri çözümlemek amacıyla yaygın biçimde kullanılmaktadır. Bununla birlikte, özel sayı dizileri ve polinomların yapısal özelliklerini ortaya koymak, aralarındaki analitik bağlantıları incelemek ve diferansiyel denklemlerden sayısal analiz yöntemlerine kadar uzanan geniş bir uygulama alanında önemli katkılar sağlamaktadır.

Tez çalışmasında önemli bir rolü olan üreteç fonksiyonları, aşağıda verildiği şekilde ele alınacaktır.

Tanım 3.1. *Herhangi bir özel sayı dizisi a_k , $k = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere, bu dizinin adi üreteç fonksiyonu $A(t)$, aşağıdaki formal kuvvet serisiyle tanımlanır:*

$$A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k.$$

$A(t)$ fonksiyonuna, a_k dizisinin adi üreteç fonksiyonu denir (Charalambides, 2002).

Tanım 3.2. *Herhangi bir özel sayı dizisi b_k , $k = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere, bu dizinin üstel üreteç fonksiyonu $B(t)$, aşağıdaki formal kuvvet serisi ile tanımlanır:*

$$B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{t^k}{k!}.$$

$B(t)$ fonksiyonuna, b_k dizisinin üstel üreteç fonksiyonu denir (Charalambides, 2002).

Cauchy çarpımı, iki sonsuz dizi veya serinin terimlerinin belirli bir kural doğrultusunda çarpılarak yeni bir seri oluşturulmasını sağlayan temel bir işlemdir. Özellikle kuvvet serileri ve üreteç fonksiyonlarının analizinde; bileşik yapıların ortaya konması, seriler arasındaki ilişkilerin incelenmesi ve karmaşık kombinatorik ifadelerin düzenlenmesinde yaygın şekilde kullanılmaktadır. Bu işlem, farklı sayı dizileri arasındaki analitik bağlantıların kurulması ve kombinatorik problemlerin çözümünde önemli bir araçtır.

Aşağıda Cauchy çarpımının tanımı sunulmaktadır.

Tanım 3.3.

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n$$

ve

$$G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n t^n$$

yakınsak iki seri olmak üzere bu serilerin Cauchy çarpımı:

$$F(t)G(t) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n t^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n x_k y_{n-k} \right) t^n$$

olarak tanımlanmaktadır (Rainville 1960).

Tanım 3.4. Artan faktöriyel (rising factorial) aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$x^{(n)} = x(x+1)(x+2) \cdots (x+n-1). \quad (3.8)$$

Azalan faktöriyel (falling factorial) ise aşağıdaki gibidir:

$$(x)_n = x(x-1)(x-2) \cdots (x-n+1) \quad (3.9)$$

(Rainville 1960).

Binom teoremi, iki terimli ifadelerin tam sayı kuvvetlerinin açılımını veren temel bir cebirsel özdeşliktir.

Tanım 3.5. Reel sayılar kümesi üzerinde, herhangi bir pozitif tam sayı n için, $(a+b)^n$ ifadesinin binom açılımı aşağıdaki şekilde verilir:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

(Abramowitz ve Stegun 1972).

Burada $\binom{n}{k}$ ifadesi binom katsayısını temsil eder ve kombinatorikte n elemanlı bir kümeden k eleman seçmenin sayısını belirtir. Binom teoremi, cebirsel açılımlar, kombinatorik analizler ve olasılık kuramında önemli bir yere sahiptir ve binom teoremi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 3.6. r herhangi bir reel sayı ve $|x| < 1$ olmak üzere:

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k,$$

ki burada $\binom{r}{k}$, genelleştirilmiş binom katsayısıdır ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2) \cdots (r-k+1)}{k!}$$

(Abramowitz ve Stegun 1972).

Binom teoreminin başka bir versiyonu olan negatif binom teoremi, üs olarak negatif tam sayılar veya reel sayılar alındığında da iki terimli ifadelerin açılımını mümkün kılar. Bu genelleme, özellikle sonsuz serilerin analizi ve üreteç fonksiyonlarının geliştirilmesi gibi alanlarda önemli bir araçtır. Ayrıca olasılık dağılımları, Taylor serileri ve fonksiyonel çözümleme gibi birçok matematiksel disiplinde de yaygın biçimde kullanılmaktadır.

Aşağıda, negatif binom teoreminin temel tanımı ve açılımı sunulacaktır.

Tanım 3.7. Herhangi bir reel sayı r ve $|x| < 1$ olmak üzere:

$$(1-x)^{-r} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r+k-1}{k} x^k$$

dir.

Burada $\binom{r+k-1}{k}$, genelleştirilmiş negatif binom katsayısıdır ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned} \binom{r+k-1}{k} &= (-1)^k \frac{-r(-r+1)(-r+2) \cdots (-r+k+1)}{k!} \\ &= (-1)^k \binom{-r}{k} \end{aligned} \quad (3.10)$$

(Charalambides 2002).

Özel olarak, (??69) bağıntısında $x = \frac{-a}{b}$ ya da $x = \frac{a}{b}$ değerleri alırsa, farklı açılımlar elde edilir.

Bu tez çalışması kapsamında incelenen özel sayı ve polinom ailelerinin temel tanımları ve özellikleri sunulacaktır. Söz konusu sayı dizileri, matematiksel analiz, kombinatorik ve sayılar teorisi alanlarında önemli bir yere sahiptir ve aralarındaki ilişkiler detaylı olarak ele alınacaktır. Bu tanımlar, ilerleyen bölümlerde gerçekleştirilecek analitik çalışmalar ve ilişkilendirmeler için gerekli teorik altyapıyı sağlamaktadır.

Aşağıda, çalışmada kullanılan özel sayı ve polinom ailelerinin tanımları verilmiştir.

Peters polinomları ve sayıları, özel sayı ve polinom kümeleri arasında yer almakta olup, rekürans ilişkileri ve üreteç fonksiyonları aracılığıyla tanımlanır. Sayılar teorisi ve kombinatorik alanlarında önemli uygulamalara sahip olan bu yapılar, aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 3.8. *Peters polinomları aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:*

$$\frac{1}{(1 + (1 + t)^\lambda)^\mu} (1 + t)^x = \sum_{n=0}^{\infty} s_n(x; \lambda, \mu) \frac{t^n}{n!}, \quad (3.11)$$

ki bu ifade $x = 0$ alındığında $s_n(0; \lambda, \mu) = s_n(\lambda, \mu)$ ifadesi ile verilen Peters sayılarının üreteç fonksiyonuna indirgenir (Simsek 2020).

Eşitlik (3.11) kullanılarak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n(x; \lambda, \mu) \frac{t^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} s_n(\lambda, \mu) \frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (x)_n \frac{t^n}{n!} \right)$$

denkleme ulaşılır. Yukarıdaki ifadeye seriler için Cauchy çarpımı uygulandıktan sonra, her iki tarafın $\frac{t^n}{n!}$ katsayıları karşılaştırılır ve aşağıdaki bağıntı elde edilir (Simsek 2019):

$$s_n(x; \lambda, \mu) = \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} (x)_{n-v} s_v(\lambda, \mu).$$

Üreteç fonksiyonları alanında önemli bir yer tutan ve Peters tipli polinomlar ailesinin bir üyesi olan 2. tür Peters tipli Simsek sayılarının ve polinomlarının üreteç fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\frac{2(1 + \lambda)^x}{\lambda^2 t + 2(\lambda - 1)} = \sum_{n=0}^{\infty} Y_{n,2}(x; \lambda) \frac{t^n}{n!}. \quad (3.12)$$

$x = 0$ için,

$$Y_{n,2}(0; \lambda) = Y_{n,2}(\lambda)$$

eşitliği kullanılarak, 2. tür Peters tipli Simsek sayılarının üreteç fonksiyonu elde edilir (Simsek 2020).

Tanım 3.9. 2. tür Peters tipli Simsek sayıları aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$\frac{2}{\lambda^2 t + 2(\lambda - 1)} = \sum_{n=0}^{\infty} Y_{n,2}(\lambda) \frac{t^n}{n!}. \quad (3.13)$$

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere (3.12) ve (3.13) denklemlerinin yardımlarıyla 2. tür Peters tipli Simsek sayıları ve polinomları arasındaki bağıntı aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$Y_{n,2}(x; \lambda) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (x)_j Y_{n-j,2}(\lambda).$$

ki burada 2. tür Peters tipli Simsek sayıları $Y_{n,2}(\lambda)$

$$Y_{n,2}(\lambda) = 2(-1)^n \frac{\lambda^{2n} n!}{(2\lambda - 2)^{n+1}} \quad (3.14)$$

ile verilir (Simsek 2020).

