



**ÖZEL YETENEKLİ ÖĞRENCİLERİN
GEOMETRİK MUHAKEMELERİNİN
MATEMATİK ÇALIŞMA UZAYI
ÇERÇEVESİNDE İNCELENMESİ**

Doktora Tezi

Leyla AYDURMUŞ

ESKİŞEHİR 2025

**ÖZEL YETENEKLİ ÖĞRENCİLERİN GEOMETRİK MUHAKEMELERİNİN
MATEMATİK ÇALIŞMA UZAYI ÇERÇEVESİNDE İNCELENMESİ**

Leyla AYDURMUŞ

DOKTORA TEZİ

Matematik Eğitimi Anabilim Dalı

Matematik Eğitimi Programı

Danışman: Prof. Dr. Emel ÖZDEMİR ERDOĞAN

Anadolu Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Nisan 2025

Eskişehir

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Leyla AYDURMUŞ'un "Özel Yetenekli Öğrencilerin Geometrik Muhakemelerinin Matematik Çalışma Uzayı Çerçevesinde İncelenmesi" başlıklı tezi 12/03/2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik Eğitimi Ana Bilim dalında Matematik Eğitimi Programında, Doktora Yeterlik tezi olarak kabul edilmiştir.

		<u>Ünvanı Adı Soyadı</u>	<u>İmza</u>
Üye (Danışman)	:	Prof. Dr. Emel ÖZDEMİR ERDOĞAN	
Üye	:	Prof. Dr. Abdulkadir ERDOĞAN	
Üye	:	Prof. Dr. Tuba GÖKÇEK	
Üye	:	Prof. Dr. Menekşe Seden TAPAN BROUTIN	
Üye	:	Doç. Dr. Candaş UYGAN	

Prof. Dr. Nafiz Öncü CAN

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

ÖZET

ÖZEL YETENEKLİ ÖĞRENCİLERİN GEOMETRİK MUHAKEMELERİNİN MATEMATİK ÇALIŞMA UZAYI ÇERÇEVESİNDE İNCELENMESİ

Leyla AYDURMUŞ

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı

Matematik Eğitimi Doktora Programı

Anadolu Üniversitesi,

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Nisan, 2025

Danışman: Prof. Dr. Emel ÖZDEMİR ERDOĞAN

Bu çalışmada özel yetenekli 8. sınıf öğrencilerinin gerçek yaşam bağlamı içerisinde sunulan şekilsiz geometri problemlerindeki matematiksel çalışmaya bağlı geometrik muhakemelerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Geometrik muhakeme süreci Matematik Çalışma Uzayı (MWS) bileşenleri ve teoride tanımlanan semiyotik, enstrümantal, söylemsel boyutlar esas alınarak incelenmiştir. Geometrik muhakemenin niteliğinin ele alınmasında Şekilsel Kavrayış Teorisi kullanılmıştır. Araştırmada durum çalışması kullanılmıştır. Çalışmanın katılımcıları, amaçlı örnekleme yöntemi ile BİLSEM'e devam eden ÖYG2 öğrencilerinden seçilmiştir. Araştırmanın hazırlık sürecinde öğrencilerle matematiksel araç-gereç ve teknoloji kullanımına yönelik destek eğitimler gerçekleştirilmiştir. Çalışmanın amacına uygun olarak geliştirilen on problem için üç grubun her birinde on ayrı oturum gerçekleştirilmiştir. Uygulama problemleri, problem çözme oturumları sırasında alınan kamera - ses kayıtları, gözlem notları, çalışma kağıtları, oturum sonrasında öğrencilerle gerçekleştirilen grup görüşmeleri ve alan notları bu çalışmanın veri toplama araçlarını oluşturmaktadır. Problem oturumlarının analiz a priori ve posteriorileri için MWS bileşenleri esas alınarak oluşturulan analiz çerçeveleri kullanılmıştır. Analizler Şekilsel Kavrayış Teorisi ile derinleştirilmiştir. Bu doğrultuda, özel yetenekli öğrencilerin geometrik şeklin verilmediği geometri problemlerinin çözümlerine ilişkin muhakeme sürecinde çok sayıda şekil çizdikleri, şekli yönettikleri ve şeklin niteliğini göz önünde bulundurmadıkları belirlenmiştir. Öğrencilerin semiyotik ve söylemsel oluşumu baskın bir matematiksel çalışma gerçekleştirdikleri, enstrüman kullanımının sınırlı kaldığı sonucuna ulaşılmıştır. İşlevsel kavrayışın epistemolojik düzlem bileşenleri olan temsil, araç ve referansa bağlı işe koşulduğu ve önemli ölçüde düzlemler arası dolaşımı sağladığı belirlenmiştir. Bulgulardan hareketle, özel yetenekli öğrencilerin geometrik muhakeme sürecinde kendi geometrik şekillerini çizmelerine olanak sağlanmasının matematiksel çalışmalarını zenginleştirmeye olanak sağlayacağı söylenebilir.

Anahtar Sözcükler: Geometrik Muhakeme, Matematiksel Çalışma, Matematik Çalışma Uzayı (MWS), Özel Yetenekli Öğrenciler, Şekilsel Kavrayış Teorisi.

ABSTRACT

INVESTIGATION OF GIFTED STUDENTS' GEOMETRIC REASONING WITHIN THE FRAMEWORK OF MATHEMATICAL WORKING SPACE

Leyla AYDURMUŞ

Department of Mathematics and
Science Education

Doctorate Program in Mathematics Education

Graduate School of Anadolu University, April, 2025

Supervisor: Prof. Dr. Emel ÖZDEMİR ERDOĞAN

The objective of this study was to examine the mathematical work-based geometric reasoning of gifted 8th grade students in figurless geometry problems analyzed within a real-life context. The Theory of Figural Apprehension was used to address the quality of geometric reasoning. The study's methodology entailed an examination of geometric reasoning processes based on the components of the Mathematical Working Space (MWS) as well as the semiotic, instrumental, and discursive dimensions defined in the theory. The case study was employed in the analysis. The participants of the study were selected from the students enrolled in the ÖYG2 program (Special Skills Development Program) attending BİLSEM (Science and Arts Center) through the use of the purposeful sampling method. In the preparation process of the study, supportive training sessions were conducted with the students to instruct them in the use of mathematical tools and technology. Ten separate sessions were conducted in each of the three groups for ten problems that were developed in accordance with the study's objectives. The data collection instruments employed in this study encompassed practice problems, camera and audio recordings obtained during problem-solving sessions, observation notes, student worksheets, group interviews with students following the sessions, and researcher field notes. Analysis framework based on MWS components were used for the a priori and posteriori analyses of problem solving sessions, with the analyses further deepened through the application of Figural Apprehension Theory. It was determined that gifted students drew numerous shapes, managed the shape, and did not consider the quality of the shape in the reasoning process related to the solutions of geometry problems in which geometric shapes were not provided. The study's findings indicated that students engaged in a mathematical inquiry characterized by the predominance of semiotic and discursive formations with minimal instrumentation. The analysis revealed that operative apprehension was activated in response to variations in representation, instrumentation, and reference. These elements, constituting the epistemological plane, facilitated significant interplanar circulation. The findings of this study suggest that by empowering gifted students to create their own geometric shapes during the geometric reasoning process, their mathematical studies can be enriched.

Keywords: Gifted students, Mathematical work, Mathematical Working Space (MWS), Figural Apprehension, Geometrical reasoning

....../....../20....

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan “Bilimsel İntihal Tespit Programıyla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

.....

(İmza)

Leyla AYDURMUŞ

TEŞEKKÜR

Bu doktora tez çalışması, görünürde dört buçuk yıl süren doktora eğitimimin nihai ürünü olarak ortaya çıkmıştır. Nasıl ki bir Afrika atasözünde de ifade edildiği gibi bir çocuğun yetiştirilmesi için bir köy gerekliyse benim bu tezi ortaya çıkarma sürecinde desteğini aldığım, eğitim hayatıma dokunan pek çok kişi olmuştur. Benim için doktora eğitimi her ilerleyişinde bir sonraki aşamanın kilidinin açıldığı bir yol ve yolculuktu. Yola farklı bir limandan çıkmış olsam da yolculuğumda bana rehberlik etmeyi kabul eden, tezin fikir aşamasından başlayarak akademik merakımın bir ürün olarak ortaya çıkmasına, yolda ne zaman desteğine ihtiyaç duysam enerjisi ile motivasyonumu artıran, akademik gelişimime katkı sağlayan danışmanım, canım hocam Prof. Dr. Emel ÖZDEMİR ERDOĞAN'a tüm kalbimle teşekkür ederim. Tez izleme komitesinde olmayı kabul ederek araştırma sürecimi iyileştirmeye yönelik görüşleriyle katkı sağlayan, akademik iştahla hareket ettiğim süreçte beni nitelikli bir çalışma için yönlendiren çok kıymetli hocam Prof. Dr. Abdulkadir ERDOĞAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Yüksek Lisans eğitiminden tanıdığım ve doktora tez izleme komitesi ile yolumuzun tekrar kesiştiği, doktora çalışmamın her aşamasında bana içtenlikle yardım eden değerli hocam Prof. Dr. Tuba GÖKÇEK'e içtenlikle teşekkür ederim. Tezimde çalışmalarından çokca faydalandığım, tez savunma jürimde olmayı kabul ederek çalışmamın niteliğini iyileştirmeye yönelik görüş bildiren Prof. Dr. Menekşe Seden TAPAN BROUTIN hocama sonsuz teşekkürler. Tez savunma jürimde olmayı kabul eden, kıymetli vaktini ayırarak tezimi en ince ayrıntısına kadar değerlendiren, tezin zenginleşmesine katkı sağlayan Doç. Dr. Candaş UYGAN hocama içtenlikle teşekkür ederim.

Doktora sürecinde yolu birlikte yürüdüğüm, tüm heyecan, endişe ve zorluğu paylaştığım, telefonun ucunda desteklerini hep hissettiğim arkadaşlarım Yasemin, Elif ve Aydan'a teşekkür ederim. Çalışmanın yürütülmesinde verdikleri destekten dolayı kurum amirlerime ve mesai arkadaşlarıma teşekkür ederim. Bu çalışmanın adları bende gizli olan kahramanlarına, bu ülkenin ve geleceğin aydınlık yüzü olan canım öğrencilerime içtenlikle teşekkür ederim.

Son olarak bugünlere gelmemde emekleri büyük olan aileme, desteğini üzerimizden eksik etmeyen Aliye AYDURMUŞ'a teşekkür ederim. Bu süreçte zamanlarından çalmak zorunda kaldığım boccüklerim İpek ve Mete'ye, eşim ve arkadaşım Onur AYDURMUŞ'a gösterdikleri sabır ve anlayıştan ötürü tüm kalbimle teşekkür ederim. Sen olmasaydın ben bu yolu bu kadar güzel ve huzurla yürüyemezdim.

ÜRETKEN YAPAY ZEKÂ KULLANIM BEYANI

Bu tez çalışmasının hazırlanması, yürütülmesi, verilerin analizi vb. aşamalarının herhangi birinde üretken yapay zekâ programlarından yararlanmadığımı beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

.....

Leyla AYDURMUŞ

İÇİNDEKİLER

BAŞLIK SAYFASI	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI.....	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT.....	iv
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ.....	v
TEŞEKKÜR	vi
ÜRETKEN YAPAY ZEKÂ KULLANIM BEYANI	vii
İÇİNDEKİLER	viii
1 GİRİŞ	1
1.1 Problem Durumu	1
1.2 Araştırmanın Amacı	12
1.3 Araştırmanın Önemi.....	13
1.4 Araştırmanın Varsayımları	17
1.5 Araştırmanın Sınırlılıkları	17
2 LİTERATÜR.....	18
2.1 Kavramsal Çerçeve.....	18
2.1.1 Geometrik muhakeme	18
2.1.2 Matematik çalışma uzayı.....	28
2.1.3 Özel yetenekli bireyler	42
2.1.4 Geometrik muhakeme ve şekilsel kavrayış teorisi ile ilgili çalışmalar ...	48
2.1.5 Matematik çalışma uzayı ile ilgili çalışmalar	51
3 YÖNTEM	57
3.1 Araştırmanın Modeli ve Deseni	57
3.2 Katılımcılar.....	58
3.3 Araştırma Ortamı	60
3.4 Araştırmacının Rolü	61

3.5 Veri Toplama Araçları	61
3.5.1 Uygulama problemlerinin geliştirilmesi	62
3.5.2 Öğrenci çalışma kağıtları	65
3.5.3 Gözlem	65
3.5.4 Görüşmeler	66
3.5.5 Kamera kayıtları.....	67
3.5.6 Öğrenci geri bildirim notları	68
3.5.7 Araştırmacı günlüğü.....	68
3.6 Araştırmanın Tasarımı ve Yürütülmesi	69
3.6.1 Ön pilot uygulama	71
3.6.2 Araç kullanımına yönelik verilen destek eğitim.....	73
3.6.3 Çalışmanın pilot uygulaması.....	75
3.7 Verilerin Toplanması.....	78
3.8 Verilerin Analizi.....	80
3.9 Geçerlik ve Güvenirlik	87
3.10 Uygulama Problemleri Analiz A priori	89
3.10.1 Otlak Alanı problemi.....	89
3.10.2 Kabilenin Güneşi problemi	91
3.10.3 Bungalov Ev problemi	92
3.10.4 Miras Kalan Tarla problemi.....	93
3.10.5 Bereket Motifi problemi	94
3.10.6 Doğum Günü Pastası problemi.....	95
3.10.7 Kırık Seramik problemi	96
3.10.8 Ev için Arazi problemi	97
3.10.9 Park Peyzajı problemi	98
3.10.10 Uçurtma Yapımı problemi.....	100
4 BULGULAR.....	102

4.1 Problemlerin Matematik Çalışma Uzayı	102
4.1.1 Otlak Alanı problemi.....	102
4.1.2 Kabilenin Güneşi Problemi.....	120
4.1.3 Bungalov Ev problemi	140
4.1.4 Miras Kalan Tarla problemi.....	159
4.1.5 Bereket Motifi Problemi.....	182
4.2 Semiyotik Oluşumla İlgili Bulgular.....	204
4.2.1 Görsel temsil – algısal kavrayış bulguları.....	204
4.2.2 Sembolik temsil bulguları	212
4.2.3 Sözel temsil bulguları.....	213
4.2.4 Temsile dayalı işlevsel kavrayış bulguları	215
4.3 Enstrümantal Oluşumla İlgili Bulgular	218
4.3.1 Araca bağlı işlevsel kavrayış bulguları	222
4.4 Söylemsel Oluşumla İlgili Bulgular	222
4.4.1 Öğrencilerin çalışma uzayındaki teorik yapı ve kavram yanılgıları bulguları.....	227
4.4.2 Söyleme Dayalı İşlevsel Kavrayış Bulguları	228
4.5 Muhakemenin Niteliği	230
4.6 Günlük Yaşam Bağlamı ile İlgili Bulgular	232
5 TARTIŞMA, SONUÇ ve ÖNERİLER.....	236
5.1 Sonuç ve Tartışma	236
5.2 Öneriler	257
5.2.1 Uygulamaya yönelik öneriler	257
5.2.2 İleride yapılabilecek araştırmalara yönelik öneriler	260
KAYNAKÇA.....	262
EKLER	
ÖZGEÇMİŞ	

TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 3.1 Katılımcı Grupların Özellikleri.....	59
Tablo 3.2 Öğrencilerin Problemlere Katılım Durumları.....	60
Tablo 3.3 Uygulama Problemlerinin İlişkili Olduğu İçerik	64
Tablo 3.4 Problemlerin Matematiksel Çalışmalarına Ait A priori Oluşumlar.....	65
Tablo 3.5 Araç Kullanımına Yönelik Destek Eğitimlerin Kazanımları ve İlgili Araçlar	74
Tablo 3.6 Problem Çözme Oturumları ve Görüşme Takvimi.....	79
Tablo 3.7 Grupların Problem Çözme Oturum- Gözlem Süreleri.....	79
Tablo 3.8 Veri Analizinde Referans Alınan Oluşum Süreçlerine Yönelik Tanımlama Özellikleri	81
Tablo 3.9 Veri Analizinde Referans Alınan Kavrayış Süreçlerine Yönelik Tanımlama Özellikleri	82
Tablo 3.10 Muhakemenin Türü İçin Tanımlayıcılar.....	83
Tablo 3.11 Kabilenin Güneşi Probleminin Temsile Dayalı Analiz Tablosu	84
Tablo 3.12 Kabilenin Güneşi Problemi Araca Bağlı Analiz Tablosu.....	84
Tablo 3.13 Kabilenin Güneşi Problemi Söyleme Dayalı Analiz Tablosu	85
Tablo 3.14 Araştırma Problemlerinde Destek Alınan Uzmanların Özellikleri.....	89
Tablo 4.1 Otlak Alanı Problemi Öğrencilerin Görselleştirme ve İşlevsel Kavrayış Bulguları	104
Tablo 4.2 Öğrencilerin Semiyotik Oluşumları Yönelimi.....	109
Tablo 4.3 Otlak Alanı Probleminin Oluşturma ve İşlevsel Kavrayış Bulguları	110

Tablo 4.4 Otlak Alanı Probleminin İspatlama-Muhakeme ve İşlevsel Kavrayış Bulguları	113
Tablo 4.5 Öğrencilerin Söylemsel Oluşum Yönelimleri.....	118
Tablo 4.6 Ö3'e Ait Matematik Çalışma Uzayı Dolaşımı.....	119
Tablo 4.7 Kabilenin Güneşi Problemi Öğrencilerin Görselleştirme ve İşlevsel Kavrayış Bulguları	121
Tablo 4.8 Öğrencilerin Semiyotik Oluşumları Yönelimi.....	128
Tablo 4.9 Kabilenin Güneşi Probleminin Oluşturma ve İşlevsel Kavrayış Bulguları .	129
Tablo 4.10 Öğrencilerin Enstrümantal Oluşum Yönelimi	132
Tablo 4.11 Kabilenin Güneşi Probleminin İspatlama-Muhakeme ve İşlevsel Kavrayış Bulguları	133
Tablo 4.12 Öğrencilerin Söylemsel Oluşum Yönelimleri.....	139
Tablo 4.13 Ö5'e Ait Çalışma Uzayı Dolaşımı	140
Tablo 4.14 Bungalov Ev Problemi Öğrencilerin Görselleştirme ve İşlevsel Kavrayış Bulguları	142
Tablo 4.15 Öğrencilerin Farklı Yükseklik Temsilleri.....	147
Tablo 4.16 Öğrencilerin Semiyotik Oluşumları Yönelimi.....	148
Tablo 4.17 Bungalov Ev Probleminin Oluşturma ve İşlevsel Kavrayış Bulguları	149
Tablo 4.18 Bungalov Ev Probleminin İspatlama-Muhakeme ve İşlevsel Kavrayış Bulguları	151
Tablo 4.19 Öğrencilerin Söylemsel Oluşum Yönelimleri.....	157
Tablo 4.20 Ö1'e Ait Çalışma Uzayı Dolaşımı	158

Tablo 4.21 Miras Kalan Tarla Problemi Öğrencilerin Görselleştirme ve İşlevsel Kavrayış Bulguları	161
Tablo 4.22 Öğrencilerin Semiyotik Oluşumları Yönelimi.....	165
Tablo 4.23 Miras Kalan Tarla Probleminin Oluşturma ve İşlevsel Kavrayış Bulguları	168
Tablo 4.24 Öğrencilerin Enstrümantal Oluşumları Yönelimi.....	172
Tablo 4.25 Miras Kalan Tarla Probleminin İspatlama-Muhakeme ve İşlevsel Kavrayış Bulguları	173
Tablo 4.26 Öğrencilerin Söylemsel Oluşum Yönelimleri.....	181
Tablo 4.27 Ö19'a Ait Çalışma Uzayı Dolaşımı	182
Tablo 4.28 Bereket Motifi Problemi Öğrencilerin Görselleştirme ve İşlevsel Kavrayış Bulguları	184
Tablo 4.29 Öğrencilerin Semiyotik Oluşumları Yönelimi.....	190
Tablo 4.30 Bereket Motifi Probleminin Oluşturma ve İşlevsel Kavrayış Bulguları....	191
Tablo 4.31 Bereket Motifi Probleminin İspatlama-Muhakeme ve İşlevsel Kavrayış Bulguları	195
Tablo 4.32 Öğrencilerin Söylemsel Oluşum Yönelimleri.....	202
Tablo 4.33 Ö6'ya Ait Çalışma Uzayı Dolaşımı	203
Tablo 4.34 Öğrencilerin Doğal Dile Ait Temsil Kayıtları	214
Tablo 4.35 Temsile Dayalı İşlevsel Kavrayışın Problemlerdeki Epistemolojisi	217
Tablo 4.36 Enstrümantal Oluşum Gerçekleşen Problemler ve Kullanılan Araçlar	218
Tablo 4.37 Araca Bağlı İşlevsel Kavrayışın Problemlerdeki Epistemolojisi.....	222
Tablo 4.38 Problemlere İlişkin Söylemsel İfadeler.....	223

Tablo 4.39 Grupların Problemlere İlişkin Sonuçları.....	226
Tablo 4.40 Öğrencilere Ait Teorik Yapılar ve Kavram Yanılgıları.....	228
Tablo 4.41 Söyleme Dayalı İşlevsel Kavrayışın Problemlerdeki Epistemolojisi	229
Tablo 4.42 Problemlerde İhmal Edilen Gerçek Yaşam Durumları.....	233



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 Şekilsel Kavrayış Teorisi.....	20
Şekil 2.2 Geometrik Aktivitedeki Bilişsel Etkileşimler	22
Şekil 2.3 Geometrik Muhakemede İki Tip Davranış.....	23
Şekil 2.4 Aynı Oluşturma Sürecinde İki Farklı Araç Kullanımı	25
Şekil 2.5 Farklı Konfigürasyon Uygulamaları ile Muhakeme	26
Şekil 2.6 Geometri Görevinde Matematiksel Çalışma	27
Şekil 2.7 Matematiksel Çalışma Uzayı Diyagram.....	33
Şekil 2.8 Çizim Üzerinden Elde Edilen Semiyotik Anlamalar	34
Şekil 2.9 Matematiksel Çalışma Uzayı Modeli Dikey Düzlem.....	37
Şekil 2.10 Semiyotik- Söylemsel Düzlem Farklı Oluşum Yönelimleri	37
Şekil 2.11 Enstrümantal-Söylemsel Düzlem Farklı Oluşum Yönleri.....	38
Şekil 2.12 Enstrümantal – Söylemsel Düzlem Gerektiren Görev	39
Şekil 2.13 MWS Türleri ve Didaktik Dönüşüm Teorisi İlişkisi.....	41
Şekil 2.14 Özel Yeteneklilik İçin İki Model.....	43
Şekil 3.1 Araştırmanın Uygulama Modeli.....	58
Şekil 3.2 Kamera Kayıtları Örnek Kesit.....	67
Şekil 3.3 Öğrenci Geri Bildirim Notu Örneği	68
Şekil 3.4 Araştırma Sürecinde İzlenen Adımlar	69
Şekil 3.5 Matematik Çalışma Uzayı ve Şekilsel Kavrayış Teorisi’nin İlişkilendirilmesi	71

Şekil 3.6 Pilot Uygulama “Ev İçin Arazi” Problemi Öğrenci Çalışma Kağıtlarından Örnekler	76
Şekil 3.7 Pilot Uygulama “Doğum Günü Pastası”, “Kabilenin Güneşi” ve “Ev İçin Arazi” Problemleri Öğrenci Çalışma Kağıdından Örnekler	77
Şekil 3.8 Görüşme Dökümüne İlişkin Örnekler	80
Şekil 3.9 Eylem 2-3’te Öğrenciden Beklenen Çizimler	90
Şekil 3.10 Teorik Çözüme (Benzer Üçgenler) Bağlı Gerçekleştirilen Çizim	91
Şekil 3.11 Geogebra ile Gerçekleşmesi Beklenen Çizim Örneği	92
Şekil 3.12 Teorik Çözüme Yönelik Örnek Çizim	94
Şekil 3.13 Manuel ve Geogebra ile Gerçekleştirilecek Çizim Örnekleri	95
Şekil 3.14 Geogebra ile Gerçekleştirilecek Çizim Örneği	96
Şekil 3.15 Manuel Çizim Örneği.....	97
Şekil 3.16 Manuel ve Cetvel-Pergel Çizim Örneği	99
Şekil 3.17 Manuel Çizim Örneği.....	101
Şekil 4.1 Çizilen Şekiller: Otlak Alanı Problemi	105
Şekil 4.2 Ö11 Kare Formunda Dikdörtgen Temsili Çizimi.....	106
Şekil 4.3 Ö11 Otlak Alanı Problemi Çalışma Kağıdı.....	107
Şekil 4.4 Sırası ile Ö2 Ö5, Ö8’ Ait Çizimler.....	107
Şekil 4.5 Ö7’ye Ait Çizim	110
Şekil 4.6 Kalemin Araç Olarak Kullanımı ve Öğrenci Söylemleri	111
Şekil 4.7 Ö3 ve Ö6’nın Aynı Söylemsel Oluşuma Ait İki Farklı Çizimi	113
Şekil 4.8 Ö17’ ye Ait Çizimler	114

Şekil 4.9 Otlak Alanı Problemi Öğrenci Geri Bildirim Notları.....	116
Şekil 4.10 Çizilen Şekiller: Kabilenin Güneşi Problemi	122
Şekil 4.11 Öğrencilerin Kenarortay ve Yükseklikle İlişkili Çizimleri	123
Şekil 4.12 Ö3'e Ait Çizimler.....	124
Şekil 4.13 Ö5'e Ait Çizimler.....	124
Şekil 4.14 Ö8'e Ait Çizimler.....	125
Şekil 4.15 Ö18'e Ait Çizimler.....	126
Şekil 4.16 Ö4'e Ait İç Teget Çember Çizimi ve Öğrencinin Diğer Çizimleri	127
Şekil 4.17 Enstrümantal Oluşuma Bağlı Ortaya Çıkan Çizimler	130
Şekil 4.18 Ö8, Ö9, Ö10 ve Ö11'e Ait Oluşum Süreci ve Çizim	131
Şekil 4.19 Ö11'in Kenarortay- Yükseklik İlişkisine Yönelik Çizim ve İşlemleri.....	133
Şekil 4.20 Ö18'e Ait Çizim	136
Şekil 4.21 Çizilen Şekiller: Bungalov Ev	143
Şekil 4.22 Öğrencilerin Üçgen Prizma Çizimleri.....	144
Şekil 4.23 Ö1'in Algısal Kavrayışa ve İşlevsel Kavrayışa Ait Çizimleri	145
Şekil 4.24 Ö6'nın Problem Çözme Oturumundaki Çizimleri ve İzlediği Sıra	146
Şekil 4.25 Öğrencilerin İşlevsel Kavrayışa Yönelik Çizim Örnekleri	146
Şekil 4.26 Kırtasiye Malzemeleri ile Oluşum	150
Şekil 4.27 Bungalov Ev Problemi Prizmanın Hacmi için Öğrencilerin Söylemsel Oluşumları	154
Şekil 4.28 Çizilen Şekiller: Miras Kalan Tarla.....	161

Şekil 4.29 Öğrencilere Ait Üçgen Çizimleri	162
Şekil 4.30 Ö10'a Ait Üçgen Çizimleri	164
Şekil 4.31 Ö5, Ö6 ve Ö19 Kenarortayla İlgili Geri Bildirim Notları	166
Şekil 4.32 Ö1'in Enstrümantal Oluşum Aşamaları	168
Şekil 4.33 Enstrümantal Oluşum Sonucu Ortaya Çıkan Çizimler.....	169
Şekil 4.34 Cetvel ile Yükseklik Oluşumu	170
Şekil 4.35 Ö5'in Yükseklik İnşa Adımları ve Geometrik Çizimi	171
Şekil 4.36 Ö4'e Ait Çalışma Kağıdı.....	173
Şekil 4.37 Ö5'e Ait Manuel Çizim.....	174
Şekil 4.38 Ö11'e Ait Çizim ve İşlemler	175
Şekil 4.39 Ö5'e Ait Geri Bildirim Notu ve Çizim.....	176
Şekil 4.40 Ö6'ya Ait Geri Bildirim Notu ve Çizimler	177
Şekil 4.41 Sırası ile Ö10, Ö8, Ö9'a Ait Çizim ve İşlemler	179
Şekil 4.42 Sırası ile Ö9 ve Ö11'e Ait Eşitsizlikler	180
Şekil 4.43 Ö10 ve Ö8'e Ait Öğrenci Geri Bildirimleri	181
Şekil 4.44 Eşkenar Dörtgen Temsil Formları.....	185
Şekil 4.45 Bereket Motifi Probleminde Öğrencilere Ait İlk Çizim Kayıtları	186
Şekil 4.46 Ö6'ya Ait Problem Çözme Kağıdı	187
Şekil 4.47 Ö3'ün Çözümüne Yönelik İki Farklı Çizimi.....	189
Şekil 4.48 Sırası ile Ö1, Ö11 ve Ö12'ye Ait Hatalı Çizimler	189
Şekil 4.49 Birinci Grubun Dinamik Geometri Yazılımı Desteği Süreci	192

Şekil 4.50 Ö1'e Ait Geogebra Çizimleri	192
Şekil 4.51 Kalem ile Oluşum.....	194
Şekil 4.52 Ö4'e Ait Çalışma Kağıdı	196
Şekil 4.53 Ö9'a Ait Çalışma Kağıdı	197
Şekil 4.54 Ö19'a Ait Çalışma Kağıdı	197
Şekil 4.55 Sırası ile Ö1 ve Ö3 Ait Çizimler	199
Şekil 4.56 Sırası ile Ö6 ve Ö20'ye Ait Çizimler	200
Şekil 4.57 Ö9'a Ait Çizimler.....	200
Şekil 4.58 Epistemolojik Düzleme Bağlı Parçalama- Ö9'a Ait Parçalama.....	201
Şekil 4.59 Doğum Günü Pastası Problemi İlk Çizimler	205
Şekil 4.60 Doğum Günü Pastası Problemine Ait Çizimler	207
Şekil 4.61 Ö9'a Ait Aynı İlişkiye Yer Veren İki Çizim (Park Peyzajı Problemi)	208
Şekil 4.62 Ö3'e Ait Yükseklik İlişkisine Yönelik İki Çizim (Kırık Seramik Problemi)	208
Şekil 4.63 Ö11'e Ait Çizim (Kırık Seramik).....	209
Şekil 4.64 Ö15'e Ait Çizimler (Ev için Arazi Problemi)	210
Şekil 4.65 Ö13' e Ait Çizimler (Uçurtma Yapımı)	211
Şekil 4.66 Problem Çözme Sürecinde Şekil Çizmeye İlişkin Söylemler	212
Şekil 4.67 Öğrencilerin Problemlere Yönelik Oluşturdıkları Sembolik Temsil Örnekleri	213
Şekil 4.68 Temsile Dayalı İşlevsel Kavrayışa Ait Çizimler	216
Şekil 4.69 Ö16' ya ait çizimler	217

Şekil 4.70 Ö5'in Enstrümantal Oluşuma Bağlı Çizimi	220
Şekil 4.71 Doğum Günü Pastası Problemi için Birinci Grup Tarafından Oluşturulan Yapı.....	221
Şekil 4.72 Problem Çözümünde Araç Kullanımına İlişkin Öğrenci Söylemleri.....	221
Şekil 4.73 Ö8 ve Ö6'nın Öğrenci Geri Bildirim Notları	224
Şekil 4.74 Ö9'a Ait Muhakeme (Uçurtma Yapımı)	231
Şekil 4.75 Ö7'ye Ait Teorik ve Doğal Muhakeme (Uçurtma Yapımı)	231



SİMGELER DİZİNİ-KISALTMALAR DİZİNİ

ARGEM	: Araştırma Geliştirme Eğitim ve Uygulama Merkezi Lisesi
BİLSEM	: Bilim ve Sanat Merkezi
FATİH PROJESİ	: Fırsatları Artırma ve Teknolojiyi İyileştirme Hareketi
LGS	: Liselere Giriş Sınavı
MAARİF MODELİ	: 2024-2025 Eğitim-Öğretim Yılında Uygulanmaya Başlanan Öğretim Programı
MEB	: Milli Eğitim Bakanlığı
MWS	: Mathematical Working Space (Matematik Çalışma Uzayı)
NCTM	: National Council Teacher of Mathematics (Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi)
PISA	: The Programme for International Student Assessment (Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı)
TÜBİTAK	: Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu

1 GİRİŞ

1.1 Problem Durumu

Matematik hakkındaki tartışmalar yüzyıllardır devam etmektedir. Bu tartışmalar matematiğin keşif mi, icat mı; analitik mi yoksa sentetik mi olduğu, entelektüel bir arayış mı yoksa uygulamada yer etmesi gereken bir bilim mi olduğu, matematiksel kesinliğin ne olduğu şeklinde sıralanabilir. Ünlü matematikçi Hardy'ye göre matematiğin uygulamalı bilimlerde kullanılan kısmı “önemsiz”, matematiksel gerçeğe ulaşmakla ilgilenen kısmı ise “gerçek” matematiktir. Buna karşılık Lobachevsky ne kadar soyut olursa olsun matematiksel bilginin uygulamada yer edeceğini söylemiştir. Bugün öğrencilerin biraz ironik şekilde sorduğu: “Bu öğrendiğimiz matematik gerçek hayatta ne işimize yarayacak?” sorusunu da bu kapsama almak önemli olabilir. Bu tartışmaların ışığında matematik eğitiminde güncel yönelimlerinden birinin de matematiğin gerçek yaşamla ilişkilendirilmesi olduğunu söyleyebiliriz (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2018; National Council Teacher of Mathematics [NCTM], 2000). Matematiğin gerçek yaşamda karşılık bulması veya matematiğin bizzat gerçek yaşamdan temel alması gibi derin felsefik tartışmalar devam ederken eğitimde matematiksel bilgi ile gerçek yaşam ilişkilendirmesinin önemli olduğunun altı çizilmektedir (Kertil vd., 2017; MEB, 2018). Bu ilişkilendirme üzerinden öğrencilerin matematik ve gerçek yaşam ilişkisi hakkındaki sorularına cevap verebilme potansiyeli oluşmaktadır. Ancak yine de matematiğin kendisi, müfredata yansması ve uygulamada kullanılması daha detaylı açıklamalar gerektirmektedir. Chevallard (1985) Didaktik Dönüşüm Teorisi'nde matematikçiler tarafından ortaya konulan matematiksel bilginin müfredata aktarılmasından eğitim ortamında uygulanmasına kadar geçen sürede doğasında değişim olduğunu ifade etmektedir. Aynı zamanda gerçek bir problemin giderilmesi amacıyla ortaya konulan bir bilgi üretildiği bağlamdan uzaklaşarak soyutlama yoluyla yeni bir yapı kazanabilmektedir. Nesnelerin miktarını belirlemek amacıyla kullanılan sayıların soyutlanarak karmaşık sayılar ve kodlama gibi farklı alanlarda kullanıldığı bilinmektedir. Bu durum matematiksel bilgi ile gerçeklik arasındaki ilişkinin karmaşıklığını ortaya koymakla birlikte inceleme ihtiyacı da hissettirmektedir.

Matematik tarihine bakıldığında geometri ile matematik birlikte ele alınmış, antik dönemlerde matematik ifadesi yerine geometri -yer ölçümü- terimi veya eş değer ifadeler

kullanılmıştır (Freudenthal, 1971). Heredot (M.Ö. 485-415)'a göre geometri - dolayısıyla matematik- Nil Nehri'nde yaşanan su taşkınlarının sebep olduğu arazi karışıklıklarını çözmek için Mısır'da ortaya çıkmıştır. Bu konuda ikinci bir görüş ise Aristo (M.Ö. 384-322) tarafından bildirilmiştir. Aristo'ya göre ise matematik ekonomik kaygıları olmayan din adamlarının entelektüel uğraşlarının ürünüdür (Ülger, 2006). Bağlamları farklı olsa da her iki görüş de matematiğin geometri ile başladığını ortaya koymaktadır. Uygulamalı ve gerçek matematik konusundaki tartışmaya matematik ve geometri tarihi açısından bakarsak geometri uygulamalarının gerçek yaşamda yer ettiğini görebiliriz. Thales'in bir geminin kıyıya olan uzaklığını hesaplaması, Mısır piramitlerinin inşasında kullanılan geometri, pi sayısının tarihteki kullanımı geometrinin gerçek hayatta karşılaşılan problemler için kullanıldığını göstermektedir. Geometri gelişimine Euclid (M.Ö. 330-275)'in Elemanlar kitabı ile ortaya koyduğu gibi soyut ve aksiyomatik bir yapıda devam etmiş olsa da Euclid'in matematik ile fiziksel dünyayı açıklamaya çalıştığı görüşü de bulunmakta (Malkevitch, 1998) ve günümüzde geometrinin somut uygulamalarına pek çok örnek görmekteyiz. Matematiğin bir alanı olan geometri hem aksiyomatik yapısı hem de günlük yaşamda karşılaşılan pek çok uygulama örneği ile araştırmacılara diyalektik düşünme açısından oldukça zengin bir alt yapı sağlamaktadır (Duval, 1998).

Geometri zihinsel ve fiziksel yapıları bir arada taşıyan bir sistem ortaya koymaktadır (Battista, 2007). Geometrinin bu ikili yapısının geometriyi, geometrik düşünmeyi ayrıcalıklı bir konuma taşıdığı ifade edilebilir. Geometri bu açıdan ele alınırsa kolayca somutlaştırılabileceği düşünülebilir. Örneğin küre için pinpon topu örnek gösterilebilir veya küreye ait çizimler gerçekleştirilebilir. Küre için pinpon topu örneği kürenin görsel imajlarından birini temsil etmektedir. Uzamsal olarak küre 3B uzayda merkez olarak belirlenen noktadan eşit uzaklıktaki noktalar topluluğunu ifade etmektedir. Bu ilişkinin öğrenci tarafından yapılandırılması tanımlanması kadar kolay gerçekleşmemektedir. Bu noktada geometrik düşünme somut yapılar ile kavramsal yapının birlikteliğini sağlamakla birlikte sadece soyut geometrik nesnelerle de çalışmayı içermektedir. Bugün matematikçilerin üzerinde çalıştığı geometri (Euclid dışı geometriler) açısından değerlendirecek olursak tamamen soyut yapıda olduğunu da ifade edebiliriz. Geometrinin bu soyut, sembolik ve aksiyomatik yapısı geometriyi ve öğretimini diğer disiplinlerden ayrı bir yere konumlandırmaktadır. Geometri öğretimi bireye problem çözme, akıl yürütme ve muhakeme yeteneği kazandırması (NCTM, 2000) açısından öğretim programlarında esaslı bir yer tutmaktadır. Bu çalışmanın temel kavramlarından biri olan

geometrik muhakeme (geometrik akıl yürütme) verilen bilgilerden yeni bilgiler çıkarmamıza olanak sağlayan süreçler olarak kabul edilir (Duval, 1998). Literatürde geometri öğreniminde kullanılan çeşitli teorilerle birlikte geometrik muhakemeye ve gelişimine açıklamalar getiren özel teorilerin van Hiele Geometrik Düşünme Düzeyleri, Şekilsel Kavram (Fischbein, 1993) ve Şekilsel Kavrayış Teorisi (Duval, 1998, 1999) ve Geometrik Çalışma Uzayı (Kuzniak, 2014) olduğunu görmekteyiz (Sinclair vd., 2016). Gerçekleştirilen geometrik muhakemenin niteliğinin belirlenmesinde Fischbein (1993) ve Duval (1998)'in çalışmaları öne çıkmaktadır. Fischbein (1993) Şekilsel Kavram olarak ifade ettiği teoride muhakemenin niteliğini şeklin kavramı yönettiği ve kavramın şekli yönettiği iki süreç üzerinden açıklamaktadır. Duval (1998) geometrik muhakemeyi bilişsel ve algısal süreçler üzerinden açıklamaktadır. Görselleştirme, oluşturma ve muhakeme bilişsel süreç bileşenleridir. Geometrik muhakemede şeklin nasıl işe koşulduğunu açıkladığı görsel, işlevsel, sıralı ve söylemsel kavrayış algısal süreç bileşenleridir (Duval, 1995). Bu bileşenler üzerinden tanımladığı geometrik akıl yürütme sürecinin doğal söylemsel ve teorik söylemsel muhakeme olmak üzere iki türlü sonuçlanabileceğini aktarmaktadır (Duval, 1998). Doğal söylemsel muhakemede şeklin veya doğal dilin kullanımı öne çıkmaktadır. Bu muhakemede geometrik şekil aynı boyutta parçalara ayrılabilir (*mereolojik*), kendisini oluşturan bir alt boyut elemanları belirlenebilir (*boyutsal yapı söküm*) veya parçaları yeni bir yapı oluşturacak şekilde birleştirilerek (*konfigüratif*) işe koşulabilir (Duval, 2017). Teorik söylemsel muhakeme şeklin kullanımı yerine tanım, teorem, aksiyomatik yapının kullanımını içermektedir. Sonuç olarak geometrik çizimlerin atıfta bulunduğu matematiksel kavramla olan ilişkisinin kurulması geometrik muhakemenin bir ölçütü olarak ifade edilebilir. Geometrik muhakemeye gelişimsel bir bakış açısı sunan van Hiele geometrik düşünme düzeyleri incelendiğinde de geometrik şekil ile başlayan sürecin kavramsal anlamaya doğru ilerlediği görülmektedir. Geometrik şekillerin geometrik düşünmede kullanımının yaygın olduğu rahatlıkla ifade edilebilir. Geometrik muhakeme üzerine gerçekleştirilen çalışmaların çoğunlukla geometrik çizimleri kullandıkları görülmektedir (Akdemir, 2022; Alphayta, 2022; Karaca, 2023; Karpuz, 2018; Kızıltoprak, 2022; Winer, 2017). Bununla birlikte geometrik muhakemede şeklin rolü oldukça tartışmalıdır. Kadim geometri anlayışının şekilden bağımsız düşünülmemesine ve teorilerin okul geometrisi temelli kavramlar üzerine yapılandırılmasına karşılık geometrik şekillerin muhakeme sürecine olumsuz etkisinden bahsedebiliriz. Diğer taraftan şeklin baskın olduğu bir

muhakemenin öğrencileri yanlış çıkarımlara götürme potansiyeli bulunmaktadır (Fischbein, 1993). Duval (1998) ise şekil üzerinden gerçekleştirilen muhakemeyi matematiksel davranış olarak görmemektedir. Sonuç olarak geometrik düşünme için şeklin önemli olduğu ancak üst düzey bir muhakemede geometrik çizimin işlevini kaybettiği ifade edilebilir. Şekillerin güçlü prototip etkisi (Mariotti ve Fischbein, 1997) veya şekil kaynaklı baskın görsel algı ve gestalt yapı (Duval, 1999), geometri görevlerinde sürecin değil çizimlerin odak noktası olması (Gal ve Linchevski, 2010) bu durumun nedenleri arasında sıralanabilir. Gal ve Linchevski (2010) aksiyomatik yapıya bağlı çözüm geliştiren öğrencilerin şekilleri oluşturan alt boyutsal yapıları çözmede başarısız olduklarını ifade etmektedir. Bu durumun nedeni olarak görsel algıya bağlı olarak şekle ilk bakıştan öteye gidememeleri ve konfigürasyonlar içinde çözümle ilgili görsel özellikleri ilgisizlerden ayırt edememeleri olarak bildirmişlerdir. Bu durum bu araştırmada şekil kullanımına bağlı yaşanan sıkıntıların önüne geçmek ama özellikle araştırmacının aklına takılan ve araştırmaya yön veren “Öğrencilerin kendi şekillerini oluşturdukları bir geometrik muhakeme süreci nasıl olurdu?” sorusuna cevap bulmak amacıyla şekil barındırmayan gerçekçi yaşam problemlerinin kullanımına yönlendirmiştir. Üst düzey bir geometrik muhakemede kavramsal anlamının ortaya konulmasında geometrik şekle ait çizimin işe koşulmaması, şekilsiz geometri problemlerinin kullanılmasının değerlendirilmesine yönelik ihtiyaç duyulduğu ifade edilebilir.

Alan yazında geometrik muhakemenin doğasının ne olduğunun tanımlanması ve geliştirilmesi amacıyla gelişimsel ve bilişsel yaklaşımlardan yararlanılmaktadır. Gelişimsel yaklaşımlar geometri eğitimine uzun süreli yön vermiştir. Belirli davranış ve yaş özelliklerine göre muhakeme düzeyinin belirlendiği van Hiele modelinde düzeyler arası ayrımın net bir şekilde yapılamadığı, tanımlanan gelişim seviyelerinin bir hiyerarşi oluşturup oluşturmadığı tartışmaları (Papademetri-Kachrimani, 2012), Euclid geometrisi temelli muhakemenin öne çıkması (Baki ve Güven, 2010; Sharma, 2019) açısından eleştirilmektedir. Bilişsel yaklaşımlar, özellikle Şekilsel Kavrayış Teorisi geometrik muhakemeye algısal ve bilişsel süreçler ile detaylı açıklamalar getirmektedir. Ancak geometrik bir muhakemede ortaya konulan görevin kendisi, matematiksel olarak gerektirdikleri ve öğrencinin görev üzerindeki matematiksel çalışması da bu sürecin değerlendirilmesinde önem taşımaktadır. Öğrenci çok kısa bir sürede beklenen sonuca ulaşabilir veya uzun uğraşlara rağmen matematiksel anlamda tutarlı bir sonuç elde

etmeyebilir. Öğrencinin doğru bilgiye ulaşması eğitim öğretim ortamlarında nihai amaçlardan biridir. Bu noktada da öğrenciye sunulan görev tasarımı beklenen ile öğrencinin gerçekte yaptığı iş arasındaki fark teori ve pratik ilişkisine gerçeklikle bakmayı sağlayacaktır. Bu farkın ortaya konulması pek çok açıdan önemlidir. Öğrenme ortamında öğrencinin karşılaştığı zorlukların belirlenmesi, çalışılan alanla ilgili kavram yanlışlarının tespit edilmesi matematik çalışma sürecinin analizi ile mümkün olabilmektedir. Dolayısıyla ister gelişimsel ister bilişsel yaklaşımların ele alındığı durumlar bazı noktaları açıklamakta yetersiz kalacaktır. Bu bağlamlardan hareketle geometrik muhakemenin değerlendirilmesinde öğrencinin bilişsel, algısal süreçleri kadar matematiksel çalışması ve bu çalışmanın karakteristiğinin önemli olduğu ifade edilebilir.

Kuzniak (2022) matematiksel çalışmayı yönelimi ve son durumu matematik ve matematik kültürü tarafından tanımlanan, desteklenen, devam eden entelektüel bir insanın üretim süreci olarak tanımlamaktadır. Kısacası matematiksel çalışma matematiğin çatısı altında verilen matematiksel bir görevi yerine getirmeyi, bir problemi çözmeyi gerektirmekle birlikte sürecin sonunda matematikle ilgili öğrenme çıktılarını garanti etmelidir. Öğrencilerin görev üzerinde çalışırken göreve ilişkin prosedürlere uygun adımlar atmaları, görevin sınırladığı alan içinde hareket etmeleri bu süreci gözlemlemek ve değerlendirebilmek için de gereklidir. Matematiksel çalışma sonuçlarının değerlendirilmesinde sonuçların çalışıldığı alan içerisindeki tanımlar, teoremler, ilişkiler ve kavramlar ile olan tutarlılığı kullanılır (Kuzniak, 2022). Matematiksel çalışma bir amaca yönelik gerçekleşmesi, görevin parametrelerine bağlı bir süreç olması, sonuçların ilgili matematiksel alanda geçerli ve tutarlı olması açısından sıradan bir çalışmadan ayrılmaktadır (Kuzniak, 2022). Kısacası görevin başlatıcısı, yürütücüsü ve değerlendirildiği alan yine matematiğin kendisidir. Eğitim ortamına taşınan her matematiksel görev veya etkinlik didaktik bir amaca hizmet etmektedir. Bu durum aslında matematiksel çalışmanın epistemolojik düzlemde öğrenciden ne beklediğini ortaya koymaktadır.

Matematik alanında çalışmak; kimya, fizik gibi matematiğin birlikte değerlendirildiği disiplin alanlarından ayrılmaktadır. Kuzniak ve birlikte çalıştığı araştırmacı grubu önce geometrik daha sonra matematiksel bir çalışmayı farklı disiplinlerdeki çalışmalardan ayıran matematiksel çalışma kavramı temelli Matematik Çalışma Uzayı Teorisi'ni (Mathematical Working Space: MWS) öne sürmüşlerdir. Teori matematiksel çalışmanın

matematik eğitimindeki evrimin merkezi olduğu fikrine dayanmaktadır. Teorinin kavramsal çatısı matematiği ayrıcalıklı konuma getiren temsil biçimi, soyut ve somut matematiksel araçlar ve matematiğin doğrulama yapısı üzerine kurulmuştur. MWS görevin matematiksel yapıya bağlı bileşenlerini içeren epistemolojik, görevi gerçekleştiren bireyin düşünce ve eylemlerini içeren bilişsel düzlem olmak üzere iki soyut yapı tanımlamaktadır. Epistemolojik düzlem temsil, artefekt ve referans bileşenlerini, bilişsel düzlem epistemolojik düzlem bileşenleri ile eşleşen sıra ile görselleştirme, oluşturma, ispatlama bileşenlerini içermektedir. Bu iki düzlem ve bileşenler arası ilişki kurulmasında semiyotik, enstrümantal ve söylemsel olmak üzere üç oluşum sürecinin işe koşulduğu belirtilmiştir (Kuzniak, 2022). Semiyotik oluşum işaret ve temsillerin görselleştirilmesini, enstrümantal oluşum matematiksel inşa sürecinde araçla bağlantı kurulmasını içermektedir (Kuzniak, 2022). Söylemsel oluşum teorik sisteme bağlı belirlenen özellikler, elde edilen sonuçların akıl yürütme ve doğrulamalar için kullanılmasına yönelik süreçlerdir (Kuzniak vd., 2016a). MWS tarafından tasarlanan soyut alanın öğretmen ve öğrencilerin matematik çalışmalarının daha etkili olmasını sağlayan bir araç olması, bilişsel ve epistemolojik perspektifler arasında bir köprü kurma olan matematiksel anlamının analiz edilmesiyle ilişkilidir (Kuzniak vd., 2016a).

Geometrik Çalışma Uzayı araştırmanın kavramsal çerçevesinde kullanılan MWS'nin öncül teorisidir (Kuzniak vd., 2016a). Bunun yanı sıra teorinin kökeni 1990'lı yıllarda Fransa'da ilkökulda geometri öğretimi üzerine gerçekleştirilen çalışmalar ve paradigma çalışmalarına dayanmaktadır (Panqueban vd., 2024). Geometrik muhakeme üzerine gerçekleştirilen çalışmada doğrudan geometri temelli bir teori kullanmak yerine matematiğin tüm alanlarında kullanılabilecek bir teorisinin kullanılması eleştirisine karşılık teorisinin genlerinin geometriye dayandığını ifade edebiliriz. Ayrıca Fransız didaktik geleneğindeki pek çok teorisinin başarılı bir sentezi olan teorisinin (Radford, 2016) geçtiğimiz son on yıl içerisinde pek çok farklı araştırmacı tarafından çeşitli bağlamlarda çalışılması teorisinin potansiyelini ortaya koymaktadır. Öğrenciler, öğretmen adayları veya öğretmenlerin matematik sınıfında oluşturdukları çalışma uzayının kullanımı ve analizinin çeşitliliği dikkat çekicidir (Artigue, 2016; Bacelo ve Gomez-Chacon, 2023; Gaona vd., 2022; Miranda vd., 2016; Montoya-Delgadillo vd., 2016; Pérez ve Delgadillo, 2022; Pluvina ve Flores, 2016; Santos-Trigo vd., 2016; Tanguay ve Venant, 2016). Alanyazında karşılaşılan bu çeşitliliğin temel sebebi teorisinin bir araç olarak tanımlanması ve bileşenleri aracılığıyla diğer teorilerle çalışmaya olanak sağlaması olarak ifade

edilebilir (Kuzniak vd., 2016a). Buradan çıkarılacak sonuç MWS'nin tıpkı tanımlandığı ve olması amaçlandığı gibi matematik eğitimi araştırmalarında etkili bir araç görevi üstlendiğidir. Öğrencilerin bir geometri görevi üzerinde çalışma sürecinin karakteristiğinin geometrik muhakeme ile ilişkisinin irdelendiği bu çalışmada öğrencilerin oluşturacağı çalışma uzayı incelemeye değer görülmüştür. Bu amaçla kullanılan MWS'nin geometrik muhakemeyi açıklamada ne ölçüde etkili bir araç olduğunun değerlendirilmesinin de önemli olduğu düşünülmektedir.

Matematik işi ile uğraşma veya matematik yapma olarak adlandırılan faaliyet Matematiksel Çalışma Uzayı Modeli'nin odak noktasıdır (Kuzniak ve Vivier, 2019). Bununla birlikte hem didaktik geleneği içinde hem de MWS çerçevesinde yürütülen çalışmalarda yer alan görev tasarımlarının kompleks bir yapıda olduğunu söyleyebiliriz. Örneğin Didaktik Durumlar Teorisinde ortam (*milieu*) öğrenciye rakip, görev ise eski bilgileri işlevsiz kılacak şekilde tasarlanmaktadır (Erdoğan, 2016). Görev tasarımının matematiksel yani epistemolojik olarak sağladığı imkânlarla karşılık uygulamada bireylerin bilişsel yapılarına bağlı sonuçlar elde edilmektedir. Görevin gerektirdikleri ile öğrencilerin ortaya koydukları performans arasında oluşan farkın analizinde MWS bilişsel bir bakış açısı da sunmaktadır (Radford, 2016). Bu bilişsel düzleme sahip teori için olağan bir durum gibi gözükebilir. Ancak teori Didaktik Durumlar Teorisi içinde yer almakta ve bu teori gibi yapılandırmacı bir öğrenme modeli özelliği taşımamaktadır. Bununla birlikte matematiksel görevi yerine getiren özne Didaktik Durumlar Teorisi için genel bir özne rolündeyken Matematiksel Çalışma Uzayı için öznenin bireyselliği önemlidir (Kuzniak vd., 2016a). Teori aynı görevle karşı karşıya kalan bireylerin matematiksel faaliyetleri ve erişileri arasındaki farkı açıklama potansiyelini bilişsel düzlem bileşenleri ile sağlamaktadır. Epistemolojik düzlem bileşenleri doğrudan matematiksel kriterleri esas alarak işe koşulmaktadır (Kuzniak vd., 2016a). Buna karşılık bilişsel düzlem bireyin bilişsel yetkinliğine dayanmaktadır. Bireyin eylemlerine odaklanan bilişsel düzlem ile epistemolojik düzlem arasındaki çok yönlü ve çok yapıli ilişkiyi ortaya koymak öğrenim ve öğretim sürecini analiz etmek açısından fayda sağlayacaktır.

MWS modeli öğretmen ve öğrencinin bir matematik görevini yerine getirmesi sırasındaki performansı, eylemlerini içeren süreç ve matematiksel işin kendisine odaklanmaktadır. Tüm bu bileşenler Brousseau (2002) tarafından oluşturulan Didaktik Durumlar

Kuramı'na ait didaktik yapıyı işaret etmektedir. Didaktik geleneğine bağlı bu teori öğrenme sürecinde öğrencinin öğrenme hedeflerinden haberdar olmadığı, öğretmenin sınıf ortamına getireceği öğretimsel duruma güvendiği, yani didaktik sözleşme kurallarının geçerli olduğu bir öğrenme modeli sunmaktadır. Bu teori sınıfa getirilen adidaktik durumların matematikteki her bir kavrama yönelik oluşturulabileceğini, ayrıca matematiksel her durum için yine matematiksel bir kavramın karşılık geldiğini belirtmektedir (Erdoğan, 2016). Öğrenci ve öğretmen arasında didaktik sözleşme esaslarına dayalı oluşturulacak görev tasarımı üzerinde düşünülmüş ve titizlikle planlanmış olmalıdır. Çünkü matematik didaktiğinde esas olan öğretmenlerin bilgiyi aktarma sorumlulukları ile öğrencilerin kendilerinin gerçek matematiksel fikir üretmeleri beklentisi arasındaki dinamiktir (Kuzniak ve Masselin, 2024). Brousseau ve Warfield (2020) geleneksel öğrenme dışında görev tasarımlarının bir matematikçininkine benzer şekilde (çözüm ve ispat gerektirme, aynı zamanda soru üretme, hipotez ve varsayımlar oluşturmaya olanak sağlama, yeniden formüle etme, nesneleri tanımlama, tartışma ve meydan okuma gibi süreçleri harekete geçirme) olması gerektiğini ifade etmişlerdir. MWS öğrenci ve öğretmenleri acemi birer matematikçi olarak tanımlamaktadır. Ancak Kuzniak (2022) bugün sınıfta öğretilen geometri ile modern matematikçilerin üzerinde çalıştığı geometrinin ilişkisiz olduğunu ifade etmektedir. Bu durumda MWS matematikçi olma ile ilgili durumu, üzerinde çalışılan içerik ile ifade etmemektedir. Öğrencilerin ve öğretmenlerin matematik üzerine çalışırken kullanmış oldukları teknik, araç gereç ve süreç benzerliğini ifade etmektedir. Araştırma öğrencilerin tıpkı bir matematikçi gibi bu süreçler üzerinden bir problemin çözümü üzerinde çalışmalarına olanak sağlayacaktır. Akademi düzeyinde problem çözme ile okul matematiğinde problem çözme pek çok açıdan farklı olsa da problem ve problem çözmenin matematik ve eğitiminin önemli bir parçası olduğunu rahatlıkla ifade edebiliriz (Kuzniak vd., 2016a). Bu önemli sürecin şekilsiz geometri görevleri üzerinden yaşatılması ile geometrik muhakeme ve geometrik şekil kullanımı, matematiksel çalışma kavramlarına ışık tutması beklenmektedir.

Duval (2017) öğrencilerin kendilerine verilen matematik görevlerinde neler yaptıklarını, nasıl açıkladıklarını ve görevi başarıp başaramadıklarını değerlendirmenin yeterli olmadığını ifade etmektedir. Bu durumun sebebi olarak matematiksel bilginin ne olduğunun anlaşılmasının ve diğer bilgi türlerinden farklı olduğunun fark edilmesi gerektiğini belirtmektedir. Bu yönüyle ele alındığında durumun hem bilişsel hem de epistemolojik olduğu görülmektedir. Duval ayrıca üzerinde çalışılan nesnenin doğasının

yanı sıra o nesnenin ele alınma biçiminin ve kendi başımıza nasıl öğrenebileceğimizin de matematik formasyonu için önemli olduğunu, bunun anlama olarak ifade edilen durumun kalbinde yer aldığını belirtmiştir. Bilişsel ve epistemolojik düzlem arasındaki ilişki göz önünde bulundurulduğunda Duval (2017)'in de belirttiği gibi bir bilginin anlaşılması, birey tarafından içselleştirilmesi o bilginin sadece kendi doğasına bağlı gerçekleşmemektedir. Bilginin uğradığı didaktik dönüşüm sonrasında o bilginin sunulma şekli ve bireyin bu bilgiyi nasıl tanımladığı gibi pek çok faktörden etkilenmektedir. Bunun yanı sıra Duval geometrik muhakeme sürecini tanımladığı Şekilsel Kavrayış Teorisi'nde (Figural Apprehension) muhakeme sürecini başlatacak görevle ilgili bir tanımlama yapmamaktadır. Hershkowitz (1998) Şekilsel Kavrayış Teorisi'nin geometrik muhakemeye üst düzey bilişsel bir analiz sunduğunu ifade etmektedir. Güncel çalışmanın doğasına uygun olarak gerçek yaşam bağlamı içeren üst düzey problemler kullanmanın sonuçları akademik bir merak uyandırmaktadır. Geometride matematikleştirmenin geometrik muhakemeye bağlı olduğu (Hershkowitz, 1998), gerçek dünya durumlarının ve uygulamalarının incelenmesi için geometrik temsillerin kullanıldığı (Malkevitch, 1998) ifade edilmektedir. Kulm (1984) özel yetenekli öğrenciler için geometri görevlerinin inşa (önceki öğrenmeler üzerine), sezgisel dayanak (sonraki formal öğrenmeler için), hipotez-ispat ve argüman, uzamsal görselleştirme ve akıl yürütmeye olanak sağlayacak şekilde görevler tasarlanması gerektiğini bildirmiştir. Bu çalışmanın temel teorilerinden biri olan MWS ise bilişsel ve epistemolojik düzlem arasındaki etkileşimin miktarına bağlı üç farklı düzeyde görevler (basit, standart ve zengin içerikli) tanımlamıştır. Yüksek düzeyde gereksinime sahip zengin içerikli görevler semiyotik olarak temsiller ve modellerin değişimini gerektirmekte, düzlemler arası oluşumları harekete geçirmektedir (Nechache ve Gomez-Chaon, 2022). Henríquez-Rivas vd. (2022) bilişsel ve epistemolojik düzlemler ile bunlar arasındaki oluşumları (*semiyotik, enstrümantal, söylemsel*) harekete geçiren görevlerin tam (eksiksiz) görev tasarımları olduğunu ifade etmektedir. Bu bağlamda araştırmada kullanılmak üzere yukarıda ifade edilen kriterlere uygun hazırlanan eksiksiz görevlere yönelik gerçekleştirilen matematiksel çalışmanın başarıyla tamamlanması için öğrencinin matematiksel görevin epistemolojik düzlem bileşenlerini işe koşması matematiğin sistemli yapısı içinde çözüm getirmesi gerekmektedir. Bu gereklilik MWS'nin üzerinde tanımlandığı matematiksel çalışma kriterleri ile teoride uyum sağlamaktadır. Nechache ve Gómez-Chacón (2022) ise MWS'yi öğrenciler tarafından kullanılan çözüm yaklaşımlarını daha iyi tanımlamak ve

bu süreci görselleştirmek için bir araç olarak ifade etmektedir. Görev tasarımı üzerinden kurulan bu ilişkinin ve teorinin ortaya koyduğu bu iddianın uygulamalar ile desteklenmesi gerekmektedir.

Geometrik muhakemeye MWS ile yaklaşmanın yanı sıra şekilsiz geometri problemleri gibi farklı bir bağlamın ele alınmasının yerinde olacağı düşünülmektedir. Literatürde MWS ile matematiksel modellemenin birlikte ele alındığı çalışmalar kayda değer sayıdadır (Derouet, 2016; Derouet vd., 2017b, Derouet, 2019; Lagrange, 2021; Lagrange vd., 2022; Moutet, 2019; Nechache, 2016). Çalışmalar incelendiğinde modelleme ile epistemolojik düzlemin doğrudan ifade edilmediği bir yapı sunulduğu görülmektedir. Bu uygulama bu çalışma için önemli görülmektedir. Çünkü güncel çalışmada modelleme görevlerinde benimsenen yaklaşımdan hareketle gerçek yaşam bağlamı içeren şekilsiz problemlerle epistemolojik düzlemin öğrenciye örtük kalabileceği düşünülmüştür. Örneğin sınıf ortamında yüzdeler konusunda gerçekleştirilen bir ders sonrasında gerçek yaşam durumlarına bağlı olarak verilen bir problem durumu öğrencinin kesirler ile ilgili epistemolojik düzlemin farkında olduğu bir problem çözme sürecini doğuracaktır. Bu durumu eğitim öğretim sürecinden olası bir sahne üzerinden ifade edelim. 7. sınıf matematik dersinde oran ve yüzdeler konusu kazanımlarının iki tanesi “**M.7.1.4.3.** Gerçek hayat durumlarını inceleyerek iki çokluğun orantılı olup olmadığına karar verir ve **M.7.1.4.6.** Gerçek hayat durumlarını inceleyerek iki çokluğun ters orantılı olup olmadığına karar verir.” şeklindedir. Öğretmenin sınıfta bu kazanımlara yönelik gerçekleştirdiği öğretim süreci sonrasında öğrenciler yüzdeler ve oran konusuna yönelik farkındalıkla verilen gerçek yaşam durumunu semiyotik olarak doğrudan yüzdeler ve oran temsilleri ile ifade edeceklerdir. Yüzdelere bağlı hesaplamalarda orandan yararlanma veya bir bütünün bir kesir kadarını hesaplama yolunu kullanacaklardır. Bu görevler gerçek yaşam bağlamı içerisinde de verilse öğrencinin hangi temsil sistemlerini, hangi işlemleri ve hangi referansal sistemi kullanacağına yönelik açık bir ortam oluşturmaktadır. Bu açıklık öğrencinin görevde başarısını elbette garanti etmemektedir. Ancak öğrencinin sergileyeceği matematiksel davranışları şekillendireceği de aşıkardır. Brousseau (2002) ise bilginin nasıl kullanılacağına yönelik verilen mesajın öğrenciler tarafından kolayca kabul edildiğini ancak tanımlanması ve kontrol edilmesi zor bir epistemolojik düzleme neden olduğunu aktarmaktadır. Geometri problemleri genellikle soruyu soran kişinin görsel temsilini içermektedir. Çalışmada kullanılan problemler öğrencilerin kendi şekillerini oluşturmalarını gerektirmektedir. Bu uygulamanın

öğrencilerin şekil algılarını ortaya çıkarmak, kavram imajlarını belirlemek, görselleştirme ve algısal süreçlerin analizi gibi pek çok açıdan faydalı olacağı düşünülmüştür. Bilişsel anlamda akranlarından önde olan özel yetenekli öğrencilerin matematikleştirme - bu çalışmada görselleştirme - ve sonuçları matematiksel yorumlayabilme düzeylerinin yüksek olması beklenmektedir. Fakat bu beklentinin doğrulanmaya ihtiyacı olduğu görülmektedir.

Kulm (1984) özel yetenekli 8. sınıf öğrencileriyle gerçekleştirmiş olduğu geometri etkinlikleri sonucunda öğrencilerin ispat yapmayı gerçekleştirecek bilişsel yeterliliğe sahip olmalarına karşılık yeterli deneyime sahip olmadıkları için aksiyomatik bir ispat gerçekleştiremediklerini ortaya koymuştur. MWS'nin referans, ispat ve söylemsel oluşum boyutları ile ilişkili olan bu sonuç özel yetenekli çocuklar açısından dikkat çekicidir. Özel yetenekli öğrencilerin potansiyellerini ortaya çıkaracak şekilde eğitimin düzenlenmesi gerekmektedir (Mönks ve Mason, 2000). Eğitimde yapılan bu düzenlemeler farklılaştırma altında ele alınmakla birlikte sonuçları bakımından değerlendirilmesi gerekmektedir. Bu değerlendirmelerden sonuçların elde edildiği grubun eğitim ihtiyaçlarını ortaya çıkarmak gibi veri toplanan gruba özgü çıkar, geniş bir perspektiften özel yetenekliliğin doğasının anlaşılması sağlanabilir. Ayrıca özel yeteneğin ne olduğu, kapsamı zamana ve mekana göre değişiklik göstermektedir (Kaufman ve Sternberg, 2008). Bu bağlamlardan hareketle özel yetenekli öğrencilerle gerçekleştirilen çalışmalara bu öğrencilerin potansiyellerini ve eğitim ihtiyaçlarını belirleme, eğitim ortamlarını öğrencilere göre düzenleme gibi eğitimsel, özel yetenekliliğin güncel şartlar içinde tanımlanması gibi teorik faydaları nedeniyle ihtiyaç duyulmaktadır. Ayrıca tasarlanan matematiksel görevin her iki düzlemi ve bu düzlemler arası artikülasyonu ortaya koyacak görevin üst düzey olması kadar görevi yerine getirmesi gereken bireyin bilişsel yeterliliği de önem arz etmektedir. Geometrik muhakeme üzerine yürütülen çalışmanın amacına ulaşması için bilişsel açıdan yeterli olduğu merkezi sınav ve testlerle tespit edilmiş özel yetenekli öğrenciler ile gerçekleştirilmesinin uygun olduğunu söyleyebiliriz. Geometrik muhakemenin merkeze alındığı bu araştırmanın üst düzey bilişsel yeterlilik gerektirmesinden dolayı çalışma 8. sınıfa devam eden BİLSEM'e kayıtlı özel yetenekli öğrenciler ile gerçekleştirilmiştir.

Buraya kadar ifade edilen noktalardan hareketle araştırmanın problemleri şu şekilde belirlenmiştir:

1. Özel yetenekli öğrencilerin şekilsiz geometri görevlerinde gösterdikleri geometrik muhakemeleri semiyotik, enstrümantal ve teorik (söylemsel) boyutlarıyla nasıl karakterize edilmektedir?
2. Öğrencilerin matematik çalışma karakterine bağlı gerçekleşen muhakemenin niteliği nedir?

1.2 Araştırmanın Amacı

Bu araştırmada özel yetenekli 8. sınıf öğrencilerinin geometrik muhakemelerinin şekilsiz geometri problemlerindeki matematiksel çalışmaları bağlamında incelenmesi, öğrencilerin oluşturdukları uzaya bağlı matematiksel çalışma karakteristiklerinin belirlenmesi amaçlanmaktadır. Bu bağlamda kullanılan geometri problemleri yeni bir matematiksel kavram ve ilişki öğretimi, öğrencilerin geometri problemlerini çözme becerilerinin gelişimini sağlamaktan ziyade süreçteki geometrik muhakemelerinin bilişsel ve epistemolojik düzlemler ve oluşumlar aracılığıyla çözümlemesine hizmet etmesi amacıyla kullanılmıştır. MWS matematik problemi üzerinde çalışan öğretmen veya öğrencilerin gerçekleştirdikleri matematiksel çalışmanın yapısını incelenmesi için bir araç olmasının yanı sıra bu çalışmayı analiz etmeye olanak sağlamaktadır (Kuzniak vd., 2016a). Bu araştırmada öğrencilerin üzerinde çalışacağı matematiksel görev olarak gerçek yaşam bağlamı içeren şekilsiz geometri problemlerine yer verilmiştir. Sınıf ortamında gerçekleştirilen etkinlikler matematikten gerçek dünyaya doğru bir akış sunarken gerçek yaşam durumlarından matematiğe doğru gerçekleşmesi beklenen akış ile epistemolojik düzlem ve bilişsel düzlem arasındaki ilişkiye gerçeklik merceğinden bir bakış sağlanmaya çalışılmıştır. Güncel çalışmada yer alan gerçek yaşam bağlamı ile görevin epistemolojik düzleminin öğrenciye örtük olduğu, öğrencinin matematiksel çalışma alanını matematikleştirme ile kendisinin oluşturduğu bir süreç tasarlanmıştır. Bu tasarımda öğrencilerin özel yetenekli olmaları belirleyici olmuştur. Matematikleştirme süreci öğrencilerin kullanacakları temsil sistemleri ve matematiğin teorik yapısı ile yakın ilişkili olması nedeniyle semiyotik oluşum, söylemsel oluşum sürecini değerlendirmek için işe koşulmuştur. Analizlerin geometri temelli bir matematiksel çalışmada öne çıkan oluşum süreçlerini ortaya çıkarması amaçlanmıştır. Kuramsal çerçevede belirtilen bu oluşumların algısal süreçler ile ele alınmasıyla da geometrik muhakemenin ve niteliğinin ortaya konulması araştırmanın nihai amacıdır.

Geometrik muhakemeye odaklanan bu çalışmada görev tasarımlarının geometri özelinde gerçekleşmesinin yanı sıra adidaktik (öğrencinin öğrenme hedeflerinden haberdar olmadığı) durumlar olarak tasarlandığı ifade edilebilir. Matematiksel görevlerin MWS içerisindeki dolaşımı gerçekleştirme potansiyelinin olması, esnek çözüm yolları içermesi, farklı düzeylerde soyutlamaya imkân sağlaması yoluyla geometrik çalışma sürecinin muhakeme bağlamında incelenmesi amaçlanmıştır. Ayrıca şekil içermeyen problem tasarımına bağlı öğrencinin geometrik şekli algılama, kullanma ve şekli yönetme durumlarının öğrencilerin bilişsel sistemleri içerisinde ele alınması amaçlanmaktadır. Öğrencilerin bireysel çalışma uzaylarının özel olarak semiyotik, enstrümantal ve söylemsel oluşumlar, algısal süreçler ve genelde ise MWS temel kavramları aracılığıyla analiz edilmesinin geometrik muhakemeye yeni bir perspektif sunacağı düşünülmektedir.

1.3 Araştırmanın Önemi

Gerçek sınıf ortamında öğretmenin öğretim sürecinden beklentileri ile öğrencinin sürecin sonunda elde ettikleri arasındaki farkın açıklanması matematik eğitimi açısından önem arz etmektedir. Didaktik Dönüşüm Teorisi (Chevallard, 1991) bilginin dönüşümünde öğretmen ve öğrenciyi sürecin en sonuna yerleştirmektedir. Bu noktada meydana gelen dönüşüm kurumsal bir yapı içerisinde öğretmenin rehberliğinde sunulan bilginin öğrencinin bilişsel sistemindeki karşılığını ifade etmektedir. Öğretmenin sınıfta yürüttüğü eğitim etkinliği, içinde tasarlandığı disiplinin kriterlerine dayanmaktadır. Ancak öğretim veya etkinliğin epistemolojik temellerinin sağlam olması eğitimin amaca hizmet etmesini tek başına yordamamaktadır. Öğretimin öğrencide beklenen bilişsel yapıları harekete geçirmesi gerekmektedir. MWS tanımladığı kavram ve süreçler ile öğretmenden öğrenciye doğru gerçekleşen dönüşüm sürecini açıklama potansiyeli taşımaktadır. Oluşum süreçleri öğrencilerin sergilemesi gereken davranışlar, bilişsel düzlem öğrenci eylemleri ile ilişkilendirildiğinde yukarıda ifade edilen farkın nedenlerine yeni bir bakış sağlanmış olacaktır. Bu motivasyonla MWS teorisinin çalışma ile uygulanması hem teoriye hem alana katkı sağlayacaktır.

Bu araştırma öğrencilerin şekilsiz geometri görevlerindeki geometrik muhakemelerinin MWS modeli bileşenlerine göre analizine odaklanmaktadır. Bu bağlamda öğrencilerin yeni bir kavram edinimi yerine halihazırda sahip oldukları matematiksel bilginin şekilsiz geometri problemleri üzerinde uygulanma süreci esas alınacaktır. Formal matematiğin uygulamalarında ortaya çıkan epistemolojik ve bilişsel düzlem farkının öğrencinin gerçek

dünyadan alıntılanan matematiksel durumlar açısından değerlendirilmesi epistemolojik nedenlerle önemli görülmüştür. Doğrudan matematiksel bir konu alanı içinde tasarlanmayan uygulama etkinliklerini öğrencinin hangi matematik çalışma uzayı (cebir MWS, aritmetik MWS, geometri MWS gibi) içerisine konumlandıracağının belirlenmesi önemlidir. Çalışmanın bu farkı belirlemeye yönelik doğrudan bir amacı bulunmamakla birlikte öğrencilerin çalışma uzayı karakteristiğini yansıtması açısından değerlendirilmesi gerekmektedir. Tasarlanan görevler önceden ispat yapmak, denklem kurmak, şekil çizmek gibi yapılandırılmış bir öğretim durumuna bağlı olmadığı için çok çeşitli çalışma biçimi ortaya çıkarabilme fırsatı da sağlayacaktır. Öğrencinin çalışma biçiminin görev için doğru yapı sunması gibi basit bir değerlendirmeye karşılık analizlerde MWS'nin kullanılması öğrencinin çalışma uzayının semiyotik temsil araçları, artefekt kullanımı, matematiksel arka plan gibi pek çok bileşenle birlikte değerlendirilmesine olanak sağlayacaktır. Çalışma bu yönüyle literatürde öğretimsel bir sürecin analizine yenilikçi bir bakış açısı getirecektir.

Teorilerin tanımlandıkları disiplin içerisinde ele aldıkları olguyu eksiksiz olarak açıklamak gibi bir iddiaları olmadığı ortadadır. Ancak bu iddiasızlığa rağmen her teorinin hem teorikte hem de uygulamada tespit edilen eksikliklerinin ifade edilmesi gerekmektedir. Bu yaklaşım bilimsel olmasının yanı sıra kendinden sonraki araştırmacılara fikir vermektedir. Şekilsel Kavrayış Teorisi'ni bu bağlamda incelediğimizde geometrik muhakemeye geniş bir bakış açısı sunmasına karşılık muhakemeye şekil odaklı açıklamalar getirmektedir. Duval'in geometriye bakış açısı öznenin gözlemlenebilir ve elle tutulabilir davranışlarına yani sadece bilişsel süreçlere odaklanmaktadır (Kuzniak ve Vivier, 2019). Teori içinde teorik söylemsel muhakemenin gerçekleştirilebileceği yani tamamen aksiyomatik yapıya dayalı akıl yürütülebileceği ifade edilmekte ancak şekil bağlamı muhakemeler (mereolojik bölünme, boyutsal yapı-söküm, konfigürasyonlar) öne çıkmaktadır. Teorinin kavramsal çatısının tek bir çalışmada sunulmaması, bilişsel ve algısal süreçlerin ayrı ayrı çalışmaların konusu olması, teorinin kavramları arasında ilişki kurulmasında bir takım zorluklar yaratmaktadır. MWS'nin temel kavramları olan oluşumlar (semyotik, enstrümantal, söylemsel) aracılığıyla hem bilişsel-algısal süreçler birlikteliği sağlanmış olacak hem de geometrik muhakemeye epistemolojik bir yaklaşım getirilecektir. Böylelikle araştırmaya literatürde kabul gören iki kapsamlı teorinin ayrı ayrı açılardan değil de bütünlük içinde ışık tutmasının araştırmayı ayrıcalıklı konuma getireceğine inanılmaktadır.

Tutan (2019) öğretmenlerin geometri eğitimlerinde oluşturma basamağına vurgu yapmadıklarını bildirmiştir. Bu uygulama öğrencilerin şekli oluşturmalarına olanak vermesi açısından önemlidir. Çünkü öğrencilerin kağıt üzerine kaba çizimler ve araç kullanarak çizimi gerçekleştirme gibi yönelimlerinin belirlenmesi önemli görülmüştür. Bu uygulamanın öğrencilerin geometrik kavramlara yönelik imajları, şekil algıları, geometrik bir çizimi nasıl gerçekleştirdikleri ve şekil üzerindeki hâkimiyetleri gibi pek çok açıdan faydası olduğu öngörülmüştür. Ayrıca bu uygulamanın öğrencilerin geometrik kavramlara yönelik semiyotik boyuttaki yeterliklerini açıklayacağı düşünülmüştür. Geometri öğretim programında doğrudan oluşturma ile ilgili kazanımlara yer verildiği düşünülürse bu uygulama ile öğrencilerin bu kazanımı problem çözmek için araç olarak kullanımının değerlendirilmesi önemli görülmüştür.

Eğitim alanındaki araştırmaların temel amaçlarından biri öğretme ve öğrenme teorilerinin geliştirilmesi ve iyileştirilmesi olarak ifade edilmektedir (Sinclair vd., 2016). Araştırmanın teorisinin özellikle çalışıldığı Fransız ve İspanyol coğrafyası dışında Türkçe konuşulan bir ülkede uygulanmasının teorisinin yaygınlaşması, hem de farklı eğitim sistemleri içerisinde ele alınmasının teorisinin gelişimine katkı sağlaması beklenmektedir. MWS daha da geriye gidersek Geometrik Çalışma Uzayı (GWS) çeşitli ülkelerde on yılı aşkın süredir çalışılmaktadır (Gómez-Chacón ve Kuzniak, 2015; Kuzniak ve Rauscher, 2011; Kuzniak ve Nechache, 2015). Ancak Türkiye’de teorisinin yer aldığı çalışmaların sınırlı olduğu görülmüştür (Deniz, 2024; İmamoğlu vd., 2023; Karahan, 2021). Teorisinin potansiyelinin Türkiye’deki araştırmacılara tanıtılması, daha önce Avrupa ve Amerika kıtalarında çok sayıda çalışılan teorisinin Türkiye’de uygulanması önemli görülmüştür.

Geometrik yetkinlik elde etmek için her bir bilişsel sürecin ayrı ayrı geliştirilmesi gerekmekte ancak sonrasında bu üç sürecin koordinasyonu gerçekleşmelidir (Duval, 1998). Bu süreçlerin her biri MWS içerisinde bir oluşum sürecini temsil etmekte dolayısı ile semiyotik, enstrümantal ve söylemsel oluşumun ve çalışma içerisindeki koordinasyonlarının değerlendirilmesi araştırmanın alana bir diğer katkısı olarak söylenebilir. Bu düşüncede teorisinin ifade ettiği gibi görev sırasında öğrencilerin karşılaştıkları engellerin, sürecin kesintiye uğradığı noktaların belirlenmesine araç olma rolü etkili olmuştur.

Dinamik geometri yazılımları potansiyelleri sebebiyle matematik, özelinde ise geometri öğretiminin ayrılmaz bir parçasıdır. Ancak teknolojinin sınıf ortamında işler hale gelmesi

kendiliğinden gerçekleşmemektedir. Teknolojinin çeşitliliği, kullanılma amacı, farklı teori ve disiplinler içinde çalışılması gibi açılardan kaynaklanan karmaşık bir süreçten bahsedebiliriz. Doğrudan teknolojik araçlar üzerine tanımlanmayan Enstrümantal Oluşum Teorisi (Rabardel, 1995) araştırmacılar tarafından teknoloji destekli matematik eğitimi araştırmaları için kullanılmaktadır (Özdemir-Erdoğan, 2016). Teori aslında artefekt kavramı üzerine yapılandırılmış olsa da günümüzde teknolojinin etkili bir öğretim aracı olması araç (artefekt) ve teknolojinin aynı anlama geldiği olgusu ortaya çıkarmaktadır. Teorinin kendisi araç-enstrüman için kapsamını semiyotik, bilişsel, soyut olmak üzere (Rabardel, 2002) daha geniş tutmuştur. Güncel araştırmada geometri temelli bir çalışmanın enstrümantal oluşum süreci hem somut (pergel, cetvel, öğrencilerin kendi oluşturdukları araçlar) hem de teknoloji (Geogebra) destekli değerlendirilmiştir. Araç desteğinin muhakeme içindeki işlevine yönelik kapsamlı bir analiz sunması açısından araştırma önemlidir.

Bugün öğrenme ortamlarının yapısının nasıl olması gerektiği konusunda pek çok yaklaşım (STEM, Future Classroom Lab., Montessori vb.) olduğunu görmekteyiz. Bu yaklaşımların ortak olarak ifade ettikleri nokta geleneksel sınıf ortamlarının öğrencilerin güncel ihtiyaçlarını karşılamakta yetersiz olduğudur. Özel yetenekli öğrenciler düşünüldüğünde bu ihtiyaçların karşılanmamasının yanı sıra öğrencilerin potansiyelini ortaya koyabilecekleri şartların sağlanmadığını da söyleyebiliriz. Özel yetenekli öğrencilerin eğitimlerinin içerik, süreç, ürün ve öğrenme ortamı bağlamında farklılaştırılması gerekmektedir. Araştırma; etkinliklerin bağlamı ve tasarımı, sürecin araç kullanımına bağlı yapısı, analiz, sentez gibi üst düzey akıl yürütme gerektirmesi, sonuçların gerekçelendirilmesi ile özel yetenekli öğrencilere uygun zenginleştirilmiş ve hızlandırılmış bir eğitim olanağı sağlaması bakımından önemlidir. BİLSEM’lerde uygulanan ortak ve standart bir çerçeve programın olmaması (Sak vd., 2015), matematik etkinliklerinin kapsam ve uygunluk bakımından değerlendirilmemesi (Çetin ve Doğan, 2018) özel yetenekliler eğitiminin istenen başarıya ulaşmasında engel teşkil etmektedir. Bu çalışmanın bireysel olarak araştırmacıya özel yetenekliler eğitiminin planlanması, uygulanması ve değerlendirilmesi konusunda fayda sağlamasının yanı sıra çalışma ile geçerli ve güvenilir etkinlikler sunması bakımından alana katkı sağlayacaktır.

Araştırmanın veri analizi süreci devam ederken MEB tarafından yayınlanan Türkiye Yüzyılı Maarif Modeli kapsamında 2024-2025 eğitim öğretim yılında uygulanmaya

başlayan matematik dersi öğretim programlarının geometri temaları incelendiğinde araştırmanın tasarımı ile benzer şekilde araç kullanımının öne çıktığı görülmüştür. Ayrıca matematik alan becerilerinden biri olarak kabul edilen muhakemenin geometrik şekiller temasında uygulamalar incelendiğinde oluşumun rolüne yapılan vurgu dikkat çekmektedir. Birbirinden bağımsız yürütülen öğretim programı çalışmaları ve araştırma tasarımı arasındaki bu paralellik çalışmanın sonuçlarının ortaokul matematik dersi öğretim programlarının açısından incelenmesini de kıymetli kılmaktadır.

1.4 Araştırmanın Varsayımları

- Özel yetenekli öğrencilerin özelliklerinden bir tanesi de verilen göreve dikkatini vererek uzun süre çalışabilmeleridir. Çalışma grubundaki öğrencilerin bilişsel açıdan motivasyonları yüksek şekilde görev üzerine düşündükleri varsayılmaktadır.
- Öğrencilerle gerçekleştirilen görüşmelerde öğrencilerin sorulara içtenlikle cevap verdikleri düşünülmektedir.