2. tür Peters tipli Simsek sayıları, Şimşek (2020) tarafından kombinatoriyal sayılar olarak literatüre kazandırılmış ve matematiksel analizlerde özel bir yer edinmiştir. Bu sayılar ve polinomlar ilk olarak Khan tarafından "Simsek sayıları ve polinomları" olarak adlandırılmış, daha sonra ise Küçüköğlu tarafından "2. tür Peters tipli Simsek sayıları" olarak isimlendirilmiş ve bu doğrultuda çalışmalar yapılmıştır (Khan 2020, 2022; Kucukoglu 2024a, 2024b). Bu sayıların çeşitli özellikleri, genel üreteç fonksiyonları ve uygulamaları derinlemesine incelenmiş ve sayılarla ilgili yeni özdeşlikler, bağlantılar ve genellemeler geliştirilmiştir (Kılar 2023, 2024; Kılar ve Simsek 2021; Kucukoglu 2023, 2024a). 2. tür Peters tipli Simsek sayıları, temel kombinatorik kavramların yanı sıra, sayılar teorisi, diferansiyel denklemler ve matematiksel fizik gibi disiplinlerde de etkin bir şekilde kullanılmakta olup, bu alanlarda teorik ve uygulamalı araştırmalara zenginlik katmaktadır.

Bu tez kapsamında ayrıca Stirling sayıları ve permütasyonları da kullanılacaktır. Stirling sayıları ve permütasyonları kombinatorik matematiğin temel yapı taşlarından olup permütasyonlar ve ayırık yapılar üzerinde önemli uygulamalara sahiptir. 1. tür Stirling sayıları döngü yapılarının sayımında kullanılırken, 2. tür Stirling sayıları küme bölme problemlerini ifade eder. Her iki tür de çeşitli rekürans ilişkileri ve üreteç fonksiyonları aracılığıyla tanımlanmakta olup, sayılar teorisi, diferansiyel denklemler ve olasılık gibi birçok alanda geniş uygulama alanı bulmaktadır. Tanımları aşağıda verilmiştir.

Tanım 3.10. 1. tür Stirling sayıları aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$\frac{(\log(1+t))^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} S_1(n, k) \frac{t^n}{n!}. \quad (3.15)$$

Ayrıca, 1. tür Stirling sayıları aşağıdaki eşitlik ile ifade edilir:

$$(x)_n = x(x-1)(x-2) \cdots (x-n+1) = \sum_{k=0}^n S_1(n, k)x^k$$

(Charalambides 2002).

İlgili sayıların temel özellikleri aşağıda sunulmuştur.

1. tür Stirling sayıları için:

$$S_1(0, 0) = 1,$$

$$S_1(0, k) = 0, \quad k > 0,$$

$$S_1(n, 0) = 0, \quad n > 0,$$

$$S_1(n, k) = 0, \quad k > n.$$

1. tür Stirling sayılarının rekürans bağıntısı aşağıdaki gibidir:

$$S_1(n+1, k) = -nS_1(n, k) + S_1(n, k-1) \quad (3.16)$$

(Charalambides 2002).

Denklem (3.16) kullanılarak 1. tür Stirling sayılarının bazı değerleri Çizelge 3.1 ile verilmiştir:

Çizelge 3.1: 1. tür Stirling sayılarının bazı değerleri

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
2	0	-1	1	0	0	0
3	0	2	-3	1	0	0
4	0	-6	11	-6	1	0
5	0	24	-50	35	-10	0

Tanım 3.11. 2. tür Stirling sayıları aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$\frac{(e^t - 1)^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} S_2(m, n) \frac{t^m}{m!}. \quad (3.17)$$

İlgili sayıların bazı temel özellikleri aşağıda verilmiştir:

- Eğer $m = n$ veya $m = n = 0$ ise

$$S_2(m, n) = S_2(0, 0) = 1,$$

- Eğer $m \neq 0, n \neq 0$ ve $n > m$ ise

$$S_2(m, n) = S_2(m, 0) = S_2(0, n) = 0$$

(Charalambides 2002).

2. tür Stirling sayılarının rekürans bağıntısı aşağıdaki gibidir:

$$S_2(n, k) = S_2(n-1, k-1) + k \cdot S_2(n-1, k). \quad (3.18)$$

Denklem (3.18) kullanılarak 2. tür Stirling sayılarının bazı değerleri Çizelge 3.2 ile verilmiştir:

Çizelge 3.2: 2. tür Stirling sayılarının bazı değerleri

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0
3	0	1	3	1	0	0
4	0	1	7	6	1	0
5	0	1	15	25	10	1

Üreteç fonksiyonları ve rekürans ilişkileri ile tanımlanan Bernoulli sayıları ve polinomları, matematiksel problemlerin çözümünde temel araçlardan biridir ve aşağıda tanımlanmıştır.

Tanım 3.12. Bernoulli polinomları aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$\frac{t}{e^t - 1} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

(Charalambides 2002).

Yukarıdaki eşitlikten $x = 0$ için Bernoulli sayıları elde edilir.

Tanım 3.13. *Bernoulli sayıları aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:*

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$$

(Charalambides 2002).

Bernoulli sayılarının ilk birkaç terimi Çizelge 3.3 ile verilmiştir:

Çizelge 3.3: Bernoulli sayılarının bazı değerleri

$n \setminus k$	B_n
0	1
1	$-1 \setminus 2$
2	$1 \setminus 6$
3	0
4	$-1 \setminus 30$
5	0

Daehee sayıları ve polinomları, kombinatorik sayılar ailesine ait özel dizilerdir ve özellikle son yıllarda matematiksel analiz ve sayılar teorisi çalışmalarında önem kazanmıştır. Bu sayılar, belirli üreteç fonksiyonları aracılığıyla tanımlanmakta olup, Bernoulli ve Stirling gibi sayı dizileriyle çeşitli bağıntılar içermektedir. Daehee sayıları, özellikle diferansiyel denklemler, özel fonksiyonlar ve diziler arası ilişkilerin incelenmesinde kullanılır. Ayrıca, bu sayılar ve polinomlar, yeni yöntemlerle araştırılarak yeni özdeşlikler ve özellikler ortaya konmaktadır (Kim 2011; Kim ve Kim 2013; Komatsu ve Simsek 2018).

Tanım 3.14. *Daehee polinomları aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:*

$$\frac{\log(1+t)}{t} (1+t)^x = \sum_{n=0}^{\infty} D_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

(Kim 2011; Kim ve Kim 2013).

Yukarıdaki eşitlikte $x = 0$ için Daehee sayıları elde edilir.

Tanım 3.15. *Daehee sayıları aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:*

$$\frac{\log(1+t)}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \frac{t^n}{n!}$$

(Kim 2013).

Daehee sayılarının ilk birkaç terimi Çizelge 3.4 ile verilmiştir:

Çizelge 3.4: Daehee sayılarının bazı değerleri

$n \setminus k$	D_n
0	1
1	$-1 \setminus 2$
2	$1 \setminus 3$
3	$-1 \setminus 4$
4	$1 \setminus 5$
5	$-1 \setminus 6$

Daehee sayıları için aşağıda verilen eşitlikler (Kim 2013) çalışmasında görülmektedir.

$$(-1)^m m! = (m+1) \sum_{j=0}^m S_1(m, j) B_j,$$

$$(-1)^m m! = (m+1) D_m.$$

Bir başka şekilde $m \in \mathbb{N}_0$ ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere, Daehee sayılarının eşitliği aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$D_m = \sum_{v=0}^m S_1(m, v) B_v \quad (3.19)$$

(Kim 2013; Simsek 2021).

Cauchy sayıları, özellikle 1. ve 2. tür olmak üzere iki farklı çeşidi bulunan özel sayı dizileridir. Bu sayılar, permütasyonların belirli özelliklerinin sayımında ve üreteç fonksiyonları aracılığıyla tanımlanırlar. Cauchy sayıları, Bernoulli ve Stirling sayıları gibi sayı dizileriyle çeşitli bağlantılar gösterir ve kombinatorik analiz, sayılar teorisi ile matematiksel fizik alanlarında önemli uygulamalara sahiptir.

Tanım 3.16. 1. tür Cauchy sayıları aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$C_n = \int_0^1 (x)_n dx \quad (3.20)$$

(Roman 1984).

1. tür Cauchy sayılarının ilk birkaç terimi Çizelge 3.5 ile verilmiştir:

Çizelge 3.5: 1. tür Cauchy sayılarının bazı değerleri

$n \setminus k$	D_n
0	1
1	$1 \setminus 2$
2	$-1 \setminus 6$
3	$1 \setminus 4$
4	$-19 \setminus 30$
5	$9 \setminus 4$

Bu bölümün sonuna kadar tez kapsamında ele alınan özel sayı ve polinom ailelerinin tanımları ve temel özellikleri sunulmuştur. Söz konusu sayı dizileri arasındaki ilişkiler ve üretic fonksiyonları aracılığıyla ortaya konan özellikler, ilerleyen bölümlerde gerçekleştirilecek çalışmalar için bir temel oluşturmuştur. Bu teorik yapı doğrultusunda elde edilen bulgular ve sonuçlara bir sonraki bölümde detaylı olarak sunulacaktır.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, tez çalışmasının merkezinde yer alan Derangement sayılarına ve bunlara bağlı olarak tanımlanan polinomlara ilişkin elde edilen sonuçlar sunulmakta; ayrıca bu yapıların diğer özel sayılar ve fonksiyonlarla olan ilişkileri kapsamlı bir şekilde incelenmektedir.

4.1. Derangement Sayıları ve Yüksek Mertebeden Derangement Sayıları

Derangement sayılarının üreteç fonksiyonu üzerinde ayrıntılı bir çalışma yapılmış ve k . mertebeden Derangement sayıları için çeşitli özel ifadeler elde edilmiştir. Bu ifadeler, söz konusu sayıların yapısını ve diğer matematiksel nesnelerle olan bağlantılarını açıklamak açısından önemli bir rol oynamaktadır.

Teorem 4.1. $m \in \mathbb{N}$ ve $n_m \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere, aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\sum_{k=0}^{n_m} \binom{n_m}{k} \frac{(-m)_k}{(n_m)!} d_{n_m-k} = \sum_{k_m=0}^{n_m} \sum_{k_{m-1}=0}^{n_{m-1}} \cdots \sum_{k_1=0}^{n_1} d_{k_1} \frac{1}{k_1!}$$

(Bozo ve Simsek 2023a).

İspat (2.1) denkleminin her iki tarafı ardışık olarak m kez $\frac{1}{1-t}$ ile çarpıldığında, aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-t)^2} e^{-t} &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{n_1} d_{k_1} \frac{t^n}{k_1!}, \\ \frac{1}{(1-t)^3} e^{-t} &= \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{n_2} \sum_{k_1=0}^{n_1} d_{k_1} \frac{t^n}{k_1!}, \\ &\vdots \\ \frac{1}{(1-t)^{m+1}} e^{-t} &= \sum_{n_m=0}^{\infty} \left(\sum_{k_m=0}^{n_m} \sum_{k_{m-1}=0}^{n_{m-1}} \cdots \sum_{k_1=0}^{n_1} d_{k_1} \frac{1}{k_1!} \right) t^n. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Elde edilen eşitlikte benzer işlemlerle,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-t)^{m+1}} e^{-t} &= \frac{1}{(1-t)^m} \cdot \frac{1}{(1-t)} e^{-t} \\ &= \frac{1}{(1-t)^m} \sum_{n=0}^{\infty} d_n \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{n} t^n \sum_{n=0}^{\infty} d_n \frac{t^n}{n!}. \end{aligned}$$

Cauchy çarpımı uygulayarak eşitliğe ulaşılır. Yukarıdaki eşitlik temel alınarak negatif binom teoremi uygulanır ve böylece aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-t)^{m+1}} e^{-t} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-m)_k}{(n)!} d_{n-k} t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n_m} \binom{n_m}{k} \frac{(-m)_k}{(n_m)!} d_{n_m-k} t^n. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Denklem (4.21) ve (4.22)'nin sol tarafları eşit olduğundan, aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$\sum_{n_m=0}^{\infty} \left(\sum_{k_m=0}^{n_m} \sum_{k_{m-1}=0}^{n_{m-1}} \cdots \sum_{k_1=0}^{n_1} d_{k_1} \frac{1}{k_1!} \right) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n_m} \binom{n_m}{k} \frac{(-m)_k}{(n_m)!} d_{n_m-k} t^n.$$

Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafında bulunan t^n katsayıları karşılaştırıldığında teorem ispatlanmış olur. $\square$

Teorem 4.2. $n \in \mathbb{N}_0$ ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere, aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$(k)_n = n! \sum_{j=0}^n \frac{k^{n-j}}{(n-j)! j!} d_j^{(k)}$$

(Bozo ve Simsek 2023a).

İspat Denklem (2.7)'te verilen eşitlik üzerinde bazı işlemler uygulanarak:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-t)^k} &= e^{tk} \sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(k)} \frac{t^n}{n!}, \\ \frac{1}{(1-t)^k} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kt)^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(k)} \frac{t^n}{n!}. \end{aligned}$$

Bu iki kuvvet serisi Cauchy çarpımı ile çarpılarak aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-k}{n} (-1)^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \frac{k^{n-j}}{(n-j)! j!} d_j^{(k)} t^n \quad (4.23)$$

eşitlik elde edilir.

Her iki tarafın t^n katsayıları karşılaştırıldığında,

$$\binom{-k}{n} (-1)^n = \sum_{j=0}^n \frac{k^{n-j}}{(n-j)! j!} d_j^{(k)}$$

eşitlik elde edilir.

Negatif binom katsayılarının eşitliğinden yararlanılarak,

$$(-1)^n \frac{(-k)_n}{n!} = \sum_{j=0}^n \frac{k^{n-j}}{(n-j)! j!} d_j^{(k)}$$

(4.23) ifadesi elde edilir. Azalan faktöriyel ilişkisinden yararlanılarak aşağıdaki eşitliğe ulaşılır:

$$(-1)^n (-1)^n (k)_n = n! \sum_{j=0}^n \frac{k^{n-j}}{(n-j)! j!} d_j^{(k)}.$$

Böylece teorem ifade ispatlanmış olur. $\square$

4.2. Yüksek Mertebeden Derangement Sayıları ile Birlikte Binom Tipli Polinomların Yeni Sınıfı için Üreteç Fonksiyonu

Bu bölümde, yüksek mertebeden Derangement sayılarıyla ilişkili binom tipli polinomların yeni bir sınıfı için bir üreteç fonksiyonu tanımlanmaktadır.

$$G(t, x; k) = (1 - t)^{x-k} e^{-kt} = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x; k) \frac{t^m}{m!}. \quad (4.24)$$

Yukarıda tanımlanan üreteç fonksiyonunda $x = 0$ alınırsa, polinom ailesine ait katsayılar, k . mertebeden Derangement sayılarıyla ilişkili olarak aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$P_m(0; k) = d_m^{(k)}.$$

Bu eşitlik, tanımlanan polinom ailesinin klasik Derangement sayılarını kapsayan daha genel bir yapıya sahip olduğunu göstermektedir.

Teorem 4.3. $m \in \mathbb{N}_0$ ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$P_m(x; k) = (-1)^m \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} k^{m-j} (x - k)_j$$

eşitliği sağlanır (Bozo ve Simsek 2025).

İspat $|t| < 1$ koşulu altında, (4.24) numaralı denklemde yer alan üreteç fonksiyona Binom teoremi uygulanarak aşağıdaki açılım elde edilir:

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x; k) \frac{t^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-k)^m}{m!} t^m \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x - k)_m}{m!} (-1)^m t^m.$$

Bu iki kuvvet serisi Cauchy çarpımı ile çarpılarak ve sağ tarafı, her terimi $m!$ ile çarpıp aynı değere bölerek yeniden düzenlenir ve aşağıdaki biçim elde edilir:

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x; k) \frac{t^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\sum_{j=0}^m \binom{m}{j} k^{m-j} (x-k)_j \right) \frac{t^m}{m!}.$$

Her iki tarafta $\frac{t^m}{m!}$ terimlerinin katsayıları karşılaştırıldığında, teoremden verilen eşitlik elde edilmiş olur. $\square$

Teorem 4.4. $m \in \mathbb{N}_0$ ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$P_m(x; k) = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (x)_{m-j} d_j^{(k)} \quad (4.25)$$

eşitliği sağlanır (Bozo ve Simsek 2025).

İspat (2.7) ve (4.24) numaralı bağıntılar birlikte kullanılarak aşağıdaki seri çarpımı elde edilir:

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x; k) \frac{t^m}{m!} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{d_m^{(k)}}{m!} t^m \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x)_m}{m!} t^m \right).$$

Cauchy çarpımı uygulanarak, bu iki kuvvet serisinin çarpımı aşağıdaki eşitlik şeklinde yazılır:

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x; k) \frac{t^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^m (x)_{m-j} d_j^{(k)} \frac{t^m}{(m-j)!j!}.$$

Yukarıdaki ifadenin yapısı korunarak, sağ taraf $m!$ ile çarpılıp aynı ifadeye bölünerek yeniden düzenlenir ve şu forma dönüştürülür:

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x; k) \frac{t^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (x)_{m-j} d_j^{(k)} \frac{t^m}{m!}.$$

Son olarak, her iki tarafta $\frac{t^m}{m!}$ terimlerinin katsayıları karşılaştırıldığında, teoremden verilen eşitlik elde edilmiş olur. $\square$

$P_m(x; k)$ polinomu ile 1. tür Stirling sayıları arasındaki ilişki, (4.25) ve (3.9) numaralı bağıntılar yardımıyla elde edilmekte olup, bu ilişki aşağıdaki Sonuç 4.5'te verilmiştir:

$$\begin{aligned} P_m(x; k) &= \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (x)_{m-j} d_j^{(k)} \\ &= \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} d_j^{(k)} \sum_{r=0}^{m-j} S_1(m-j, r) x^r. \end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitlikte yer alan iki sonlu toplam üzerinde gerçekleştirilen düzenlemeler sonucunda Sonuç 4.5 elde edilmiştir.

Sonuç 4.5. $m \in \mathbb{N}_0$ ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$P_m(x; k) = \sum_{j=0}^m \sum_{r=0}^{m-j} \binom{m}{j} S_1(m-j, r) d_j^{(k)} x^r \quad (4.26)$$

eşitliği sağlanır.