1.5 Araştırmanın Sınırlılıkları

- Nitel araştırma ile yürütülen bu çalışma özel yetenekli olarak tanı almış 8. sınıfa devam eden BİLSEM öğrencileri ile gerçekleştirilmiştir. Dolayısı ile bu çalışmadan elde edilen veriler özel bir grup için elde edilmiştir.
- Araştırmanın yürütüleceği sınıf, örgün öğretim kurumlarına göre daha az sayıda öğrenciden oluşmaktadır. Araştırma öğrencilerin gönüllüğü esasına dayalı gerçekleştirildiği için katılımcı sayısı konusunda esneklik gösterememek bu çalışma için bir sınırlılıktır.
- Araştırma konusu olan geometrik muhakeme bu çalışmada MWS ile birlikte değerlendirilmiştir. İlgili teoremin oluşum süreçlerinden biri olan enstrümantal oluşum somut-soyut araç kullanımını gerektirmektedir. Öğrencilerin matematiksel araç ve teknoloji kullanmaya ilişkin örgün eğitim deneyimleri enstrümantal oluşum sürecinin gözlemlenmesi noktasında sınırlayıcı olmuştur.
- MWS birden fazla teoremin sentezi olarak ortaya konulmuştur. Dolayısı ile ele aldığı kavramların ayrı birer teoremin çalışma başlığı olması nedeniyle MWS'ye yönelik çalışmalar esas alınarak sınırlamaya gidilmiştir. Bu sınırlamada teoremin kavramlarla ilgili açıklamaları dikkate alınmıştır.

2 LİTERATÜR

2.1 Kavramsal Çerçeve

Bu bölümde güncel çalışmada esas alınan geometrik muhakemeyi, geometrik muhakemeye yönelik teorik çerçeveleri, geometrik muhakemenin açıklanmasında esas alınan MWS Teorisi, özel yetenekli bireyler ve literatür taramasının sonuçlarını içeren başlıklara yer verilmiştir.

2.1.1 Geometrik muhakeme

Muhakeme kelimesi TDK'ye göre “usa vurma” , muhakeme yürütmek “düşünmek, soruna bir çözüm aramak” ve muhakeme etmek “akıl süzgecinden geçirmek, düşünmek” olarak açıklanmıştır. Bu tanımlar referans alınarak çalışmanın konusu olan geometrik muhakemenin geometri temelli bir düşünme, akıl yürütme ve çözüm geliştirme süreci olduğunu söyleyebiliriz. Battista (2007) geometrik muhakemeyi şekil ve uzayı anlamlandırmak için şekilsel kavramsal yapının kullanılması olarak tanımlamaktadır. Bu tanım geometrik muhakemenin geometri disiplini içindeki işlevine yönelik açıklama getirmektedir. Ancak matematik tarihi açısından ele alırsak geometrinin matematiksel düşünmenin bir aracı olduğunu söyleyebiliriz. Van der Waerden (1963) Yunan matematiğinin akıl yürütme biçimi olarak geometri elbiselerini kullandığını ifade etmiştir (akt. Unguru, 1975, s.71). Yunan matematikçiler geometrik çizimleri sözsüz doğal bir ispat aracı olarak kullanmışlardır (Citrini, 2015). Bu tür bir ispat sadece somut çizimlere bağlı olması ve teorik açıdan çok az şey sunması bakımından eleştirilebilir. Geometri dersi her ne kadar fiziksel uzayın bir modellemesi olması, çalıştığı kavramların (çizgi, nokta, düzlem vb.) duyuşsal tecrübe yoluyla kazanılabilmesi (Parzysz, 1991) açısından matematik içinde ayrı bir yere konumlandırılrsa da farklı geometrik paradigmlar (Houdement ve Kuzniak, 1999) açısından düşünüldüğünde muhakeme için potansiyeli çabasıız şekilde fark edilebilmektedir. Whiteley (2019) geometrinin uzamsal ve görsel temsiller aracılığıyla akıl yürütmenin matematiksel bilişte en açık formu olduğunu ifade etmektedir. İçinde yaşadığımız dünyanın uzamsal olarak anlamlandırılmasından başlayan bir akıl yürütme süreci ile matematiksel düşünmenin temelini oluşturmaktadır. Geometrinin somut örnekleri bilişsel gelişimin somuttan soyuta olan yönelimini desteklemektedir. Bu alt yapı geometrik muhakemenin de iki farklı perspektifte ele alınmasının önünü açmıştır. Geometride muhakeme Piaget ve van Hiele tarafından gelişimsel olarak sınıflandırılmıştır. Piaget'ye göre geometrik düşünmenin gelişimi

topolojik, projektif ve euclid anlama şeklinde hiyerarşik bir sıra izlemektedir (Baki, 2020). Gelişimsel yaklaşımlardan en bilineni ise van Hiele geometrik düşünme modelidir. Geometrik muhakeme sezgisel bir yapıda başlayarak farklı derecelerde soyutlamalara bağlı ilerleyen bir süreç olarak tanımlanmıştır (Jones, 1998). Geometrik düşünmenin gelişimine erken çocukluktan itibaren açıklama getirmektedir. Orijinal kaynakta 0-4 arası derecelendirilen muhakeme seviyeleri; görsel, analiz, informal çıkarım, formal çıkarım ve sistematik düşünme düzeyi olarak tanımlanmaktadır (Duartepe-Paksu, 2016). Düzeyler kademeli olarak geçilmekte ve bir düzey tamamlanmadan bir üst düzeye geçiş sağlanamamaktadır. Ancak öğretim programlarında geometri içeriklerinin şekillenmesinde önemli rol oynayan modelin (Karpuz, 2018; Newton, 2010) tek bir gelişimsel seviye için tanımlanan akıl yürütme ve söylem farklılıkları içerdiği ve buna bağlı olarak akıl yürütme seviyelerinin tanımlandığı kadar ayrıık olmadığı görülmüştür (Sinclair vd., 2016). Gelişimsel yaklaşımdan farklı olarak geometrik muhakemenin bilişsel açıdan ele alınmasına yönelik öncül teori Fischbein (1993) tarafından ortaya konulan Şekilsel Kavram “Figural Concept” Teorisidir. Geometrik nesnelerin imgeleri ile bu imgelerin görsel temsillerinin biçimsel doğruluğunu yönlendiren kavramsal yapı ikili bir yapı oluşturmaktadır. Hem soyut ideal bir nesne ve hem de imge olan geometrik şeklin bu iki yapısının bileşimi geometrik akıl yürütme için gereklidir (Fischbein ve Nachlieli, 1998). Bir örnek üzerinden açıklamak gerekirse geometrik bir nesne olan üçgenin sonsuz sayıda zihinsel imgesi bulunmaktadır. Bu imgelerin uzamsal- görsel temsilleri üçgen kavramının kriterlerine (kapalı olma, kenarlarının doğru parçası olması, üç köşesinin olması vb.) uygun olmalıdır. Üçgenin görsel temsili ile kavrama ilişkin matematiksel arka planının birlikteliği etkili geometrik muhakeme için gereklidir.

Geometrik düşünme ve akıl yürütmenin hiyerarşik bir yol izlemediğini ifade eden diğer bilişsel bakış açısına sahip teori Fransız Psikolog Raymond Duval (1995; 1998) tarafından ortaya konulmuştur. Teoriye göre geometrik yetkinlik bilişsel (Duval, 1998) ve algısal (Duval, 1995) iki süreç ve bu iki süreç arasındaki artikülasyona bağlıdır. Teorinin kavramsal yapısı (Şekilsel Kavrayış Teorisi başlığı altında incelenecek) göz önünde bulundurulduğunda geometrik muhakemeye literatürde en kapsamlı analizi yapmaya olanak sağladığı söylenebilir. Bilişsel perspektif teorilerinden Şekilsel Kavram Teorisi’ni de içine alan bütüncül bir teori olarak görülmektedir (Karpuz, 2018). Türkiye’de yürütülen çalışmaların ilgili teori için Duval’in bilişsel yaklaşımı-modeli (Akdemir, 2022; Karpuz, 2018; Kızıltoprak, 2020) isimlendirmesini kullanmasına

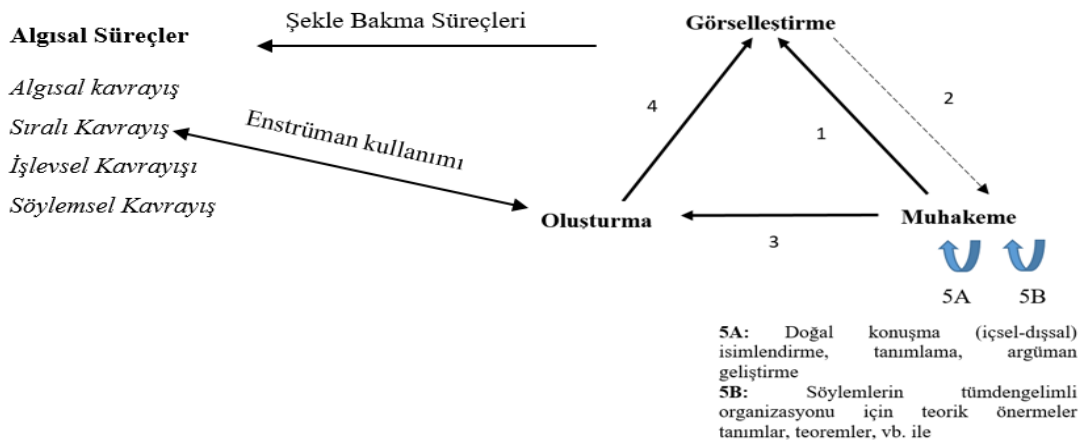
karşılık bu çalışmada “Figural Apprehension” (Sharma, 2019; Sinclair vd., 2016) ifadesinin Türkçe karşılığı Şekilsel Kavrayış Teorisi isimlendirilmesi kullanılacaktır. Çalışmanın bilişsel perspektifte gerçekleştirilmesi ve Fransız ekolü kökenli MWS’nin araştırmanın bir diğer teorisi olması, teorinin kavramsal yapısının zenginliği Şekilsel Kavrayış Teorisi’nin çalışmada kullanılmasında yönlendirici olmuştur.

2.1.1.1 Şekilsel kavrayış teorisi

Şekilsel Kavrayış Teorisi geometrik muhakemeye şekil algısını da içeren geniş bir perspektif sunmaktadır. Alanyazında teorinin “geometrik figürsel kavrayış” olarak isimlendirildiği çalışmalar da bu durumu desteklemektedir (Gagatsis ve Geitona, 2021; Yaftian ve Pazoki, 2022). Geometrik muhakeme bilişsel ve algısal süreçler ile bu süreçlerin şekil bağlamında birlikteliği ile ifade edilmektedir. Çünkü geometrik yetkinlik bu süreçlerin ayrı ayrı işe koşulması ile değil her iki sürecin birlikteliği ile sağlanmaktadır (Güven ve Karpuz, 2016). Teorinin kavramsal yapısının ortaya konulması amacıyla literatürden destek alınarak Şekil 2.1 oluşturulmuştur. İlgili şekil kavramlar arası ilişkiyi yüzeysel olarak temsil etmektedir. Matematiksel nesnelerin paradoksal yapılarına (Duval, 2000) benzer şekilde oluşturulan diyagram; teorinin bütüncül yapısını ifade etmekte yetersizdir.

Şekil 2.1

Şekilsel Kavrayış Teorisi



Duval geometrik bir akıl yürütmenin temel kavramlarını Şekil 2.1’deki gibi ifade etmiştir. Teori her bir kavramın muhakeme sürecinin işleyişindeki epistemolojik işlevini ifade etmekle birlikte geometrik muhakemeyi gerçekleştirme karakteristiğine göre

sınıflamaktadır. Şekil algısının yanı sıra semiyotik, enstrümantal ve söylemsel oluşumun geometrik akıl yürütme içindeki işlevine yönelik anlamalar teorisinin kavramsal açıklamalarından elde edilmektedir.

2.1.1.1.1 Bilişsel süreçler

Duval (1998) geometrik aktivitelerin altında yatan bilişsel karışıklığın açıklanmasında belirli epistemolojik işlevleri yerine getiren üç süreç tanımlamıştır. Görselleştirme, oluşturma ve muhakeme olarak tanımlanan süreçlerin geometrideki yetkinliğin sağlanmasında bilişsel bir belirleyici olduğunu belirtmiştir.

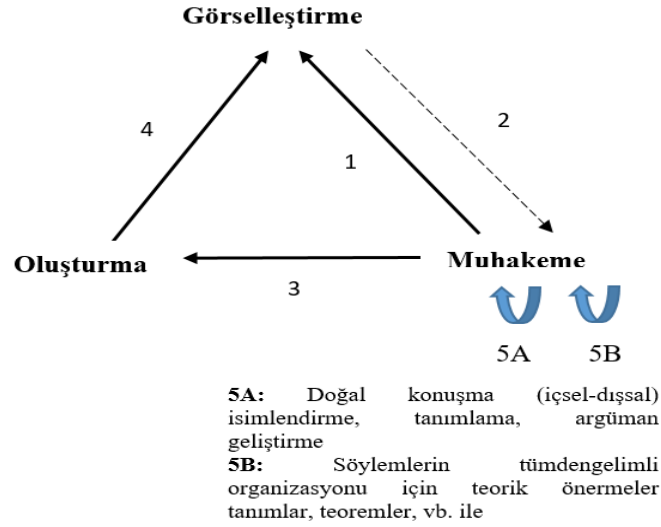
Görselleştirme geometrik bir nesnenin görsel temsilinin oluşturulmasıdır (Jones, 1998). Geometrik nesnelerin zihindeki imajlarından birinin uzamsal özellikler ile ifade edildiği süreçtir. Duval (2000) görselleştirme ile görsel algı arasındaki ayrımın önemli olduğunu ifade etmektedir. Görsel algı fiziksel eylemlere ihtiyaç duymakta ve bir nesnenin hiçbir zaman tam olarak anlaşılmasına olanak sağlamamaktadır. Buna karşılık görselleştirme herhangi bir temsil sisteminin ifade ettiği anlamın bir kerede elde edilmesini sağlama potansiyeline sahiptir. Görselleştirmenin görme eylemine indirilmesinin hata olduğunu ve görme ile erişilemeyen ilişkilerin ve yapıların anlaşılmasına olanak sağladığını ifade etmektedir. Görselleştirme temsil birimlerinin arasındaki ilişkileri ve bu ilişkilerin organizasyonuna dayalı semiyotik bir oluşumu desteklemektedir (Duval, 1999).

Oluşturma sürecinde geometrik yapı araç kullanılarak ortaya konulmaktadır. Burada kullanılan araç; somut (pergel, cetvel), teknolojik (DGY) veya soyut (logaritmik cetvel vb.) olabilir. Geometrik çalışmada geometrik yapıların inşası, temsilci üzerindeki eylemlerin ve elde edilen sonuçların ilişkili olduğu matematiksel bir model olarak işlev görür (Duval, 1998). Bu sürecin bir araç kullanımına ve matematiksel kıstaslara bağlı olması enstrümantal oluşumla ilişkilidir. Bununla birlikte oluşturma süreci ve gelişimi, teorik söylemsel muhakemede üretebilen fikirlerin özümsemesi noktasında önemlidir (Torregrosa ve Quesada, 2008).

Muhakeme bilgide genişleme, ispat ve gerekçelendirme ile ilgili olan söylemsel süreçtir (Ramatlapan ve Berger, 2018). Duval (1998) verilen bilgilerden yeni bilgiler çıkarmak olarak tanımladığı akıl yürütmenin matematiğin tümdengelimsel bir yaklaşımla aksiyom, teorem gibi matematiğin külliyatından kaynak alması gerektiğini ifade etmektedir. Bu şekilde muhakeme süreci söylemsel oluşumla ilişkilidir. Şekil 2.2’de bilişsel üçgen ve bileşenleri yer almaktadır.

Şekil 2.2

Geometrik Aktivitedeki Bilişsel Etkileşimler



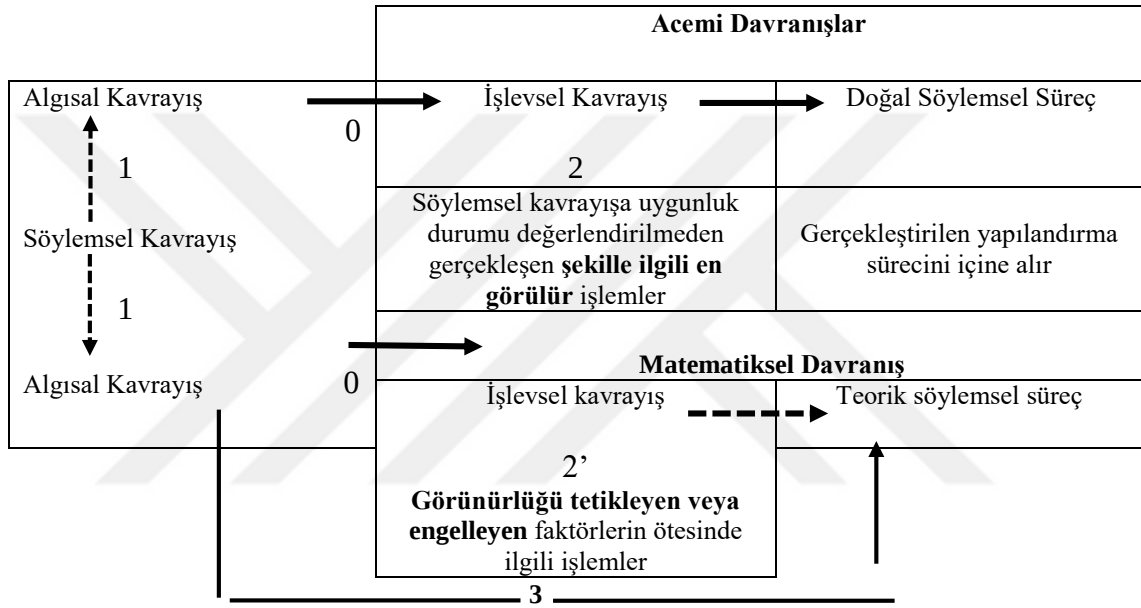
Kaynak: Duval, 1998, s. 38.

Şekil 2.2 incelendiğinde görselleştirme, oluşturma ve muhakeme arasında oluşabilecek geometrik muhakeme zincirleri olduğu görülmektedir. 5A ve 5B ise bir zincire bağlı gerçekleşmeden doğal söylemsel veya teorik söylemsel muhakemeye işaret etmektedir. Buradan geometrik muhakemenin bu üç süreci içermesinin zorunluğu olmadığı ve geometrik muhakemede başlangıç için üç bileşenden birinin kullanılabileceği sonucuna ulaşılmaktadır. Oluşturma süreci ile başlayan bir muhakemenin doğal olarak görselleştirme ile sonuçlandığı görülmektedir. Görselleştirmenin rolü ise muhakeme sürecinde değişkenlik göstermektedir. Görsel, bazı durumlarda sezgisel destek sağlayarak muhakemeye yardımcı olabilirken bazı durumlarda da zorluk yaratabilmektedir. Sonuç olarak görselleştirmenin her zaman muhakeme ile sonuçlanmadığı (bkz. kesikli 2 numaralı ok) görülmektedir. Duval (1998) görselleştirmenin kanıt elde etmek için sezgisel bir destek olması dışında muhakemede tek başına yeterli olmadığını ifade etmektedir. Bir geometri probleminin çözümü ve ispatı tamamen konfigüratif (şekil üzerinde işlevsel değişiklikler), doğal dil ve teorik dilin kullanımına bağlı üç farklı yolla gerçekleştirilmektedir (Duval, 1998). Ancak Duval muhakeme için doğal dil ve teorik dilin kullanıldığı iki muhakeme tanımlamıştır. Geometrik yapıların düzenlenmesi ile gerçekleştirilen şekil odaklı ispatı doğal dil ile gerçekleştirilen muhakemeye dahil etmiştir. Doğal dil ile gerçekleştirilen muhakeme günlük bir konuşma diliyle gerçekleştirilen betimleme, açıklama, argümantasyonu içermektedir. Teorik muhakeme ise tümdengelimli bir yapıya sahiptir ve mantık kuralları işler durumdadır. Matematiğin

sembolik dili ile gerçekleştirebileceği gibi doğal dil ile de gerçekleştirebilir. Geometride şekil ve doğal dilin kullanımına bağlı ispat gerçekleştirilmesi geometriyi matematiğin diğer alanlarından ayırmaktadır (Duval, 2007). Geometrinin temel nesneleri fiziksel nesneler gibi ulaşılamaz olsa bile cebir, aritmetikle karşılaştırıldığında daha somut bir ispata olanak sağlamaktadır. Duval (1998) tarafından matematiksel çalışmanın niteliğini yansıtan çalışma yolları Şekil 2.3'te sunulmuştur.

Şekil 2.3

Geometrik Muhakemede İki Tip Davranış



Kaynak: Duval, 1998, s,48.

Aynı geometrik durumun farklı şekilde muhakeme ile sonuçlanma olasılığı bulunmaktadır. 0 ile temsil edilen süreç görsel üzerinden elde edilen kavrayışa bağlı gerçekleşmektedir. Söylemsel kavrayışın görsel kavrayış üzerinden kesin bir yönlendirmesinden bahsedilemediği için 1 numaralı ok kesikli çizgilerle temsil edilmiştir. İşlevsel kavrayışın karakteri her iki muhakeme süreci için farklılaşmaktadır. Akıl yürütme şekil üzerinde gerçekleştirilen eylemlere odaklı gerçekleşiyorsa (2) doğal söylemsel muhakeme ile sonuçlanmaktadır. Matematiksel davranış kapsamında gerçekleştirilen işlevsel kavrayış şeklin etkisinden bağımsız işlemleri içermektedir. Bununla birlikte işlevsel kavrayışın teorik muhakeme üzerinde doğrudan etkisi olmaması nedeniyle 2 ile temsil edilmektedir. 3 numaralı ok geometrik şeklin algılanmasında söylemsel kavrayışın etkin olduğu ve işlevsel kavrayışı kullanmadan doğrudan teorik söylemsel muhakeme ile ilişkilidir (Duval, 1998). Torregrosa ve Quesada (2008)

geometrik bir çalışmada görselleştirme ve muhakeme arasındaki ilişkiye yönelik sonucu kesme “*truncation*” ve kanıtlanmamış varsayım “*unproved conjecture*” olmak üzere iki türlü ifade etmiştir. Kesme olarak tanımlanan süreçte konfigüratif süreç tündengelimli sürece götürecek fikir ortaya çıktığında sonlandırılır. Tanımlanmamış varsayım sürecinde ise öğrenciler basit algı ile elde ettikleri kendi varsayımlarını doğal yollarla ifade etmektedir.

2.1.1.1.2 Algısal süreçler

Duval (1995) bir görsel uyaran setine ve çizime bakarken figürün kavrayıştaki sezgisel rolünü algısal süreçler ile ifade etmektedir. Temsil edilen geometrik nesne ile o nesneyi temsil eden çizim arasındaki ilişkiyi semiyotik kapsamında inceleyen Duval (1995)’e göre geometrik figürün algılanması dört farklı şekilde gerçekleşmekte ve kavrayış sürecini başlatmaktadır. Bu süreçler şekle bakmayı ifade etmektedir (Duval, 1995; Güven ve Karpuz, 2016; Kızıltoprak, 2020). Geometrinin “görme işi” olmasıyla ilgili metafora bağlı olarak tanımlanan algısal süreçler bir çizimi matematiksel bir nesne haline getirmektedir. Daha açık bir ifadeyle bir çizim belirli parçalardan oluşan bir yapı ve bu yapıya atanan belirli özelliklerin bütüncül olarak görülmesi sonucunda bir geometrik şekil olma özelliği kazanmaktadır. Duval (1998) algının belirli noktalara odaklanmasını demir atmak olarak ifade etmekle birlikte bir geometrik çalışmada bu demirleme noktalarının değişiminin kolayca fark edilemediğini ifade etmiştir. Ancak görsel algıda şekillerin gestalt yapılarının görsel algıyı etkilemesine karşın söylemsel destek (ABCD bir paralelkenar gibi) ile algıyı doğru yere demirleyebiliriz.

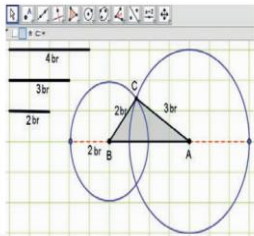
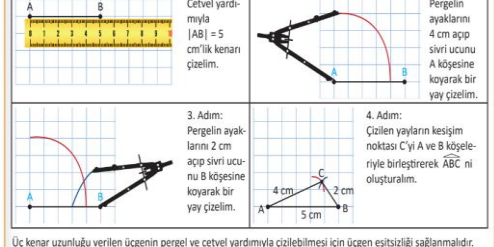
Bir şekle ilk bakışta algılanan özellikleri algısal kavrayış ile ilişkilidir. Geometri görevi üzerinde gerçekleştirilen ilk bilişsel faaliyettir. Geometrik nesnelerin görsel olarak işlenmesini gerektirdiği için bilişsel süreçlerden görselleştirme ile ilişkilidir (Rapatlamana ve Berger, 2018). Algısal kavrayış muhakeme için tek başına yeterli olmayabilir. Bir çizimin geometrik şekil olarak işlevsel hale gelmesi algısal kavrayışla birlikte diğer kavrayış türlerinden en az birinin daha işe koşulmasını gerektirmektedir (Duval, 1995). Bir dikdörtgen çizimi sadece algısal kavrayışla bir masa, televizyon ekranı vb. şeklinde yorumlanabilir. Epistemolojik görevi belirleme olan algısal kavrayış (Duval, 1994) üzerinde çalışılan şeklin ne olduğu ve şekilde ne görüldüğü sorusuna verilen cevapları karşılayabilir. Geometrik bir şekil birkaç gestaltın birleşimini içerdiğinde daha güçlü bir ikonik temsil haline gelmektedir (Duval, 2000). Bununla birlikte şekillerin

gestalt yapılarına bağlı kalma muhakeme sürecini olumsuz etkileyebilmektedir (Duval,1998; Fischbein ve Nachlieli,1998). Duval (2017) geometrik akıl yürütme sürecinde şekil konfigürasyonları içerisinde daha güncel bir uygulama olan boyutsal yapı söküm (dimension deconstruction) ile geometrik şekilleri oluşturan alt boyuttaki parçalarının belirlenmesi gerektiğini vurgulamıştır. Boyutsal yapı sökümde geometrik şeklin kendisini oluşturan bir alt boyut bileşenlerinin belirlenmesi gerekmektedir. Örneğin 3B uzay için düzlemlerin (2B), düzlem için doğru parçalarının (1B) belirlenmesi geometrik muhakemede geometrik figürün altında yatan parçalı yapısının ortaya çıkmasını sağlayacaktır.

Sıralı kavrayış bilişsel süreçlerden oluşturma ile ilişkilidir. Burada oluşturma geometrik şeklin kalem ile kağıt üzerine gelişigüzel çizilmesi gibi bir süreci içermemektedir. Bir enstrümana ve matematiksel özelliklere bağlı şeklin görselleştirilmesidir. Sıralı kavrayış epistemolojik olarak modelleme ile ilişkilidir (Duval, 1994). Bunun yanı sıra sıralı kavrayış algoritmik bir yol izlemekle birlikte bu kullanılan aracın özelliklerine bağlı gerçekleşmektedir. Örneğin belirlenen yarıçapa sahip çember çizimi pergel ve cetvel ile farklı, Geogebra ile farklı prosedürlere bağlı gerçekleşmektedir. Ders kitaplarımız incelendiğinde çeşitli enstrümanlara bağlı sıralı kavrayışın daha fazla vurgulandığını söyleyebiliriz. Şekil 2.4'te üç kenar uzunluğu verilen üçgenin iki farklı araç ile oluşturulmasına örnek durumlar verilmiştir.

Şekil 2.4

Aynı Oluşturma Sürecinde İki Farklı Araç Kullanımı

Geogebra ile oluşturma	Cetvel ve pergel aracılığıyla oluşturma
Birlikte Yapalım 1 Kenar uzunlukları 2 br, 3 br ve 4 br olan bir üçgeni bilgisayar programı yardımıyla çizelim. 1. Adım: Üstten 3. menüden 4 birimlik [AB] oluşturalım. 2. Adım: Üstten 6. menüden 2. satırdan A noktasını merkez kabul eden 3 birimlik çember çizelim. 3. Adım: B noktasını merkez kabul eden 2 birimlik başka bir çember çizelim. 4. Adım: Üstten 2. menüden "Kesim" aracı ile çemberlerin kesişim noktası C köşesini bulalım. 5. Adım: "Çokgen çizim" aracı ile $\triangle ABC$ ni çizelim. 	Birlikte Yapalım 2 Kenar uzunlukları $AB = 5$ cm, $BC = 2$ cm ve $AC = 4$ cm olan bir üçgeni pergel ve cetvel kullanarak çizelim. 1. Adım: Cetvel yardımıyla $AB = 5$ cm'lik kenarı çizelim. 2. Adım: Pergelin ayaklarını 4 cm açıp A köşesine koyarak bir yay çizelim. 3. Adım: Pergelin ayaklarını 2 cm açıp B köşesini koyarak bir yay çizelim. 4. Adım: Çizilen yayların kesişim noktası C'yi A ve B köşeleriyle birleştirilerek $\triangle ABC$ ni oluşturalım.  Üç kenar uzunluğu verilen üçgenin pergel ve cetvel yardımıyla çizilebilmesi için üçgen eşitsizliği sağlanmalıdır.

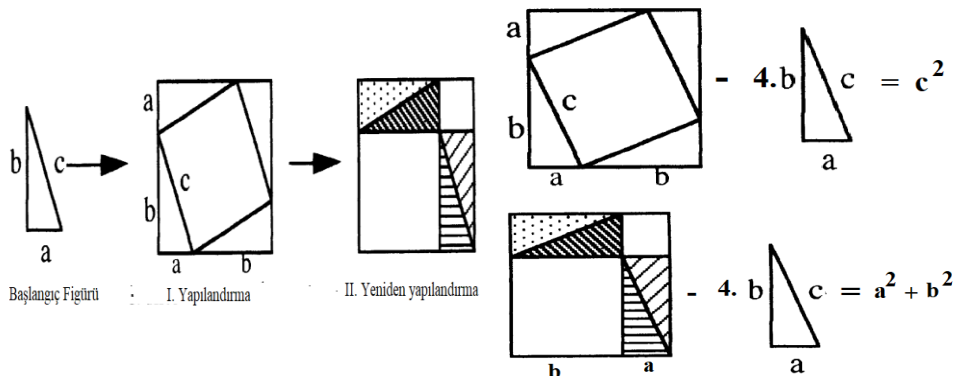
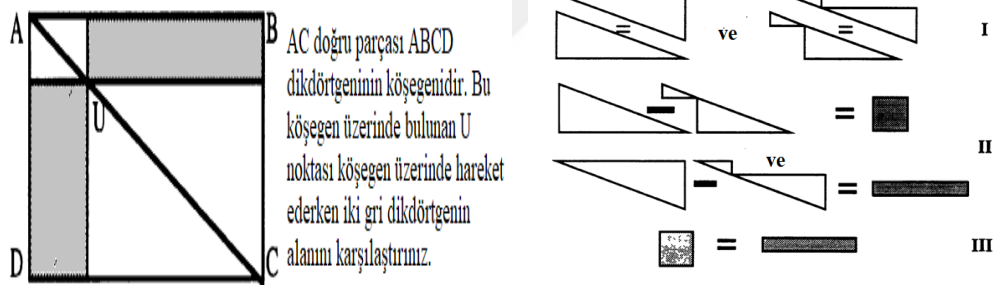
Kaynak: MEB, 8. Sınıf Ders Kitabı, s.158.

İşlevsel kavrayışın öğrencilerin bir geometri problemini çözerken en çok kullandıkları bilişsel süreçlerden biri olduğunu söyleyebiliriz. Bir problemin çözümü için yardımcı çizimler çekmek, şeklin simetrisini almak, şekli parçalara ayırmak, şeklin boyunu

küçültmek veya büyötmek gibi konfigüratif eylemler işlevsel kavrama ile ilişkilidir. Geometrik şeklin operasyonel olarak kavranmasıdır (Duval, 1995). Duval (1994) şekil üzerinde gerçekleştirilecek değışikliklerin konumsal, optik ve şekli parçalamaya yönelik (mereolojik ve boyutsal yapışöküm) üç türlü olabileceğini bildirmiştir. Bu eylemler fiziksel veya zihinsel olarak gerçekleştirilebilir (Jones, 1998). İşlevsel kavrayışla başlangıçtaki şekil üzerinde gerçekleştirilen eylemler çözüm için ilgili ve ilgisiz parçaların ayırt edilmesini içermektedir. Duval (1998) işlevsel kavrayış ile tündengelimsel bir akıl yürütme sürecinden bağımsız, tamamen konfigüratif bir muhakeme süreci tanımlamıştır. Epistemolojik rolü keşfetmek olan işlevsel kavrayış bazı durumlarda söylemsel kavrayışa bağılı şekil üzerinde eylemler gerçekleşmesini sağlamaktadır. Her iki durumda da söylemsel ve işlevsel kavrayışın koordineli olarak kullanılması tündengelimli muhakeme için gereklidir (Torregrosa ve Quesada, 2008). Şekil 2.5'te işlevsel kavrayışa bağılı çeşitlenen muhakeme örneklendirilmiştir.

Şekil 2.5

Farklı Konfigürasyon Uygulamaları ile Muhakeme



Kaynak: Duval, 1998, s.46 ve s.43.

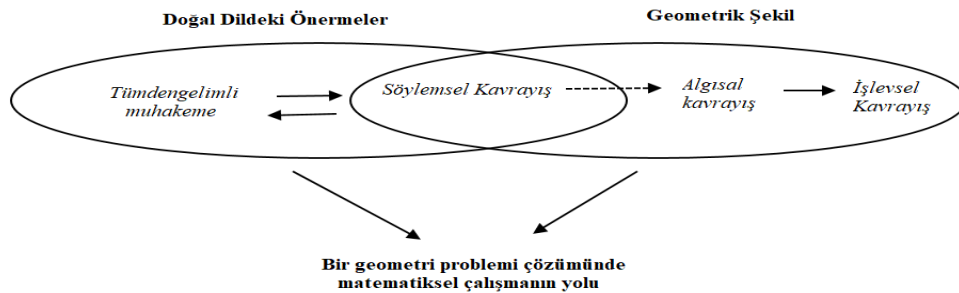
Şekil 2.5 incelendiğinde işlevsel kavrayışın şeklin farklı konfigürasyonlarını oluşturmak için kullanıldığı iki muhakeme örneği görölmektedir. İlk çözüm incelendiğinde şekli

oluşturan alt figürlere ayrıldığı ve bu basit parçalamanın muhakeme için yeterli olduğu görülmektedir. İkinci çözüm incelendiğinde şeklin alt parçalara ayrıldığı, bu alt parçaların yeniden yapılandırılmasının yanında karenin alanının (referans bileşeni) kullanıldığı görülmektedir. İkinci durumda gerçekleştirilen işlemlerin birinci duruma göre daha karmaşık bir işlevsel kavrayışı içerdiğini söyleyebiliriz. Genel olarak işlevsel kavrayış sezgisel işlemlerden biridir, çözüm geliştirmek veya bir gösterim biçimini ortaya koyan şekil değişikliğini içermektedir (Duval, 1994).

Söylemsel kavrayış, geometrik olarak yapılandırılan bir durumla teorem, tanım, aksiyom gibi matematiksel yapıları ilişkilendiren bilişsel süreçtir (Torregrosa ve Quesada, 2008). Geometrik şekillerin uzamsal çizimleri şeklin matematiksel arka planını yansıtmakta yetersiz kalabilir. Bu kavrayış bir çizimde temsil edilen matematiksel özelliklerin algısal kavrayış yoluyla belirlenemeyeceği gerçeğiyle ilgilidir (Gridos vd., 2021). Bu durumda şekil üzerinde ifade edilemeyen özellikler şekil odaklı hataların kaynağını oluşturabilir (Llinares ve Clemente, 2014). Örneğin kenar uzunlukları birbirine yakın olan bir dikdörtgeni kare olarak algılama buna örnek gösterilebilir. Bu durumun önüne geçmek için geometrik çizimlerin sözel açıklamalar ile desteklenmesi gerekmektedir. Söylemsel kavrayış, matematiksel dilde iyi betimlemeler içinde ve geometrik sembollerin doğru kullanımına bağlı gerçekleştiğinde belirgin hale gelmektedir (Ramatlapan ve Berger, 2018). Şeklin algılanmasında görselin kendisinin değil özellikleri tanımlayan ifadelerin kullanılması gerekmektedir. Epistemolojik işlevi kanıt olan söylemsel kavrayış, algıyı şekilde fark edilmeyen noktalara çekebilir. Söylemsel kavrayış ile görsel kavrayışın birbirine ters iki kavrayış türü olduğunu söyleyebiliriz. Duval (1999) kavrayış süreçlerinin muhakemedeki rolünü Şekil 2.6'daki gibi ilişkilendirmiştir.

Şekil 2.6

Geometri Görevinde Matematiksel Çalışma



Kaynak: Duval, 1999, s. 23.

Okul geometrisinde geometrik düşünmeyi şekil algısından uzak olarak yorumlamak mümkün gözükmemektedir. Öğrencilerin geometriyle ilişkisi erken çocuklukta ahşap puzzle, bul tak oyuncaklar ve çevrelerindeki somut nesneler ile başlamakta, ilkokulda somut temsiller üzerinden devam ettirilmekte, her ne kadar 5. sınıfta nokta, doğru, düzlem gibi geometrinin tanımsız soyut yapıları verilse de çizimler üzerinden sürdürülmektedir. Şekil 2.6 incelendiğinde de bir geometri probleminin çözümünün tündengelimli olarak gerçekleşmesinde şeklin kendisinin değil söylemsel kavrayışın etkili olduğu görülmektedir. Bununla birlikte söylemsel kavrayış her zaman algısal kavrayış üzerinde yönlendirici olmamaktadır.

2.1.2 Matematik çalışma uzayı

Kuzniak (2014) geometri üzerinde çalışma sürecini Geometrik Çalışma Uzayı teorisi ile açıklamıştır. Matematiğin tarihsel gelişiminin geometriden köken almasına benzer şekilde matematik üzerinde çalışma sürecinin analizi için Geometrik Çalışma Uzayı geliştirilerek MWS Teorisi (Kuzniak vd., 2016a) ortaya konmuştur. MWS (Kuzniak ve Richard, 2014) bir matematikçi aktivitesi olarak matematiğin bir alanında problemlere dayalı çalışma sürecini tanımlamak için kullanılan matematiksel çalışmayı (Kuzniak vd., 2016) epistemolojik ve bilişsel yapılar ile açıklayan bir model sunmaktadır. Model çekirdek kavram olan matematiksel çalışmanın yapısını ortaya koymakla birlikte matematikçinin faaliyetini tanımlayan süreçleri içermektedir. Okul matematiğini temel alan teori bağlamında Kuzniak (2022) matematikçilerin ortaya koyduğu idealize edilmiş matematiksel çalışmanın eğitim için yeterli model olmadığını da ifade etmektedir. Öğrenciler matematikçi olmayı değil matematiğin bilgili kullanıcıları olmayı istemektedir. Teoride matematiksel çalışmaya yönelik epistemolojik farkındalık matematikçilerin çalışmaları ve çalışmaya yön veren paradigmlar ile sağlanmaktadır. Matematiksel çalışmanın öğretmen ve öğrenci tarafından gerçekleştirilen kısmı ise bilişsel boyutunu oluşturmaktadır. MWS için matematiksel çalışma dialektiği bu görüşlerden sağlanmıştır.

Başlangıçta matematik çalışma ortamında karşılaşılan öğrenme zorluklarının daha iyi anlaşılması için gerçekleştirilen araştırmalar (Houdement ve Kuzniak, 1999) ile modelin temeli oluşturulmuştur. Ortaya konulan öncül model geometrik paradigmlar, semiyotik ve bilişsel ergonomi bileşenlerine bağlı olarak geometri alanında tanımlanmış, geometri çalışma uzayı olarak adlandırılmıştır. Başta Fransızca ve İspanyolca konuşulan ülkeler

olmak üzere çeşitli ülkelerde on yılı aşkın süredir yapılan çalışmalar ile teorinin bugünkü çatısı oluşturulmuştur. Ancak teorinin oluşmasında Fransız didaktik geleneği teorilerinin kaynaklık ettiğini ifade edebiliriz. Bu teoriler Didaktik Durumlar Teorisi, Kavramsal Alanlar Teorisi (Vergnaud, 1991) ve Didaktik Antropolojik Teorisi (Chevallard, 1985) olarak ifade edilmektedir (Artigue, 2016). Bu teoriler Fransız geleneği içinde etkili olmakla birlikte teoriye katkının görece daha az bilinen semiyotik-semiyotik arabuluculuk ve Fransız Aktivite Teorisi tarafından sağlandığı ifade edilmektedir (Kuzniak ve Vivier, 2019). Didaktik Durumlar Teorisi öğrencilerin matematiksel referans bir bilgiyi uygun hale getirmeleri için öğretmen, kurum, bir topluluk (*noosfer*) vb. tarafından düzenlenmesini içermektedir (Brousseau ve Warfield, 2020). Kavramsal Alanlar Teorisi'nin çerçevesi geniş anlamda matematiksel olmasının yanı sıra öğrencilerin bilişsel seviyelerine göre matematiksel kavramları ve öğrenci işlemlerini temsil eden bir araçtır (Vergnaud, 1994). Teori bilginin yapılandırılmasındaki karmaşık süreci matematiksel zemin ve öğrencilerin bilişsel seviyeleri açısından ele almaktadır. MWS'ye kaynaklık eden bir diğer teori olan Didaktik Antropolojik Teorisi öğrenmenin tüm olası faktörleri ile ilişkisinin ortaya konması amacıyla bilginin kurumsal yapısı, bilginin sunulduğu ortam koşullarına özen göstererek antropolojik bir perspektif sunmaktadır (Chevallard ve Bosch, 2020). Öğrenme süreci bir bilgiyi, bu bilgiyi öğrenecek kişiyi ve bilginin öğretileceği kurumu içermektedir. Kuram öğrenmeyi açıkladığı her bir bileşeni ve aralarındaki ilişkiyi sembolik bir dil ile ifade etmektedir.

Radford (2016) bu noktada teorinin didaktik teorilerini psikolojik, semiyotik, ve enstrümantal alanların işlevsel olarak birbiri ile iç içe olduğu matematik öğretme ve öğrenme sorununa anlaşılır ve tutarlı bir bakış açısı getirmesi noktasında övgüye değer bir sentez olduğunu ifade etmiştir. Artigue (2016) ise yukarıda ifade edilen kuramlarla birlikte Fransız teorilerin sentezi olan teorinin, bu teorilerin hepsinden daha esnek şekilde alanda geliştirilecek yapıları bünyesine alabilecek bir doğaya sahip olduğunu belirtmiştir.

Fransız teorilerinden biri olan Didaktik Dönüşüm Teorisi (Chevallard, 1991) bilginin üretildiği andan itibaren uğradığı dönüşümü ifade ederken öğrenci bileşenini geri plana atmaktadır. Benzer şekilde Didaktik Sözleşme (Brousseau, 2002) öğretmen ve öğrenci arasında bilgi alışveriş sürecine dayalı karşılıklı beklenti ve sorumluluklara ilişkin yazılı olmayan kuralları içermekle birlikte (Erdoğan ve Özdemir-Erdoğan, 2013) teori didaktik ortama getirilen bilginin epistemolojik yapısına vurgu yapmamaktadır. MWS kaynak

aldığı teorilerin bir sentezi olarak eğitimde karşılaşılan sorunlara epistemolojik, psikolojik, enstrümantal ve matematiğin tümdengelimli yapısı ile açıklama getirmeye çalışmaktadır. Dolayısı ile teori öğrencinin kendisini, bilgiyi ve bilginin öğretimini değerli kılmaktadır. Ayrıca epistemolojik ve bilişsel temelleri teorinin farklı teoriler ile ilişki kurmasına aracılık etme potansiyeline sahiptir. Kuzniak vd. (2016a) teorinin bütüncül olarak çalışılması fikrinden ziyade diğer teorilerle güçlü ilişkileri olan bir araç olarak işe koşulmasını önermektedir. Fransız teorileriyle olan sıkı bağlarına karşılık epistemolojik ve bilişsel düzlemler, bu düzlem bileşenleri, oluşumlar farklı teoriler ile çalışılmasının da önünü açmaktadır. Teorinin epistemolojik duyarlılığı farklı yaklaşımlarla kurulması muhtemel ağları teşvik edecek bir yapı sunmaktadır (Kuzniak ve Vivier, 2019). Böylece teorinin merkeze aldığı kavramlara derinlemesine açıklamalar getirmenin önünü açtığını ifade edebiliriz.

Öğrencilerin artık sadece bilgiyi salt öğrenen konumunda olmadığı, yeni yetişen matematikçiler, alanı keşfeden araştırmacılar (Kuzniak vd., 2016a) oldukları göz önünde bulundurulursa matematiği bilmek ifadesi yerine matematik yapmak, yani matematiksel çalışma matematik eğitiminde önemli bir yere konumlandırılacaktır. Matematiksel çalışma sıradan bir aktiviteden bir amaç doğrultusunda gerçekleşme, süreç olma ve sonuçlarının matematik içinde doğrulanması noktalarında ayrılmaktadır. Kuzniak ve Vivier (2019) teoride ele alınan haliyle matematiksel çalışmanın düşünülenin aksine matematiğin kendisini merkeze alan yapısı ile çalışma ifadesine bağlı algıladığımız teknik ve zahmetli kısmının ötesine geçtiğini ifade etmektedir. Matematiksel çalışma, işleyiş kuralları ve sınırları olan prosedürel yapıdadır. Bu durum gözlem yapma, değerlendirme için imkân tanımaktadır. Ancak matematiksel çalışmada ele alınan bu formal yapı bir matematik formülünün uygulanması gibi sıralı bir yapıya işaret etmemektedir. Matematiğin matematiksel işaretlerin işlendiği semiyotik, maddi ve dijital araçların kullanımını teşvik eden araçsal süreç ve rasyonel kanıtlamaya dayalı söylemsel süreci (Kuzniak ve Vivier, 2019) içeren doğasına vurgu yapmaktadır. Didaktik amaçla yürütülen sürecin çıktılarının matematiksel yapı içerisinde doğrulanması gerekmektedir. MWS söylem sürecindeki ispata, ispat biçimi ve matematiksel çalışmanın tutarlılığını ortaya koyması bakımından ayrı bir önem vermektedir.

Matematiksel çalışmanın taşınması gereken özellikler matematiksel görevin özelliklerini de açıklamaktadır. Düzlemler arasında beklenen dolaşımı sağlayacak şekilde inşa edilen

bir görev “tam matematiksel çalışma” olarak değerlendirilmektedir (Kuzniak ve Nechache, 2017). Matematiksel çalışma, epistemolojik ve bilişsel yönler arasında gerçek bir ilişki olduğunda (Kuzniak vd., 2016b) ve modelin üç oluşum boyutuna dayalı geometrik bir varlık inşa edildiğinde (Kuzniak ve Nechache, 2015) tamamlanmış olarak kabul edilir. Burada ifade edilen tamlık görevin içerisinde tasarlandığı öğretimin genel ilerleyişini ifade etmektedir. Hiçbir görev içinde düşünüldüğü bütünden soyutlanarak değerlendirilmemektedir. Bir matematik formülünün uygulanması gibi durumlar istisnai olarak bir düzlem veya bir boyutla ilişkili olabilse de matematiksel çalışmanın gelişimini desteklemektedir (Kuzniak, 2022). Sierpinski (2004) teoriden bağımsız olarak matematiksel çalışmayı öğrencilerin önceden tahmin edilebilecek sürede çözülen, açıkça formüle edilmiş varsayımlara ve sorulara sahip problemler olarak tanımlamıştır. Eğitim bağlamında değerlendirilebilecek bu tanım ve önceki tanımları bir arada düşünerek matematiksel çalışmanın ilerlemeyi sağlayan ancak matematik içinde yineleme gerektiren, önceki yaşantılara bağlı uzun bir süreç olduğunu söyleyebiliriz. Kuzniak (2022) tam bu noktada öğrencilerin geçmesi gereken bu belirsiz yolun matematikçilerin uygulanabilir ve anlaşılabilir hale getirme çalışmaları, öğretmenlerin öğrenciler için süreci düzenleme gayretleri ile iki kere tanımladığını ifade etmektedir.

Matematiksel çalışma kavramı odağında matematiksel çalışma uzayı epistemolojik ve bilişsel olmak üzere iki düzlem tanımlamaktadır. Epistemolojik düzlem matematiksel çalışma göreviyle ilgili bileşenleri içerirken, bilişsel düzlem görevle ilgilenen bireyin düşünce ve eylemleriyle ilişkilidir. Epistemolojik düzlem temsil (*representamen*), artefekt (*artifact*) ve referans olmak üzere üç bileşeni içermekte, bilişsel düzlemde bu bileşenler sırasıyla görselleştirme, oluşturma ve ispatlama ile ilişkilendirilmektedir.

Epistemolojik düzlem somut, elle tutulur çizim araçları, yazılım, tanım, teorem, özellik ve teoremlere dayalı teorik bir referans sistemi içermekle birlikte bir matematikçinin faaliyeti olmadan işlevini yerine getiremez (Radford, 2016). Bu ifade matematiğin uygulamada kullanılır olmasını değil, bir bilişsel düzlem içerisinde bu bileşenlerin karşılık bulmasını ifade etmektedir. Matematiksel bir göreve yönelik apriori beklentiler epistemolojik düzlemle ilgili (Kuzniak ve Nechache, 2015) görevin uygulaması sonucu gözlemlenen öğrenci performansları, posteriori yorumlamalar (Lagrange vd., 2022) bilişsel düzlemle ilgilidir. Artigue (2016) MWS teorisinin prakseyolojisini incelediği çalışmada pratik ve teorik blokların matematik eğitime sundukları ve sunabilecekleri

potansiyelin incelenmesi gerektiğini ifade etmektedir. Burada MWS'nin kendisine kaynaklık eden teorilerden aldığı potansiyel ile matematik eğitime sağladıkları (apriori) ve uygulamalar aracılığı ile elde edilen sonuçlara göre getirilerinin (posteriori) incelenmesi gerekliliği ifade edilmektedir.

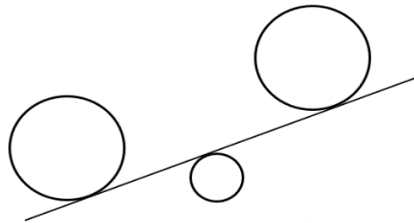
Matematiğin içerdiği kavramlar, yapılar ve matematiksel fikirler soyuttur. Soyut yapıdaki matematiksel kavramların üzerinde işlem yapabilecek, konuşabilecek hale gelmemiz için temsil araçlarına ihtiyaç duymaktayız. Bugün matematikte kullandığımız çizimler, semboller, kelimeler, modeller, grafikler semiyotik temsil araçlarının bir kısmını oluşturmaktadır. Matematiksel düşünmenin gelişiminin somut temsillerin gelişimine bağlı (Duval, 2006) olmasının yanı sıra matematiksel kavramların öğretimi de bu temsiller aracılığı ile sağlanmaktadır. Artefekt kavramı Rabardel (1995)'den uyarlanmıştır. Bu kavram somut ve soyut araçları içermekle birlikte modelin diğer bileşenleri ile karışmasını önlemek amacıyla somut araçlar; pergel, cetvel, DGY, vb. ve soyut araçlar ise logaritma cetveli, trigonometrik tablo, vb. ile çerçevelendirilmiştir. Epistemolojik düzlemin diğer bir bileşeni olan referans, matematiğin yığılmalı yapısına dayanmaktadır. Görevin ilişkili olduğu teorem, özellik, tanım, aksiyomatik yapı referans sistemi olarak tanımlanmaktadır (Kuzniak vd., 2016a). Süreç sonunda elde edilen bilginin tütümlü ve ispatı uygun olarak yapılandırılması, teorik söylemsel muhakeme ile sonuçlanması (Duval, 1998) görevin tasarımında epistemolojik bileşenlerden referans ile ilişkilidir. Teoride kabul edilen referanslar matematiksel geçerliliği ve teorik durumu sorgulanmayan algoritmalar, formüller gibi yapılardan oluşmaktadır (Kuzniak, 2022).

Matematiksel Çalışma Uzayı bir birey ve matematiksel bir problem arasındaki etkileşiminden kaynaklanan soyut bir ortam oluşturmaktadır (Delgadillo vd., 2017). Ancak ortam ile ifade edilen yapının statik belirli bir yeri işaret etmediğinin altının çizilmesi gerekmektedir. Öğretmen veya öğrencilerin matematik üzerinde çalışırken bu uzay içerisinde düzlemler arasında gerçekleştirdikleri salınım matematiksel çalışmaların karakteristiğini belirlemektedir. Teori kavramsal yapısı ile aynı göreve yönelik farklı çalışma uzayları oluşmasına açıklama getirmektedir. Epistemolojik düzlem görevin gerektirdiği matematiği, temsil sistemini, teorik yapıyı, araç desteğini içerirken bilişsel düzlem bu görevin uygulamada nasıl bir karşılık bulduğunu açıklayacak bileşenlerden oluşmaktadır. Görselleştirme; işaretlerin deşifre edilmesi, ilgili nesne ve ilişkilerin içsel temsillerinin de oluşturulmasını içermektedir. Oluşturma görev sırasında kullanılan araç

ettikleri nesneye fiziksel ve ikonik olarak atıfta bulunduğunda semiyotik ilişkiden bahsedilir. Bir temsil nesnesine göstergebilimsel kurallar aracılığıyla atıfta bulunduğunda bir semboldür. Bu kurallar a priori olarak gelenek tarafından oluşturulmuş ya da posteriori olarak alışkanlık ve kültürel alışkanlık tarafından oluşturulmuş olabilir (Kuzniak, 2011). Temsiller sadece temsil ettikleri nesneye değil onları üreten sistemin yapısına da bağlı olarak ele alınmalıdır (Duval, 2000). Matematiğin de soyut kavramsal yapısı sebebiyle temsiller oluşturduğunu hem de bu temsillere bağlı olduğunu ifade edebiliriz. Duval'e göre bu bağlılık matematik hakkında konuşmanın bir gerekliliğidir. Matematik ve öğretiminde temsil sistemlerinden yararlanıldığı düşünüldüğünde matematiksel nesneler ve temsilleri arasındaki ilişkiler, farklılıklar ve geçişler önemlidir (Tapan-Broutin, 2016). Tanguay ve Venant (2016) açının semiyotik oluşumunu görsel, sembolik ve sözel olmak üzere üç yönlü sınıflandırmışlardır. Açıya ait üç temsil yöneliminin birlikteliği kavramsal anlamının bir ölçütü olarak değerlendirilebilir. Geometri öğretiminde geometrik nesnelerin çizimlerinin kullanılması öğretim sürecine görsel destek sağlamaktadır. Geometrik çizimler üzerinden gerçekleştirilen muhakeme bilişsel kırılmalara sebep olsa da (Fiscbein, 1993) bu somut temsiller kavramları matematiksel olarak işler hale getirmektedir. Bir çizimin semiyotik anlamı kişinin matematikteki yetkinliğine veya çizimin içinde verildiği bağlama göre değişebilmektedir. Tek başına bir çizimin doğası gereği ilişkilendirildiği geometrik nesneyi temsil etmesi mümkün değildir. Çizimlerin bu yapısal eksikliklerinin giderilmesi amacıyla söylemsel kavrayıştan destek alınmaktadır. Şekil 2.8'de söylemsel olarak desteklenmeyen çizime bağlı farklı anlamalar örneklendirilmiştir.

Şekil 2.8

Çizim Üzerinden Elde Edilen Semiyotik Anlamalar



Yandaki çizimden farklı semiyotik anlamlar elde edilebilir.

İki büyük bir küçük çember ve bir doğru parçası

Aynı doğruya teğet üç çember

Yuvarlaklar ve düz çizgi

Bir kaldıraç...

Kaynak: Tapan-Broutin 2016,s.311.

Semiyotik oluşum esnasında her söylem doğrudan söylemsel oluşumla ilişkilendirilmemelidir. Bir söylem çizim üzerindeki bir nesnenin tanımlanması,

karakterize edilmesi, olağan dil içindeki kavramın temsilinin ifade edilmesi amacıyla kullanıldığında daha çok semiyotik oluşumla ilişkilendirilmelidir (Kuzniak, 2022). Çocuklarda semiyotik bir oluşumun bu tür bir örneğinde sözcükler (akustik temsil) bir dayanak ögesi olarak işlev görür. Sözcüğün taşıyıcısı olduğu anlam ile temsil ettiği kavram arasında gösterge olarak bağ kurar (Tanguay ve Venant, 2016). Örneğin yukarıdaki çizime bakarak doğru parçasını “burada bir teğet var” şeklinde ifade etmek söylemsel oluşumdan önce semiyotik oluşum ile ilişkilidir. Matematiksel Çalışma Uzayı içerisinde semiyotik oluşumun iki farklı yöneliminden söz edebiliriz. Epistemolojik düzlemde görselleştirmeye doğru gerçekleşen oluşum temsillerin kodunu çözme ve yorumlamayı gerektirirken tersi yönde gerçekleşen oluşum görselleştirme sonucunun bir temsil oluşturması olarak çift yönlü bir süreç barındırmaktadır (Kuzniak, 2022). Aşağıdan yukarı doğru gerçekleşen oluşum deşifre etme ve yorumlama, yukarıdan aşağıya gerçekleşen oluşum ise kodlama ve örnekleme olarak ifade edilmektedir (Duval, 2005). Kısacası aşağıdan yukarı gerçekleşen semiyotik oluşum sözdizimden anlambilime, tersi ise anlambilimden sözdizime bir dönüşümü ifade etmektedir (Gómez-Chacón ve Kuzniak, 2015).

Enstrümantal oluşum; Bir artefektin kullanımına yönelik bilişsel şemaların oluşumunu (Özdemir-Erdoğan, 2016) ifade etmekle birlikte bu bilişsel şemaların matematiksel çalışma sürecinde etkin rol alması beklenmektedir. Vygotsky’nin insanın yapay araçlar ile çevre üzerinde hareket kabiliyeti kazanacağı, bilişin dış dünyadan etkilendiği, bilişi etkileyen dünyanın öğrenmeyi sağlayacak şekilde dizayn edilmesinin öğrenmeye katkı sağlayacağı fikirlerine bağlı olarak ortaya atılmıştır. Bu dizayn sırasında artefekt kullanımının bilişsel gelişim, bilgiyi yapılandırma, kullanma ve elde edilen bilginin doğası üzerinde etkili olduğu düşünülmektedir (Verillon ve Rabardel, 1995, akt. Guin ve Trouche, 1999, s. 201). Artefekt insanın belirli bir amaçla dönüşüme uğrattığı herşeyi içermektedir (Kuzniak, 2022). Bu kavram sadece somut araçları içermemekle birlikte MWS’de epistemolojik düzlemin diğer bileşenleri ile karıştırılmaması için sadece somut araçlarla ilişkilendirilmiştir. Teorinin ele aldığı biçimiyle enstrümantal oluşum matematiksel çalışmanın başarıya ulaşması noktasında inşa için artefektlerin işe koşulmasıdır (Kuzniak ve Nechache, 2017).

Enstrümantal bir oluşum matematiksel çalışmanın ampirik kısmı ile ilişkili (Kuzniak ve Vivier, 2019) olduğu için ispatı gerçekleştirme, bir şeklin inşa edilmesi, farklı

konfigürasyon elde etme, kanıt için gerekli unsurları sağlamak gibi farklı bilişsel ihtiyaçlar için kullanılabilir (Barrera, 2013). Buna bağlı olarak oluşumun farklı yönelimleri olduğu görülmektedir. Enstrümantal oluşumda aşağıdan yukarıya gerçekleşen eylemler aracın birey tarafından içselleştirildiği (Kuzniak, 2022) aracın enstrümana dönüştüğü (Rabardel, 1995) şeklinde ifade edilmektedir. Yukarıdan aşağıya gerçekleşen oluşum ise görev için uygun aracın belirlenmesine yönelik gerçekleşmektedir (Kuzniak, 2022).

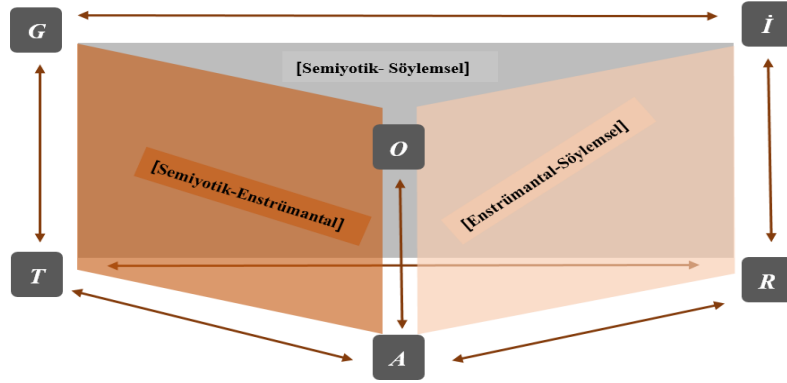
Söylemsel oluşum; Referans sistemi olarak adlandırılan tanımlar, teoremler, aksiyomatik yapıyı matematiksel çalışma sonuçları için hem teorik söylemsel hem de doğal söylemsel (Duval, 1998) doğrulamalar için aktif hale getirme sürecidir. Öğrencilerin görevle ilgili öngörülerini, sonuçları doğrulamaları, verilen durumda hatayı algılama, çelişkiler konusundaki duyarlılık, yansıttıkları bağlılık ve net bir strateji seçimi söylemsel oluşum içerisinde değerlendirilir (Hitt vd., 2016). Okul bağlamında söylemsel oluşum sınıfta ve ders kitaplarında verilen tanımlar ve sonuçlar ile ilgilidir (Tanguay ve Venant, 2016). Bir matematik görevi veya problem çözme içerisinde söylemsel oluşumu matematiksel öncüllere dayalı bulunan sonucun matematiksel yapılara bağlanması olarak özetleyebiliriz.

Bu oluşumda, aşağıdan yukarıya doğru gerçekleşen ispat referanssal özelliklerle desteklenmektedir ve tımdengelimli yapıdadır. Ters yönündeki söylemsel oluşum araçsal, hesaplamalı veya görsel uygulamalardan kaynaklanmakta olup referansa dahil edilecek uygun ilişki ve tanımların belirlenmesi olarak ifade edilmektedir (Kuzniak, 2022). Bu yönde gerçekleşen oluşum teorik referansın görsel veya deneysel olarak zenginleştirilmesini sağlamaktadır (Gómez-Chacón ve Kuzniak, 2015).

Düzlemler arasında matematiksel göreve özgü etkileşimler farklı oluşum süreçlerinin birlikte kullanılmasına olanak sağlamaktadır. Oluşumlar arası ilişki sonucunda ortaya çıkan üç dikey düzlem Şekil 2.9’da verilmiştir. Dikey düzlemler oluşumlar arası ilişkileri belirlemek, bir problemin çözümünde aşamaları belirlemek ve karakterize etmek, yine bir görev sırasında öne çıkan noktaları veya arka planda kalan, arka plana itilen yönleri tespit etmek, süreçteki değişiklikleri analiz etmek için değerli bir araçtır (Kuzniak ve Nechache, 2017).

Şekil 2.9

Matematiksel Çalışma Uzayı Modeli Dikey Düzlem



Kaynak: Kuzniak vd. 2016a, s.727.

Oluşumlar arasında ortaya çıkan bu düzlemler yukarıda sıralanan nedenlerden dolayı daha detaylı bir açıklama gerektirmektedir. Richard vd. (2016) yaptıkları çalışmada dikey düzlemleri matematiksel çalışmanın farklı aşamaları ile ilişkilendirmiştir. Semi-yotik-söylemsel düzlem, iletişim ve temsil; semi-yotik ve enstrümantal düzlem keşif ve araştırma, enstrümantal – söylemsel düzlem ise gerekçelendirme ve muhakeme aşamaları ile ilişkilendirilebilir. Görevin gerçekleşmesi sırasında oluşumlardan birinin rehberliğinde diğer oluşuma geçiş sağlanabilmektedir. Şekil 2.10’da iki farklı yönelim örneklendirilmiştir.

Şekil 2.10

Semi-yotik- Söylemsel Düzlem Farklı Oluşum Yönelimleri

Semi-yotik → Söylemsel	Söylemsel → Semi-yotik
Aşağıdaki şekilde AC, ABCD dikdörtgeninin köşegenidir. U noktası köşegen üzerinde hareket ederken iki gri dikdörtgenin alanlarını karşılaştırınız Subconfigurations A and A' Subconfigurations B and B'	ABCD bir paralelkenar olsun
Burada ispatın gerçekleştirilmesinde görselleştirmeden ve şeklin farklı konfigürasyonundan yararlanılmıştır.	Paralelkenar oluşumunda paralelkenarın farklı özelliklerine vurgu yapan olası konfigürasyonlarından bazıları yukarıdaki gibidir.

Kaynak: Duval, 1998, s.40, 42.

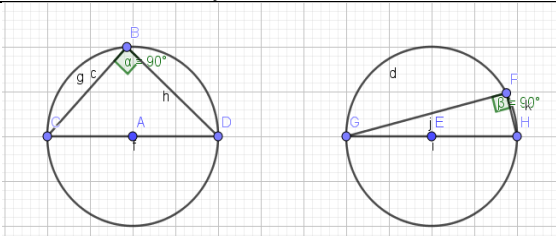
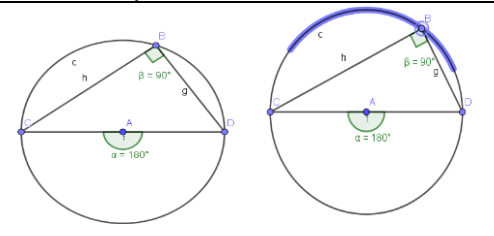
Semi-yotik-söylemsel oluşum düzlemi içinde ispat şekil üzerindeki manipölasyonlarla akıl yürütme gerçekleşiyorsa semi-yotik → söylemsel, açıkça tanımlanan özellikler ve teoremlere dayalı yazılı bir ispat bir şekil üzerine adım adım eklenen işaretlere dayalı

gerçekleştiriliyorsa söylemsel→semiyotik oluşum yöneliminden bahsedebiliriz (Kuzniak vd., 2016a). Ayrıca semiyotik→söylemsel oluşum için Pisagor teoreminin Bhaskara (M.S. 12 yy.) ve Amerika Birleşik Devletleri başkanı tarafından yapılan ispatlar örnek gösterilebilir. Tersî yönde oluşan düzlem ise Şekilsel Kavrayış Teorisi'nin algısal süreçlerinden biri olan söylemsel kavrayış süreci ile ilişkilendirilebilir.

Enstrümantal-söylemsel oluşum arasındaki bağlantı bir durumun ispatında araç kullanımına bağlı keşif veya teorik yapıya dayalı durumların deney sürecinde doğrulanması süreçlerini içermektedir. Araç kullanımına bağlı tümevarımsal akıl yürütme ile sonuçlara ulaşırsa, ampirik doğrulama içeriyorsa burada enstrümantal yönü baskın bir düzlemde bahsedebiliriz (Gómez-Chacón ve Kuzniak, 2015; Kuzniak vd., 2016a). Söylemsel oluşumun yönlendirdiği bir ispat süreci tündengelimli yapısı ile deneysel, enstrümantal doğrulamayı içermektedir. Bu oluşum yönü Enstrümantal Oluşum Teorisi içinde kullanılan aracın göreve ilişkin bilişsel şemaların yönetiminde enstrümana dönüştüğü şeklinde yorumlanabilir. Şekil 2.11'de enstrümantal- söylemsel oluşumun farklı yönelimleri örneklendirilmiştir.

Şekil 2.11

Enstrümantal-Söylemsel Düzlem Farklı Oluşum Yönleri

Enstrümantal → Söylemsel	Söylemsel → Enstrümantal
	
Burada farklı çemberler çizilerek çember üzerindeki noktanın farklı konumları için çevre açısı ölçülerek çapı gören çevre açısının ölçüsünün 90° olduğu sonucuna ulaşılmıştır.	Çapı gören çevre açısının ölçüsünün 90° olduğu ve bu durumun çember üzerindeki tüm noktalar için geçerli olduğunun gösterimi için sürüklemeye ve iz bırakma özelliği kullanılmıştır.

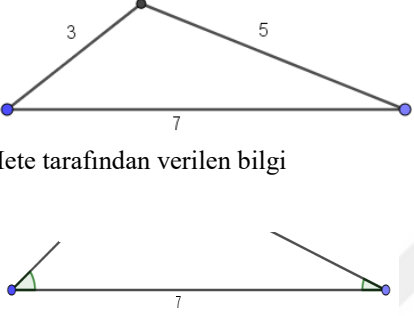
*Not**: Çizimler Geogebra ile oluşturulmuştur

Enstrümantal-söylemsel oluşum bu iki durum dışında herhangi bir yön içermeyen araç kullanımı ve teorik yapının iç içe olduğu temel oluşumları içerebilir (Kuzniak vd., 2016a). Pergel ve cetvel aracılığı ile üç kenar uzunluğu verilen bir üçgenin oluşturulma süreci bu duruma örnek olarak verilebilir.

Çözümünün enstrümantal-söylemsel düzlem içerisinde gerçekleşmesi beklenen bir durum Şekil 2.12’de verilmiştir.

Şekil 2.12

Enstrümantal – Söylemsel Düzlem Gerektiren Görev

İpek sadece Mete tarafından verilen bilgilere dayanarak aşağıdaki üçgeni tekrar oluşturmalıdır.	
 Mete tarafından verilen bilgi	a) Mete tarafından verilen bilgiler üçgenin çizimi için yeterli midir? Açıklayınız. b) Mete’nin İpek’e iletebileceği başka bir bilgi verin. c) Aşağıda verilen bilgilere göre üçgenleri oluşturun. A . B . C .

Kaynak: Tanguay ve Venant, 2016, s.882’den uyarlanmıştır.

Dikey düzlemlerden sonuncusu olan semiyotik-enstrümantal oluşum düzlemi dinamik geometrik yazılımların (DGY) ve dijital araçların matematik eğitiminde kullanılması ile önem kazanmıştır (Gómez-Chacón ve Kuzniak,2015; Kuzniak vd., 2016a). Sahip oldukları alt yapı ile hem kavramsal öğrenmeyi desteklemekte hem de bir kavramın farklı temsil biçimlerinde görev almaktadır. Araç kullanımını teşvik eden semiyotik bir görev enstrümantal oluşumu desteklemektedir. Örneğin cebirsel formda verilen birinci dereceden bir denklemin elektronik tablo ile sayısal temsili veya Geogebra ile grafik temsili oluşturulması bu bağlamda ele alınabilir. Aynı zamanda bu temsil biçimleri eğim, doğrunun eksenleri kestiği noktalar, sabit terim gibi kavramların matematiksel arka planını ortaya koyarak bu kavramlara yönelik semiyotik oluşumu da destekler. Burada enstrümantal oluşum için araç desteğinin teknoloji ile bağdaştırılmasının nedeni olarak içinde bulunduğumuz zamanın matematik eğitiminde yetkinliklerinden birinin teknolojik yetkinlik olması ve matematik eğitiminde çoklu temsil konusunda yürütülen çalışmaların eğiliminin teknoloji üzerine yoğunlaşması (Delice ve Sevimli, 2016) söylenebilir. Ancak enstrümantal oluşumda araç (artefekt) kavramı verilen bir görevi yerine getirmek için bireye destek sağlayan her türlü somut (cetvel, pergeli, vb.) ve soyut (trigonometrik, logaritmik cetvel, vb.) nesneleri ifade etmektedir (Özdemir-Erdoğan, 2016). Kuzniak vd. (2016b) semiyotik, teknolojik ve teorik üç araç formu tanımlamışlardır. Kullanılan araç

formu enstrümantal oluşumun diğer oluşumlar ile ilişkisinin karakteristiğini belirlemede temel teşkil etmektedir.

2.1.2.1 Matematik çalışma uzayları

MWS üç farklı çalışma uzayı tanımlamaktadır. Bunlar referans (*reference*) MWS, uygun (*idione-suitable*) MWS ve kişisel (*personal*) MWS olarak kurumsaldan özele doğru sıralanabilir.

Referans MWS: Bu çalışma uzayı çalışma alanının bağlantılı olduğu kurum ve kuruluş tarafından tanımlanır. Referans MWS’de teorik yapı temel kaynaktır. İdeal matematiksel kriterler esas alınarak tanımlanan bu MWS sosyal, ekonomik ve politik kriterlere de dayanmaktadır. Referans MWS’nin oluşturulması ders kitapları, epistemoloji ve didaktik alanındaki çalışmalar, tezler, makaleler, öğretim ve eğitim toplantıları gibi detaylı araştırmalar sonucunda gerçekleşmektedir (Kuzniak, 2022). Akademide kullanılan geometri ile okullarda öğretilen geometri arasında farklılık bulunmaktadır. Akademide üretilen bilginin okul müfredatına doğrudan yansıtılması mümkün olmamaktadır. Kuzniak (2022) epistemolojik uyanıklık ve paradigma kavramları ile bu birlikteliğin sağlanabileceğini ifade etmektedir. Örneğin silindirin ilköğretim müfredatında tanımlanmasında geometrik paradigmalardan (Houdement ve Kuzniak, 2000) doğal geometri ve doğal aksiyomatik geometrinin referans alındığını söyleyebiliriz.

Uygun MWS: Öğrencilerin kişisel çalışmalarının ilerleyebilmesi için öğretmenin referans MWS’yi de dikkate alarak öğretimsel beklentileri ve öğrencilerin yapısına, gerçekliğine en uygun dönüşümlerini içeren çalışma uzayıdır. Uygun MWS görev tasarımıyla ilgili değişim göstermekte ve gelişmektedir (Kuzniak, 2022). Öğretmenin görevle ilgili didaktik beklentilerinin uygun MWS’yi şekillendirdiğini söyleyebiliriz. Ancak burada çalışma uzayını referansal sistemi temel alarak kuramsal sistemin ışığında yapılandırmak gerekmektedir. Yine de bu yapılandırma öğretmenin referans MWS’yi yorumlama şekline ve kendi kişisel MWS’sine bağlı gerçekleşecektir (Kuzniak vd., 2016a). Uygun MWS farklı paradigmaları birbirine bağlayarak bir görevin MWS’ye uygun tasarımını da sağlamaktadır. Bu rolü ile görevin tutarlı şekilde tasarlanabilmesine olanak sağlamaktadır.

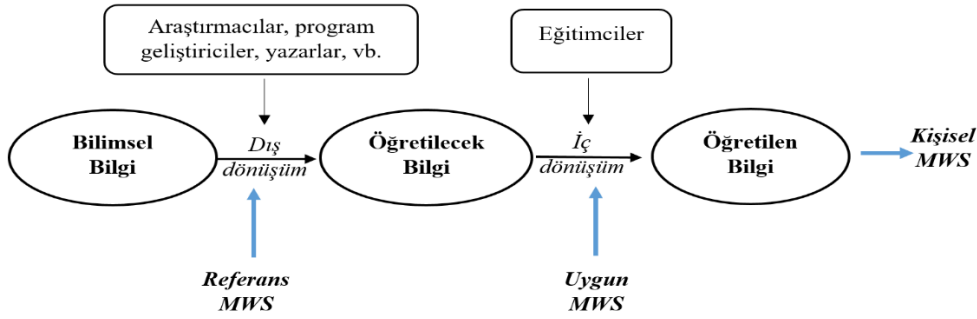
Kişisel MWS: Matematiksel işin öğrenci tarafından nasıl kabul edildiğine bağlıdır. Referans ve uygun MWS’de tanımlanan işin öğrenci uygulamaları ile yansıtıldığı gerçekliğini içermektedir. Uygun MWS’ye bağlı tasarlanan matematiksel görev

öğrencilerin kendi dönüşümlerini gerçekleştirmeleriyle tamamlanmaktadır (Kuzniak vd., 2016a). Bu aslında matematiksel görevden beklenenler ile gerçekte olanlar arasında farkı ortaya koymaktadır. MWS'nin bir göreve yönelik a priori ve posteriori analizler getirmesine de yine bu kavramlar üzerinden açıklama getirebiliriz.

MWS türlerine yönelik açıklamalar bu teorinin Didaktik Dönüşüm Teorisi ile olan ilişkisini daha da görünür kılmıştır. Şekil 2.13'te MWS türleri ile Didaktik Dönüşüm Teorisi'ne yönelik ilişki araştırmacı tarafından oluşturulan diyagram ile sunulmuştur.

Şekil 2.13

MWS Türleri ve Didaktik Dönüşüm Teorisi İlişkisi



Not: İtalik yazı ve mavi ok ilişkileri araştırmacı tarafından eklenmiştir.

Kaynak: Komis 2001'den uyarlayan Yavuzsoy-Köse, 2016, s.398.

Kuzniak (2022) teorinin eğitim uygulamaları ve sınıftaki öğrenme faaliyetleri açısından eğitim aktörlerinin gerçekliğine dayandığını ifade etmektedir. Ancak Şekil 2.13 incelendiğinde referans, uygun ve kişisel MWS ile matematiksel çalışmaya matematiğin kendisi, eğitimcilerin bakış açısı ve uygulayıcıların eylemleri gibi daha geniş bir perspektif sunduğu görülmektedir.

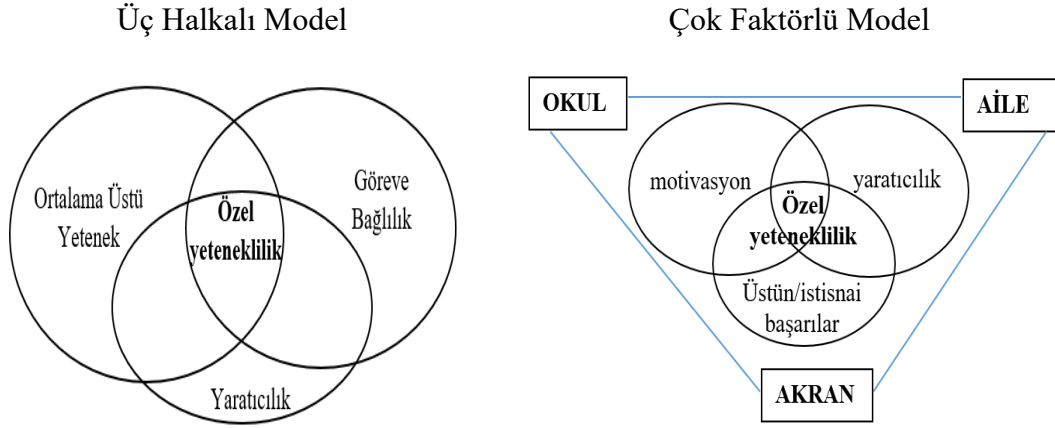
Richard vd. (2016) MWS kapsamında çalışma uzayı değişiklikleri için fibrasyon kavramını ortaya koymuşlardır. Matematiğin farklı alanları arasındaki geçişler dış fibrasyon olarak değerlendirilirken bir çalışma sırasında düzlemler arası geçişler iç fibrasyon olarak değerlendirilmektedir. Cebir, aritmetik ve geometri gibi matematik çalışma alanları arasında dışsal fibrasyon ile ilişki kurulmaktadır. Sadece cebir sadece aritmetik veya geometri içindeki etkileşimler iç fibrasyon olarak tanımlanmıştır. Dış fibrasyonlar matematiğin birbiri ile olan ilişkisini yansıtmaları bakımından önemlidir. İç fibrasyonlar ise epistemolojik düzlemin bileşenlerinin oluşumları üzerindeki etkisini ve yönünü analiz etmeyi sağlamaktadır.

2.1.3 Özel yetenekli bireyler

Milattan önce 2000’li yıllarda Çin İmparatorluğu devlet görevlilerini seçerken özel sınavlar uygulamış ve en yetenekli bireyleri bu görevlere getirmiştir (Renzulli, 1978). O günün şartları içerisinde yeteneğin ne olduğunu bilmesek bile toplumda belirli özellikleri ile öne çıkan bireylerin devletler için önemli olduğu (Sak vd., 2015) sonucunu çıkarabiliriz. Bununla birlikte bireyi bir yönüyle diğerlerinden farklı yapan özelliğin zamana ve topluma göre değişime uğradığını da rahatlıkla ifade edebiliriz. Üstün avlanma yeteneğinin bugünün şartları içerisinde veya kendi toplumumuz için düşünersek kabul edilen bir yetkinlik olduğunu söyleyebilir miyiz? Sadece bu açılardan değerlendirildiğinde bile bu bölümde açıklanmaya çalışılan özel yetenekliliğin, doğru şekilde kavramsallaştırılmasının ve sınırlarının belirlenmesinin zorluğunu görebiliriz. İlgili literatür incelendiğinde ve kavramın tarihsel gelişimi değerlendirildiğinde bile efradını cami ağıyarını mani bir tanımının yapılamadığını söyleyebiliriz. Mönks ve Mason (2000) kavramla ilgili tanım yapmanın özel yetenekliliğe ait hükümlere, eğitime ve sürece atıfta bulunması nedeniyle zor olduğunu ifade etmektedir. Araştırmacıların bu zorluğun üstesinden gelmek için kavramla ilgili tarihsel süreci ve kabul gören genel yaklaşımları bir arada sunduğu çalışmalar mevcuttur (Kaufman ve Sternberg, 2008; Mönks ve Mason, 2000; Robinson ve Clinkenbeard, 2008; Van Tassel-Baska, 1998). Kaufman ve Sternberg (2008) özel yeteneklilik çalışmalarını özel yetenekliliğin doğasının araştırıldığı (alan-genel modeller), zekâ türlerinin tanımlandığı (alana özgü modeller), özel yetenekliliğin bir sistem olarak kabul edildiği, farklı psikolojik süreçlerden oluştuğu (sistem modelleri) ve özel yetenekliliğin içsel-dışsal faktörlerle şekillendirilebileceği (gelişimler modeller) olmak üzere dört başlıkta ele almıştır. Özel yetenekliliğin doğasının araştırıldığı dönemde yeteneğin genetik geçişli olduğu ve doğuştan geldiği görüşü üzerinde durulmuştur. İkinci dalga olarak ele alınan alana özgü model yaklaşımı IQ olarak ifade edilen genel zekânın altında yatan entelektüel süreçleri ortaya çıkarmaya yöneliktir (Feldhusen ve Jarwan, 2000). Gardner, Gagne, Thurstone ve Carroll’ın çalışmalarını bu kapsama alabiliriz. Günümüzde IQ testlerinin sonuçları zekânın bir ölçütü olarak hala kabul görmektedir. Sistem modeli olarak da ifade edilen yaklaşım üstün zekâyı birlikte işleyen psikolojik süreçlerin bir araya geldiği mekanizma olarak görmektedir. Gelişimsel modeller ise sistem modellerinin ele aldığı içsel süreçlere ek olarak dışsal uyaranların yeteneklerin gelişimsel doğasına etkisini de içermektedir. Sistem modeli ve gelişimsel model yaklaşımları arasındaki farkı ortaya koyması amacıyla Şekil 2.14 verilmiştir.

Şekil 2.14

Özel Yeteneklilik İçin İki Model



Kaynak: Renzulli, 1986, s.40.

Kaynak: Van Baxtel ve Mönks, 1992, s.171.

Araştırmacıların ortaya koyduğu modeller incelendiğinde Van Baxtel ve Mönks'ün Renzullini'nin modelini çevresel bileşenleri dikkate alarak genişlettiğini ifade edebiliriz. Gelişimsel modellerin ortaya koyduğu yaklaşım özel yetenekliliğin dışsal düzenlemeler ile geliştirilebileceğidir. Yaklaşım farklılıklarının kavrama ait tanımlarda veya yeteneği belirleyen kriterlerde de olduğunu görebiliriz. Bu bağlamda alan yazında öne çıkan bazı tanımlamalar ve kıstaslar şu şekildedir.

Terman (1925) özel yetenekliliği zekâ puanı ile ilişkilendirmiş ve IQ puanı 135'in üzerini orta dereceli özel yetenekli, 150'nin üzerini olağanüstü özel yetenekli olarak tanımlamıştır (Akt. Kaufman ve Sternberg, 2008). ABD'nin özel yeteneklilik ile ilgili yayınladığı Marland Raporu (1972) genel entelektüel yetenek, özel akademik yetenek, yaratıcı veya üretken düşünme, liderlik yeteneği, görsel ve sahne sanatları yeteneği ve psikomotor yetenekten herhangi birini veya bu yetenekleri bir arada sergileyen çocukları özel yetenekli olarak tanımlamıştır. Renzulli (1978)'ye göre özel yeteneklilik ortalama üstü yetenek, yaratıcılık ve göreve uyumun etkileşiminin bir sonucudur. Ayrıca Renzulli (2005) okul bağlamında özel yeteneklilik ve yaratıcı-üretici özel yeteneklilik olmak üzere iki farklı özel yeteneklilik tanımlayarak özel yetenekliliğe özel bir bakış açısı getirmiştir. Feldhusen ve Jarwan (2000) zekâ veya akademik başarı testinde yüksek puan alan ve bu yeteneğin tamamını veya bir kısmını kalıtımsal yolla kazanmış çocuğa özel yetenekli demektedir. Mönks ve Mason (2000) ise kavramı "özel yeteneklilik, bir veya daha fazla alanda beklenen başarı için bireysel bir potansiyel" olarak açıklamış, üstün zekâlı ve yetenekli çocukların profesyonel niteliklere sahip kişiler tarafından tespit edildiğini

bildirmiştir. Batdal-Karaduman ve Davaslıgil (2020) özel yetenekli öğrencilerin yaşlılarından önde, bilişsel yetenek ve yaratıcılık konusunda potansiyel veya ispatlanmış yeteneğe sahip olduklarını ifade etmiştir. MEB (2017) özel yetenekli çocukları:“ Zekâ, yaratıcılık, sanat, liderlik kapasitesi veya akademik alanlarda yaşlılarına göre yüksek düzeyde performans gösteren, alan ve konu uzmanları tarafından tanımlanan çocuklardır. Üstün veya özel yetenekli çocuklar, yeteneklerini geliştirmek için özel eğitim ve faaliyetlere ihtiyaç duyan çocuklardır.” şeklinde tanımlamıştır.