4.3. $P_m(x; k)$ Polinomlarının Türev Formülü

Bu alt bölümde, $P_m(x; k)$ polinomlarının türevlerine ilişkin formüller sunulmaktadır. Türev operatörü $\frac{d^v}{dx^v}$, (4.24) numaralı üreteç fonksiyonuna uygulanarak aşağıdaki genel türev bağıntısı elde edilir:

$$\frac{d^v}{dx^v} \{G(t, x; k)\} = (\log(1-t))^v G(t, x; k). \quad (4.27)$$

Teorem 4.6. $m, v \in \mathbb{N}_0$ ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\frac{d^v}{dx^v} \{P_m(x; k)\} = v! \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (-1)^{m-j} S_1(m-j, v) P_j(x; k)$$

eşitliği sağlanır (Bozo ve Simsek 2025).

İspat (4.27) denklemi, (3.15) bağıntısı kullanılarak aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d^v}{dx^v} \{P_m(x; k)\} \frac{t^m}{m!} &= (\log(1-t))^v \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x; k) \frac{t^m}{m!} \\ &= v! \frac{(\log(1-t))^v}{v!} \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x; k) \frac{t^m}{m!} \\ &= v! \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m S_1(m, v) \frac{t^m}{m!} \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x; k) \frac{t^m}{m!}. \end{aligned}$$

Yukarıdaki ifadeye serilerin Cauchy çarpımı uygulanarak,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{d^v}{dx^v} \{P_m(x; k)\} \frac{t^m}{m!} = v! \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} S_1(m-j, v) P_j(x; k) \frac{t^m}{(m-j)!j!}$$

elde edilir.

Sağ taraf, ifadeyi değiştirmeden $m!$ ile çarpılıp aynı ifadeye bölünerek yeniden düzenlenir:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{d^v}{dx^v} \{P_m(x; k)\} \frac{t^m}{m!} = v! \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (-1)^{m-j} S_1(m-j, v) P_j(x; k) \frac{t^m}{m!}.$$

Son olarak, her iki taraftaki $\frac{t^m}{m!}$ terimlerinin katsayıları karşılaştırılarak teorem elde edilir. $\square$

Teorem 4.7. $m, v \in \mathbb{N}_0$ ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\frac{d^v}{dx^v} \{P_m(x; k)\} = \sum_{j=0}^m \sum_{r=0}^{m-j} \binom{m}{j} S_1(m-j, r) d_j^{(k)}(r)_v x^{r-v}$$

eşitliği sağlanır (Bozo ve Simsek 2025).

İspat Türev operatörü $\frac{d^v}{dx^v}$, (4.26) numaralı ifadeye uygulanarak,

$$\frac{d^v}{dx^v} \{P_m(x; k)\} = \sum_{j=0}^m \sum_{r=0}^{m-j} \binom{m}{j} S_1(m-j, r) d_j^{(k)}(r)_v \frac{d^v}{dx^v} \{x^r\}$$

ifadesi elde edilir.

Bu nedenle türev işlemi sonucu,

$$\frac{d^v}{dx^v} \{P_m(x; k)\} = \sum_{j=0}^m \sum_{r=v}^{m-j} \binom{m}{j} S_1(m-j, r) d_j^{(k)}(r)_v x^{r-v}$$

olarak yazılabilir.

Böylece, $P_m(x; k)$ polinomlarının v -inci türevlerinin açık formülü elde edilmiş olur.

$\square$

4.4. $P_m(x; k)$ Polinomlarının İntegral Formülü

Bu bölümde, $P_m(x; k)$ polinomlarına ilişkin integral formül elde edilmektedir. Bu amaçla, (4.25) numaralı bağıntının her iki tarafına x değişkenine göre $[0, 1]$ aralığında belirli integral uygulanmakta ve aşağıdaki ifade elde edilmektedir:

$$\int_0^1 P_m(x; k) dx = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} d_j^{(k)} \int_0^1 (x)_{m-j} dx. \quad (4.28)$$

Teorem 4.8. $m \in \mathbb{N}_0$ ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\int_0^1 P_m(x; k) dx = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} C_{m-j} d_j^{(k)} \quad (4.29)$$

eşitliği sağlanır (Bozo ve Simsek 2025).

İspat İspat, (4.28) numaralı bağıntı esas alınarak gerçekleştirilir. Buna göre,

$$P_m(x; k) = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} d_j^{(k)} (x)_{m-j}$$

olduğundan, her iki tarafın $x \in [0, 1]$ aralığında belirli integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} \int_0^1 P_m(x; k) dx &= \int_0^1 \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} d_j^{(k)} (x)_{m-j} dx \\ &= \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} d_j^{(k)} \int_0^1 (x)_{m-j} dx \end{aligned}$$

elde edilir. Buradaki integraller, 1. tür Cauchy sayılarının (3.20) numaralı tanımı ile ilişkilendirilerek, teoremden verilen eşitlik elde edilir. $\square$

Teorem 4.9. $m \in \mathbb{N}_0$ ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\int_0^1 P_m(x; k) dx = \sum_{j=0}^m \sum_{d=0}^{m-j} \binom{m}{j} \frac{S_1(m-j, d) d_j^{(k)}}{d+1} \quad (4.30)$$

eşitliği sağlanır (Bozo ve Simsek 2025).

İspat Sonuç, (4.26) numaralı bağıntının $x \in [0, 1]$ aralığında belirli integrali alınarak elde edilir:

$$\begin{aligned} \int_0^1 P_m(x; k) dx &= \int_0^1 \sum_{j=0}^m \sum_{d=0}^{m-j} \binom{m}{j} S_1(m-j, d) d_j^{(k)} x^d dx \\ &= \sum_{j=0}^m \sum_{d=0}^{m-j} \binom{m}{j} S_1(m-j, d) d_j^{(k)} \int_0^1 x^d dx. \end{aligned}$$

Buradaki integraller klasik şekilde hesaplanarak,

$$\int_0^1 x^d dx = \frac{1}{d+1}$$

eşitliğiyle birlikte, teoremden verilen sonuç elde edilir. $\square$

Teorem 4.10. $m \in \mathbb{N}_0$ ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\sum_{j=0}^m \sum_{d=0}^{m-j} \binom{m}{j} d_j^{(k)} \left(\frac{S_1(m-j, d)}{d+1} - C_{m-j} \right) = 0 \quad (4.31)$$

dir (Bozo ve Simsek 2025).

İspat (4.29) ve (4.30) numaralı eşitlikler karşılaştırıldığında,

$$\sum_{j=0}^m \sum_{d=0}^{m-j} \binom{m}{j} \frac{S_1(m-j, d)}{d+1} d_j^{(k)} = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} C_{m-j} d_j^{(k)}$$

elde edilir.

Bu eşitlik, terimler birleştirilerek,

$$\sum_{j=0}^m \binom{m}{j} d_j^{(k)} \left(\sum_{d=0}^{m-j} \frac{S_1(m-j, d)}{d+1} - C_{m-j} \right) = 0$$

şeklinde yazılır.

Böylece, teoremden verilen ifade doğrudan elde edilmiş olur. $\square$

(4.31) numaralı denkleme karşılık gelen ve farklı yöntemlerle de kanıtlanabilir nitelikte olan aşağıdaki bağıntı, sonuç olarak sunulmaktadır.

Sonuç 4.11. $m \in \mathbb{N}_0$ ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\sum_{d=0}^{m-j} \frac{S_1(m-j, d)}{d+1} - C_{m-j} = 0$$

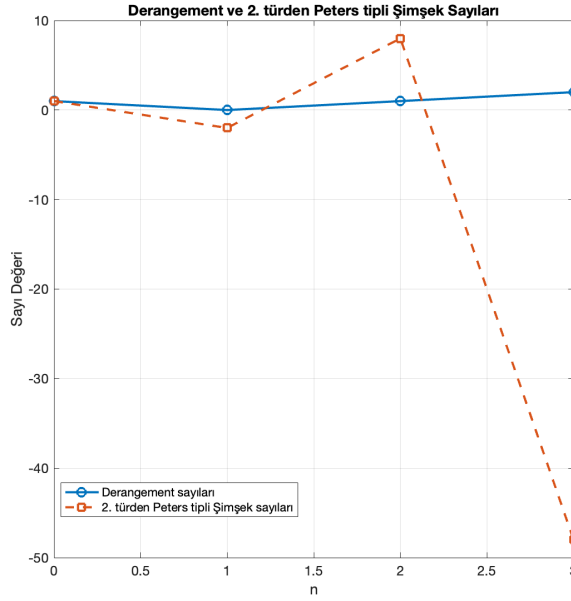
sonucunu verir.

4.5. d_n ve $Y_{n,2}(\lambda)$ Sayıları Arasındaki İlişki

Bu bölümde, Derangement sayıları ile 2. tür Peters tipli Simsek sayıları arasındaki yapısal ilişki, her iki sayı dizisinin üreteç fonksiyonları üzerinden incelenecektir.

Şekil 4.2 ile Derangement sayıları ile 2. tür Peters tipli Simsek sayılarının $\lambda = 1$ durumunda ilk terimleri karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Grafik, $n = 0$ ile $n = 3$ aralığında inceleme sunmaktadır.

Derangement sayılarının göreceli olarak yavaş ve pozitif bir artış sergilediği görülürken, 2. tür Peters tipli Simsek sayılarının alternatif işaretli ve üstel büyüme eğiliminde olduğu dikkat çekmektedir.



Şekil 4.2. Derangement ve 2. tür Peters tipli Simsek sayılarının karşılaştırma grafiği

Teorem 4.12. $n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k = n! \quad (4.32)$$

eşitliği sağlanır (Bozo ve Simsek 2023b).

İspat Bu ispat, (3.13) numaralı denklem temel alınarak gerçekleştirilir. Aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\frac{-1}{1 - \frac{\lambda^2}{2(1-\lambda)}t} = (1 - \lambda) \sum_{n=0}^{\infty} Y_{n,2}(\lambda) \frac{t^n}{n!}.$$

Eşitliğin her iki tarafı, ifadenin yapısını değiştirmeden $e^{-\frac{t\lambda^2}{2(1-\lambda)}}$ ile çarpılıp bölünerek yeniden düzenlenir. Bu durumda Derangement sayılarını içeren üreteç fonksiyonu açık biçimde ortaya çıkar:

$$-\sum_{n=0}^{\infty} d_n \frac{\lambda^{2n}}{2^n(1-\lambda)^n} \frac{t^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2n}}{2^n(1-\lambda)^n} \frac{t^n}{n!} = (1 - \lambda) \sum_{n=0}^{\infty} Y_{n,2}(\lambda) \frac{t^n}{n!}.$$

Sol tarafta iki kuvvet serisinin çarpımı olduğundan, klasik Cauchy çarpımı uygulanır ve şu ifade elde edilir:

$$-\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n d_k \frac{\lambda^{2k}}{2^k(1-\lambda)^k} \frac{t^k}{k!} \cdot \frac{\lambda^{2(n-k)}}{2^{n-k}(1-\lambda)^{n-k}} \frac{t^{n-k}}{(n-k)!} = (1 - \lambda) \sum_{n=0}^{\infty} Y_{n,2}(\lambda) \frac{t^n}{n!}.$$

Sadeleştirmeler yapıp her iki taraf $n!$ ile çarpıldığında, karşılıklı katsayılar kıyaslanarak şu eşitlik elde edilir:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k \frac{-\lambda^{2n}}{2^n(1-\lambda)^{n+1}} = Y_{n,2}(\lambda).$$

Bu noktada, Derangement sayılarını tanımlayan üreteç fonksiyonu tanımı kullanılarak denklem şu hale gelir:

$$\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \binom{n}{k} (-1)^{j-1} \frac{k!}{j!} = Y_{n,2}(\lambda) \cdot \frac{2^n(1-\lambda)^{n+1}}{\lambda^{2n}}.$$

Buradan hareketle, (3.14) numaralı tanım da dikkate alındığında aşağıdaki bağıntıya ulaşılır:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \binom{n}{k} (-1)^j \frac{k!}{j!} &= 2(-1)^n \frac{\lambda^{2n} n!}{(2\lambda - 2)^{n+1}} \cdot \frac{2^n(1-\lambda)^{n+1}}{\lambda^{2n}} (-1), \\ \sum_{k=0}^n k! \sum_{j=0}^k \binom{n}{k} \frac{(-1)^j}{j!} &= n!. \end{aligned}$$

Bu sonuç, (4.32) numaralı eşitliği doğrular. Ayrıca, söz konusu eşitlik literatürde farklı yöntemlerle de ispatlanmıştır. Bu çalışmada sunulan yöntem, Wallis ve George'un [35, Problem 4, s. 101] eserinde yer alan problem için alternatif bir çözüm olarak değerlendirilebilir. $\square$

Teorem 4.12'nin ispatı sonucunda, Derangement sayıları ile 2. tür Peters tipli Simsek sayıları arasındaki ilişki aşağıda sonuç olarak sunulmuştur.

Sonuç 4.13. $n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k = - \left(\frac{2}{\lambda^2} \right)^n (1-\lambda)^{n+1} Y_{n,2}(\lambda)$$

eşitliği sağlanmaktadır.

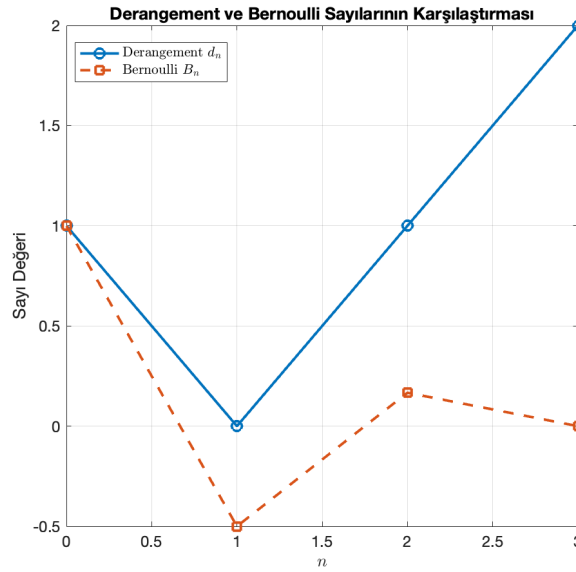
4.6. d_n , $d_n^{(k)}$, $S_1(m, j)$, $S_2(m, j)$, Bernoulli Sayıları ve Daehee Sayıları Arasındaki İlişkiler

Bu bölümde, Derangement sayıları, Yüksek mertebeden Derangement sayıları, 1. tür Stirling sayıları, 2. tür Stirling sayıları, Bernoulli sayıları ve Daehee sayıları gibi çeşitli özel sayı kümeleri arasındaki analitik ve yapısal ilişkiler incelenecektir. Bu özel sayıların

üreteç fonksiyonları aracılığıyla birbirleriyle olan bağıntılarından yararlanılarak çeşitli formüller verilecektir ve Derangement için farklı çalışmalarda yararlanılmıştır (Bozo ve Simsek 2024a, 2024b, 2024c).

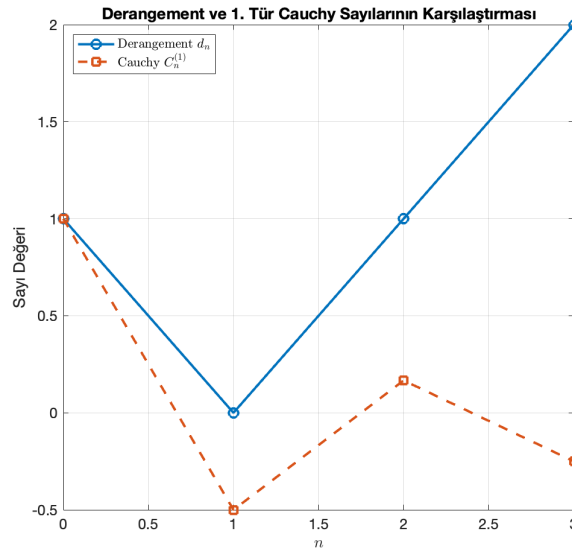
Bu bölümde, Derangement sayılarına karşılık gelen farklı özel sayı türleriyle olan sayısal ilişkiler grafiksel olarak incelenmiştir. Her grafik, Derangement sayılarının sırasıyla Bernoulli, 1. tür Cauchy, Daehee ve 1. ve 2. tür Stirling sayılarıyla nasıl bir değişim gösterdiğini görselleştirmektedir. Bu karşılaştırmalar, aralarındaki büyüme hızları, işaret değişimleri ve yapısal benzerlikler açısından fikir vererek, analitik ilişkilerin sezgisel olarak anlaşılmasını kolaylaştırmaktadır.

Şekil 4.3 ile Derangement sayıları ile Bernoulli sayılarının ilk terimleri karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Grafik, $n = 0$ ile $n = 3$ aralığında bu iki dizinin benzer büyüklükte değerlere sahip olduğunu göstermektedir.



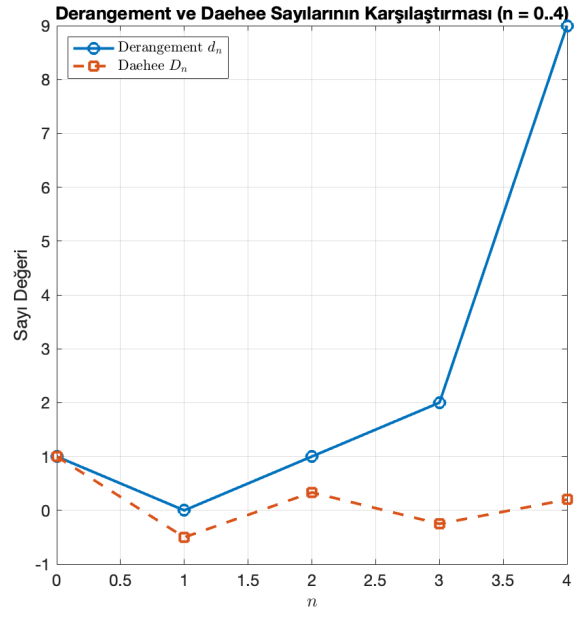
Şekil 4.3. Derangement ve Bernoulli sayıları karşılaştırması

Şekil 4.4 ile $n = 0$ ile $n = 3$ aralığında Derangement sayıları ile 1. tür Cauchy sayıları karşılaştırılmıştır. Grafikte görüldüğü üzere Derangement sayıları n büyüdükçe üstel olarak artarken, 1. tür Cauchy sayılarının büyüklükleri sınırlı kalmakta ve hatta bazı terimlerde işaret değiştirmektedir. Her ne kadar bu grafik için ayrıca bir fark eğrisi çizilmemiş olsa da, Derangement sayıları ile 1. tür Cauchy sayıları dizileri arasındaki farkın da belirli bir noktadan sonra üstel olarak arttığı söylenebilir.