Özel yetenekliliğin bu tanımlamalarına ek tanımlamaların bir sentezi olarak Ross (1993, s.3)’un ABD’de üstün zekâ ve yeteneklilikle ilgili toplanan komitenin raporundan aktarımına göre “özel yetenekli bireyler çevrelerindeki akranlarına kıyasla yüksek başarı düzeyinde performans sergilemekte veya bu potansiyele sahiptir. Bu bireyler entelektüel, yaratıcı, sanat alanında yüksek performansa sahiptir, liderlik kapasitesinin yanı sıra akademik anlamda ileridedir. Toplumun tüm katmanlarında ve kültürel gruplarında insanlığın var olduğu tüm alanlarda yer etmektedirler.”

Tanım incelendiğinde özel yeteneklilikle ilgili çalışmalarda ortaya çıkan önemli bir konuya vurgu yapmaktadır. Üstün zekâ veya yeteneğin geniş bir alanda olabileceği gibi spesifik dar bir alanda da kendini gösterebileceği düşünülmektedir. Genel yetenek (*g-faktör*) yerine alana özgü yetenek kavramı da özel yetenekliliğin belli alanda görülebileceği görüşünün sonucunda ortaya çıkmıştır. Kaufman ve Sternberg (2008)’in belirlediği yaklaşımlardan biri olan alana özgü modellerin ve zekânın parçalı yapısının bir sonucu olduğunu ifade edebiliriz. Alana özgü özel yeteneklilik anlayışına sahip araştırmacılar, belirli yetenek alanlarını öne çıkararak bu alanlarda akranlarından önde olanların potansiyellerini ortaya çıkarmaları için ihtiyaç duydukları hızlandırma veya zenginleştirmeyi alma ihtiyaçlarına odaklanırlar (Kaufman ve Sternberg, 2008). Mönks ve Mason (2000) da öğrencilerin normal okul programının sağladığı imkânlar dışında bu öğrenciler için farklılaştırılmış bir eğitim programı ve hizmetinin gerekliliğini belirtmiştir. Özetleyecek olursak özel yetenekli olma kriterlerinin neler olması gerektiğinden bağımsız olarak özel yetenekli olarak tanımlanan çocuklara yetenekleri alanında farklılaştırılmış eğitim olanakları sağlanması gerekmektedir. Özel yeteneklilerin eğitiminde farklılaştırma konusu kendisine özgü modelleri, felsefi temelleri olan derinlikli bir konudur. Bu çalışmada geometrik muhakemeyi ölçmeye yönelik nitelikli bir ortam tasarımı gerçekleştirilmesi eğitimde farklılaştırma ile ilişkili olduğundan

farklılaştırma ve alt başlıklar bir yaklaşım benimsenmeden ilgili literatürün sentezlenmesi ile okuyucuyu kavramlar hakkında bilgilendirecek düzeyde ifade etmeye özen gösterilmiştir.

Özel yeteneklilerle ilgili araştırmalar bu öğrencilerin daha hızlı öğrenme kapasitesi, problem üzerinde Sınıf ortamındaki eğitimin ortalamayı hedef aldığı, öğrencilerin bireysel ilgi ve ihtiyaçlarının göz ardı edildiği gerçekliğinden hareketle özel eğitime tabi öğrenciler için eğitim-öğretim faaliyetlerinin düzenlenmesi gerekmektedir. Hızlı eyleme geçme, problemi hızlı çözme, soyut fikirleri manipüle etme ve ilişkilendirme kapasitesi bulguları ile özel bir müfredat tasarımına ihtiyaç duyulduğunu ortaya koymaktadır (VanTassel-Baska ve Stambaugh, 2008). Farklılaştırılmış eğitim sadece özel eğitim için değil örgün eğitim kurumlarında da standart eğitim uygulamasına tepki olarak ortaya konulmuştur. Öğretim programının farklılaştırılması içerik, süreç, ürün, öğrenme ortamı ve değerlendirme unsurlarından en az birinin özel yeteneklilere göre düzenlenmesi ile sağlanabilir (Avcı-Doğan ve Bal-Sezerel, 2021). Eğitimde farklılaştırma esasında sınıfta olan bitenleri değiştirmek anlamına gelmekte, böylece öğrencilerin bilgiyi almak, fikirleri anlamlandırmak ve öğrendiklerini ifade etmek için birden fazla seçeneği olmasını sağlamaktır (Tomlinson, 2001). Farklılaştırma her öğrencinin öğrenme sürecinde seviyesini belirleme, bildikleri ve öğrenmesi gerekenleri belirlemeye duyarlı (Akkaş ve Tortop, 2015) olmasına karşılık bireyselleştirilmiş eğitimi ifade etmemektedir. Daha genel bir yaklaşımla farklılaştırma eğitimin temel dört bileşeni üzerine tanımlanmıştır. İçerikte farklılaştırma alana özgü kavramlara üst düzey bir yaklaşım sunmalı, program içeriği soyutluk ve karmaşıklık açısından fırsatlar sunmalıdır (Avcı-Doğan ve Bal-Sezerel, 2021). Eğitimde süreç bir amaca yönelik değişimlerin tamamını ifade etmektedir. Bu nedenle süreçte farklılaştırma kullanılan yöntem, teknik, strateji, materyal desteği, tasarlanan etkinlik gibi sürecin bileşenleri ile ilişkilidir. Tomlinson (2001)'a göre matematik öğretmenleri süreci ödev veya aktivite üzerinden farklılaştırmakta ve bunun öğrencinin düşüncesini netleştireceğini ifade etmektedir. Ayrıca sürecin farklılaştırılması öğretmenin öğrenciye meydan okuyacağı görev tasarımının uygunluğunu belirlemesine yardımcı olmaktadır. Gardner'ın çoklu zekâ teorisindeki yetenekleri baz almak ve görevleri bu doğrultuda tasarlamak sürecin çeşitlenmesini sağlayacaktır (Güçyeter, 2017). Öğrenme çıktısı olarak ele alınan ürünler içerik ve süreçte gerçekleştirilen farklılaştırmaya bağlı gerçekleşmektedir. Üst düzey tasarlanan bir görevin çıktısının yine üst düzey olması gerekmektedir. Yaratıcılığın özel yeteneğin bir girdisi mi yoksa çıktısı

mı olduğu tartışmalarıyla birlikte özel yetenekli bir öğrencinin farklılaştırılmış bir eğitimde ortaya koyduğu ürünün taşınması gereken bir nitelik olduğunu ifade edebiliriz. Özel yetenekli öğrenciler tek başına çalışma, grupla işbirliği içinde olma ve ilgilerini çeken konularda uzun süreli çalışabilme potansiyeline sahiptir (Avcı-Doğan ve Bal-Sezerel, 2021). Öğrenme ortamlarının birbirinden farklı ilgi ve yeteneklere sahip öğrencilerin bireysel taleplerine tek tek cevap verebilmesi söz konusu olmasa da farklılaştırılmış öğrenme ortamı açıklık, öğrenen merkezlik, bağımsız çalışma imkânı sunma ve kaynakların çeşitliliği koşullarının sağlanmasını ifade etmektedir (Maker ve Nielson, 1995; akt. Feldhusen, 2005, s.73).

Özel yeteneklilerin eğitimlerinin içerik, süreç, ürün ve öğrenme ortamı bağlamında farklılaştırılmasının zorlaştırma, zenginleştirme, hızlandırma ve gruplama yoluyla sağlanabileceği ifade edilmektedir. Zenginleştirme bir disiplin içeriğinin müfredata bağlı genişletilmesiyle birlikte problem çözmeye, sorgulamaya, keşfetmeye, deney yapmaya, bağımsız çalışma ve araştırma yapmaya olanak sağlayan üst düzey bilişsel tecrübelerle birlikte öğretilmesini içermektedir (Feldhusen, 1986). Okul bağlamında zenginleştirme için ileri sürülen model üç tür zenginleştirme tanımlamaktadır. Okul müfredatında olmayan konular, güncel ve heyecan verici konu, alanlarla tanışırma faaliyetleri birinci tip, düşünme, iletişim, araştırma gibi metodolojilerin geliştirildiği ikinci tip ve en ileri seviye olan, öğrencinin sorgulayan rolünü üstlendiği üçüncü tip zenginleştirme olarak sınıflanmıştır (VanTassel- Baska ve Stambaugh, 2008). Bir diğer kavram olan hızlandırma görece eski bir tanıma göre üstün zekâlı gençlerin planlanan eğitim öğretim sürecinde fazladan ders alabilmeleri ve erken mezun olmalarıdır (Feldhusen, 1986). Daha basit bir ifadeyle öğrenme hızının öğrenciye göre düzenlenmesidir (Gallagher ve Gallagher, 1994; akt. Gallagher, 2000, s. 689). Öğrencinin erken okula başlaması, sınıf atlaması, üniversiteye olması gerekenden erken başlama ve bitirme eğitimin özel yetenekli öğrenciler için hızlandırılmasıdır. Bu tür hızlandırma programına dahil edilen öğrenciler yaşlarına göre bir yıldan fazla erken gelişmişlik göstermektedir (Türkman, 2017). Eğitim içeriğinin hızlandırılmasında öğrenciler ön teste tabi tutulur ve test puanına göre uygun materyalle içerikte uzmanlaşmaları beklenir. Bu öğretim zenginleştirme ve hızlandırmanın bir kombinasyonu olup kontrollü ortamlarda etkili olduğu kanıtlanmıştır (VanTassel- Baska ve Stambaugh, 2006). Hızlandırma programlarının öğrencilerin alan bazlı gelişimleri ölçmeye olanak sağlaması nedeniyle özel yetenekli öğrencilerin gelişiminde daha etkili olduğuna yönelik daha güçlü deliller elde edilmiştir (Türkman,

2017). Zenginleştirme ve hızlandırma programlarının uygulanacağı sınıflarda öğrencinin kendi gibi olan akranları ile bir arada olması daha etkili eğitim yapmaya olanak sağlamaktadır. Gerçekleştirilen tanılama çalışmaları ile tam zamanlı veya yarı zamanlı homojen–heterojen gruplamalar gerçekleştirilebilmektedir (Avcı-Doğan ve Ateşgöz, 2021).

2.1.3.1 Türkiye’de özel yeteneklilik

Türkiye’de özel yetenekli öğrenciler ile ilgili ilk uygulama 1929 yılında kabul edilen kanunla yurtdışına eğitim için öğrenci gönderilmesiyle başlayıp 1964 yılında ilk fen lisesinin açılması, TÜBİTAK’ın kurulması ve devamlılığı olmasa da okullarda özel yeteneklilere sınıflar açılmasıyla devam etmiştir (Sak vd., 2015). 1955 yılında maarif koleji adıyla açılan ve 1975’te anadolu lisesi olan kurumları (2013 yılından öncesi), spor ve güzel sanatlar liselerini özel yetenekli öğrencilerin eğitimine yönelik adımlar içerisine dahil edebiliriz. Matematik ve fen alanında başarılı öğrenciler için 1964 yılında açılan Ankara Fen Lisesi özel yetenekli öğrenciler için atılan bir diğer adımdır (Oruç vd., 2019). Türkiye’de üniversiteler bünyesinde açılan programlarda ve üstün yetenekliler eğitim araştırma ve uygulama merkezlerinde özel yetenekli öğrencilere eğitim verilmektedir. Anadolu Üniversitesi’nde Prof. Dr. Uğur Sak tarafından açılan “Üstün Yetenekliler Eğitim Programları” bünyesinde ileri matematik, fen bilimleri ve kişilik eğitimi verilmektedir. Özel yetenekliler araştırma ve uygulama merkezleri ise özel yetenekliler için program geliştirme, tanılama, özel yetenekli öğrencisi olan ailelere destek, değerlendirme çalışmaları gerçekleştirilmektedir. Özel yetenekli öğrencilerin eğitimleri konusundaki en önemli adımın Türkiye’deki tüm ilkokulları kapsamasına bağlı örneklemenin çok geniş olması, ilköğretim birinci kademedan başlayarak ortaöğretim sonuna kadar devamlılık sağlaması bakımından Bilim ve Sanat Merkezlerinin açılması olduğunu ifade edebiliriz. Türkiye’de Milli Eğitim Bakanlığı Özel Eğitim ve Rehberlik Genel Müdürlüğüne bağlı açılan Bilim ve Sanat Merkezlerinde eğitim alacak öğrencileri “özel yetenekli” olarak tanımlamakta ve örgün eğitimin ilk üç yılı içerisinde tanılamaktadır. Bilim ve Sanat Merkezleri Yönergesi’nde (MEB, 2023) öğrencileri belirleme ve bu öğrencilerin öğrenim süreçlerine yönelik uygulama esasları tanımlanmaktadır.

Tanılama süreci üç alandan (genel zihinsel, müzik ve resim yeteneği) iki aşamalı olarak gerçekleştirilmektedir. Sınıf öğretmenleri tarafından aday gösterilen öğrenciler genel zihinsel

yetenek için tablet sınavı uygulamasına katılmaktadır. Bu sınavda barajı geçen öğrenciler ikinci aşama bireysel değerlendirme uygulamasına alınmaktadır. Bu sınav RAM (Rehberlik Araştırma Merkezi) tarafından uygulanmaktadır. Değerlendirme sonucunda başarılı bulunan öğrenciler BİLSEM kaydı yaptırabilmektedir. Kayıtlı öğrenci hafta içi örgün eğitimden sonra veya hafta sonu kayıtlı olduğu kurumda hizmet alabilmektedir. En erken birinci sınıfta tanınmaya giren öğrenci BİLSEM’de eğitime hak kazandığında ikinci sınıftan itibaren eğitime dahil edilmektedir. Sırası ile uyum, destek, bireysel yetenekleri fark ettirme, özel yetenekleri geliştirme ve proje üretimi/yönetimi programlarından yararlanmaktadır.

2.1.4 Geometrik muhakeme ve şekilsel kavrayış teorisi ile ilgili çalışmalar

Bu bölümde geometrik muhakeme literatürüne Şekilsel Kavrayış Teorisi, özel yetenekliler, gerçek yaşam problemleri perspektiflerinden açıklama getiren çalışmalara yer verilmiştir. Üç farklı başlıkta gerçekleştirilen araştırmalardan geometrik muhakeme-Şekilsel Kavrayış Teorisi, geometrik muhakeme- özel yetenekli, geometrik muhakeme-gerçek yaşam problemleri (modelleme) gibi eşleşmeler göz önünde bulundurularak bu çalışma için önemli olduğu düşünülen çalışmalar tanıtılmıştır.

Michael vd. (2011), Şekilsel Kavrayış Teorisi’nin algısal süreçlerinden işlevsel kavrayışta geometrik bir şeklin optik, mereolojik ve konumsal değişikliklerinin rolünü incelemek amacıyla 9. ve 10. sınıf öğrencileriyle gerçekleştirdikleri çalışmada mereolojik, optik ve konumsal değişimi içeren üç görev tasarlamışlardır. Doğru cevapların 1, yanlış cevapların 0 ile kodlandığı çalışmada öğrencilerin her görev için performansları karşılaştırılmıştır. Her iki sınıf seviyesinde de optik değişiklik performansları yüksek çıkarken mereolojik performansları düşük olmuştur. Bu sonuç öğrencilerin boyutsal değişikliğe duyarlı olmalarına karşılık bir şekli oluşturan alt parçaları zor fark ettiklerini ortaya çıkarmıştır. 10. sınıf öğrencilerinin tüm görev puanları 9. sınıf öğrencilerine göre yüksek çıkmış, işlevsel kavrayışın eğitim seviyesine bağlı geliştiği şeklinde yorumlanmıştır.

Michael (2013), ortaokul ve lise düzeyindeki öğrencilerin geometrik şekil algılarının yapısını ve bilişsel süreçlerini incelediği çalışmada algısal süreçlerin geometrik bir şeklin kavranması için önemli olduğu doğrulanmıştır. Çalışma sonuçları işlevsel ve söylemsel kavrayış arasındaki ilişkinin görselleştirmenin geometrik muhakemedeki rolünü vurguladığını, diğer çalışmalardan farklı olarak algısal kavrayışın söylemsel ve işlevsel

kavrayışı harekete geçirmek için önemli olduğunu göstermiştir. Öğrenciler algısal ve işlevsel kavrayış görevlerinde sıralı ve söylemsel kavrayış görevlerine göre daha başarılı olmuştur. Araştırma şekil kavrama becerisinin üst eğitim seviyesine doğru arttığı sonucu ile gelişimsel yaklaşımlarla tutarlı bir sonuç elde etmiştir.

Yıldız (2016) özel yetenekli öğrencilerin rutin olmayan geometri problemlerinde oluşum süreçlerini inşa etme becerilerini incelemiştir. 9. sınıfa devam eden öğrencilerle gerçekleştirilen çalışmada üç adet gerçek yaşam problemi kullanılmıştır. Öğrencilerin oluşumlarını desteklemek amacıyla Geogebra kullanılmış, çalışma öncesinde öğrencilere Geogebra kullanımı konusunda eğitim verilmiştir. Araştırma özel yetenekli öğrencilerin yeterlilikleri ile Geogebra'yı etkili şekilde kullandıklarını, gerçek yaşam problemlerini farklı düşünme potansiyelleri ile çözebildiklerini ve hatalarını hızlı şekilde görebildiklerini ortaya koymuştur. Çalışma özel yetenekli öğrencilerin problem çözmede başarısını ortaya koymaktan ziyade tümevarımsal, tümdengelimsel ve analitik düşünme süreçlerindeki başarılarını ortaya koymuştur. Oluşum görevinde öğrencilerin nereden başlayacaklarını belirlemekte zorlanmalarına karşılık yeteneklerini araç kullanımına yansıttıkları araştırmanın bu çalışma için önemli görülen bulgusudur.

Karpuz (2018), Şekilsel Kavrayış Teorisi'ne uygun hazırlanan öğretim ortamlarının değerlendirilmesi amacıyla gerçekleştirdiği çalışmanın örneklemini devlet lisesine devam eden iki tane 9. sınıf öğrencisi oluşturmuştur. Yarı deneysel desende gerçekleştirilen çalışmada sınıflardan birinde geleneksel eğitime devam edilmiş diğer sınıfta bilişsel süreç modelleri uygulanmıştır. Bilişsel Süreç Modeli'nin oluşturulmasında algısal ve teorik muhakeme süreçlerinin göstergeleri kullanılmış, gruplar arası durumun ölçülmesi için kategorik puanlama cetvelleri uygulanmıştır. Uygulanan program deney grubunun geometrik muhakemelerini geliştirmiş bununla birlikte matematiksel ilişkileri önerme olarak ifade etme yani matematiksel dilin kullanımı, şekilden bağımsız muhakeme konusunda başarısız olan öğrenciler olmuştur. Tasarlanan öğretim modelinin esas alındığı teorik muhakemede deney grubu kontrol grubundan başarılı olmuş ancak kendi içindeki değerlendirmede teorik gerekçelendirme yapmakta zorlandıkları görülmüştür.

Ramatlapana ve Berger (2018), üç matematik öğretmeni adayının bir geometri problemi üzerinde çalışmalarını Şekilsel Kavrayış Teorisi'nin birbirinin tersi olarak ifade edilen algısal ve söylemsel kavrayışları üzerinden analiz etmişlerdir. Araştırma sonuçları

öğretmen adaylarının görselleştirme ve muhakeme süreçlerini birleştiremediklerini ortaya koymuştur.

Tutan (2019), beş matematik öğretmenin matematik öğretim sürecini geometrik Şekilsel Kavrayış Teorisi ile incelemiş, öğretmenlerin en çok bilişsel süreçlerden görselleştirme ve muhakemeye vurgu yaptığı bulgusuna ulaşmıştır. Ayrıca araştırma sonuçları Duval'ın bileşenler arasında sistematik bir ilişki olmadığı görüşünü desteklemiştir.

Kızıltoprak (2020), öğrencilerin dörtgenlerle ilgili geometrik muhakemelerinin gelişimini incelemek amacıyla Şekilsel Kavrayış Teorisi'ni esas alan sekiz haftalık öğretim bölümleri tasarlamıştır. Sosyo-ekonomik durumu orta-düşük öğrencilerle gerçekleştirilen çalışma 7. sınıflarla yürütülmüş, veriler klinik görüşmeler, çalışma kağıtları, araştırmacı ve öğrenci günlüğünden elde edilmiştir. Araştırma bulguları öğrencilerin öğretim deneyi sonrasında tanım yaparken algısal kavrayıştan söylemsel kavrayışa yaklaştığını, dörtgen hiyerarşisini gerçekleştirebildiklerini, ölçme araçlarını doğru ve amaca uygun kullandıklarını, en çok gelişimin işlevsel kavrayışta gerçekleştiğini göstermiştir. Gerçekleştirilen eğitim öğrencilerin şeklin tek başına muhakemede yeterli olamayacağını fark etmeleri ve işlemleri çözüme ulaşmak için değil gerekçelendirme için kullanmalarını sağlaması bakımından faydalı olmuştur.

Akdemir (2022), öğrencilerin dörtgenler konusundaki geometrik muhakemelerini incelediği çalışmada Şekilsel Kavrayış ve Şekilsel Kavram Teorilerini birlikte kullanmıştır. 8. sınıf öğrencileri ile gerçekleştirilen çalışma verileri 28 açık uçlu soru içeren formlar ve yarı yapılandırılmış mülakat ile elde edilmiştir. Araştırma sonuçları öğrencilerin baskın prototip etkisi altında kavramsal muhakeme gerçekleştirmediklerini, görsel algının muhakeme sürecini etkilediğini, işlevsel ve söylemsel kavrayışın yeterli düzeyde işe koşulmadığını ortaya koymuştur. Çalışma sonuçları işlevsel kavrayışın tek başına muhakemeyi garantilemediğini de göstermiştir. Öğrencilerin en çok yamuğun kavramsal tanımını yapmakta zorlandıkları, kavramın kelime anlamı itibari ile algısal zorluğa sebep olduğu görülmüştür. Şekilsiz sorularda öğrencilerin sıralı kavrayışa uygun çizim gerçekleştiremedikleri araştırmanın bir diğer önemli bulgusunu oluşturmaktadır. Araştırma öğrencilerin muhakemeyi şekil-temsili uzayı içerisinde gerçekleştirdiklerini, geometrik uzayı kullanamadıklarını ortaya koymuştur.

Şengil-Akar (2017) özel yetenekli öğrencilerin matematiksel modelleme görevleri aracılığıyla matematiksel yaratıcılıklarını incelediği çalışmada modelleme görevlerinin öğrencilerin daha önce bilmedikleri matematiksel yapı ve kuralları keşfetmelerine olanak sağladığını, etkileşimli bir süreçle matematiksel bilgileri inşa ettiklerini ortaya koymuştur. Karataş- Aydın (2022), 9-12 yaş grubu özel yetenekli öğrencilerin mühendislik temelli etkinliklerde öğrencilerin modellemeye katılımlarını gösteren bilişsel etkinliklerini incelemiştir. Çalışma sonucunda tüm öğrencilerin büyük oranda modelleme görevinde bilişsel yeterlilik gösterdiği sonucuna ulaşmıştır. Kanbur-Tekerek (2023) özel yetenekli öğrencilerin akıl yürütme becerilerini incelediği çalışmada geometri problemlerinden yararlanmıştır. Öğrencilerin akıl yürütme süreçlerinden fikir ileri sürme, çıkarımda bulunma ve gerekçelendirmeyi daha çok, gerekçeyi doğrulama ve argüman zinciri oluşturmayı daha az kullandıkları görülmüştür. Araştırmanın bulgularından biri olan öğrencilerin rutin olmayan problemlerde zorlanmalarına karşılık çözüm sürecinde isteklilik göstermeleri güncel araştırma için önemli bulgulardan biridir. Batdal-Karaduman'ın (2012) sadece üstün zekâlı öğrencilere eğitim veren örgün eğitim kurumunda gerçekleştirdiği geometri alanında farklılaştırılmış eğitim sonucunda öğrencilerin geometri başarılarının ve uzamsal yetenek düzeylerinin arttığı görülmüştür. Öztelli- Ünal (2019), matematik olimpiyatlarında derece almış özel yetenekli öğrencilerin rutin olmayan problem çözme süreçlerini incelemiş ve öğrencilerin Polya'nın problem çözme adımlarının tamamını izlediğini, nicel akıl yürütmeyi daha çok kullandıklarını ortaya koymuştur. Koichu ve Berman (2005), uluslararası matematik olimpiyatları için eğitim almış özel yetenekli öğrencilerin geometri problemleri çözümlerini etkililik ve zerafet bakımından karşılaştırdıkları çalışmada öğrencilerin üst düzey geometri formülleri ve etkili problem çözme şemalarına önem verdiklerini ortaya koymuştur. Ayrıca geometri problemlerine bilindik çözüm getirmenin öğrencileri entelektüel açıdan mutlu etmediğini ifade etmişlerdir. Heinze (2005), matematik eğitimi için zenginleştirilmiş program uygulanan 6-10 yaş grubu özel yetenekli öğrencilerin rutin olmayan sözel problemlere verdikleri cevapları incelemiştir. Araştırma bu öğrencilerin çözümlerini doğal dili kullanarak ifade etmede akranlarından başarılı olduğunu göstermiştir.

2.1.5 Matematik çalışma uzayı ile ilgili çalışmalar

MWS Teorisi'nin ortaya koyduğu modelin matematik eğitimcileri arasında tanıtılması ve yeni araştırmacılar tarafından modelin çalışılmasını sağlamak amacıyla İspanyolca yayın

yapan Mathematics Education Bulletin (Bolema,30 (24)), 2016 yılında, Fransızca Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime 17(4)) 2014 yılında ve İngilizce Mathematics Education Dergisi (ZDM, 48(6)) 2016 yılında özel sayı yayınlamıştır. On yıldan fazladır yapılan çalışmalar modelin kapsamının geometriden matematiğe genişletildiğini ortaya koymaktadır. Derouet ve diğ (2017a) “The Mathematical Working Space model: An open and adaptable theoretical framework?” başlıklı çalışmaları ile modelin alandaki teoriler ile çalışılabilme potansiyelini açıklamışlardır. Bu çalışmayı destekleyecek araştırmaların gerçekleştirildiği literatür incelendiğinde görülmektedir (Cosmes-Aragon ve Montoya-Delgadillo, 2021; Kuzniak ve Nechache, 2022; Moutet, 2019; 2021). MWS matematikçilerin (matematik görevi üzerinde çalışan bireyler) öğretimsel süreçlerde gerçekleştirdikleri eylemleri incelemektedir. Dolayısı ile sınıf ortamında matematik üzerinde çalışan taraflardan biri olan öğretmenler ile ilgili çalışmalar gerçekleştirilmiştir (Gómez-Chacón vd., 2016a; Kuzniak ve Nechache, 2015; 2021; Kuzniak vd., 2020; Kuzniak ve Masselin, 2024; Panero vd., 2016; Ribeiro ve Almeida, 2018; Rivas ve Kuzniak; 2022). Modelin erken döneminde geometri temelinde çalışılmasına bağlı olarak geometri, geometri- teknoloji bağlamında yürütülen çalışmalar olduğu görülmektedir (Elia vd., 2018; Gómez-Chacón vd., 2016b; Horsman, 2019; Jiménez ve Ärlebäck, 2018; Santos-Trigo vd., 2016; Tanguay ve Venant, 2016). Çalışmaların ele aldığı geometri konularının çalışmaların yürütüldüğü okulun müfredatı ile uyumlu olması MWS’nin okul matematiği kavramının altını çizmesinin yanı sıra uygulanan müfredatların epistemolojik ve bilişsel açıdan analizinin yapılmasına da olanak sağlamıştır diyebiliriz.

Literatür taraması MWS teorisinin teorinin öncülerinden biri olan Kuzniak’ (ın da ifade ettiği gibi birden fazla bağlamla ve çok çeşitli teorik çerçeve ile çalışmaya uygun alt yapısı aracılığı ile geniş kapsamlı çalışıldığını ortaya koymaktadır. Eğitimde karşılaşılan sorunların üstesinden gelmek için eğitim sürecinin detaylı analizinin yapılması ve her bir bileşenin iyi tanımlanması gerekmektedir. Öğrencilerin zorluk yaşadığını iddia ettikleri ders olan matematik özelinde ise öğrencilerin matematik üzerine çalışmalarının incelenmesine olanak sağlayan bir çerçeve sunmaktadır. Referans, uygun ve kişisel MWS üzerine çalışmalar (Derouet ve Parzys, 2016; Elia vd., 2016; Minh ve Lagrange, 2016) öğretimden beklenen ile öğrencilerin ortaya koydukları çalışma arasındaki farka düzlemler ve oluşumlar gibi pek çok teknik açıklama getirmektedir. Çalışmaların olasılık, fonksiyonlar, açılar, cebir, alan hesaplama, mutlak değer gibi matematik alanı içerisindeki

pek çok konuyla birlikte kimya, fizik alanlarında da (Moutet, 2018; 2019; 2021) çalışıldığı görülmüştür.

Buraya kadar literatürdeki ilgili çalışmalar genel temalar altında gruplandırılmış ve MWS literatürüne genel bir bakış sağlanması amaçlanmıştır. MWS modelini kullanan çalışmaların doğrudan veya dolaylı didaktik teorilerine atıfta bulundukları söylenebilir. Bu çalışmalar içinde matematiksel modellemeyi kullanan çalışmalar Fransız geleneğinin dışına çıkmaları bakımından dikkat çekmektedir (Derouet, 2016; Derouet vd., 2017b, Derouet, 2019; Lagrange, 2021; Lagrange vd., 2022; Minh ve Lagrange, 2016; Moutet, 2021; Nechache, 2016). Bu çalışmanın analizleri modelleme süreçleri üzerinden gerçekleştirilmediği için kavramsal olarak modellemeye atıfta bulunmamasına karşı uygulamalarda gerçek yaşam bağlamı içeren problemler kullanılması sebebiyle MWS'nin modelleme ile çalışıldığı araştırmalara yer verilmiştir.

Derouet (2016), 12. sınıf Fransız Bakalorya programı uygulanan öğrencilerin yoğunluk fonksiyonu kavramı temelli bir uygulama ile sürekli olasılık ve integral ilişkisini kullanma durumlarını incelemiştir. Aktivite Teorisi (Leont'ev, 1981) ve MWS'nin birlikte kullanıldığı çalışmada olasılık ve integral arasındaki semiyotik ilişkiyi ortaya çıkaracak etkinlikler geliştirilmiş, bu etkinliklerin oluşturulmasında epistemolojik ve tarihsel bir yaklaşım benimsenmiştir. Bu yaklaşım çalışmanın etkinliklerinin modelleme ile ilişkisini ortaya koymaktadır. Çalışmasında gerçek yaşam durumu ve gerçek modeli kullanmayarak modelleme döngüsünün sadece matematik kısmına yer vererek yarı modelleme kullanmıştır. Araştırma kapsamında öğrenci uygulamaları dışında ders kitapları ve konuyla ilişkili kaynaklar incelenmiştir. Araştırmanın sonuçları öğrencilerin yoğunluk fonksiyonu ile integral arasında kendiliğinden ilişkilendirme kuramadıklarını ortaya çıkarmıştır. Araştırmada bu ilişkinin ders kitapları ve kurumsal uygulamalar kaynaklı olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Nechache (2016), Fransız eğitiminde olasılık öğretiminin özgünlüğünü ortaya koyduğu çalışmayı 14-15 yaş grubu öğrenciler ile gerçekleştirmiştir. Olasılık öğretiminde doğrulamayı ortaya çıkarmak amacı ile üç aşamalı (basit, karmaşık ve zengin içerikli) bir çalışma gerçekleştirmiştir. Birinci aşamada modelleme etkinlikleri kullanılarak öğrencilerin olasılık ve doğrulama için keşifsel doğrulama durumlarını belirlemek amaçlanmıştır. İkinci aşamada ise öğrencilerin farklı doğrulama türlerini kullanımları karşılaştırılmıştır. Araştırmanın bu yöndeki bulguları öğrencilerin semiyotik

doğrulamanın olasılık da teorik referans doğrulamanın ise geometride daha fazla kullanıldığını ortaya koymuştur. Geometrinin tamamlanmış bir teorik referans sistemine sahip olması, erken yaştan itibaren öğreniminin yapılması bu durumun nedeni olarak belirtilmiştir. Olasılık eğitiminde teorik referans sisteminin yeterince vurgulanmaması ve olasılık teorilerinin ispatlanmaması da araştırmanın diğer bir sonucudur. Çalışmanın üçüncü aşaması öğretmenlerin kullandığı doğrulama türlerini ortaya çıkarmak amacıyla kullanılmıştır. Bu amaçla beş öğretmen ile yarı yapılandırılmış görüşme gerçekleştirilmiş ve öğretmenlerin tercih ettikleri doğrulama türleri belirlenmiştir. Çalışma sonucunda Fransız eğitiminde olasılık kavramının ele alınma biçimi ve olasılık için doğrulamanın özellikleri ifade edilmiştir.

Derouet vd. (2017b) Matematiksel Çalışma Uzayı'nın modelleme çalışmalarında ele alınma biçimlerini inceledikleri çalışmada teorinin modelleme görevlerinin matematiksel analizini iyileştirme potansiyelini, epistemolojik düzlem aracılığı ile farklı disiplinlere genişletilebilmesini incelemişlerdir. Dijital ortamlarda oluşan modellerin MWS aracılığı ile modelleme sürecinin önemli bir basamağı olan değerlendirilme olanağı bulması amaçlanmıştır. Çalışmalarında MWS'nin modelleme sürecinin analizini zenginleştirme ve güçlendirmesine vurgulamışlardır. Modelleme görevinin sadece problem çözmek gibi bir işlevi olmadığı, matematiksel bir kavramın sayısız kullanımının keşfedilmesi işlevi olduğu, MWS' nin ise bu duruma teorik referans sağlayacağını altını çizmişlerdir.

Derouet (2019) yaptığı çalışmada 12 sınıf öğrencilerine istatistik, fonksiyonlar ve sürekli olasılık konularına başlangıç için verilen görevlerin uygulamalarını incelemiştir. Olasılık, analiz ve istatistik olmak üzere üç alanı içeren ortaklaşa bir durum üzerinden olasılık ve integral arasındaki ilişkinin kurulmasını incelemiştir. MWS ve Aktivite Teorisi'nin birlikte teorik çerçeveyi oluşturduğu çalışmada sınıf içi matematiksel çalışma ve öğretmenin süreçteki rolü incelenmiştir. Sınıfta matematiksel çalışmanın ilerlemesini incelemek için MWS'nin alt bileşenleri kullanılmıştır. Yirmi yıldan uzun süre öğretmenlik yapan deneyimli bir öğretmen tarafından gerçekleştirilen uygulamalar bu öğretmenin iyi seviyede olduğunu belirttiği 17-18 yaş grubu 34 öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Uygulamalar kayıt altına alınmış, kayıtlar yazıya aktarılmış ve analiz edilmiştir. Araştırmada kullanılan ilk görev olasılık modelleme görevi olarak tasarlanmıştır. Ancak modellemenin kendisi yerine verilen görevin a priori ve daha çok posteriori analizine yer verilmiştir. Bu amaçla öğrenci ve öğretmen faaliyetleri, bu

faaliyetlere karşılık gelen temsil sistemleri incelenmiştir. Öğretmen yardımları görevi doğrudan etkileyen prosedürel yardım ve daha genel yardım olan yapılandırıcı yardım olarak çeşitlendirilmiştir. Araştırma sonucunda matematiksel çalışmada öğretmenlerin ve öğrencilerin rollerine yönelik durumlar ortaya konulmuştur. Öğrencilerin tüm görevlerde matematiksel çalışmayı başlatıcı rolü olmamasına karşılık sınıfın genel çalışmasının itici role sahip olduğu belirlenmiştir. Öğretmenlerin süreçteki düzenli yardımlarının özellikle engel durumlarında öğrencilerin görev ilerletmesinde önemli olduğu görülmüştür.

Almonacid-Adriano (2018), öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyon kullanmalarını gerektiren modelleme görevlerinde yaşadıkları zorluğun nedenlerini belirlemek için sosyal bilimler alanında eğitim gören 16-18 yaş grubundaki öğrencilerle çalışmış, öğrencilerin kişisel MWS'sini incelemiştir. Araştırmacı üç aşamalı olarak uyguladığı etkinliğin a priori ve posteriori analizlerini gerçekleştirmiş, öğrenci cevaplarını geometrik paradigmalar, öğrencilerin çalışma uzaylarını semiyotik-enstrümantal düzlem içinde değerlendirmiştir. Modelleme üzerinden sunulan görevlerde öğrencilerin kişisel çalışma uzaylarında cebirsel temsil formunu kullandıklarını belirlerken tablo ve grafik formunda zorlandıkları görülmüştür. Araştırmacılar bu zorluğun değişkenin davranışını tanımalarına olanak vermediğini, denklemin varsayım ve doğrulama için kullanılmadığını belirlemiştir. Çalışmada öğrencilerin enstrümantal oluşumları keşif ve görselleştirme olanağı sağlaması açısından Geogebra çalışmaları ile sağlanmış, bu sayede DGY'lerin varsayım, doğrulama ve çıkarım yapma olanağından yararlanılmıştır. Öğrenciler ile gerçekleştirilen çalışmanın sonuçları öğretmenlerin öğretimleri ile ilişkilendirildiği için öğretmenlerin çalışma uzayını inceleyen çalışmalar gerçekleştirilmesi önerilmiştir.

Karahan (2021), temel eğitim birinci kademe üçüncü, dördüncü; ikinci kademe beşinci sınıf ders kitaplarını incelediği çalışmada temel geometrik kavramlara yönelik yaklaşımı epistemolojik ve bilişsel düzleme göre incelemiştir. Araştırmacı ders kitaplarının içeriğinde dikey düzlemlerden semiyotik-söylemsel düzlemin baskın olduğunu, tek başına enstrümantal oluşum ve söylemsel oluşuma yer verilmediğini belirlemiştir. Yine dikey düzlemlerden enstrümantal-söylemsel düzleme yönelik örnek verilmediği araştırmanın sonuçlarındandır.

Lagrange vd. (2022) tarafından gerçekleştirilen çalışmada eğitimde matematiksel modelleme için MWS'nin sağladığı yeni bakış açılarının literatür destekli analizi sunulmaktadır. Bu bağlamda güncel çalışmaya da yön vermesi bakımından temel araştırma olma özelliği taşımaktadır. Araştırma modelleme döngüsü üzerine yürütülen MWS çalışmalarının analizini yaparak hem matematik ile gerçeklik ilişkisini sorgulamış hem de eğitimin hedefleri ile gerçekte olan problem çözme ilişkisini incelemiştir. Araştırmacılar modelleme görevlerinin MWS ile birlikte çalışıldığı araştırmaların modelleme döngüsünü ele alma biçimleri üzerinden bir analiz gerçekleştirmiştir. Bu analiz gerçeklik ve matematik arası keskin bir ayrımın yapılması ile ilgili güçlükleri ortaya çıkarmıştır. Modellemenin gerçekliğin matematiğe aktarılması adımlarını içeren bir dönüşüm olmasından ziyade gerçekliğin ve matematiğin birleşimi olmasının altını çizmişlerdir. Araştırma ayrıca modellemenin epistemolojik temellerine diyalektik bir bakış açısı sunarak modelleme sürecinde matematikleştirmenin rolü, matematikleştirme-modelleme arasındaki farkı irdlemiştir. Matematiksel modelleme görevinin matematiksel temsil araçlarının kullanımı ile sonuçlanan bir süreç olmaması noktasında GME 'den (Gerçekçi Matematik Eğitimi) ayrıldığı noktalar ifade edilmiş, her modelleme görevinin belirli araçlar, belirli temsiller ve akıl yürütme süreci kullanımına bağlı özgünlüğünü ortaya koymuşlardır. Bu sonuç ile MWS'nin matematik çerçevesine bağlı, modellemede yer alan farklı alanların ilişkilendirilmesine ve bu alanlara getirilen sosyal yorumlamanın belirlenmesine olanak sağlayan bir yapı sunduğunu ifade etmişlerdir.

Alanda yürütülen çalışmalar teorinin tutarlılığını ortaya koymakla birlikte çalışmalardan elde edilen sonuçlar ile alanda ağırlığı olan konuma ulaşmasını da sağlayacaktır. Aslında gerçekleştirilen her çalışmanın teorinin sınanmasına olanak sağladığını ifade edebiliriz. MWS özelinde ise teorinin ortaya koyduğu yapının farklı disiplinlere genişletilmiş bir çalışma uzayı alt yapısına olanak sağladığını görmekteyiz. Bu çalışmalardan fizik ve kimya alanında (Moutet, 2018, 2019) yürütülen çalışmalar fen alanı içinde değerlendirilebilir. Ancak her iki bilimin doğasının birbirinden farklı olduğu, fizik alanının matematiğe daha yakın durması göz önünde bulundurulursa teorinin geniş bir çalışma alanına yayıldığını da söyleyebiliriz.

3 YÖNTEM

Bu bölümde okuyucuya araştırma modeli ve deseni, katılımcıların özellikleri, araştırmacı-öğretmen, veri toplama araçları, araştırmanın tasarımı ve yürütülmesi, verilerin toplanması ve analizi hakkında detaylı bilgiler sunulmaktadır.

3.1 Araştırmanın Modeli ve Deseni

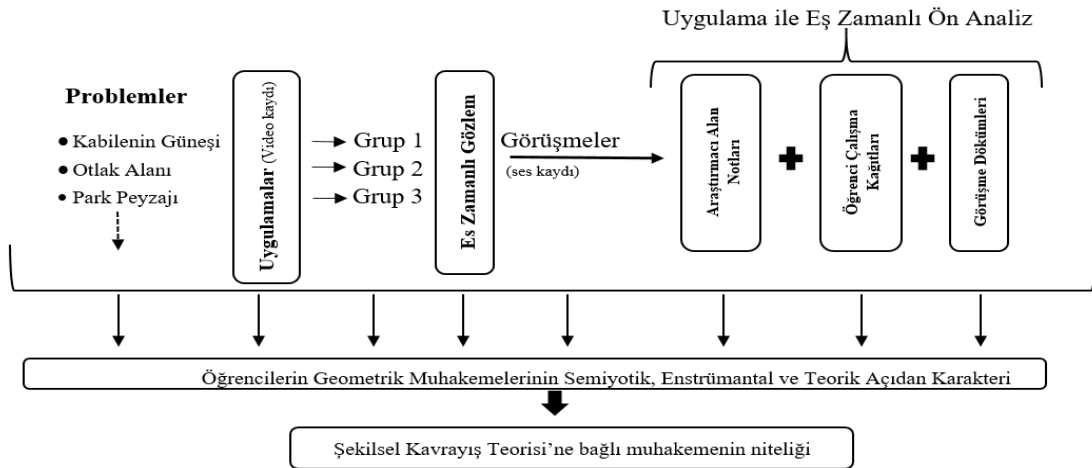
Araştırmada öğrencilerin geometrik muhakemeleri, gerçek yaşam bağlamı içeren geometri problemleri üzerinde çalışırken ortaya koyacakları matematiksel çalışma üzerinden incelenecektir. Araştırmada bu bağlamda araştırma desenin belirlenmesi, katılımcıların seçilmesi, araştırmanın uygulanması ve verilerin analiz edilmesinde nitel araştırma yaklaşımı kullanılmıştır.

Bu araştırma, araştırmacının görsel bir uyarının başlatmadığı geometrik muhakemenin doğasına yönelik sorularının sonucu olarak ortaya çıkmıştır. Çalışmanın mihenk taşı olan geometrik muhakemenin üst düzey bir süreç olmasına yönelik görüşler araştırmacıyı bu süreci özel yetenekli öğrenciler ile çalışmaya teşvik etmiştir. Literatürde bir metodoloji mi yoksa ne çalışılacağının sınırlarının çizildiği bir seçim süreci mi olduğu tartışmaları bulunan durum çalışması (Güler vd., 2015) bu araştırmada araştırma deseni olarak kabul edilmiştir. Creswell (2021) durum çalışmasından gerçek ortam şartları içerisindeki çoklu sınırlandırılmış durumların birden fazla bilgi kaynağı kullanılarak ayrıntılı ve derinlemesine incelendiği, elde edilen bu bilgilerden sınırlandırılan durumlara yönelik durum temalarının ortaya konulduğu nitel süreç olarak bahsetmektedir. Akar (2019) bir sonuca ulaşmak için verilerin önceki kuramsal önermelerle desteklendiği, bu kuramsal önermelerin veri toplama süreçlerine, verilerin analizlerine yol gösterdiği, araştırmaya özgü durumu açıklamak için pek çok değişkeni esas alarak çeşitli yöntemlerin kullanıldığı bir yöntem olarak tanımlamaktadır. Mevcut çalışmada özel yetenekli öğrencilerin araştırmacı tarafından hazırlanan geometri görevleri ile sınırlandırılan matematik çalışma durumları geometrik muhakeme bağlamında incelenecektir. Bu çalışmalar öğrencinin olağan ders akışları içerisinde gerçekleştirdikleri matematik çalışmalarından ayrılmamaktadır. Durumlara yönelik sınırlandırma geometri görevleri ile gerçekleştirilmiştir. Özel yeteneklilik ve 8. sınıfa devam etme durum olarak ele alınan olguya yönelik bir diğer sınırlamadır. Çalışmadan elde edilen verilerin MWS ve Şekilsel Kavrayış Teorisi bileşenleri esas alınarak analizi sonucu geometrik muhakeme temalı sonuçları da araştırma sonucu elde edilecek durum temalarını içermektedir. Durum

çalışması araştırmaya konu olabilecek özel bir durumun belirlenmesi ile başlamaktadır. Eylemsel bir süreci çağrıştırırsa da durum bir birey, küçük bir grup, bir topluluk, bir ilişki, bir karar verme sürecini de ifade etmektedir. Durumun iyi tanımlanması ve belirlenen kriterlere göre sınırlandırılması esastır (Creswell, 2021). Buradan araştırmacının duruma yönelik neyi ifade ettiğini çalışma parametreleri ile ayrıntılı şekilde ifade etmesi ve bulguları durumu açıklayacak şekilde inşa etmesi gerektiği sonucunu çıkarabiliriz. Patton (2018) analiz birimleri durumların araştırmaların tasarım sürecinde belli olduğunu ve örneklem seçmenin de temeli olduğunu belirtmektedir. Patton (2018) durum çalışmasını bir araştırma yaklaşımı olarak görmektedir. Ancak durum çalışmasının verilerin toplanması, düzenlenmesi ve analizi ile özel bir yöntem inşa ettiğini, bu yöntem ile elde edilen verilerin analizinin bir ürün (durum) meydana getirdiğini de ifade etmektedir. Bu çalışmada belirlenen durumlara özgü bir araştırma yaklaşımı izlenmiştir. Verilerin nasıl elde edileceği, veri toplama araçları, verilerin analizinde kullanılacak yöntem gibi bir araştırmanın metodolojik birimlerinin tamamı durumlara bağlı gerçekleştirilmiştir. Şekil 3.1’de mevcut çalışmanın nasıl modellenebileceği gösterilmektedir.

Şekil 3.1

Araştırmanın Uygulama Modeli



3.2 Katılımcılar

Araştırmanın katılımcıları BİLSEM’e devam eden özel yetenekli 8. sınıf öğrencilerinden oluşmaktadır. 8. sınıf öğrencileri ÖYG2 “özel yetenekleri geliştirme 2” olarak tanımlanmaktadır. 6. sınıfta bireysel yetenekleri fark etme programını tamamlayan öğrenciler 7. ve 8. sınıfta kendi talep ettikleri dersleri almaktadırlar. Katılımcı öğrencilerin matematik dersine ilgi duyan, matematiksel yeteneklerinin geliştirilmesine

istekli öğrencilerden oluşması çalışmanın sağlıklı uygulanması ve hedeflenen verilerin elde edilmesi açısından önem arz etmektedir. Öğrencilerin BİLSEM tanılama sürecinde yeterli görülmelerine bağlı olarak araştırmanın uygulama problemlerinin gerektirdiği üst düzey düşünme becerilerine sahip olmaları önemli bir ölçüt olarak kabul edilmiştir. Bu nedenle çalışma katılımcıları olasılıklı olmayan amaçlı örnekleme yönteminden ölçüt örnekleme ile seçilmiştir. Amaçlı örnekleme bilgi bakımından zengin durumların incelenmesini, deneysel genellemeler yerine kendi kendine derinlikli bir anlama (Patton, 2018) sağlaması bakımından çalışmanın doğasına uygundur.

Araştırma katılımcıları araştırmacının dersine girdiği 4 farklı ÖYG2 grubu içerisinde seçilmiştir. Araştırmacı gerçekleştirilecek uygulama prosedürünü öğrencilere sözlü olarak aktarmıştır. Katılmaya istekli öğrenci velilerine “ Veli Aydınlatılmış Onam Formu” ile bilgilendirme yapılmıştır. Çalışma verileri 12 erkek 10 kız olmak üzere toplamda 22 öğrenciden elde edilmiştir. Öğrencilerden bir kısmı oturumlara düzenli katılım sağlamış diğer öğrenciler bazı oturumlara katılırken bazı oturumlarda yer almamıştır. Grupların özellikleri Tablo 3.1’de sunulmuştur.

Tablo 3.1

Katılımcı Grupların Özellikleri

Grubun Adı	Grubun Özellikleri
GRUP 1 Ö1-Ö2-Ö3-Ö4- Ö12-Ö17	Grupta düzenli katılım sağlayan öğrenciler Ö1,Ö2,Ö3 ve Ö4’tür. Bu grupta oturumlara katılan diğer öğrenciler Ö12 ve Ö17 olarak kodlanmıştır. Grup dört erkek iki kız öğrenci olmak üzere toplam altı öğrenciden oluşmaktadır. Grupta yer alan üç öğrenci (Ö1, Ö3, Ö4) devlete ait örgün eğitim kurumunun aynı sınıfında eğitim aldığı için problem çözme oturumlarında yoğun iletişim kurmuşlardır. Bu gruptaki bir öğrenci (Ö4) sene sonunda ARGEM’e yönlendirilmiştir. Grubun problem çözme oturum süreleri diğer gruplardan daha kısa olmuştur. Grupta yer alan ve Ö2 olarak kodlanan erkek öğrenci içine kapanık yapısı nedeniyle katılım sağladığı oturumlarda sözel veri sunmaktan kaçınmıştır.
GRUP 2 Ö5-Ö6-Ö7-Ö15- Ö16-Ö18-Ö19- Ö20-Ö21-Ö22	Öğrenci katılımı en düzensiz olan gruptur. Grup altı kız dört erkek olmak üzere toplam on öğrenciden oluşmaktadır. İki öğrenci (Ö5, Ö6) düzenli katılım sağlamıştır. Bu iki öğrenci farklı örgün eğitim kurumlardan gelmekte ayrıca BİLSEM’de matematik dışında ortak ders almamaktadır. Bu nedenle öğrenciler arası iletişimin en zayıf olduğu gruptur. Problemleri bireysel olarak çözme eğilimi göstermişlerdir. Grup içerisinde düzenli katılım sağlamayan bir öğrenci (Ö19) 2024 LGS’den 500 tam puan almıştır. TÜBİTAK matematik ve bilgisayar olimpiyatlarına katılmaktadır. Grupta düzenli katılım sağlayan öğrencilerden biri (Ö6) özel okula devam etmektedir.
GRUP 3 Ö8-Ö9-Ö10-Ö11- Ö13-Ö14	BİLSEM’e hafta sonu devam eden öğrencilerden oluşmaktadır. Grup iki kız dört erkek olmak üzere toplam altı kişiden oluşmaktadır. Grupta Konya iline bağlı bir ilçeden gelen iki öğrenci (Ö8, Ö10) yer almaktadır. Katılımcıların tamamı farklı örgün eğitim kurumlarına devam etmektedir. Düzenli katılım sağlayan dört öğrenci (Ö8, Ö9, Ö10, Ö11) bulunmaktadır BİLSEM’de ortak derslere devam etmektedirler. Grup içi iletişim kuvvetlidir. Grubun tamamı devlet okuluna devam etmektedir. İlçeden gelen erkek öğrenci (Ö10) hafızlık eğitimi aldığı için 7. sınıf müfredatına hakim olmadığını ifade etmiştir.

Araştırmanın öğrencileri süreçte gelişimsel anlamda bir değerlendirmeye alma amacı taşımaması nedeniyle bu durum bir engel olarak düşünülmemiştir. Bu nedenle problem çözme oturumları o oturumda yer alan öğrenciler bazında sunulmuştur. Araştırma grupları araştırmacının görev yaptığı kurumda idare tarafından oluşturulan hali ile çalışmaya alınmıştır. Özel yetenekli öğrenciler BİLSEM’e örgün eğitim kurumlarından sonra, en uygun oldukları zamanda katılım sağladıkları için öğrencilerin çalışma takvimine uyulmuştur. Bu uygulamada öğrencilerin LGS hazırlanma sürecinde olmaları, kurumun ders akış sürecini değiştirmekten kaçınma, olağan akış içerisinde öğrencilerin daha fazla katılım sağlayacağı düşüncesi de etkili olmuştur. Sadece bir öğrenci dahil olduğu grup araştırmaya katılım sağlamak istemediği için bu öğrencinin ders programında değişikliğe gidilmiştir. Bu nedenle öğrenci (Ö13) grupla bahar döneminde derslere katılım sağlamıştır. Öğrencilerin kod ataması araştırma sürecinin başında yapılmış, veri toplama sürecinde bir değişikliğe gidilmemiştir. Problem çözme oturumları ve öğrenci katılım durumları Tablo 3.2’deki gibi olmuştur.

Tablo 3.2

Öğrencilerin Problemlere Katılım Durumları

Problemin Adı	Grup 1 Katılımcılar	Grup 2 Katılımcılar	Grup 3 Katılımcılar	Toplam
<i>Otlak Alanı</i>	Ö1, Ö2, Ö3, Ö17	Ö5, Ö6, Ö7	Ö8, Ö10, Ö11	10
<i>Kabilenin Güneşi</i>	Ö1, Ö3, Ö4, Ö12	Ö5, Ö6, Ö18	Ö8, Ö9, Ö10, Ö11	11
<i>Bungalov Ev</i>	Ö1, Ö3, Ö4, Ö5	Ö6, Ö15	Ö8, Ö9, Ö10, Ö11, Ö13	11
<i>Miras Kalan Tarla</i>	Ö1, Ö3, Ö4	Ö5, Ö6, Ö19	Ö8, Ö9, Ö10, Ö11	10
<i>Bereket Motifi</i>	Ö1, Ö2, Ö3, Ö4, Ö12	Ö6, Ö15, Ö19, Ö20	Ö9, Ö11	11
<i>Kırık Seramik</i>	Ö1, Ö3, Ö4, Ö12	Ö5, Ö6, Ö7, Ö22	Ö8, Ö9, Ö11, Ö13	12
<i>Uçurtma Yapımı</i>	Ö1, Ö2	Ö5, Ö6, Ö7	Ö8, Ö9, Ö10, Ö11, Ö13, Ö14	11
<i>Ev için Arazi</i>	Ö1, Ö2, Ö4	Ö5, Ö7, Ö15	Ö8, Ö9, Ö10	9
<i>Doğum Günü Pastası</i>	Ö1, Ö2, Ö3, Ö4, Ö12	Ö5, Ö6, Ö21	Ö9, Ö10, Ö11	11
<i>Park Peyzajı</i>	Ö1, Ö3, Ö4, Ö12	Ö5, Ö6, Ö16, Ö21	Ö8, Ö9, Ö10, Ö11	12

Tablo 3.2 incelendiğinde araştırma problemlerinde veri toplanan özel yetenekli öğrenci sayısının her bir problem için benzeşik olduğu, gruplarda düzenli katılım sağlayan öğrencilerin olduğu görülmektedir.

3.3 Araştırma Ortamı

Araştırma Konya il merkezinde bulunan bir BİLSEM’de gerçekleştirilmiştir. Çalışmanın özel yeteneklilerle gerçekleştirilmesinin planlanması ve araştırmacının bir BİLSEM

öğretmeni olması bu konuda yönlendirici olmuştur. Öğrencilerle gerçekleştirilen destek eğitimler genellikle matematik sınıfında gerçekleştirilmiştir. Sınıfın teknolojik alt yapısının öğrenci sayısı için yeterli gelmediği durumlarda kurumda bulunan bilgisayar alt yapısına sahip tasarım atölyesi kullanılmıştır. Matematik sınıfı etkinlikler ve uygulamalar için gerekli bilgisayar, cetvel, pergel gibi malzemelerin bulunduğu, öğrencinin ihtiyaç duyduğunda bu malzemeleri kullanabileceği bir ortam sunmaktadır. Sınıf ortamında masa düzeni öğrencilerin isterlerse bireysel çalışmalarına olanak sağlayacak şekilde tasarlanmıştır. Sınıfta öğrencilerinde yararlanabildiği internet bağlantısı bulunmaktadır. Çalışmanın yürütüldüğü ÖYG-2 programına kayıtlı öğrenciler en fazla 10 kişilik gruplar olarak sınıfı kullanmaktadırlar. Bu nedenle öğrenciler örgün eğitim kurumlarına göre daha kolay takip edilebilmektedir. Araştırma ortamı EK-7’de sunulmuştur.

3.4 Araştırmacının Rolü

Sınıf ortamında bilişsel yük öğrencinin omuzlarında olsa da özel bir program uygulanmadığı sürece didaktik bir sürecin başlatıcısı ve mentorü öğretmendir. Öğretmenin öğrencilerin düzeyine göre görevi düzenleyen ve öğretim sürecinde gerekli desteği sağlayan kişi olmasının yanı sıra öğretmenin kişisel tercihleri, yeterlikleri de eğitim öğretim sürecinin bir belirleyicisidir. Eğitim alanındaki araştırmalarda araştırmacının öğretmen olması öğrencilerin bilgiyi yapılandırmalarında büyük oranda rol oynamaktadır (Cobb ve Steffe, 2011). Ayrıca nitel araştırmalarda araştırmacının kendisi temel bir araç rolüne sahiptir (Creswell, 2021). Bu nedenle araştırmacının çalışmadaki konumu tanımlayabilmek için tanıtılma ihtiyacı hissedilmiştir. Araştırmacı 17 yıllık bir tecrübeye sahiptir. Üç yıldır BİLSEM’de özel yetenekli öğrenciler ile çalışmaktadır. Araştırmacı yüksek lisans tez araştırmasında üst biliş ve problem çözme ilişkisini incelemiştir. Geometri araştırmacının özel ilgi alanı olup doktora eğitiminde uzamsal düşünme, geometrik düşünme ve çocuklarda geometrik düşünmenin gelişimine yönelik dersler almıştır.

3.5 Veri Toplama Araçları

Çalışmada benimsenen nitel yaklaşıma bağlı olarak çalışma verileri araştırma problemleri, problem çözme oturumu video kayıtları, öğrenci çalışma kağıtları, görüşme kayıtları, gözlem notları, öğrenci geri bildirim notları, araştırmacı günlüğü ile elde edilmiştir.

3.5.1 Uygulama problemlerinin geliştirilmesi

Araştırma kapsamında 10 tane uygulama problemi geliştirilmiştir. Uygulama problemleri öğrencilerin geometrik muhakemelerini bir geometri görevi üzerinde çalışma sürecinin karakteristiği aracılığı ile ortaya çıkaracak nitelikte hazırlanmıştır. Bu problemlerin belirlenmesinde geometrik çizim içermeme, öğrenci gerçekliği bağlamı içerisinde sunulma, araç kullanımına olanak sağlama, farklı çözüm yollarını içermeme, birden fazla düzeyde söylemsel muhakeme ile sonuçlanma potansiyelinin olması hususları göz önünde bulundurulmuştur. Çalışmanın özel yetenekli öğrencilerle gerçekleştirilmesinden dolayı problemlerin ilişkili olduğu kazanımlar öğrencilerin sınıf düzeyleri üzerinde seçilmiştir. Araştırmada kullanılan Otlak Alanı problemi Yıldız (2016)'dan, Ev için Arazi problemi Kuzniak ve Nechache (2021)'den uyarlanmıştır.

Geometri ve geometrik düşünmeyle ilişkili çalışmaların hazır çizimler kullanılarak yürütülmesine karşı çalışmada öğrencilere geometrik şekil sunmaktan kaçınılmıştır. Bu yaklaşımın benimsenmesinde geometrik şekil kullanımının tartışmalı rolü, öğrencilerin şekil algılarını ortaya çıkarma, öğrenci çizimlerinin oluşumlar açısından incelenmesi, şekil kullanımı içeren ve içermeyen problem çözümlerini karşılıklı irdeleyebilme, bu durumun muhakeme için geniş bakış açısı sunması etkili olmuştur. Araştırmanın bağlamıyla ilişkili olmasa da üst düzey becerilerin ölçüldüğü TÜBİTAK Bilim Olimpiyatlarında matematik dalı geometri sorularının (1999-2024 yılları arası) şekil içermediği, sembolik dil ile problem durumunun ortaya konulduğu görülmüştür. Bu durum araştırmacıya uygulama problemlerinin şekil içermemesinin uygunluğu konusunda dolaylı bir destek sağlamıştır. Fischbein (1993) kavramsal kontrol altında yönetilen bir şeklin üst düzey muhakemede aktif yer edebileceğini ifade etmektedir. Görsel kullanımına bağlı ortaya çıkan görsel kavrayışın sürecin dominant bileşeni olmasının önüne geçilmesi planlanmış, öğrencinin kavramsal yetkinliğinin geometrik şekil çizimine yansması amaçlanmıştır. Giriş bölümünde tartışılan geometrinin gerçek yaşamla ilişkisi problemlerin öğrencilerin kendi gerçeklikleri içerisine yerleştirebilecekleri bağlamlar içerisinde sunulmasında yönlendirici olmuştur. Bu çalışma ile doğrudan ilişkili olmayan matematikleştirme öğrencilerin geometrik kavramlara ilişkin matematiksel temsillerini ortaya çıkarması açısından önemlidir. Öğrencilerin çözümde kullandıkları temsillerin doğru ve çözüme uygunluğu kavramsal anlamayı ortaya koymanın yanı sıra çalışmaya konu olan geometrik muhakemeye semiyotik bir bakış sunmaktadır. Bu bağlamda aritmetik ve cebirsel çözüm yollarının

kullanılanabileceği uygulama problemleri seçilmiştir. Geometrinin araç kullanımıyla yakından ilişkili olan doğası muhakemede önemli görüldüğü için problemlerin tasarımında temel kriterlerden biri olmuştur. Problem içeriklerinde araç kullanımına özel bir vurgu yapılmamış; öğrencinin temsil, keşfetme, çözümü planlama ve gerçekleştirme, doğrulama gibi farklı amaçlara hizmet etmesi beklentisiyle çalışma uzayı akışı içinde gözlemlenebilme potansiyeli değerlendirilmiştir. Problemler öğrencilerin doğru sayısal sonuca ulaşmaları ve süreç sonunda matematiksel olarak tutarlı genellemeler elde etmeleri düşünülerek yapılandırılmıştır. Özetle öğrencinin hem sayısal hem de söylemsel sonuç elde etmesi planlanarak problemler şekillendirilmiştir. Halihazırda var olan bilgide genişlemeyi ifade eden muhakeme öğrencilerin problem çözümü sonunda elde edeceği sonuçlar ile karşılanmıştır.

Hazırlanan uygulama problemleri dil ve anlatım, anlaşılabilirlik, çözülebilirlik, açıklık, matematiksel doğruluk ve çalışmaya hizmet edebilirlik açısından değerlendirilmek üzere BİLSEM’de görev yapan altı, örgün eğitimde görev yapan dört matematik öğretmenin görüşüne sunulmuştur. Öğretmen görüşleri alındıktan sonra problemler tekrar düzenlenmiştir. Düzenlenen uygulama problemleri matematik eğitimi alanında uzman iki akademisyene incelenmek üzere gönderilmiştir. Akademisyen görüşü de alınarak problemlere son hali verilmiştir. Öğrencilerle gerçekleştirilen problem çözme oturumunda kullanılan hali ile “Kabilenin Güneşi” problemi örnek olarak sunulmuştur.

Kabilenin Güneşi

Afrika’nın Sahra Çölü’ne yakın coğrafyalarında oynanan bir oyun vardır. Oyun kabile liderlerinin herkese aynı yakınlıkta olması düşüncesine dayalıdır ve adı Kabilenin Güneşidir. Oyun 4 kişi ile oynanmaktadır. İçlerinden biri ebe olmaktadır. Oyunculardan biri eline aldığı 3 adet kozalağı atabildiği kadar çok yükseğe atmaktadır. Yere düşen kozalaklar oyuncuların yerleşkesidir. Eğer kozalaklar düz bir hat boyunca düşerse tekrar havaya atılmaktadır. Oyuncular kendilerine yakın olan bir kozalağı seçip oraya yerleşmektedir. Ebe tüm oyunculara eşit uzaklıkta bir nokta seçerek kendisine bir yerleşke noktası belirler. Yanlarında getirdikleri baobab ağacı liflerinden örülmüş ip ebe ve bir oyuncu arasında gerilir ve ipin uzunluğunun sabit kalması için düğüm atılır. Sonra ip sırasıyla diğer oyunculara verilir ve ipin gerginliğine bakılır ip çok sarkık kalıyor veya diğer oyuncunun olduğu yere yetişmiyorsa ebe yine ebe olmaya devam eder. Eğer ipin uzunluğu tüm oyuncular için yeterli geliyorsa ebe tüm oyunculara eşit uzaklıkta olduğu anlamına gelir ve ebe diğer oyunculardan birini ebe olarak belirler.

Eze, Ewe, Gora ve Inaya yukarıdaki oyunu oynamaktadır. Inaya bu oyunu çok iyi oynamaktadır ve neredeyse hiç kaybetmemektedir. Arkadaşlarının ısrarı üzerine onlara kullandığı taktiği kısmen açıklamıştır.

Belirlediği herhangi iki kişinin arasında düz bir ip hayal etmektedir. Sonra da bu ipin orta noktasını göz kararı belirlemektedir. Kum üstünde geri geri giderken ayağıyla bu hayali ipin orta noktasından dik geçen yine hayali bir ipin izini toprak üzerine işaretlemektedir.

Aynı işlemi ikişer ikişer tüm oyuncular için yaptığını ve belli etmeden bu oluşturduğu izlerin kesiştiği yeri yerleşke olarak kullandığını söylemiştir.

Inaya'nın verdiği ipucuna göre yeniden oynamak isteyen Ewe ebe olmayı kabul etmiştir. Eze tarafından atılan kozalakların doğrusal olmadığı ve ikişer ikişer aralarındaki mesafelerin 6m, 8m ve 10m olduğu bilindiğine göre Ewe'nin bulunduğu yeri ve kazanması için kaç metrelik ipin gerekli olduğunu belirleyebilir misiniz?

Araştırmada kullanılan uygulama problemlerin isimleri ve ilişkili oldukları temel geometrik şekil ilişkisi Tablo 3.3'te sunulmuştur.

Tablo 3.3

Uygulama Problemlerinin İlişkili Olduğu İçerik

Problemin Adı	İlişkili olduğu İçerik
Otlak Alanı	Daire ve daire dilimi
Kabilenin Güneşi	Üçgende yardımcı elemanlar ve çevrel çember
Bungalov Ev	Üçgen prizma ve hacmi
Miras Kalan Tarla	Üçgen ve Alanı
Bereket Motifi	Eşlik ve benzerlik
Doğum Günü Pastası	Cisim köşegeni ve uzunluğu
Kırık Seramik	Dörtgen-üçgen ve Alan
Peyzaj Alanı	Üçgende yardımcı elemanlar
Ev için Arazi	Dörtgenler ve yamuk
Uçurtma Yapımı	Deltoid ve özellikleri

Uygulama problemleri belirlenen kriterlere göre oluşturulmuştur. Buna karşın problemlerin tasarımlarından kaynaklanan doğaları gereği çözümlerinde baskın olarak işe koşulması beklenen oluşum süreçleri olduğu söylenebilir. Problemlerin analizlerinin gerçekleştirileceği analiz tablolarında yer alan beklentiler dışında problemlerde öğrencilerin hangi oluşumu önceleyeceği ile ilgili a priori beklentiler tablosu oluşturulmuştur. Problemin geçerlik ve güvenilirlik çalışmaları sırasında öğretmenlerin teorik yapıya hakim olmaları, pilot uygulamaya katılan öğrencilerin araç kullanım destek eğitimi almamış olmaları gibi gerekçelerle bu tablo problemleri tasarlayan araştırmacının ve danışmanının değerlendirmesine dayanmaktadır.

Problemlere ilişkin a priori oluşum beklentileri Tablo 3.4’te sunulmuştur.

Tablo 3.4

Problemlerin Matematiksel Çalışmalarına Ait A priori Oluşumlar

Problemin Adı	Öne çıkması beklenen oluşum –kavrayış	Sembolik Oluşum
Otlak Alanı	Söylemsel Oluşum	
Kabilenin Güneşi	Enstrümantal Oluşum	
Bungalov Ev	Söylemsel oluşum	
Miras Kalan Tarla	Enstrümantal Oluşum	
Bereket Motifi	Söylemsel- Enstrümantal Oluşum	
Doğum günü Pastası	Söylemsel- Enstrümantal Oluşum	
Kırık Seramik	Söylemsel Oluşum	
Ev için arazi	Söylemsel Oluşum	
Park Peyzajı	Söylemsel- Enstrümantal Oluşum	
Uçurtma Yapımı	Enstrümantal Oluşum	

3.5.2 Öğrenci çalışma kağıtları

Problem çözme oturumlarında öğrencilere uygulama problemlerinin yer aldığı çalışma kağıtları verilmiştir. Öğrenci çalışma kağıtlarının arşivlenmesine araç kullanımına yönelik destek eğitimi sırasında başlanmıştır. Ancak destek eğitimlerde kullanılan çalışma kağıtları araştırmaya veri sağlamak amacına hizmet etmek için kullanılmamıştır. Öğrencilerin destek eğitimlere katılımının kayıt altına alınması, öğrencilerin de asıl uygulamalara kadar çalışma kağıtlarını kullanma konusunda deneyim kazanması amaçlanmıştır. Öğrenciler oturum sırasında diledikleri kadar kağıt kullanmaları konusunda serbest bırakılmıştır. Oturumlar sırasında silgi kullanmamaları konusunda bilgilendirilmişlerdir. Genellikle problem metnlerinin olduğu kağıt dışında farklı kağıtta çözüm gerçekleştirmişlerdir. Kağıdın problemin yer aldığı yüzünün boş kısımlarını kullanmışlar ancak problemi görerek çözüm yapmak istedikleri için genellikle ikinci bir kağıt kullanımına yönelmişlerdir. Bu araştırmacıya öğrenci çizimlerinin hiyerarşisini anlama açısından destek olmuştur. Çalışma kağıtları öğrencilerin temsil kayıtlarını, geometrik çizimlerini, çözümlerini içermektedir. Öğrencilerle yapılan görüşmeler çalışma kağıtları üzerindeki öğrenci eylemleri, çizimler ve çizimlere yönelik öğrenci diyalogları üzerinden gerçekleştirilmiştir.

3.5.3 Gözlem

Gözlem, araştırmacının duyu organları ile araştırma ortamını bilimsel amaçla araç desteği olarak kaydettiği olgusal bir süreçtir (Angrosino,2007’den akt. Creswell, 2021). Bireyleri doğal ortamlarında izleyerek orada olan olaylarla ilgili fikir sahibi olmak için gerçekleştirilen bilimsel aktivite olarak da tanımlanabilir (Güler, Halıcıoğlu ve Taşgın,

2015). İlgili çalışmada özel yetenekli öğrencilerin oluşturacağı çalışma uzayının incelenmesi amacıyla araştırmacı katılımcı olmayan gözlemci rolünde süreci gözlemlenmiştir. Gözlemci öğrencilerin problem çözme oturumları ile eş zamanlı olarak gözlem notlarını kaydetmiştir. Gözlem araştırmanın doğası ile uyumlu olması amacıyla bir form aracılığı ile gerçekleştirilmiştir. Gözlem formu semiyotik, enstrümantal ve söylemsel süreçleri esas alan alt durumları içerecek alt gözlem soruları ile şekillendirilmiştir (bkz. EK-6). Ayrıca her sürece yönelik beklenmedik durumlar için ayrıca not alınmıştır. Bunun dışında gözlem çalışma uzayının sekteye uğradığı noktaların tespit edilmesi, problemin okunması sırasında dikkat çeken noktaların belirlenmesi, önemli görülen diğer durumların kayıt altına alınması amacıyla gerçekleştirilmiştir. Bu gözlem formu sürecin sonunda gerçekleşen mülakatlara yön vermesi açısından da oldukça işlevsel olmuştur. Öğrenci çalışma kağıtları ile birlikte gözlem notları mülakat sorularının yöneltilmesinde kullanılmıştır.

3.5.4 Görüşmeler

Patton (2018); duyguları, düşünceleri, niyetleri, her şeyi gözlemleyemeyeceğimiz için görüşme yaptığımızı ifade etmektedir. Görüşülen kişinin nasıl düşündüğünü ortaya koymak görüşmenin merkezinde yer alır (Bogdan ve Biklen, 2022). Araştırma özel yetenekli öğrencilerin gerçek yaşam bağlamı içeren, şekilsiz geometri problemleri çözme süreçlerine odaklanmaktadır. Bu süreçte gözlem yolu ile elde edilemeyen verilerin ortaya çıkarılması amacıyla görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Görüşmeler uygulama sırasında gözlemlenen öğrenci eylemlerini öğrencinin bilişsel yaklaşımı açısından açıklaması, gözlemlenemeyen bilişsel durumların da belirlenmesinde kullanılmıştır. Öğrencilerden problem çözme sürecini kendi cümleleri ile anlatması istenmiştir. Öğrenci cevapları ses kayıt cihazı ile kayıt altına alınmış, görüşmeler sırasında araştırmacı gerekli durumlar için not almıştır. Öğrencinin jest ve mimiklerle anlattığı durumlar, çalışma kağıdı veya ekran kaydı üzerinde ifade ettiği noktalar kaydedilmiştir. Öğrencilerin sadece ses kaydı ile daha rahat hissedeceklerini ifade etmelerinden dolayı bu uygulamaya gidilmiştir. Öğrencilerle gerçekleştirilen görüşmeler uygulamanın hemen arkasından, her uygulama sonrasında gerçekleştirilmiştir. Görüşmenin öğrencinin sürece ait bilişsel kayıtları henüz tazeyken gerçekleştirilmesinin araştırmacıya daha fazla veri sağlayacağı düşünülmüştür. Standart soruların yanı sıra araştırmacının problem çözme oturumlarında gözlem formu ile kayıt altına aldığı kritik davranışlar, çözüme yönelik öğrenci eylemleri, öğrenciler arası

diyalogları derinlemesine incelemeye yönelik o oturuma ait özel sorular ile gerçekleştirilmiştir.

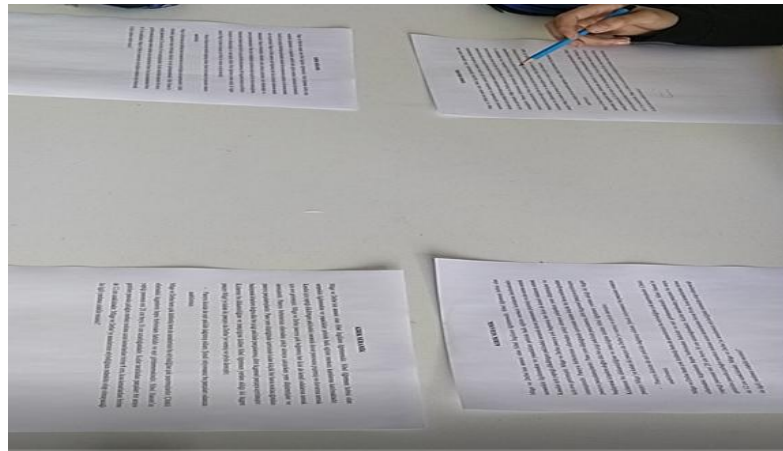
Her bir görüşme kaydı problem çözme oturumunun gerçekleştirildiği gün transkript edilmeye özen gösterilmiştir. Bu sayede transkriptlerde öğrencilerin verdikleri cevaplar araştırmacının gözlemleri, öğrenci çalışma kağıtlarındaki çizim ve hesaplamalar, öğrenci jest ve mimikleri ile ilişkilendirilerek metine dönüştürülebilmiştir. Bu durum görüşmelerin ses kaydı alınarak gerçekleştirilmek zorunda kalınması nedeniyle önemli görülmüştür. Böylece araştırmacının şekil üzerinde bir gösterimle ifade edilen durumu metin içerisinde atıf vererek (örneğin; Ö3 burada çizdiği yamuğu göstererek açıklıyor) kayıt altına alması mümkün olmuştur.

3.5.5 Kamera kayıtları

Araştırma boyunca öğrenci grupları ile gerçekleştirilen problem çözme oturumlarının her biri kamera ile kayıt altına alınmıştır. Kamera kayıtları öğrenci ve veliye taahhüt edildiği üzere öğrencilerin sadece çalışma alanını kapsamına alacak şekilde gerçekleştirilmiştir. Bu uygulama ile gözlem sırasında gözden kaçan diyalog ve çözüme yönelik eylemlerin tespit edilmesi, araştırmacının verilerin analizi sırasında yeniden süreci deneyimlemesi ve bulguları bağlamı içerisinde ifade edebilmesi planlanmıştır. Video kayıtlar ilgili problem çözme oturumuna ait gözlem formu ve görüşme transkripti ile birlikte değerlendirilmiştir. Şekil 3.2’de kameranin çekim açısı verilmiştir.

Şekil 3.2

Kamera Kayıtları Örnek Kesit

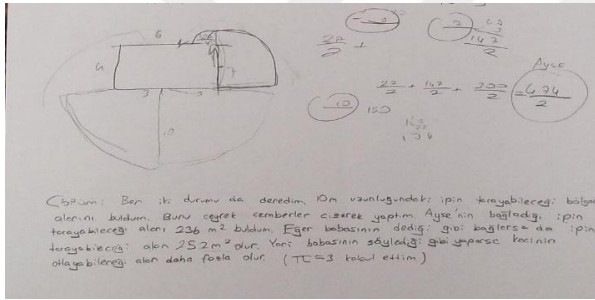


3.5.6 Öğrenci geri bildirim notları

Uygulama problemlerinin yer aldığı kağıtlarda öğrencilerin problemlere ait süreçle ilgili düşüncelerini yazdıkları kısımlar yer almaktadır. Bu uygulama herhangi bir yönlendirme olmadan öğrencilerin bazıları tarafından süreç içerisinde uygulanmaya başlamıştır. Grup içindeki diğer öğrencilerin de arkadaşlarından örnek alarak benzer bir uygulama gerçekleştirildiği görülmüştür. Bu veri kaynağı tüm problem çözme oturumları için süreklilik göstermemiştir. Öğrencilerin doğal bir dil kullanarak muhakemelerini ifade etmesinden hareketle süreçle ilgili deneyimlerini aktarması önemli görülmüştür. Bu duruma bağlı planlanan veri toplama araçlarından biri olmamasına karşılık geri bildirim notlarının ayrı bir veri kaynağı olarak değerlendirilmesine karar verilmiştir. Şekil 3.3'te öğrenci geri bildirim notu örneklendirilmiştir.

Şekil 3.3

Öğrenci Geri Bildirim Notu Örneği



Ben iki durumu da denedim. 10 m uzunluğundaki ipin tarayabileceği bölgenin alanını buldum. Bunu çeyrek çemberler çizerek yaptım. Ayşe'nin bağladığı ipin tarayabileceği alanı 236 m² buldum. Eğer babasının dediği gibi bağlarsa da ipin tarayabileceği 252 m² olur. Yani babasının söylediği gibi yaparsa kecinin otlayabileceği alan daha fazla olur. ($\pi=3$ kabul ettim)

3.5.7 Araştırmacı günlüğü

Bu araştırmada problem çözme oturumları kamera ile kaydedilmiştir. Süreç araştırmacı tarafından gözlemlenmiş, gözlem formu doldurulmuştur. Oturumlar sonunda görüşmeler gerçekleşmiştir. Buradan elde edilen veriler ileride analiz edilmek üzere saklanmıştır. Günün sonunda araştırmacıdan tüm bu süreci özetlemesi istense neler söyledikleri sorusunun da önemli olduğu düşünülmüştür. Araştırmacı veri toplamaya belirli beklentilerle başladığı için detaylı bir analiz yapmasa da çıkarımlarda bulunmuştur. Birbiri arkasına planlanan veri toplama süreci içerisinde araştırmacının bu çıkarımları unutma ihtimaline karşılık araştırmacı günlüğü tutulmuştur. Bu notlar her bir problem çözme oturumu için, oturumdan sonra mümkün olan en kısa sürede gerçekleştirilmiştir.

3.6 Araştırmanın Tasarımı ve Yürütülmesi

Bu bölümde araştırmanın planlanması, uygulama sürecinin tasarımı, pilot uygulama ve ana uygulama süreçlerinin bir özeti sunulmuştur. Bu sayede araştırmacı tarafından deneyimlenen araştırma sürecinin bilimsel akışının sunulması amaçlanmaktadır. Araştırmanın doğasını yansıtabilmesi açısından önemli görülmektedir. Çalışmanın başlangıcından tamamlanmasına kadar Şekil 3.4'teki adımlar takip edilmiştir.

Şekil 3.4

Araştırma Sürecinde İzlenen Adımlar

Araştırmanın Kuramsal Çerçevesinin Oluşturulması	Geometrik şekil algısına yönelik literatürün incelenmesi Problem durumunun belirlenmesi	2021-2022 Eğitim- Öğretim Yılı Güz Dönemi
	Geometrik şekil kullanımını merkeze alan teorilerin incelenmesi - Şekilsel Kavram Teorisi - Şekilsel Kavrayış Teorisi	
	Geometrik muhakemenin analizine yönelik teorilerin incelenmesi - Matematik Çalışma Uzayı (MWS) - Şekilsel Kavrayış Teorisi	2022-2023 Eğitim Öğretim Yılı Bahar Dönemi
	MWS ve Şekilsel Kavrayış Teorisi ile teorik çerçevenin oluşturulması	
	Şekilsiz geometri problem tasarımının gerçekleştirilmesi	
Ön Pilot Uygulama		
	Teorik çerçevenin işlevselliğinin kontrol edilmesi Şekilsiz geometri problemlerinin araştırmanın amacına hizmet etmesinin kontrol edilmesi	27.04.2023
Araç Kullanımına Yönelik Eğitim Planlanması		
	Araç kullanımına uygun kazanımların belirlenmesi Araç kullanımına yönelik etkinliklerin oluşturulması	Temmuz- 2023
Uygulama Problemlerinin Hazırlanması		
	Geometrik muhakemeye uygun kazanımların belirlenmesi Problemlere uygun gerçek yaşam bağlamlarının belirlenmesi	Ağustos- 2023
	Araç kullanımına yönelik destek eğitimlerin yürütülmesi Destek eğitimlerle eş zamanlı uygulama problemleri için uzman görüşlerinin alınması Araştırmaya ilişkin etik ve uygulama izinlerinin alınması Uygulama problemlerinin uzman görüşleri doğrultusunda düzenlenmesi Oluşum ve kavrayış süreçleri için literatür ile tanımlayıcıların belirlenmesi	2023-2024 Eğitim- Öğretim Yılı Güz Dönemi
Uygulama Problemleri Analiz Çerçevelerinin Oluşturulması		
	Problemlerin analiz a prioriilerinin yapılması Problemlere özgü analiz tablolarının oluşturulması	Kasım- Aralık, 2023

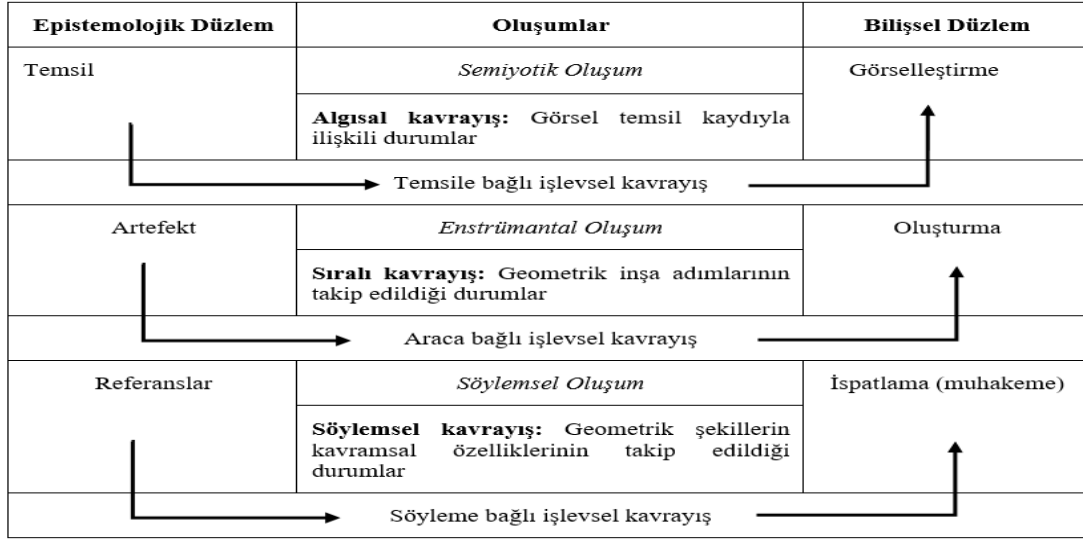
Şekil 3.4 (Devam) *Araştırma Sürecinde İzlenen Adımlar*

Uygulama Problemlerinin Pilot Uygulamasının Yapılması					
Pilot uygulamalara bağlı uygulama problemlerinin revize edilmesi				10.01.2024 - 17.02.2024	
Ana Uygulamalar					
Araştırma Verilerinin Toplanması	• Problem çözme oturumları • Eş zamanlı gözlem • Oturum sonrasında görüşme • Araştırmacı alan notları		Ön Analizler	• Gözlem notları • Görüşme kaydının transkripti • Öğrenci çalışma kağıtları	28.02.2024
					15.05.2024
Verilerin Analizi					
Posteriori Analizler				Haziran – Eylül, 2024	

Araştırmanın odağı olan geometrik muhakemenin, geometrinin tarihsel gelişimi, geometri ve geometri eğitiminin felsefesi, geometrik şekil algısı, uygulama alanları gibi pek çok parametreye bağlı irdelendiği bir düşünme süreci sonucunda araştırma problemleri ortaya konulmuştur. van Hiele, Duval, Fischbein gibi alanın önde gelen araştırmacılarının çalışmaları referans alınarak bu problemlere cevap bulunup bulunamayacağı değerlendirilmiştir. Duval'in geometrik muhakemeye getirdiği bakış açısı araştırmacının yaklaşımına uygun olduğu için kabul edilmiştir. Ancak bu teori şekil odaklı bir geometrik muhakeme sunmaktadır. Mevcut durum araştırmacıyı farklı bir arayışa sevk etmiştir. Sinclair vd. (2016) geometri eğitiminde öncü teorileri inceledikleri çalışmada Geometrik Çalışma Uzayı Teorisi'ne yer vermişlerdir. Bu çalışma araştırmaya yön veren MWS için yönlendirici olmuştur. Kuzniak ve ekibi tarafından geometri için geliştirilen teorinin kapsamının matematik için genişletildiği, birçok araştırmacı tarafından farklı bağlamlarda çalışıldığı görülmüştür. Teorinin okul matematiğini temel alan çalışmaların planlama, uygulama ve değerlendirme gibi pek çok alanda etkili bir araç olduğu iddiası bu teorinin çalışmanın kuramsal çerçevesine dahil edilmesinde ikna edici olmuştur. MWS ve Şekilsel Kavrayış Teorisine yönelik kavramların ilişkisini ortaya koyma amacıyla araştırmacı tarafından Şekil 3.5 oluşturulmuştur. Algısal süreçler-oluşum süreçleri araştırma kapsamında literatür tanımlarına bağlı olarak ilişkilendirilmiştir.