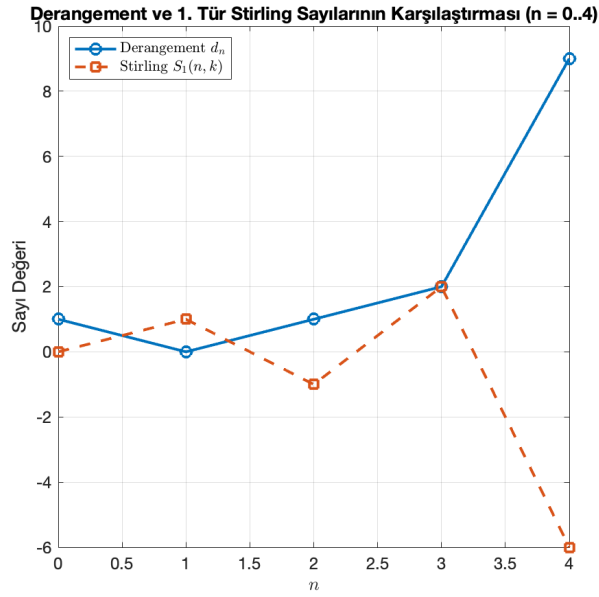
Şekil 4.4. Derangement ve 1. Tür Cauchy sayıları karşılaştırması

Şekil 4.5 ile $n = 0$ ile $n = 4$ aralığında Derangement sayıları ile Daehee sayıları karşılaştırılmıştır. Grafikte her iki dizi benzer büyüklüklere sahip olup, bazı noktalarda değerleri birbirine oldukça yakındır. Ancak görüldüğü üzere Derangement sayıları arttıkça üstel şekilde büyürken, Daehee sayıları oldukça sınırlı kalmakta ve bazı değerlerde işaret değiştirmektedir.



Şekil 4.5. Derangement ve Daehee sayıları karşılaştırması

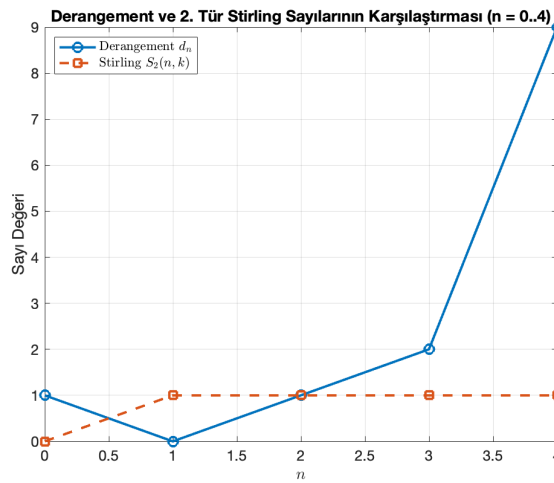
Şekil 4.6 ile Derangement sayıları ile 1. tür Stirling sayıları karşılaştırılmıştır. Grafikte her iki sayı dizisi benzer büyüklüklerde olup negatif ve pozitif değerler arasında dönüşümlü davranışlar sergilemektedir. Bu benzerlik, her iki dizinin permütasyon temelli yapılara dayanmasından kaynaklanmaktadır. Bu da uzun vadede iki dizinin büyüme hızlarının ve işaret yapılarının belirgin şekilde farklılaştığını göstermektedir.



Şekil 4.6. Derangement ve 1. tür Stirling sayıları karşılaştırması

Şekil 4.7 ile Derangement sayıları ile 2. tür Stirling sayıları karşılaştırılmıştır. Grafikte her iki dizinin pozitif ve sınırlı değerler aldığı, ancak artış eğilimlerinin farklılaştığı görülmektedir. 2. tür Stirling sayıları, alt kümelerle ayrılma yapısı nedeniyle daha düzenli artış gösterirken; Derangement sayıları daha değişken bir yapı izlemektedir.

Dolayısıyla, bu iki sayı dizisi küçük n değerlerinde benzer düzeylerdeyken, daha büyük n 'lerde büyüme hızları açısından anlamlı bir fark oluşmaktadır.



Şekil 4.7. Derangement ve 2. tür Stirling sayıları karşılaştırması

Şimdi ise bu sayıların yapısal özellikleri ile ilişkili elde edilen bazı teoremler verilecektir.

Teorem 4.14. $m \in \mathbb{N}_0$ ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$d_m^{(k)} = (-1)^m \sum_{j=0}^m \binom{-k}{j} \binom{m}{j} j! k^{m-j}$$

eşitliği sağlanır (Bozo ve Simsek 2025).

İspat Temel alınan (2.7) numaralı eşitlikte $|t| < 1$ koşulu altında binom teoremi uygulanarak ifade iki ayrı seri biçiminde düzenlenir. Ardından, bu serilerin çarpımı Cauchy çarpım kuralı kullanılarak hesaplanır ve yapılan dönüşümler sonucunda istenilen eşitliğe ulaşılır.

$$\frac{1}{(1-t)^k} e^{-kt} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \binom{-k}{j} (-1)^j t^j \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-k)^n t^n}{n!} \right).$$

Yukarıdaki iki serinin çarpımı için Cauchy çarpımı uygulanarak,

$$\sum_{m=0}^{\infty} d_m^{(k)} \frac{t^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^m \binom{-k}{j} (-1)^j \frac{(-k)^{m-j}}{(m-j)!} t^m$$

eşitliği elde edilir.

Sağ taraf, $m!$ ve $j!$ ile çarpılıp bölünerek şu şekilde düzenlenir:

$$\sum_{m=0}^{\infty} d_m^{(k)} \frac{t^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \sum_{j=0}^m \binom{-k}{j} k^{m-j} \binom{m}{j} j! \frac{t^m}{m!}.$$

Bu eşitliğin her iki tarafında $\frac{t^m}{m!}$ katsayıları karşılaştırıldığında teoremden verilen eşitlik elde edilir. $\square$

Teorem 4.15. $n \in \mathbb{N}_0$ ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$d_n^{(k)} = n! \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{-k}{n-j} \frac{k^j}{j!}$$

eşitliği sağlanır (Bozo ve Simsek 2023a).

İspat (2.7) numaralı eşitlikten hareketle başlar. Bu eşitliğe binom açılımı uygulanarak ifade iki seri çarpımı şeklinde yeniden yazılır. Elde edilen iki serinin çarpımı için klasik Cauchy çarpımı yöntemi uygulanarak aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(k)} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{-k}{n-j} \frac{k^j}{j!} t^n.$$

Her iki tarafın t^n katsayıları karşılaştırıldığında, aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$d_n^{(k)} = n! \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{-k}{n-j} \frac{k^j}{j!}.$$

Böylece teorem ispatlanmış olur. $\square$

Teorem 4.16. $n \in \mathbb{N}_0$ ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{k}{n-j} d_j^{(k)} = k^n$$

eşitliği sağlanır (Bozo ve Simsek 2025).

İspat (2.7) numaralı eşitlik temel alınarak aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$e^{-tk} = (1-t)^k \sum_{m=0}^{\infty} d_m^{(k)} \frac{t^m}{m!}$$

ve yukarıdaki eşitliğe binom teoremi uygulanarak ifade iki ayrı seri çarpımı biçimde aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{k^n t^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{k}{n} t^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(k)} \frac{t^n}{n!} \right).$$

Bu iki serinin çarpımı için klasik Cauchy çarpımı uygulanarak aşağıdaki eşitlik elde edilir ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{k^n t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{k}{n-j} d_j^{(k)} \frac{t^n}{j!}$$

eşitlikte her iki tarafın t^n teriminin katsayıları karşılaştırıldığında

$$(-1)^n \frac{k^n}{n!} = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{k}{n-j} d_j^{(k)} \frac{1}{j!}$$

eşitliğe ulaşılır ve son olarak her iki taraf $n!(-1)^n$ ile çarpıldığında istenilen teorem elde edilir. $\square$

Teorem 4.17. $n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere,

$$\binom{-k}{n} = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} k^{n-j} d_j^{(k)} \quad (4.33)$$

eşitliği sağlanmaktadır (Bozo ve Simsek 2025).