Şekil 3.5

Matematik Çalışma Uzayı ve Şekilsel Kavrayış Teorisi'nin İlişkilendirilmesi



Araştırmada yer alacak teorik çerçeveye karar verildikten sonra tez önerisi sürecinde araştırma problemlerine cevap vermek üzere kavramsal bir çatı oluşturulmuştur. Bu çatıda MWS temel kavram ve süreçler için referans olarak alınmıştır. Şekilsel Kavrayış Teorisi ise alanda söz sahibi bir teori olmasının yanı sıra kavramsal olarak MWS'nin bileşenleri ile doğrudan ilişkilidir. MWS'nin bilişsel düzlemi Duval'in bilişsel çerçevesini esas almaktadır (Gomez- Chacon ve Kuzniak, 2015). Ancak iki teori arasında literatürün tanımladığından daha fazla ilişkili yapı olduğu görülmüştür. Duval'in algısal süreçleri matematik uzayındaki oluşum süreçleri ile ilişkilendirilmiştir. Süreçler arası ilişki yine alan yazında bu süreçlerin öne çıkan davranışlarının karşılaştırılmasıyla kurulmuştur. Tüm bu süreçlerin sonunda ortaya şu soru çıkmaktadır. Kağıt üzerinde araştırma sorularına cevap verebilme potansiyeline sahip bu teorik yapı uygulamada araştırmacıya uygun bir alt yapı sunmakta mıdır? Bu sorunun cevabını araştırmanın başlangıç aşamasında almak önemli olduğu için tez önerisi kapsamında da pilot uygulama gerçekleştirilmiştir. Gerçekleştirilen pilot uygulama aşağıda detaylandırılmıştır.

3.6.1 Ön pilot uygulama

Araştırmanın farklı evrelerinde ilerleyen bölümlerde ifade edilen amaçlara hizmet etmesi için iki ayrı pilot uygulama gerçekleştirilmiştir. Araştırmanın tez önerisi kapsamında yürütülen pilot uygulama 27.04.2023 tarihinde iki ders saatinde 8. sınıfa devam eden 3 BİLSEM öğrencisi ile gerçekleştirilmiştir. Öğrencilere verilen görev Kuzniak ve

Nechache'nin (2021) çalışmasından uyarlanmıştır. Matematik görevinin uyarlanmış hali şu şekildedir:

Bayram tatili nedeniyle ailenizle köyünüze gittiniz. Köyde babanızın yaptırmayı planladığı köy evi için uygun satılık bir arsa gördünüz. Ancak arsayla ilgili bilgi alacak iletişim numarası göremediniz. Arsanın büyüklüğünün sizin için yeterli olup olmadığını öğrenmek için ne yapabileceğinizi düşündünüz ve arsanın bir köşesine geçerek ayak uzunluğu ile ölçmeye başladınız. Ardışık olarak ölçtüğünüzde sırası ile 110, 90, 120, 100 ayak olarak dörtgen şeklindeki arazinin kenar uzunluklarını belirlediniz. Bu arazinin alanını nasıl hesaplıyorsunuz?

Birinci pilot uygulama birden fazla amaçla gerçekleştirilmiştir. Gerçek yaşam bağlamı içeren, alışılmışın dışında şekil içermeyen geometri probleminin çözümünde öğrencilerin yaklaşımını gözlemlemek ve araştırmanın teorik çerçevesine yönelik kavram ve süreçlerin gözlemlenebilir olup olmadığını belirlemek öncelikli amaçlar olarak söylenebilir.

Pilot uygulama öğrencilerin oluşturduğu matematik çalışma uzaylarının gözlemlenebilir olduğunu ortaya koymuştur. Uygulama verileri sadece gözlem yolu ile elde edilmiştir. Araştırmacı öğrencilerin çalışmalarını izleyebileceği bir noktada durarak öğrencilerin görevle ilgili gerçekleştirdiği eylemleri not almıştır. Öğrencilere herhangi bir materyal doğrudan sunulmamıştır. Ancak kurum içerisinde öğrencilerin kullanımı için pergel, cetvel, kağıt, kalem, makas vb. bulunduğu hatırlatılmıştır. İlk olarak öğrencilerden P1 cetvel alarak ayak uzunluğunu ölçmüş ve dörtgenin kenar uzunluklarını kaydetmiştir. Diğer öğrenciler P1'den sonra aynı şeyi yapmış ancak P1'den farklı olarak rastgele çizdikleri dörtgen üzerine (görselleştirme) kaydetmişlerdir. P1 geometrik bir model oluşturmadan sadece aritmetik hesaplama yapmaya çalışmış, şeklin çeşitkenar olduğuna dikkat etmemiştir. P2 ayak uzunluğunu hesaplamış ancak hesaplama için zorluk çıkaracağını düşündüğü için ilk durumda verilen sayılarla işlem yapmasının sorun olup olmadığını sormuştur. P3 verilen uzunlukların bir dikdörtgen olmadığını fark etmiş (ispat) ancak paralelkenar için yorum getirmemiştir. Oluşturduğu dörtgeni dik yamuk formunda çizmiş (görselleştirme) ancak oluşum sürecine bağlı olarak gerçekleştirmemiştir. Yamuğun alanını hesaplamak için dikdörtgen ve üçgen olacak şekilde iki parçaya ayırmış (işlevsel kavrayış), kenar uzunluklarında birim değiştirme gerçekleştirmiş (semiyotik oluşum) ancak alan hesaplaması yapmamıştır. Öğrencilerin görev üzerinde ilerleme kaydedemediğini fark eden araştırmacı kağıt ve makas kullanarak

ölçülü şeritler hazırlamış ve öğrencilerden bu şeritleri kullanarak dörtgenler oluşturmalarını istemiştir (enstrümantal oluşum). Öğrenciler şeritleri kullanarak birbirlerinden farklı dörtgenler oluşturmuş (oluşturma) ancak alanın kenar uzunlukları değişmediği için aynı olacağı sonucuna ulaşmışlardır (hatalı söylemsel oluşum). P2 farklı dörtgenler oluşmasının nedenini dörtgenle ilgili hiç açılı bilgisi verilmemesine bağlamıştır (söylemsel kavrayış-oluşum). Bu söylem dörtgen oluşturmak için en az kaç elemanın verilmesi gerektiği bilgisine genişletilmediği için görevle ilgili söylemsel oluşum görevden beklenen düzeyde gerçekleşmemiştir. Ayrıca öğrenciler görevi gerçekleştirmek için sadece cetvel kullanmış ancak cetvel öğrenciye düz çizgi oluşturma noktasında destek sağlamıştır. Bu sonuca bağlı olarak öğrencilerin araç kullanımlarının desteklenmesi gerekliliği görülmüştür.

Örgün eğitimde öğretim sürelerine bağlanmış ve ardışıklık içermektedir. BİLSEM’lerde durum farklıdır. Öğrencilerin bireysel ihtiyaç ve yetenekleri göz önünde bulundurularak ders içerikleri oluşturulmakta ve uygulanmaktadır. Etkinlik ve proje tabanlı eğitim uygulamaları gerçekleştirilmekte, öğretim öğrencinin ön öğrenmelerini kullanarak gerçekleştirilebileceği gibi örgün eğitim bağlamından uzak yeni bir kapsamda da gerçekleştirilmektedir. BİLSEM’lerin sağladığı bu imkânlar araştırmacıya planlama ve uygulamada kolaylık sağlamıştır. Birinci pilot uygulama sonrasında öğrencilerin oluşum süreçlerinde yaşayacakları zorluklar göz önünde bulundurularak öğretimsel tedbirler alınması planlanmıştır. Bu tedbirin alınmasında teknolojinin günümüz yetkinliklerinden biri olması, geometrinin enstrümantal yönünün öne çıkması da etkili olmuştur. Bu amaçla ana uygulamalar öncesinde kullanılmak üzere veri toplama amacı taşınmadan öğrencilerin hazırbulunuşluk düzeyinden emin olmak için oluşturma etkinlikleri tasarlanmıştır. Hazırlanan etkinlikler normal eğitim öğretim süreci içerisine aralıklı olarak yerleştirilmiştir. Pilot uygulama çalışmada kullanılacak problem tasarımının bu araştırma şartları içerisinde kullanışlı olduğunu ortaya koymuştur. Etkinlikler ve uygulama problemlerinin içeriği, tasarlanmasındaki güdüleyici faktörler, araştırmanın referans teorileri ile ilişkisi ilgili başlıklar altında açıklanmıştır.

3.6.2 Araç kullanımına yönelik verilen destek eğitim

MWS’nin üç oluşum sürecinden biri olan enstrümantal oluşum öğrencilerin araç kullanım becerilerine bağlı olarak gözlemlenme potansiyeline sahiptir. Rabardel (2002), enstrümantasyonu aracın özelliklerine bağlı olarak öznenin gelişim gösterdiği bir süreç

olarak tanımlamaktadır. Ülkemizde öğretim programımızın araç kullanımına yapmış olduğu vurguya rağmen gerek geometrik oluşum gerekse geometri öğretiminde araç kullanımına yönelik çalışmalar öğrencilerin, öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin bu konuda kendilerinden beklenen düzeyde olmadıklarını ortaya koymaktadır. Öğrencilerin enstrümantal oluşumlarının eğitimin doğal bir sonucu olmaması, BİLSEM'e farklı örgün eğitim kurumlarından gelen öğrencilerin araç kullanım yeterliliklerinin bilinmemesi nedeniyle ana uygulamaya katılan öğrencilerle araç kullanımı ile geometrik oluşum etkinlikleri gerçekleştirilmiştir. Ancak gerçekleştirilen bu eğitimler bir öğretim deneyi oturumuna karşılık gelmemektedir. Amaç öğrenciyi halihazırda uygulanan müfredatın öngördüğü yeterliliğe taşımaktır. Bu sayede araştırma sürecinde araç kullanımının öğrencinin kişisel tercihinin bırakılması planlanmıştır. Temel oluşum etkinliklerinin verilmesi amacıyla somut materyal, cetvel ve pergeli, DGY ile oluşumlar için Geogebra kullanılmıştır. Bu amaçla matematik öğretim programı ilköğretim birinci kademedan başlanarak ortaöğretim programı dahil olmak üzere taranmış, araç kullanımı gerektiren kazanımlar belirlenmiştir. Öğrencilerle gerçekleştirilen destek eğitimin içeriği, hangi kazanıma yönelik hazırlandığı ve eğitimin üzerine kurgulandığı matematiksel araca ait bilgiler Tablo 3.5'te özetlenmiştir.

Tablo 3.5

Araç Kullanımına Yönelik Destek Eğitimlerinin Kazanımları ve İlgili Araçlar

Enstrümantal Destek Eğitim Etkinlikleri			
Etkinlik içeriği	İlgili kazanım	Sınıf düzeyi	Kullanılan araç gereç
Bir doğruya dışındaki bir noktadan paralel çizimi	Bir doğru parçasına paralel doğru parçaları inşa eder	5. sınıf	Pergel –cetvel Geogebra
Verilen açıya eş açının çizimi	Bir açıya eş bir açı çizer	6. sınıf	Pergel-cetvel Geogebra
Verilen bir açının açıortayının çizimi	Bir açıyı iki eş açıya ayırarak açıortayı belirler	7. sınıf	Pergel-cetvel Geogebra
Üçgende açıortay çizimi Üçgende kenarortay çizimi Üçgende yükseklik inşa etme	Üçgende kenarortay, açıortay ve yüksekliği inşa eder	8. sınıf	Manuel Pergel-cetvel Geogebra
Kenar uzunluğu verilen üçgenin çizimi	Yeterli sayıda elemanın ölçüleri verilen bir üçgeni çizer	8. sınıf	Pergel-cetvel Geogebra
Nokta, Doğru Parçası ve Diğer Şekillerin Ötelemesinin Oluşturulması	Nokta, doğru parçası ve diğer şekillerin öteleme sonucundaki görüntülerini çizer	8. sınıf	Geogebra
Kare prizmanın oluşturulması	Dik prizmaları tanır, temel elemanlarını belirler, inşa eder ve açınımlarını çizer.	8. sınıf	Geogebra

Hiyerarşik sıraya sahip kazanımlar içerisinde seçilen kazanımlara yönelik kağıt üçgen modeli, pergel-cetvel ve Geogebra, bazı etkinliklerde sadece Geogebra ile oluşum etkinlikleri gerçekleştirilmiştir. Etkinliklerin tasarımında şu noktalara dikkat edilmiştir:

- Temel geometrik nesne ve terimlere yer verilmesi (nokta, doğru, doğru parçası, ışın, açı, diklik, paralellik, yay, vb.)
- Öğretim programında oluşuma olanak sağlayan kazanımları içermesi
- Dinamik oluşumları içermesi, uygun etkinliklerde manuel oluşumlardan dinamik ortam oluşumlarına geçiş sağlanması
- Öğretmen merkezli bir süreçten kaçınmakla birlikte öğrenciyi sonuca ulaştıracak asgari yönerge ve görsel destek içermesi (örneğin; çember yayı kullanımında yarıçaptan, merkeze eşit uzaklıkta olma durumundan yararlanıldığının ifade edilmemesi)
- Oluşum etkinliklerinin aracın rolü ve işlevinden çok kavramsal öğrenmeyi gerçekleştirecek nitelikte olması (semyotik arabulucu rolü)
- DGY'lerin oluşum aşamalarında sağladığı pratikliğin yanı sıra matematiksel arka planı fark etmelerine de olanak sağlaması
- Etkinliklerin başta Geogebra olmak üzere araçların kullanımında öğrenciye tekrar etme olanağı sunması (örneğin; kesiştirme özelliğinin birden fazla etkinlikte kullanılması, sürgünün birden fazla etkinlikte kullanılması, vb.)
- Çalışmada yer alan uygulama soruları ile doğrudan ilişkili olmaması

3.6.3 Çalışmanın pilot uygulaması

Pilot çalışma uygulaması 2023-2024 eğitim öğretim yılının bahar dönemi 10.01.2024 - 17.02.2024 tarihleri arasında gerçekleştirilmiştir. Araştırmanın uygulama problemlerinin öğrenci seviyesine uygunluğu, problemlerin anlaşılabilirliği, problemlerin içinde verildiği bağlama yönelik öğrenci tepkilerinin belirlenmesi, çözüm sürelerinin değerlendirilmesi, çözümlerin şekil çizimine teşvik edip etmeme durumunun belirlenmesi, ana uygulamalarda karşılaşılabilecek olası engellerin tespit edilmesi ikinci pilot uygulama kapsamında değerlendirilmiştir. Bu kapsamda gerçekleştirilen pilot uygulamalar araştırmacının görev yaptığı BİLSEM'de matematik dersini seçmiş ancak farklı öğretmenle öğrenim gören 8. sınıf öğrencileri ile gerçekleştirilmiştir. Her bir problemin çözümü için öğrencilere bir ders saati süre verilmiştir. Öğrenciler bu süreçte araştırmacıya istedikleri soruyu sormaları konusunda teşvik edilmiştir. Araştırmacı her bir problem

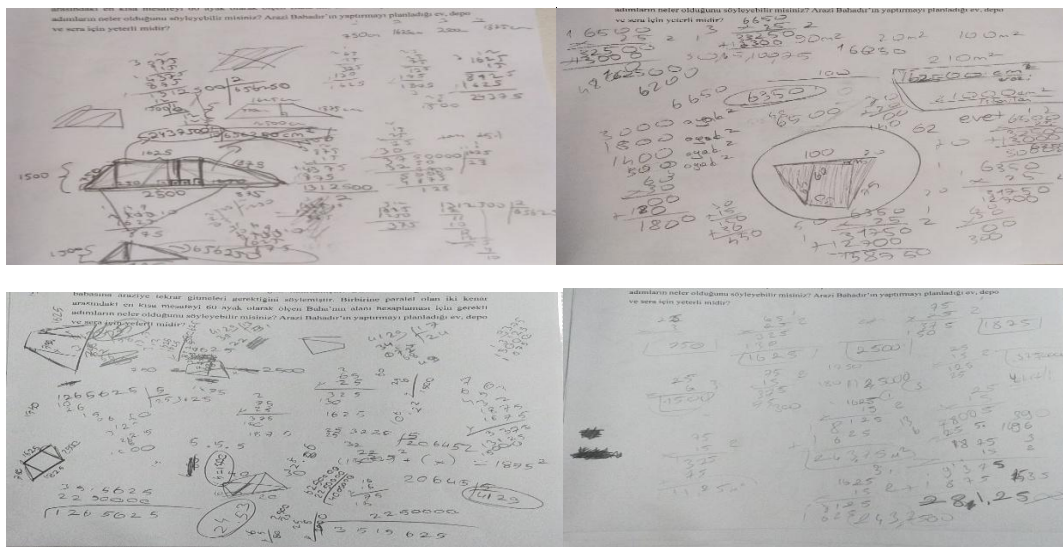
durumu ile ilgili genel ve problem özelinde öğrencilere sorular yöneltilmiştir. Ayrıca öğrenciler arası diyaloga izin verilmiş, doğrudan araştırmacıya yöneltilmeyen soruların takibi de gerçekleştirilmiştir. Öğrenciler arası sohbet öğrencilerin problemlere verdikleri doğal tepkilerin sesli düşünme protokolü kapsamında bir yansıması olarak kabul edilmiştir. Örneğin pilot uygulamaya ilk defa katılım sağlayan bir öğrencinin problemle ilgili “Matematik sorusundan çok Türkçe paragraf sorusuna benziyor.” şeklindeki tepkisi bu kapsamda değerlendirilmiştir. Süreç içerisinde öğrencilerden gelen her türlü dönüt araştırmacı tarafından oluşturulan pilot uygulama değerlendirme formunda ilgili bölüme not edilmiştir. Pilot uygulama değerlendirme formu şu başlıkları içermektedir;

- Anlaşılabilirlik-matematiksel dile uygunluk
- İlgi çekme –motive etme, güdüleme
- Şekil oluşturmaya teşvik
- Öğrenci seviyesine uygunluk
- Çözüm geliştirebilme-yapılandırma
- Verilen sürenin yeterliliği
- Problem ile yöneltilen sorular
- Gerçek yaşam bağlamı ile ilgili durumlar
- Problem çözme sürecinde karşılaşılan diğer engeller

Şekil 3.6’da pilot uygulama oturumuna ait bazı çalışma kağıdı görüntüleri sunulmuştur.

Şekil 3.6

Pilot Uygulama “Ev İçin Arazi” Problemi Öğrenci Çalışma Kağıtlarından Örnekler



Pilot uygulamalar sonucunda uygulama problemlerinin bir kısmında düzenlemeye gidilmiştir. Örneğin “Ev için Arazi” probleminde kenar uzunlukları ayak uzunluğu cinsinden verilen dörtgenin, alan hesaplamasında uzunluk dönüşümlerinin problemin en başında yapılması, ölçü biriminin santimetre olması, büyük sayılarla işlem yapılmasına buna bağlı da işlemsel sürecin muhakeme sürecinin önüne geçtiği gözlemlenmiştir. Şekil 3.6’da verilen örnekler dışında pilot uygulamaya katılan diğer öğrenciler de benzer yoğunlukta aritmetik işlemler gerçekleştirmiştir. Bu nedenle yaklaşık değerler ile işlem yapılacak şekilde problemde yer alan sayısal veriler güncellenmiştir. Bungalov ev probleminde “çevreleme elemanı” kavramının açıklanması gerektiği görülmüştür. Öğrenci söylemleri doğrultusunda Otlak Alanı probleminde kulübenin otlama alanının dışında kaldığı bilgisinin problemde belirtilmesi gerektiği görülmüştür. Bunun yanı sıra pilot uygulama katılımcılarında gözlemlenmeyen gerçek yaşam durumlarına yönelik söylemler asıl uygulamada ortaya çıkmıştır. Bununla ilgili durumlar probleme ait bulgular kısmında ifade edilmiştir. Şekil 3.7’de öğrenci çözümlerinden bazıları sunulmuştur.

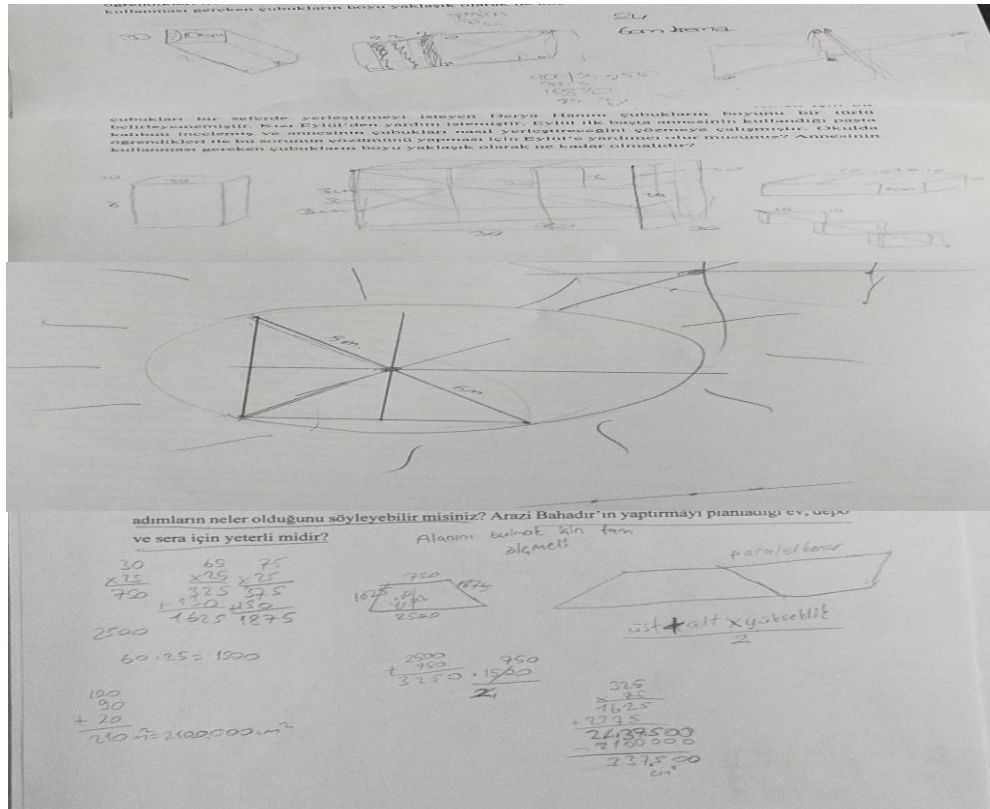
Şekil 3.7

Pilot Uygulama “Doğum Günü Pastası”, “Kabilenin Güneşi” ve “Ev İçin Arazi” Problemleri Öğrenci Çalışma Kağıdından Örnekler

Gerçek yaşam
temsili ve

Araç kullanımı ile
çözüm

Referans sistemi işe
koşarak çözüm



Pilot uygulamalar yukarıda ifade edildiği amaçla gerçekleştirilmiştir. Ancak çalışmanın temel oluşum süreçlerinin belirgin şekilde gözlemlenebilir olduğunu verilerle desteklemiştir. Bu bağlamda öğrencilerin gerçek yaşama bağlı temsil oluşturdıkları ve bu temsili matematiksel temsile dönüştürdükleri, araç yardımı ile çözüm sürecini yapılandırdıkları ve referans sistemi çözüme aktif şekilde dahil ettikleri gözlemlenmiştir.

3.7 Verilerin Toplanması

Çalışmanın bu bölümünde araştırma verilerinin elde edilme süreci detaylı olarak açıklanmıştır. Araştırma problemlerinin tasarımı herhangi bir hiyerarşi gözetilmeden gerçekleştirilmiştir. Her problem üzerine kurgulandığı kazanım çerçevesinde geliştirilmiştir. Dolayısı ile öğrencilerle gerçekleştirilen problem çözme oturumları ardışıklık kısıtlaması lmadan uygulanabilmiştir. Problem çözme oturumları grup etkinliği olarak tasarlanmıştır. Ancak öğrenciler ne bireysel çalışmaya teşvik edilmiş ne de grup halinde çözüm gerçekleştirmeleri istenmiştir. Öğrencilerin kendi çalışma uzaylarını oluşturmaları istendiği için süreç olağan akışı içinde gözlemlenmiştir. Katılımcı öğrencilerin grup içi iletişime ihtiyaç duydukları hususların belirlenmesi amaçlanmıştır. Uygulamanın gerçekleştiği üç grubun farklı dinamikleri olduğu görülmüştür. Grupların tamamen bireysel, hem bireysel hem de grupla, sadece grupla çözüm geliştirme gibi farklı karakteristikleri olduğu gözlemlenmiştir.

Bunun yanı sıra araştırmada oturumların uygulanmasında araştırmacı tarafından şu ilkeler gözetilmiştir:

- Öğrencilerin uygulama probleminin içerdiği kavram ve problemin üzerine kurgulandığı kazanımla ilişkili ön öğrenmeleri örgün eğitim sürecinde tamamlamış olması,
- Görüşmelerin problem çözme oturumunun tamamlanmasının hemen ardından gerçekleştirilmesi,
- Görüşme için öğrencilerin tamamının uygun olduklarını ifade etmelerine olanak sağlanması,
- Görüşmelerde her öğrenciye tek tek söz hakkı tanınması, bunun yanında görüşmenin tüm katılımcı öğrenciler ile gerçekleştirilmesinden dolayı soruyu cevaplamak istemeyen veya cevaplamakta zorlanan öğrenciye zaman tanınması.

Verilerin elde edildiği problem çözme oturumları ve görüşmeler 2023-2024 eğitim-öğretim yılı bahar döneminde 21.02.2024-15.05.2024 tarihleri arasında gerçekleştirilmiştir. Problem çözme ve görüşme oturumları aynı gün gerçekleştirilmiştir. Gruplarla gerçekleştirilen veri toplama oturum takvimi Tablo 3.6'daki gibidir. Problemlerin uygulanma sırası ve tarihlerle ilgili değişimler öğrencilerin BİLSEM'e devam durumlarına bağlı gerçekleşmiştir.

Tablo 3.6

Problem Çözme Oturumları ve Görüşme Takvimi

Problem Adı	Grup 1	Grup 2	Grup 3
Otlak Alanı	06.03.2024	28.02.2024	02.03.2024
Kabilenin Güneşi	27.03.2024	17.04.2024	23.03.2024
Bungalov Ev	03.04.2024	08.05.2024	30.03.2024
Miras Kalan Tarla	03.04.2024	24.04.2024	23.03.2024
Bereket Motifi	17.04.2024	08.05.2024	20.04.2024
Kırık Seramik	13.03.2024	06.03.2024	09.03.2024
Uçurtma Yapımı	21.02.2024	21.02.2024	24.02.2024
Ev için Arazi	20.03.2024	20.03.2024	16.03.2024
Doğum Günü Pastası	24.04.2024	15.05.2024	06.04.2024
Park Peyzajı	08.05.2024	15.05.2024	27.04.2024

Grupların uygulama problemlerini tamamlama ve araştırmacının problem çözme oturumları gözlem süreleri Tablo 3.7'de verilmiştir.

Tablo 3.7

Grupların Problem Çözme Oturum- Gözlem Süreleri

Problem Adı	Grup 1	Grup 2	Grup 3
Otlak Alanı	26 dk	19 dk	18 dk
Kabilenin Güneşi	15 dk	20 dk	34 dk
Bungalov Ev	20 dk	11 dk	20 dk
Miras Kalan Tarla	17 dk	43 dk	22 dk
Bereket Motifi	36 dk	28 dk	33 dk
Uçurtma Yapımı	33 dk	23 dk	22 dk
Kırık Seramik	22 dk	30 dk	17 dk
Ev için Arazi	17 dk	25 dk	23 dk
Doğum Günü Pastası	12 dk	14 dk	15 dk
Park Peyzajı	6 dk	15 dk	37 dk
Toplam Süre	204 dk	228 dk	241 dk
	11 saat 13 dk		

Oturum süreleri hesaplanırken kameranın açılma ve kapanma süresindeki kayıpları karşılaması için saniye kayıtları göz ardı edilmiştir. Problem çözme oturumları aynı

zamanda araştırmacının gözlem yapma süreci olduğu için araştırmaya konu olan durumla etkileşim süresini ortaya koyması bakımından önemlidir.

3.8 Verilerin Analizi

Yorumlayıcı paradigma ışığında yürütülen bu çalışmanın verileri nitel araştırma doğasına uygun teknikler ile analiz edilmiştir. Detaylı şekilde açıklanan veri toplama kaynaklarından elde edilen veriler sürekli (veri toplama sürecinde) ve geriye dönük (veri toplama süreci tamamlandıktan sonra) olmak üzere farklı amaçlara yönelik analize tabi tutulmuştur. Veri toplama sürecinde gerçekleştirilen analizlerde doğrudan araştırmanın nihai sonuçlarını elde etme amacı güdülmemiş, veri toplama sürecinin niteliğinin artırılması, mevcut uygulamanın araştırmaya hizmet etme durumunun belirlenmesi, verilerin problemlere yönelik hazırlanan analiz çerçevesi ile olan uyumunun değerlendirilmesi, öğrencilerin problem çözme ve görüşme performanslarının belirlenmesi amacıyla gerçekleştirilmiştir. Araştırmacıya veri toplama süreciyle ilgili sürecin sonunda değil akış içinde değerlendirme yapma olanağı sağlamıştır. Bu bağlamda grupta gerçekleştirilen problem çözme oturumuna ait görüşme kaydı, gözlem formu, öğrenci çalışma kağıdı ve araştırmacı günlüğü birlikte değerlendirilmiştir. Şekil 3.8’de bu uygulamaya yönelik örnekler sunulmuştur.

Şekil 3.8

Görüşme Dökümüne İlişkin Örnekler

Görüşme Dökümü

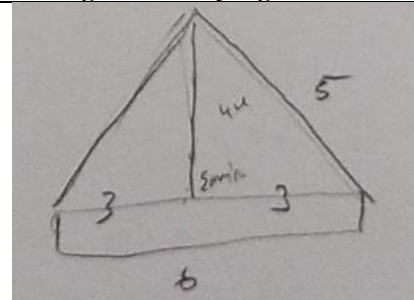
Araştırmacı: Ö3 sen piramit mi yaptın?

Ö3: Yok. Hayır. Üçgen prizma yaptım. Biraz üç boyutlu gibi durmuyor ama farkındayım. Aslında burası taban hani burası on metre böyle durmadığını biliyorum. Üç boyutlu nasıl çizeceğimi gösteremediğim için buraya altı dedim üç üç diye bölüp. Burası arkaya doğru on metre devam ediyor. Tam çizemedim. (**Ö3’ün çizimi yapının önden görünüşünü yani ön perspektifini yansıtmaktadır. Öğrenci sözel olarak şeklin üç boyutlu olduğunu ve arkaya doğru on metre boyunca devam ettiğini ifade etmektedir.**)

Araştırmacı: Peki, bir ara kenarortayla falan ilişkilendirdin. Dedin ki sonrasında hatta yükseklik. Ö5 orada sana dedi ki köşeden geçmek zorunda değil yükseklik değil bu.

Ö1: Evet. Hani kenarortay demediği için ben o anda da yanlış bir şey olarak kenarortaymış gibi düşündüğüm için köşeden geçmek zorunda gibi düşündüm. Ondan sonra da hani bir noktadan geçen dik bir yerin illa üçgende bir köşe ile kesişmesi gerekmediğini fark ettiğim için. (**öğrenci burada kenar orta dikmenin köşeden geçmek zorunda olmadığını fark ettiğini ifade etmektedir.**)

Diğer Veri Kaynağı



Öğrenci Çalışma Kağıdı

Orta noktadan, diklikten, kenarortay ve yükseklik vardır.	6, 8, 10 old. göre, 3, 4, 5 ile ilişkilendirildi ama olmaz dedi. Şekil çizildi kabaca.
Kenarortayın hangi durumda yükseklik oldu. Sözel olarak ifade etti.	Üçgenin içinde orta nokta old. temsil edildi.
Şekil çizildi ve birden fazla amaçla yapmak istendi.	→ dik olabilir ama köşeden geçmek zorunda değil dedi.
Sözel temsiliye yakın yazılı temsiller çizim yapıldı.	geniş açılı üçgende yuk. dışarıda oldu. gösterdi ama bu kenarortay değil dedi.
Diklik, orta nokta,	
Dik üçgen çizimini,	

Gözlem Formu

Grupla gerçekleştirilen problem çözme oturumu ve görüşmeler sonrasında araştırmacı günlük tutulmuştur. Bu günlük o grubun ilgili problem çözme oturumu performansı ve görüşmede verdikleri cevaplara ilişkin araştırmacının izlenimlerini içermektedir. Grubun görüşme dökümü mümkünse aynı gün değilse bir sonraki oturum öncesi gerçekleştirilmiştir. Bu sayede dökümler sadece konuşma metinleri olarak gerçekleştirilmemiş, metinlerle ilişkili parantez içi veriler geriye dönük analiz için işlenebilmiştir.

Çalışmada geriye dönük analizler veri toplama araçlarından elde edilen verilerin çalışmanın teorik çerçevesini oluşturan MWS ve Şekilsel Kavrayış Teorisi bileşenlerine göre gerçekleştirilmiştir. Araştırmanın esas analizlerinin gerçekleştirilmesinde kullanılan bu analiz çerçevesi a priori beklentilere bağlı olarak problemlerin tasarımı aşamasında yapılandırılmıştır. Literatürde oluşumlar ve kavrayış süreçleri ile ilişkilendirilen davranışlar referans alınarak tanımlama tablosu (Tablo 3.8) elde edilmiştir.

Tablo 3.8

Veri Analizinde Referans Alınan Oluşum Süreçlerine Yönelik Tanımlama Özellikleri

Oluşumlar	Tanımlayıcılar
Semiyotik Oluşum	Temsil edilenler ile temsil edenler arasında kurulan ilişki Temsil edilen matematiksel nesnenin sözdizimsel ve anlamsal boyutu arasındaki ilişki Görsel, sembolik, sözel yapıda olma Matematiksel anlamların fark edilmesi ve ifadesi Temsil ile temsil edilen nesneye fiziksel ve ikonik atıfta bulunma Temsiller arası (sözel, sembolik, görsel) geçiş
Enstrümantal Oluşum	Görevin Belli Kısımlarını Veya Tek Bir Adımını Araçla Gerçekleştirme Aracın Tasarlanmadığı Bir Amaç İçin Kullanımı Veya Başka Bir Araç Yerine Kullanımı Aracın Özel Bir Kullanımını Gerçekleştirme Araç İle Bir Şekli İnşa Etme Aracın Kullanım Adımlarını Açıklama Araç Yardımıyla Şeklin Farklı Konfigürasyonlarını Gerçekleştirme Araç İle İspat Gerçekleştirme Başlangıçta Ortaya Çıktığı Koşullar Ve Belirli Eylemlerle Bağlantılı Olma Ve Lokallik İlerleyen Zamanda Bir Eylem Sınıfı, Faaliyet Nesneleri Ve Durumlarla İlişkili Olarak Aracın Bir Özelliği Olarak Kalıcı Hale Gelme
Söylemsel Oluşum	Referans sistemi olarak adlandırılan tanımlar, teoremler, aksiyomatik yapının matematiksel çalışma sonuçlarını doğrulamak için kullanımı Problemde gözlemlenebilecek matematiksel ilişkiler hakkındaki varsayımların formüle edilmesi ve değerlendirilmesi Mantıksal argümanların oluşturulması

MWS'nin düzlemler arası artikülasyonunu sağlayan oluşumlara yönelik Tablo 3.8'e ait tanımlamalar literatürde doğrudan oluşumları esas alan çalışmalar da irdelenerek oluşturulmuştur. Örneğin enstrümantal oluşum için MWS ile birlikte Enstrümantal

Oluşum Teorisi irdelenmiştir. Benzer uygulama diğer oluşumlar için de gerçekleştirilmiştir. Ancak çalışmanın doğası içinde kalmak adına matematik alanında gerçekleştirilen çalışmalarla sınırlandırılmıştır. Kavrayış süreçleri için tanımlayıcılar belirlenirken çalışmanın teorik çerçevesinde belirtildiği gibi oluşumlar ile ilişkilendirilmiştir. Algısal süreçlerle ilgili çalışmalar doğrudan matematik alan yazını içerisinde tanımlandığı için araştırmacıya kavrayış süreçleri için daha açık ipuçları vermiştir. Kavrayış süreçleri oluşumlar ile eşleştirilmiştir. Buradan algısal süreçlerin oluşumların açıklayıcı ve destekleyicisi konumunda olduğu söylenebilir. Tablo 3.9’da algısal süreçlerle ilgili tanımlayıcılara yer verilmiştir.

Tablo 3.9

Veri Analizinde Referans Alınan Kavrayış Süreçlerine Yönelik Tanımlama Özellikleri

Algısal Süreçler	Tanımlayıcılar
Algısal Kavrayış	Epistemolojik işlevi belirleme Şekle ilk bakıldığında algılanan özellikleri kapsamaktadır Bilişsel süreçlerden görselleştirme ile ilişkili Şeklin geometrik bir nesne olarak algılanması için en az bir kavrayışla birlikte işe koşma Şeklin ne olduğu ve şekilde ne görüldüğü sorusunu karşılama
Sıralı Kavrayış	Epistemolojik işlevi modelleme Geometrik bir şeklin veya yapının aracın özelliklerine ve matematiksel yapıya bağlı oluşumu Bir şeklin oluşum aşamalarını ifade etme Bir şekli oluştururken algoritmik yol izleme Pergel, ölçüsüz cetvel ve DGY gibi kullanılan araca bağlı olarak değişim gösterme
Söylemsel Kavrayış	Epistemolojik işlevi kanıt Sözel olarak verilen matematiksel bilgiyi şekil üzerinde ifade etme Şekil üzerinde verilen matematiksel ilişkiyi matematiksel dille (uygun temsil, kavram, vb.) ifade etme Algısal kavrayıştan bağımsız düşünebilme Şekil üzerinde matematiksel ilişkilere yönelik manipülasyon gerçekleştirme (Dik üçgen bağıntısını kullanmak için yükseklik çizmek, benzerlik ilişkisi için paralel doğru parçası çizmek) Geometrik ilişkilerden çıkarımda bulunurken doğru şekilde görseller üretmek Temsiller ile verilen bilgiyi sözel bilgiye dönüştürebilme. Şekil üzerinde yapılan değişiklikleri teorik bilgiye dayandırma
İşlevsel Kavrayış	Epistemolojik işlevi keşfetme Şekil üzerinde gerçekleştirilen eylemler; öteleme, şekil çizmek, yardımcı çizgiler çekmek şekli büyütüp küçültmek, simetri almak, şeklin parçalanması, konumunun değiştirilmesi Parçalar kullanılarak yeni şekil oluşturmak Şeklin bir parçasına odaklanma (çapalama)

Tablo 3.8 ve Tablo 3.9 tek bir tablo altında birleştirilerek analiz tablosu olarak kullanılmıştır. Ancak okuyucuya daha konforlu bir akış sunmak için ayrı ayrı sunulması uygun görülmüştür. Duval’in (1995) ifade ettiği gibi işlevsel kavrayış çözümü gösteren

ya da ispatın ana adımlarını öneren şekilsel değişikliği içerdiği için tek bir oluşumla eşleştirilmemiştir. İşlevsel kavrayış çözüm için gerekli geometrik şekli elde etmek amacıyla gerçekleştiğinde temsile dayalı, şekil üzerindeki değişiklikler araçla gerçekleşiyorsa araca dayalı ve matematiksel ilişkiyi ortaya koymak amacıyla ise söyleme dayalı gerçekleştiği kabul edilmiştir. İşlevsel kavrayışın oluşumlar ile bu durumu göz önünde bulundurularak problemler özelinde tanımlayıcılar belirlenmiştir. Problemler için verilen analiz tablolarında bu tanımlayıcılara yer verilmiştir (bkz. EK-5. Uygulama Problemleri ve Analiz Çerçeveleri). Öğrencilerin geometrik muhakemelerinin analizinde Duval'in (1998) muhakeme sınıflaması kabul edilmiştir. Doğal söylemsel ve teorik söylemsel muhakeme için tanımlamalar Tablo 3.10'da sunulmaktadır.

Tablo 3.10

Muhakemenin Türü İçin Tanımlayıcılar

Muhakeme Türü	Tanımlayıcılar
Doğal söylemsel muhakeme	Doğal dili kullanarak matematiksel ilişkileri ifade etme Şekil üzerinde eylemler gerçekleştirerek ifade etme ancak matematiksel prensipler kullanmama Elde ettiği sonucu açıklama ancak bunu geçerli bir matematiksel yol ile gerçekleştirmeme
Teorik söylemsel muhakeme	Sonuçların matematiksel dil ile tanım, teorem, prensip kullanılarak ifade edilmesi Şekil kullanımından ziyade söylemsel kavrayışı kullanma Tanım, teorem ve aksiyomlarla ilişkilendirme Sonuçtan çıkarım yapmak için referans sisteminden yararlanma

Tablo 3.8, Tablo 3.9 ve Tablo 3.10'da sunulan tanımlayıcılar analiz sürecini yönetmesi bakımından önemli olmasının yanı sıra uygulama problemleri özelinde ayrı bir analiz çerçevesi oluşturulmasında işe koşulmuştur. Böylece on uygulama probleminin her biri kendi başına bir birim olarak incelenebilmiştir. Problemler için oluşturulan analiz tablosunun semiyotik boyutu detaylı şekilde Kabilenin Güneşi problemi üzerinden Tablo 3.11'de sunulmuştur. Temsile dayalı işlevsel kavrayış problemi çözme sürecinin başında öğrencilerin gerçekleştirdikleri çizimler ile eşleştirilen aşamadır. Problemde ifade edilen geometrik şekli keşfetmeye yönelik gerçekleşen ilk çizimler bu kapsama alınmıştır. Kabilenin Güneşi probleminin enstrümantal oluşum ve araca bağlı işlevsel kavrayış analiz tablosu Tablo 3.12'de gösterilmiştir.

Tablo 3.11*Kabilenin Güneşi Probleminin Temsile Dayalı Analiz Tablosu*

Epistemolojik Düzlem	Oluşum		Bilişsel Düzlem	
Temsiller	Semiyotik Oluşum		Görselleştirme	
3 adet doğrusal olmayan nokta temsili Noktaların kesişimi ile oluşan üçgen temsili Dik üçgen temsili Kenar orta nokta temsili Kenar orta dikme temsili Paralellik temsili İkizkenar üçgen temsili Kenar orta dikmelerin kesişim noktası temsili Yarıçap temsili Kenar orta dikmelerin kesişim noktasını merkez kabul eden çember temsili Çevrel çember temsili	Görsel Temsil	Nokta Üçgen çizimi Dik üçgen çizimi Paralellik temsili Benzer üçgen temsili İkizkenar üçgen temsili Kenar orta nokta çizimi Kenar orta dikme çizimi Kenar orta dikme kesişim çizimi Yarıçap çizimi Çember çizimi		Algusal Kavrayış
	Sembolik Temsil	Harflerle noktaların ifade edilmesi Köşe noktalarını kullanarak üçgenin ifade edilmesi Yarıçapın harfle bildirilmesi		
	Sözel Temsil	Sözel ve günlük konuşma dili ile ifadeler (örn: iki çocuğun aralarındaki mesafenin yarısını bulma)		
Temsile Dayalı İşlevsel Kavrayış				
Çeşitli formlarda üçgen temsilleri oluşturma Dik, dar açılı, geniş açılı üçgen, çeşitkenar, ikizkenar ve eşkenar üçgen temsili oluşturma ve bu üçgen çizimi üzerinde kenar orta dikmelerin çizim eylemleri				

Tablo 3.12*Kabilenin Güneşi Problemi Araca Bağlı Analiz Tablosu*

Epistemolojik Düzlem	Oluşum		Bilişsel Düzlem
Artefekt	Enstrümantal Oluşum		Oluşturma
Araç ile verilen uzunluklara bağlı üçgenin çizimi Kenar orta noktaların araç ile hesaplanması Kenar orta dikmelerin araç yardımıyla çizilmesi Köşelere olan uzaklığın araç ile ölçülmesi Çevrel çemberin araç ile çizilmesi Üç noktadan geçen çemberin araç ile çizilmesi	Pergel ve cetvel ile üç kenarı bilinen üçgenin çizilmesi Geogebra ile üçgenin çizilmesi Kenar orta noktaların cetvel ile belirlenmesi Kenar orta dikmelerin cetvel ile çizilmesi Kenar orta noktaların Geogebra ile çizilmesi Kenar orta dikmelerin Geogebra ile çizilmesi Şekil üzerinde ölçümlerin araç ile gerçekleştirilmesi Pergel ile çevrel çember oluşturulması Geogebra ile çevrel çember oluşturulması	Sıralı Kavrayış	
Araca Bağlı İşlevsel Kavrayış			
Araç ile çeşitli üçgen formlarının çizilmesi Farklı üçgen formlarının orta dikmelerin araç ile inşası Farklı üçgen formları için kenar orta dikmelerin kesişim noktasının araç ile inşası			

Araca bağılı işlevsel kavrayış problem çözme sürecinde aracın işe koşulduğu, araç ile şekil üzerinde bir ilişkinin keşfedilmeye çalışıldığı aşamadır. Aracın duruma özgü kullanımı bu kapsama alınmıştır. Geogebra üzerinde gerçekleştirilen bir çizimde üçgenin köşe noktalarını hareket ettirerek kenar orta noktaların kesişim noktasının konumunun değişikliği ilişkisinin keşfi örnek olarak ifade edilebilir. Kabilenin Güneşi problemine ait söylemsel oluşum ve söyleme bağılı işlevsel kavrayış analiz tablosu Tablo 3.13'te sunulmuştur.

Tablo 3.13

Kabilenin Güneşi Problemi Söyleme Dayalı Analiz Tablosu

Epistemolojik Düzlem	Oluşum		Bilişsel Düzlem
Referanslar	Söylemsel Oluşum		Muhakeme İspat
Bir doğru parçasının orta noktasını bulma Bir doğru parçasına dikme indirme bilgisi Özel üçgenler bilgisi Dik üçgen bilgisi Üçgende yardımcı eleman bilgisi Üçgenlerde benzerlik bilgisi İkizkenar üçgen bilgisi Çemberin geometrik tanımı	Söylemsel Kavrayış	Kenar orta dikmenin yükseklik ve kenarortay ile ilişkisi Dik üçgende kenar orta dikmeye bağılı oluşan benzer üçgenlerin oluştuğu bilgisi Dik üçgende kenar orta dikme çizimine bağılı oluşan ikizkenar üçgen bilgisi Bir üçgende kenar orta dikmelerin bir noktada kesişeceği bilgisi Dik üçgende kenar orta dikmelerin kesişim noktasının hipotenüs üzerinde olduğu bilgisi Üçgende kenar orta dikmelerin kesişim noktasının üçgenin köşelerine eşit uzaklıkta olduğu bilgisi Dik üçgende hipotenüse çizilen kenarortay uzunluğunun hipotenüs uzunluğunun yarısına eşit olduğu bilgisi Üçgende kenar orta dikmelerin kesişim noktasının çevrel çemberin merkezi olduğu bilgisi Düzlemde doğrusal olmayan herhangi üç noktadan geçen bir çember çizilebileceği bilgisi	
Söyleme bağılı işlevsel kavrayış			
Kenar orta dikmelerin farklı kesişim durumlarının aranması (üçgenin içinde, üzerinde, dışında) Tüm üçgenler için kenar orta dikmelerin köşelere eşit uzaklıkta olma durumunun aranması Bir üçgende kenar orta dikmelerin kesişim noktasının üçgenin çevrel çemberinin merkezi olduğunun aranması Üçgen oluşturma durumu olan üç noktadan geçen bir çember çizilebileceği bilgisinin aranması			

Söyleme bağılı işlevsel kavrayış öğrencilerin matematiksel ilişkilerin keşfi veya doğrulama amacıyla şekil üzerinde manipölasyon gerçekleştirdiği, bu amaçla çizimler gerçekleştirdiği aşamadır. Bu aşamada amaç nicel bir sonuca ulaşmaktan ziyade

problemden elde edilen sonucun ve çıkarımın doğruluğunun keşfedilmesi ve matematiksel bir fikrin kontrol edilmesidir.

Araştırma bulgularının elde edildiği analiz bu aşamalar tamamlandıktan sonra gerçekleştirilmiştir. Araştırma verileri on problem üzerinden elde edilmiştir. Analiz kısmında ön analize tabi tutulan problemlerden beş tanesi araştırmaya sağlayacağı katkı göz önünde bulundurularak bulguları detaylandırılmak üzere seçilmiştir. Bu problemler bulgulara sunulduğu sıra ile Otlak Alanı, Kabilenin Güneşi, Bungalov Ev, Miras Kalan Tarla ve Bereket Motifi'dir. Verileri semiyotik, enstrümantal ve söylemsel oluşum bulgularını destelemek amacıyla analize tabi tutulan problemler ise Doğum Günü Pastası, Ev için Arazi, Uçurtma Yapımı, Kırık Seramik ve Park Peyzajı olmuştur. Problemlere yönelik bu ayırımının yapılmasında öğrencilerin çalışma uzaylarının belirgin şekilde öne çıkması, çalışmanın doğası, oturum sürecinin ve görüşme verilerinin niteliği gibi faktörler etkili olmuştur.

Detaylı analize tabi tutulan problemlerin analizinde şu aşamalar takip edilmiştir. Problem verileri semiyotik, enstrümantal, söylemsel oluşum ve bu oluşumlara bağlı işlevsel kavrayış başlıkları için analize tabi tutulmuştur. Analizlerin gerçekleştirilmesinde öğrenci çalışma kağıtları, video kayıtlar, görüşme dökümleri, analize tabi tutulan probleme ait analiz tablosu bütüncül olarak ele alınmıştır. Problemin a priori beklentilerine karşılık posteriori sonuçları çalışma uzayının bilişsel düzlem bloğuna kodlanmıştır. Bu kodlamaya ait bulgular öğrenci verileri ile desteklenecek şekilde sunulmuştur. Bulgular öğrenci veya grubun çalışma uzayı verileri üzerinden aktarılmıştır. Tüm problem oturumlarının gruplar ile gerçekleştirilmiş olmasına karşılık bazı grupların toplu, bazı grupların özel yetenekliliğe bağlı bireysel çalışma eğilimi nedeniyle farklılaşma gerçekleşmiştir. Betimsel analiz uygulanan verilerde öğrencilerin çizdiği geometrik şekiller, şekil üzerinde manipülasyonlar, sembolik gösterimler, sözel temsiller, kullandıkları araç-gereç, teorik bilgi, buldukları sayısal sonuç, sonucu doğrulamaları, gerçekleştirdikleri genelleme, kavram yanılgıları, günlük yaşam bağlamını dikkate alma gibi parametreler ele alınmıştır. Öğrenci çizimleri semiyotik, enstrümantal ve söylemsel oluşum süreçlerinin tamamı ile ilişkilendirilerek incelenmiştir. Şekil çizilmesi ve şekil üzerinde gerçekleştirilen eylem verileri işlevsel kavrayış için de analize tabi tutulmuştur. Tüm analizler sonucunda ayrıca veri sunan öğrencilerin düzlemler arası oluşum ve kavrayış yönelimleri belirlenmiştir. Bu yönelimlere bağlı olarak çalışma uzayı ve

düzlemler arası dolaşımın yönelimi belirlenmiştir. Detaylı analize tabi tutulan beş problemin her biri için bir öğrencinin düzlemler arası dolaşımı sunulmuştur.

3.9 Geçerlik ve Güvenirlik

Çalışmanın doğası gereği nitel araştırma yaklaşımı benimsenmiştir. Doğa bilimlerinin aksine nitel araştırmalar güvenirliliği inandırıcılık, özgünlük ve aktarılabilirlik, güvenilirlik ve onaylanabilirlik ile karşılaşmaktadır (Lincoln ve Guba 1985'ten akt. Creswell, 2021, s.248) Bu nedenle güncel çalışmada geçerlik ve güvenirlilik; tutarlılık, tekrar edilebilirlik, inandırıcılık ve aktarabilirlik ile karşılaşmaktadır. Geçerlik, saydamlık da nitel bir çalışmanın geçerlik ve güvenirliliğinin okuyucu tarafından değerlendirilmesine olanak vermektedir. Bu araştırmada saydamlık sağlanması amacıyla elde edilen veriler gerekli görüldüğü takdirde dış değerlendirmeciler tarafından ulaşılabilecek şekilde arşivlendirilmiştir.

Yöntemsel çeşitleme amacıyla birden fazla veri toplama yöntemi kullanılmıştır. Veriler; çalışma kağıtları, kamera kayıtları, gözlem notları, görüşme ve araştırmacı günlüğü ile çeşitlendirilmiştir. Veri kaynağı çeşitlendirmesinin katılımcı öğrencilerin farklı cinsiyetten olmaları, devlet-özel okulda öğrenim görme ile karşılandığı söylenebilir. Çalışmanın kuramsal çeşitlendirilmesi Şekilsel Kavrayış ve MWS Teorilerinin birlikteliği ile elde edilmiştir. Bu sayede elde edilen veriler iki teorinin temel kavramları üzerinden değerlendirilme olanağı bulmuştur. İç geçerlik nitel çalışmalarda inandırıcılık ile karşılaşmaktadır. Nitel araştırmalarda inandırıcılığı sağlamak için yoğun ve uzun süreli katılım, çeşitleme ve veri çeşitlemeden yararlanılır (Güler, Halıcioğlu ve Taşgın,2015). Verilerin elde edildiği kaynak veya ortamla uzun süreli etkileşim gerekmektedir. Bu çalışmada araştırmacı destek eğitim uygulamaları, problem çözme oturumlarını ve görüşmeleri kendi öğrencileri ile gerçekleştirmiştir. Araştırmacı veri kaynağı ile uzun süreli etkileşim içerisinde bulunmuş, öğrencilere yabancı olmadığı içinde araştırma ortamının doğal bir gözlemcisi olmuştur. Dış geçerlik olarak ifade edilen kavram aslında nitel araştırmalarda analitik genelleme ile de karşılaşmaktadır. Bu çalışmada aktarılabilirlik olarak ifade edilecek kavram çalışmadan elde edilen sonuçların benzerlik taşıyan birim, mekan ve durumlar için genellenmesidir (Akar, 2019). Bu çalışma sonuçlarının benzer gruplar için de fikir vermesi olarak yorumlanabilir. Dolayısı ile araştırma örnekleminin iyi tanımlanması, araştırma adımlarının detaylı betimlenmesi aktarılabilirliği desteklemektedir. Mevcut çalışmada uygulanan prosedür araştırmanın

tasarımı ve yürütülmesi başlığı altında etraflıca ifade edilmiştir. Araştırma katılımcılarının özellikleri, bilişsel yeterlikleri tanımlanmıştır. Ayrıca araştırma katılımcı grubunun bilişsel düzeyleri tüm Türkiye’de aynı kriterlere bağlı ölçülmektedir. Dolayısı ile araştırmanın aktarılabilirliği ile ilgili yeterliğin sağlandığını ifade edebiliriz.

Nitel çalışmalarda güvenilirlik çalışmanın benzer şartlarda tekrarlanamamasına bağlı olarak nicel çalışmalardan prensipte ayrılmaktadır. Çünkü aynı veri grubundan aynı verileri elde edip benzer sonuçlar bulmayı gerektirmektedir. Ancak yorumlayıcı paradigma bağlamında durumu bir metafor ile açıklayacak olursak aynı nehirde iki kez yıkanamayacağını ifade edebiliriz. Nitel araştırmalarda güvenilirlik için tutarlık ve teyit edilebilirlik kavramları kullanılmaktadır. İç güvenilirlik yani tutarlık için çalışma verilerinin mümkün olan en somut ve anlaşılır formda sunulması, araştırmacı sayısının artırılması, verilerin doğrulanması, kavramsal çerçevenin iyi tanımlanması gerekmektedir. Araştırmanın analiz sürecine yön veren ölçütler oluşum ve kavrayış süreçleri için detaylandırılmıştır. Ayrıca bu ölçütleri ve teorik çerçeveyi esas alan problemlere özgü analiz tabloları ile araştırma sürecinin analiz kriterleri araştırmada sunulmuştur.

Araştırma problemlerinin geliştirilmesi, verilerin analizi aşamasında uzman görüşlerine başvurulmuştur. Araştırma bulguları birden fazla kaynak aracılığı ile elde edilmiştir. Katılımcılarla gerçekleştirilen görüşmeler sırasında öğrencilere araştırmacının gözlem notları görüşme soruları içine dahil edilerek teyit ettirilmiş, dolayısı ile katılımcı geri bildirimini alınmıştır. Dış güvenilirlik araştırmanın teyit edilebilirliği ile ilişkilidir. Teyit edilebilirlik için araştırmacının süreçteki rolü ifade edilmelidir. Okuyucunun çalışma sonuçlarını araştırmacının gözüyle yorumlaması ile dışarıdan bir okuyucu olarak yorumlaması farkının giderilmesi gerekmektedir. Araştırmacının rolü, eğitimsel geçmişi, ilgi alanı dışında tez yazım içeriği üzerinden matematiksel çalışmaya bakış açısı sunulmuştur. Böylece okuyucuya araştırmanın tasarlanmasından, verilerin yorumlanmasına kadar araştırmacının bakış açısı sunulmuştur. Geçerlik ve güvenilirlik için gerçekleştirilen bu uygulamalar dışında araştırma verilerinin analizi için kullanılan çerçeve eklerde sunulmuştur. Çerçevede yer alan a priori beklentiler epistemolojik temellere dayandırıldığı, araştırmacının yorumu dışında olduğu için geçerlik ve güvenilirlik açısından çalışmanın niteliğini artırmaktadır.

Araştırma problemlerinin geliştirilmesinde desteği alınan uzmanların özellikleri ve araştırmaya katkıları Tablo 3.14’te verilmiştir.

Tablo 3.14

Araştırma Problemlerinde Destek Alınan Uzmanların Özellikleri

Unvan	Kurum	Araştırmaya Katkısı
Prof. Dr.	Devlet üniversitesi Akademisyen	Araç gereç kullanımına yönelik destek eğitim içeriğinin değerlendirilmesi Uygulama problemlerinin araştırmaya göre şekillendirilmesi Analiz çerçevelerinin uygunluk çalışmaları
Prof. Dr.	Devlet üniversitesi Akademisyen	Uygulama problemlerinin araştırma için uygunluğunun değerlendirilmesi
Prof. Dr.	Devlet üniversitesi Akademisyen	Uygulama problemlerinin matematiksel açıdan uygunluğunun değerlendirilmesi
Dr. Başöğretmen	BİLSEM –matematik öğretmeni	Uygulama problemlerinin geçerlik- güvenirlik çalışmaları
Uzman Öğretmen (Doktora öğrencisi)	BİLSEM-matematik öğretmeni	Uygulama problemlerinin geçerlik- güvenirlik çalışmaları
Uzman Öğretmen (Doktora öğrencisi)	BİLSEM-matematik öğretmeni	Uygulama problemlerinin geçerlik- güvenirlik çalışmaları
Uzman Öğretmen (Y.L. mezunu)	BİLSEM-Matematik öğretmeni	Uygulama problemlerinin geçerlik- güvenirlik çalışmaları
Uzman Öğretmen (Y.L öğrencisi)	BİLSEM-Matematik öğretmeni	Uygulama problemlerinin geçerlik- güvenirlik çalışmaları
Uzman Öğretmen (Y.L. mezunu)	Örgün eğitim-matematik öğretmeni	Uygulama problemlerinin geçerlik- güvenirlik çalışmaları
Uzman Öğretmen (Y.L. mezunu)	Örgün eğitim-matematik öğretmeni	Uygulama problemlerinin geçerlik- güvenirlik çalışmaları
Uzman Öğretmen	Örgün eğitim-matematik öğretmeni	Uygulama problemlerinin geçerlik- güvenirlik çalışmaları

3.10 Uygulama Problemleri Analiz A priori

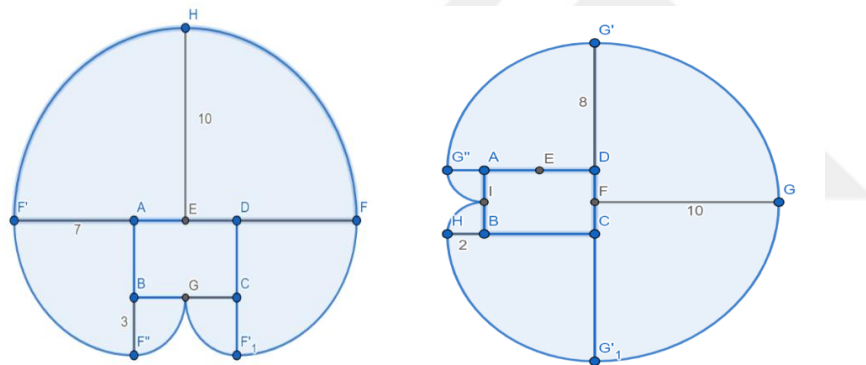
Bu bölümde problemlerin analiz tablolarında yer alan epistemolojik düzlem ve oluşumları yansıtan çözüm süreçlerine yer verilmektedir. Analiz a priori ile problemlerde kullanılması beklenen teorik yapılar, artefektlerin potansiyelleri, öğrencilerin izleyebilecekleri matematiksel çalışma yolu ve çözüm süreci sonunda ulaşmaları beklenen matematiksel ilişkiler ele alınmıştır.

3.10.1 Otlak Alanı problemi

Problem Durumu: 6x4 metrelik bir dikdörtgen kulübeye dışarıdan bir keçi bağlanmaktadır. Bu keçinin ipi 10 metre uzunluktadır. Kulübe dışında tüm alan otlamak için uygundur. Keçinin ipinin uzun kenarın orta noktasına bağlanması ile kısa kenarın orta noktasına bağlanması durumlarına bağlı oluşacak daire dilimlerinin alanlarının karşılaştırılması istenmektedir.

Eylem 2-3: Sırası ile dikdörtgenin uzun kenarının orta noktasını merkez kabul eden daire dilimlerini ve kısa kenarın orta noktasını merkez kabul eden daire dilimlerinin çizilmesi beklenmektedir. Şekil 3.9’da bu iki eylem için oluşması beklenen çizim Geogebra ile örneklendirilmiştir. Öğrenci çizimleri manuel gerçekleştirebilir.

Eylem 2-3'te Öğrenciden Beklenen Çizimler



Eylem 5: Bu aşamada öğrenci problemde ifade edilen durumlar dışında dikdörtgen üzerinde farklı bir noktaya bağlanma durumunda daire dilimlerinin alanlarını hesaplayabilir. Hesaplama gerçekleştirmeden yarıçapta meydana gelen değişikliklere odaklanarak değerlendirme yapılabilir. Bu değerlendirme sonucunda dikdörtgenin köşe noktasına bağlama durumunun en büyük otlama alanını sağladığı sonucu elde edilebilir.

3.10.2 Kabilenin Güneşi problemi

Problem Durumu: 6 m, 8 m, 10 m kenar uzunluklarına sahip üçgende köşelere eşit uzaklıkta olan noktanın bulunması, bu noktanın köşelere olan uzaklığının hesaplanması istenmektedir. Öğrencilerin bu noktanın konumunu belirlemeleri için kenar orta dikmeleri çizmeleri beklenmektedir.

Bu problemde öğrencinin çözüm için izlemesi gereken eylem adımları şu şekilde tanımlanmıştır:

Eylem 1: Verilen uzunluklara sahip dik üçgenin çizilmesi beklenmektedir. Öğrenci teorik bilgiye bağlı olarak üçgenin dik olduğunu yapılandırıp manuel çizimle dik üçgen çizebilir. Üç kenar uzunluğu bilinen üçgeni araç ile (cetvel-pergel, Geogebra) çizebilir.

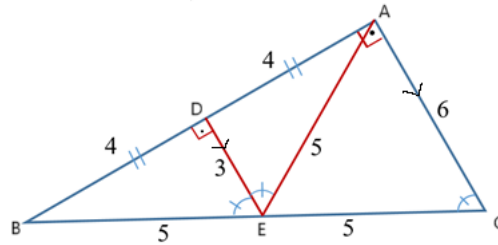
Eylem 2: Çizilen üçgenin kenarlarına ait kenar orta dikmelerin inşa edilmesi beklenmektedir. Kenar orta dikme çizimleri manuel veya araç desteği ile gerçekleştirilebilir.

Eylem 3: Bu aşamada kenar orta dikme çizimine bağlı teorik olarak benzerlik ilişkisi kurulabilir. Kesişim noktasının hipotenüs üzerinde olduğu açılara bağlı yapılandırılabilir. Kenar orta dikmeler araç ile çizilerek kesişim noktası bulunabilir.

Eylem 4: Kesişim noktası ile köşeler arası mesafe ikizkenar üçgen, Pisagor bağıntısı ile 5 m olarak belirlenebilir. Ölçüm için araç kullanılabilir. Teorik çözüme yönelik çizim Şekil 3.10'da örneklendirilmiştir.

Şekil 3.10

Teorik Çözüme (Benzer Üçgenler) Bağlı Gerçekleştirilen Çizim



Eylem 5: Belirlenen bu noktanın köşelere eşit uzaklıkta olmasına bağlı yarıçap olduğu ifade edilebilir. Öğrenci üçgenin köşelerinden geçen çemberi yapılandırabilir.

3.10.3 Bungalov Ev problemi

Problem Durumu: 6m ve 10 m ayrıt uzunluğundaki dikdörtgen yüzey üzerine konumlandırılmış ikizkenar üçgen prizmanın yapılandırılması, diğer yüzeylerin verilen ayrıt uzunluklarına göre yerleştirilmesi istenmektedir. Diğer yüzeylerin bir ayrıtı 5 m olan iki eş dikdörtgen, iki tane eş ikizkenar üçgen olduğu ve taban yüksekliğinin 4 m olduğu verilmiştir. Öğrencilerden evin yüzey alanı ve hacmini hesaplamaları beklenmektedir.

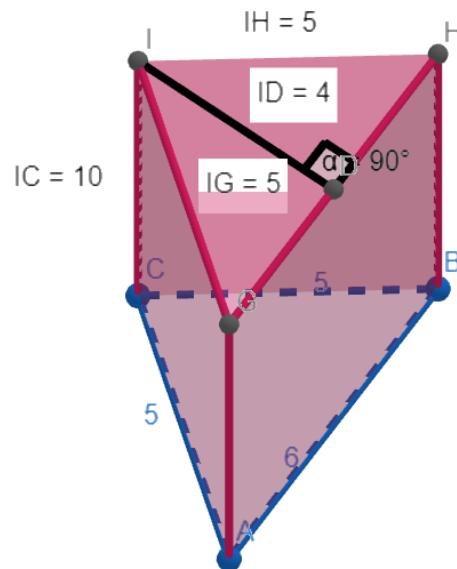
Bu problemde öğrencinin çözüm için izlemesi gereken eylem adımları şu şekilde tanımlanmıştır:

Eylem 1: Verilen üç dikdörtgen ve iki üçgen yüzeyin üçgen prizmanın yüzeyleri olduğunun belirlenmesi beklenmektedir.

Eylem 2: Eş dikdörtgenlerin 5 m olan ayrıtlarının taban olan 6x10 metrelik dikdörtgenin 6 metre olan kenara yerleştirilmesi sonucunda ayrıtları 5m-5m-6m olan iki tane ikizkenar üçgenin elde edilmesi beklenmektedir. Dikdörtgenlerin yerleştirilmesinde üçgen eşitsizliği referans olarak kullanılabilir. Öğrenciler üçgen prizmanın oluşturulması ve yüzeylerin çizimi için araç desteği alabilir. Geogebra 3B araç kullanımı gerçekleştirilebilir. Geogebra ile oluşturulması beklenen örnek Şekil 3.11’de sunulmuştur.

Şekil 3.11

Geogebra ile Gerçekleşmesi Beklenen Çizim Örneği



Eylem 3: Baca yüksekliği olarak verilen yüksekliğin ikizkenar üçgende yardımcı eleman bağlantısına göre bulunabileceğinin fark edilmesi beklenmektedir. Öğrenciler problemde

verilen bu yükseklikten dikdörtgenlerin yerleştirilmesi sırasında yardım alabilir veya problemde fazla bilgi olduğunu ifade edebilirler.

Eylem 4: Dikdörtgen ve üçgenlerin alanlarını hesaplayarak yüzey alanını hesaplayacakları düşünülmektedir. Alan hesaplaması Geogebra'nın alan ölçme aracı ile gerçekleştirilebilir.

Eylem 5: Üçgen prizmanın oluşturulmasında Geogebra'dan yararlanıldıysa hacim ölçme aracı kullanılabilir. Manuel çizim ile oluşturulan şekil üzerinden taban ilişkisi teorik olarak yapılandırılabilir. Prizmanın dikdörtgen yüzeyi veya üçgen yüzeyi taban olarak kullanılabilir. Bu iki durumda da dikdörtgen prizmanın hacim bağıntısı duruma göre uyarlanmalıdır. Bu uyarlamalarda prizmaların hacim bağıntısının taban alanı ve yükseklik ile ilişkisinin keşfedilmesi nihai amaçtır.

3.10.4 Miras Kalan Tarla problemi

Problem Durumu: 180 m, 200 m, 340 m kenar uzunluğuna sahip üçgenin uzun kenarı üzerinden alanları eş iki üçgene ayrılması, uzun kenara ait kenarortayın çizilmesi ve üçgene ait alanının bulunması istenmektedir.

Bu problemde öğrencinin çözüm için izlemesi gereken eylem adımları şu şekilde tanımlanmıştır:

Eylem 1: Üçgenin kenar uzunluklarının birbirinden farklı olmasına bağlı olarak çeşitkenar üçgen temsili oluşturulması gerekmektedir.

Eylem 2: Verilen uzunluklara sahip üçgenin dik açılı olup olmadığının Pisagor bağıntısı ile kontrol edilmesi beklenmektedir. Bu kontrol sonrasında üçgende kenar açı ilişkisi kurularak geniş açılı üçgen çizimi gerçekleştirilmelidir.

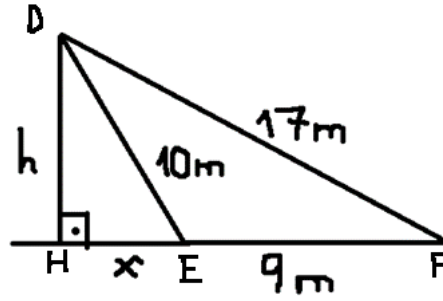
Eylem 3: Teorik doğrulama dışında üç kenarı bilinen üçgenin inşa adımları izlenerek üçgen cetvel pergel veya Geogebra ile çizilebilir. Çizimlerin gerçekleştirilmesi sırasında üç kenar uzunluğu aynı oranda küçültülebilir.

Etkinlik 4: Alanı uzun kenarı referans alarak iki eş parçaya ayıracak doğru parçasının kenarortay olduğu keşfedilmelidir. Kenarortay manuel çizim veya araç ile çizilebilir. Kenarortayın yükseklik ve taban uzunluğu birbirine eşit iki üçgensel bölge ortaya çıkardığının yapılandırılması beklenmektedir.

Etkinlik 5: Üçgenin çiziminde araç desteği alındıysa yükseklik cetvel ile ölçülerek alan hesaplanabilir veya Geogebra alan ölçme aracından destek alınabilir. Üçgenin alanının hesaplanması için teorik olarak Pisagor bağıntısından yararlanılabilir. Teorik olarak alanın hesaplanmasında üçgende herhangi bir kenara ait yükseklik kullanılabilir. Hesaplamalar sırasında küçültme oranının dikkate alınması, alan için bu oranının karesinin kullanılması beklenmektedir. Teorik çözüme yönelik örnek çizim Şekil 3.12’de verilmiştir.

Şekil 3.12

Teorik Çözüme Yönelik Örnek Çizim



3.10.5 Bereket Motifi problemi

Problem Durumu: Kenar uzunluğu 5 cm, alanı 20 cm^2 olan eşkenar dörtgenin kenarlarına 4 cm uzaklıkta, dörtgenin dışından çizilen paralel doğrular ile yeni bir eşkenar dörtgen elde ediliyor. Oluşan yeni eşkenar dörtgenin alanının hesaplanması istenmektedir.

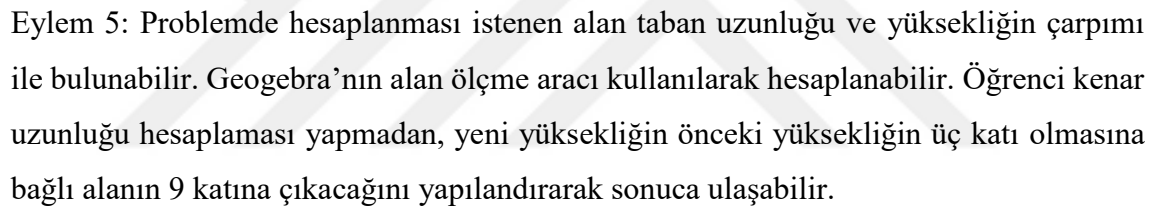
Bu problemde öğrencinin çözüm için izlemesi gereken eylem adımları şu şekilde tanımlanmıştır:

Eylem 1: Bir kenar uzunluğu 5 cm olan eşkenar dörtgen çizilmesi beklenmektedir. Eşkenar dörtgen manuel veya araç desteği ile çizilebilir.

Eylem 2: Çizilen eşkenar dörtgenin kenarlarına paralel dört doğrunun çizilmesi ile benzer eşkenar dörtgen elde edilmelidir. Paralel doğruların kenarlara olan uzaklığının belirlenmesinde cetvel, Geogebra’dan yararlanılabilir. Araç desteği ile çizimler gerçekleştirilebilir.

Eylem 3: Eşkenar dörtgenin bir paralelkenar olmasına bağlı olarak yükseklik 4 cm olarak hesaplanmalıdır. Yükseklik araç ile ölçülebilir.

Şekil 3.13



Problem Durumu: 30x30x8 cm ebatlarında 3 kare prizma ve pasta kreması ile küp elde edildiği ifade edilmiştir. Öğrencinin metinde gerçekleşen ifadelere göre 30x30x30 cm ebatlarındaki küpü yapılandırması beklenmektedir. Sonrasında küpün içerisine yerleştirilme şekli tanımlanan cisim köşegenlerinin konumunu belirleyip uzunluklarını hesaplamaları istenmektedir.

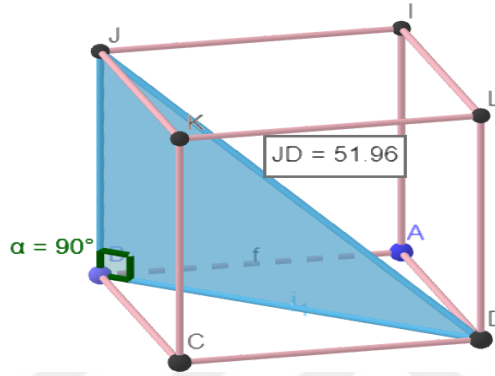
Eylem 1: 30x30x8 cm ebatlarında kare prizmalar ve krema ile 30x30x30 cm ebatlarında küp elde edileceği belirlenmelidir. Öğrenci bu küpü manuel olarak çizebilir veya Geogebra ile çizim gerçekleştirebilir.

95

Eylem 3: Cisim köşegenini hipotenüs kabul eden küpün bir ayrıtı ve yüzey köşegenin oluşturduğu dik açılı üçgenin yapılandırılması beklenmektedir. Bu üçgen manuel çizimde veya Geogebra ile gerçekleşen çizimde görselleştirilebilir. Geogebra ile gerçekleştirilmesi beklenen çizim Şekil 3.14’te sunulmuştur.

Şekil 3.14

Geogebra ile Gerçekleştirilecek Çizim Örneği



Eylem 4: Cisim köşegeninin uzunluğu Pisagor bağıntısı ile hesaplanabilir. Geogebra’nın uzaklık veya uzunluk ölçme aracı ile ölçüm gerçekleştirilebilir.

Eylem 5: Problemin çözümü sonrasında küpün cisim köşegeninin uzunluğunun a birim uzunluğa sahip küp için $a\sqrt{3}$ olduğunun yapılandırılması istenmektedir. Bu ilişkiden hareketle ayrıtları a,b,c birim olan dikdörtgen prizmanın cisim köşegen uzunluğu $a^2+b^2+c^2$ ifadesinin karekökü olarak ifade edilebilir.

3.10.7 Kırık Seramik problemi

Problem durumu: Eni 20 cm boyu 30 cm olan dikdörtgen bir levha iç bölgesindeki bir noktadan köşelere çizilen doğru parçaları ile dört üçgensel parçaya ayrılmaktadır. Bu nokta uzun kenarlardan birine 8 cm, kısa kenarlardan birine 12 cm uzaklıktadır. Oluşan üçgen parçaların ikişerli şekilde iki kardeş arasında eşit paylaşıldığı ifade edilmiştir. Bu durumun mümkün olup olmadığının belirlenmesi istenmektedir.

Bu problemde öğrencinin çözüm için izlemesi gereken eylem adımları şu şekilde tanımlanmıştır:

Eylem 1: Dikdörtgen levhayı temsil eden dikdörtgen çizilmesi beklenmektedir. Dikdörtgen manuel veya araç ile çizilebilir.

Eylem 2: Dikdörtgenin iç bölgesinde belirlenen noktayı köşelerle birleştiren doğru parçaları çizilmesi beklenmektedir.

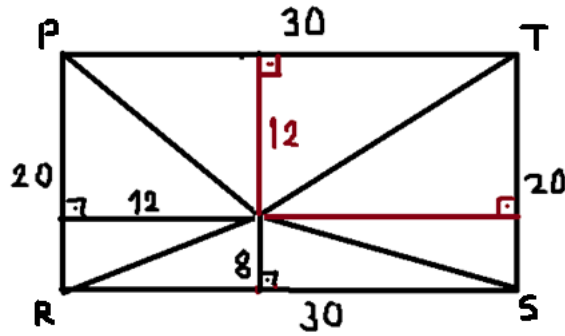
Eylem 3: İki kenara uzaklığı verilen noktanın diğer kenarlara olan uzaklığının belirlenmesi beklenmektedir.

Eylem 4: Taban uzunluğu ve yüksekliği belirlenen üçgenlerin alanlarının hesaplanması istenmektedir. Bulunan sayısal sonuçlara bağlı üçgen paylaşımının nasıl yapılması gerektiğinin ifade edilmesi istenmektedir.

Eylem 5: Çatlama noktası olarak ifade edilen noktanın dikdörtgen içerisinde dört farklı konumda oluşabileceği ifade edilebilir. Öğrenciler dikdörtgen içerisinde alınan herhangi bir noktadan köşelere çizilen doğru parçaları ile oluşturulan üçgenlerden karşılıklı olanların alanları toplamının birbirine eşit olduğunu ifade edebilir. Bu ilişkiyi teorik olarak doğrulayabilir veya sayısal değerler vererek kontrol edebilir. Geogebra ile dikdörtgen içinde noktayı sürükleyerek doğrulama gerçekleştirebilir. Problemin çözümü sırasında gerçekleşmesi beklenen manuel çizim Şekil 3.15'te örneklendirilmiştir.

Şekil 3.15

Manuel Çizim Örneği



3.10.8 Ev için Arazi problemi

Problem durumu: Kenar uzunlukları ayak uzunluğu cinsinden sırası ile 32, 64, 100, 76 ayak olarak verilen bir dörtgenin alanının hesaplanması istenmektedir. Dört ayak uzunluğunun yaklaşık bir metre olduğu ifade edilmiştir. İlk aşamada sadece bu bilgi verilerek arazi içine inşa edilmesi planlanan yapılar için arazinin yeterli olup olmadığının belirlenmesi istenmektedir. Arazinin alanının hesaplanabilmesi için dörtgende hiçbir kenarın birbirine dik olmadığı, paralel olan kenarlar arası dik uzaklığın 60 ayak olduğu bilgisi verilmiştir.

Bu problemde öğrencinin çözüm için izlemesi gereken eylem adımları şu şekilde tanımlanmıştır:

Eylem 1: Öğrencinin adım uzunlukları cinsinden verilen dörtgenin kenarlarını problemde verilen bilgiye dayalı olarak 8m, 16 m, 25 m ve 19 m olarak belirlemesi beklenmektedir.

Eylem 2: Paralel kenarlar olduğu ifade edildiği için ve kenar uzunluklarının birbirinden farklı olmasına bağlı yamuk çizilmelidir. Bu noktada gerçekleşecek çizimin manuel olması beklenmektedir.

Eylem 3: Çizilen yamuğun birbirine paralel olan kenarlarının belirlenmesi için 15 m olarak dönüştürülen yükseklik kullanılmalıdır. Üçgende kenar açı özellikleri yardımıyla paralel olan kenarların 8 m ve 25 metrelik kenarlar olduğu yapılandırılmalıdır.

Eylem 4: Yamuk üzerine kenar uzunlukları yerleştirildikten sonra alanın hesaplanması istenmektedir. Yamuğun alanı doğrudan yamuğun alan bağıntısı ile hesaplanabilir. Yamuk parçalara ayrılabilir. Yamuk Geogebra ile çizildiyse alan yazılımın alan ölçme aracı ile belirlenebilir.

Eylem 5: Sadece ardışık kenar uzunlukları verilen birden fazla dörtgen olduğu ifade edilebilir. Bu durumda ilk durumda verilen bilginin yetersiz olduğunun ifade edilmesi beklenmektedir. Belirli bir dörtgenin çizilmesi için en az beş bilgi verilmesi gerektiği yapılandırılabilir.

3.10.9 Park Peyzajı problemi

Problem durumu: Peyzaj mimarı olan Ebru'nun park projesi için iki üçgenin üç kenar uzunluğunu da bilmesi gerekmektedir. Ebru'nun farklı bir ölçüm tekniği kullanan arkadaşı birinci üçgenin iki kenarının uzunluğu 6m ve 10 metre olarak ölçmüştür. Bu üçgenin üçüncü kenar uzunluğunu ölçmek yerine 10 m uzunluğundaki kenara ait kenarortayı 5 m olarak belirlemiştir. İkinci üçgenin ise iki kenar uzunluğunu 5 m ve 8 m olarak belirlemiştir. Bu üçgende 8 m uzunluğundaki kenara ait yüksekliğin 4 m olduğunu ve üçgenin içinde çizildiği bilinmektedir. Bu iki üçgenin verilmeyen kenar uzunluklarının hesaplanması istenmektedir.

Bu problemde öğrencinin çözüm için izlemesi gereken eylem adımları iki durum için ayrı ayrı şu şekilde tanımlanmıştır:

Birinci üçgene ait eylem adımları:

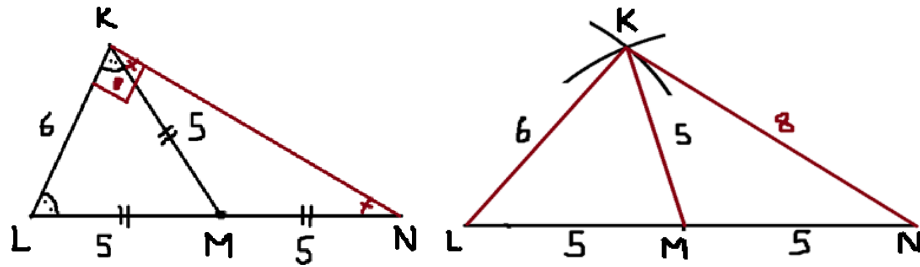
Eylem 1: Uzunluğu 10 cm olan kenarın çizilmesi, orta noktasının belirlenmesi beklenmektedir. Bu kenarın bir ucundan 6 m'lik diğer kenarın çizilip bu kenarın boşa kalan ucundan 10 m'lik kenarın orta noktasına kenarortay çizilebilir. Öğrenci bu çizimi gerçekleştirmeden kenarortayın ortaya çıkardığı 6 m-5 m-5 m uzunluğa sahip ikizkenar üçgeni fark edebilir. Her iki durumda da beklenen görselleştirme Şekil 3.16'da örneklendirilmiştir (ilk şekilde siyah renk ile çizilmiştir).

Eylem 2: Uzunluğunun hesaplanması istenen üçüncü kenar çizilerek şekil tamamlanabilir, oluşan yeni ikizkenar üçgenin açı özellikleri şekil üzerine yansıtılabilir. Birinci ve ikinci eylemlerin tamamı cetvel, pergel ve Geogebra ile gerçekleştirilebilir.

Eylem 3: Üçgen içerisinde elde edilen ikişerli eş olan dört açının toplamının 180° olmasına bağlı olarak dik açılı üçgen üzerinde çalışıldığı belirlenmelidir. Dik açılı üçgende Pisagor bağıntısı ile aranan uzunluğun 8 m olduğu belirlenmelidir. Tüm eylemler araç desteği ile gerçekleştirilebilir. Şekil 3.16'da araç ile gerçekleştirilen geometrik inşa örneklendirilmiştir (sağdaki çizim).

Şekil 3.16

Manuel ve Cetvel-Pergel Çizim Örneği



Eylem 4: Dik açılı üçgende hipotenüse çizilen kenarortayın uzunluğunun hipotenüsün yarısına eşit olduğu ifade edilebilir.

İkinci üçgene ait eylem adımları:

Eylem 1: Uzunluğu 8 m olan kenar çizilerek bu kenarın herhangi bir noktasından 4 metrelik yükseklik çizilir.

Eylem 2: Yüksekliğin diğer ucu ile 8 m uzunluğundaki kenarın bir ucu birleştirilerek 5 m uzunluğundaki kenar çizilmiş olur. Burada yüksekliğe bağlı dik açılı üçgen elde edilir. Dik açılı üçgene bağlı oluşumlar cetvel pergel veya Geogebra ile gerçekleştirilebilir.

Eylem 3: Oluşan dik üçgende Pisagor bağıntısı ile yüksekliğin kenar üzerinde ayırdığı parça uzunluklarının 3 m ve 5 m olarak hesaplanması beklenmektedir.

Eylem 4: Uzunluğunu bulmaya çalıştığımız kenar uzunluğu dik kenarların uzunlukları 4m ve 5m olan dik üçgenin hipotenüsü olduğu için yine Pisagor bağıntısından yararlanılarak $\sqrt{41}$ olarak hesaplanmalıdır. Öğrenci sonucu yaklaşık değer ile ifade edebilir. Eğer çizimde araç desteği alındıysa üçüncü kenar uzunluğu cetvel veya Geogebra uzaklık veya uzunluk ölçme aracı ile ölçülebilir.

Problemin birinci ve ikinci durumu için çözüm tamamlandıktan sonra iki kenar uzunluğu ve bir yardımcı elemanı bilinen üçgenin çizilebildiğinin ifade edilmesi nihai amaçtır.

3.10.10 Uçurtma Yapımı problemi

Problem durumu: 60 cm ve 90 cm uzunluğunda iki çita uçurtma yapımında kullanılacaktır. Uçurtma yapımı yönergesinde çitaların dik kesişmeleri, çitalardan birinin ortalanması gerektiği ifade edilmiştir. Oluşturulan uçurtma iskeletinin köşeleri birleştirilerek kaplandığı ifade edilmiştir. Bu verilere bağlı oluşturulan uçurtmanın yüzey alanının hesaplanması, aynı çitalarla oluşturulan farklı uçurtmaların yüzey alanları ile karşılaştırılması istenmiştir.

Bu problemde öğrencinin çözüm için izlemesi gereken eylem adımları şu şekilde tanımlanmıştır:

Eylem 1: Çitaları yönergeye uygun şekilde yerleşimini temsil etmek amacıyla birbirine dik ve biri ortalanacak şekilde doğru parçalarının çizilmesi beklenmektedir. Doğru parçalarının çizilmesinde cetvel, Geogebra kullanılabilir.

Eylem 2: Doğru parçalarının köşe noktalarını ardışık birleştiren doğru parçaları çizilerek dörtgen elde edilmelidir. Dörtgenin kenar uzunluklarının ikişerli olarak eşit olduğu ifade edilmelidir. Dörtgen Geogebra ile oluşturulabilir.

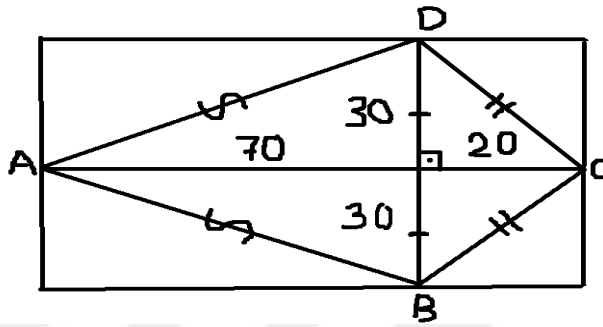
Eylem 3: Dörtgenin alanı üçgenlerin alanları ile hesaplanabilir. Dörtgenin köşelerine teğet olan ve dörtgenin etrafına çizilen dikdörtgenden yararlanılabilir. Geogebra'nın alan ölçme aracı kullanılabilir.

Eylem 4: Uçurtma çitalarının yönergeye uygun farklı kesişim durumlarında alanın değişmediğinin ifade edilmesi beklenmektedir. Bu durumun köşegen uzunluklarının

Eylem 5: Problemin çözümü ile oluşan dörtgenin kenar, köşegen özelliklerinin, eşkenar dörtgen ile benzerlik ve farklılıklarının ortaya konması beklenmektedir. Örnek manuel çizim Şekil 3.17’de sunulmuştur.

Şekil 3.17

Manuel Çizim Örneği



4 BULGULAR

Çalışmanın bu bölümü MWS ve Şekilsel Kavrayış Teorisi çerçevesinden yararlanarak gerçekleştirilen analizler sonucunda özel yetenekli çocukların şekil içermeyen, gerçek yaşam bağlamı içerisinde tasarlanan geometri görevleri sırasındaki geometrik muhakemelerine yönelik bulguları içermektedir. Öğrencilerin matematik çalışma uzaylarına ilişkin çalışma karakterleri semiyotik, araçsal ve söylemsel olarak ele alınacağı için bulgulara ilişkin başlıklar MWS perspektifinde sunulacak, Şekilsel Kavrayış Teorisi ile bulgular desteklenecektir.

Uygulama problemlerinden seçilen beş problem için geometrik muhakemenin semiyotik, enstrümantal ve teorik (söylemsel) boyut bulguları ayrı ayrı verilmiştir. Boyutlara ilişkin bulgular grubun ve grup içindeki öğrencinin verileri ışığında sunulacaktır. Sonrasında on probleme ait veriler üzerinden özel yetenekli öğrencilerin geometrik muhakeme sürecinde ortaya koydukları çalışma uzayının semiyotik, enstrümantal ve söylemsel karakterine yönelik bulgulara yer verilecektir. Muhakeme ve günlük yaşam bağlamı bulguları ayrıca başlıklandırılmıştır. Problemlere ilişkin veriler sunulurken benzer yaklaşım uygulanmaya çalışılmış ancak problemlere ilişkin uzay farklılıkları da bulguların oluşmasına yön vermiştir.

4.1 Problemlerin Matematik Çalışma Uzayı

Bu bölümde belirlenen beş probleme ait çalışma uzayının semiyotik (görsel, sembolik, sözel), enstrümantal ve söylemsel boyutuna ilişkin bulgulara ve işlevsel kavrayış bulgularına yer verilmiştir. Problemlerde öğrencilerin oluşum yönelimleri ve her problem özelinde bir öğrenciye ait düzlemler arası dolaşım sunulmuştur.

4.1.1 Otlak Alanı problemi

Problem çözme oturumu birinci grupta 4 (Ö1,Ö2,Ö3,Ö17), ikinci grupta 3 (Ö5,Ö6, Ö7) ve üçüncü grupta 3 (Ö8,Ö10,Ö11), toplamda 10 öğrencinin katılımı ile gerçekleşmiştir. Öğrenciler problemi çözmeye en ve boy uzunluğu verilen, dikdörtgen olduğu belirtilen kulübeyi çizerek başlamışlardır. Kulübe üzerine sayısal değerler yerleştirilmiştir. Bu çizimin üzerine dikdörtgenin uzun kenarının orta noktasını referans alarak keçinin bağlı olduğu ip temsil edilmiştir. Bu noktadan sonra öğrencilerin gerçekleştirdikleri eylem ve çizimler keçinin kulübe etrafında otlayabileceği alanın keşfedilmesine yönelik gerçekleştirilmiştir. Öğrencilerin çizimlerinin çeşitlendiği kısım oturumun bu bölümü

olmuştur. Öğrencilerin çizimlerinin niteliği, çizimde referans aldıkları parçalar bu bölümde gözlemlenmiştir. Dikdörtgen çizimlerinde verilen sayısal değerlerle orantılı çizimler ve kare formda çizimler gerçekleştiği görülmüştür. Ö11 tarafından otlama alanı deltoid ve kare şeklinde çizilmiştir. Genel olarak öğrenciler oluşan dairesel alanları fark etmişler ve çizimlerine yansıtmışlardır. Oluşan daire dilimlerinin yarıçap uzunlukları konusunda birinci grupta yardımlaşma gerçekleşmiştir. İkinci grup bireysel çözüm gerçekleştirmiştir. Üçüncü grup tam bir grup çalışması gerçekleştirmemiştir. Problemde anlamadıkları noktalarda yardım istemişler, ancak sonrasında bireysel çözüme yönelmişlerdir. Dikdörtgenin köşe noktasının yarıçap uzunluğunda meydana getirdiği kaybın hesaplanması problemin çözülmesinde kritik nokta olmuştur. Tüm gruplar π sayısına üç değerini atayarak hesaplama gerçekleştirmişlerdir. Birinci grup iki bağlama şekli için alanın değiştiğini hesaplamıştır. Bu grupta tüm öğrenciler doğru sayısal sonuca ulaşmıştır. Keçinin birinci bağlama koşullarına göre otlayacağı alanın ikinci bağlama koşullarına oranla daha az olacağı sonucuna ulaşılmıştır. Bu grup ayrıca hangi koşulda otlama alanının en fazla olacağını ifade eden tek grup olmuştur. İkinci grupta sadece Ö6 doğru sonuca ulaşmıştır. Ancak bir genellemeye gitmemiştir. Öğrencilerden Ö5 ve Ö7 otlama alanının sabit kalacağı sonucuna ulaşmıştır. Ö5 dairenin alan formülü ile dairenin çevre formülünü karıştırdığı için otlama alanının aynı kalacağı sonucuna ulaşmıştır. Ö7 ise ip uzunluğu ve kulübenin alanının sabit olduğunu, dolayısı ile otlama alanında bir değişiklik olmayacağını düşünmüştür. Ö11 benzer yorumda bulunmuş ancak grup arkadaşı Ö8'in müdahalesi ile doğru çözüm gerçekleştirmiştir. Ö8'in birinci grupta aynı muhakemeyi gerçekleştirdiği görüşme sırasında belirlenmiştir. Diğer öğrencilerin sayısal sonucu bulmakla yetindikleri belirlenmiştir. Oturumlarda matematiksel araç gereç kullanılmamıştır. Üç grupta da gerçekleştirilen oturumlar çizilen şekiller, problemin çözümüne yönelik yaklaşımlar, elde edilen sonuçlar ve grup dinamiği bakımından çeşitlenmiştir.

4.1.1.1 Otlak alanı problemi semiyotik boyut bulguları

Bu başlık altında Otlak Alanı problemine ilişkin öğrencilerin çözüm sürecinde ortaya koydukları temsillerin epistemolojik (temsil)- bilişsel (görselleştirme) düzlem bileşenleri, semiyotik oluşum ve temsile dayalı işlevsel kavrayış bağlamında elde edilen bulguları sunulmuştur.

Otlak Alanı problemi için epistemolojik düzlem temsil bileşeni; dikdörtgen temsili, orta nokta temsili, yarıçap temsili, daire dilimi temsili, yarım daire temsili, çeyrek daire temsili, dairenin merkezi ve alan temsillerini içermektedir. Bu bileşenler problem özelinde analiz tablosu oluşturulurken belirlenmiş temsillerdir. Önceden belirlenen semiyotik oluşum bileşenleri ve problem çözme oturumu sonucunda elde edilen bilişsel düzlem bileşenleri sonucunda Tablo 4.1 elde edilmiştir.

Tablo 4.1

Otlak Alanı Problemi Öğrencilerin Görselleştirme ve İşlevsel Kavrayış Bulguları

Oluşum		Bilişsel düzlem
Semiyotik Oluşum		Görselleştirme
Görsel Temsil	Kulübe için dikdörtgen çizimi	Dikdörtgen çizimi
	İpin bağlama noktası için orta nokta temsili	Bütün, yarım ve çeyrek daire çizimi
	Dairesel dolaşıma bağlı yarıçap çizimi, yarım daire çizimi, çeyrek daire çizimi	Yarıçap temsili
	Otlama alanı için alan tarama	Orta nokta temsili
		Simetri temelli şekil
Sembolik Temsil	Dikdörtgenin köşe noktaları ile ifade edilmesi	Prototip eşkenar dörtgen çizimi
	Yarıçapın sembolik temsili	Kare çizimi, deltoid
	Dairenin alanı	Tarama yöntemi ile alan
	Daire diliminin sembolik temsili	
Sözel Temsil	Sözel ve günlük konuşma dili ile ifadeler (Örn. Duvarın bu noktasından bu noktasına kadar olan alan	Yarıçapı ip olarak isimlendirme
	İp uzunluğu ile yarıçapın ifade edilmesi)	Dikdörtgenin kulübe olarak isimlendirilmesi
Temsile Bağlı İşlevsel Kavrayış	Uzun kenarın orta noktasını referans alarak yarım, çeyrek daire parçalarının oluşturulması	Düzlemin otlak alanı olarak ifade edilmesi
	Kısa kenarı referans alarak yarım ve çeyrek dairelerin oluşturulması Dikdörtgen üzerinde merkez noktası farklı noktalar referans alınarak yarım daire, çeyrek daire temsillerinin oluşturulması	Noktanın keçi ile temsili

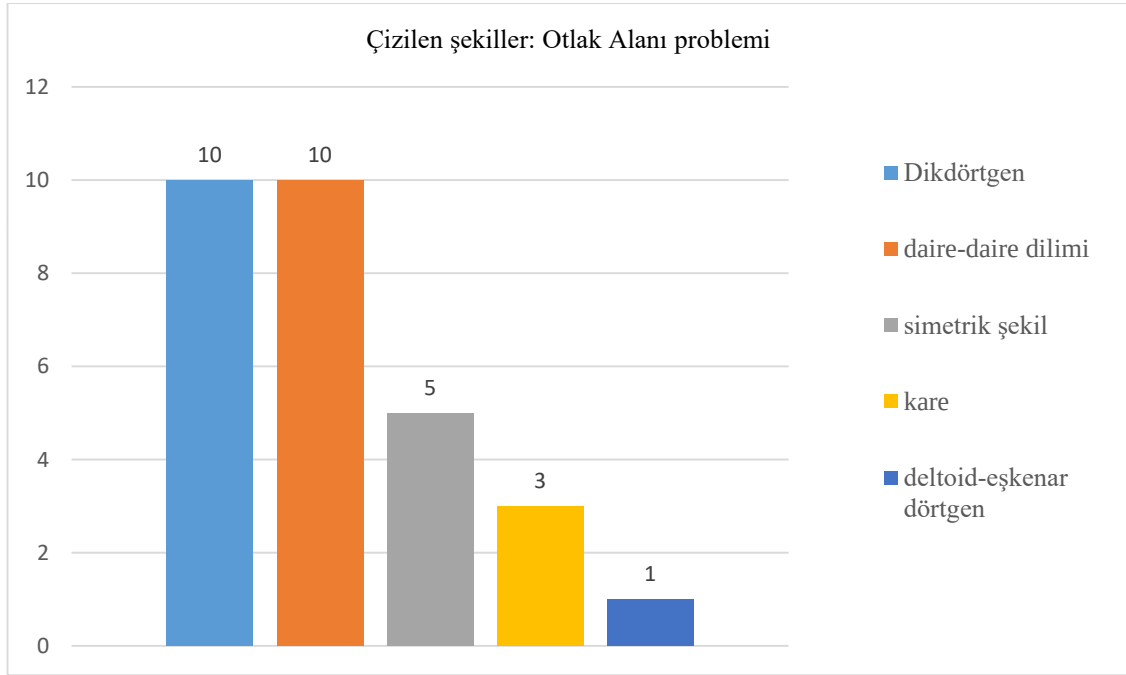
Otlak Alanı problem çözümüne katılan tüm öğrenciler çözüme yönelik geometrik şekil oluşturmuşlardır. Çizilen şekillerin niteliği ve niceliği birbirlerinden farklılık göstermektedir. Tablo 4.1 incelendiğinde öğrencilerin üç temsil biçimini de kullandığı görülmüştür. Probleme ilişkin çalışma uzayı en çok görsel temsillerin en az sembolik temsillerin kullanıldığını ortaya koymuştur.

Görsel temsiller için epistemolojik düzleme bağlı oluşması muhtemel temsiller ile öğrencilerin gerçekte oluşturdukları temsiller arası örtüşme ve farklılaşma olduğu

görülmektedir. Semiyotik oluşum görsel temsil beklentileri karşılanmıştır. Ancak öğrencilerin *eşkenar dörtgen, kare ve simetri temelli şekil* çizimleri bilişsel düzlemin farklılaştığı durumlardır. Öğrenci çalışma kağıtlarında yer alan çizimler ve bu çizimleri gerçekleştiren öğrenci sayısı Şekil 4.1’de sunulmuştur.

Şekil 4.1

Çizilen Şekiller: Otlak Alanı Problemi



Şekil 4.1’de katılımcılardan tamamının problem için gerekli temel şekiller olan dikdörtgen ve daire dilimlerini çizdiği görülmektedir. Bunun yanı sıra öğrencilerden sekizi birden fazla dikdörtgen çizimi gerçekleştirmiştir. Daire dilimi çizimleri dikdörtgen çiziminin üzerine eklenmiştir. Öğrenciler oluşacak otlama alanlarını yarıçapa bağlı olarak bu aşamada çizmişlerdir. İşlevsel kavrayışa bağlı gerçekleşen bu çizimlerin bir kısmında otlama alanlarının simetrik temsilleri gerçekleşmiştir. Öğrenciler problemin hangi geometrik şekil ve nesnelerle ilişkili olduğunu ararken problemi anlamak için gerçek yaşama yönelik temsilleri de çizimlerine eklemiştir. Çizdikleri dikdörtgene “kulübe”, yarıçapa “ip” ve düzleme otlak şeklinde probleme bağlı doğal dil desteğine yer verdikleri görülmüştür. Çalışma kağıtlarında yer alan çizimlerde prototip kare çizimi gözlemlenmesine rağmen öğrenciler problemi kare ile ilişkilendirmemiştir. Dikdörtgen çizimlerini kare formunda gerçekleştiren 3 öğrenci (Ö5, Ö11 ve Ö17) çizimi görsel algılayışın dışında dikdörtgen olarak kabul etmişlerdir. Çizimler üzerindeki öğrenci

işlemleri çizimlere dikdörtgen olarak yaklaşıldığı bulgusunu desteklemektedir. Araştırmacı ve Ö11 arasında görüşme sırasında aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir.

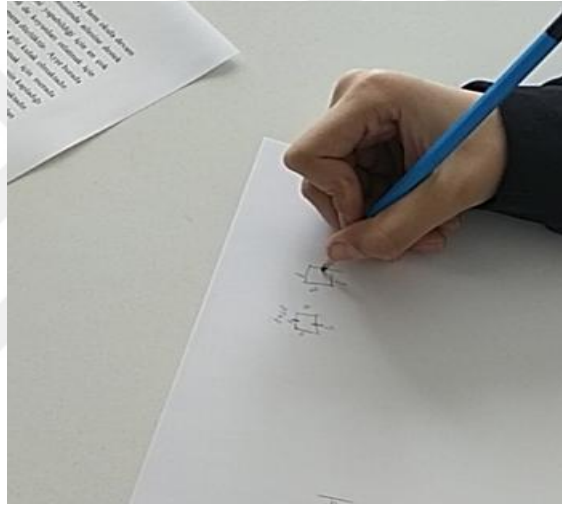
Araştırmacı: Senin çizimlerinde bir de şey var altılar ve dörtler. Birbirine çok yakın kare gibi çizmişsin dikdörtgeni. Şuradaki şimdi dikdörtgen ile kare arasındaki farkı çizime neden yansıtmadın?

Ö11: Bilmem daha hızlı olsun diye öyle baştan savma bir şeyler çizmiştim kareye benzemiş.

Ö11'in dikdörtgeni temsil etmek amacıyla gerçekleştirdiği çizimler Şekil 4.2'de sunulmuştur.

Şekil 4.2

Ö11 Kare Formunda Dikdörtgen Temsili Çizimi

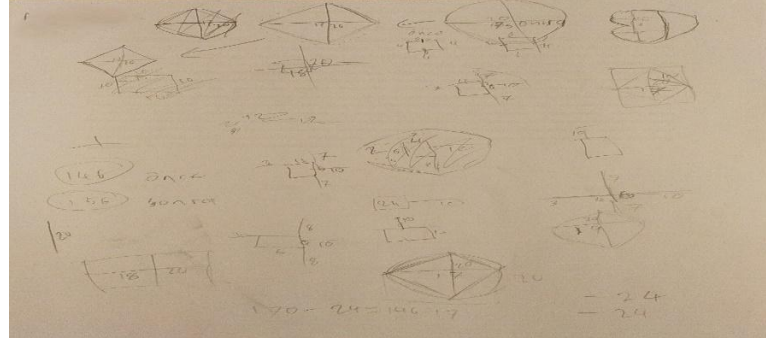


Kaynak: Kamera Kaydı

Öğrenci ile gerçekleştirilen konuşma ve öğrencinin şekil üzerine yerleştirdiği sayısal veriler ilgili şeklin dikdörtgen olarak işlev kazandığını ortaya koymaktadır. Burada öğrenci için şeklin görsel imajı önemini kaybetmiştir. Benzer şekilde iki öğrenci dikdörtgeni kare formunda temsil etmiş, kenarlar üzerine 6 ve 4 sayısal verilerini yerleştirerek şekli dikdörtgen olarak işe koşmuşlardır. Ö11 tüm dikdörtgenleri kare formunda çizme eğilimi göstermiştir. Ancak Ö5 ve Ö17'nin diğer çizimleri dikdörtgen olarak gerçekleşmiştir. Çalışma kağıdında çok sayıda çizim gerçekleştiren Ö11 başlangıçta çözüme yönelik doğru temsiller oluşturmuş, doğru geometrik nesnelerle ilişki kurmuştur. Ancak hatalı muhakeme gerçekleştirdiği için problemi deltoid ile ilişkilendirmiş, çizimlerinde deltoide yer vermiştir. Öğrenciye ait çalışma kağıdından bir kesit Şekil 4.3'te sunulmuştur.

Şekil 4.3

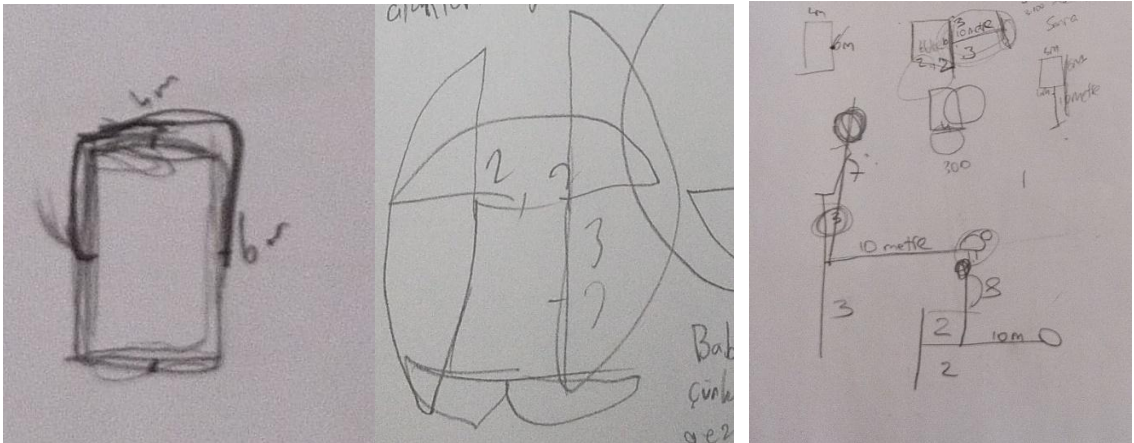
Ö11 Otlak Alanı Problemi Çalışma Kağıdı



Şekil 4.3 incelendiğinde öğrenci çalışma kağıdında benzer ve birbirinden farklılaşan çizimler olduğu görülmektedir. Öğrenci görüşmede çizimleri gerçekleştirme amacını “Daha iyi anlayabilmek için öyle resimli olsun. Belki daha iyi anlarım” şeklinde ifade etmiştir. Öğrencinin görsel kavrayışı işe koştığı bulgusu elde edilmiştir. Diğer taraftan öğrencinin birden fazla çizim yapması çözüme yönelik ipucu araması, doğru temsili keşfetmeye çalışması temsile dayalı işlevsel kavrayışla ilişkilendirilmiştir. Kulübenin kenarlarına bağlı oluşacak daire dilimlerinin temsili aramaya ilişkin gerçekleştirilen çizimler olduğu görülmektedir. Bu bağlamda oturuma katılan öğrencilerin semiyotik süreçte işlevsel kavrayış gerçekleştirdiği belirlenmiştir. Temsile bağlı işlevsel kavrayışa yönelik bazı öğrenci çizimleri Şekil 4.4’te sunulmuştur.

Şekil 4.4

Sırası ile Ö2 Ö5, Ö8’ Ait Çizimler



Kaynak: Çalışma Kağıdı

Şekil 4.4 incelendiğinde işlevsel kavrayışa yönelik eylemlerin öğrenciler arasında çeşitlendiği görülmektedir. Ö2 keçinin bağlı olduğu ipin kulübenin kenarları etrafındaki

hareketini belirlemek amacıyla çizim gerçekleştirmiştir. Ö5'e ait çizimde simetri temelli şekil tüm otlama alanlarını yansıtmaktadır. Bu çizim köşelerde farklı yarıçap uzunluğuna bağlı oluşan iki farklı daire dilimini içermektedir. Ö8 tarafından gerçekleştirilen çizim incelendiğinde dikdörtgenin sadece bir uzun ve bir kısa kenarının temsil edildiği görülmektedir. Yani Ayşe'nin bağlama şekli için kulübenin uzun kenarını temsil eden doğru parçası çizilmiş, orta noktasından 10 m uzunluğunda bir ip ve keçi temsil edilmiştir. Öğrenci dikdörtgenin tamamını çizmek yerine uzun ve kısa kenarlara çapalama gerçekleştirmiştir. Bu çapalama üzerinden çözüme yönelik ilişki aramıştır. Daire dilimlerinin kulübenin etrafında yerleşimi sonucunda simetrik görünümlü bir şekil elde edilmiştir. Görsel temsil kayıtlarında simetri temelli şekil beş öğrenci (Ö1,Ö3, Ö5,Ö11, Ö17) tarafından çizilmiştir. Ö6 ise fark ettiği simetrik olma ilişkisini çizimde temsil etmeden işlemsel olarak kullanmıştır.

Öğrencilerin sembolik temsil kayıtları oldukça sınırlı olmuştur. Çizilen dikdörtgenler, dik açılardan gösterimi, kullanılmasına ve sözel olarak ifade edilmesine rağmen yarıçap temsili, yarım ve çeyrek daire temsillerinde daire diliminin merkez açısı sembolik dille temsil edilmemiştir. Dairenin alan formülü sembolik dil ile ifade edilmiştir. Burada alan formülü problemin çözümünde kullanılmasının dışında görsel bir hatırlatıcı rolü üstlendiği için semiyotik araç olarak da kabul edilmiştir. Sözel temsil öğrencilerin problem çözme oturumunda baskın şekilde kullanılmıştır. Keçinin bağlı olduğu ip yarıçap olarak matematikleştirilmiştir. Çözüm sürecinde söylem içinde ipin uzunluğu olarak ifade edilmiştir. Dikdörtgen ise problemde ifade edildiği gibi kulübe olarak ifade edilmiştir. Sözel temsile birinci grupta gerçekleşen örnek bir konuşma şu şekildedir.

Ö1: Dümdüz gitmiş gibi düşünüp sonra dönüyor gibi mi? ipin 7 metrelik kısmı gidiyor. Sonra da dönüyor

Ö3: Evet. Zaten köşe olduğu için köşeye çarpıp ip yamuluyor.

Ö1: Tamam anladım. Burayı bir yarım daire olarak düşünersek yarıçapı 10 oluyor gibi. Çapı 20. Alanı πr^2 den 300

Ö3: Hayır 300 bölü 2. Yarım daire orası.

Öğrenciler arası diyalog incelendiğinde sözel temsil ile matematiksel dilin birlikte kullanıldığı görülmektedir. Buradan öğrencilerin günlük dil ile temsil ettikleri yapıları matematik içinde ele aldıkları bulgusuna ulaşılmıştır. Örneğin ip uzunluğu olarak ifade edilen kavram yarıçap olarak işe koşulmuştur. Grup içi diyaloglar sırasında öğrenciler

problemi çizim üzerinden arkadaşlarına aktarmışlardır. Yani sözel temsil ile ifade ettikleri durumu görsel temsil ile desteklemişlerdir. Ö2 grup arkadaşı Ö3'ün ve Ö10 ise Ö8'in çizimini çözüm için takip etmiştir. Doğru çizim olduğunu düşündükleri için kendileri çözüm için yeni bir çizim gerçekleştirmemiştir. Öğrencilerin matematiksel çalışmada semiyotik oluşum yönüne ilişkin bulgular Tablo 4.2 'de sunulmuştur.

Tablo 4.2

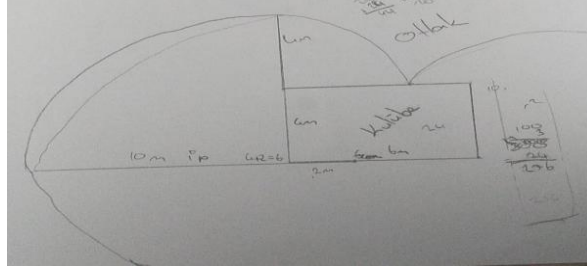
Öğrencilerin Semiyotik Oluşumları Yönelimi

Öğrenci	Epistemolojik Düzlem	Oluşumun yönü	Bilişsel Düzlem
Ö1	Dikdörtgen yapı etrafında oluşan yarım ve çeyrek dairelerin kodlanması	←	Dikdörtgen etrafında gezinime bağlı çizimler gerçekleştirme, yarıçap ilişkisinin aranması
Ö3 Ö5 Ö6 Ö8 Ö17	Dikdörtgen yapı ve köşelere bağlı yarıçapın değişiminin kodunun çözülmesi	→	Dikdörtgen etrafında yarım ve çeyrek daire dilimleri temsil edilmesi
Ö7	Problemin dikdörtgen ve dairesel alanlarla ilişkisinin kodunun çözülmesi	- - - - - →	Dikdörtgen etrafında hatalı yerleştirilen daire dilimlerinin çizilmesi
Ö2 Ö10	Problemin dikdörtgen ve daire dilimleri ile ilişkili olduğunun kodlanması	← - - - - -	Dikdörtgen yapıya bağlı işlevsel kavrayış çizimleri
Ö11	Otlama alanının daire dilimleri oluşturduğunun kodlanması	←	Eşkenar dörtgen, deltoid, dikdörtgen ve daire dilimleri çizimleri

Tablo 4.2 incelendiğinde oturuma katılan öğrencilerin çoğunluğunun semiyotik oluşumlarının epistemolojik düzlemde bilişsel düzleme doğru gerçekleştiği görülmektedir. Ö1 ve Ö11'in tersi yönde bir oluşum gerçekleştirdikleri belirlenmiştir. Ö2, Ö7 ve Ö10 işlevsel kavrayışa yönelik çizim gerçekleştirmiştir. Ancak Ö2 ve Ö10 çizimin devamını getirmemiş, probleme çözüm geliştirmemiştir. Ö7 ise problemin ilişkili olduğuna karar verdiği dikdörtgen ve daire dilimleri ile yanlış bir görsel temsil oluşturmuş, problemi doğru şekilde yapılandıramamıştır.

Şekil 4.5

Ö7'ye Ait Çizim



Ö7'ye ait yanlış görsel temsil Şekil 4.5'te sunulmuştur. Şekil 4.5'teki çizim incelendiğinde öğrencinin oluşan dairesel alanları fark ettiği görülmektedir. Öğrenciye ait tek çizimin bu olması, keçinin bağlanma noktası olarak köşenin seçilmesi ve hatalı sonuca bağlı oluşumun tamamlanmadığı görülmüştür.

4.1.1.2 Otlak alanı problemi araçsal boyut bulguları

Bu başlık altında Otlak Alanı probleminin çözümü sürecinde ortaya çıkan epistemolojik (artefekt) ve bilişsel (oluşturma) düzlem bileşenleri, enstrümantal oluşum ve araca dayalı işlevsel kavrayış bulguları sunulacaktır. İlgili problem için epistemolojik düzlem dikdörtgenin araç ile çizilmesi, daire dilimlerinin araç ile çizilmesi ve alanın araç ile hesaplanmasını içermektedir. Problem analiz tablosunda ifade edilen enstrümantal oluşum bileşenleri ve öğrencilerin bilişsel düzlemdeki eylemleri Tablo 4.3' te sunulmuştur.

Tablo 4.3

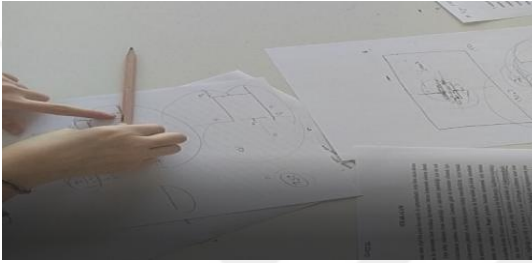
Otlak Alanı Probleminin Oluşturma ve İşlevsel Kavrayış Bulguları

Oluşum	Bilişsel düzlem	
<i>Enstrümantal Oluşum</i>	<i>Oluşturma</i>	
Kenar uzunlukları verilen dikdörtgenin cetvel, Geogebra ile çizimi	Sıralı Kavrayış	Dikdörtgenin cetvel ile çizilmesi
Yarıçap uzunluğuna bağlı daire dilimlerinin pergel, Geogebra ile çizilmesi		Yarıçapların cetvel ile çizilmesi
Yeni oluşan daire dilimlerinin yarıçaplarının cetvel, Geogebra ile ölçülmesi		İpin hareketinin kalem ile demonstrasyonu
Daire dilimlerinin alanlarının Geogebra ile hesaplanması		
Araça Bağlı İşlevsel	Araç desteği ile farklı merkez noktalarına sahip daire dilimlerinin çizilmesi	Yarıçapta meydana gelen kaybın kalem ile belirlenmesi
	Araç desteği ile merkez noktanın değişiminin gerçekleştirilmesi	

Tablo 4.3 incelendiğinde epistemolojik düzleme bağlı araçsal davranışlar beklenen düzeyde gerçekleşmemiştir. Daire oluşumuna bağlı olarak pergel kullanımı gözlemlenmesi beklenmiştir. Ancak sadece Ö7 cetveli kullanmıştır. Öğrenci cetveli verilen uzunluklara sahip dikdörtgen ve yarıçap çizmek için kullanmıştır. Görüşmede cetveli kullanma amacını “daha düzgün çizmek için” şeklinde açıklamıştır. Ö1 ve Ö3 arasında kalemin araç kullanımına yönelik süreçle ilişkin görüntü ve diyalog Şekil 4.6’da sunulmuştur.

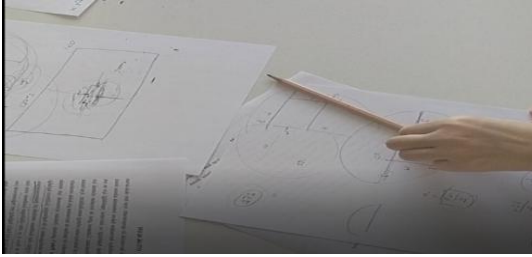
Şekil 4.6

Kalemin Araç Olarak Kullanımı ve Öğrenci Söylemleri



Ö3: Orayı hesapladım biri 252 çıkıyor biri 237 çıkıyor. Yani beslenebildiği alan. Bahçenin içine giremiyor sonuçta. Köşeden dönmek zorunda.

Ö1: Şu anda senin dediğinle ilgili bir sorun yok. Ben şu anda kendim dönme kısmını kafamda oturtamadım.



Ö3: Şimdi şöyle düşün. Bir tane bahçeye ben koyun bağlıyorum. Şurası bahçenin kenarı. Yani köşesi burası ya köşeye gelmeden şöyle bir alanda otlanabiliyor. Daha sonrasında şurada bir köşe var. Bu köşeden de sanki yeni bir tane daha ip bağlamışım gibi

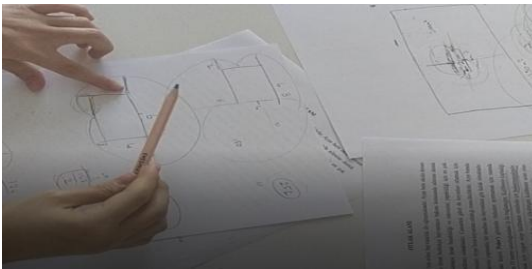
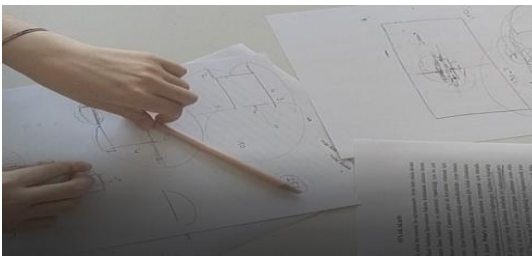
Ö1: O ip kesilmiş ve yeni bir tane ip bağlanmış gibi düşündün sen

Ö3: Evet evet

Ö1: İpi köşeye bağlamış gibi düşündün sen

Ö3: Öyle düşünmek gerekiyor zaten. İp döndüğü için.

Ö1: Tamam.



Ö3: Daha sonra ipi getirip böyle döndürdüğünde buradan 3 cm artıyor. Bu 3 santimi de getirip döndürünce tam ortaya geliyor.

Kaynak: Kamera Kaydı

Araç kullanımına yönelik iki durum incelediğinde şu bulgulara ulaşılmıştır. Ö7 cetveli genel kullanım amacı bağlamında kullanmış, araca problemin çözümü için bir farklılaştırma uygulamamıştır. Diğer taraftan Ö3 kalemi genel amacından farklı bir bağlamda, keçinin ipinin en gergin olduğu durumda tarayacağı alanı temsil amacıyla kullanmıştır. Kalemin kullanımında öğrenciyi yönlendiren epistemolojik düzlemdir. Grup arkadaşına yarıçap kaybını açıklamak amacıyla gerçekleştirdiği bu eyleme bağlı araca dayalı işlevsel kavrayış bulgusu elde edilmiştir.

Şekil 4.6 incelendiğinde Ö1'in kalem ile gerçekleştirdiği demonstrasyonla yarıçap ve daire dilimlerini anladığını ifade etmiştir. Kendisine görüşmede araç gereç kullanımına ihtiyaç duyup duymadığı sorulduğunda ise *“Zaten önümüzdeki görselden, kendi yaptığımız çizimlerle beraber anlıyoruz. Çizimlerde bir profesyonelliğe ihtiyaç duymadığımız için ihtiyaç hissetmedik.”* şeklinde cevaplamıştır. Benzer şekilde diğer gruplarda araç desteğine ihtiyaç duymadıklarını ifade etmişlerdir.

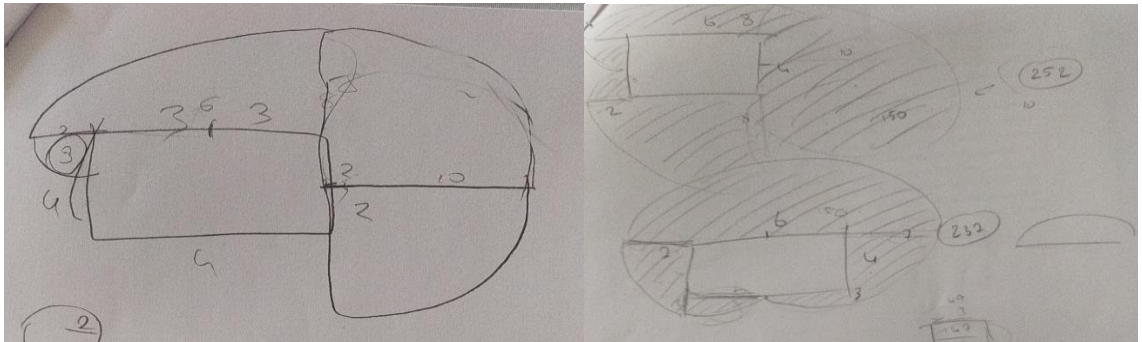
4.1.1.3 Otlak alanı problemi söylemsel boyut bulguları

Bu başlık altında Otlak Alanı probleminin çözümü sürecinde ortaya çıkan epistemolojik (referanslar) ve bilişsel (ispatlama) düzlem bileşenleri, söylemsel oluşum ve söyleme dayalı işlevsel kavrayış bulguları sunulacaktır. İlgili problem için epistemolojik düzlem referansları; dikdörtgenin kenar ve açı özellikleri, dairenin alan formülü, daire diliminin alan bilgisi olarak belirlenmiştir. Problemin analiz tablosu içinde ifade edilen söylemsel oluşum durumları ile öğrencilerin oturumlarda ortaya koyduğu bilişsel düzlem durumları Tablo 4.4'te verilmiştir. Tablo 4.4 incelendiğinde problem çözme sürecinin sonucunda gerçekleştirmesi beklenen muhakemenin gerçekleştiği görülmektedir. Problemin çözümünden beklenen düzeyde muhakeme 4 öğrenci (Ö3, Ö6,Ö8, Ö17) tarafından gerçekleştirilmiştir. İki öğrenci (Ö1, Ö11) grup arkadaşının yardımı ile problemi çözmüştür. 2 öğrenci (Ö5,Ö7) hatalı muhakeme gerçekleştirmiştir. İki öğrenci (Ö2 ve Ö10) ise muhakemeye yönelik bir davranış göstermemiştir.

Tablo 4.4*Otlak Alanı Probleminin İspatlama-Muhakeme ve İşlevsel Kavrayış Bulguları*

Oluşum	Bilişsel düzlem
<i>Söylemsel Oluşum</i>	<i>İspatlama -muhakeme</i>
Dikdörtgenin üzerinde ulaşılamayan nokta olmadığının fark edilmesi	Keçinin kenarın orta noktasına bağlandığında bu noktanın 180° karşısına ulaşabileceğinin ifade edilmesi
Dikdörtgenin yarım ve çeyrek dairesel alanların oluşumundaki rolünün ifade edilmesi	Kısa kenarın orta noktasına bağlamanın daha avantajlı olduğunun ifade edilmesi
Dikdörtgenin farklı uzunluktaki kenarlarının orta noktasını başlangıç kabul eden durumlar için alanın değişiminin ifade edilmesi	Keçiyi bağlama noktasına göre ipteki kaybın değiştiği, buna bağlı alanların değişiklik gösterdiğinin ifade edilmesi
Dikdörtgen üzerindeki farklı başlangıç noktalarına göre alanda meydana gelen değişimin ifade edilmesi	İpin uzunluğu ve kulübenin alanının değişmediği bilgisine bağlı otlama alanının değişmeyeceğinin ifade edilmesi (hatalı muhakeme)
En büyük alanın elde edilmesi için bağlama noktasının köşe noktası olmasının ifade edilmesi	İpin kenar üzerinde nereye bağlanırsa bağlansın 10 m yarıçapa sahip yarım daire oluşacağının ifade edilmesi
	Oluşan daire dilimlerinde ortak alanların bir kere taranması gerektiğinin ifade edilmesi
	İpin köşeye bağlanması durumunda en büyük otlama alanının oluşacağının ifade edilmesi
Söyleme Bağlı İşlevsel Kavrayış	Dikdörtgen etrafında simetrik daire dilimleri çizimi
Dikdörtgenin köşelerine bağlı 180° 'lik merkez açıya sahip yarım daire, 90° 'lik açıya bağlı çeyrek daire, dikdörtgenin köşesinde oluşan 270° lik dış açıya bağlı $\frac{3}{4}$ 'lük daire çizimi.	Köşelerde iç içe oluşan daire dilimlerinin çizilmesi
Kenarların orta noktasını merkez kabul eden daire dilimlerinin simetrik çizimi	Dikdörtgen etrafında oluşacak daire dilimlerinin simetrik olduğu bilgisine bağlı şeklin yarısının çizilmesi
Kenar üzerinde farklı noktalara bağlama durumuna bağlı daire dilimleri çizilmesi	İpin kenar üzerinde farklı noktalara bağlandığında oluşan daire dilimlerinin çizilmesi

Problemi kendilerinden beklenildiği gibi doğru şekilde tamamlayan Ö3 ve Ö6'nın çizimleri karşılaştırmalı olarak Şekil 4.7'de verilmiştir.

Şekil 4.7*Ö3 ve Ö6'nın Aynı Söylemsel Oluşuma Ait İki Farklı Çizimi*

Her iki öğrenci de süreci başarı ile tamamlamıştır. Ancak çözüm için kullandıkları görseller tamamlanma bakımından farklılık göstermektedir. Bu iki görsel temsilin oluşturulmasında öğrenciler şeklin simetrik olduğunu fark ettiklerini ifade etmişlerdir. Araştırmacı ile Ö6 arasında gerçekleşen diyalog aşağıdaki gibi olmuştur.

Araştırmacı: Arkadaşlar şimdi çeyrek ve yarım çemberler var. Ö6 sen tüm çizimleri tamamlamamışsın. Mesela Ö5' te bütün çeyrek ve yarımları görüyorum. Seninkinde yok diğer tarafları nasıl hesapladın?

Ö6: Sadece bir yarısını çizdim çünkü diğer tarafta da aynı şekilde olacağını düşündüm.

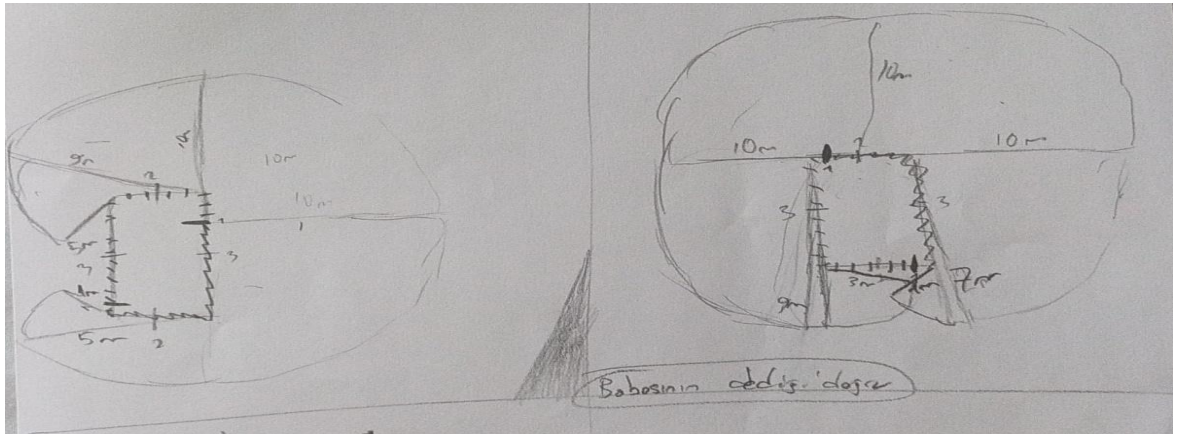
Araştırmacı Yani neden yararlandın burada? Simetriden mi?

Ö6: Evet

Araştırmacı Ö3 ile gerçekleştirdiği görüşmede problemde en çok zorlandığı yeri sorduğunda Ö3 “ *Ben işlemi yaparken çeyrek daireleri birleştirme konusunda zorlandım ilk başta ama sonrasında gördüm*” cevabını vermiştir. Öğrenci çalışma kağıdı incelendiğinde kağıdın ayrı bir yerinde çeyrek dairelerin yarım daire olarak birleştirildiği görülmüştür. Mereolojik bölünmeyi esas alan işlevsel kavrayış gerçekleştirmiştir. Ö17 tarafından gerçekleştirilen çizim söyleme dayalı işlevsel kavrayışa başka bir örnek olarak şekil 4.8’ de sunulmuştur.

Şekil 4.8

Ö17’ ye Ait Çizimler



Ö17 problem çözme sürecinde bireysel çalışmıştır. Çözümü tamamladıktan sonra diğer grup arkadaşları ile iletişim kurmuş ancak çözüm sürecine devam etmemiştir. İki çizimde incelendiğinde problemin istediği gibi kenarların orta noktasından değil, uzun kenarı 1 m-5m ve kısa kenarı 1m-3m olacak şekilde ortalayan noktalardan çizimler yaptığı görülmektedir. Öğrencinin işlem gerçekleştirmemesine rağmen babanın haklı olduğunu

ifade ettiği de Şekil üzerinde görülmektedir. 1,3 ve 17 arasında gerçekleşen muhakemeye yönelik diyalog aşağıdaki gibidir.

17: Alan bulmaya gerek var mı?

1: Başka bir yoldan mı buldun?

3: Sen nereden buldun?

17: Her türlü nereden asarsanız asın yarısını kaplıyor. Yani duvara bağlı Şekilde giderse yarısını kaplıyor. İkisinde de (her iki bağlama durumu) bir yarım çember oluşuyor (1). Ben bir metre olarak aldım. Şu kısımda 9 metrelik kısım kalıyor. 9 metrelik kısımda Şu kısmı evreleyebilir. Burada ipi dayadığı (köşe etrafında dönme) zaman 3 metre kalıyor. Buradan da yine bir yuvarlak oluşturabilir. Diğer taraftan yaptığımızda da 7 metre ve 1 metre oluyor. Ama uzun kenar olarak yaptığımızda yine 9 oluyor ama burada 7 var. Burada 5 var. Bir azalma oluyor. Çünkü uzun kenarda ipi daha çok duvara karşı dayıyor.

1: Hımm. Duvara daha fazla ip harcadığı için. Peki, Şurası kısa kenar değil mi? bire üç m bıraktın?

3: Bire üç bıraktım evet. Buna göre de zaten ne kadar köşeye yaklaŐtırırsan o kadar büyük alan oluyor (2).

1: Kusura bakma anlamadığım için soruyorum. Tam ortasına bağlanması gerektiğinden dolayı hani.

17: Tam ortasına bağlanması gerekiyor demiyor ki. (Burada 1 soruyu okumuŐtur). Orta taraflarına demiyor mu? Tam ortası olsa yine değişmez. Kısa kenar daha fazla alan kapsıyor. Çünkü daha fazla ip yiyor.

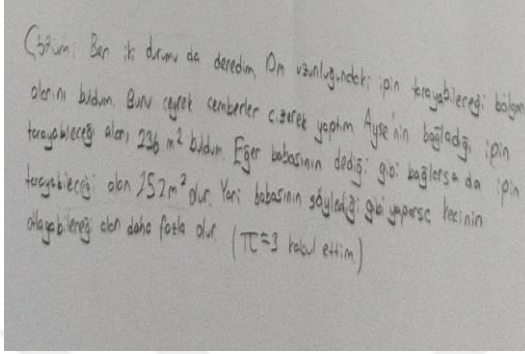
3: Duvara ne kadar az ip harcarsam o kadar büyük alanda otlatırım.

Yukarıdaki diyalog içinde “1” ile belirtilen cümle dahil öğrencinin her iki durumda da oluşan 10 metre çaplı yarım dairenin oluŐtuđunu ifade ettiği görülmektedir. Benzer durumun diğer öğrencilere ait çizimlerde de yer aldığı görülmektedir. Bu durum öğrencilerin deđiŐmezleri aradığı bulgusuna ulaŐtırmaktadır. Konuşma içeriğinden ipin dikdörtgenin bağlandığı kenara bağlı olarak gösterdiği değişimin oluşan daire dilimleri ile olan ilişkisine vurgu yaptığı görülmektedir. nc grupta problem çözme oturumunu tamamlayan 8’in geri bildirim notu bulgusu da aynı olmuştur. Görüşme sırasında ğrenci geri bildirim notundan farklı olarak “*Ben aslında düşünmüştüm. Yani düşünmüştüm Şu kenarlara bağlanmasını. Çünkü burada %75’lik bir alan otlayabileceği alan. Burada %50’lik bir alan oluyor. Hani burada da %50’den bir tık daha az yer*

kapladığı için %50'den fazlalık bir alan oluyor aslında köşeleri düşünmüştüm” açıklamasını gerçekleştirmiştir.

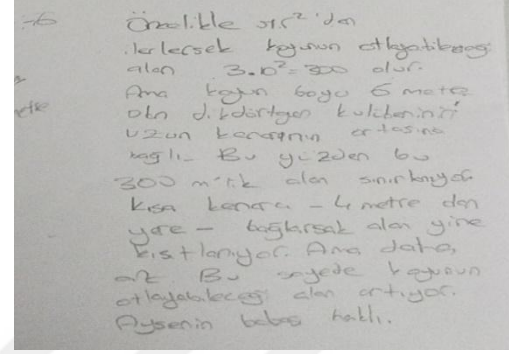
Şekil 4.9

Otlak Alanı Problemi Öğrenci Geri Bildirim Notları



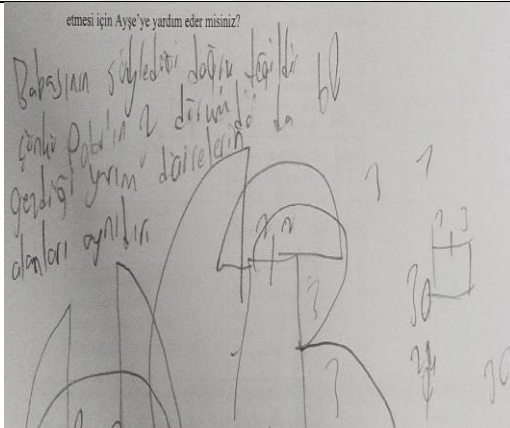
Çözüm: Ben iki durumu da denedim. 10 m uzunluğundaki ipin tarayabileceği bölgenin alanını buldum. Bunu çeyrek çemberler çizerek yaptım. Ayşe'nin bağladığı ipin tarayabileceği alanı 236 m² buldum. Eğer babasının dediği gibi bağlarsa da ipin tarayabileceği alan 252 m² olur. Yani babasının söylediği gibi yaparsa keçinin otlayabileceği alan daha fazla olur. ($\pi=3$ kabul ettim.)

Ö6



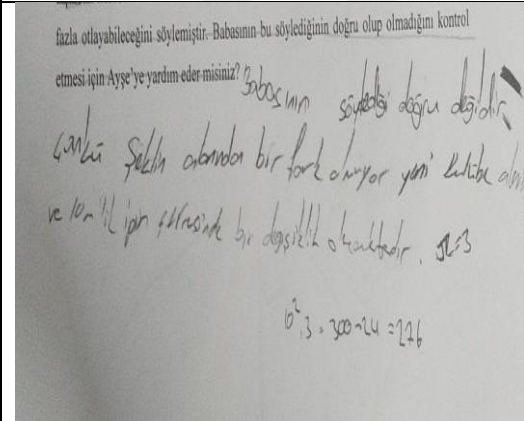
Öncelikle π^2 'den ilerlersek koyunun otlayabileceği alan $3 \cdot 10^2 = 300$ olur. Ama koyun boyu 6 metre olan dikdörtgen kulübenin uzun kenarının ortasına bağlı. Bu yüzden bu 300 m²'lik alan sınırlanıyor. Kısa kenara-4 metre olan yere- bağlarsak alan yine kısıtlanıyor. Ama daha az. Bu sayede koyunun otlayabileceği alan artıyor. Ayşe'nin babası haklı.

Ö8



Babasının söylediği doğru değildir. Çünkü Polar'ın 2 durumda da gezdiği yarım dairelerin alanları aynıdır.

Ö5



Babasının söylediği doğru değildir. Çünkü şeklin alanında bir fark olmuyor. Yani kulübenin alanı ve 10 metrelik ipin çevresinde bir değişiklik olmamaktadır.

Ö7

Hatalı muhakeme yapan iki öğrencinin de (Ö5 ve Ö7) muhakeme sürecinde dikdörtgen ve ip uzunluğuna odaklandıkları görülmektedir. Ancak bu öğrencilerden Ö7 keçinin bağlandığı ipin uzunluğunun ve kulübenin otlama alanında engellediği alanın sabit olmasından kaynaklı alanda değişiklik olmayacağını ifade etmiştir. Ö5 ise dairenin alan formülü yerine çevresini veren formülü kullandığı görülmüştür.

Öğrencilerin problem çözme sürecine ilişkin geri bildirim notları Şekil 4.9'daki gibi olmuştur.

Şekil 4.9'da yer alan öğrenci geri bildirimleri, Ö3 ve Ö17 arasında gerçekleşen diyalog incelendiğinde teorik olarak dairenin alanı ve dikdörtgenin alanı bilgisini kullandıkları görülmektedir. Bunun yanı sıra elde ettikleri sonucu açıklarken doğal dili de kullanmışlardır. Öğrenciler tarafından gerçekleştirilen muhakemede doğal söylemsel ve teorik muhakemenin bir arada kullanıldığı görülmektedir. Oturuma katılan Ö1, Ö2, Ö10 ve Ö11 geri bildirimde bulunmamışlardır. Ancak Ö1 görüşme sırasında duvarın uzunluğu ile kalan ip arasındaki ilişkiyi kurmakta zorlandığını ifade etmiştir. Problem çözme oturumu sırasında arkadaşlarına “Kalan 8 metrelik ipin çevrelediği kısım 6 metre, kalan 7 metrelik ipin çevrelediği kısım 4 metrelik kenar” diyerek açıklama beklemiş ve cevap alamamıştır. Öğrenci köşelerden dönerken kalan ip miktarına odaklanan arkadaşlarına ipin uzunluğu ile köşeden dönünce karşılaşılan yeni kenarların da niceliksel olarak farklı olduğunu ifade etmiştir. Öğrencinin hem bu sorusu hem de görüşmede ilişkiyi kurmakta zorlandığını ifade etmesi sebebi ile muhakemeyi tamamlayamadığı belirlenmiştir. Ö11 ise bireysel çözüme yönelmiş, ancak problemi tek başına tamamlayamamıştır.

Öğrencilerin bilişsel düzlemde çizim ve söylem yolu ile ifade ettiği diğer durum, dikdörtgenin köşe noktasını merkez kabul eden daire dilimlerinin kesişen alanlarıdır. Bu ortak alanları Şekil 4.4'te Ö5'in çiziminde görmekteyiz. Ö3 ise arkadaşına ilgili durumu “*Buraya bağladığın 7 metrelik ip aslında buraya da gelebilir ama orayı zaten hesapladığımız için orayı hesaplamıyoruz.*” şeklinde açıklamıştır. Ö3 tarafından görsel olarak temsil edilmemiş olan duruma yönelik bir muhakeme gerçekleştiği video kaydı ile belirlenmiştir.

Problemde belirtilmemesine karşılık öğrencilerin pi sayısını 3 olarak kabul ettikleri görülmüştür. İşlemlerde kendilerine kolaylık sağladığını ifade etmişlerdir. Öğrencilerin bu matematiksel sabiti 3 alma eğiliminin okul matematiği temelli olduğu görüşmelerle doğrulanmıştır. Epistemolojik düzlemde pi sayısının “3” olarak alınmasına yönelik referans olmamasına karşılık okul matematik eğitimine bağlı gerçekleştiği için epistemolojik düzlem referans bileşeni ile ilişkilendirilmiştir.

Problem öğrencilerden keçinin ipinin kulübenin kısa ve uzun kenarlarına bağlanması durumunda otlayabileceği alanları karşılaştırmalarını istemektedir. Ancak öğrencilerin sadece bu iki durumla sınırlı kalmayarak genellemeye gittikleri bulgusu elde edilmiştir. “

Babanın bağlama konumunda daha fazla alan otlayabileceği sonucunu” epistemolojik düzleme bağlı bir beklenti olan “ Köşe noktasına bağlama durumunun en büyük otlama alanını sağladığı” durumuna genelleyebildikleri görülmüştür (Ö3,Ö8 ve Ö17).

Öğrencilerin matematik çalışmaları sürecinde Otlak Alanı probleminde söylemsel oluşum bulguları ve oluşumlarının yönelimleri Tablo 4.5’te verilmiştir.

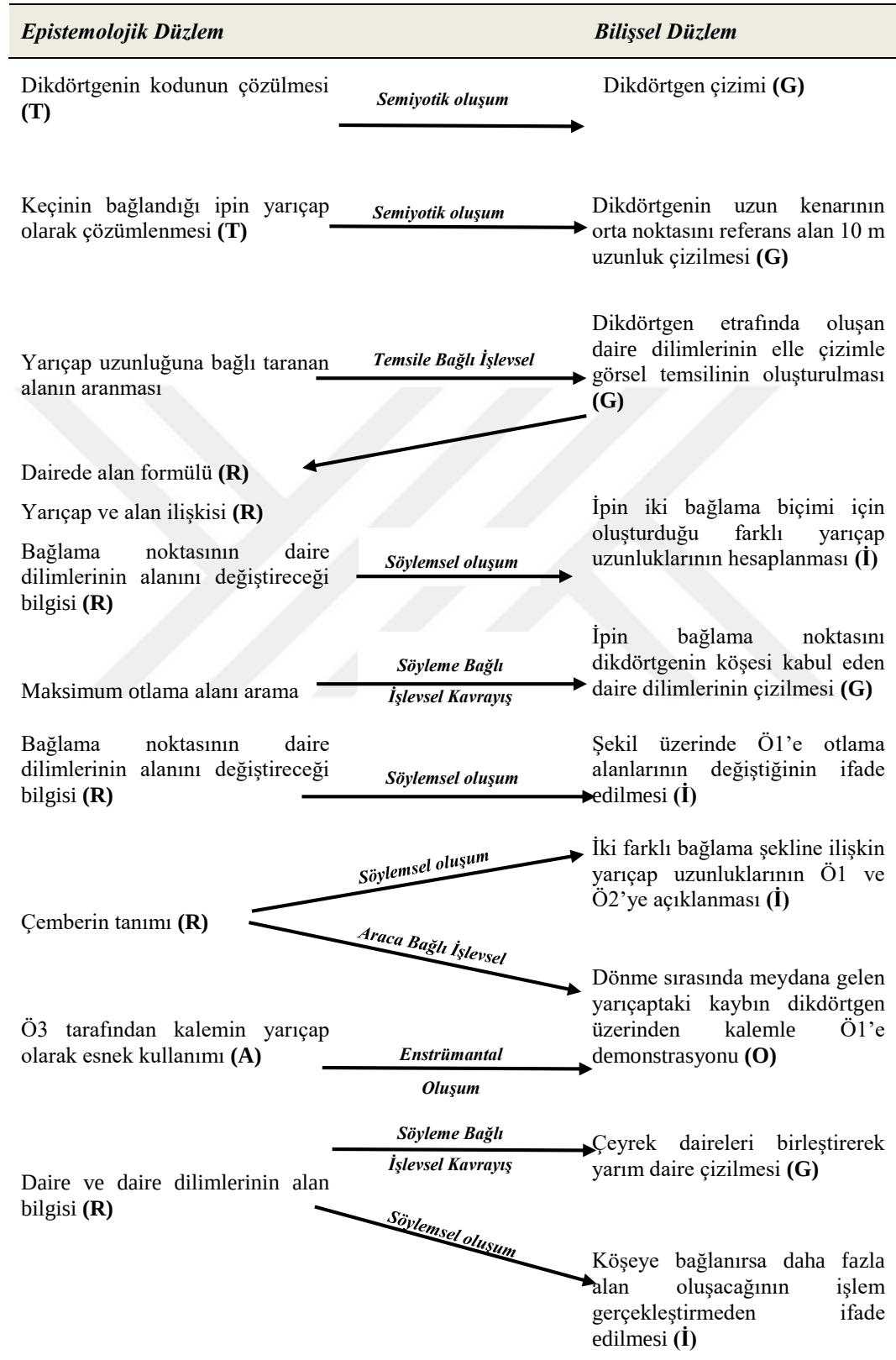
Tablo 4.5

Öğrencilerin Söylemsel Oluşum Yönelimleri

Öğrenci	Epistemolojik Düzlem	Oluşumun yönü	Bilişsel Düzlem
Ö3 Ö8 Ö17	Dikdörtgen ve dikdörtgene bağlı oluşan farklı daire dilimlerinin yarıçap ve merkez açısı bilgisi	→	Çizilen ilk dairenin merkezinin dikdörtgenin köşesi üzerine konumlandırılmasına bağlı alanın en büyük değere ulaşacağını ifade edilmesi
Ö6	Dikdörtgenin kısa kenarının orta noktasını merkez kabul ederek oluşturulan daire dilimlerinin toplam alanı uzun kenarın orta noktasına bağlı oluşan daire dilimlerinden daha büyüktür.	←	Eylem 1: Uzun kenarın orta noktasına bağlı oluşan daire dilimlerinin alanlarının hesaplanması Eylem 2: Kısa kenarın orta noktasına bağlı oluşan daire dilimlerinin alanlarının hesaplanması Eylem 3: eylem 1 ve eylem 2’de bulunan sayısal değerleri karşılaştırma
Ö5	Her iki bağlama durumu için alan değişmez (Hatalı söylem)	←	Çizilen daire dilimlerinin alanları yerine çevrelerinin hesaplanması
Ö7	Her iki bağlama durumu için alan değişmez (Hatalı söylem)	←	Kulübenin alanı ve bağlanan ip uzunluğunun değişmemesine bağlı alanın değişmeyeceğinin ifade edilmesi

Tablo 4.5 incelendiğinde üç öğrencinin epistemolojik düzlemde bilişsel düzleme, üç öğrencinin ise tersi yönde söylemsel oluşum gerçekleştirdikleri görülmektedir. Bu öğrencilerin dışında kalan Ö1,Ö2,Ö10 ve Ö11’e ait oluşum yönü belirlenememiştir. Ö5 ve Ö7 nicel değerlere bağlı (çevre uzunluğu, alan, ip uzunluğu) hatalı bir genellemeye ulaşmıştır.

Otlak Alanı problemine ilişkin eksiksiz matematiksel çalışma gerçekleştiren Ö3’e ait çalışma uzayı Tablo 4.6’da sunulmuştur.

Tablo 4.6*Ö3'e Ait Matematik Çalışma Uzayı Dolaşımı*

Not * :T: temsil; A: artefekt; R: referans; G: görselleştirme; İ: ispat O: oluşturma

4.1.2 Kabilenin Güneşi Problemi

Problem çözme oturumu birinci grupta dört (Ö1,Ö3,Ö4, Ö12), ikinci grupta üç (Ö5,Ö6, Ö18), üçüncü grupta dört (Ö8,Ö9,Ö10,Ö11), toplamda 11 öğrencinin katılımı ile gerçekleşmiştir. Öğrenciler problemi okudukları andan itibaren şekil çizmişlerdir. Kenar orta dikme oluşumunu tarif eden yönergeleri anlamak için birden fazla okuma gerçekleştirmişlerdir. Ö8 haricindeki öğrenciler üçgen çizimi ile görsel temsili oluşturmaya başlamışlardır. Ö8 üçgen yerine kenar uzunluklarını ayrı ayrı doğru parçası olarak çizmiş ve orta dikmelerini inşa etmiştir. Uzunlukları verilen üçgenin dik açılı olduğu sadece ikinci grup tarafından sürecin başında fark edilmiştir. Üçgen çizimi üzerinde işlevsel kavrayışa bağlı çizimler gerçekleştirilmiştir. Bağlamda sunulan kenarın orta noktasından geçme gerekliliğine bağlı kenarortay, dik olmasına bağlı yükseklik ilişkilendirmesi gerçekleştirilmiştir. Ö3 ve Ö6 diğer öğrencilerden farklı olarak aranan yardımcı elemanın verilen üçgen şartları içerisinde (üçgenin ikizkenar ve eşkenar olmaması) bu iki yardımcı eleman olmadığını ifade etmişlerdir. Çizilmesi istenen yardımcı elemanın “köşeden geçmek zorunda olmadığını” ifade etmiş, çizimlerine de yansıtmışlardır. Tüm köşelere eşit uzaklıkta olması istenen noktanın üçgenin içinde olması gerektiği algısıyla kenar orta dikmelerin kesişim noktalarını üçgenin içinde temsil etmişlerdir. Ö5’in ilk söylemi üçgenin içinde kesişen ağırlık merkezinin aranan nokta olduğu olmuştur. Belirledikleri bu noktadan köşelere çizdikleri doğru parçalarının uzunluklarını hesaplamaya yarayacak bir teorik bilgiye sahip olmadıklarını fark ettikleri anda ikinci ve üçüncü grup araç gereç kullanma ihtiyacı hissetmişlerdir. Üç kenarı bilinen üçgeni çizme sıralı adımlarını izleyerek üçgeni oluşturmuş ve oyunun yönergelerine göre kenar orta dikmeyi inşa etmişlerdir. Sonrasında ilgili uzunlukları ölçmüşlerdir. İkinci grup katılımcı öğrencileri bireysel, üçüncü grup birlikte çözmüşlerdir. İkinci grupta yer alan Ö18 araç gereç kullanmamış, sayısal sonuç sunmamıştır. Üçüncü grup araç kullanırken zorlanmış, buna bağlı ölçümde istenen sayısal değerden sapma meydana gelmiştir. Öğrenciler sonucu yuvarlama ile elde etmişlerdir. Ölçüme dayalı buldukları sonuç öğrencileri problemi çözmüş olduklarına ikna etmemiştir. İkinci grupta yer alan Ö6 da bu sebeple ölçümle bulduğu sayısal sonucu teorik olarak doğrulamıştır. Tüm gruplar istenen uzunluğa ilişkin sayısal sonuç olan 5 cm değerine ulaşmıştır. Birinci grupta yer alan öğrenciler verilen uzunlukların dik üçgen olduğunu geç yapılandırmıştır. Grubun dik üçgen olduğunu fark etmesinden sonra Ö4 dik üçgende hipotenüse çizilen kenarortayla ilgili teorik bilgiyi ifade etmiş ve arkadaşlarını yönlendirmiştir. Bir üçgende kenar orta

dikmelerin kesişim noktasının tüm köşelere eşit uzaklıkta olmasına bağlı yarıçap olduğu ve bir çembere işaret ettiği Ö4 tarafından açıklanmıştır. Bu grupta bulunan öğrenciler diğer gruplardan ayrılarak düzlemde doğrusal olan ve olmayan üç noktanın çemberle ilişkisine yönelik genellemelere ulaşmıştır.

4.1.2.1 Kabilenin Güneşi problemi semiyotik boyut bulguları

Bu başlık altında Kabilenin Güneşi problemine ilişkin öğrencilerin çözüm sürecinde ortaya koydukları temsillerin epistemolojik (temsil)- bilişsel (görselleştirme) düzlem bileşenleri, semiyotik oluşum ve temsile dayalı işlevsel kavrayış bağlamında elde edilen bulguları sunulmuştur.

Tablo 4.7

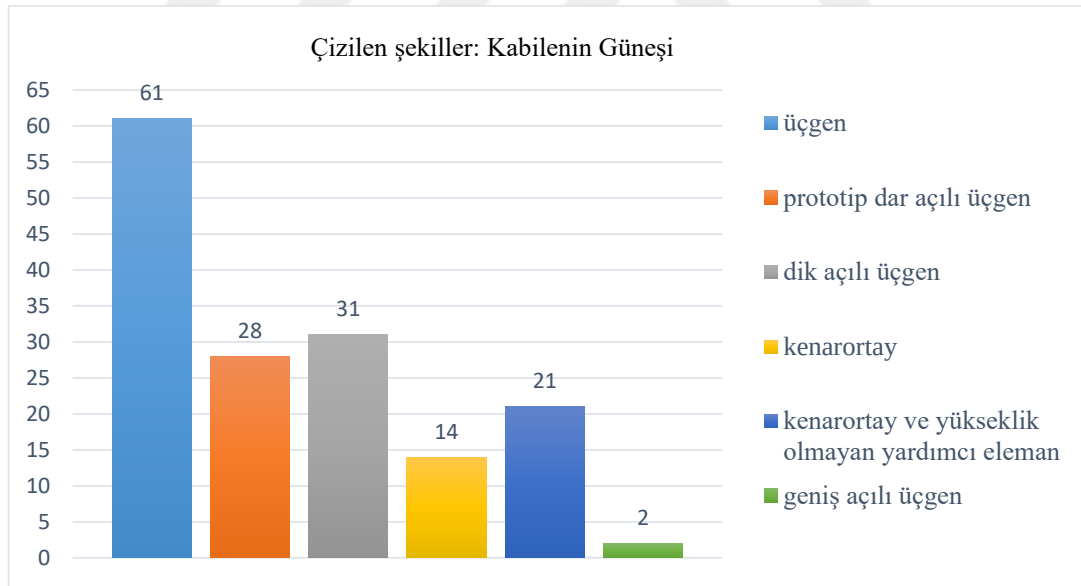
Kabilenin Güneşi Problemi Öğrencilerin Görselleştirme ve İşlevsel Kavrayış Bulguları

Oluşum	Bilişsel düzlem
<i>Semiyotik Oluşum</i>	<i>Görselleştirme</i>
Görsel Temsil Kozalakların konumu için nokta Noktaları köşe kabul eden üçgen çizimi Verilen uzunluklara bağlı dik üçgen çizimi Kenar orta dikmelerle kenarların durumuna bağlı paralellik temsili Üçgen içinde oluşan dik üçgenlere bağlı benzer üçgen temsili Hipotenüse çizilen kenarortaya bağlı ikizkenar üçgen temsili Taktiğe bağlı kenar orta nokta, dikme, dikmelerin kesişimi çizimi Çevrel çembere bağlı çember ve yarıçap çizimi	Algisal Kavrayış Nokta Üçgen Dik üçgen Çeşitkenar üçgen Eşkenar üçgen Geniş açılı üçgen Kenarortay Yükseklik Kenar orta nokta Üçgenin içinde, üzerinde ve dışında kesişme temsili Kenar orta dikme İç teğet çember çizimi
Sembolik Temsil Harflerle noktaların ifade edilmesi Köşe noktalarını kullanarak üçgenin ifade edilmesi Dikliğın sembolik temsili Yarıçapın sembolik temsili	Dikliğın sembolik temsili
Sözel Temsil Sözel ve günlük konuşma dili ile ifadeler (örneğin: iki çocuğun aralarındaki mesafenin yarısını bulma)	Noktaların kozalak ile ifade edilmesi Noktaların çocukların isimleri ile ifade edilmesi, Kenarı ortadan ikiye bölen dik şey Kesişimin birleşilen yer olarak ifade edilmesi Çemberin yuvarlak olarak ifade edilmesi
Temsile Bağlı İşlevsel Kavrayış Çeşitli formlarda üçgen temsilleri oluşturma Dik dar açılı, geniş açılı üçgen, çeşitkenar, ikizkenar ve eşkenar üçgen temsili oluşturma ve bu üçgen çizimi üzerinde kenar orta dikmelerin çizim eylemleri	Eşkenar, çeşitkenar, dik üçgen, geniş açılı üçgen çizimi Kenar orta dikmenin kenarortay ve yükseklik olarak çizimi Kenar orta dikmenin üçgenin içinde, üzerinde ve dışında kesişim temsillerinin çizimi Farklı uzunlukta doğru parçası temsili ve bu doğru parçalarının kenar orta dikmelerinin çizilmesi

Kabilenin Güneşi problemi için epistemolojik düzlem temsil bileşenleri 3 adet doğrusal olmayan nokta temsili, noktaların kesişimi ile oluşan üçgen temsili, dik üçgen temsili, kenar orta nokta temsili, kenar orta dikme temsili, paralellik temsili, ikizkenar üçgen temsili, kenar orta dikmelerin kesişim noktası temsili, yarıçap temsili, kenar orta dikmelerin kesişim noktasını merkez kabul eden çember temsili ve çevrel çember temsili olarak belirlenmiştir. Probleme bağlı belirlenen semiyotik oluşum bileşenleri ve problem çözme oturumları sonucunda Tablo 4.7 oluşturulmuştur. Tablo 4.7 incelendiğinde çok sayıda görsel temsil ortaya çıkardığı görülmüştür. Bu temsillerin bir kısmı semiyotik oluşuma bağlı beklentilerle örtüşmektedir. Öğrencilerin görsel temsillerinin farklılaştığı çizimlerde probleme ilişkin doğru temsili oluşturma girişimleri yönlendirici olmuştur. Bunun sonucunda eşkenar üçgen, geniş açılı üçgen, dik açılı olmayan çeşitkenar üçgen çizimleri ortaya konmuştur. Öğrenci çalışma kağıtlarında yer alan çözüme yönelik belirgin çizimler ve bu çizimleri gerçekleştiren öğrenci sayısı Şekil 4.10'da sunulmuştur.

Şekil 4.10

Çizilen Şekiller: Kabilenin Güneşi Problemi



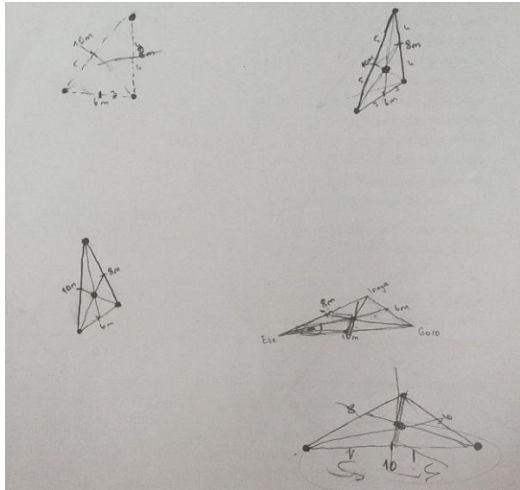
Şekil 4.10 incelendiğinde oturuma katılan 11 öğrenci tarafından 61 adet üçgen çizimi gerçekleştirilmiştir. Kozalakların konumlarının ve aralarındaki mesafenin üçgen oluşturma durumu öğrenciler tarafından yapılandırılmıştır. Üçgen formunun farklılaştığı belirlenmiştir. Dar açılı prototip üçgen çizimlerinin ikizkenar ve eşkenar formuna yakın çizimler olduğu görülmüştür. Çizimlerin formunun ikizkenar ve eşkenar olmasına karşılık çizimler eşkenar ve ikizkenar olarak işe koşulmamıştır. Öğrencilerden

Ö1, Ö3, Ö4, Ö8, Ö9, Ö10, Ö11 ve Ö12'nin ilk çizimleri dik açılı üçgen olmamıştır. Başlangıçta prototip üçgen çizimi gerçekleştirmiş, kenar uzunlukları ile ilgili verileri kenarlar üzerine yerleştirmişlerdir. Çizdikleri üçgen kenarlarının orta noktasını belirlemişlerdir. İkinci grupta yer alan Ö5, Ö6 ve Ö18 ise verilen uzunluklara sahip üçgenin dik üçgen olduğunu fark etmiş, buna yönelik çizimler gerçekleştirmişlerdir. Geniş açılı üçgen çizimi Ö4 ve Ö11 tarafından gerçekleştirilmiştir. Ö11 üçgenin formunu belirlemek amacıyla çizerken, Ö4 yardımcı elemanların üçgenin dışında oluşabileceğini Ö1'e anlatmak amacıyla ilgili çizimi gerçekleştirmiştir. İkinci grup dışında kalan 8 öğrencinin üçgen üzerinde çalışmalarına bağlı verilen uzunluklara sahip üçgeni dik üçgen olarak kodladıkları belirlenmiştir. Bu bağlamda üçgenin temsilinde 8 öğrencinin bilişsel→epistemolojik, 3 öğrencinin ise epistemolojik→bilişsel yöneliminde semiyotik oluşum gerçekleştirdikleri görülmüştür.

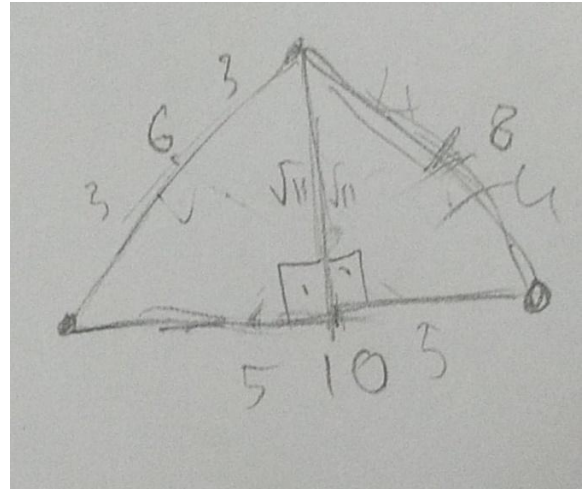
Problem bağlamında verilen yardımcı elemana ait orta nokta ve dik olma koşulları çizimler üzerinde aranmıştır. Kenarı ortadan ikiye bölme özelliği kenarortay, dik olma durumu ise yükseklikle eşleştirilmiştir. Öğrencilerin kenarortay ve yükseklik bağlı çizimleri Şekil 4.11'de verilmiştir.

Şekil 4.11

Öğrencilerin Kenarortay ve Yükseklikle İlişkili Çizimleri



Ö10'nun kenarortaya bağlı kenar orta dikme çizimi



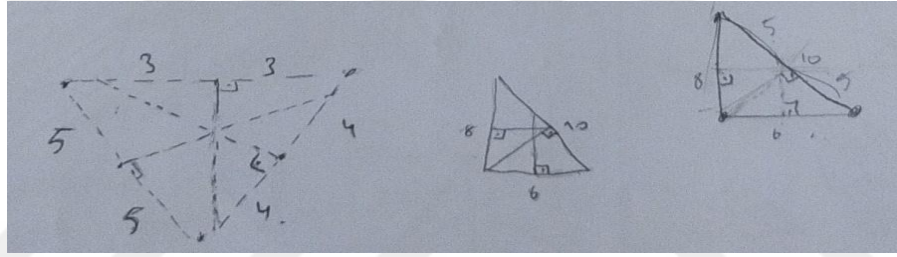
Ö7'nin yüksekliğe bağlı kenar orta dikme çizimi

Ö10'a ait çizimler incelendiğinde çeşitkenar üçgenler oluşturduğu, yardımcı elemanı kenarortay olarak görselleştirdiği görülmektedir. Ö11 ise çeşitkenar olduğunu uzunluk yerleştirerek temsil ettiği ikizkenar üçgen formundaki çiziminde yüksekliği

görselleştirmiştir. Öğrencilerin bu çizimleri kenar orta dikmeyi problemde yer alan oluşturma adımlarına göre (Inaya'nın taktiksel açıklamaları) temsil etmeye çalışırken oluşturdukları görülmüştür. Söylemsel oluşumda ifade edilecek adımlara bağlı nedenlerde bu çizimden vazgeçmişlerdir. Ö3, Ö6, Ö8 ilk çizimlerden itibaren kenar orta dikmeleri diğer arkadaşlarından farklı şekilde temsil etmiştir. Bu temsilde kenar orta dikmelerin “köşeden geçmek zorunda olmadığına keşfedilmesi” etkili olmuştur. Bu bağlamda üçgenin çizimi ile kenar orta dikme temsili bağlamında Ö3, Ö5 ve Ö8'in semiyotik oluşum yönü değişim göstermiştir. Üçgen çizimi ve kenar orta dikme temsili için farklı yönde iki oluşum gerçekleştiren öğrencilerden biri olan Ö3'e ait çizim Şekil 4.12'de sunulmuştur.

Şekil 4.12

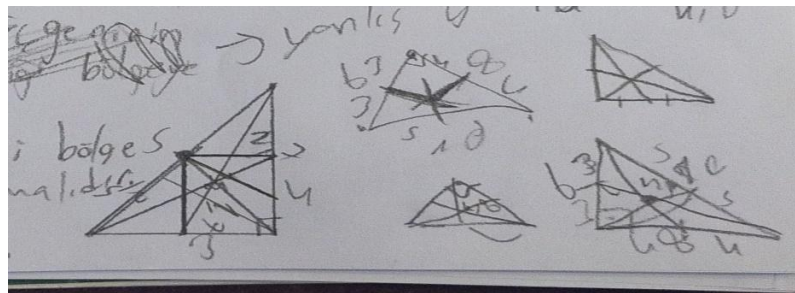
Ö3'e Ait Çizimler



Ö3 tarafından gerçekleştirilen en soldaki çizim ilk görsel temsildir. Çizim incelendiğinde dik açılı üçgen olmadığı görülmektedir. Sonraki çizimler öğrencinin grup içi diyaloglarına bağlı gerçekleşmiştir. Kenar orta dikme çizimi incelendiğinde ise Ö3 kenarortay ve yükseklikten farklı bir yardımcı eleman çizmiştir. İlgili geometrik nesnenin köşeden geçmek zorunda olmadığına fark edildiği, çizimde temsil edildiği görülmektedir. İkinci grupta oturuma katılan Ö5'e ait çizimler Şekil 4.13'te verilmiştir.