İspat Verilen (2.7) numaralı eşitliğe binom teoremi uygulanarak her iki taraf üzerinde yapılan bazı düzenlemeler sonucunda aşağıdaki eşitlik yazılır:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-k}{n} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{k^n t^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} d_m^{(k)} \frac{t^m}{m!}.$$

Bu eşitliğin sağ tarafına Cauchy çarpımı kuralı uygulanarak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-k}{n} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \frac{k^{n-j}}{(n-j)! j!} d_j^{(k)} t^n$$

eşitliği elde edilir.

Son olarak, her iki tarafın t^n teriminin katsayıları karşılaştırılarak ve gerekli düzenlemeler yapılarak teorem ispatlanmış olur. $\square$

Teorem 4.18. $m \in \mathbb{N}_0$ ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$d_m^{(k)} = (m+1) D_m \sum_{j=0}^m \binom{k+m-j-1}{m-j} \frac{k^j}{j!} \quad (4.34)$$

eşitliği sağlanmaktadır (Bozo ve Simsek 2025).

İspat Denklem (4.33) de negatif binom teoremi uygulanarak ve (3.4) eşitliğinden yararlanılarak aşağıdaki eşitliğe ulaşılır:

$$d_m^{(k)} = m! (-1)^m \sum_{j=0}^m \binom{k+m-j-1}{m-j} \frac{k^j}{j!}$$

ve istenilen teorem elde edilir. $\square$

Sonuç 4.19. Elde edilen (4.34) numaralı denklem ile (3.19) eşitliği ilişkilendirildiğinde,

$$d_m^{(k)} = (m+1) \sum_{v=0}^m \sum_{j=0}^m \binom{k+m-j-1}{m-j} S_1(m, v) B_v \frac{k^j}{j!}$$

şeklinde yeni bir ifade elde edilir.

Sıradaki teorem Derangement sayıları ve 2. tür Stirling sayıları arasındaki bağlantılar ele alınacaktır.

Teorem 4.20. $n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere,

$$d_m = m! \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n S_2(k, n)}{k!}$$

denklemini sağlanmaktadır (Bozo ve Simsek 2025).

İspat (2.1) numaralı eşitlik temel alınarak ve negatif binom teoremi uygulanarak,

$$\sum_{m=0}^{\infty} d_m \frac{t^m}{m!} = \frac{1}{1-t} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1}{n} (e^t - 1)^n$$

ifadesi elde edilir.

Bu eşitlik, (3.17) numaralı denklemle birleştirildiğinde ve bazı düzenlemeler yapıldığında; $|t| < 1$ ve $n - m > 0$ koşulunda $S_2(m, n) = 0$ olduğundan aşağıdaki sonuç ortaya çıkar:

$$\sum_{m=0}^{\infty} d_m \frac{t^m}{m!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} t^k \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^m (-1)^n S_2(m, n) \frac{t^m}{m!} \right).$$

Buradaki sağ taraf ifadesine Cauchy çarpım kuralı uygulanarak,

$$\sum_{m=0}^{\infty} d_m \frac{t^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^k (-1)^n \frac{S_2(k, n)}{k!} t^m$$

sonucuna ulaşılır.

Son olarak, her iki tarafın t^m teriminin katsayıları karşılaştırıldığında, istenilen teorem ispatlanmış olur. $\square$

Bu bölümde, Derangement sayıları, Stirling sayıları ve Bernoulli sayıları gibi temel kombinatorik sayıların birbirleriyle olan önemli ilişkileri çeşitli teoremler aracılığıyla ortaya konmuştur. Elde edilen formüller ve bağlantılar, hem teorik matematik hem de uygulamalı alanlarda önemli çıkarımlar yapmamıza imkân tanımaktadır. Özellikle, diferansiyel ve cebirsel yapılarla kurulan ilişkiler, bu sayıların karmaşık problemlerde nasıl kullanılabileceğine dair yeni bakış açıları sağlamaktadır.

Sonraki sonuçlar bölümünde ise, burada sunulan teoremler ve sonuçlar ışığında genel bir değerlendirme yapılacak ve ileriye dönük araştırmalar için öneriler sunulacaktır.

5. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında, kombinatorik analiz ve özel sayılar teorisi alanlarında önemli bir yer tutan Derangement sayıları ve polinomları ile 2. tür Peters tipli Simsek sayıları, 1. ve 2. tür Stirling sayıları, Bernoulli sayıları, 1. tür Cauchy sayıları ve Daehee sayıları gibi çeşitli özel sayı ve polinom ailelerinin yapıları incelenmiştir. Söz konusu sayıların tanımları, üreteç fonksiyonları, temel özellikleri ve birbirleriyle olan ilişkileri kapsamlı şekilde ortaya konulmuştur.

Derangement sayıları, sabit nokta içermeyen permütasyonları temsil etmeleri nedeniyle maksimum düzensizlik durumlarını matematiksel olarak modellemekte ve bu özelliğiyle kombinatorik problemlerde özel bir öneme sahiptir. Stirling sayıları kümelerin belirli biçimlerde bölünmesini ifade eder. Öte yandan, Bernoulli ve Daehee sayıları sayılar teorisi ile analiz alanlarında hem teorik hem de uygulamalı birçok problemde önemli roller üstlenir. Bu çalışmada, Derangement sayılar ve polinomlarının söz konusu özel sayı aileleriyle olan ilişkileri yeni analitik ifadelerle elde edilmiştir.

Çalışmanın önemli bir bölümü, bu özel sayıların klasik ve genişletilmiş üreteç fonksiyonları üzerinden elde edilen yeni formüller, özdeşlikler ve kombinatorik bağlantıların detaylandırılmasına ayrılmıştır. Özellikle Derangement sayılarına dair yüksek mertebeden genellemeler ve bunların fonksiyonel özellikleri, literatüre yeni katkılar sunacak şekilde kapsamlı bir biçimde geliştirilmiştir. Ayrıca, sayılarla ilişkili türev ve integral işlemleri temelinde oluşturulan fonksiyonel denklemler üzerinden yeni teorik bağıntılar oluşturulmuş ve bu bağlamlarda özel sayıların davranışları analiz edilmiştir.

Bu tezde ortaya konan yaklaşımlar ve matematiksel yapılar, analitik sayılar teorisi, kombinatorik analiz, kriptografi, biyoinformatik, bilgisayar bilimleri ile olasılık ve istatistiksel modelleme gibi disiplinler için potansiyel uygulama alanları sunmaktadır. Özellikle Derangement sayılarına dayalı düzensizlik yapılarına biyolojik veri şifreleme, genetik dizilim analizi ve karmaşık veri modellerinde uygulanabilirlik açısından yeni ufuklar açmaktadır. Bu yönüyle çalışma, hem teorik matematiğin derinliklerine inmekte hem de modern uygulamalı matematik ve bilim alanlarında somut faydalar sağlamaya adaydır.

Geleceğe dönük araştırmalar kapsamında, Derangement sayıları ve ilişkili özel sayı ailelerinin çok değişkenli genellemeleri, q -analiz ve benzeri modern genelleme teknikleri

ile daha geniş perspektiflerde incelenmesi önemli bir gelişme olacaktır. Ayrıca, diferansiyel denklemler, operatör teorisi ve fonksiyonel analizle kurulan bağlantıların detaylandırılmasıyla bu sayıların kapsamlı teorik genellemeleri gerçekleştirilebilir. Böylece sayıların matematiksel yapıları daha da zenginleşecek ve yeni teorik modeller geliştirilecektir.

Uygulamalı matematik alanlarında ise, biyoinformatik ve kriptografi başta olmak üzere, Derangement sayılarına dayalı algoritmaların geliştirilmesi, veri analizi ve şifreleme yöntemlerinde etkinlik ve güvenilirlik artışına katkı sağlayabilir. Ayrıca, bu sayıların sayısal algoritmalarla etkin biçimde hesaplanması ve optimizasyonu, büyük veri analizi ve karmaşık sistem modellemelerinde pratik avantajlar sunacaktır. Farklı matematiksel disiplinlerde (örneğin topoloji ve cebirsel geometri) bu sayıların potansiyel uygulamalarının araştırılması ise disiplinlerarası yeni bağların kurulmasına olanak verecektir.

Sonuç olarak, bu çalışma Derangement sayıları ve diğer özel sayı ailelerinin hem teorik matematik hem de uygulamalı bilimler açısından önemini pekiştirmekte ve bu alandaki araştırmalar için sağlam bir temel oluşturmaktadır. Elde edilen bulgular özel sayıların yapısal analizinde yeni bakış açıları kazandırmakta ve matematiksel bilimlerde ileriye dönük yenilikçi çalışmalara zemin hazırlamaktadır.