Şekil 4.13

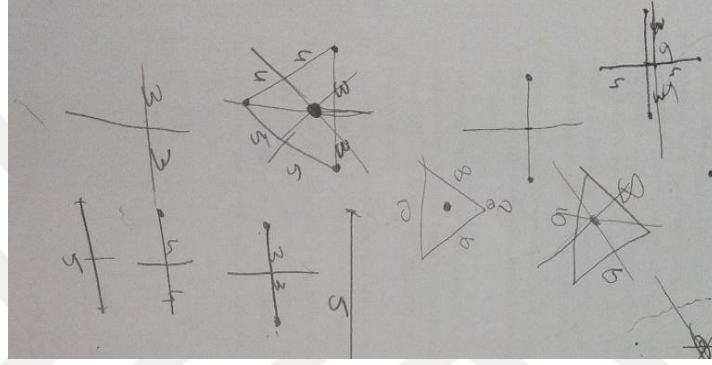
Ö5'e Ait Çizimler



Ö5'in tüm çizimleri Şekil 4.13'te verilmiştir. Öğrenci tüm üçgenleri dik üçgen olarak çizmiştir. En soldaki çizim araç ile gerçekleştirilmiştir. Bu çizim dışındaki diğer şekiller incelendiğinde doğru kenar orta dikme temsili gerçekleştiremediği görülmektedir. Temsile dayalı işlevsel kavrayışa yönelik çizimlerde kenarortay çizimi gerçekleştirmiştir. Doğru parçalarının kesişim noktasını üçgenin içinde aradığı görülmektedir. Üçüncü grupta yer alan Ö8'e ait çizimlere Şekil 4.14'te yer verilmiştir.

Şekil 4.14

Ö8'e Ait Çizimler



Ö8'in çizimleri incelendiğinde Ö3'e benzer şekilde dik açılı üçgen temsili oluşturmadığı görülmektedir. Öğrenci bireysel olarak dik üçgen çizmemiş, grupla birlikte oluşturdukları çizimi referans almıştır. Öğrenci çizimleri kenar orta dikme temsilleri açısından incelendiğinde kenarortay veya yükseklik dışında bir geometrik nesne arayışı olduğu görülmektedir. Ö5 ve Ö8 ile benzer şekilde doğru parçalarının kesişim noktasını üçgenin içinde oluşacak şekilde algıya sahip olduğu görülmektedir. Ö8'e ait çalışma kağıdı incelendiğinde üçgene ait kenarları ayrı ayrı temsil ettiği görülmektedir. Her bir kenarın orta noktasından dik olarak geçen bir doğru parçası çizimi gerçekleştirmiştir. Öğrenci temsile dayalı işlevsel kavrayış gerçekleştirmiştir.

Problemin çözümü sırasında öğrencilerin temsil kayıtlarını etkileyen algısal kavrayış bulguları elde edilmiştir. Ö1, Ö8 ve Ö9'un algısal kavrayışla ilgili söylemleri aşağıdaki gibi olmuştur.

Ö9: diyelim ki şöyle ya (kenar orta dikme çizimlerini göstererek). Bunların hepsi yükseklik olmuyor mu? Yani bu kenara göre hepsi yükseklik. Ben öyle düşünmüştüm en başta bu kenara göre ortasından çekiyor ya yukarı doğru yükseklik. (Görüşme).

Öğrencinin yüksekliğe yönelik “kenara dik olarak inmesi ve kenardan yukarı doğru devam etmesi” şeklinde algısal bir kavrayış geliştirdiği görülmektedir.

Ö1: Orada herhangi bir şekilde işime yaramadı tekrar yanlış bir şekilde düşündüğüm için sanki kenarortay bütün üçgenlerde dar ve dik açılı üçgenlerde kenarortayların açıortayların ve yüksekliklerin bir ortak kesişim noktası oldu ama hani sadece eşkenar daymış gibi düşündüm.

Öğrenci üçgende yardımcı elemanların kesişmesinin sadece eşkenar üçgen için geçerli bir durum olduğu algısal kavrayışı ile hareket etmiştir. Öğrencilerin hatalı algısal kavrayış örneklerinden biri de kenar orta dikmeleri kesiştiği konumla ilgili olmuştur. Öğrencilerin ilk çizimleri kesişim noktasının üçgenin içinde olması gerektiği algısına sahip olduğunu göstermektedir. Araştırmacının Ö8,Ö9 ve Ö10 ile gerçekleştirdiği görüşme şu şekildedir:

Ö9: Bunu çizene kadar (araçla gerçekleştirdikleri çizimden bahsediyor) zaten hep ortada olduğunu düşünüyorduk. O yüzden yapamadık.

Ö8: Tam ortada. Benim çizimlerimde de zaten hep tam ortada.

Ö9: 30 dakika boyunca tam ortada düşündük. O da çıkmadı zaten. Asla yapamazdık.

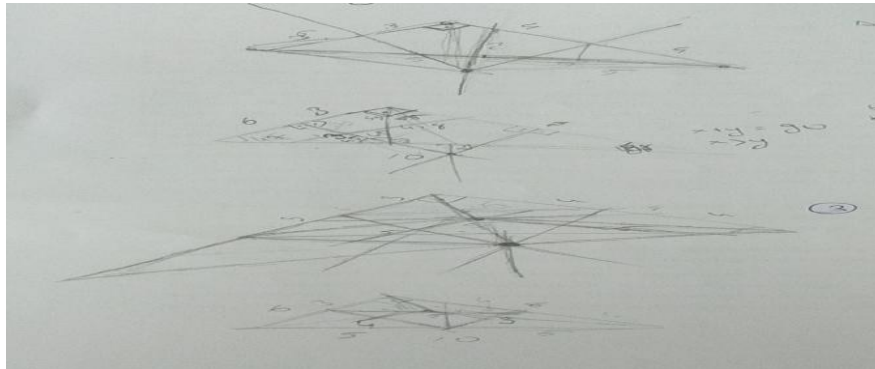
Araştırmacı: Üzerinde çıkınca şaşırdınız. Hatta nasıl ya dedi Ö8 değil mi? Onun sebebi de mi oydu? Yani şurada çıkmasını beklemediğin için mi şaşırdın (hipotenüs üzerindeki noktayı göstererek)

Ö10: Önceki çizimlerde sürekli tam ortasına noktaya çizmeye çalıştığımız için burada çıkınca biraz şaşırdık.

Öğrencilerin noktanın konumu ile ilgili algılarının araçla şekli oluşturmalarına kadar devam ettiği görülmüştür. Diğer öğrencilerden farklı olarak Ö18 noktanın olası konumları ile ilgili çizimler gerçekleştirmiştir. Noktanın konumunu bulmak için temsile dayalı işlevsel kavrayışı işe koşmuştur. Ö18'in kesişim noktasına yönelik çizimleri Şekil 4.15'te sunulmuştur.

Şekil 4.15

Ö18'e Ait Çizimler



Ö18'e ait çizimler kenar orta dikmelerin olası kesişme noktalarını yansıtmaktadır. Üç çizimde de kenar orta dikmelerin kesişim noktasının aranmıştır. Üçgenin içinde ve dışında kesiştiği iki durum görülmektedir. Öğrenci ile gerçekleştirilen görüşmede öğrenci kenar orta dikmeleri kenarortay olarak yorumladığını ifade etmiştir. Araştırmacı öğrenciye çizimlerinde kenarortaya yönelik bir temsil görmediğini ifade etmiş, araştırmacı ve Ö18 arasında şu diyalog gerçekleşmiştir;

Ö18: Ya şuraları sonradan çizmedim ama orta noktalarını birleştirdim

Araştırmacı: Şurası tamam ama ben şurada kenarortay hala görmüyorum

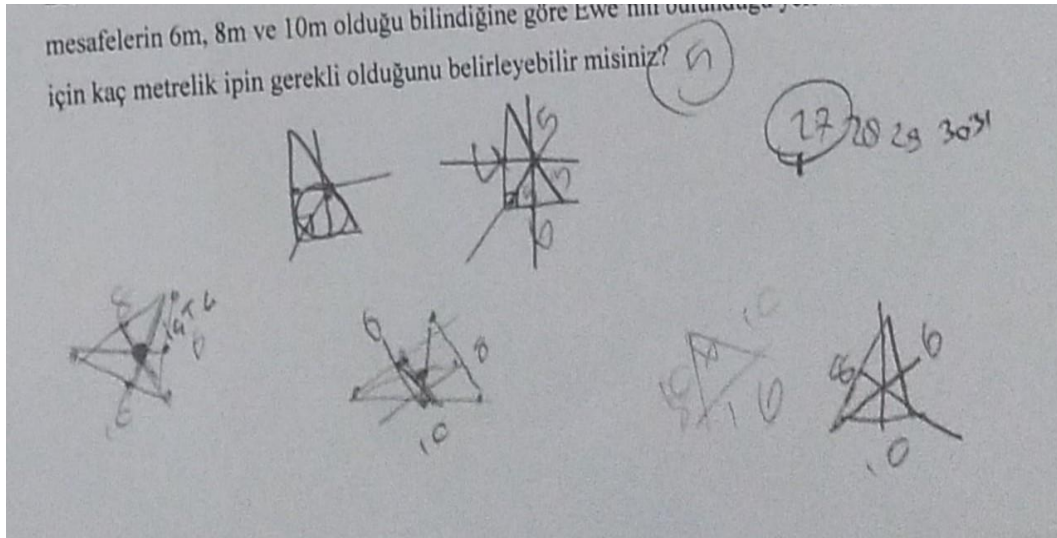
Ö18: Şurada ama ben sonrasını devam ettirmedim. Orta noktasını zaten bulduğum için

Öğrencinin bu açıklaması şekil üzerinde gerekli olmayan parçaların çizilmediğini göstermektedir. Şekil üzerinde çapalama yaptığı ve çizdiği kısım, hesaplamasını yapması gereken köşe ile birleşim noktası arası doğru parçaları olarak öne çıkmaktadır.

Problemde farklılaşan görsel temsillerden biri olan iç teğet çember temsili birinci grup katılımcısı olan Ö4 tarafından ortaya konulmuştur. Öğrenci neden böyle bir çember çizdiğini ifade edememiş, daha önce gördüğünü söylemiştir. Öğrencinin bu çizimi ve sonrasındaki ifadeleri söylemsel oluşum içerisinde sunulacak olan bulgulara kaynaklık etmiştir. Öğrencinin oturum süresince gerçekleştirdiği çizimler Şekil 4.16'da verilmiştir.

Şekil 4.16

Ö4'e Ait İç Teğet Çember Çizimi ve Öğrencinin Diğer Çizimleri



Öğrencinin çizimleri incelendiğinde birbirinden farklı formda üçgen çizimleri gerçekleştirdiği görülmektedir. Bu çizimler Ö1 ile gerçekleştirdiği sohbete bağlı gerçekleşmiştir. Bu sohbette üç kenarı bilinen üçgenin dar, dik ve geniş açılı olabileceği

düşüncesi ortaya çıkmıştır. En solda yer alan çizimde harfler ile sol üstte ise çizim ile iç teğet çember temsil edilmiştir.

Öğrencilerin diğer temsilleri incelendiğinde sadece dikliği ifade etmek amacıyla sembolik temsil kullandıkları belirlenmiştir. Kenarortay ile ilişkili çizimlerde kenarların eş paylaşımını sayısal değer atayarak temsil etmişlerdir. Öğrencilerin sözel temsilleri matematiksel dil ile problem bağlamında yer alan ifadeleri içermektedir. Üçgende köşe noktalarına kozalak ve çocuk isimleri, kenar orta dikmenin kenarı ikiye bölen dik şey, yerleşke, birleşilen yer vb. problem bağlamına paralel kullanılan sözel ifadelerdir. Bunun dışında problemin ilişkili olduğu üçgen, diklik, köşe, kenar, kenarortay, yarıçap, çember, açı gibi matematiksel kavramlar da diyaloglar içerisinde yer almıştır.

Öğrencilerin matematiksel çalışmada semiyotik oluşum yönüne ilişkin bulgular Tablo 4.8’de sunulmuştur.

Tablo 4.8

Öğrencilerin Semiyotik Oluşumları Yönelimi

Öğrenci	Epistemolojik Düzlem	Oluşumun yönü	Bilişsel Düzlem
Ö1 Ö3 Ö4 Ö12	Verilen uzunluklara sahip üçgenin dik üçgen olduğunun kodlanması	←	Dar açılı, dik açılı, geniş açılı üçgen çizimi
Ö5 Ö6 Ö18	Verilen uzunluklara sahip üçgenin dik üçgen olduğunun çözümlenmesi	→	Üçgenlerin dik üçgen olarak çizilmesi
Ö8 Ö9 Ö10 Ö11	Verilen uzunluklara sahip üçgenin dik üçgen olduğunun kodlanması	← - - - - -	Dar açılı prototip üçgen çizimi Araç ile üçgen çizimi
Ö3 Ö6 Ö8	Yardımcı elemanın kenarortay ve yükseklik olmadığının çözümlenmesi Üçgenin köşelerinden geçmek zorunda olmadığının çözümlenmesi	→	Kenarı iki parçaya ayıran, üçgenin köşelerinden geçmeyen dikme çizimi

Grupların üçgenin dik olması ile ilgili yönelimleri farklılaşmıştır. Birinci grup bilişsel düzlemde epistemolojik düzleme oluşum gerçekleştirirken, ikinci grup tersi yönde oluşum sergilemiştir. Üçüncü grup problemde tanımlanan üçgenin dik olduğunu araçla çizim öncesi yapılandıramamıştır. Görüşme sırasında üçgenin dik açılı olduğunu fark etmediklerini ifade etmişlerdir. Kenar orta dikme ile ilgili oluşum yönü üç öğrenci için epistemolojik düzlemde bilişsel düzleme gerçekleşmiştir. Öğrenci çizimlerinde köşelerden geçmeyen doğru parçaları temsilleri yer aldığı belirlenmiştir.

4.1.2.2 Kabilenin Güneşi problemi araçsal boyut bulguları

Bu başlık altında Kabilenin Güneşi probleminin çözümü sürecinde ortaya çıkan epistemolojik (artefekt) ve bilişsel (oluşturma) düzlem bileşenleri, enstrümantal oluşum ve araca dayalı işlevsel kavrayış bulguları sunulacaktır. Problemin epistemolojik düzlem bileşenleri, araç ile verilen uzunluklara bağlı üçgenin çizimi, kenar orta noktaların araç ile hesaplanması, kenar orta dikmelerin araç yardımıyla çizilmesi, köşelere olan uzaklığın araç ile ölçülmesi, çevrel çemberin araç ile çizilmesi ve üç noktadan geçen çemberin araç ile çizilmesi olarak belirlenmiştir. Problem için oluşturulan analiz tablosunda enstrümantal oluşum bileşenleri ve öğrencilerin bilişsel düzlemde ortaya koyduğu davranışlar Tablo 4.9'daki gibi olmuştur.

Tablo 4.9

Kabilenin Güneşi Probleminin Oluşturma ve İşlevsel Kavrayış Bulguları

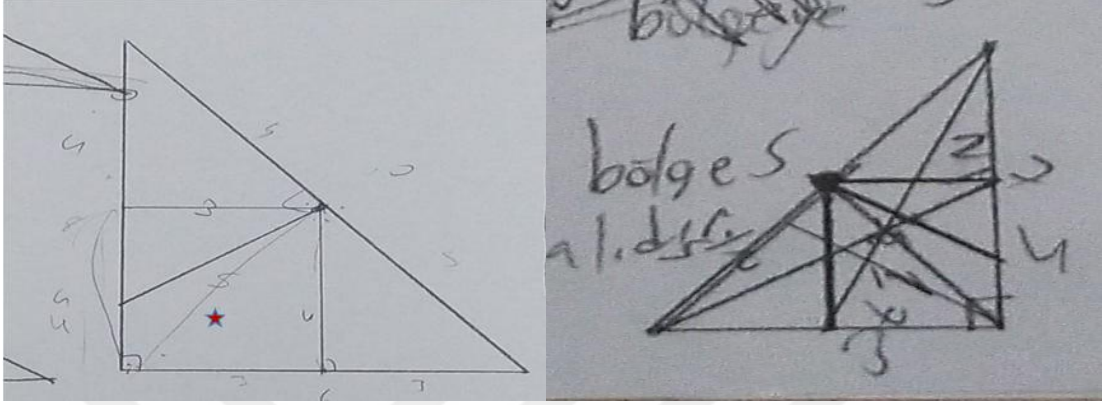
Oluşum		Bilişsel düzlem
<i>Enstrümantal Oluşum</i>		<i>Oluşturma</i>
Sıra Kavrayış	Verilen kenar uzunluklarına sahip üçgenin pergel-cetvel, Geogebra ile üç çizilmesi	Cetvelle üçgenin çizilmesi
	Kenar orta noktaların cetvel, Geogebra ile belirlenmesi	Cetvelle kenar orta noktaların belirlenmesi
	Kenar orta dikmelerin cetvel, Geogebra ile çizilmesi	Cetvelle kenar orta dikmelerin çizilmesi
	Şekil üzerinde ölçümlerin cetvel, Geogebra ile gerçekleştirilmesi	Kenar orta dikmelerin kesişim noktası ile köşeler arası mesafenin ölçülmesi
	Pergel, Geogebra ile çevrel çember oluşturulması	Pergel ve cetvel ile üç kenarı bilinen üçgenin çizilmesi
Araca Bağlı İşlevsel Kavrayış	Araç ile çeşitli üçgen formlarının çizilmesi	Dik açılı üçgen olduğunun araç ile belirlenmesi
	Farklı üçgen formlarının orta dikmelerin araç ile inşası	Kenar orta dikmenin kenarortay ve yükseklikten farkının araç ile belirlenmesi
	Farklı üçgen formları için kenar orta dikmelerin kesişim noktasının araç ile inşası	Kenar orta dikmelerin kesiştiği noktanın üçgenin kenarı üzerinde olduğunun belirlenmesi

Tablo 4.9 incelendiğinde enstrümantal oluşuma yönelik beklentilerin çevrel çemberi oluşturma adımları hariç karşılandığı görülmektedir. Gerçekleştirilen üç problem çözme oturumunun ikisinde problem araç desteği ile çözülmüştür. Sadece birinci grup teorik bilgiye dayalı çözüm gerçekleştirmiştir. İkinci grupta oturuma katılan üç öğrenciden ikisi (Ö5, Ö6) sadece cetvel kullanarak problemi bireysel çözmüştür. Üçüncü grup ise teorik olarak bir çözüm yolu bulamayınca pergel ve cetvel talebinde bulunmuş, çözümü grup

olarak yapılandırmıştır. Şekil 4.17’de ikinci grubun cetvel ile gerçekleştirdikleri çizimler verilmiştir.

Şekil 4.17

Enstrümantal Oluşuma Bağlı Ortaya Çıkan Çizimler



Ö6’nın cetvel ile üçgen çizimi

Ö5’in cetvel ile üçgen çizimi

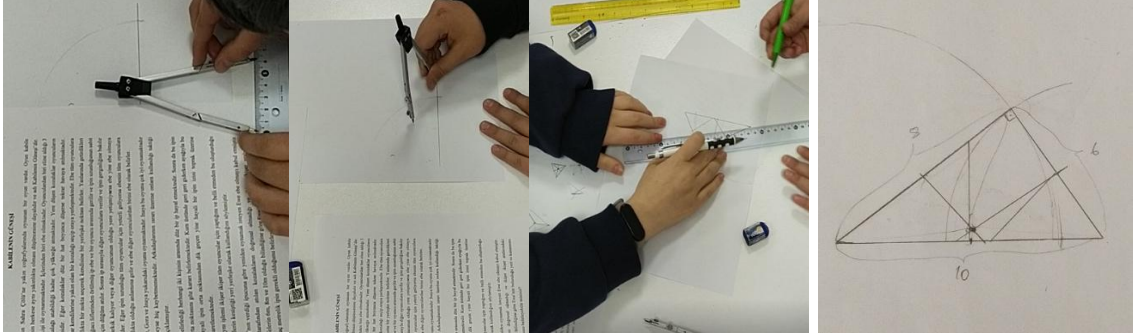
Öğrenci çizimleri incelendiğinde dik açılı üçgen, kenar orta dikme temsilleri, kesişme noktasının çizim üzerinde temsil edildiği görülmektedir. Her iki öğrenci de oluşum adımlarında benzer adımları izlemiştir. Oluşturma sürecinde pergel kullanmamışlardır. Öğrenciler çizime üçgenin dik açılı üçgen olduğu bilgisi ile başladıkları için pergel kullanmadıklarını ifade etmişlerdir. Cetvelin köşesindeki açının 90° olma özelliğini kullanarak önce birbirine dik olan kenarları çizmişlerdir. İki öğrencide birbirlerinden bağımsız çizim gerçekleştirmişlerdir. Ö5 benzerlikten yararlanarak yarı ölçüye sahip üçgen çizmiştir. Ö6’ya ait çizim incelendiğinde dik açının bulunduğu köşe ile hipotenüsün orta noktası arasında araçla gerçekleştirilen bir çizim bulunmamaktadır. Öğrenci burada sadece gerekli ölçümü gerçekleştirmiş ve sayısal sonuca ulaşmıştır. Öğrencilerin cetveli gönye olarak kullanmaları, dik üçgen çizimi için özelleştirmelerine bağlı olarak bu öğrencilerin enstrümantal oluşumlarının epistemolojik → bilişsel yönünde gerçekleştiği görülmektedir.

Üçüncü grup oluşturma sürecini birlikte gerçekleştirmiştir. Üç kenar uzunluğu bilinen üçgenin çizimi aşamalarını takip ederek önce üçgeni oluşturmuşlardır. Çizimi grup adına Ö10 gerçekleştirmiştir. Bunun için cetvel ve pergeli bir arada kullanmış, çizim soncunda üçgenin dik üçgen olduğunu fark etmişlerdir. Sonrasında kenar orta dikme adımlarını gerçekleştirip, ölçme ile sonuca ulaşmışlardır. Ancak pergel ile çizim esnasında yaşadıkları kaymalara bağlı olarak ölçüm hatası yapmışlardır. Sonucu yuvarlama yoluna gitmişlerdir.

Öğrencilerin oluşturma süreci ve çizimleri Şekil 4.18’de verilmiştir.

Şekil 4.18

Ö8, Ö9, Ö10 ve Ö11’e Ait Oluşum Süreci ve Çizim



Çizim incelendiğinde öğrencilerin kesişme noktasını tam olarak inşa edemedikleri görülmektedir. Bu durumun nedeni öğrencilerin doğru adımları izlemelerine rağmen pergelle gerçekleştirdikleri çizimlerde zorlanmalarıdır. Çizim sırasında pergelin açıklığında meydana gelen kaymalara bağlı hatalı çizim gerçekleşmiştir. Öğrenciler durumun farkında oldukları için ölçümde meydana gelen farkı yok saymışlardır. Öğrenciler görüşme sırasında bu durumu şu şekilde açıklamışlardır.

Ö8: Şimdi şöyle bir yer beş çıkıyordu. Bir yerde dört buçuktan fazla çıkıyordu böyle. Ben de dedim ki bizden kaynaklı değildir de kullandığımız araç gereçleri kaymasından dolayı diye düşündüm bir yer beş beş çıkıp diğerinin dört buçuktan dan fazla çıkması

Ö10: Hocam beşe çok yakındı öncesinde pergelimiz biraz kaydığı için ona verdik

Grup üç kenarı bilinen üçgeni araç gereç ile çizmeye yönelik adımları doğru sırada takip etmiştir. Geometrik inşa adımlarını izlemelerine bağlı sıralı kavrayışı kullandıkları belirlenmiştir. Çizimi gerçekleştiren Ö10’a grubun yönlendirme yaptığı görülmüştür. Üçgenin çiziminden sonra cetvel yardımı ile kenar orta dikmeler inşa edilmiştir. Bu inşa sırasında Ö10 kenarların orta noktasını ölçümle belirlerken, dik doğru parçalarını göz kararı belirlediği şekilde cetvel yardımıyla çizmiştir. Sıralı bir adım izlenmemiştir. Bunun sonucunda tek bir kesişim noktası oluşmamıştır. Üçüncü grupta enstrümantal oluşum birden fazla yönde gerçekleşmiştir.

Grup 2 ve grup 3’e ait matematik çalışma uzayı enstrümantal oluşum yönüne ilişkin bulgular Tablo 4.10’da sunulmuştur.

Tablo 4.10*Öğrencilerin Enstrümantal Oluşum Yönelimi*

Öğrenci	Epistemolojik Düzlem	Oluşumun yönü	Bilişsel Düzlem
Ö5 Ö6	İnşa edilecek üçgenin dik açılı olduğu bilgisine bağlı sadece cetvel ile oluşum adımları bilgisi Kenar orta dikme inşası adımlarının kodlanması	→ ←	Cetvelin gönye olarak işe koşularak dik üçgenin inşa edilmesi Kenar orta dikmenin yönergeye bağlı inşası, ölçüm yapma
Ö8 Ö9 Ö10 Ö11	Üç kenar uzunluğu bilinen üçgenin matematiksel araç ile inşa adımları bilgisi Kenar orta dikme inşa adımlarının kodlanması	→ ←	Üç kenar uzunluğu bilinen üçgenin pergel ve cetvel aracılığı ile çizilmesi Kenar orta dikmenin yönergeye bağlı inşası, ölçüm yapma

Grupların üçgen çiziminde araç desteğinden farklı şekilde yararlanmalarında dik açılı üçgeni fark etmeleri etkili olmuştur. Üçgen çiziminde ve kenar orta dikme inşasında oluşum yönü her iki grup için farklılaşmıştır. Bununla birlikte grupların oluşumları paralellik göstermiştir.

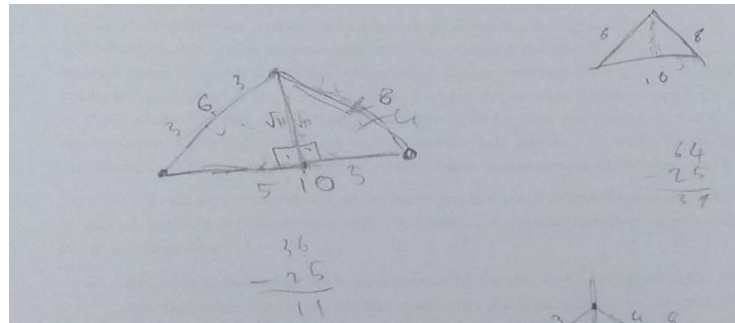
4.1.2.3 Kabilenin Güneşi problemi söylemsel boyut bulguları

Bu başlık altında Kabilenin Güneşi probleminin çözümü sürecinde ortaya çıkan epistemolojik (referanslar) ve bilişsel (ispatlama) düzlem bileşenleri, söylemsel oluşum ve söyleme dayalı işlevsel kavrayış bulguları sunulacaktır. İlgili problem için epistemolojik düzlem referansları; bir doğru parçasının orta noktasını bulma, bir doğru parçasına dikme indirme bilgisi, özel üçgenler bilgisi, dik üçgen bilgisi, üçgende yardımcı eleman bilgisi, üçgenlerde benzerlik bilgisi, ikizkenar üçgen bilgisi ve çemberin geometrik tanımı olarak belirlenmiştir. Problemin analiz tablosu içinde ifade edilen söylemsel oluşum durumları ile öğrencilerin oturumlarda ortaya koyduğu bilişsel düzlem verileri Tablo 4.11’ de verilmiştir. Öğrencilerle gerçekleştirilen üç oturumda da süreç kenar orta dikmenin kenarortay ve yükseklik ile durumunun değerlendirmesi ile başlamıştır. Problemden çizilmesi istenen yardımcı elemanın “kenarı ortadan ikiye bölmesi” özelliği öğrencileri kenarortay çizmeye yönlendirmiştir. Ancak aynı zamanda dik olması durumuna bağlı olarak üçgende yükseklik ile de ilişkilendirilmiştir. Öğrencilerin bu ilişkiyi arama şekilleri farklılaşmıştır. Ö11 sayısal doğrulama gerçekleştirirken, birinci grup söylemsel olarak durumu değerlendirmiştir.

Tablo 4.11*Kabilenin Güneşi Probleminin İspatlama-Muhakeme ve İşlevsel Kavrayış Bulguları*

Oluşum	Bilişsel düzlem
Söylemsel Oluşum	İspatlama -muhakeme
Kenar orta dikmenin yükseklik ve kenarortay ile ilişkisi	Üç kenarı bilinen tek bir üçgen çizilebileceğinin ifade edilmesi
Dik üçgende kenar orta dikmeye bağlı oluşan benzer üçgenlerin oluştuğu bilgisi	Kenar orta dikmenin kenarortay ve yükseklik olmadığının ifade edilmesi
Dik üçgende kenar orta dikme çizimine bağlı oluşan ikizkenar üçgen bilgisi	Kenar orta dikmenin üçgenin köşelerinden geçmek zorunda olmadığının ifade edilmesi
Bir üçgende kenar orta dikmelerin bir noktada kesişeceği bilgisi	Kenar orta dikmelerin kesişim noktasının üçgenin içinde olmak zorunda olmadığının ifade edilmesi
Dik üçgende kenar orta dikmelerin kesişim noktasının hipotenüs üzerinde olduğu bilgisi	Dik üçgende kenar orta dikmelerin hipotenüs üzerinde kesiştiğinin ifade edilmesi
Üçgende kenar orta dikmelerin kesişim noktasının üçgenin köşelerine eşit uzaklıkta olduğu bilgisi	Dik üçgende hipotenüse çizilen kenarortayın hipotenüsün uzunluğunun yarısına eşit olduğunun ifade edilmesi
Dik üçgende hipotenüse çizilen kenarortay uzunluğunun hipotenüs uzunluğunun yarısına eşit olduğu bilgisi	Kenar orta dikmelerin kesişim noktasının köşelere olan uzunluğunun yarıçap olduğunun ifade edilmesi
Üçgende kenar orta dikmelerin kesişim noktasının çevrel çemberin merkezi olduğu bilgisi	Üçgenin köşelerinden geçen çember çizilebileceğinin ifade edilmesi
Düzlemde doğrusal olmayan herhangi üç noktadan geçen bir çember çizilebileceği bilgisi	Düzlemde üç noktanın durumuna göre çember çizilme durumunun ifade edilmesi
Söyleme Bağlı İşlevsel Kavrayış	
Kenar orta dikmelerin farklı kesişim durumlarının aranması (üçgenin içinde, üzerinde, dışında)	
Tüm üçgenler için kenar orta dikmelerin köşelere eşit uzaklıkta olma durumunun aranması	Kenarortay ve yüksekliğin kenar orta dikme olma durumunun aranması
Bir üçgende kenar orta dikmelerin kesişim noktasının üçgenin çevrel çemberinin merkezi olduğunun aranması	Dar, dik ve geniş açılı üçgen için kenar orta dikmenin inşa edilmesi
Doğrusal olmayan üç noktadan geçen bir çember çizilebileceği bilgisinin aranması	Araç ile gerçekleştirilen çözümün şekil üzerinde benzerlik ilişkisi kurularak doğrulanması

Ö11'in yükseklik için gerçekleştirdiği işlemler Şekil 4.19'da verilmiştir.

Şekil 4.19*Ö11'in Kenarortay- Yükseklik İlişkisine Yönelik Çizim ve İşlemleri*

İlgili çizim incelendiğinde öğrencinin Pisagor bağıntısını kullanarak durumu değerlendirdiği, kenarortayın yükseklik olmadığı sonucuna ulaştığı görülmektedir. Ö1,Ö3 ve Ö4 arasında problem çözme oturumunda kenarortay ve yüksekliğe ilişkin şu diyalog gerçekleşmiştir.

Ö4: Sonra o da tek bir şey getiriyor. Kenarortay yapıyor. Üç kenarortayın birleşmesinden oluşan bir olay. Üç kenarortayın birleşmesi neydi?

Ö1 ve Ö3: Ağırlık merkezi

Ö4: Kenarortayların kesişim noktası. Dur. Yükseklik de olabilir. Dik gelen diyor.

(burada problem tekrar tekrar okunmuştur)

Ö3: Köşeye gelmek zorunda değil ki.

Ö1: Ama bize mesela kenarortay, açıortay ve yükseklik diye anlattıkları dik değil mi zaten?

Ö3: Değil.

Ö4: Sen ciddi misin? Bunun yüksekliği burası. Kenarortay var mı? (Geniş açılı üçgen çizerek yüksekliği üçgenin dışında temsil etmiştir).

Sessizlik ve problemi tekrar okuma

Ö4: Yüksekliklerin kesişim noktasına ne deniyordu? İç teğet?

Ö1 ve Ö3: İç teğet çember.

.....üçgenin dik açılı üçgen olmasına yönelik konuşmalar

Ö4: Buradan dik geliyorsa kenara dik geliyor. Yükseklik o zaman

Ö3: Tamam ama yükseklik olmak zorunda değil

Ö4: Dik geçen orta noktası. Bu bir ikizkenar bence.

Ö1: Altı, sekiz, on.

.....problemi tekrar okuma

Ö4: Kenarortay mı?

Ö1: Değil. Mantık olarak yükseklik köşeden çıkmaz mı? Ben çizdim ama kesişmiyor. Bir dakika zaten eşkenar üçgende değil mi kesişmeleri zorunluluğu?

Ö3: Hepsinde kesişir.

Ö4: içte kesişme zorunluluğu yok

Ö1: Tamam dar açılılarda içte kesişir.

Öğrenciler arası konuşmalar önemli noktaları ortaya koyacak, konuşma bağlamını yansıtacak şekilde kısaltılmıştır. Video transkriptinin yukarıda sunulan kısmı incelendiğinde kenar orta dikmenin kenarortay ve yükseklik olma durumunun değerlendirildiği görülmektedir. Bir yardımcı elemanın hem yükseklik hem de kenarortay olması için eşkenar ve ikizkenar üçgen olma durumu tartışılmıştır. Öğrenciler üçgenin diklik merkezini iç teğet çemberin merkezi olarak ifade etmişlerdir. Görüşme sırasında Ö4 bu kavramı daha önce duyduğunu ifade etmiştir. Oturum sırasında Ö4 farklı uzunluklara sahip üçgenin aranan koşulları sağlaması için “ikizkenar” olma durumunu düşünmüştür. Ö1 ise eğer eşkenar değilse çizilmesi gereken yardımcı doğruların kesişmeyebileceği genellemesini yapmıştır. Ancak üçgenlerde diklik merkezinin konumuna bağlı üçgenin dışında kesişme durumunu referans alarak kenar orta dikmelerin kesişme yerinin de üçgenin içinde olmayabileceğini ifade etmişlerdir. Problemin çözümüne yönelik en önemli adımlardan biri öğrencilerin kenar orta dikmelerin üçgenin köşelerinden geçmek zorunda olmadığını fark etmeleridir. Diğer önemli söylemsel kavrayış ise kesişme noktasının üçgenin içinde olmak zorunda olmadığının ifade edilmesidir. Bu noktadan hareketle birinci grup dik üçgen için bir çözüm süreci başlatmıştır. Ö4 dik üçgende hipotenüse ait kenarortay bağıntısı ile problemi çözmüştür. Grup sayısal sonuca teorik bir yol izleyerek ulaşmıştır. Ö4 problemi dar açılı üçgen için de çözmek istemiştir. Grup içi diyalog şu şekilde olmuştur.

Ö3: Evet. Senin yaptığın gibi yaparsak 5 yeterli olur.

Ö4: Tamam işte şimdi de dar açılıya bakacağım dik açıdan sonra.

Ö1: Dar açı olur mu? Burada en az diye bir şey kullanmamış. En aza bakarsak beş yeterli olur.

Ö4: Baksana dik yaptığımızda burası 10 geliyorsa (dik açının karşısına gelen kenarın 10 m olmasını ifade etmektedir) dar yaptığımızda daha küçük bir şey olması lazım 10’dan. O zaman dik.

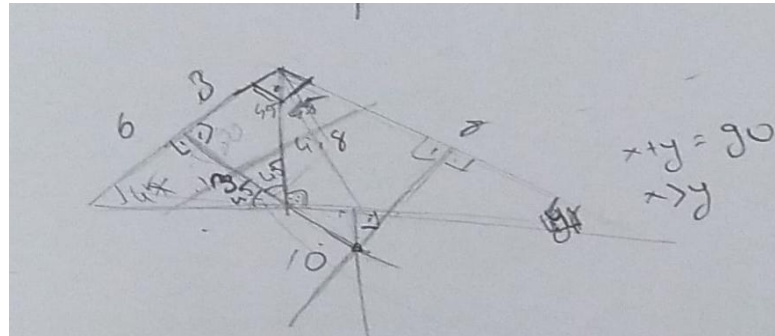
Ö1: Sorun şu. Sen dik yaptığında (öğrenci burada aç kenar ilişkisini kurmuştur). Ha o zaman dik olmak zorunda.

İlgili diyalog incelendiğinde grubun problemi çözdükten sonra genelleme yapmak isterken verilen üçgenin sadece dik açılı olabileceğini fark ettikleri görülmektedir. Grupla oturuma katılan Ö12 çizim gerçekleştirmesine karşılık süreç içerisinde aktif görev almamıştır.

Kenar orta dikmelerin kesişim noktasını belirlemeye yönelik eylemler Ö18 hariç ikinci ve üçüncü gruptaki öğrencileri araç kullanmaya yönlendirmiştir. Öğrenciler üçgenin içinde bir kesişme noktası belirlediğinde problemde istenen uzunluğu hesaplayabilecekleri bir teorik bilgiye sahip olmadıklarını ifade etmişlerdir. Bu nedenle araç desteği ile daha doğru bir çizim ve ölçme yapma ihtiyacı hissettiklerini aktarmışlardır. Üçüncü grupta Ö10 ilgili uzunluğu bulmak için üçgende alan hesaplamayı kullanmayı planlamış ancak vazgeçmiştir. Görüşme sırasında durumu “*Ben en başta yani çizgileri çektikten sonra yani hocam buralarda üçgen olduğunu fark ettiğim için aklımdan öyle geçti hocam. Buranın alanını bulursak acaba oradaki uzaklığa ulaşabilir miyiz diye. Ondan sonra arkadaşlarımla paylaşınca hocam onlar da şey dedi; zaten yüksekliği bilmemiz lazım. Yüksekliği de bilmediğimiz için yapamadık. Yüksekliği bulamadığımız için*” şeklinde açıklamıştır. Üçgenin dik açılı olduğunu belirleyemeyen grup alanı kullanamamıştır. Tüm gruplar problemin sayısal cevabı olan 5 metre değerini hesaplamıştır. Ancak sonuca ulaşan üçüncü gruptan Ö9 bulduğu sonucu teorik olarak ifade edemediği için “mantığını kavrayamadığı” bir problem olarak tanımlamıştır. Ölçüm sonucunda sayısal cevaba ulaşan Ö6 teorik olarak doğrulama gerçekleştirmiştir. Problemin sonucunu anlamlandırmak için üçgende benzerlik ilişkisi kullandığını ifade etmiştir. Çizdiği şekil (bkz. Şekil 4.17 yıldız ile belirtilen çizgi) üzerinde teorik doğrulama için kenar-kenar-kenar benzerliği ilişkisi kurduğunu, 3-4-5 üçgeni aradığını ifade etmiştir. Cetvel ile çizim gerçekleştirmesine rağmen ölçüm yerine referans sistemi ile doğrulama yapmıştır. Teorik bir çözüm planlayan Ö18 çözüm için üçgende açı ve kenar ilişkisinden yararlanmış, kısmen doğru bir işlevsel kavrayış eylemi gerçekleştirmiştir. Ö18’in teorik sisteme dayalı çizimi Şekil 4.20’de sunulmuştur.

Şekil 4.20

Ö18’e Ait Çizim



Öğrencinin çizimi incelendiğinde doğru açı kenar ilişkisi kurduğu, bu ilişkiyi kenar uzunluklarına yansıttığı, 6 ve 8 santimetre uzunluğundaki kenarların kenar orta dikmelerini doğru şekilde temsil ettiği görülmektedir. Çizimde öğrencinin hipotenüse ait kenar orta dikmeyi inşa edemediği görülmektedir. Sayısal bir cevap sunmayan tek öğrenci olmuştur.

Problemin çözümü sonucunda epistemolojik düzleme bağlı beklentilerden biri olan dik üçgende hipotenüse ait kenarortayın özelliğinin ifade edilmesi karşılanmıştır. Birinci grup problemi Ö4 tarafından kullanılan teorik bilgiye bağlı çözmüştür. Oturum sırasında Ö4 “Bir saniye ortadan ikiye böldüğüne göre süper üçlü vardır değil mi burada” şeklinde bir ilişkiyi sözel olarak ifade etmiştir. Ancak öğrencinin bu özelliği dik açılı üçgenler ile sınırlandırmadığı görülmektedir. Aynı ilişkiyi dar açılı üçgenlerde de kontrol etmeyi düşünmüştür. Yukarıda grup içi diyalogda sunulan şartlar sonrasında bu eylemden vazgeçmiştir. Birinci grup ayrıca a priori beklentiler bağlamında elde edilmesi istenen, kesişim noktasının köşelere uzaklığının eşit olmasına bağlı yarıçap olma durumu, üçgenin köşelerinden geçen çemberin merkezinin özelliği ve düzlemde herhangi üç noktadan geçen çemberin durumuna yönelik genelleme yapmışlardır. Grupla gerçekleştirilen görüşmeye ilişkin diyalog aşağıdaki gibi olmuştur:

Ö4: Herhangi bir yere üç nokta koyduğumuzda oradan geçen illaki bir çember vardır.

Araştırmacı: Bunu nereden çıkardın?

Ö4: Çünkü zaten bunları hani böyle düşündüğümüz zaman 5 5 olduğu zaman bunları yarıçap olarak da alabiliriz buradan çember de çizebiliriz.

Araştırmacı: Peki noktaların özel bir durumu olur mu? Noktalar yani hani böyle olursa ya da şöyle olursa gibi özel bir durum genelleme yapabiliyor muyuz?

Ö4: Ben yapamıyorum.

Ö3: Doğrusal olmaması gerekiyor noktaların.

Araştırmacı: Doğrusal olursa nasıl olur Ö3?

Ö3: Noktalardan biri çemberin içinde kalıyor.

Araştırmacı: Noktalardan biri çemberin içinde

Ö3: Yani

Ö1: 3 noktadan geçen bir çember çizemeyiz. İkisinden geçen bir çember çizebiliriz.

Öğrenciler: İkisinden geçer birinden geçmez.

Araştırmacı: İkisinden geçer biri içinde kalır diyorsun sen.

Ö3: Yani dışında da kalabilir.

Öğrencilerin elde ettikleri genellemeyi düzlemdeki noktaların farklı durumları için genişlettikleri belirlenmiştir. İkinci grupta yer alan Ö5 ise sadece üçgenin köşelerinden geçen bir çember oluşacağına yönelik söylem geliştirmiştir. Bu bulgu oturum sırasında gözlemlenmemiş, görüşme sırasında ortaya çıkmıştır. Görüşmeye ait döküm şu şekildedir:

Ö5: Üç köşe yuvarlak oluşturuyor.

Araştırmacı: Üç köşe derken daha önce gördün mü?

Ö5: hatırlamıyorum

Araştırmacı: Biraz daha açar mısın? Kendi cümlelerinle. Ne anladıysan ne söylemek istiyorsan ne çıkardıysan?

Ö5: 3 noktadan geçen bir dairenin ortasına yerleşince o üç noktaya da uzaklıkları eşit oluyor.

Araştırmacı: O uzaklık dediğin?

Ö5: Yarıçap

Öğrencinin söylemleri incelendiğinde doğal dili kullandığı görülmektedir. Üçgenin köşeleri ile çember arasında ilişki kurmuş, problem bağlamında bulunması istenen uzaklığın yarıçap olduğunu yapılandırmıştır. Ancak elde ettiği genelleme ile ilgili başka veri sunmamıştır.

Birinci grubun oluşturduğu çalışma uzayının epistemolojik düzlem ve bilişsel düzlemi arasında fark olmadığı görülmektedir. Ö1 dik açılı üçgen için ifade edilen yukarıdaki durumların geniş açılı ve dar açılı üçgen için doğrulamasını yapmak istemiştir. Bu davranış genelleme yapmaya yönelik önemli bilişsel davranıştır. Ancak öğrenci geniş açılı üçgeni 6-8-10 cm uzunlukları ile oluşturmaya çalışmıştır. Ö4 ile aralarında geçen diyalog sonucunda üç kenarı bilinen tek bir üçgen çizilebileceğini fark ederek süreci tamamlamamıştır.

Problem çözme oturumuna katılan öğrencilerin söylemsel oluşum yönelimlerine yönelik bulgular sonucunda Tablo 4.12 oluşturulmuştur.

Tablo 4.12

Öğrencilerin Söylemsel Oluşum Yönelimleri

Öğrenci	Epistemolojik Düzlem	Oluşumun yönü	Bilişsel Düzlem
Ö1 Ö3 Ö4	Çemberin geometrik tanımı Düzlemde üç noktanın olası durumları bilgisi	→	Eylem 1: Üçgende kenar orta dikmelerin kesişme noktasının köşelere eşit uzaklıkta olmasına bağlı yarıçap olduğunun ifade edilmesi Eylem 2: Bu yarıçapa bağlı üçgenin köşelerinden bir çember çizileceğinin ifade edilmesi Eylem 3: Düzlemde üç noktanın çember oluşturma koşullarının ifade edilmesi
Ö4	Bu bağıntının dik üçgene ait bir bağıntı olduğu bilgisi	←	Kenarortay uzunluğunun kenarın yarısına eşit olduğu durumun ifade edilmesi
Ö5 Ö6 Ö8 Ö9 Ö10 Ö11	Dik açılı üçgende kenar orta dikmelerin kesişim noktasının hipotenüsün orta noktasında olduğu bilgisi	←	Geometrik inşa ile elde edilen üçgen üzerinde ilgili uzunlukların hesaplanması
Ö6	Üçgenlerde benzerlik bağıntıları	→	Cetvelle hesaplanan ölçüm sonucunun üçgenlerde benzerlik ilişkisi üzerinden kontrol edilmesi
Ö5	Çevrel çember bilgisi	←	Belirlenen kenar orta dikme kesişim noktasının köşelere eşit olduğu bulgusuna bağlı yarıçap olduğunun belirlenmesi

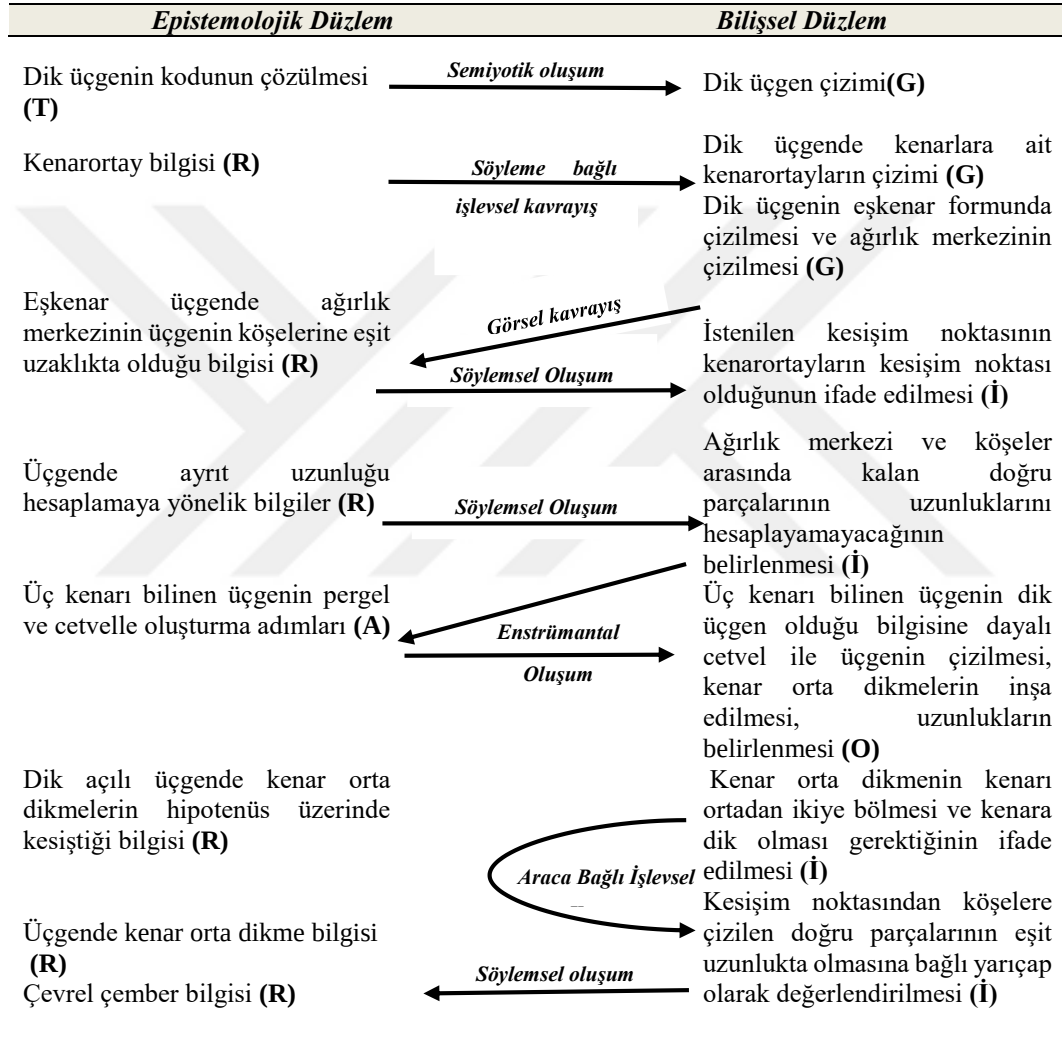
Birinci grupta oturuma katılan Ö12 söylemsel oluşuma yönelik veri sunmamıştır. Birinci grupta yer alan Ö4 dik üçgende kenarortay ilişkisiyle ilgili bulgulara gruptan ayrılmıştır. Birinci gruba benzer şekilde Ö5 üçgenin köşelerinden geçen çemberi yapılandırırken aynı grupta yer alan Ö6 üçüncü grupta yer alan öğrencilerle aynı yön ve şekilde söylem geliştirmiştir. Bu öğrencinin aynı zamanda ölçümle bulduğu sonucu teorik sisteminde sahip olduğu üçgenlerde benzerlik üzerinden doğrulamasına bağlı ikinci bir oluşum gerçekleştirdiği tespit edilmiştir. Problemin genelinde semiyotik oluşumda ifade edilen ancak referans sistemi içerisinde de ele alınabilecek özel üçgenler, üçgende yardımcı

elemanlar gibi temel kavramlara ilişkin referans sistemi aktif olarak tüm öğrenciler tarafından kullanılmıştır.

Kabilenin Güneşi probleminde eksiksiz matematiksel çalışma gerçekleştiren Ö5'e ait çalışma uzayı Tablo 4.13'te sunulmuştur.

Tablo 4.13

Ö5'e Ait Çalışma Uzayı Dolaşımı



Not * :T: temsil; A: artefekt; R: referans; G: görselleştirme; İ: ispat O: oluşturma

4.1.3 Bungalov Ev problemi

Problem çözme oturumu birinci grupta dört (Ö1,Ö3,Ö4,Ö5) , ikinci grupta iki (Ö6,Ö15) ve üçüncü grupta beş (Ö8,Ö9,Ö10,Ö11,Ö13) olmak üzere toplam on bir öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Problem çözme oturumu öğrencilerin görsel temsil kayıtları oluşturmaları ile başlamıştır. Problemde evin tabanı olan dikdörtgenin çiziminin

gerçekleştirilmesinin yanı sıra doğrudan 3B şekil çizimler de gerçekleştirilmiştir. Dikdörtgen taban çizimi ile süreci başlatan öğrenciler bu tabana bağlı olarak evin diğer yapı malzemelerini yerleştirmeye yönelik çizimler gerçekleştirmişlerdir. Öğrencilerin temsile dayalı işlevsel kavrayışlarının çeşitlenmesine bağlı olarak görsel temsillerin çeşitlendiği görülmüştür. Problemin çözümü sırasında öğrencilerin alan-hacim ilişkisine yönelik boyut kavramı ilişkilendirmesine sahip oldukları görülmüştür. Ö4 ve Ö10 klasik ev çizimi gerçekleştirmiştir. Problemde üçgen yüzeyler olduğu ifade edildiği için Ö1 ve Ö6 üçgen piramit çizmişlerdir. Ö3, Ö5, Ö11 ve Ö15 üçgen prizmayı problem metni üzerinden yapılandırırken, Ö4 ev çiziminden sonra gerçekleştirmiştir. Ö3 ve Ö5 üç boyutlu prizmayı iki boyutlu olarak temsil etmişlerdir. Ö1 ve Ö9 tabanın etrafını çevreleme elemanının bir ayırıtı olan 5 m uzunluk ile kaplayarak çözüm arayışı gerçekleştirdi. Ancak ayırıt uzunluğu 6 m ve 10 m olan dikdörtgenin 6 metre uzunluğa sahip kenarını 5 metre uzunluğa sahip kenar uzunluğu ile tam çevreleyemedikleri için çözüm gerçekleştirmemişlerdir. Birinci grup öğrencilerinden Ö3 ve Ö4 grup arkadaşları Ö1'e kalem, silgi, usb bellek ve el ile şekli açıklamıştır. Diğer gruplarda araç kullanımı gerçekleşmemiştir. Öğrencilerin yapıyı oluşturan elemanları yerleştirirken üçgen eşitsizliğini kullanmaları beklenmiştir. Oturumlar sırasında belirlenemeyen bu kullanım görüşmeler sırasında ortaya çıkmıştır. Problemde aranan şeklin üçgen prizma olduğu anlaşıldıktan sonra hesaplama kısmında öğrenciler zorlanmamışlardır. Sadece Ö15 şeklin tabanını esas alarak işlem gerçekleştirdiği için hatalı sonuç bulmuştur. Üçgen prizmayı yapılandırmış olmasına rağmen dikdörtgenin alanı ile taban üçgeninin yüksekliğini çarparak dikdörtgen prizmanın hacmini elde etmiştir. Üçgen prizmanın yüzey alanının hesaplanmasında dikdörtgenin alanı, ikizkenar üçgenin alanı formülünden yararlanılmıştır. Prizmanın hacminin hesaplanması ise farklılaşmıştır. Üçgen prizmanın hacim bağıntısı bilgisine sahip olmayan öğrencilerin silindirin hacmi (Ö5), dikdörtgen prizmanın hacminden (Ö3,Ö4) yararlandıkları görülmüştür. Diğer uygulama problemlerinde kullanılmayan, bu problemde baca yüksekliği ile verilen fazla bilgi öğrenciler tarafından fark edilmemiştir.

4.1.3.1 Bungalov Ev problemi semiyotik boyut bulguları

Bu başlık altında Bungalov Ev problemine ilişkin öğrencilerin çözüm sürecinde ortaya koydukları temsillerin epistemolojik (temsil)- bilişsel (görselleştirme) düzlem bileşenleri,

semiyotik oluşum ve temsile dayalı işlevsel kavrayış bağlamında elde edilen bulguları sunulmuştur.

Bungalov Ev problemi için epistemolojik düzlem temsil bileşenleri dikdörtgen temsili, üçgen temsili, üçgen prizma temsili, yükseklik temsili ve taban temsili olarak belirlenmiştir. Problemin analiz tablosunda belirlenen semiyotik oluşum bileşenleri ve problem çözme oturumlarında öğrencilerin görselleştirme kayıtları sonucunda Tablo 4.14 oluşturulmuştur.

Tablo 4.14

Bungalov Ev Problemi Öğrencilerin Görselleştirme ve İşlevsel Kavrayış Bulguları

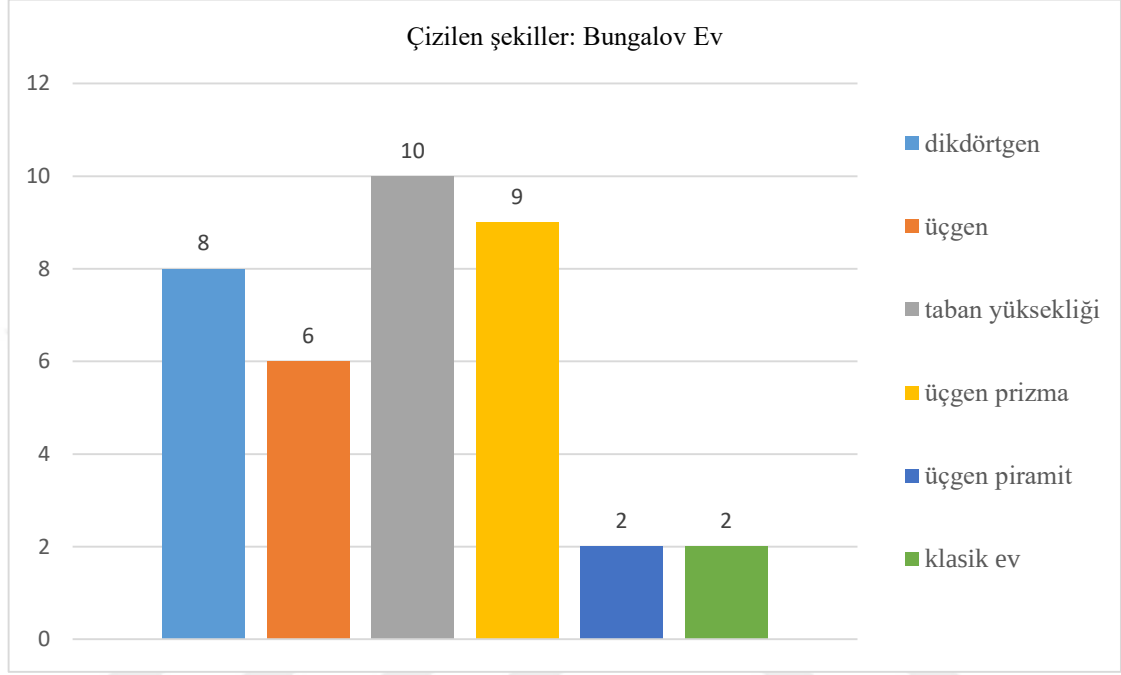
Oluşum		Bilişsel düzlem
Semiyotik Oluşum		Görselleştirme
Görsel Temsil	Taban için dikdörtgen çizimi	Üçgen
	Üçgensel yüzeyler için üçgen çizimi	Dikdörtgen
Sembolik Temsil	Verilen yüzeylere bağlı üçgen prizma çizimi	Üçgen piramit
	Şömineye bağlı taban yüksekliği çizimi	Klasik ev ve çatı çizimi
Sözel Temsil		Üçgen prizma
		Taban
Temsile Bağlı İşlevsel Kavrayış		Yükseklik
		İkizkenar üçgen
Sözel Temsil		Alan kaplama
		Yükseklik
Temsile Bağlı İşlevsel Kavrayış		Yüzey alanını malzeme miktarı olarak ifade etme
		Tabanı oluşturan dikdörtgenin zemin olarak ifade etme
Sözel Temsil	Sözel ve günlük konuşma dili ile ifadeler (örn: yüksekliğin şömine ile ifade edilmesi)	Yanal yüzeyin yan duvarlar olarak ifade edilmesi
		Yüksekliğin genişlik olarak ifade edilmesi
Temsile Bağlı İşlevsel Kavrayış	Verilen bilgilere bağlı çizimler ile yapının aranması	Üçgen prizma oluşumuna üçgenleşme ifadesinin kullanılması
	Yüzeylerin ayrı ayrı çizim ile ifade edilmesi	Yüksekliğin 3. boyut, z ekseni, genişlik, uzun kenar olarak ifade edilmesi
Temsile Bağlı İşlevsel Kavrayış		Evin tabanına bağlı diğer yüzeylerin çizimi
		Evi oluşturan parçaların ayrı ayrı çizimi
Sözel Temsil		Evi oluşturan parçaların çeşitli şekillerde birleştirme denemeleri
		Dikdörtgen piramit çizimi

Tablo 4.14 incelendiğinde semiyotik oluşum için belirlenen görsel temsillerle birlikte farklı çizimlerin gerçekleştiği görülmektedir. Öğrencilerin birden fazla çizim gerçekleştirdikleri, birbirlerinden farklı nitelik ve nicelikte şekil çizdikleri görülmüştür.

Aynı geometrik şeklin çiziminde de farklılaştıkları belirlenmiştir. Öğrencilerin görsel temsilleri gerçekleştirme dağılımı Şekil 4.21’deki gibi olmuştur.

Şekil 4.21

Çizilen Şekiller: Bungalov Ev



Şekil 4.21 incelendiğinde öğrencilerin 8’i problemde verilen dikdörtgeni çizerek çözüme başlamıştır. Dikdörtgen çiziminde prizma çizimi içinde yer alan taban veya yan yüzler kabul edilmemiş, üç boyutlu çizimler bütünsel olarak yorumlanmıştır. Dikdörtgen levhaların birleştirilmesi ile oluşan eve ait üçgensel yüzeyi öğrencilerin 6’sı çizerek görselleştirmiştir. Taban yüksekliği öğrencilerin en çok çizim gerçekleştirdikleri matematiksel nesne olmuştur. Bunun yanı sıra görüşmelerde öğrencilere problemi okuduklarında akıllarına hangi matematiksel nesne veya nesnelerin geldiği sorulduğunda, üçgen, dikdörtgen ve üçgen prizma olarak cevaplandırmıştır. Çözümde aktif kullanılan yüksekliğe dair bir söylem gerçekleşmemiştir. Oturuma katılan öğrencilerin 9’u üçgen prizmayı çizmiştir. Ancak öğrencilerin üçgen prizma çizimleri 2B ve 3B yansıtmaları, çizim perspektifleri açısından farklılaşmaktadır. Öğrencilerin üçgen prizma çizimleri Şekil 4.22’de verilmiştir.

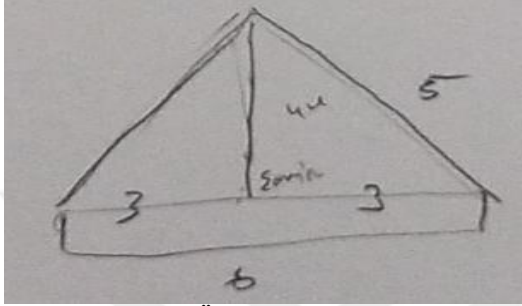
Şekil 4.22

Öğrencilerin Üçgen Prizma Çizimleri



Ö5'e ait çizim

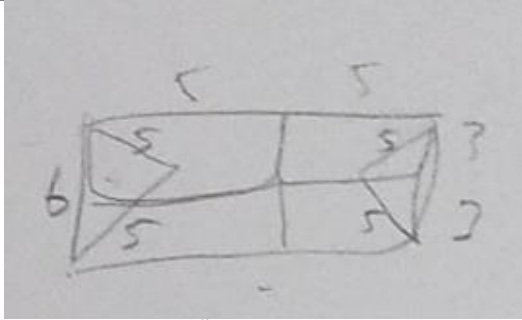
Öğrencinin çizimi 2B özelliktedir. Öğrenci şekle üçüncü boyutu şeklin sağ alt köşesine çizdiği ve 10 metre olduğunu ifade ettiği çizgi ile eklemiştir. Görüşme sırasında Ö5 çizdiği üçgeni taban olarak nitelendirmiş ve yüksekliği 10 olarak ifade etmiştir.



Ö3'e ait çizim

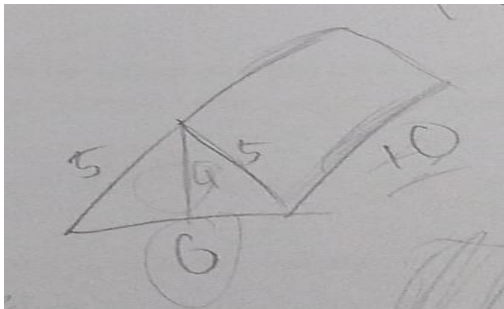
Ö3 görüşmede çizime yönelik şu açıklamayı gerçekleştirmiştir:

Hayır üçgen prizma yaptım. Biraz üç boyutlu gibi durmuyor ama farkındayım. Aslında burası taban hani. Burası 10 metre böyle durmadığını biliyorum. 3 boyutlu nasıl çizeceğimi gösteremediğim için buraya altı dedim. Üç üç diye bölüp burası arkaya doğru 10 metre devam ediyor tam çizemedim

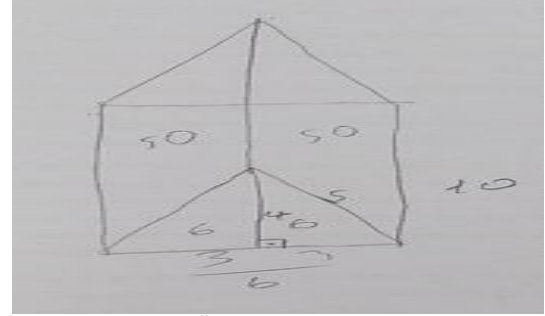


Ö9'a ait çizim

Ö9'un çizimi üçgen prizmanın yukarıdan perspektifine yöneliktir. Öğrenci parçalı çizim gerçekleştirmiştir. Çizdiği şeklin çözüm için doğru şekil olduğunu "Daha sonra fark ettim bungalov evin bu şekilde olacağını ve uçları birleşerek. Böyle böyle daha sonra zaten bir kenarı 10. Bunlara beşer beşer iki tane olacak şekilde düzelttim" şeklinde açıklamıştır.



Ö11'e ait çizim



Ö13'e ait çizim

Ö3 ve Ö5'e ait çizimler üç boyutlu bir yapıyı temsil etmese de oluşturdukları çalışma uzayında çizimlerini 3B olarak algılamışlardır. Her iki öğrencinin de çizimleri benzerlik göstermektedir. Ö5 farklı olarak prizmanın yüksekliğini de temsil etme ihtiyacı hissetmiştir. Ö9, Ö11 ve Ö13 tarafından gerçekleştirilen çizimler 3B uzayı yansıtmaktadır. Ancak çizim perspektifleri farklılık göstermektedir. Ö9 ve Ö11 problemde ifade edildiği gibi dikdörtgen yüzeyi üzerine oturtulmuş üçgen prizma çizmişlerdir. Bu çizimler problemin evin tabanını 6x10 metrelik dikdörtgen bölge üzerine

oturtulma bağlamına yönelik gerçekleşmiştir. Ö13 ise problemin bağlamından uzaklaşarak üçgen prizmanın prototip çizimini yapmıştır.

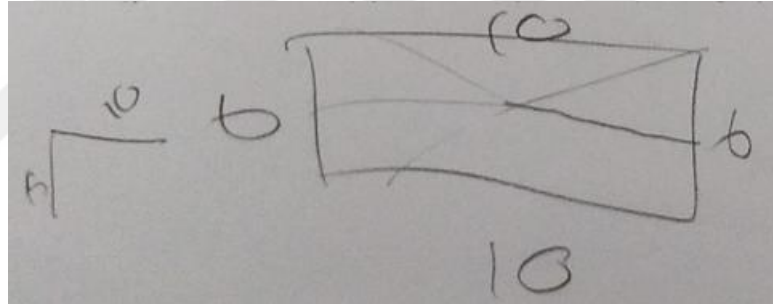
Problem metninde üçgen ve dikdörtgen yüzeylerin tanımlanmasına bağlı dikdörtgen piramit çizimi Ö1 ve Ö6 tarafından gerçekleşmiştir. Öğrencilerin bu temsil kaydını oluşturmaları işlevsel kavrayışa yönelik olmuştur. Ö1 problemi okuduğu anda algısal kavrayış ile şekli şu şekilde algıladığını ifade etmiştir.

Ö1: Dikdörtgen ve üçgen üç boyutlu üçgenlerden oluşan bir de o anda piramit mi prizma mı olduğunu ayırt edemediğimiz için üçgenlerden oluşan bir üç boyutlu hacimli olan bir yapı.

Öğrencinin bu algı ile oluşturduğu üçgen piramit, boyutları anlamak amacı ile gerçekleştirdiği işlevsel kavrayışa yönelik çizim (solda kesişen doğru parçaları) Şekil 4.23'te sunulmuştur.

Şekil 4.23

Ö1'in Algısal Kavrayışa ve İşlevsel Kavrayışa Ait Çizimleri



Üçgen piramit çizimi gerçekleştiren diğer bir katılımcı Ö6 ile gerçekleştirilen görüşmede araştırmacı ve öğrenci arasında şu diyalog gerçekleşmiştir:

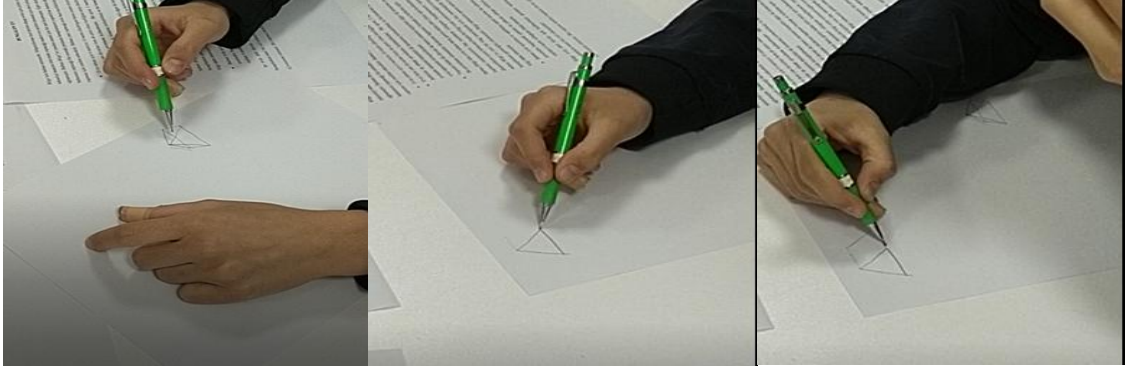
Araştırmacı: Şekil çizmenin ne gibi bir faydası oldu arkadaşlar? Kendi cümlelerinizle ifade eder misiniz? Bir de soruyu okurken şekli çiziyorsunuz ya o şekli neden çiziyorsunuz? Birden fazla şekil mesela. Buraya bir piramit çizdin. Bu piramidi çizmenin sana ne faydası oldu?

Ö6: Bir bungalov ev hayal ettim. O bungalov evin şeklinin piramide benzemediğini anlamama yardımcı oldu.

Bu çizimin aradığı şeklin ne olmadığına karar vermede etkili olduğunu ifade etmiştir. Öğrencinin kamera kaydı görüntüleri incelendiğinde çalışma kağıdının bir köşesinde dikdörtgen piramit çizimi gerçekleştirdikten sonra üçgen prizma çizimi yaptığı görülmektedir. Şekil 4.24'te öğrencinin ilk çizimleri sunulmuştur.

Şekil 4.24

Ö6'nın Problem Çözme Oturumundaki Çizimleri ve İzlediği Sıra



Ö1 ve Ö6 piramit çizimi ile çözüm sürecini başlatmış olmalarına karşın doğru sayısal sonuca ulaşmışlardır. Öğrencilerin işlevsel kavrayışa bağlı gerçekleştirdikleri çizimlerden bir kısmı Şekil 4.25'te sunulmuştur.

Şekil 4.25

Öğrencilerin İşlevsel Kavrayışa Yönelik Çizim Örnekleri

İşlevsel Kavrayış davranışı	Öğrenci Çizimleri
Prizmanın parçalarını çizme Sırası ile Ö11, Ö10	
Evin tabanına bağlı diğer parçaları yerleştirme Sırası ile Ö8, Ö13, Ö9	
Klasik ev çizimi Sırası ile Ö10, Ö4	

İşlevsel kavrayışa yönelik prizmanın parçaları (Ö8,Ö10, Ö11) , evin tabanına bağlı diğer parçaları yerleştirmeye yönelik çizimler (Ö1,Ö8, Ö9, Ö13), klasik ev çizimi (Ö4, Ö10) çözüm için doğru temsili oluşturulmasına yönelik gerçekleşmiştir. Ö8 ve Ö9 parçaları çizerek evin yapısını anlamayı planlamışlardır. Ö11 ise parçalı çizimi gerekli malzeme miktarının hesaplanmasına yönelik temsilleri oluşturmak amacı ile gerçekleştirmiştir. Tabana bağlı çizim gerçekleştiren öğrenciler adım adım giderek doğru yapıyı oluşturma davranışı sergilemiştir. Klasik ev çizimi gerçekleştiren iki öğrencinin zihninde yer alan ev imajlarına yönelik çizim yaptıkları görülmüştür.

Öğrencilerin çizimleri problemde verilen geometrik şekilleri içeren, nicel verilere uygun temsili ortaya koymaya yöneliktir. Yukarıda verilen öğrenci çizimleri incelendiğinde aynı geometrik şekle ve ilişkiye yönelik çizimlerin farklılaştıkları görülmektedir. Örneğin öğrencilerin 11'i tarafından temsil edilen taban yüksekliğinin sembolik temsili 6 öğrenci kullanmış, 4 öğrenci kullanmamıştır. Bir öğrencinin (Ö11) ise sembolik temsili kullanma durumunun değişkenlik gösterdiği belirlenmiştir. Sembolik temsil kaydının tespit edildiği problemde öğrencilerin yarıdan fazlası sembolik temsili kullanmayı tercih etmemiştir. Oturumlarda, görüşmelerde, öğrenci geri bildirimlerinde prizmanın yüksekliğinin sözel olarak 3. boyut, z eksen, genişlik, uzun kenar, uzunluk ile ifade edildiği görülmüştür. Prizma yüksekliğine yönelik öğrencilerin temsil kayıtları Tablo 4.15'te sunulmuştur.

Tablo 4.15

Öğrencilerin Farklı Yükseklik Temsilleri

Veri Kaynağı	Yüksekliğe İlişkin Öğrenci Temsili
Problem çözme oturumu	Ö1: Normal üçgenin alanını taban çarpı yükseklikten hesapladık. Ondan sonra da senin şeklin üç boyutlu olduğu için. Ö4: Üçüncü boyutu ekledik, z'yi ekledik.
Görüşme	Ö11: Sonra Genişlik buldum. Yükseklik 10 falan oradan buldum.
Öğrenci geri bildirim notu	Üçgenin alanı çarpı uzun kenar 10= hacim (Ö8) Hacim ön yüzü 12 bulup uzunlukla çarpmalı (Ö11)

Öğrencilerin prizma yüksekliğini farklı şekillerde temsil etmesine karşılık yüksekliğe ilişkin matematiksel anlamalarının aynı olduğu görülmektedir. Öğrencilerle gerçekleştirilen problem çözme ve görüşme oturumlarında öğrenci söylemleri incelendiğinde matematik ve günlük konuşma dilinin bir arada kullanıldığı görülmüştür. Bu oturum verileri sonucunda problemin içeriğine bağlı prizmanın yüzey alanı için

“malzeme miktarı”, yanal yüzler için “yan duvarlar ve evin çatısı”, tabanlar için ise “ön taraf, arka taraf” ifadelerine yer verildiği görülmüştür. Ö4 problemde verilen yüzey sayısı ve yüzeylerin birleşimi üzerinden tanımlanan şeklin üçgen prizmayı oluşturduğunu fark ettiğinde yan yüzeylerin üçgenleştiğini ifade etmiştir.

Problem çözme oturumuna katılan Ö15 evin tabanı olarak ifade edilen dikdörtgeni çözüm süreci içerisinde de taban olarak kullanmak istemiştir. Problem çözme oturumunu birlikte tamamladığı arkadaşı Ö6’nın gerçekleştirdiği çizime bağlı olarak üçgen prizma çizmiştir. Ancak “evin tabanı” için gerekli matematikleştirmeyi gerçekleştirememiştir. 3B çizimde yer alan tabanın çizimin alta bakan yüzeyi olduğu hatalı algısal kavrayışı ile çözüm gerçekleştirmiştir. Görüşme sırasında öğrenci “*çünkü evin tabanı dikdörtgen zeminden oluşturulmuştur diyor. O yüzden ona göre oluşturdum dikdörtgen diye*” olarak açıklamıştır. Sürece yönelik detaylı veri söylemsel oluşum içerisinde sunulacaktır.

Öğrencilerin matematiksel çalışmada semiyotik oluşum yönüne ilişkin bulgular Tablo 4.16’da sunulmuştur.

Tablo 4.16

Öğrencilerin Semiyotik Oluşumları Yönelimi

Öğrenci	Epistemolojik Düzlem	Oluşumun yönü	Bilişsel Düzlem
Ö1 Ö6	Üçgen prizmanın aranan 3B şekil olduğunun kodlanması	←	Üçgen piramit çizimi ile şeklin kontrol edilmesi
Ö4 Ö10		←	Klasik ev çizimi
Ö3 Ö5 Ö11	Üçgen prizmanın kodlarının çözülmesi	→	Üçgen prizmanın görsel temsiline çizilmesi
Ö1 Ö8 Ö9 Ö13	Üçgen prizmanın parçalarının birleşimi sonucunda kodlanması	←	Üçgen prizmanın tabanının ve parçalarının çizilmesi

Ö1 tarafından doğru temsiline oluşturulmasına yönelik birden fazla öne çıkan eylem kaydı olduğu görülmektedir. Semiyotik oluşumun yönü her iki durum için de benzer olmuştur. Ö4 problem metninde bungalov ev denilmesine bağlı ev çizimi gerçekleştirmiş olmasına rağmen geometrik bir şekil arandığını hızlıca fark ettiği için farklı şekiller oluşturmadan prizmayı yapılandırmıştır. Öğrenci bilişsel düzlemde epistemolojik düzleme yönelim gerçekleştirmiştir.

4.1.3.2 Bungalov Ev problemi araçsal boyut bulguları

Bu başlık altında Bungalov Ev probleminin çözümü sürecinde ortaya çıkan epistemolojik (*artefekt*) ve bilişsel (*oluşturma*) düzlem bileşenleri, enstrümantal oluşum ve araca dayalı işlevsel kavrayış bulguları sunulacaktır. Problemin epistemolojik düzlem bileşenleri, araç ile dikdörtgenin çizilmesi, araç ile yüksekliğin inşa edilmesi, araç ile üçgen prizmanın çizilmesi, araç ile üçgen prizmanın yüzey alanının hesaplanması, araç ile üçgen prizmanın hacminin hesaplanması olarak belirtilmiştir. Bungalov Ev problemi özelinde oluşturulan analiz tablosunda enstrümantal oluşum bileşenleri ve öğrencilerin bilişsel düzlemde ortaya koyduğu davranışlar Tablo 4.17’deki gibidir.

Tablo 4.17

Bungalov Ev Probleminin Oluşturma ve İşlevsel Kavrayış Bulguları

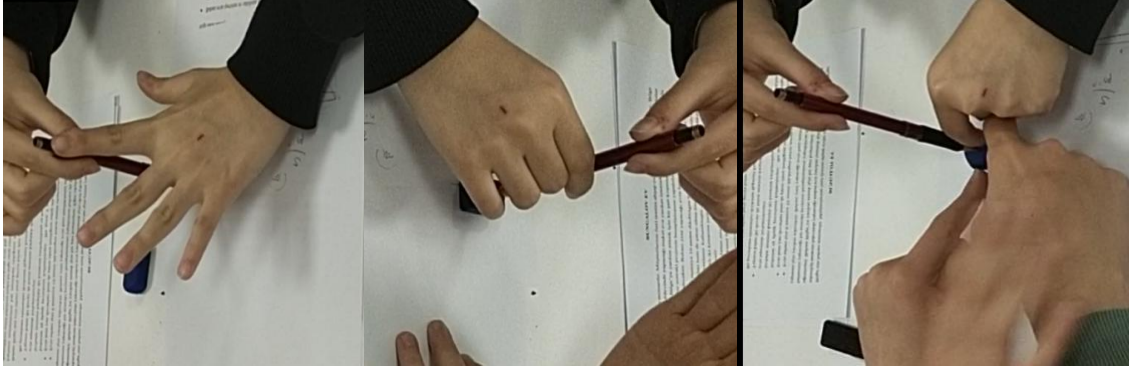
Oluşum		Bilişsel düzlem	
Enstrümantal Oluşum		Oluşturma	
Araca Bağlı İşlevsel Kavrayış	Cetvel, Geogebra ile dikdörtgeni oluşturma adımlarının izlenmesi	Sıralı Kavrayış	Silgi, kalem, el, usb bellek ile taban yüksekliği ve prizmanın temsil edilmesi
	Cetvel, Geogebra ile yüksekliğin inşa edilmesi		
	Geogebra ile üçgen prizmanın oluşturulması		
	Geogebra “alan hesaplama” aracı ile yüzey alanlarının hesaplanması		
	Geogebra ile üçgen prizmanın hacminin hesaplanması		
Araca Bağlı İşlevsel Kavrayış	Prizmanın Geogebra üzerinde döndürülmesi	Sıralı Kavrayış	–
	Prizmanın Geogebra’nın “yüzey açma” aracı ile yüzey parçalarının oluşturulması		

Tablo 4.17 incelendiğinde öğrencilerin oluşumları matematiksel araçlarla değil, masa üzerinde yer alan kırtasiye malzemeleri ve ellerini kullandığı görülmektedir. Enstrümantal oluşum istenilen düzeyde gerçekleştirmemiştir. Birinci grup tarafından gerçekleştirilen araç kullanımında Ö3 arkadaşlarına problemde tanımlanan şekli kalem, silgi ve elleri ile oluşturmuştur. Oluşum aşamasında taban dikdörtgeni için silgi, yükseklik için kalem ve yan yüzlerin kenarı için ellerini kullanmıştır. Bu oluşumda kendisine Ö1 destek olmuştur.

Şekil 4.26’da oluşumun aşamaları verilmiştir.

Şekil 4.26

Kırtasiye Malzemeleri ile Oluşum



Oturum sırasında öğrenciler prizmanın hacmini bulmaya yönelik bir diyalog gerçekleştirmişlerdir. Oluşturma bileşeni öğrencilerin prizmanın hacmini oluşturmaya yönelik boyutları yerleştirme girişiminin sonucunda ortaya çıkmıştır. Ö3 tarafından boyutların nasıl yerleştirilmesi gerektiği ve taban alanını veren ilişki açıklanmıştır.

Ö1: Tamam şimdi oldu. Normal üçgenin alanı taban çarp yükseklikten hesapladık. Ondan sonra senin şeklin (Ö3 tarafından oluşturulan 3B temsil) üç boyutlu olduğu için

Ö4: Üçüncü boyutu ekledik. Z’yi ekledik.

Burada üç öğrenci arasında gerçekleştirilen enstrümantal oluşum yönü farklılaşmıştır. Ö1 kırtasiye malzemeleri ile oluşturulan yapıya bağlı olarak prizmanın tabanının üçgen olduğunu, 10 metre uzunluğun ise hacmi ortaya çıkaran üçüncü boyut olduğunu yapılandırmıştır. Buradan hareketle Ö1 için enstrümantal oluşum bilişsel →epistemolojik yönde gerçekleşmiştir. Kalem ve silgi ile yapıyı oluşturan, arkadaşlarına yapının hacmini veren iki farklı açıklama gerçekleştiren (söylemsel oluşum içerisinde ifade edilecektir) Ö3 ise epistemolojik→bilişsel düzlem yöneliminde oluşum gerçekleştirmiştir. Ö4 elindeki flash bellek ile dikdörtgen olan yan yüzeylerin nasıl yerleştirileceğini Ö1’e açıklamıştır. Birinci grupta oturuma katılan Ö5 problem çözme oturumunu bireysel olarak tamamlamıştır. Diğer gruplarda Bungalov Ev problemi için araç kullanımı gözlemlenmemiştir.

4.1.3.3 Bungalov Ev problemi söylemsel boyut bulguları

Bu başlık altında Bungalov Ev probleminin çözümü sürecinde ortaya çıkan epistemolojik (referanslar) ve bilişsel (ispatlama) düzlem bileşenleri, söylemsel oluşum ve söyleme dayalı işlevsel kavrayış bulguları sunulacaktır. İlgili problem için epistemolojik düzlem

referansları; üçgen eşitsizliği, üçgenlerde eşlik-benzerlik, dikdörtgen alan bilgisi, üçgen alan bilgisi, ikizkenar üçgen bilgisi, Pisagor bağıntısı, prizmaların özellikleri, hacim bilgisi olarak belirlenmiştir. Problemin analiz tablosu içinde ifade edilen söylemsel oluşum durumları ile öğrencilerin oturumlarda ortaya koyduğu bilişsel düzlem verileri Tablo 4.18’de verilmiştir.

Tablo 4.18

Bungalov Ev Probleminin İspatlama-Muhakeme ve İşlevsel Kavrayış Bulguları

Oluşum	Bilişsel düzlem
<i>Söylemsel Oluşum</i>	<i>İspatlama -muhakeme</i>
Yapının üçgen prizma olduğunun ifade edilmesi 5 metrelik kenarın üçgen prizmanın üçgen olan yüzeyine ait ayrıt olduğunun ifade edilmesi Üçgen yüzeylerin ikizkenar olduğunun ifade edilmesi Soruda gereksiz bilgi verildiğinin ifade edilmesi Yüksekliğin hesaplanabildiğinin ifade edilmesi Prizmaların hacimlerinin taban plakası ve yükseklik ile ilişkisinin ifade edilmesi	Yapının üçgen prizma olduğunun ifade edilmesi Dikdörtgen levhalara ait 5 metrelik kenarın üçgen eşitsizliğine bağlı tabanın 6 metre olan kenarına yerleştirilmesi İkizkenar üçgende yardımcı elemanların özelliğine bağlı yüksekliğin ifade edilmesi Prizmanın yüzey alanı oluşturan geometrik şekillerin belirlenmesi Hacmin 2B taban alanı ve 1B yükseklik sonucunda 3B olduğunun ifade edilmesi Prizmanın hacminin taban alanı x yükseklik olarak ifade edilmesi Prizmanın farklı tabanlar için hacim bağıntısının ifade edilmesi Üçgen ve dikdörtgen eşliğine bağlı alanların hesaplanması
Söyleme Bağlı İşlevsel Kavrayış Üçgen eşitsizliği bilgisi ile ayrıt uzunluklarının yerleşiminin aranması	Tabanda oluşan 5-5-6 metre uzunluğa sahip ikizkenar üçgenin çizilmesi Üçgen prizmanın tabanını dikdörtgene tamamlama Hacim hesaplaması için üçgen prizmanın taban kabul edilen yüzeye bağlı çizimi

Bungalov Ev problemi oturumlarında süreç problemde istenilen 3B geometrik şeklin çizilmesi ile başlamıştır. Öğrencilerin şekli “üçgen ve dörtgenlerden oluşma”, “yüzey sayısının beş olması” verilerine bağlı üçgen piramit ve üçgen prizma olarak algıladığı görülmüştür. Problemin semiyotik oluşum bölümünde ifade edildiği şekilde gerçekleştirilen çizimler 3B bir şeklin arandığını göstermektedir. Üçgen prizmaya ait ayrıt uzunluklarının yerleştirilmesi sırasında öğrencilerden evin hacmini ortaya çıkaracak şekilde üçgen eşitsizliğini işe koşmaları beklenmiştir. Oturumlar sırasında öğrencilerin üçgen eşitsizliğini kullanma durumları gözlemlenmemiş, öğrenciler bu yönde bir söylemde bulunmamışlardır. Görüşmeler sırasında bu teorik referansın kullanımına yönelik diyaloglar aşağıdaki gibi gerçekleşmiştir:

Ö1: Sahip olduğumuz 4 adet parça vardı bizim saydığımız. Dikdörtgen şeklindeki parçaları üçgen kısmı kapatmak için kullanamayacağımız için 10 metrelik kısma koymamamız gerekirdi. 10 metrelik kısımda 2 adet dikdörtgen parçayı birleştirdik. Aralarında kalan arkalı önlü boşluklu üçgen kısmı da 6 santim tabanlı ve 4 santim yüksekliği olan üçgenlerle birleştirdik. 5 ve 10 metre 5 ve 10 metre uzunlukları olan dikdörtgenin alanı 50 artı 50'den 100 oldu. 6 x 4 bölü ikiden 12 olan 2 adet üçgenin alanı 24 oldu 124 metrekaare alanımız oldu.

Araştırmacı: Tamam. Peki, bir şey soracağım. Az önce sen söylediğin için dedin ki, 5 metreyi 10 metrelik kenara koyamazdık onun sebebini anlatabilir misin? Şimdi dedin ya 5 metrelik kenarları 10 metreye koyamayız.

Ö1: 10 metrelik kenara koysaydık toplam uzunlukları da tam olarak 10 metre olacağı için birbirlerine dayanarak bir üçgen şekli oluşturmaları için uzun olmaları gerekirdi. Tam 10 metre oldukları için de birbirlerini destekleyemeyecekleri için destekleyemeyip çökerdi.

Araştırmacı: Bunu matematiksel olarak ne ile ilişkilendirdin?

Ö1: Üçgen eşitsizliği

Öğrencinin ilgili diyalogda problemin çözümü için gerekli üçgen eşitsizliği ilişkisini yapılandığı görülmektedir. Bu ilişkiyi matematiksel ve doğal dili birlikte kullanarak ifade etmiştir. İkinci grup öğrencilerinden Ö6 ile gerçekleştirilen görüşme şu şekildedir:

Araştırmacı: Peki bir şey daha sorayım. Arkadaşlar şimdi burada yana koyduğunuz şu dikdörtgenlerin arkadaşlar şimdi yanına konulan dikdörtgenin ben sadece bir tane kenar uzunluğunu vermişken, orada da kaç vermiştim zaten bir ayrıtı 5 metre olan dikdörtgen tabanın burasına geleceğine nasıl karar verdiniz?

Ö6: Çünkü eğer 10 olan kenara getirseydik üçgen oluşturamazdık üçgen eşitsizliğine uymadığı için.

Benzer şekilde araştırmacı ve Ö10, Ö13, Ö11 arasında gerçekleşen diyalogda öğrencilerin gerçekleştirdikleri muhakemenin benzer nitelikte olduğu belirlenmiştir.

Araştırmacı: Neyi kullandınız orada? Onu tarif edebiliyor musunuz? Aslında yaptığınız şeyin 5 olmaz 6 olmaz

Ö13: Üçgen eşitsizliği

Ö10: İşlem olarak yapmadık ama üçgen eşitsizliği

Araştırmacı: Üçgen eşitsizliğini gördünüz mü? Sen fark ettin mi Ö11?

Ö11: Fark ettim 5 5 koysam üstüne çöker diye düşündüm.

Problemde öğrencilere evin şömine yüksekliği olarak verilen 4 metre uzunluğa sahip doğru parçası aynı zamanda taban üçgeninin ikizkenar olmasına bağlı kenarortayı ve

açıortayı olma özelliğine sahiptir. Problemde epistemolojik düzleme bağlı olarak tabanın ikizkenar olduğunu fark etmeleri, yüksekliği üçgende Pisagor bağıntısı ile kendilerinin oluşturmaları beklenmiştir. Problem bağlamında babası tarafından verilen taban yüksekliğinin öğrenciler tarafından bulunması, problemde fazladan bilgi olduğunun ifade edilmesi istenmektedir. Öğrencilerin bir kısmı taban yüksekliği olan 4 metreyi çizilen şekle doğrudan dahil ederken bir kısmı ise üçgenin ikizkenar olmasını kullanmıştır. Ancak öğrencilerin oturum kayıtları içerisinde problemde fazladan bilgi olduğuna yönelik veri elde edilmemiştir. Görüşmelerde öğrencilerin duruma yönelik açıklamaları aşağıdaki gibi olmuştur.

Ö3: Sonradan bulabilirdik aslında. Çünkü burada bir ikizkenar üçgen var oluşuyordu. 5 5 eğer buradan dikme indirirsem kenarortay oluyordu. 3 5 buraya da zaten 4 kalıyordu.

Ö5: Soruda verildiği için.

Ö10: Ben en başta Baba verdiği için koydum. Ondan sonra tam nasıl olacağını yani dikdörtgen prizma ile beraber nasıl olacağını anlamadım. Ama sonra zaten bunun dik şey yaptığı için üç dört beş oldu. Belli oluyordu. Ondan sonra emin oldum.

Ö15: İkizkenar üçgende şu kenarın ortadan ikiye böldüğü için o yüzden 3 oluyor Burası da 5 olduğu için.

Ö6: Ben de öyle yaptım üç dört beş. Ben önce bunu buldum. Sonra babanın verdiği fark ettim. O yüzden babanın verdiği bilgiye gerek yok. Pisagor ile hesaplayabilirdik.

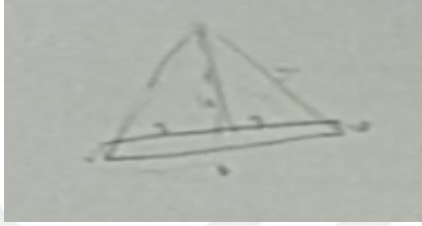
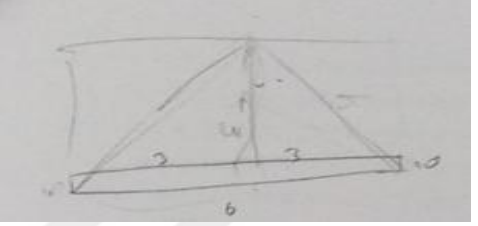
Öğrencilerin problemde kullanılan malzeme miktarını (evin tabanı hariç yüzey alanı) prizmayı oluşturduktan sonra kolayca hesapladıkları görülmüştür. Dikdörtgen ve üçgenin alan bağıntısını kullanan öğrencilerin hesaplama sırasında üçgen ve dikdörtgenlerin eşliğinden yararlandığı görülmüştür. Hesaplamalarda bu eşliği dikdörtgen ve üçgenlerin alanını iki ile çarparak, üçgenlerin alanını tabanla yüksekliği çarpıp ikiye bölmeyerek işe koştukları görülmüştür. Şekil 4.25'teki çizimler incelendiğinde hesaplamalara yönelik parçalı çizim gerçekleştirdikleri de görülmektedir.

Bungalov Ev probleminde öğrencilerin alan ve hacim arasındaki ilişkiyi boyut kavramı ile yapılandırdıkları görülmüştür. Epistemolojik düzlemde bilişsel düzleme gerçekleştirdikleri söylemsel oluşum kayıtları Tablo 4.15'te sunulmuştur. Öğrencilerin prizmanın yüzey alanını 2B olarak değerlendirdiği, hacim için iki boyuta yükseklik ile bir boyut daha eklenmesi gerektiği ifade edilmiştir. Ö11 ise evin ön yüzünü göstererek alanı m^2 , yüksekliği m ve sonucunda m^3 olarak açıklamıştır.

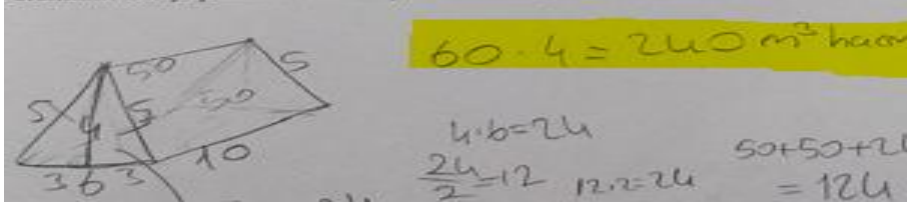
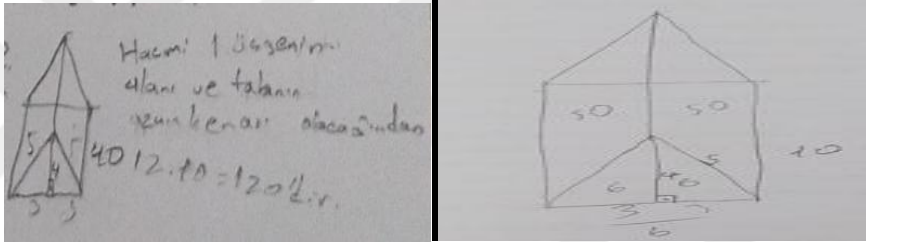
Öğrencilerin prizmanın hacmini hesaplama yaklaşımlarının farklılaştığı bulgusuna ulaşılmıştır. Bu çeşitliliği öğrencilerin hacim hesaplamasında referans aldıkları prizma çeşidi sağlamıştır. Görüşme ve oturum verilerine dayalı öğrencilerin üçgen prizmanın hacmine yönelik söylemsel bulguları Şekil 4.27’deki gibi olmuştur.

Şekil 4.27

Bungalov Ev Problemi Prizmanın Hacmi için Öğrencilerin Söylemsel Oluşumları

Öğrenci	Öğrenci verisi
Ö3 Taban x yükseklik (Görüşme + Video Kaydı+ öğrenci çalışma kâğıdı)	  Ö3: Üçgen prizmanın hacmini hesaplamayı bilmiyordum ama bunu küp gibi hani dikdörtgen prizma gibi onunla ilişkilendirdim. Ben küpe ya da dikdörtgen prizmaya benzettim. Çünkü mesela üçgenin alanı hesaplarken de taban çarpı yükseklik böyle iki yaptığımızda o kalan üçgenleri birleştirdiğimizde yeniden dikdörtgen oluyordu. Ama burada da aynı şekilde düşündüm. Eğer kalan üçgenleri birleştirirsem.
Ö4 ($a \times b \times h$)/2 (Görüşme)	Ö4: Yüksekliğimiz bir tane kısa kenarımız uzun kenarını çarptığımızda hacim elde ediyoruz. Fakat burada üçgen bir şekil elde etmemiz gerektiği için ikiye bölüyorum ikiye bölmesem de aynı şey.
Ö5 Taban alanı x yükseklik (Görüşme)	Ö5: Üçgen prizmaya göre buldum. Arş: Üçgen prizmanın hacmini bulmayı biliyor muydun? Ö5: Taban alanı çarpı yükseklik Arş: Bu üçgen prizmanın hacmi midir? Farklı bir yerden mi yapılandırıdın? Formülü biliyordun da mı kullandın? Ö5: Bilmiyorum hocam normal hacim hesaplamasının bilmiyordum silindirin hacim hesaplamasını biliyordum onunla yaptım hocam.
Ö8 Zemin x yükseklik (Görüşme)	Ö8: Ben bir ara çok farklı silindirin hacmi gibi düşündüm. Hani küçük re çarpı gibi öyle düşünmüştüm. Ondan sonra deyinca alan ne alaka gibi düşündüm. Sonra zemin olduğunda zemine yüksekliği çarpmam gerektiğini buldum.
Ö11 Taban alanı x yükseklik (Görüşme)	Ö11: Taban alanı çarpı yükseklik hacmi verir. Eğer biz evin tabanını alsaydık piramit gibi bir şekil olacağı için böyle daha kolay olur diye düşündüm.

Şekil 4.27 (Devam) *Bungalov Ev Problemi Prizmanın Hacmi için Öğrencilerin Söylemsel Oluşumları*

Ö15 En x boy x yükseklik Video Kaydı + öğrenci çalışma kağıdı	 Ö15: Ama tabanı dikdörtgen olduğu için Ö6: Ama prizma olduğu için tabanı üçgeni alacağız. Öyle çıkmıyor ki o zaman dikdörtgen prizmanın hacmi oluyor. Bu daha küçük çıkıyor. Senin yaptığın 6,10 ve 4 ayrıt uzunlukları olan bir dikdörtgen prizmanın hacmi olur. Ö15: Ama 4 yüksekliği. Taban alanı 60 olduğunda hacmi 240.
Ö6 Taban alanı x yükseklik (Görüşme)	Ö6: Hacim için üçgenin alanıyla üçgen prizmanın yüksekliği olan bu aynı zamanda taban dikdörtgeninin bir kenarı olan onu çarptım hacmi de öyle buldum. Şimdi eğer evin tabanına taban olarak alırsak $6 \times 10 \times 4$ bu ayrıt uzunlukları 4 6 ve 10 olan bir dikdörtgen prizmanın hacmini vermiş oluyor. O yüzden hem bir yandan da bir prizmanın az olan yüzey sayısı ile isimlendirdiğimiz için o isimde geçen şekli taban olarak alırsak diye düşündüm. Öyle kodlama yapmıştım.
Ö13 Taban alanı x yükseklik (Öğrenci çalışma kağıdı)	 Hacmi 1 üçgenin alanı ve tabanı uzun kenar olacağından 120

Şekil 4.27 incelendiğinde Ö15 hariç öğrencilerin prizmaların hacim bağıntısını taban plakası ile yüksekliğin çarpımı olarak yapılandığı görülmektedir. Oturuma katılan ancak bulgusu verilmeyen öğrencilerin muhakemeye yönelik yeterli veri sunmadıkları görülmüştür. Ö3 üçgen prizmanın hacmini bulurken dikdörtgen prizmanın hacim ilişkisinden yararlandığını, dikdörtgen prizmanın yarısı olarak düşündüğünü ifade etmiştir. Ö3'e ait iki çizim incelendiğinde öğrencinin söyleme dayalı işlevsel kavrayış gerçekleştirdiği görülmektedir. Prizmanın hacim bağıntısını şekil üzerinde gerçekleştirdiği çizimler üzerinden açıklaması doğal söylemsel muhakemeyi göstermektedir. Ö4 teorik muhakeme gerçekleştiren tek öğrencidir. Hacim bağıntısını dikdörtgen prizma ile ilişkilendirmiş, teorik dili kullanarak ilgili bağıntıyı ifade etmiştir. Prizmaların hacim bağıntısının üç boyuta bağlı olduğunu, problemdeki özel durum için ikiye bölünmesi gerektiğini belirtmiştir. Öğrencinin yüksekliği z eksenini ifade etmesi de teorik dili kullanma durumu ile ilişkili olarak ele alınmıştır. Ö5 ve Ö8 görüşmeler sırasında üçgen prizmanın hacmini silindirin hacmi ile ilişkilendirdiklerini ifade etmişlerdir. Ö11 prizmaların hacimlerinin taban alanı ile yüksekliğin çarpımı

olduğunu bildiğini, bu bilgiyi oluşturduğu geometrik çizimin ön yüzünü taban olarak alması gerektiğine karar vermekte işe koştüğünü açıklamıştır. Evin tabanını taban olarak kabul etmesi durumunu ise “piramit gibi bir şekil” olarak belirtmiş, bildiği formülü kullanamayacağı için üçgensel yüzeyin taban olması gerektiğini söylemiştir. Ayrıca Ö11 prizmanın hacmini gerçekleştirdiği aritmetik işlemler ile ifade etmiş (bkz. Tablo 4.15), doğal söylemsel muhakeme gerçekleştirmiştir. Ö15’in muhakeme süreci incelendiğinde hatalı muhakeme gerçekleştirdiği görülmektedir. Dikdörtgen prizmanın hacim formülünü bildiği görülmekle birlikte hacim hesaplamasında duruma özgü bir özelleştirme yapmadığı belirlenmiştir. Problem çözme oturumunda arkadaşı Ö6 tarafından yapılan açıklamaları dikkate almadığı, taban kelimesini zemine oturtulan yüzey olarak özümlediği görülmüştür. Epistemolojik düzlemde yer alan hatalı referansa bağlı yanlış sayısal sonuca ulaşan tek öğrenci olmuştur. Ö6’nın muhakeme sürecine video ve görüşme kayıtları üzerinden detaylı veri sağladığı belirlenmiştir. Ö15 ile gerçekleştirdiği diyalog kayıtları ve görüşme sırasındaki açıklamalar (bkz. Şekil 4.27) öğrencinin epistemolojik düzlem referans bileşenini işe koştüğünü göstermektedir. Ayrıca “prizmaların isimlendirmesinde az sayıda olan yüzeyin kullanılması” bilgisine sahip olduğu belirlenmiştir. Öğrencilerden Ö1 süreçte aktif olarak katılım sağlamış, doğru sayısal sonuca ulaşmıştır. Oturum sırasında taban uzunluğunun 6 metre ve tabana ait yüksekliğin 4 m olduğunu, bu ölçülere sahip üçgenin alanının 12 metre kare olduğunu sözel olarak ifade etmiştir. Ö1 bu taban plakasına bağlı olarak hacmin hesaplanma durumu için “on tane olduğunu nasıl bulduk. Tabanın 12 olduğunu bulduk” sorusunu gruba yöneltmiştir. Öğrenci destek alarak süreci tamamlamış, Ö3 ve Ö4’ten destek almıştır. Söylemsel oluşuma yönelik yeterli veri sunmamıştır. Benzer şekilde Ö9 sayısal sonucu arkadaşlarının desteği ile doğru şekilde hesaplamış, söyleme dayalı bir açıklama yapmamıştır. Ö13 bireysel çözüm gerçekleştirmiştir. Grup tan destek almamıştır. Öğrencinin üçgen prizma çizimi daha önce de belirtildiği gibi bağlamdan uzak şekilde prototip prizma olarak, üçgen taban üzerine temsil etmiş, aynı çizimi iki kere gerçekleştirmiştir. İkinci çizimi gerçekleştirme nedenini “Bundan pek emin olamadım. Sonra bunu da tekrardan üzerinden yaptım. Sağlama yaptım yani” olarak açıklamıştır. Öğrenci kendisi için doğrulamayı daha büyük bir şekil çizerek gerçekleştirmiştir. Ayrıca öğrencinin hacim hesaplaması için aritmetik işlemleri açıklaması doğal muhakemeyi kullandığını ortaya koymaktadır. Öğrencilerin oturumlarda ortaya koydukları

matematiksel çalışmalarının karakteristiğini ortaya koyan çalışma uzayları aşağıdaki gibi olmuştur.

Problem çözme oturumuna katılan öğrencilerin söylemsel oluşum yönelimlerine yönelik bulgular sonucunda Tablo 4.19 oluşturulmuştur.

Tablo 4.19

Öğrencilerin Söylemsel Oluşum Yönelimleri

Öğrenci	Epistemolojik Düzlem	Oluşumun yönü	Bilişsel Düzlem
Ö3 Ö5 Ö10 Ö15	Taban üçgeninin ikizkenar olduğu bilgisi Yüksekliğin tabanı iki eş parçaya ayırdığı bilgisi	←	Evin baca yüksekliğinin fazla bilgi olduğunun ifade edilmesi
Ö6	Özel üçgen bilgisi Pisagor Bağıntısı	→	
Ö1 Ö6 Ö10 Ö11 Ö13	Üçgen eşitsizliği bilgisi	→	5 metrelik ayırın dikdörtgenin 6 m olan kenarının köşelerine yerleştirilerek üçgenin oluşacağını ifade edilmesi
Tüm Katılımcı Öğrenciler	Yüzey alanının yüzeyi oluşturan parçaların toplamı olduğu bilgisi	→	Yüzey alanının iki dikdörtgen, iki üçgensel bölge için hesaplanması
Ö5 Ö8	Silindirin Hacim Bağıntısı		
Ö3 Ö4 Ö6 Ö11 Ö13	Dikdörtgen prizmanın hacim bağıntısı	→	Üçgen prizmanın hacminin hesaplanması
Ö15		-----▶	Hatalı muhakeme

Problemin çözümü sürecinde öğrencilerin farklı bağlamlarda ve birden fazla muhakeme gerçekleştirdikleri görülmektedir. Ö6'nın problemin çözümü için beklenen muhakemelerin tamamını gerçekleştirdiği görülmüştür. Problemde baca yüksekliği ile ifade edilen taban üçgenine ait yüksekliğin fazla bilgi içermesine yönelik oluşumun yönelimi Ö6'ya ait oluşum dışında tek bilişsel düzlemde epistemolojik düzleme gerçekleşen oluşum olmuştur. Öğrenciler epistemolojik düzlemi baskın bir söylemsel oluşum sergilemişlerdir. Hacim bağıntısı için doğru referanssal bilgiye sahip olan Ö15 dışında üçgen prizma için hacim bağıntısı kullanmışlardır.

Bungalov Ev probleminde eksiksiz matematiksel çalışma gerçekleştiren Ö1'e ait çalışma uzayı Tablo 4.20'de sunulmuştur.

Tablo 4.20

Ö1'e Ait Çalışma Uzayı Dolaşımı

<i>Epistemolojik Düzlem</i>		<i>Bilişsel Düzlem</i>
Üçgen ve dikdörtgen yüzeylere sahip katı cisimler bilgisi (T)	← <i>Semiyotik oluşum</i>	Üçgen ve dikdörtgenden oluşan 3B bir yapının arandığının belirlenmesi (G)
Dikdörtgen piramidin kodlarının çözülmesi (T)	→ <i>Semiyotik oluşum</i>	Dikdörtgen piramit çizimi (G)
3B cisimlerde yüzey alanı ve hacim bağıntısında kullanılan ayrıtların bilgisi (R)	← <i>Söylemsel Oluşum</i>	Dikdörtgen piramidin verilen üçgen ve dikdörtgen yüzey sayısına uygun olmadığının belirlenmesi (İ)
Üçgen prizmanın kodlanması (T)	→ <i>Söyleme Bağlı</i>	Dikdörtgen taban etrafına parçaların yerleştirmeye yönelik çizimler (G)
Prizmanın taban ayrıtlarının, taban yüksekliğinin doğru yerleşiminin belirlenmesi (A)	← <i>Semiyotik oluşum</i>	Verilen uzunlukların üçgen prizmada yerlerinin flash bellek, kalem, silgi, el yardımıyla aranması (O)
Üçgen eşitsizliği bilgisi (R)	→ <i>Enstrümantal Oluşum</i>	5 metrelik ayrıtı tabanın 6 metre olan kenarı etrafına yerleştirilmesi gerektiğinin ifade edilmesi (İ)
Dikdörtgenin alan bilgisi (R)	→ <i>Söylemsel Oluşum</i>	Yüzey alanının hesaplanması (İ)
İkizkenar üçgenin alan bilgisi (R)	→ <i>Söylemsel Oluşum</i>	Taban alanının hesaplanması (İ)
Hacmin hesaplaması için taban alanının tekrarlanması gerektiğinin ifade edilmesi (R)	→ <i>Söylemsel Oluşum</i>	Taban üçgenin ikizkenar olması durumunun ifade edilerek tekrar çizilmesi, yüksekliğin tekrar çizilmesi (G)
Üçgen prizmanın hacim bağıntısı bilgisi (R)	← <i>Söyleme bağlı işlevsel kavrayış</i>	Üçgen prizmanın dikdörtgen taban üzerine çizilmesine bağlı yüksekliğin dikdörtgenin diğer ayrıtı olan 10 metrelik kenar olduğunun ifade edilmesi (İ)

T: temsil; A: artefekt; R: referans; G: görselleştirme; İ: ispat O: oluşturma

4.1.4 Miras Kalan Tarla problemi

Problem çözüme oturumları birinci grupta üç (Ö1, Ö3, Ö4), ikinci grupta üç (Ö5, Ö6, Ö19) ve üçüncü grupta dört (Ö8, Ö9, Ö10, Ö11) olmak üzere toplam on kişi ile gerçekleştirilmiştir. Grupların tamamı problemde ifade edilen tarlanın diğer tarla ve nehir ile olan sınırını belirlemeye yönelik çizimler gerçekleştirerek süreci başlatmışlardır. Birinci grubun tamamı ve ikinci grupta yer alan Ö19 çizilen üçgenin özel durumlarını incelemişlerdir. Birinci grup üçgenin ikizkenar, eşkenar olmadığına karar verdikten sonra üçgenin özel dik üçgen olup olmadığını Pisagor bağıntısı ile kontrol etmiştir. Geniş açılı olduğuna karar verdikleri üçgenin alan hesaplamasını gerçekleştirecek teorik bilgiye sahip olmadıklarını ifade etmişlerdir. Problemin çözümü için gerekli doğru parçasının kenarortay olduğunu yapılandırmışlar ancak sayısal veri sunmamışlardır. Sonrasında Ö1'in teklifiyle araç gereç desteği alarak üçgeni çizmişlerdir. İlgili kenarortayı çizdikten sonra Ö3'ün yönlendirmesi ile yükseklik cetvel yardımı ile inşa edilmiş, ölçüm gerçekleştirilmiştir. Ancak grup yüksekliğin değerini inşa adımları ile değil, göz kararı ile yüksekliği belirleyerek ölçme gerçekleştirmiştir.

İkinci grup bireysel çalışma gerçekleştirmiştir. Öğrenciler sayısal hesaplama yapmadan aranan doğru parçasının uzun kenara ait kenarortay olacağını belirlemişlerdir. Sonra sayısal işlemler gerçekleştirmiştir. Ö5 kenarortay olduğunu ifade ettikten sonra bu uzunluğun hesaplanamayacağını söylemiştir. Ö6 cebirsel bir çözüm arayışına girmiş ancak çözüm geliştirememiştir. Ö19 ise üçgenin geniş açılı olduğunu belirledikten sonra ilerleme kaydedemeyince araştırmacıdan cetvel ve pergel istemiştir. Üç kenarı bilinen üçgen çizimi gerçekleştirmiştir. Sonrasında kenarortay ve yüksekliği belirleyerek çözüm gerçekleştirmiştir. Doğrulama amacıyla araç ile birden fazla çizim gerçekleştirmiştir. Grupta yer alan Ö5 ve Ö6 arkadaşlarının araç kullanımı sonrasında araç kullanmaya yönelmişlerdir. Cetvel ve pergel ile çizim gerçekleştiren öğrenciler ölçüme bağlı farklı sonuçlar elde etmişlerdir. Grupta yer alan Ö5 yüksekliğin inşa edilmesinde kendi sıralı kavrayış adımlarını uygulamayı tercih etmiştir.

Üçüncü grup sayısal sonuca ulaşamayan ve araç kullanımı gözlemlenmeyen tek grup olmuştur. Öğrenciler oturumun başından itibaren hatalı muhakeme gerçekleştirmiştir. Üçgenin alanını hesaplamak için üçgenin iki kenarını çarparak sonuca ulaşma, üçgenlerin eşit paylaşımının kenarlarının eşliği ile sağlamaya çalışma durumları gözlemlenmiştir. Problemde tarlaları eşit olarak bölecek doğru parçasının kenarortay olduğu fark edilmiş

ve sözel olarak ifade edilmiştir. Ancak üçgen eşitsizliği ile kenarortayın birden fazla değer alabileceği sonucuna ulaşmışlardır. Benzer şekilde yüksekliğin alacağı değer içinde üçgen eşitsizliğinden yararlanmışlar, yüksekliğin alacağı değerın sayısal aralığını bulmuşlardır. Bu bağlamdan hareketle tek bir sonuç bulunamayacağı sonucuna ulaşmışlardır. Öğrenciler bunun yanı sıra kenar uzunlukları farklı üçgenlerin alanlarının eşit olabileceğini ifade etmişlerdir.

Problemde öğrenciler sadece uzun kenara ait yüksekliği hesaplamaya çalışmışlardır. Alan hesaplamasında geniş açığa ait kenarları kullanma davranışı göstermemiştir. Sayısal sonucun ölçüme bağlı yaklaşık değer olduğunu ifade etmişlerdir. Üçgenin özel bir durumu olup olmadığı tüm gruplarda kontrol edilmiştir. Cetvel ve pergel ile çizimlerde 1/20 oranında küçültme kullanılmıştır. Birinci grupta çizim gerçekleştiren Ö1 17 cm olarak çizeceği kenarı pergelle oluşturmaya çalışmış, pergelin açıklığının 17 cm olarak gerçekleştirememiştir. Ö3 bu uzunluğu cetvel ile çizmesini, diğer uzunluklar için pergelden yardım almasını söylemiştir. Çizim bu yönlendirmeden sonra gerçekleşmiştir.

4.1.4.1 Miras Kalan Tarla problemi semiyotik boyut bulguları

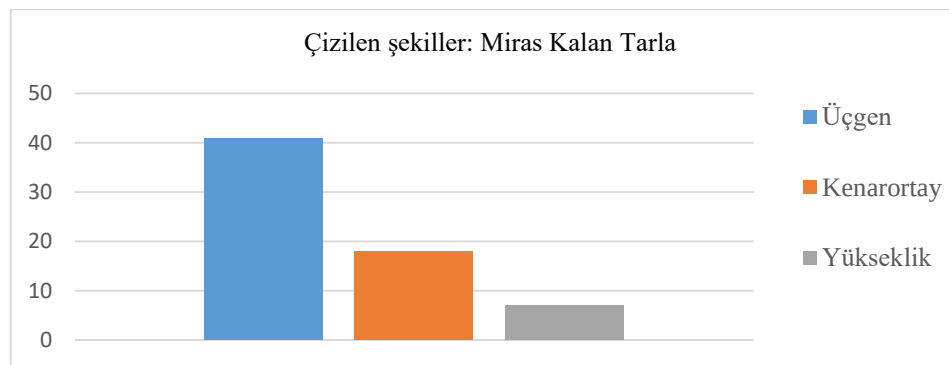
Bu başlık altında Miras Kalan Tarla problemine ilişkin öğrencilerin çözüm sürecinde ortaya koydukları temsillerin epistemolojik (temsil)- bilişsel (görselleştirme) düzlem bileşenleri, semiyotik oluşum ve temsile dayalı işlevsel kavrayış bağlamında elde edilen bulguları sunulmuştur.

Miras Kalan Tarla problemi için epistemolojik düzlem temsil bileşenleri çeşitkenar üçgen temsili, geniş açılı üçgen temsili, kenarortay temsili ve yükseklik temsili olarak belirlenmiştir. Problemin analiz tablosunda belirlenen semiyotik oluşum bileşenleri ve problem çözme oturumlarında öğrencilerin görselleştirme kayıtları sonucunda Tablo 4.21 oluşturulmuştur. Tablo 4.21 incelendiğinde epistemolojik düzleme bağlı görsel temsil beklentilerinin karşılandığı görülmektedir. Oturuma katılan tüm öğrenciler üçgen çizimi gerçekleştirmiş, bir öğrenci hariç birden fazla çizim kullanmışlardır. Öğrencilerin çizimlerinin üçgen ve üçgene bağlı kenarortay, yükseklik temsili içerdiği belirlenmiştir. Bir öğrencinin yardımcı elemanın kodunu kenarortay olarak çözmesine bağlı ağırlık merkezi temsil ettiği görülmüştür.

Tablo 4.21*Miras Kalan Tarla Problemi Öğrencilerin Görselleştirme ve İşlevsel Kavrayış Bulguları*

Oluşum		Bilişsel düzlem
Semiyotik Oluşum		Görselleştirme
Görsel Temsil	Verilen üç farklı uzunluğa bağlı çeşitkenar üçgen çizimi Kenar uzunluklarına bağlı geniş açılı üçgen çizimi Eş parçalamaya yönelik kenarortay çizimi Alanı hesaplamak için yükseklik çizimi	Algısal Kavrayış Üçgen Dörtgen Kenarortay Yükseklik Üçgene ait ağırlık merkezi
Sembolik Temsil	Köşe noktalarını kullanarak üçgenin ifade edilmesi Geniş açılı üçgende geniş açının sembolik temsili Kenarortayın sembolik ifadesi Yüksekliğin sembolik ifadesi	Yükseklik Geniş açı
Sözel Temsil	Sözel ve günlük konuşma dili ile ifadeler (örn: kenarortayın çizgi olarak ifade edilmesi)	Doğru parçasının çizgi olarak ifade etme Eş alanı eş bölmek olarak ifade etme Kenarortayı çapraz çizgi olarak ifade etme Üçgenin ağırlık merkezini denge merkezi olarak ifade etme
Temsile Bağlı İşlevsel Kavrayış	Verilen bilgilere bağlı çizimler ile üçgenin aranması Üçgeni iki üçgene ayıran doğru parçası çizimleri	Çizimlerle verilen kenar uzunluklarına sahip üçgeni aramaya yönelik çizimler Üçgeni iki parçaya ayırmaya yönelik çizimler Üçgenin dere ve komşu tarlalara göre çeşitli çizimleri Üçgenin kenar uzunluklarının yerlerinin değiştirilmesi

Problem oturumları sonucunda üç grubun matematiksel çalışmalarında öne çıkan görsel temsiller ve sayıları Şekil 4.28’de sunulmuştur.

Şekil 4.28*Çizilen Şekiller: Miras Kalan Tarla*

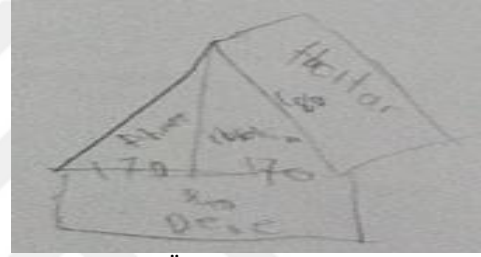
Şekil 4.28 incelendiğinde öğrencilerin tarlanın şekli olan üçgen çizimine odaklandıkları görülmektedir. Problemden verilen sayısal ölçülere uygun üçgenin geniş açılı bir üçgen olmasına karşılık Ö19 hariç diğer öğrenci çizimlerinin prototip üçgen veya yakın formda gerçekleştirildiği görülmüştür. Bu öğrenciler geniş açılı üçgen temsili aracılığıyla kavrayışa bağlı gerçekleşmiş, tarlanın kenar uzunluklarının belirlenmesi, tarla paylaşımını gerçekleştirecek doğru parçasını aramaya yönelik olmuştur. Öğrencilerin gerçekleştirdikleri kaba çizimler Şekil 4.29’da verilmiştir.

Şekil 4.29

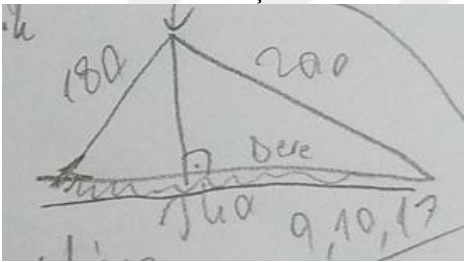
Öğrencilere Ait Üçgen Çizimleri



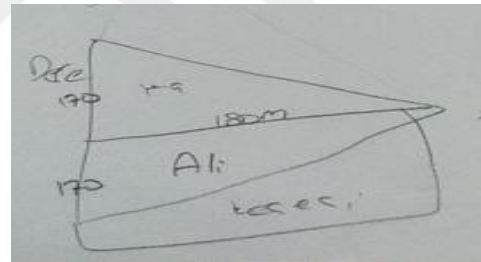
Ö9’a ait çizim



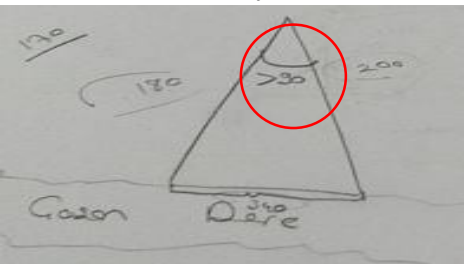
Ö11’e ait çizim



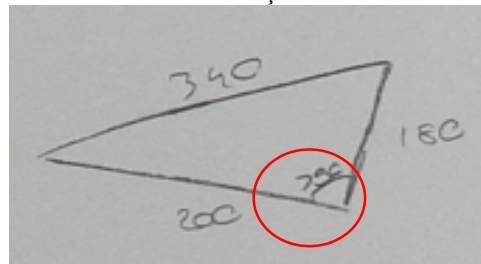
Ö5’e ait çizim



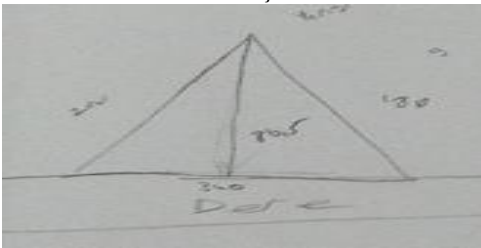
Ö8’e ait çizim



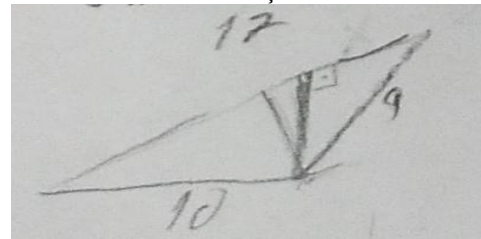
Ö1’e ait çizim



Ö4’e ait çizim

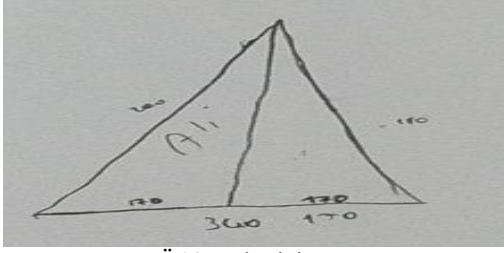


Ö3’e ait çizim

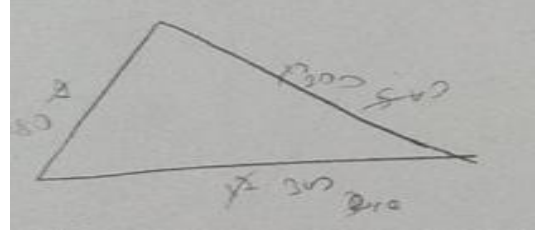


Ö19’a ait çizim

Şekil 4.29 (Devam) Öğrencilere Ait Üçgen Çizimleri



Ö10'a ait çizim



Ö6'ya ait çizim

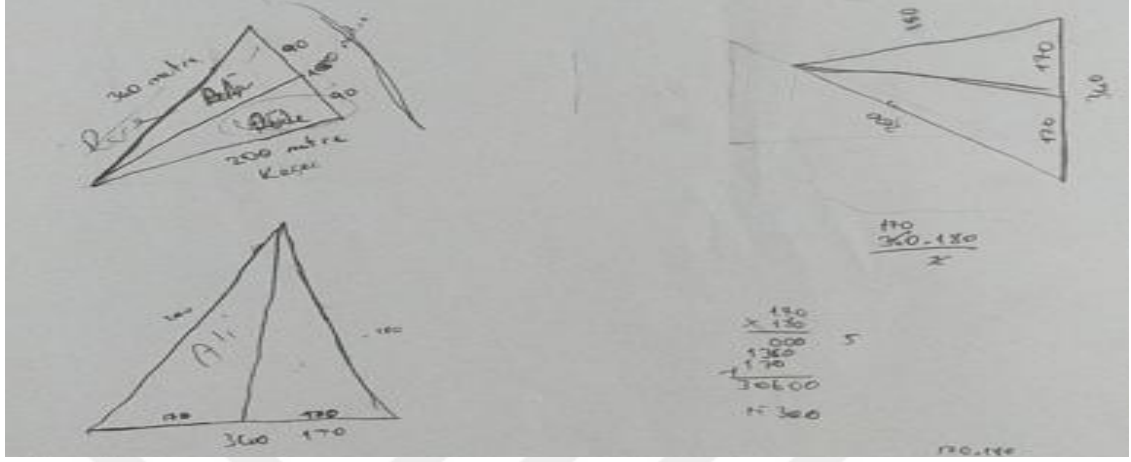
Öğrenciler tarafından gerçekleştirilen çizimler incelendiğinde çizimler arası benzerlik ve farklılıklar olduğu görülmektedir. Üçgenin uzun kenarına denk gelen derenin yazılı, çizim veya her ikisi ile birlikte temsil edildiği belirlenmiştir. Probleme ilişkin ilk çizimlerde geometrik ve gerçek yaşam temsillerini (dere, ali, keçeci, vb.) birlikte kullanmışlardır. Bu temsiller öğrencilerin temsile dayalı işlevsel kavrayışı kullandıklarını göstermektedir. Prototip üçgen çiziminde karşılaşılan kenarı üzerine çizilen üçgen oturuma katılan on öğrenciden yedisi tarafından gerçekleştirilmiştir. Bu öğrenciler ortak olarak gerçekleştirdikleri semiyotik temsil kaydında taban olarak üzerinde çalışacakları 340 metre uzunluğa sahip kenarı esas almışlardır. Ö3, Ö5, Ö8, Ö9, Ö10, Ö11 ve Ö19 karşı köşeden bu kenara yardımcı bir doğru parçası çizerek yine işlevsel kavrayışa yönelik bir görsel temsil oluşturmuşlardır. Yardımcı doğru parçasının kenarortay olarak temsili ise dört öğrenci tarafından görselleştirilmiştir. Ö9 tarafından gerçekleştirilen çizimlerde üçgenler köşesi üzerine ikizkenara yakın formda temsil edilmiştir. Kenarlar arası uzunluk farkı büyük olmasına karşılık bu farkın çizime yansıtılmaması öğrencinin görsel kavrayış ile hareket ettiği bulgusunu ortaya çıkarmıştır. Ö8 ve Ö11'in çizimleri üçgen ile ortak kenara sahip dörtgen çizimleri içermektedir. Her iki öğrencide görsel temsilin oluşturulmasında diğer tarlaları dörtgen olarak görselleştirmiş, süreçte bu dörtgenlere yönelik bir söylemde bulunmamışlardır.

Problem çözme sürecinin başında gerçekleştirilen çizimlerde yer vermeleri matematikleştirme sürecinde doğru temsili aramaya yönelik işlevsel kavrayışla ilişkilendirilmiştir. Ö10'a ait problem çözme kağıdı incelendiğinde üçgenin kenarları üzerinden işlevsel kavrayış gerçekleştirdiği görülmüştür. Öğrencinin problem çözüm sürecinde kenarlar üzerine çapalama yaptığı ve çizimlerin odak noktasının üçgene ait kenarlar olduğu belirlenmiştir.

Öğrencinin işlevsel kavrayışa ait çizimleri Şekil 4.30’da sunulmuştur.

Şekil 4.30

Ö10’a Ait Üçgen Çizimleri



Şekil 4.30 incelendiğinde Ö10 tarafından gerçekleştirilen çizimlerin sözel temsil ile desteklendiği (sol üstte-sol altta) görülmektedir. Ayrıca her bir çizimde üçgene ait kenarların farklı konumlarda temsil edildiği görülmektedir. Örneğin 340 metrelik kenar sol üstteki çizimde sol kenara yerleştirilmişken sonrasında sağ ve aşağı kenara yerleştirilmiştir. Öğrencinin çizimlerinde kenarortay çizimi ise sabit kalmıştır. İlk çizimi olan (sol üst) üçgende farklı bir kenara ait kenarortay çizmiş olmasına rağmen görüşmede “Eş böldüğü için ben öyle karar verdim hatta bir ara fikrim değişti. Dedim ki burası 91 yani burası 89 olsa aynı olabiliyor mu diye bir şey dedim. Ondan sonra tekrar şeye döndüm bu ortadan eşit olacağını düşündüm.” açıklamasını yapmıştır. Öğrencinin kenarortaydan farklı doğru parçası üzerinden bir ilişki aradığı ancak bunu çizime yansıtmadığı, aradığı doğru parçasının kenarortay olduğunu keşfettiği bulgusuna ulaşılmıştır. Ö1 ve Ö4 tarafından gerçekleştirilen çizimler üçgenin geniş açılı olduğunu temsil etmeleri buna karşı dar açılı ikizkenar ve dik açılı üçgen formunda olmaları ile öne çıkmaktadır. Öğrenciler geniş açılı üçgeni yapılandırmış olmalarına rağmen bunu çizim ile gerçekleştirememişlerdir. Üçgenin geniş açılı olmasını vurgulamak amacıyla sembolik temsilden destek almışlardır. Görüşme sırasında Ö1 ve Ö3’e üçgeni ikizkenar formunda çizdiği hatırlatıldığında “el yordamı ile” bir çizim yaptıklarını ifade etmişlerdir. Buradan öğrencilerin üçgene ait görsel kavrayışlarının ikizkenar formunda olduğu bulgusuna ulaşılmıştır. Ayrıca öğrencilerin problem çözme oturumunda grup içi diyaloglarda üçgenin çeşitkenar olmasına vurgu yapmaları şeklin görsel olarak sunduğu ikizkenar algısını dikkate almadıklarını göstermiştir. Üçgenin açılarının özellikleri ile ilgili öğrenci

temsillerine yönelik bulgular söylemsel oluşum içerisinde sunulacaktır. Birinci grupta yer alan Ö1 ve Ö3 için gözlem ve kamera kaydı verileri dışında öğrencilerin görüşmede yaptıkları açıklamalar semiyotik oluşum yönünü belirlemede etkili olmuştur.

Ö1: Kenarortay olması. Hani iki eş parçaya yükseklik aynı olacağı için iki eş parçaya bölmemiz gerektiğini iki eş parçaya böldüğümüzde de taban çarpı yükseklik bölü 2 den dolayı yükseklikleri eşit olacaktı. Tabanları da eğer iki eş parçaya bölersek eşit sonuç çıkacaktı.

Araştırmacı: Sen de açıklayabilir misin?

Ö3: Tabii ki de. Gözümüzde üçgen canlandı zaten. Üç kenarı vardı. Daha sonrasında en uzun kenarına çizdik. Taban olarak aldık. Bunu buna dair yüksekliği bulup 2'ye bölüp hani ikiye bölmemize gerek yoktu dediğim gibi iki eş parça olsaydı yine alanlar eşit çıkacaktı. Daha sonrasında üçgeni çizip yüksekliğe bulduk. Üçgeni ve ikisini eşit nasıl bölebiliriz diye düşündükten sonra yüksekliğin eşit olduğunu, tabanında hani eğer eşit verirse birbirine eşit alanlar olacağını bulduk bu şekilde.

Verilen üçgeni iki eş alana sahip üçgen olarak parçalayan doğru parçasının kenarortay ile ilişkisinin kurulduğu Şekil 4.29 ve Şekil 4.30'daki çizimlerde görülmektedir. Ancak kenarortaya yönelik görsel temsile karşılık semiyotik oluşum yönü öğrenciler arasında değişkenlik göstermiştir. Öğrencilerin semiyotik oluşum yönü Tablo 4.22'deki gibi olmuştur.

Tablo 4.22

Öğrencilerin Semiyotik Oluşumları Yönelimi

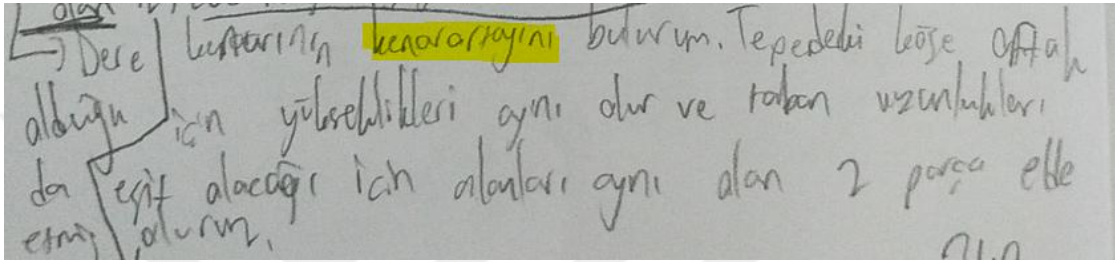
Öğrenci	Epistemolojik Düzlem	Oluşumun yönü	Bilişsel Düzlem
Ö1 Ö3 Ö4	Kenarortayın kodlanması		Üçgenin uzun kenarına bu kenarın karşısından indirilen doğru parçalarının çizilmesi Üçgenlerin eşliğini sağlamaya yönelik çizimler
Ö8			
Ö9			
Ö10			
Ö11			
Ö5 Ö6 Ö19	Kenarortayın kodunun çözülmesi		Kenarortay görselinin oluşturulması

Tablo 4.22 incelendiğinde birinci grupta yer alan öğrencilerin tamamı için semiyotik oluşumun *bilişsel*→*epistemolojik* yöneliminde gerçekleştiği görülmektedir. Öğrencilerin çizimleri (bkz. Şekil 4.29) incelendiğinde kenarortay temsili görülmemektedir. Öğrenciler birlikte çözüm gerçekleştirmiş, aradıkları yardımcı elemanın kenarortay

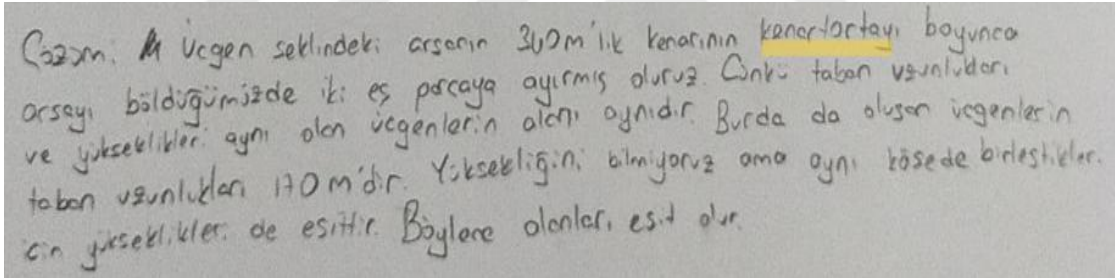
olduğuna problem çözme oturumunun sonunda karar vermiştir. İkinci grup ise bireysel olarak çözüm gerçekleştirmiş, çizimleri gereken yardımcı elemanın kenarortay olduğunu sürecin başında belirlemişlerdir. Sonrasında sayısal sonucu bulmaya yönelmiş, araçsal oluşumlar gerçekleştirmiştir. Araçsal oluşumlarında da kenarortayı değil yüksekliği öncülerdikleri gözlemlenmiştir. İkinci grupta yer alan Ö5, Ö6 ve Ö19'un sayısal hesaplamalar öncesinde yazdıkları geri bildirim notları Şekil 4.31'deki gibi olmuştur.

Şekil 4.31

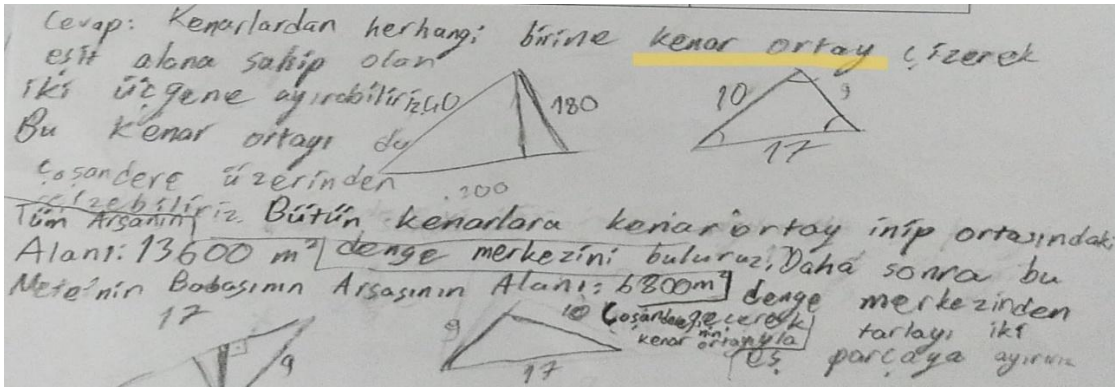
Ö5, Ö6 ve Ö19 Kenarortayla İlgili Geri Bildirim Notları



Dere kenarının kenarortayını bulurum. Tepedeki köşe ortak olduğu için yükseklikleri aynı olur ve taban uzunlukları eşit olacağı için alanları aynı olan 2 parça elde etmiş oluruz. (Ö5)



Çözüm: üçgen şeklindeki arsanın 340 m'lik kenarının kenarortayını boyunca arsayı böldüğümüzde iki eş parçaya yarılmış oluruz. Çünkü taban uzunlukları ve yükseklikleri aynı olan üçgenlerin alanı aynıdır. Burda da oluşan üçgenlerin taban uzunlukları 170 m'dir. Yüksekliği bilmiyoruz ama aynı köşede birleştikleri için yükseklikleri eşittir. Böylece alanları eşit olur. (Ö6)



Cevap : kenarlardan herhangi birine kenarortay çizerek eşit alana sahip olan iki üçgene ayırabiliriz. Bu kenarortayı da Çoşandere üzerinden çizebiliriz. Bütün kenarlara kenarortay inip ortasındaki denge merkezini buluruz. Daha sonra bu denge merkezinden geçerek Çoşandere'nin kenarortayıyla tarlayı iki eş parçaya ayırırız. (Ö19)

Üçüncü grupta yer alan tüm öğrencilerin oluşumları bilişsel→epistemolojik düzlem şeklinde gerçekleşmiştir. Grupta yer alan öğrenciler problemi birlikte çözmüşler, kenarortay çizmelerine rağmen ilgili yardımcı elamanın kenarortay olduğuna sonradan karar vermişlerdir. Grubun kenarortayı yükseklik olarak kullandığı, ayırdığı üçgenlerin alanlarının eşit olması için alması gereken değeri hesapladıkları belirlenmiştir. Oturumun sonunda sayısal bir değer bulamaları da kenarortayın alanı iki eş parçaya ayırdığını sözel olarak ifade etmişlerdir. Sembolik temsil kayıtlarından bir diğeri olan yükseklik temsili üçgenin alanını bulmaya yönelik öğrenci çizimlerinde (Ö5, Ö19) yer almaktadır. Ancak Ö19 üçgenin geniş açılı olduğunu fark etmiş ve geniş açılı üçgeni yansıtan çizim gerçekleştirmiş olmasına rağmen yüksekliği hatalı çizmiştir (bkz. Şekil 4.29). Ayrıca öğrencinin yüksekliğin sembolik temsilini ilk çizimlerinde kullanmasına rağmen sonraki çizimlerinde kullanmadığı görülmüştür. Diğer öğrenciler üçgenin alanını hesaplamaya yönelik veri (işlemler) sunmalarına rağmen yüksekliği görsel ve sembolik temsil etmemişlerdir. Bu bulgudan hareketle öğrencilerin yüksekliği kullanmak için görsel ve sembolik temsil kaydına ihtiyaç duymadıkları bulgusuna ulaşılmıştır.

4.1.4.2 Miras Kalan Tarla problemi araçsal boyut bulguları

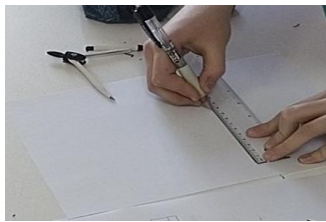
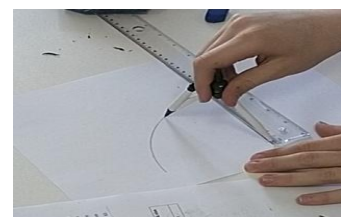
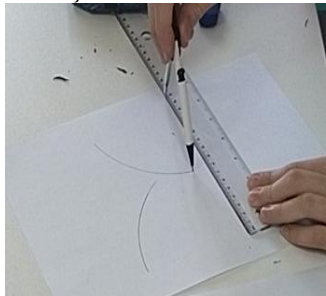
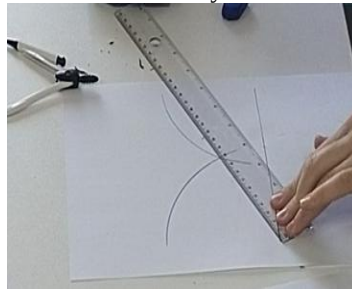
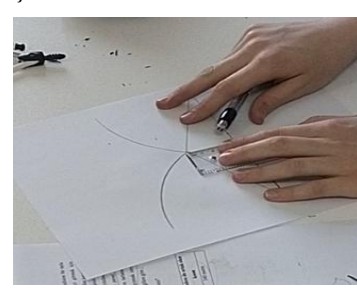
Bu başlık altında Miras Kalan Tarla probleminin çözümü sürecinde ortaya çıkan epistemolojik (artefekt) ve bilişsel (oluşturma) düzlem bileşenleri, enstrümantal oluşum ve araca dayalı işlevsel kavrayış bulguları sunulacaktır. Problemin epistemolojik düzlem bileşenleri pergel-cetvel ile veya Geogebra ile üçgenin çizilmesi, araç kullanarak yüksekliğin hesaplanması ve araç kullanarak alanın hesaplanması olarak belirlenmiştir. Problemin analiz çerçevesinde belirlenen enstrümantal oluşum bileşenleri ve öğrencilerle gerçekleştirilen oturum sonucunda belirlenen oluşum davranışları Tablo 4.23'teki gibidir.

Araçsal oluşum bulguları birinci grupta yer Ö1, Ö3, Ö4 ve ikinci grupta oturuma katılan Ö5, Ö6 ve Ö19'dan elde edilmiştir. Birinci grupta oluşumu grup adına Ö1, ikinci grupta ise her öğrenci bireysel olarak gerçekleştirmiştir. Öğrenciler enstrümantal oluşumda matematiksel araç gereçlerden pergel ve cetvel kullanmışlardır. Oluşumlar sonucunda dört adet geometrik şekil ortaya çıkmıştır. Üçgenin çizilmesinde sıralı kavrayış süreci için öğrencilerin izlediği sıranın aynı olduğu görülmüştür.

Tablo 4.23*Miras Kalan Tarla Probleminin Oluşturma ve İşlevsel Kavrayış Bulguları*

Oluşum	Bilişsel düzlem
Enstrümantal Oluşum	Oluşturma
Pergel ve cetvel veya Geogebra ile üçgeni oluşturma adımlarının izlenmesi Kenar orta noktanın pergel, cetvel veya Geogebra ile belirlenmesi Kenarortayın pergel, cetvel veya Geogebra ile çizilmesi Yüksekliğin pergel, cetvel, Geogebra ile çizilmesi Alanın bulunmasında Geogebra “alan” aracının kullanılması	Sıralı Kavrayış Üçgenin pergel-cetvel ile çizilmesi Yüksekliğin cetvel ile çizilmesi Kenarın orta noktasının cetvelle belirlenmesi Kenarortayın cetvelle çizilmesi
Araca Bağlı İşlevsel Kavrayış Doğru parçasının konumunun araç yardımı ile aranması (köşeden kenara çizilen doğru parçasının kenar üzerindeki konumunun değiştirilerek ayırdığı üçgenlerin alanlarının eşit olduğu noktanın belirlenmesi) Kenarortayın üçgenin alanını iki eş parçaya ayırmasının araç ile aranması	—

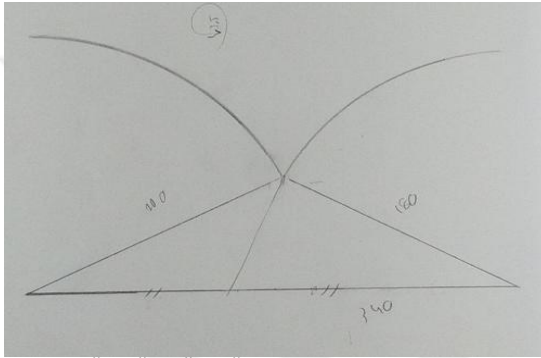
Öl'in enstrümantal oluşumu üzerinden öğrencilerin izlediği oluşum sırası Şekil 4.32'de verilmiştir. Öğrenciler oluşum sırasında üçgeni küçültürken kenar uzunlukları 9 cm, 10 cm ve 17 cm olan üçgeni çizmişlerdir.

Şekil 4.32*Öl'in Enstrümantal Oluşum Aşamaları***1. Adım:** 17 cm uzunluğundaki kenar çizimi**2. Adım:** Pergelin açıklığını 10 santimetre olarak ayarlama**3. Adım:** 10 cm yarıçaplı yay çizimi**4. Adım:** 9 cm yarıçaplı yay çizimi**5. Adım:** Yayların kesişim noktası ile doğru parçasının köşelerini köşe kabul eden üçgenin çizimi**6. Adım:** Yüksekliğin cetvel ile ölçülmesi

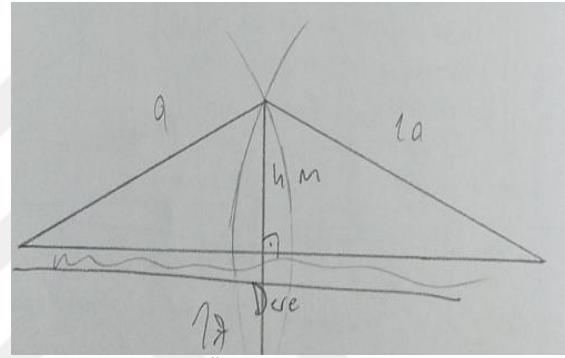
Öğrencinin dahil olduğu birinci grup ve ikinci grupta bulunan üç öğrenci tüm oluşumu aynı sıra ile, yüksekliği hesaplamak amacıyla gerçekleştirmiştir. Ancak öğrencilerin yüksekliğin hesaplanmasında araç kullanımına yönelik eğitim etkinliklerinden biri olan üçgene ait yükseklik çizim sırasını takip etmedikleri görülmüştür. Öğrenci 6. adımda görüldüğü üzere cetvelin ölçülü olmasına bağlı olarak cetvelin kılavuz çizgileri ile dikliği sağlamış, doğrudan ölçüm gerçekleştirmiştir. Şekil 4.33'te oluşum sonucu ortaya çıkan geometrik çizimler sunulmuştur.

Şekil 4.33

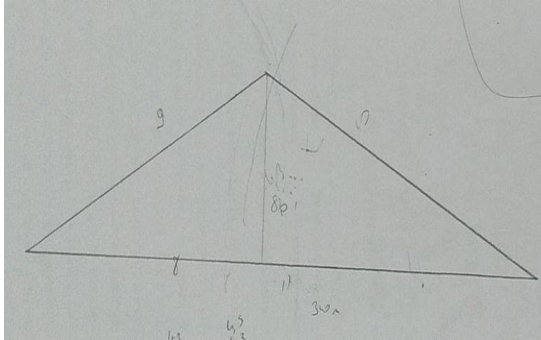
Enstrümantal Oluşum Sonucu Ortaya Çıkan Çizimler



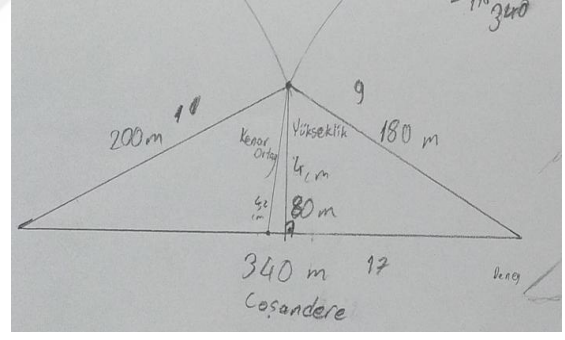
Ö1, Ö3, Ö4 (Ö1 tarafından çizildi)



Ö5'e ait çizim



Ö6'ya ait çizim



Ö19'a ait çizim

Şekil 4.33 incelendiğinde öğrencilerin 17 santimlik kenarı referans alarak oluşum gerçekleştirdikleri görülmektedir. Ö1'e ait çizimde kenarortay çizimi yer almasına karşılık araç kullanımı ile çizilmemiştir. Yükseklik ölçülmüş ancak çizimi gerçekleştirilmemiştir. Söylemsel oluşuma yönelik manuel çizim ile kenarortay temsil edilmiştir. Çizim üzerinden taban kenarının iki eş parçaya ayrılmadığı görülmektedir. Enstrümantal oluşum öğrencilerin yükseklik değerini hesaplama ihtiyaçları sonucunda ortaya çıkmıştır. Ö5, Ö6 ve Ö19'a ait çizimlerde yüksekliğin hesaplandığı görülmektedir. Ö19 ise kenarortayı yüksekliği hesapladıktan sonra kenara ait orta noktayı cetvel yardımı ile hesaplayarak oluşturmuştur. Öğrenciler araç kullanma ihtiyaçlarını şu şekilde ifade etmişlerdir:

Ö1: Üç kenarı bilinen bir üçgenin çizebildiğimizi bildiğimizi fark ettik O yüzden de yüksekliği bulamadığımızdan ötürü de acaba çizimle daha kolay yoldan bulabilir miyiz diye çizime başvurmayı düşündük.

Ö5: Alanı hesaplamaya çalıştım hesaplayamadım. Altı hangi oranda parçalayacağımızı yani hocam ona göre yüksekliğin uzunluğunu da hesaplayacaktım. Onları da bulamadım hocam. Arkadaşlarımdan gördüm (araç kullanımını).

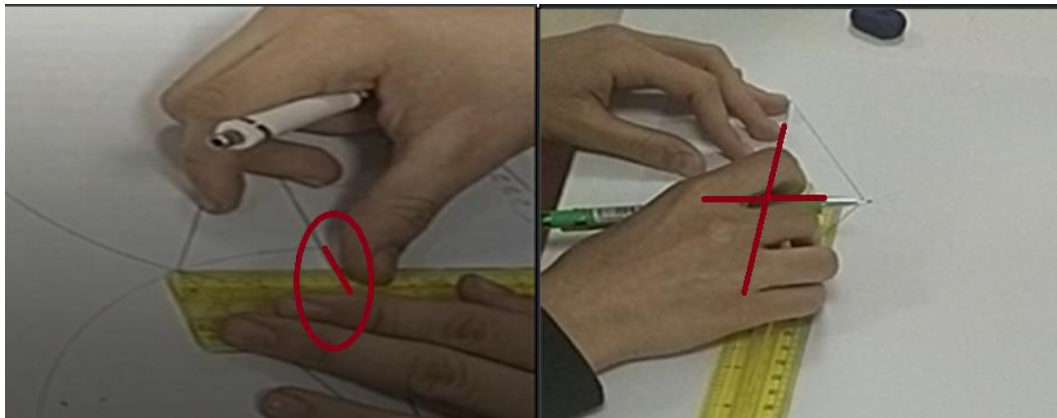
Ö6: Alanı bulmak için değer vererek bulmaya çalıştım ama sonra oradan gidemedim. Sonra cetvelle bütün uzunlukları 20'ye bölerek bir üçgen çizdim kağıda. 17-9-10 oradan yüksekliği bulmaya çalıştım. Yüksekliği 4,3 santim buldum. Sonra bunu 20 ile çarparak uzunlukları 20 ile çarparak alanı buldum.

Ö19: Denklem kurmayı işte düşündüm. Sonra çok uzun sürer dedim. Üçgen eşitsizliği çizim aklıma geldi. Üçgenin çizimi pergelle ve cetvel ile direkt oradan. Daha kolay olur diye düşündüm ve üçgeni oradan çizdim. İlk başta yaklaşık olarak 4 (yükseklik) buldum 4'ten hesapladım. Sonra biraz baktım üçgenin bir noktasını fazla şey çizmişim acaba milimetrik kaymalar olur mu diye bir daha çizdim.

Öğrenciler tarafından görüşmeler sırasında yapılan açıklamalar yüksekliğin hesaplanması amacıyla cetvel-pergel oluşumlarının gerçekleştiğini göstermektedir. Öğrencilerin söylemsel oluşum içerisinde bulguları sunulan durumlara yönelik çabaları işe yaramadığı için pergel ve cetvel ile hesaplama yapmak istedikleri görülmektedir. Üçgenin çiziminden sonra ilgili kenara ait yüksekliği cetveli esnek şekilde kullanarak oluşturmuşlardır. Öğrencilerin yükseklik oluşumları sırasında cetvel kullanımları Şekil 4.34'te verilmiştir.

Şekil 4.34

Cetvel ile Yükseklik Oluşumu



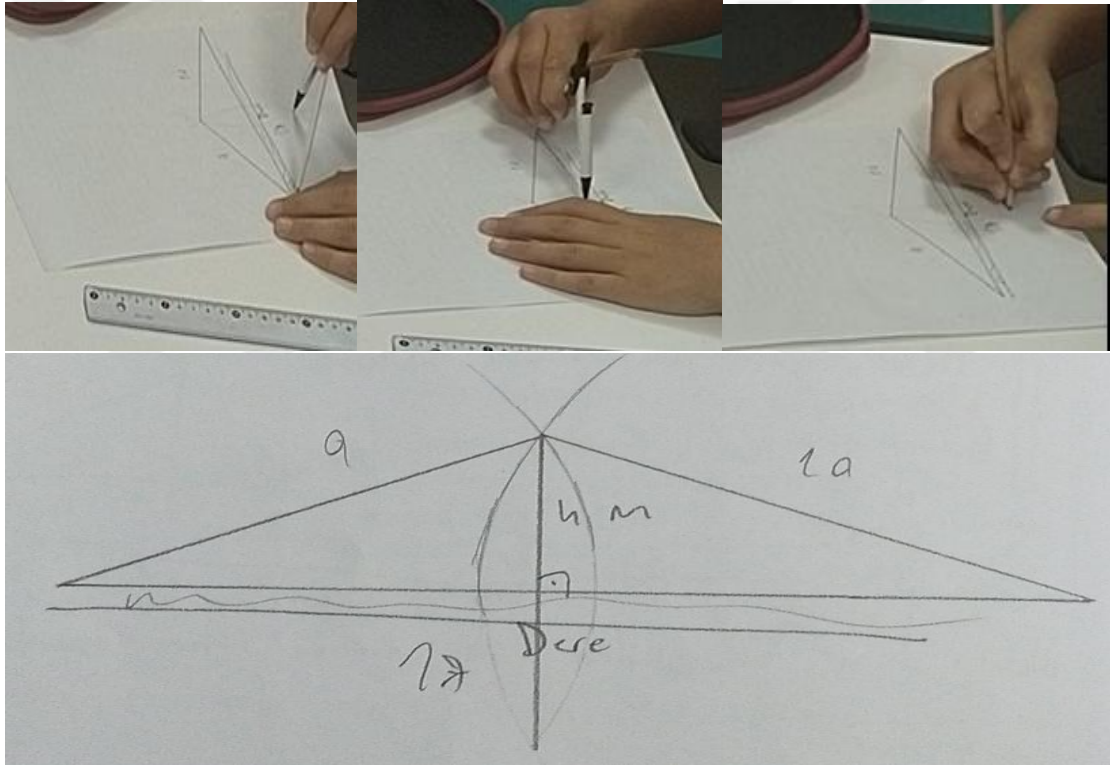
Not: Sırası ile Ö19 ve Ö6

Şekil 4.34 incelendiğinde öğrencilerin üçgende bir kenara ait yükseklik oluşum sırasını takip etmek yerine cetvel üzerindeki çizgiyi tabana çakışık duruma getirerek yükseklik

çizdikleri (Ö19, Ö1 için bkz. Şekil 4.32 altıncı adım) , cetveli tabana paralel yerleştirerek köşe açısının dikliğinden yararlanma (Ö6) durumları gözlemlenmiştir. Ö5 tarafından gerçekleştirilen yükseklik oluşumu araç kullanımına yönelik destek eğitimlerden farklı bir oluşum sırası içermektedir. Öğrencinin yükseklik oluşturmak için üç kenarı bilinen üçgenin çizimi sırasında ortaya çıkan yayların iki farklı kesişim noktasını kullandığı, üçgeni çizdikten sonra yayların ikinci kesişim noktasını bulmak için yeniden inşa adımları gerçekleştirdiği görülmüştür. Öğrencinin cetvel ve pergeli ile gerçekleştirdiği yükseklik inşa adımları ve sonucunda ortaya çıkan geometrik Şekil 4.35'te sunulmuştur.

Şekil 4.35

Ö5'in Yükseklik İnşa Adımları ve Geometrik Çizimi



Ö5 araç kullanımı öncesinde yazdığı geri bildirim notunda yüksekliğin hesaplanamadığı için alanın sayısal olarak hesaplanamayacağını ifade etmiş, çizimi gerçekleştirdikten sonra yüksekliği bulabileceğini fark etmiştir. Yüksekliği inşa etmek için cetvel ve pergeli matematiksel bir arka plan ile yönettiği enstrümantal oluşum gerçekleştirmiştir. Ö5 tarafından tam bir sıralı kavrayış sırası izlenmesi bakımından Ö1, Ö6 ve Ö19'dan ayrılmaktadır. Ö5 için yüksekliğin çizilmesine yönelik oluşum yönü **epistemolojik**→**bilişsel** düzlem olarak gerçekleşmiştir. Diğer üç öğrencinin cetvelin

ölçüm ve çizim gibi temel amacı dışında sahip olduğu matematiksel özelliklerden (köşesinin dikliği, ölçü çizgilerinin paralelliği) duruma özgü yararlanması *epistemolojik*→*bilişsel* yöneliminde oluşumu göstermektedir. Bulgulardan hareketle enstrümantal oluşumun üçgenin çizimi ile alanının hesaplanması ve yüksekliğin inşası için gerçekleştiği bulgusu elde edilmiştir. Öğrencilerin enstrümantal oluşum yönü Tablo 4.24'te özetlenmiştir.

Tablo 4.24

Öğrencilerin Enstrümantal Oluşumları Yönelimi

Öğrenci	Epistemolojik Düzlem	Oluşumun yönü	Bilişsel Düzlem
Ö1 Ö3 Ö4 Ö5 Ö6 Ö19	Üç kenar uzunluğu bilinen üçgenin inşâ adımları bilgisi	→	Verilen kenar uzunluklarına sahip üçgenin cetvel ve pergel ile çizilmesi Uzun kenara ait yüksekliği cetvelin esnek kullanarak çizilmesi Üçgenin yüksekliğinin cetvel ile ölçülmesi
Ö5	Kenara dışındaki bir noktadan dikme çizme adımları bilgisi	→	Uzun kenara ait yüksekliğin çemberlerin kesişim noktası ile çizilmesi

Tabloda ifade edilmeyen kenarortayın araçla inşâ edilmesi sadece Ö19 tarafından gerçekleştirilmiştir.

4.1.4.3 Miras Kalan Tarla problemi söylemsel boyut bulguları

Bu başlık altında Miras Kalan Tarla probleminin çözümü sürecinde ortaya çıkan epistemolojik (referanslar) ve bilişsel (ispatlama) düzlem bileşenleri, söylemsel oluşum ve söyleme dayalı işlevsel kavrayış bulguları sunulacaktır. İlgili problem için epistemolojik düzlem referansları; üçgen eşitsizliği bilgisi, üçgenin çizilebilmesi için yeterli ve gerekli eleman bilgisi, üçgende açı kenar ilişkisi bilgisi, çeşitkenar üçgen bilgisi, geniş açılı üçgen bilgisi, kenarortay bilgisi ve üçgende alan bilgisi olarak belirlenmiştir. Problemin analiz tablosunda probleme bağlı a priori söylemsel oluşum durumları ile öğrencilerin oturumlarda ortaya koyduğu bilişsel düzlem verileri Tablo 4.25' te verilmiştir. Miras Kalan Tarla probleminde verilen kenar uzunluklarına sahip üçgenin alanının bulunmasının üçgenin dik, ikizkenar, eşkenar üçgen gibi özel üçgen olma durumlarının incelendiği bulgusuna ulaşılmıştır.

Miras Kalan Tarla Probleminin İspatlama-Muhakeme ve İşlevsel Kavrayış Bulguları

Problem çözme oturumu sırasında Ö4'ün gerçekleştirdiği çizim ve işlemler Şekil 4.36'daki gibi olmuştur.

Ö4'e Ait Çalışma Kağıdı



Şekil 4.36 incelendiğinde öğrencinin açılar ile kenar uzunlukları arasında oransal bir ilişki kurmaya çalıştığı ve bundan vazgeçtiği görülmektedir (sol en üst üstü çarpı ile çizilmiş çizim). Daha sonrasında solda dik üçgen formunda bir çizim gerçekleştirmiştir. Kenar uzunluklarından hipotenüs olduğunu düşündüğü 340 metrelik kenarın karesini hesaplamış, bu değerden 180 metrelik kenarın karesi olan 32400'ü çıkarmıştır. Bu işlemin sonucunda bulduğu 83200'ün karekökünü hesaplamaya çalışmış, bulamayınca da arkadaşları ile aşağıdaki diyalogu gerçekleştirmiştir.

Ö4: 832 herhangi bir şeyin karesi mi?

Ö1: Hayır. Olabilir bir dakika. Otuz dokuz yüz.

Ö3: 832 iki ile olabilir mi?(Sonu 2 ile biten bir sayının tam kare olamayacağını ifade etmektedir)

Ö4: Bence açılara bakman lazım. Açıların doksandan büyük olması lazım. Doksandan küçük olsaydı bunların (170 m ve 180 metre) kareleri toplamı bundan (340 m) küçük olması gerekirdi.

Görüşmeler sırasında öğrenciye bu durum sorulduğunda Ö4 şu açıklamayı gerçekleştirmiştir:

Ö4: Pisagor'a baktım hani zaten bunu ilk önce küçülttüm. Hepsini küçülttüktan sonra bunun oluşmayacağını fark ettim. (Üçgenlerde benzerlikten yararlanarak üçgeni küçültmüştür). En azından üçgeni nasıl çizeceğimi biraz daha anlayayım yaklaşıyım diye dar mı dikme yoksa geniş mi buna baktım.

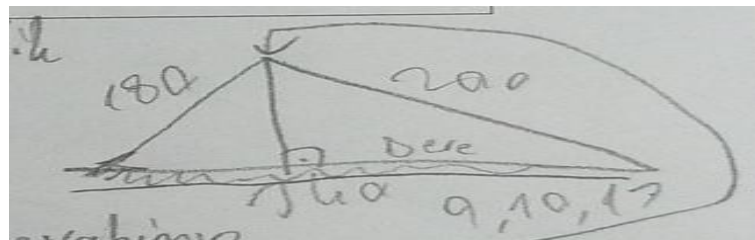
Araştırmacı: Anladım. Peki, dar geniş dik olduğunu bulmak ne işine yarayacaktı?

Ö4: Üçgen çiziminde işime yarayacaktı. Hani yükseklik bulmakta işime yarayacaktı tam emin değilim.

Problemde dik açı oluşturmaya çalışan öğrencilerden biri de Ö5 olmuştur. Öğrencinin manuel olarak gerçekleştirdiği çizimde üçgenin yüksekliğine ihtiyaç duyduğunu fark ettiği bulgusu elde edilmiştir. Ö5'e ait çizim Şekil 4.37'de sunulmuştur.

Şekil 4.37

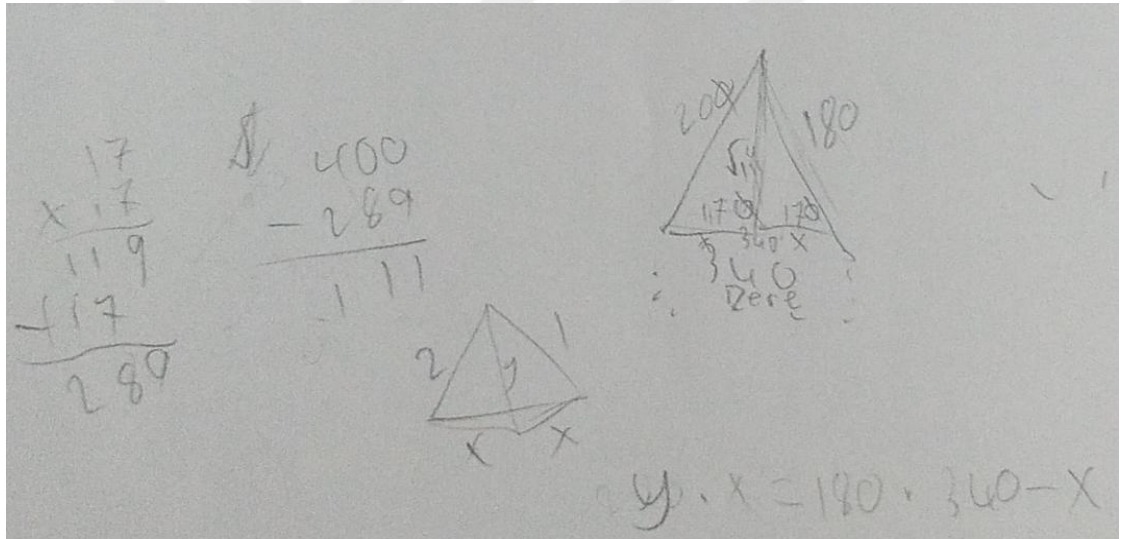
Ö5'e Ait Manuel Çizim



Ö5 ile gerçekleştirilen görüşmede çizdiği yüksekliğin tabanda ayırdığı parçaları hesaplayamadığı için (bkz. enstrümantal oluşum bulguları öğrenci söylemi) sayısal sonuç bulamadığı görülmüştür. Öğrenci sonuca ulaşmak için yüksekliğin uzunluğunun hesaplanması gerektiğini fark etmiştir. Ayrıca öğrencinin çizimi ilgili üçgende yükseklik ve kenarortayın farklı doğru parçaları olduğunu fark ettiğini yansıtmaktadır. Çeşitkenar üçgende yardımcı elemanlara yönelik epistemolojik düzlemin referans bileşenini aktif olarak işe koşmuştur. Buna karşılık farklı bir grupta oturuma katılan Ö11 de yüksekliğin hesaplanması gerektiğini fark etmiştir. Ö5'ten farklı olarak yükseklik ve kenarortayı aynı doğru parçası ile temsil etmiş, sonrasında aritmetik işlemlerle doğruluğunu kontrol etmiştir. Ö11'e ait çizim ve işlemler Şekil 4.38'de sunulmuştur.

Şekil 4.38

Ö11'e Ait Çizim ve İşlemler



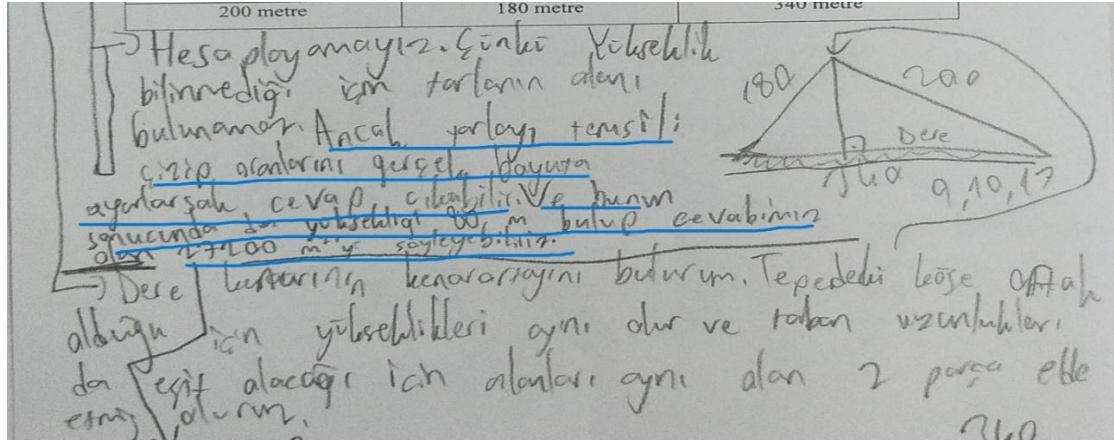
Şekil 4.38 incelendiğinde öğrencinin çizdiği çeşitkenar üçgenin 340 metrelik kenarının kenarortayının aynı zamanda o kenara ait yükseklik olup olmadığını Pisagor bağıntısı ile kontrol ettiği görülmektedir. İşlemler sonucunda kenarortayı $\sqrt{111}$ olarak hesapladığı ancak devam etmediği belirlenmiştir. Öğrenci ile gerçekleştirilen görüşmede “Şimdi dik üçgen düşünmüştüm ama daha sonra dik olmadığını anladım. Pisagor yapıp uzunluğunu bulacaktım yüksekliğin. Sonra bu ikisi farklı dik değil dedim vazgeçtim” açıklamasını yapmıştır. Ayrıca öğrencinin cebirsel bir çözüm arayışı gerçekleştirdiği, bu çözümde de “y” olarak ifade ettiği uzunluğu yükseklik olarak işleme aldığı görülmektedir. Çözüm için doğru bir eşitlik gerçekleştiremediği için çözüme ulaşamamıştır. Aynı grupta yer alan Ö10 oturumun sonlarına doğru yüksekliği elde edemeyince Ö8 ve Ö9’a üçgenin dik

üçgen olup olmayacağını çizim gerçekleştirerek sormuştur. Ö8 ve Ö9 bu soruya 340 metrelik bir hipotenüse sahip üçgenin 200 metrelik bir dik kenarı olursa üçgen eşitsizliği bağlamında üçgenin tamamlanamayacağı şeklinde cevap vermişlerdir.