6. KAYNAKLAR

- Abramowitz, M., and Stegun, I. A. 1972. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables* (10th ed.). Dover Publications.
- Anonim: <https://en.wikipedia.org/wiki/Derangement> [Son erişim tarihi: 04.05.2025].
- Biggs, N. 2002. *Discrete Mathematics*, 2nd ed. Oxford University Press.
- Bozo, E. and Simsek, Y. 2023. Some new formulas derived from generating function for derangement numbers. The 13th Symposium on Generating Functions of Special Numbers and Polynomials and their Applications (Proceedings Book of GFSNP 2023), pp. 158–160, ISBN: 978-625-00-1128-7.
- Bozo, E. and Simsek, Y. 2023. Formulas derived from relationships between derangement numbers and the Peters-type Simsek numbers of the second kind. The 6th Mediterranean International Conference of Pure & Applied Mathematics and Related Areas (Proceedings Book of MICOPAM 2023), pp. 150–153. pp. 150–153, ISBN: 978-2-491766-01-6.
- Bozo, E. and Simsek, Y. 2024. Applying the operator $Y_{\lambda, \beta}(f; a, b)$ to Derangement polynomials. The 14th Symposium on Generating Functions of Special Numbers and Polynomials and their Applications (Proceedings Book of GFSNP 2024), pp. 80–82, ISBN: 978-625-00-1915-3.
- Bozo, E. and Simsek, Y. 2024. Remarks on recent advance in Derangement numbers and polynomials. The 7th Mediterranean International Conference of Pure & Applied Mathematics and Related Areas (Proceedings Book of MICOPAM 2024), pp. 105–108, ISBN: 978-625-00-1131-7.
- Bozo, E. and Simsek, Y. 2024. Observation on growth of numbers of derangement numbers and polynomials by approximation method. The 35th International Conference of The Jangeon Mathematical Society (Proceedings Book of ICJMS 2024), pp. 53–55, ISBN: 978-89-88615-16-4.

- Bozo, E. and Simsek, Y. 2025. Relations among Derangement type numbers of higher order, Bernoulli, Stirling and Combinatorial numbers (preprint).
- Brualdi, R. A. 1977. *Introductory Combinatorics*. Prentice Hall.
- Charalambides, Ch. A. 2002. *Enumerative Combinatorics*. Chapman ve Hall/CRC.
- Comtet, L. 1974. *Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions*. D. Reidel Publishing Company.
- De Moivre, A. 1718. *The Doctrine of Chances: or, A Method of Calculating the Probabilities of Events in Play*. London: W. Pearson.
- Kilar, N. 2023. Formulae bringing to light from certain classes of numbers and polynomials. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, 117(27).
- Kilar, N. 2024. Building generating functions for degenerate Simsek-type numbers and polynomials of higher order. *Montes Taurus Journal of Pure and Applied Mathematics*, 6(3), 186–198. MTJPAM-D-23-00014.
- Kilar, N. and Simsek, Y. 2021. Combinatorial sums involving Fubini type numbers and other special numbers and polynomials: Approach trigonometric functions and p-adic integrals. *Advances in Studies of Contemporary Mathematics (Kyungshang)*, 31(1), 75–87.
- Kim, T. 2011. Some identities on the Daehee numbers and polynomials. *Applied Mathematics Letters*, 24(8), 1358–1363.
- Kim, T. and Kim, D. S. 2013. Daehee numbers and polynomials. *Applied Mathematical Sciences (Hikari Journal)*, 7, 5969–5976.
- Kim, T., Kim, D. S., Kwon, H.-I., and Jang, L.-C. 2018. Fourier series of sums of products of r -derangement functions. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 11(4), 575–590.
- Kim, T., Kim, D. S., Lee, H., and Jang, L.-C. 2021. A note on degenerate Derangement polynomials and numbers. *AIMS Mathematics*, 6(6), 6469–6481.

- Kim, T. and Jang, L. C. 2010. On the Derangement Numbers and Their Applications. *Journal of Inequalities and Applications*, Article ID 579834.
- Kim, T., Kim, D. S., Jang, G.-W., and Kwon, J. 2018. A note on some identities of derangement polynomials. *Journal of Inequalities and Applications*, 2018(1):40. doi:10.1186/s13660-018-1636-8.
- Khan, S., Nahid, T., and Riyasat, M. 2020. Partial derivative formulas and identities involving 2-variable Simsek polynomials. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, 26, 1–13.
- Khan, S., Nahid, T., and Riyasat, M. 2022. Properties and graphical representations of the 2-variable form of the Simsek polynomials. *Vietnam Journal of Mathematics*, 50, 95–109.
- Komatsu, T., and Simsek, Y. 2018. Identities between harmonic, hyperharmonic and Daehee numbers. *Journal of Inequalities and Applications*, 2018, Article ID 106.
- Kucukoglu, I. 2023. Identities for the multiparametric higher-order Hermite-based Peters-type Simsek polynomials of the first kind. *Montes Taurus Journal of Pure and Applied Mathematics*, 5(1), 102–123.
- Kucukoglu, I. 2024. Generating functions for multiparametric Hermite-based Peters-type Simsek numbers and polynomials in several variables. *Montes Taurus Journal of Pure and Applied Mathematics*, 6(3), 217–238.
- Kucukoglu, I. 2024. Unification of the generating functions for Sheffer type sequences and their applications. *Montes Taurus Journal of Pure and Applied Mathematics*, 6(4), 250–270.
- Montmort, P. R. 1713. *Essai d'analyse sur les jeux de hasard* (2nd ed.). Paris: Jacques Quillau.
- Riordan, J. 1958. *An Introduction to Combinatorial Analysis*. Wiley.
- Roman, S. 2005. *The Umbral Calculus*. Dover Publications, New York.

- Simsek, Y. 2023. Some New Families of Special Polynomials and Numbers Associated with Finite Operators. *Montes Taurus Journal of Pure and Applied Mathematics*, 5(3), 210–230.
- Simsek, Y. 2024. Identities for the Multiparametric Higher-Order Hermite-Based Peters-Type Simsek Polynomials of the First Kind. *Montes Taurus Journal of Pure and Applied Mathematics*, 6(1), 45–68.
- Simsek, Y. 2024. Peters Type Polynomials and Numbers and Their Generating Functions: Approach with p-Adic Integral Method. *Montes Taurus Journal of Pure and Applied Mathematics*, 6(2), 112–130.
- Simsek, Y. 2020. A New Family of Combinatorial Numbers and Polynomials Associated with Peters Numbers and Polynomials. *Applied Analysis and Discrete Mathematics* 14, 627–640.
- Stanley, R. P. 1997. *Enumerative Combinatorics, Volume I*. Cambridge University Press.
- Gallian, J. A. 2016. *Contemporary Abstract Algebra*, 9th ed. Cengage Learning.
- Ghorbani, M., Hassani, M., and Moshtagh, H. 2024. Moments and asymptotic expansion of derangement polynomials in terms of Touchard polynomials. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 30(4), 832–842.
- Jordan, C. 1870. *Traité des substitutions et des équations algébriques*. Paris: Gauthier-Villars et Fils.

ÖZGEÇMİŞ

Elif BOZO

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans	Akdeniz Üniversitesi
2022-2025	Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Antalya
Lisans	Akdeniz Üniversitesi
2018-2022	Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya

ESERLER

Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler

1- Bozo, E. and Simsek, Y. (2025). Relations among Derangement type numbers of higher order, Bernoulli, Stirling and combinatorial numbers, Preprint.

Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitaplarında basılan bildiriler

1- Bozo, E. and Simsek, Y. (2023). Some new formulas derived from generating function for derangement numbers. Proceedings Book of "The 13th Symposium on Generating Functions of Special Numbers and Polynomials and their Applications (GFSNP 2023)" (Edited by Alkan, M., Kucukoglu, I. and Ones, O.) Antalya, Türkiye, ISBN: 978-625-00-1128-7.

2- Bozo, E. and Simsek, Y. (2023). Formulas derived from relationships between derangement numbers and the Peters-type Simsek numbers of the second kind. Proceedings Book of "The 6th Mediterranean International Conference of Pure & Applied Mathematics and Related Areas (MICOPAM 2023)" (Edited by Bayad, A., Alkan, M., Kucukoglu, I. and Ones, O.) Antalya, Türkiye, ISBN: 978-2-491766-01-6.

3- Bozo, E. and Simsek, Y. (2024). Applying the operator $Y_{\lambda,\beta}(f; a, b)$ to Derangement polynomials. Proceedings Book of "The 14th Symposium on Generating Functions of Special Numbers and Polynomials and their Applications (GFSNP 2024)" (Edited by Simsek, Y., Alkan, M., Kucukoglu, I., Kilar, N. and Ones, O.) Antalya, Türkiye, ISBN: 978-625-00-1915-3.

4- Bozo, E. and Simsek, Y. (2024). Remarks on recent advance in Derangement numbers and polynomials. Proceedings Book of "The 7th Mediterranean International Conference of Pure & Applied Mathematics and Related Areas (MICOPAM 2024)" (Edited by Simsek, Y., Alkan, M., Kucukoglu, I. and Ones, O.) Antalya, Türkiye, ISBN: 978-625-00-1131-7.

5- Bozo, E. and Simsek, Y. (2024). Observation on growth of numbers of derangement numbers and polynomials by approximation method. Proceedings Book of "The 35th International Conference of The Jangeon Mathematical Society (ICJMS 2024)" (Edited by Alkan, M., Kucukoglu, I. and Ones, O.) Seoul, South Korea, ISBN: 978-89-88615-16-4.