Öğrencilerin problemin farklı aşamalarında benzerlikten yararlandığı görülmüştür. Üçüncü grupta yer alan hiçbir öğrenci sayısal verileri küçültmemiş, ham veriler üzerinden sonuca ulaşmaya çalışmıştır. Oturum sonunda sayısal bir sonuç sunmamışlardır. Diğer gruplar ise sayısal sonuca enstrümantal oluşum sonrasında ulaşmıştır. Bu nedenle sadece birinci ve ikinci grup sayısal sonuç sunmuşlardır. Öğrencilerin sayısal sonuçları ölçüme bağlı farklı yükseklik değerleri için değişiklik göstermiştir. Geometrik oluşum gerçekleştiren öğrenciler üçgenin kenarlarını 17 cm, 10 cm ve 9 cm olarak çizim gerçekleştirmiştir. Öğrencilerin çalışma kağıdı içerisinde çizim gerçekleştirmelerine olanak sağlayan küçültme oranı kullandıkları, ayrıca kenarları tam sayı olan özel üçgen aradıkları belirlenmiştir. Tüm grupların üçgenin dik açılı olmadığını fark ettikleri noktadan itibaren çalışma uzaylarında epistemolojik engelle karşılaştıkları görülmüştür. Ö5 çalışma kağıdında enstrümantal oluşum öncesinde Şekil 4.39'daki geri bildirim notunu yazmıştır.

Şekil 4.39

Ö5'e Ait Geri Bildirim Notu ve Çizim



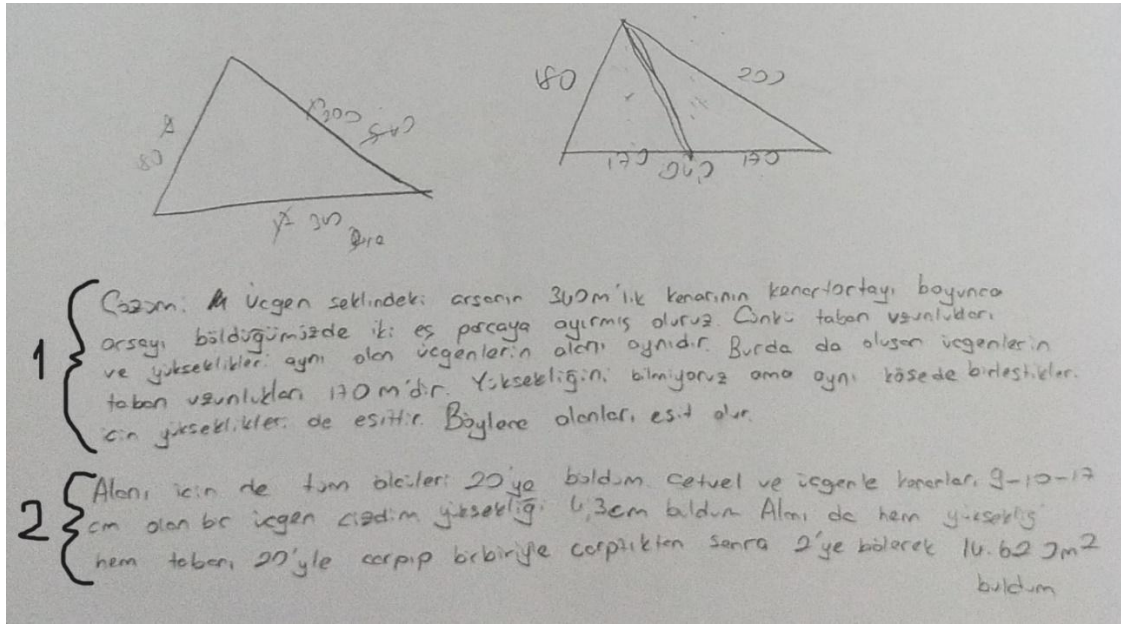
Hesaplayamayız. Çünkü yükseklik bilinmediği için tarlanın alanı bulunamaz. Ancak tarlayı temsili çizip oranları gerçek boyuta ayarlarsak cevap çıkabilir ve bunun sonucunda da yüksekliği 80 m bulup cevabımız olan 27200 m²'yi söyleyebiliriz. Dere kenarının kenarortayını bulurum. Tepedeki köşe ortak olduğu için yükseklikleri aynı olur ve taban uzunlukları da eşit olacağı için alanları aynı olan iki parça elde etmiş oluruz.

Şekil 4.39 üzerinde yer alan notta mavi ile altı çizilen söylemler oluşum sonrasında geri bildirim notuna eklenmiştir. Öğrenci geri bildirimi incelendiğinde problemin sayısal cevabının yüksekliğin bilinmemesine bağlı hesaplanamayacağı ifade edilmiş, ancak

problemin çözümü için izlenecek yol detaylandırılmıştır. Aynı grupta yer alan ve süreci bireysel olarak tamamlayan Ö6'nın da aynı şekilde üçgenin yüksekliğine bağlı engelle karşılaştığı, bu engeli oluşum sonrasında aştığı görülmektedir. Şekil 4.40'ta Ö6'ya ait geri bildirim notu sunulmuştur.

Şekil 4.40

Ö6'ya Ait Geri Bildirim Notu ve Çizimler



1. Çözüm: Üçgen şeklindeki arsanın 340 m'lik kenarının kenarortayı boyunca arsayı böldüğümüzde iki eş parçaya ayırmış oluruz. Çünkü taban uzunlukları ve yükseklikleri aynı olan üçgenlerin alanı aynıdır. Burada da oluşan üçgenlerin taban uzunlukları 170 m'dir. Yüksekliğini bilmiyoruz ama aynı köşede birleştikleri için yükseklikleri de eşittir. Böylece alanları eşit olur
2. Alanı içinde tüm ölçüleri 20'ye böldüm. Cetvel ve üçgenle (pergel demek istemiş) kenarları 9-10-17 cm olan bir üçgen çizdim. Yüksekliği 4,3 cm buldum. Alanı da hem yüksekliği hem tabanı 20 ile çarpıp birbiriyle çarptıktan sonra 2'ye bölerek 14.623 m² buldum

Şekil 4.40 üzerinde 1 ile belirtilen paragraf incelendiğinde öğrencinin yüksekliği hesaplayamadığı için sayısal bir değere ulaşamadığını ifade ettiği görülmektedir. Üçgenin taban uzunluğu ve yüksekliğe bağlı hesaplanması bilgisini problemin çözümünde referans olarak alarak bir açıklama gerçekleştirmiştir. 2 ile belirtilen paragraf aritmetik işlemlerin açıklamasını içermektedir. Ö19'un gruptaki arkadaşları ile benzer şekilde sayısal sonuçtan bağımsız kenarortayın üçgenin alanını iki eş parçaya ayırmak için gerekli olan yardımcı eleman olduğunu açıkladığı belirlenmiştir (Bkz. Şekil 4.31). Görüşme sırasında öğrencinin açıklaması şu şekilde olmuştur:

Ö19: Yani ben Pisagor'dan bulmaya çalıştım. Yüksekliği ama sonra işte **tam özel üçgen** olmadığı için tam sayı falan çıkmayacaktı. Denklem kurmayı da düşündüm

yüksekliği falan bulmak için çok şey geldi. **O yüzden ben direkt ilk önce kenarortay cevabına sorusunu cevaplamaya gittim.**

Öğrenci kenarortaya yönelik açıklamayı sayısal cevaba ulaşmasından önce gerçekleştirmiştir. Kenarortayların kesişim noktasını çizerek ağırlık merkezini (öğrenci denge merkezi olarak açıklamıştır) belirlemiş, bu noktadan geçen doğru parçasının üçgenin alanını iki eş parçaya ayıracağını ifade etmiştir. Ö6 yüksekliği hesaplamak için cebirsel çözüm arayan diğer öğrenci olmuştur. Yüksekliğin taban üzerinde ayırdığı parçaları “x” ve “340-x”, yüksekliği “a” şeklinde temsil etmiş, üçgenin alanının 170a olacağını belirtmiştir. Ancak çözüme ulaşamadığı için oluşuma yönelmiştir.

Problemde öğrencilerin gerçekleştirmesi beklenen muhakeme sonucunda kenarortaya yönelik genelleme birinci grupta sürecin sonucunda elde edilmiştir. Ö1 tarafından çizilen üçgenin yüksekliği ölçülmüş, yüksekliğe bağlı üçgenin alanı hesaplanmıştır. Bu alan ikiye bölünmüştür. Ö1, Ö3 ve Ö4 arasında aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir:

Ö3: Şimdi bunların yükseklikleri aynı ise alt tabanları da aynı (oluşan üçgenlerin)

Ö1: Yükseklikleri aynı olmaz ki

Ö3: Yükseklikleri aynı olur.

Ö1: Şimdi bak Aras’ın dediği gibi çapraz ayırırsak (bu çapraz ile kastettiği üçgeni eş alana sahip iki parçaya ayıran doğru parçası)

Ö3: Tamam çapraz ayır.

Ö1: Şöyle bir yüksekliği olur.(yükseklik çizmiştir)

Ö4: Bunun da yüksekliği aynı diğerinin de aynı

Ö1: Ha yükseklik 4,35 yani

Ö3: O zaman kenarortay indirirsek çözmüş oluruz.

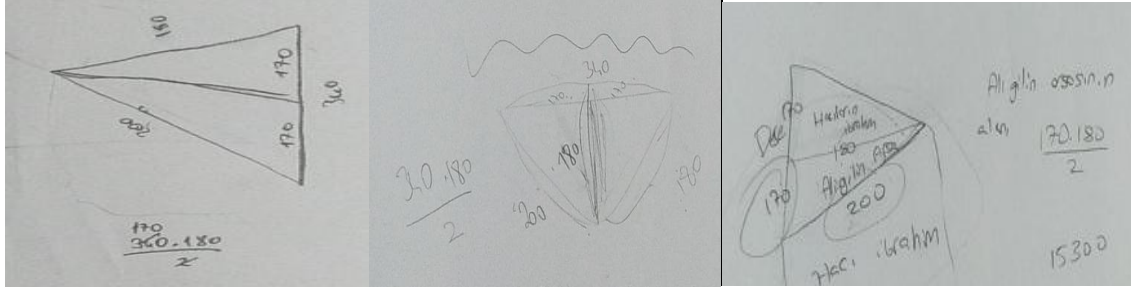
Ö4: Pergel olmasaydı hesaplayabilir miydik? Hayır.

İlgili diyalog incelendiğinde öğrencilerin kenarortayı sürecin sonunda yapılandığı görülmektedir. Kenarortayı “çapraz çizgi” ile ifade etmişlerdir. Üçüncü grupta yer alan Ö8, Ö9, Ö10 ve Ö11 yüksekliği hesaplayamadıkları için sayısal bir sonuç elde edememişlerdir. Öğrenciler problemi çözme oturumunda birden fazla hatalı muhakeme gerçekleştirmişlerdir. İlki üçgenin alan bağıntısını iki kenarın çarpımının yarısı olarak yapılandırma (Ö10) olmuştur. Ö8 ve Ö9 ise üçgenin kenar uzunluklarından birini

kenarortay-yükseklik olarak kabul etmiş, alanı buna göre gerçekleştirmiştir. Öğrencilere ait çizimler Şekil 4.41’de sunulmuştur.

Şekil 4.41

Sırası ile Ö10, Ö8, Ö9’a Ait Çizim ve İşlemler



Şekil 4.41 incelendiğinde Ö8 ve Ö9 tarafından aynı şeklin çizildiği görülmektedir. Ö8 oturumun ortalarında verilen uzunluklardan birinin yükseklik olması gerektiğini ifade etmiştir. Oturum sırasında Ö10’a “Hangisinin yükseklik olduğunu nereden bileceğim. Alanı bulmak için yüksekliği bilmem gerekli ya. Şimdi bir dakika kenar 180 olup yükseklik 200 olmaz” diyerek üçgeni neden bu şekilde çizdiğini açıklamıştır. Ancak öğrenci 180 metreyi yükseklik olarak kabul ettiği durum için aynı zamanda kenarortay olmasına bağlı ikizkenar üçgeni yapılandırmamıştır. Üçgende dik açının en büyük kenarı görmesi gerektiği referansını yanlış bir çizime uygulamıştır. Ö9 ise sınırları yanlış belirlediği için ilgili çizimi gerçekleştirmiştir. Öğrencilerin gerçekleştirdikleri hatalı işlemler ile eşit alana sahip üçgenler yapılandırabildikleri görülmektedir. Ancak oturum sırasında öğrencilerin “alanın eşitliğine” değil “üçgenlerin eşliğine” odaklandıkları belirlenmiştir. Ö9 oluşan iki üçgenin kenar uzunluklarının farklı (200 m-170 m-180m ve 180m-170m-180m) olduğunu eşitliğin sağlanmadığını söylemiştir. Bu çıkarımına bağlı olarak tabanın 170-170 olacak şekilde değil iki üçgeni eş yapacak şekilde parçalanması gerektiğini belirtmiştir. Ö8 arkadaşının bu düşüncesine katılmış, ilk parçalamanın doğru olmadığını ifade etmiştir. Öğrenciler soruyu tekrar okumuşlardır. Ö11 bu süreçte sessiz kalmış, bireysel olarak çözüme odaklanmıştır. Bir süre sonra Ö8 tabanı nasıl bölerlerse bölsünler çizecekleri doğru parçasının iki üçgenin ortak kenarı olacağını altını çizmiştir. Bu ifadeden sonra öğrencilerin problemin çözümüne yönelik söylemsel sürecin başladığı belirlenmiştir. Muhakemeye yönelik öğrencilerin arasında aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir:

Ö9: Görüntü olarak eşit olmak zorunda değil

Ö8: Görüntü olarak da eşit olması aynı şey değil mi (üçgenlerin eş olmasının alan eşitliğini sağladığını ifade etmektedir.)

Ö10: Tamam alan olarak eşit olsun ama görüntü olarak eşit olmasın.

Ö8: Burası 170 burası 170 ya (tabanda ayırdığı parçaları göstererek). 170'i 200 ile çarpıp ikiye bölmek var (öğrenci hala alanın iki kenarın çarpımı olduğu düşüncesinde). 170'i atıyorum 340 ile çarpıp ikiye bölmek var. Farklı sayılar çıkar.

Ö11: Çevresi farklı olur ama alanları aynı olur.

Ö9: Ha burası ile (üçgenin kenarı) çarpıyoruz burası ile çarpıyoruz (yükseklik).

Ö10: Yükseklikle. Ben de onu anlamaya çalışıyorum niye burası ile (üçgenin kenarı) çarpıyorsun ki?

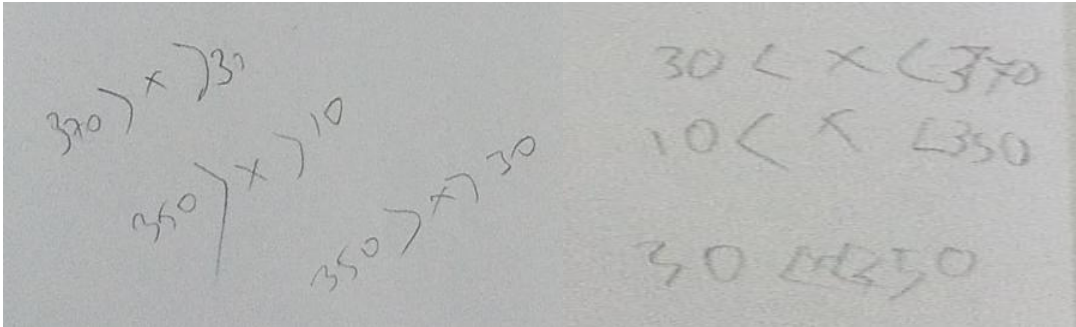
Ö8: Aaa. Taban çarpı yükseklik bölü iki. Taban çarpı kenar.

Ö10: Kenarı niye çarpıyorsunuz ki? Ben de onu anlamaya çalışıyorum bir saat.

Öğrenciler 340 metrelik kenara ait yüksekliğin 180 m olmadığını fark etmelerinden sonra kenarortayın alacağı değerini bulmak için üçgen eşitsizliğinden yararlanmışlardır. Ö9 ve Ö11 grup için ayrı ayrı kenarortayın değer aralığını hesaplamıştır. Öğrencilere ait çizimler Şekil 4.42'de sunulmuştur.

Şekil 4.42

Sırası ile Ö9 ve Ö11'e Ait Eşitsizlikler

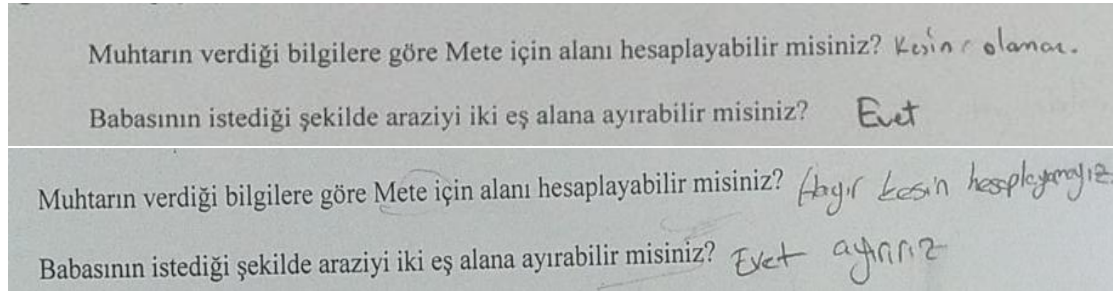


Öğrencilerin hatalı söylemsel kavrayışları devam etmiştir. Burada eşitsizlik hesaplamaları kenarortay için gerçekleşmiştir. Ancak öğrenciler hesapladıkları bu aralığı yükseklik için değerlendirmişlerdir. Ö11 340 metrelik tabana ait yüksekliğin 200 metre ve 180 metrelik kenarlar arasında kalmasına bağlı olarak 180 metreden küçük, örneğin 179 metre olabileceğini ifade etmiştir. Grup yüksekliğin çok fazla değer alabileceği için hesaplanamayacağı konusunda hem fikir olmuştur. Verilen bilgilere göre alanın hesaplanamayacağına karar vermişlerdir. Ancak öğrenciler “hesaplanamayan yükseklik”

değerine rağmen tabanın ve yüksekliğin eşit olmasından dolayı alanın eşit olacağı bilgisini yapılandırmıştır. Öğrenciler ortak kararları sonucunda Şekil 4.43'teki gibi geri bildirim sunmuşlardır.

Şekil 4.43

Ö10 ve Ö8'e Ait Öğrenci Geri Bildirimleri



Gruptaki diğer öğrenciler de arkadaşları ile benzer şekilde kısa açıklama gerçekleştirmiş, oturumu tamamlamak istemişlerdir. Problem çözme oturumuna katılan öğrencilerin söylemsel oluşum yönelimlerine ilişkin bulgular sonucunda Tablo 4.26 oluşturulmuştur.

Tablo 4.26

Öğrencilerin Söylemsel Oluşum Yönelimleri

Öğrenci	Epistemolojik Düzlem	Oluşumun yönü	Bilişsel Düzlem
Ö1 Ö3 Ö4 Ö8 Ö9 Ö10 Ö11	Kenarortayın tabanları ve yükseklikleri eş üçgenler oluşturduğu bilgisi Kenarortayın eş taban ve yüksekliğe bağlı alanları eş üçgenler oluşturduğu bilgisi	←	Uzun kenara ait kenarortayın taban uzunlukları ve yükseklikleri eşit iki üçgen oluşturduğunun fark edilmesi
Ö11	Çevre uzunlukları farklı olan üçgenlerin alanlarının eş olabileceği bilgisi		Üçgenin “eşit” paylaşımının kenar eşliği üzerinden değil alan eşliği üzerinden sağlanacağını ifade edilmesi
Ö5 Ö6 Ö19	Kenarortayın üçgeni alanları eş iki üçgensel bölgeye ayırdığı bilgisi Üçgenin alanın (taban uzunluğu x yükseklik) / 2 olduğu bilgisi	→	Üçgenin alanını hesaplamak için yüksekliğin bulunması gerektiğinin ifade edilmesi ve yüksekliğin bulunması

Tablo 4.26'dan görüleceği üzere Ö11 a priori beklentilerden farklı olarak “çevreleri farklı üçgenlerin alanlarının eşit olabileceği” bilgisini de yapılandırmıştır. İkinci grup öğrencileri üçgenin alan hesaplamasında kullanılan taban uzunluğu ve yüksekliğe sayısal değer atamadan ilişkisel olarak probleme cevap vermiştir. Sonrasında sayısal bir sonuç bulmaya yönelmiş ve yükseklik değerini hesaplamışlardır.

Miras Kalan Tarla probleminde eksiksiz matematiksel çalışma gerçekleştiren Ö19'a ait çalışma uzayı Tablo 4.27'de sunulmuştur.

Tablo 4.27

Ö19'a Ait Çalışma Uzayı Dolaşımı

<i>Epistemolojik Düzlem</i>		<i>Bilişsel Düzlem</i>
Çeşitkenar üçgenin kodlarının çözülmesi (T)	<i>Semiyotik oluşum</i>	Çeşitkenar üçgen çizimi (G)
Üçgenin yardımcı elemanın kodlarının çözülmesi (T)	<i>Söyleme</i> <i>bağlı</i> <i>işlevsel kavrayış</i>	Uzun kenara ait yükseklik çizimi (G)
Üçgenlerde benzerlik bilgisi (R)	<i>Söylemsel oluşum</i>	Kenar uzunluklarını 1/20 oranında küçültülmesi (İ)
Pisagor Bağıntısı (R)		Üçgenin dik açılı olup olmadığının kontrol edilmesi (İ)
Geniş açılı üçgen bilgisi (R)	<i>Söylemsel oluşum</i>	Geniş açılı üçgen çizimi (G)
Kenarortay bilgisi (R)	<i>Söyleme</i> <i>bağlı</i> <i>işlevsel kavrayış</i>	Geniş açılı üçgenin uzun kenarına ait kenarortay ve yükseklik çizimi (G)
Yükseklik bilgisi (R)		Üçgende kenara ait yüksekliğin hesaplanamayacağının ifade edilmesi (İ)
Üçgende taban uzunluğu ve yükseklik ile alan hesaplama bilgisi (R)	<i>Söylemsel Oluşum</i>	Üçgende herhangi bir kenara ait kenarortay çizerek tarlının alanları eşit iki üçgene ayrılacağının ifade edilmesi (İ)
Kenarortayın üçgeni alanı eş iki üçgensel bölgeye ayırdığı bilgisi	<i>Söylemsel Oluşum</i>	
Üç kenar uzunluğu bilinen üçgenin inşa adımları bilgisi (A)	<i>Enstrümantal Oluşum</i>	Cetvel ve pergel ile inşa adımları izlenerek üçgenin çizilmesi (O)
Cetvele ait teknik bilgi (A)	<i>Enstrümantal Oluşum</i>	Kenarın orta noktasının cetvelle belirlenmesi ve kenarortayın çizilmesi (O)
		Cetvel üzerindeki çizgiyi uzun kenarla çakıştırarak dik açının belirlenmesi ve yükseklik çizilmesi (O)
Üçgende taban uzunluğu ve yükseklik ile alan hesaplama bilgisi (R)	<i>Söylemsel oluşum</i>	Ölçülen yüksekliğe bağlı üçgenin alanının hesaplanması (İ)

Not * :T: temsil; A: artefekt; R: referans; G: görselleştirme; İ: ispat O: oluşturma

4.1.5 Bereket Motifi Problemi

Problem çözme oturumu birinci grupta beş (Ö1, Ö2, Ö3, Ö4, Ö12) , ikinci grupta dört (Ö6, Ö15, Ö19, Ö20) ve üçüncü grupta iki (Ö9, Ö11) olmak üzere toplam on bir kişi ile

gerçekleşmiştir. Problem çözme süreci görsel temsillerin çizilmesi ile başlamıştır. Öğrencilerin çeşitli formlarda eşkenar dörtgen çizimi gerçekleştirdikleri görülmüştür. Eşkenar dörtgene ait prototip çizim baskın şekilde kullanılmıştır. Bu çizime bağlı eşkenar dörtgenin alanını köşegenler üzerinden yapılandırmaya yönelmişlerdir. Tüm gruplarda öne çıkan çözüm arayışı eşkenar dörtgene ait köşegen uzunluklarını hesaplamak olmuştur. Köşegen uzunluklarını belirlemek amacıyla birinci grupta Ö1, Ö4, ikinci grupta Ö19 ve üçüncü grupta Ö9 cebirsel ve aritmetik işlemlerden yararlanmış ancak sonuca ulaşamamışlardır. İkinci grupta Ö6 ve Ö20'nin eşkenar dörtgenin paralelkenar ile olan ilişkisine sahip oldukları görülmüştür. Birinci grup ve üçüncü grup bu ilişkiyi sürecin sonunda yapılandırmışlardır. Ö15'in ise eşkenar dörtgene ait birden fazla kavram yanılgısına sahip olduğu görülmüştür. Köşegen uzunluklarını hesaplayamayan ikinci grup bilgisayar talebinde bulunmuştur. Geogebra ile eşkenar dörtgenin köşegen uzunluklarını ölçebileceklerini fark etmişler ancak program ile eşkenar dörtgen çizememiş; tekrar manuel çizime yönelmişlerdir. Eşkenar dörtgenin bir paralelkenar olması bulgusundan hareketle alanı taban uzunluğu ve yüksekliğin çarpımı ile bulabilecekleri sonucunu elde etmişlerdir. Öğrencilerin paralelkenar formunda eşkenar dörtgen çizdikleri gözlemlenmiştir. Çözüm süreci bu bulgudan sonra benzer eşkenar dörtgenin çizilmesi ve bu dörtgenin kenar uzunluğunun bulunması ile devam etmiştir. Birinci ve üçüncü grupta yeni dörtgenin kenar uzunluğu benzerlik oranı dikkate alınmadan, paralel kenarlar arası mesafe kadar olan 4 cm kadar büyütülerek hatalı hesaplanmıştır. İkinci grupta Ö1 de benzer hatayı yaparak grubunu yanlış yönlendirmiştir. Ö3 benzerlik ilişkisi ile doğru sonucu bulmuş ve gruba açıklamıştır. Hatalı sonuç elde eden gruplar problem çözme oturumu sonrasında benzer dörtgenlerin paralel kenarları arasındaki dik uzaklığı yükseklik için doğru taban için yanlış yapılandırdıklarını söylemişlerdir. Birinci ve üçüncü grubun, ikinci grupta Ö15'in eşkenar dörtgen ve paralelkenar arasındaki hiyerarşiyi bilmedikleri belirlenmiştir.

4.1.5.1 Bereket Motifi problemi semiyotik boyut bulguları

Bu başlık altında Bereket Motifi problemine ilişkin öğrencilerin çözüm sürecinde ortaya koydukları temsillerin epistemolojik (*temsil*)- bilişsel (*görselleştirme*) düzlem bileşenleri, semiyotik oluşum ve temsile dayalı işlevsel kavrayış bağlamında elde edilen bulguları sunulmuştur.

Bereket Motifi problemi için epistemolojik düzlem temsil bileşenleri eşkenar dörtgen temsili, paralel doğrular temsili ve yükseklik temsili olarak belirlenmiştir. Problemin analiz tablosunda belirlenen semiyotik oluşum bileşenleri ve problem çözme oturumlarında öğrencilerin görselleştirme kayıtları sonucunda Tablo 4.28 oluşturulmuştur.

Tablo 4.28

Bereket Motifi Problemi Öğrencilerin Görselleştirme ve İşlevsel Kavrayış Bulguları

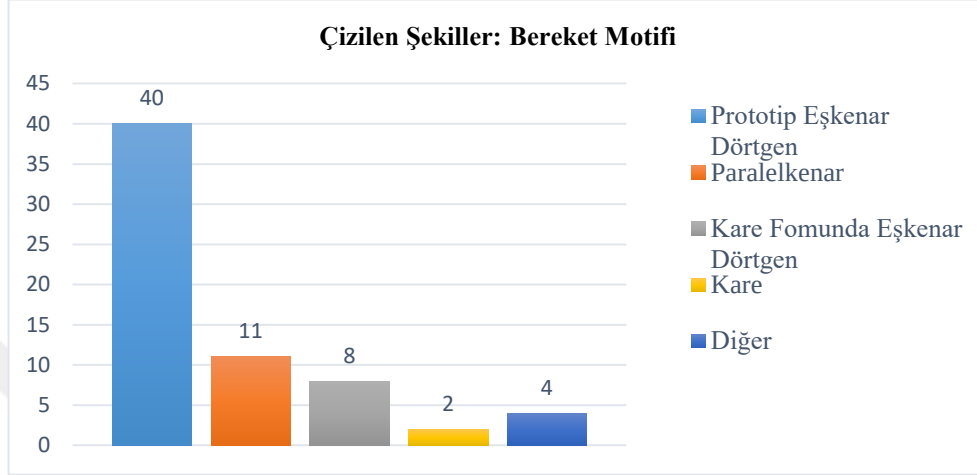
Oluşum		Bilişsel düzlem
Semiyotik Oluşum		Görselleştirme
Görsel Temsil	Motifin tanımlanmasına bağlı eşkenar dörtgen çizimi Motifi büyütmek amacıyla paralel doğru çizimi Alan hesaplamak için yükseklik çizimi	Algisal Kavrayış Prototip eşkenar dörtgen çizimi Paralelkenar formunda eşkenar dörtgen çizimi Dik kesişen köşegen çizimi Kenara ait yükseklik çizimi Yamuk çizimi Dikdörtgen çizimi Kare formunda eşkenar dörtgen çizimi Birbirine paralel olmayan iç içe eşkenar dörtgen çizimi
Sembolik Temsil	Köşe noktaları kullanılarak eşkenarın sembolik ifade edilmesi Paralelliğin sembolik temsili (//) Yükseklik sembolik temsili	Paralel kenarların sembolik temsili Yükseklik temsili Paralelkenarın alan formülü $a.h$
Sözel Temsil	Sözel ve günlük konuşma dili ile ifadeler (örn: motif diyerek eşkenar dörtgenin kastedilmesi)	Eşkenar dörtgenin baklava olarak ifade edilmesi
Temsile Bağlı İşlevsel Kavrayış	İlk dörtgenin etrafına paralel doğruların çizimi ile yeni dörtgenin aranması Paralel kenarlar arası mesafenin ayarlanmasına yönelik çizimler	Büyütülmüş şeklin ilk şekil etrafında çizilmesi

Tablo 4.28 incelendiğinde semiyotik oluşuma yönelik beklentilerin karşılandığı, beklentiler dışında görsel ve sembolik temsil kayıtlarının olduğu görülmektedir. Problem metni içerisinde eşkenar dörtgen olarak ifade edilen şeklin temsili çizimlerde yamuk, dikdörtgen, kare şeklinde çeşitlendiği belirlenmiştir. Problem çözme oturumu toplamda 11 öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Öğrencilerin çok sayıda çizim gerçekleştirdiği problemde 8 öğrenci beş ve üzeri çizim gerçekleştirmiş, en çok on üç şekil çizimi gerçekleştirmiştir. Toplamda 74 ayrı çizim gerçekleşen problem oturumunda

eşkenar dörtgenin algısal kavrayışına yönelik temsil dağılımı Şekil 4.44'deki gibi olmuştur.

Şekil 4.44

Eşkenar Dörtgen Temsil Formları



Şekil 4.44 incelendiğinde öğrencilerin eşkenarı en çok prototip eşkenar formunda çizdikleri, görülmektedir. Problem metni içerisinde bereket motifinin eşkenar dörtgen olduğu ifade edilmiştir. Buna bağlı olarak gerçekleşen çizimlerde öğrencilerin görsel imajları üzerinde prototip çizimin etkisi olduğu bulgusuna ulaşılmıştır. Tüm öğrenciler prototip eşkenar dörtgen çizmişler, bunun yanı sıra söylemsel oluşum içerisinde detaylandırılacak olan paralelkenar formunda çizimler gerçekleşmiştir. Kare formunda gerçekleşen çizimlerde öğrencilerin eşkenar dörtgene yönelik algısal kavrayışları, kavram yanılgıları ve kenar uzunlukları farkına dikkat etmeme durumları etkili olmuştur. Diğer başlığı altında belirtilen çizimler dikdörtgen ve yamuk çizimlerini içermektedir.

Görsel temsiller içerisinde öğrencilerin en çok köşesi üzerine oturtulmuş eşkenar çizdikleri görülmüştür. Ancak problem çözme sürecinde çizdikleri ilk şekiller incelendiğinde üç grupta oturuma katılan toplam on bir öğrenciden sadece altısının prototip eşkenar dörtgen çizerek problem çözmeye başladığı belirlenmiştir. Geriye kalan beş öğrenciden ikisi dikdörtgen, ikisi paralelkenar ve biri de kare çizerek ilk çizimlerini gerçekleştirmiştir. Şekil 4.45'te oturuma katılan öğrencilerin kamera kayıtları verileri aracılığı ile elde ilk çizimleri sunulmaktadır. Kamera kayıtlarının açısı, öğrencinin eli ile engellenmesi ile veri sağlanamayan öğrenci çizimi öğrenci çalışma kağıdı üzerinden verilmiştir.

Şekil 4.45

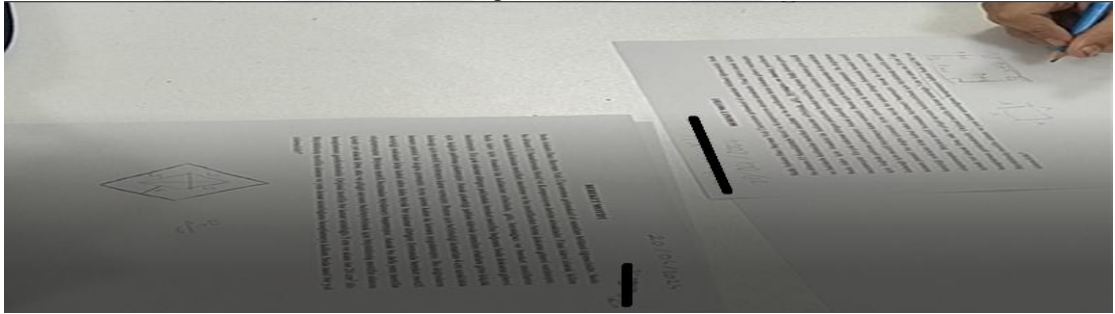
Bereket Motifi Probleminde Öğrencilere Ait İlk Çizim Kayıtları



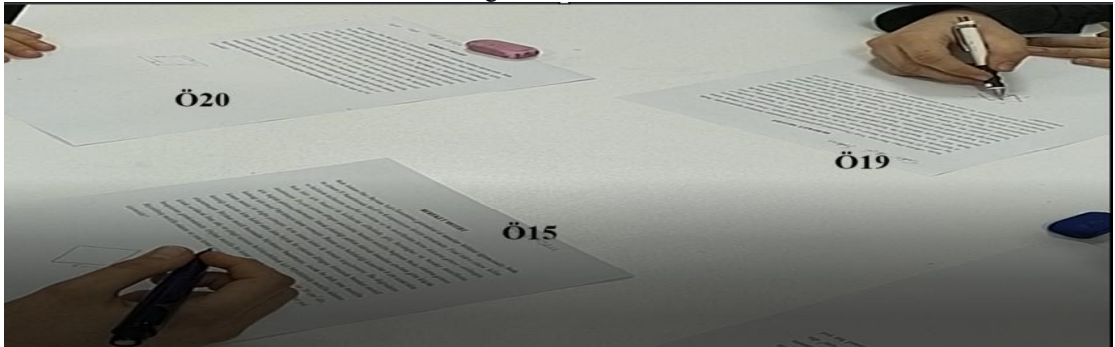
Soldan sağa sırası ile Ö12 ve Ö3



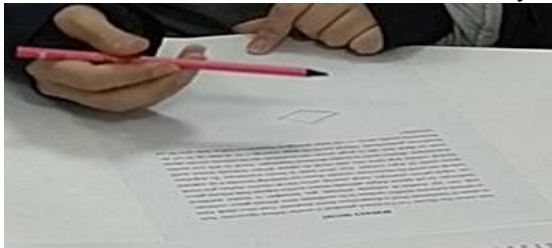
Soldan sağa sırası ile Ö4 ve Ö1



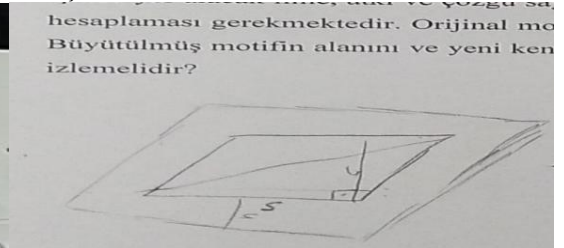
Soldan sağa sırası ile Ö9 ve Ö11



Ö15, Ö19 ve Ö20' ye ait ilk çizimler



Ö2'ye ait ilk çizim



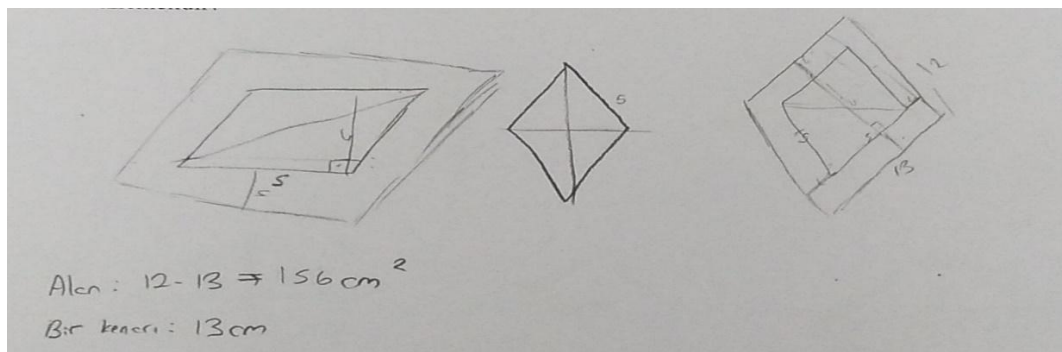
Ö6'ya ait ilk çizim (çalışma kağıdı)

Öğrenci çizimleri incelendiğinde benzer ve farklı formlarda çizimler gerçekleştiği görülmektedir. Ö1 ve Ö12 tarafından gerçekleştirilen dikdörtgen çizimi hatalı semiyotik temsil olarak kabul edilmiştir. Ö1 kısa süre sonra dikdörtgeni silmiştir. Prototip eşkenar dörtgen çizimi gerçekleştirmiştir. Aynı grupta yer alan Ö12 ise süreçte iki tane daha dikdörtgen çizimi gerçekleştirmiştir. Prototip olarak kabul edilen çizimlerinde iki geniş iki dar açı içerecek şekilde (örnek için bkz. Şekil 4.45, Ö9’a ait çizim) ve karenin döndürülmüş ve köşe üzerine oturtulmuş (örnek için bkz. Şekil 4.45, Ö15’e ait çizim) formlarının kullanıldığı belirlenmiştir. Öğrencilerden Ö6 ve Ö20 ise eşkenar dörtgeni tabanı kağıt tabanına paralel olarak çizmişler ve diğer öğrencilerden ayrılmışlardır.

Öğrencilerden Ö6’nın ilk çiziminde eşkenar dörtgenin aynı zamanda paralelkenar olduğunu yapılandığı görülmektedir. Görüşme verileri bu bağlamda irdelendiğinde öğrencinin “Önce bir eşkenar dörtgen çizdim. Kenar uzunluğu 5. Sonra alanını verdiği için 20 cm^2 demiş. Buradan yüksekliğinde 4 olarak buldum. Sonra bu eşkenar dörtgenin çevresine bir eşkenar dörtgen daha çizdim sonra bu yüksekliğe iki tane 4 daha ekledim.” açıklaması epistemolojik $\rightarrow$ bilişsel düzlem yönelimini ortaya koymaktadır. Ancak grup arkadaşlarının eşkenar dörtgenin köşegenleri üzerinden alan formülünü ifade etmelerine bağlı prototip eşkenar dörtgen çizimi gerçekleştirmiştir. Ö6’ya ait çizimler Şekil 4.46’da verilmiştir.

Şekil 4.46

Ö6’ya Ait Problem Çözme Kağıdı



Öğrencinin ilk çizimden sonra çizim formunu değiştirdiği, köşegenler üzerinde bir işlevsel kavrayış gerçekleştirdiği görülebilmektedir (ortadaki çizim). Öğrencinin en sağdaki çizimi ise birinci çizim ile aynı parçalara (taban ve tabana ait yükseklik) çapalama gerçekleştirildiğini ortaya koymaktadır. Öğrencinin çizimi yönettiği bir

görselleştirme gerçekleşmiştir. Öğrenci ile araştırmacı arasında gerçekleşen diyalog bu bulguyu desteklemektedir.

Araştırmacı: Peki ikinci şekli neden çizdin?

Ö6: Arkadaşlarım köşegenlerden bulabilir miyiz dediler. Hani onu test etmek için yaptım.

Araştırmacı: Peki neden ilk halinde bir paralel kenar formunda çizerken, taban üzerinde çiziliyken köşegenlere geçtiğinde şekli köşe üzerine çizdin? Yani neden yine bu formda çizip de köşegenleri böyle yapmak yerine bunun (prototip çizimi göstererek) gibi çizdin bunu açıklayabilir misin?

Ö6: Anladım köşegenlerini çizmek böyle daha kolayıma geldiği için. Bu ilk şekilde yüksekliği daha kolay çizebilmek için yatay çizdim. Köşegenleri daha rahat çizebilmek için de dikey çizdim.

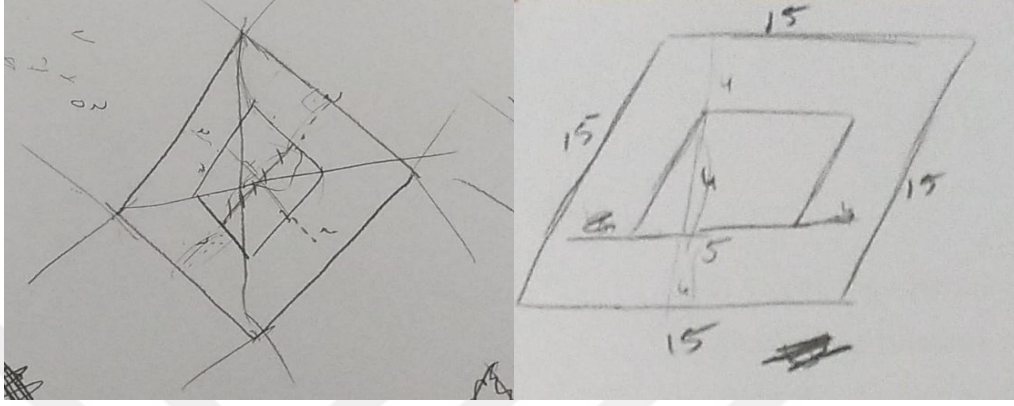
Ö20 tarafından da benzer bir süreç yaşanmıştır. İlk çizim paralelkenar formunda gerçekleştirilmiş, taban ve tabana ait yükseklik yerleştirilmiştir. Grupta yer alan Ö15 tarafından eşkenar dörtgenin alanının “ köşegenlerin çarpımının yarısı” olarak ifade edilmesine bağlı olarak çizimler form değiştirmiştir. İlk çizime bağlı olarak öğrencinin eşkenar dörtgenin kodunu çözdüğünü, dolayısı ile *epistemolojik*→*bilişsel* düzlem yöneliminde semiyotik oluşum gerçekleştiği bulgusuna ulaşılmıştır.

Ö6’nın da çizim formunu değiştirmesine sebep olan köşegenlerin çarpımı ile alanın elde edilmesi düşüncesi başlangıçta farklı formlarda çizimler gerçekleştiren öğrencileri prototip çizime yönlendirmiştir. Söylemsel oluşum başlığı altında ele alınacak alana bağlı temsil ihtiyacı sonucunda tersine çizim süreci de gerçekleşmiştir. Yani başlangıçta prototip çizim gerçekleştiren öğrenciler sonrasında paralelkenar formunda eşkenar çizmiştir. Öğrencilerin uzun süre köşegen uzunluklarını hesap etmeye çalışmaları sonucunda işlevsel kavrayışla çok sayıda çizim gerçekleşmiştir. Öğrenciler tarafından gerçekleştirilen bu çizimlerin kenar uzunluğu ve alanı bilinen eşkenar dörtgenin çizimine yönelik gerçekleşmedikleri görülmüştür. Öğrenciler çizimlerde köşegen çizimine çapalama yapmışlardır. Problemin çözümüne yönelik şeklin ve geometrik nesnelerin temsili öğrencilerin bilişsel çabalarının sonucunda ortaya çıktığı için *bilişsel*→*epistemolojik* düzlem yöneliminde semiyotik oluşum bulgusu kaydedilmiştir.

Bilişsel düzlemde görselleştirme sonucunda eşkenar dörtgenin kodlanmasına yönelik örnek öğrenci çalışma kağıdı Şekil 4.47’de sunulmuştur.

Şekil 4.47

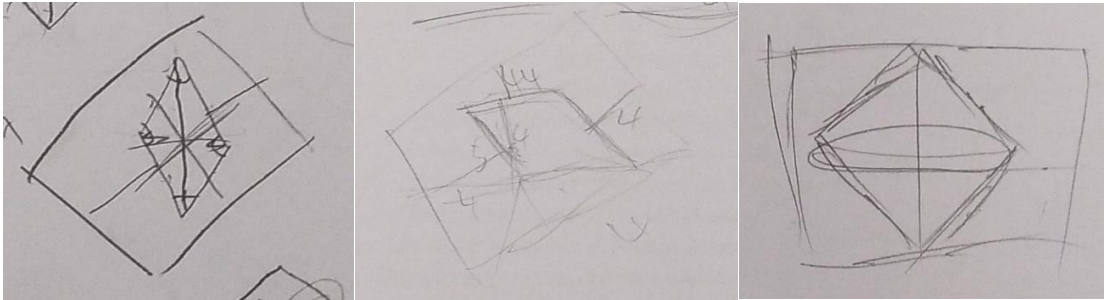
Ö3’ün Çözümüne Yönelik İki Farklı Çizimi



Ö3’ün ilk çizimi incelendiğinde prototip olduğu görülmekle birlikte, diğer öğrencilerde gözlemlenmeyen (Ö1’de kısmi) paralel doğruların çizildiği görülmektedir. Öğrenci problem metninde yer alan çizim açıklamalarını kendi çizimine aktarmıştır. Her iki çizimde de iç içe çizilen şekillerin kenarları paraleldir. Birinci motifin büyütülmüşünün oluşturulmasında paralellik durumunu dikkate almayan hatalı çizimler Ö1, Ö11 ve Ö12 tarafından gerçekleştirilmiştir. Öğrencilerin hatalı temsil kayıtları Şekil 4.48’de sunulmuştur.

Şekil 4.48

Sırası ile Ö1, Ö11 ve Ö12’ye Ait Hatalı Çizimler



Üç öğrencinin de süreç sonunda kenarları birbirine paralel olan iç içe benzer şekiller çizebildikleri görülmüştür. Bu öğrencilerin paralelliği kullanarak benzer şekil temsilleri bilişsel→ epistemolojik düzlem yöneliminde iken diğer öğrencilerin epistemolojik→bilişsel düzlem yöneliminde gerçekleşmiştir.

Öğrencilerin çizimleri karesel form (karenin köşesi üzerine çizilmesi) ve kareyi de içermektedir. Doğrudan kare olarak gerçekleşen çizimler hatalı görsel kavrayışla ilişkili iken, karesel form söylemsel oluşumla ilişkili olduğu için ilgili bölümde verilecektir. Yamuğa ilişkin çizimler de yine aynı bölümde sunulacaktır.

Sembolik kayıtlar incelendiğinde iç içe çizilen benzer dörtgenlerin paralel kenarlarının sembolik dil ile işaretlendiği, yükseklik işaretinin kullanıldığı belirlenmiştir. Paralelkenarın alan formülü (Ö3 tarafından Ö1'in çalışma kağıdına) hatırlatma yapması, görsel destek sağlaması amacıyla kaydedilmiştir. Bu nedenle sembolik temsil kullanımı kapsamında değerlendirilmiştir (Bkz. Otlak Alanı probleminde dairenin alan formülünün kaydedilmesi). Sözel temsillerde öğrencilerin problemin içerdiği kavramlara ait matematiksel terimleri kullandıkları görülmüştür. Ö9'un eşkenar dörtgeni baklava dilimi olarak tanımlaması günlük dile ait bulgudur. Öğrencilerin Bereket Motifi problemine ait semiyotik oluşum yönü Tablo 4.29'daki gibi olmuştur.

Tablo 4.29

Öğrencilerin Semiyotik Oluşumları Yönelimi

Öğrenci	Epistemolojik Düzlem	Oluşumun yönü	Bilişsel Düzlem
Ö1 Ö12	Eşkenar dörtgenin kodlanması	←	Dikdörtgen formda eşkenar dörtgen çizilmesi
Ö11 Ö15			Kare formda eşkenar dörtgen çizilmesi
Ö2 Ö3 Ö4 Ö9 Ö19	Eşkenar dörtgenin kodunun çözülmesi	→	İki dar iki geniş açığa sahip prototip eşkenar dörtgen çizilmesi
Ö6 Ö20	Eşkenar dörtgenin paralelkenar olarak kodunun çözülmesi	→	Paralelkenar formunda eşkenar dörtgen çizilmesi
Ö1 Ö11 Ö12	Benzer eşkenar dörtgen oluşacağının kodlanması	←	İlk eşkenar dörtgen çiziminin etrafına farklı formda dörtgen çizimleri
Ö3 Ö4 Ö6 Ö9 Ö11 Ö15 Ö19 Ö20	Paralel doğruların kodunun çözülmesi Benzer çokgenin kodunun çözülmesi	→	Eşkenar dörtgenin etrafına kenarlara paralel doğru çizimleri Eşkenar dörtgenin benzerini aynı uzamsal özelliklerle çizme

Tablo 4.29 incelendiğinde öğrencilerin birden fazla semiyotik oluşum gerçekleştirdiği, bazı öğrencilerin aynı yönelimi gerçekleştirmesine karşılık bazı öğrencilerin ise farklı yönelim kullandıkları belirlenmiştir.

4.1.5.2 Bereket Motifi problemi araçsal boyut bulguları

Bu başlık altında Bereket Motifi probleminin çözümü sürecinde ortaya çıkan epistemolojik (artefekt) ve bilişsel (oluşturma) düzlem bileşenleri, enstrümantal oluşum ve araca dayalı işlevsel kavrayış bulguları sunulacaktır. Problemin epistemolojik düzlem bileşenleri pergel-cetvel veya Geogebra vb. ile verilen özelliklere sahip eşkenar dörtgen çizimi, Paralel doğruların araçla çizimi, araç ile büyütülmüş eşkenar dörtgen çizimi, araç ile eşkenar dörtgenin yüksekliğini inşa etme, araç ile yeni eşkenar dörtgenin alanını hesaplama olarak belirlenmiştir. Problemin analiz çerçevesinde belirlenen enstrümantal oluşum bileşenleri ve öğrencilerle gerçekleştirilen oturum sonucunda belirlenen oluşum davranışları Tablo 4.30'daki gibidir.

Tablo 4.30

Bereket Motifi Probleminin Oluşturma ve İşlevsel Kavrayış Bulguları

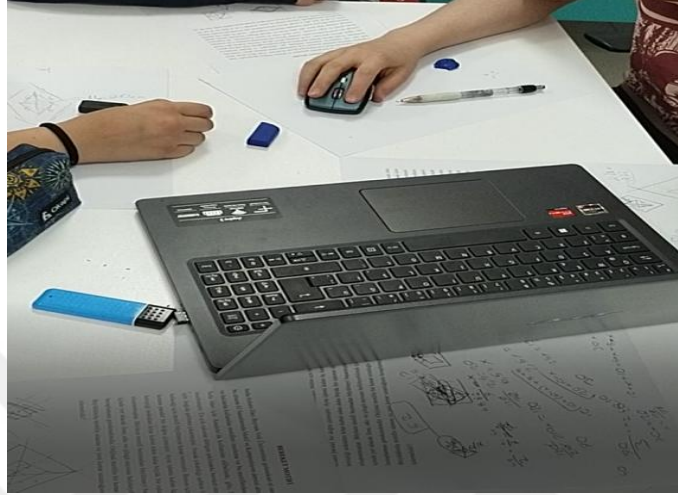
Oluşum	Bilişsel düzlem
Enstrümantal Oluşum	Oluşturma
Pergel ve cetvel veya Geogebra vb. ile eşkenar dörtgeni çizme adımlarının izlenmesi Paralel doğruların cetvel, Geogebra ile çizim adımlarının izlenmesi Yüksekliğin cetvel, Geogebra ile ölçülmesi Alanın Geogebra ile hesaplanması	Sıralı Kavrayış Geogebra ile eşkenar dörtgenin çizilmeye çalışılması
Araça Bağlı İşlevsel Kavrayış	Eş büyüklükte kalemler ile kare ile eşkenar dörtgenin farkının keşfedilmesi El parmaklarının geometri şeridi gibi kullanılarak kare ile eşkenar dörtgenin ilişkisinin keşfedilmesi

Araçsal oluşum bulguları birinci grupta Ö1, Ö2, Ö3, Ö4 ve Ö12'den ve ikinci grupta oturuma katılan Ö6, Ö15 ve Ö20'den elde edilmiştir. İki grubun enstrümantal oluşum karakterleri birbirinden farklıdır. Birinci grup dinamik geometri yazılımı olan Geogebra kullanımına yönelirken, ikinci grup matematiksel araç özelliği olmayan kalemler kullanmıştır. Grupların araç kullanma gerekçelerinin birbirinden farklı olduğu da görülmüştür. Birinci grup köşegen uzunluklarını hesaplayamadığı için Geogebra ölçme aracını kullanmayı planlamıştır. Grup adına programı Ö1 kullanmıştır. Grubun araç desteği almaya karar vermelerinde Ö3'ün etkisi olmuştur.

Şekil 4.49’da birinci grubun bilgisayar desteği alma süreci ve aritmetik hesaplamaları içeren Ö4’e ait problem çözme kağıdı yer almaktadır.

Şekil 4.49

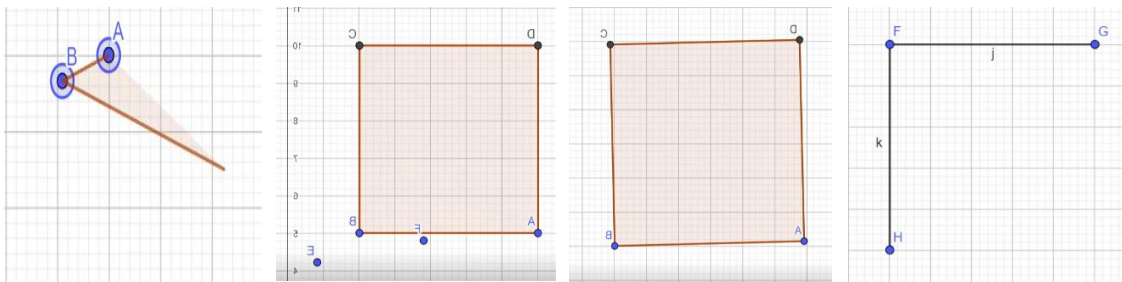
Birinci Grubun Dinamik Geometri Yazılımı Desteği Süreci



Grup aritmetik işlemlerle köşegen uzunluklarına ulaşamayınca gruba bilgisayar desteği almayı teklif etmiştir. Ölçme amacı ile kullanılması planlanan Geogebra’ da eşkenar dörtgenin oluşturulmasına ilişkin çizimlerden bazıları Şekil 4.50’deki gibi olmuştur.

Şekil 4.50

Ö1’e Ait Geogebra Çizimleri



Not: Çizimler sıralıdır

Öğrenci çizimleri incelendiğinde sıralı kavrayış adımlarının izlenmediği, enstrümantal oluşum gerçekleşmediği görülmektedir. Öğrenci Geogebra “çokgen”, “düzgün çokgen” ve “doğru parçası” araçlarını kullanarak eşkenar dörtgeni çizmeye çalışmıştır. İkinci şekli döndürerek elde ettiği üçüncü şekilde amaç kareyi eşkenar dörtgene çevirmektir. Ancak başlangıçta ayarladığı 5 cm uzunluğu koruyamayınca yeni bir çizim gerçekleştirmek istemiştir. Bu çiziminde kareyi oluşturduğunu fark edince bilgisayar kullanmaktan grupça

vazgeçmişlerdir. Görüşmelerde öğrencilerin enstrümantal oluşuma yönelik açıklamaları aşağıdaki gibi olmuştur:

Araştırmacı: Problemi çözerken araç gereç desteği istediğiniz. Araç gereç kullanma ihtiyacı neden hissettiniz?

Ö1: Kağıttan bir çözüm bulamadık.

Ö12: Köşegenleri daha kolay bulabiliriz diye belki oradan diye. Aklımızda canlandıramıyoruz kağıtta da aklınızda canlandıramadığımız için fazla yansıtamıyoruz Belki oradan bir yardım bulabiliriz gibi ama kullanmayı bilmediğimiz için.

Araştırmacı: Ö3 dedi ki alanı bulmamızı sağlar.

Ö3: Evet Geogebra’da alan hesaplanabiliyor diye biliyorum.

Araştırmacı: Sen çizemedin ya hani eşkenar dörtgeni eşkenar dörtgenin çizseydin sonraki aşamayı nasıl yapacaktın? Ne kullanacaktın? Çünkü oraya takılınca devamı gelmedi

Ö1: Eğer çizebilseydim bir doğru parçasını bulmaya çalıştığımız köşegen uzunluklarını bir doğru parçası çizerek bulmaya çalışacaktım. Ama eğer sonra da tekrardan paralel olduğu aklımıza gelseydi de bulmaya çalıştığımız uzunluğu 4 santim uzatıp büyütülmüş motifin onun arkasına çizip burada bulmaya çalıştıklarımızı orada doğru parçalarının yerine oturtup o doğru parçasının uzunluğundan yürümeyerek bulmayı denerdim.

İlgili diyalogda öğrenciler araç kullanmaya hakim olmadıklarını ifade etmişlerdir. Birinci grupta yer alan diğer öğrenciler Ö1’e destek olacak herhangi bir yönlendirme yapmamıştır. Bu verilerden hareketle ölçme ihtiyacına bağlı bilişsel düzlemde başlayan enstrümantal oluşum tamamlanmadığı için epistemolojik düzleme geçiş sağlanamamıştır.

İkinci grupta araç kullanımına yönelik süreci Ö15 başlatmıştır. Gruba yönelttiği soru aşağıdaki diyalogu başlatmıştır:

Ö15: Bir şey diyeceğim eş kenar dörtgense açıları nasıl 90 değil?

Ö6: Eşkenar kare olur o zaman.

Ö15: Tamam eşkenar işte.

Ö6: Ama eşkenar farklı kare farklı

Ö20: Bunun açıları 90 gibi duruyor mu? (prototip eşkenar göstererek)

Ö6: O zaman kenarları farklı.

Ö6: Hayır.

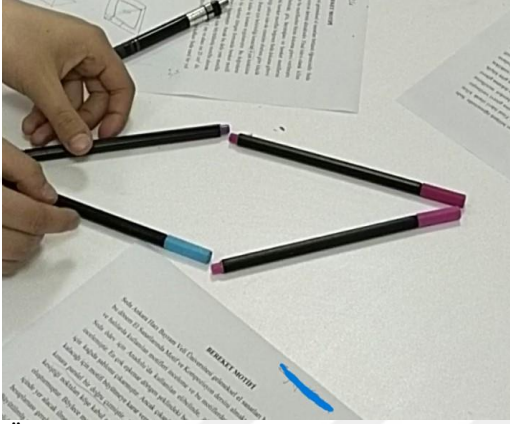
Ö15: Açıları değişiyor çünkü

Ö6: Bak şöyle düşün çubuktan bir kare elde ediyorsun. Sadece köşelerinden bağlı onu böyle yay gibi uzatıp kısalttığın zaman kenarları aynı olur açıları değişir. Anladın mı?(öğrenci burada el parmaklarını geometri şeridi gibi kullanarak durumu açıklamıştır.)

Ö20'nin kalemler ile gerçekleştirdiği açıklamaya ilişkin görüntüler Şekil 4.51'de sunulmuştur.

Şekil 4.51

Kalem ile Oluşum



Ö20: Bir dakika. Bunların hepsi aynı ya eş ya. Bunların açısı 90 mı olur?

Ö20: Şimdi bak kare oldu.

Ö6 tarafından ifade edilmeye çalışılan durumu araç kullanarak somutlaştıran Ö20 olmuştur. Öğrencilerin sıralı kavrayış aşamaları gerçekleştirmediği, ancak enstrümantal oluşum gerçekleştirdikleri görülmüştür. Ö6 ve Ö20 için enstrümantal oluşum yönü epistemolojik→bilişsel düzlem yöneliminde gerçekleşmiştir. Ö15'in eşkenar ve kare arasındaki hiyerarşiyi araç desteği ile yapılandırmasına bağlı olarak bilişsel→epistemolojik düzlem yönelimi gerçekleşmiştir. Bu bulguya yönelik görüşme kaydı aşağıdaki gibidir:

Ö20: Şey biz böyle matematik sorusu görmüştük. Kare iken böyle değiştiriyordu eşkenar dörtgen oluyordu ama kenar uzunlukları aynı kalıyordu. Bende de eş kalemler vardı. Sonra oradan aklıma geldi

Araştırmacı: Etkili oldu mu peki (Ö15'e)? Arkadaşlarının yaptıkları şekil üzerinden neyi fark ettin?

Ö15: Şey açıların kenarlarının sabit kaldığında açıların değişebileceğini anladım.

Öğrenci açıklamalarından Ö15'in sahip olduğu matematiksel bilgiye dayalı aracı (kalemler) esnek şekilde yönettiği, Ö20'nin ise araç desteği ile bilgiyi yapılandığı, aracın matematiksel bilgi için arabulucu rolü üstlendiği belirlenmiştir.

4.1.5.3 Bereket Motifi problemi söylemsel boyut bulguları

Bu başlık altında Bereket Motifi probleminin çözümü sürecinde ortaya çıkan epistemolojik (referanslar) ve bilişsel (ispatlama) düzlem bileşenleri, söylemsel oluşum ve söyleme dayalı işlevsel kavrayış bulguları sunulacaktır. İlgili problem için epistemolojik düzlem referansları; eşkenar dörtgenin dörtgenler içindeki hiyerarşisi, eşkenar dörtgenin alan formülü, eş ve benzer çokgenler bilgisi, üçgende açı-açı açı benzerliği olarak belirlenmiştir. Problemin analiz tablosunda probleme bağlı a priori söylemsel oluşum durumları ile öğrencilerin oturumlarda ortaya koyduğu bilişsel düzlem verileri Tablo 4.31’de verilmiştir.

Tablo 4.31

Bereket Motifi Probleminin İspatlama-Muhakeme ve İşlevsel Kavrayış Bulguları

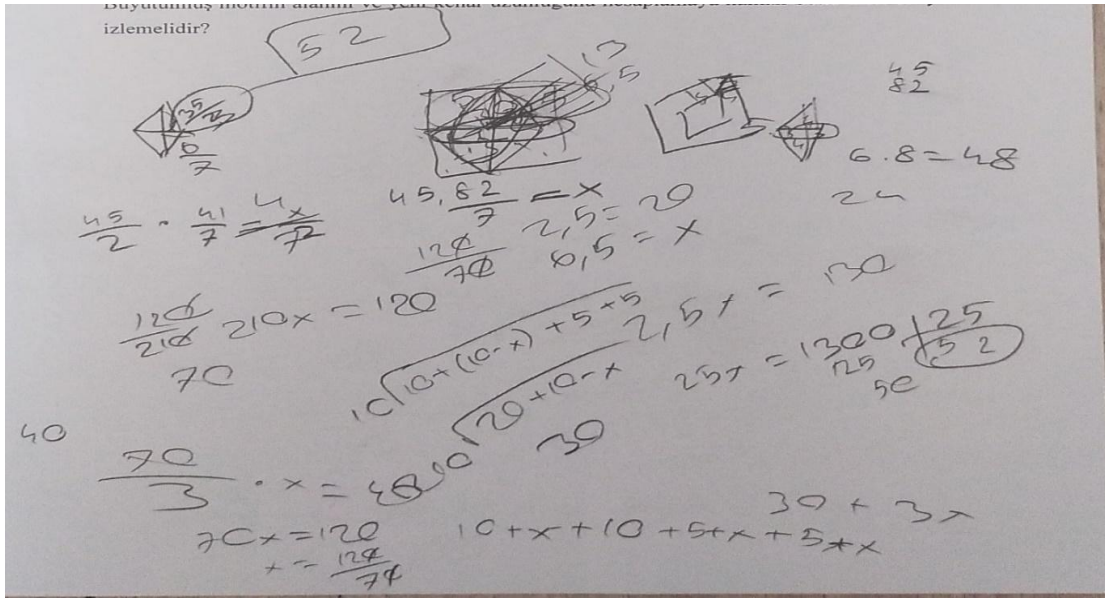
Oluşum	Bilişsel düzlem
Söylemsel Oluşum	İspatlama -muhakeme
Eşkenar dörtgenin aynı zamanda bir paralelkenar olduğunun ifade edilmesi Benzer çokgenlerin açı ve kenar özelliklerinin ifade edilmesi Eşkenar dörtgenlerin yükseklikleri oranı ile kenar uzunlukları arası ilişkisinin kurulması Eşkenar dörtgenlerin alanları arasında benzerlik olduğunun ifade edilmesi Alanlar arası oranın benzerlik oranının karesi olduğunun ifade edilmesi	Eşkenar dörtgenin köşegenlerinin dik kesiştiğinin ifade edilmesi Eşkenar dörtgenin alanın köşegenlerin çarpımının yarısına eşit olduğunun ifade edilmesi Eşkenar dörtgenin kare ile farkının ifade edilmesi Eşkenar dörtgenin aynı zamanda paralelkenar olduğunun ifade edilmesi Eşkenar dörtgenin paralelkenar olmasına bağlı alanının taban uzunluğu ve bu tabana bağlı yüksekliğin çarpımı olduğunun ifade edilmesi
Söyleme Bağlı İşlevsel Kavrayış Eşkenar dörtgenin kullanılacak alan formülüne uygun olarak çizilmesi Benzer eşkenar dörtgenin yüksekliğinin ilk yüksekliğe bağlı çizilmesi	Alanı hesaplamak için köşegenlerin çarpımını yansıtacak çizim Taban uzunluğu ile yüksekliğin çarpımını yansıtacak şekilde eşkenar çizimi Kenarları eşkenar dörtgenin köşelerine teğet olan dörtgen çizimi Benzer iki dörtgen arasında kalan parçaların yamuk ve üçgen parçaları olarak çizilmesi Eşkenar dörtgen parçalarından oluşan dikdörtgen çizimi

Bereket Motifi problemi çalışma uzayı öğrencilerin eşkenar dörtgene ilişkin referans bileşeninden yoğun şekilde etkilenmiştir. Eşkenar dörtgenin görsel imajlarının prototip olarak çizilmesi semiyotik oluşum içerisinde görsel kavrayışa bağlı sunulmuştur. Öğrencilerin “eşkenar dörtgenin köşegenleri dik kesişir” ve “eşkenar dörtgenin alanı köşegenlerinin çarpımının yarısına eşittir” bilgisi prototip çizime yön veren diğer kaynak olarak belirlenmiştir. Alan formülünün köşegenlerin çarpımı üzerine kurgulanması nedeni ile uzun süre köşegen uzunluklarını belirlemeye yönelik matematiksel çalışma

gerçekleşmiştir. Cebirsel ve aritmetik çözüm arayışları köşegenlerin uzunluklarını belirlemeye yönelik gerçekleşmiştir. Öğrencilerin cebirsel işlemler sonucunda köşegen uzunluklarını hesaplayamadıkları görülmüştür. Cebirsel çözümler köşegen uzunlukları üzerinden yürütülse de çözümlerin farklılaştığı belirlenmiştir. Şekil 4.52’de Ö4’e ait çalışma kağıdı verilmiştir.

Şekil 4.52

Ö4’e Ait Çalışma Kağıdı



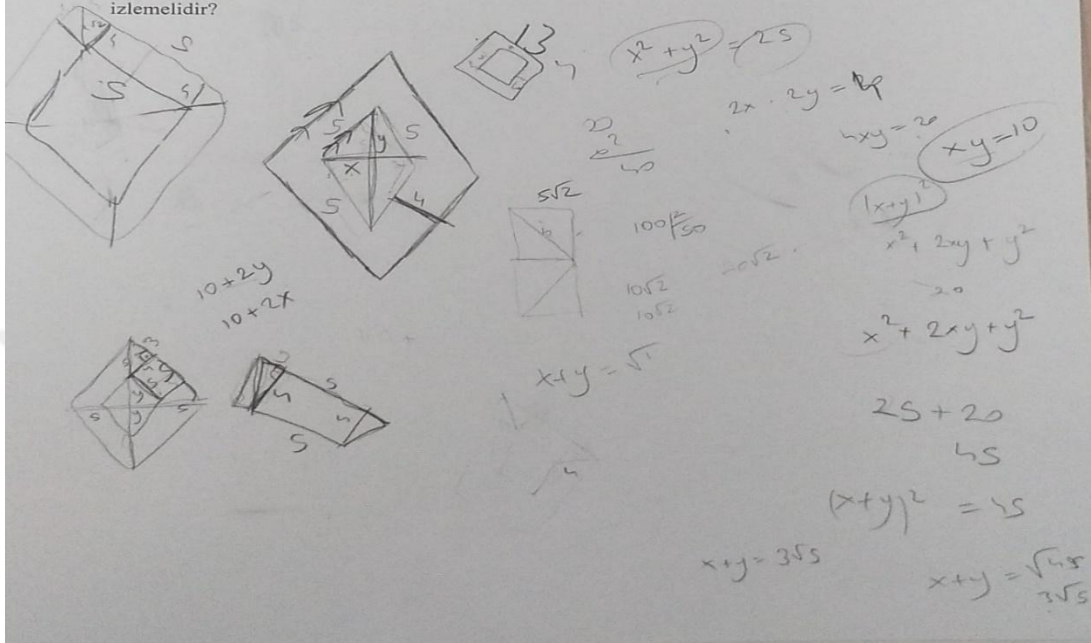
Ö4’e ait işlemler incelendiğinde birden fazla deneme yaptığı görülmektedir. Kutu içerisine aldığı 52 sonucuna yönelik açıklaması “ Ben buradan 90 dereceden dümdüz çıkardım 5’i 2’ye böldüm. Oradan süper üçlü oldu. İki buçukta 20 oran varsa altı buçukta kaç vardır diye. Öyle bir oran kurdum” şeklinde olmuştur.

Öğrenci eşkenar dörtgenin köşegenlerini çizdiğinde dik kesiştikleri bilgisini kullanmıştır. Oluşan dik üçgenlerden bir tanesinden köşegenlerin kesişme noktasından hipotenüse kenarortay çizmiş, kendi ifadesi ile süper üçlü oluşturmuş. Aynı zamanda dik olduğunu düşünerek alanla ilişkilendirmiştir Sonrasında 4 cm uzatmayı da işin içine katarak yüksekliği 6,5 cm olarak düşünmüş ve oranı buna göre kurmuştur. Ancak burada öğrenci hem yanlış bir yükseklik inşa etmiş hem de 4 cm uzatmayı tek bir kenar için hesaplamıştır. Öğrenci çözüm kağıdında 6 cm x 8 cm işlemine bağlı elde edilen 48 cm² sonucu ise köşegenler tarafından oluşturulan eş üçgenlerin 3-4-5 cm kenar uzunluğuna sahip olma durumunun kontrol edilmesi amacıyla gerçekleştirilmiştir. Sonucun motifin alanı olan 20 cm²’den farklı olması ile bu çözümün hatalı olduğuna karar vermiştir. Öğrenci diğer

işlemlere yönelik bir açıklamada bulunmamıştır. Cebirsel çözüm geliştiren Ö9'a ait çizim ve cebirsel ifadeler Şekil 4.53'te sunulmuştur.

Şekil 4.53

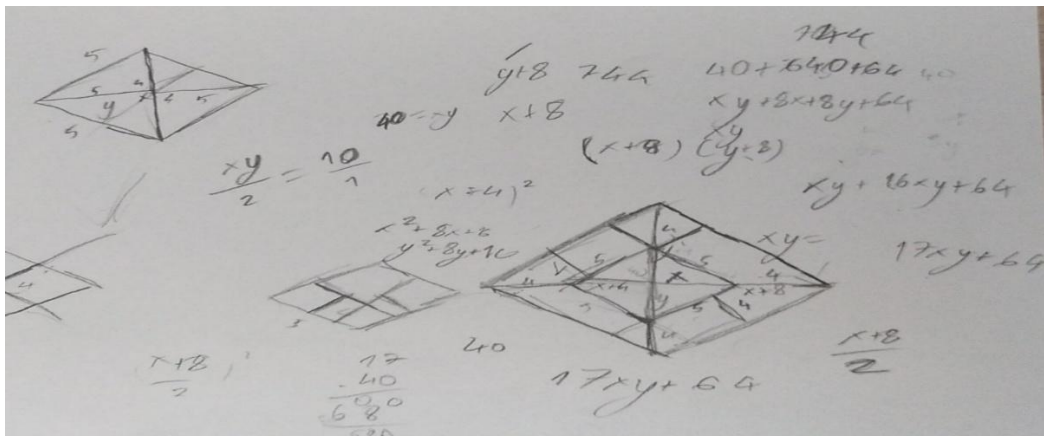
Ö9'a Ait Çalışma Kağıdı



Ö9 tarafından kurulan cebirsel ilişkinin doğru olduğu görülmektedir. Köşegen uzunlukları $2x$ ve $2y$ olarak belirlenmiştir. Oluşan dik üçgenin birisi için Pisagor bağıntısını kullanarak $x^2 + y^2$ değerini 25 olarak hesaplamış, eşkenar dörtgenin alan bağıntısını kullanarak $x.y$ değerini 10 olarak belirlemiştir. Bu iki değeri $(x+y)^2$ özdeşliğinde yerine yazarak $x+y$ değerini hesaplamıştır. Ancak bu ilişkiyi devam ettirememiştir. Şekil 4.54'te Ö19'a ait çizim ve cebirsel ifadeler sunulmuştur.

Şekil 4.54

Ö19'a Ait Çalışma Kağıdı



Şekil 4.54 incelendiğinde öğrencinin cebirsel çözüme yönelik çiziminde 4 cm uzatmayı hem paralel kenarlar arası hem de köşeden köşeye gerçekleştirdiği, denklemi yanlış kurduğu ve işlem hatası gerçekleştirdiği belirlenmiştir. 744 cm^2 şeklinde bir sonuca ulaşmış, görüşme sırasında çok büyük bir değer çıktığı için hatalı yaptığını fark ettiğini ifade etmiştir.

Referans bileşenine bağlı olarak kare formunda gerçekleşen çizimler eşkenar dörtgene yönelik kavram yanılgısı (Ö11, Ö15) ve eşkenar dörtgenin “kare” olma durumunun değerlendirilmesi (Ö1, Ö3 ve Ö20) olarak farklılaşma görülmüştür. Kare olma özel durumunu değerlendiren üç öğrenci alan üzerinden köşegen uzunluklarını hesaplamış, buldukları değer kenar uzunluğu olan 5 cm sayısal sonucunu sağlayıp sağlamadığını Pisagor bağıntısı ile doğrulamışlardır. Ö11 ve Ö15 ise kenar uzunlukları eşit olan dörtgenin, yani eşkenar dörtgenin kare olduğu şeklinde bir kavram yanılgısı ile hareket etmişlerdir. Ö11 oturum sırasında uzun süre kare üzerinden çözüm aramıştır. Arkadaşının 5 cm kenara sahip kare için alanın 20 cm^2 sayısal sonucunu vermeyeceğini söylemesi üzerine hatasını fark etmiştir. Ö15 ile gerçekleştirilen görüşmede öğrenci ve araştırmacı arasında aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir:

Ö15: Evet yani eşkenar dörtgenin kenarları eşitse köşegenleri de eşittir dedim.

Araştırmacı: Dur kenarları eşitse köşegenleri de eşittir. Yani bunu şekle bağlı olarak mı söyledin? Yoksa zaten böyle bir bilgin var mıydı? Eşkenar dörtgenin kenarları eş o zaman köşegenler de eş diye.

Ö15: Önceki bilgilere göre yani buradan bir şey çıkaramadım ona göre.

Ö15’in kare çizimleri semiyotik, kare ve eşkenar dörtgen ilişkisi ile ilgili durum enstrümantal oluşum süreci içerisinde ifade edilmiştir.

Bereket Motifi problemine köşegen uzunlukları üzerinden bir çözüm getiremeyen grupların eşkenar dörtgenin karşılıklı kenarlarının paralel olması üzerine yoğunlaştıkları görülmektedir. Birinci grupta yer alan Ö1 arkadaşlarına paralellığe odaklanmaları gerektiğini söyledikten sonra Ö3 tarafından çözüm için yeni bir çizim gerçekleşmiştir. Grupta yer alan Ö1, Ö12’de iki kenarı uzun iki kenarı kısa prototip paralelkenar çizmişlerdir. Oturumda öğrenciler arasında gerçekleşen konuşma aşağıdaki gibi olmuştur:

Ö1: Şimdi o zaman bunların kenarları birbirine paralelse biz bunun alanını paralelkenar gibi bulamaz mıyız?

Ö3: Paralelkenar nasıl bulunuyor? Ha tamam ben biliyorum şöyle olan (eli ile paralel olan üst ve alt ve yan kenarları gösteriyor). Şurası dik ya (yükseklik), şurası a (taban uzunluğu) (çizerek ifade etmiştir.)

Ö1: Tamam işte üçgen üçgen dikdörtgen yapar.(yüksekliğin çizilmesi ile oluşan yan üçgeni kastederek).

Ö3: Ama bu daha kolay.

Ö1: Tamam dediğini söyle. Üst kenarla yüksekliği çarpacağım? Yamuğun alanı değil mi o?

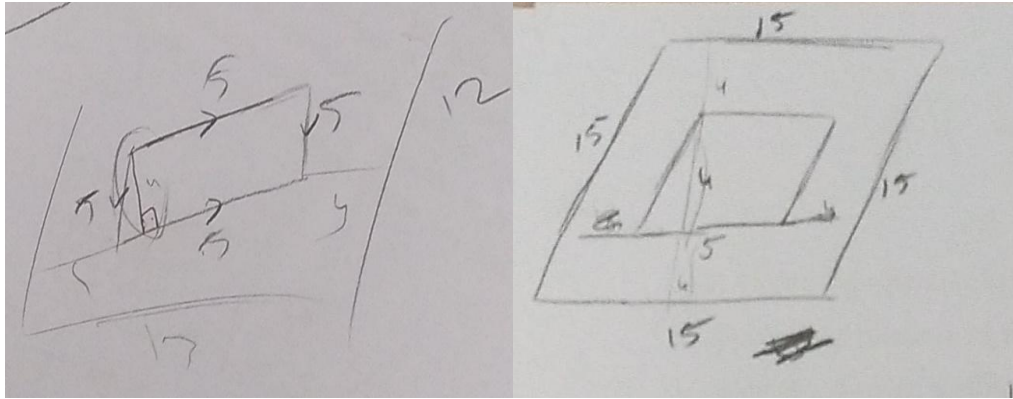
Ö3: O yamuğun alanı üst kenarla.

Ö1: Alt kenarın çarpımı h (yükseklik) bölü iki.

Bu diyalog sonrasında öğrenciler yüksekliğin alabileceği sayısal değeri 4 cm olarak hesaplamışlardır. Ö1 ve Ö3'e ait paralelkenar formunda eşkenar çizimleri Şekil 4.55'te sunulmuştur.

Şekil 4.55

Sırası ile Ö1 ve Ö3 Ait Çizimler



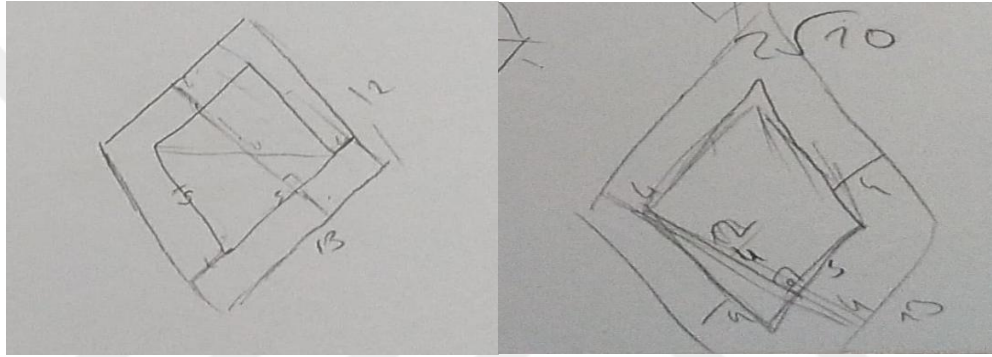
Öğrenciler çizimleri grup adına gerçekleştirmiştir. Her iki çizimde incelendiğinde yükseklik değerinin 12 cm olarak doğru olarak hesaplanmasına karşılık sağ ve solda bulunan kenarlara ait 4 cm genişletmenin yanlış yapılandırıldığı görülmektedir. Ö3 tarafından doğru matematiksel ilişki kurulmuş, yüksekliğe ait uzunluk üç katına çıktığı için taban uzunluğunun da üç katına çıkması gerektiği ifade edilmiştir. Ancak Ö1 çizimi ile grubu ve Ö3'ü yanlış yönlendirmiştir. Tabanı iki yana doğru 4 cm genişleterek tabanın 13 cm olması gerektiğini söylemiştir. Ö4 burada “ iyi de biz burada motifi büyüttüğümüz zaman asıl şeyi eşkenar dörtgen olması, eşit mi” şeklinde müdahale ederek grubun

dikkatini ilk durumda yüksekliğin 8 cm, ikinci durumda kenarın 8 cm artmasına çekmiştir. Ö3 ilk başta söylediği benzerlik ilişkisine dönerek tabanın 15 cm olması gerektiğini söylemiştir.

İkinci grupta yer alan Ö6 ve Ö20'ye ait çizimler diğer öğrencilerden farklı bir yönelimde gerçekleşmiştir. Her iki öğrenci de ilk çizimlerini paralelkenar formunda gerçekleştirmiş olmalarına karşılık paralellik ilişkisine yapılan vurgudan sonra çözüme ait çizimlerde prototip çizim gerçekleştirmiştir. Öğrencilere ait çizimler Şekil 4.56'da sunulmuştur.

Şekil 4.56

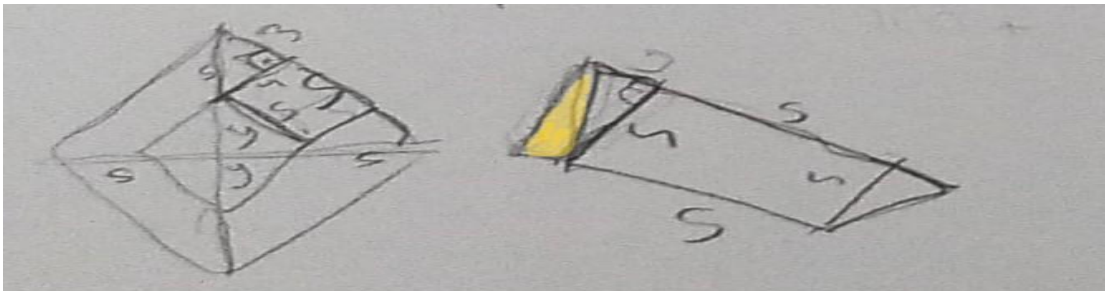
Sırası ile Ö6 ve Ö20'ye Ait Çizimler



Burada öğrencilerin sayısal verileri yerleştirme yönüne dikkat edilirse şekli esnek kullandıkları görülmektedir. Ö6 tarafından kağıdın yönü değiştirilerek paralelkenar olma özelliğinin görsel imajının sağlandığı video kayıtlarından doğrulanmıştır. Öğrencilerin yüksekliği doğru, taban uzunluğunu yanlış yapılandığı çizimler üzerinden belirlenebilmektedir. Üçüncü grup verileri ikinci gruba benzer şekilde yeni motifin yüksekliğinin doğru, kenar uzunluğunun yanlış hesaplandığını ortaya koymuştur. Buna karşılık grup (Ö9 ve Ö11) söyleme dayalı işlevsel kavrayışı yoğun şekilde işe koşmuşlardır. Ö9 alanı bulmak için şekli alanını hesaplamayı bildiği yamuk ve üçgenlere ayırmıştır. Ö9'un işlevsel kavrayışa bağlı çizimleri Şekil 4.57'de verilmiştir.

Şekil 4.57

Ö9'a Ait Çizimler



Şekil 4.57 incelendiğinde öğrencinin ilk motif ile ikinci motif arasında kalan parçaları yamuk oluşacak şekilde parçalara ayırdığı görülmektedir. Çizim içerisinde ayırdığı yamuğu yine üçgen ve dikdörtgen oluşacak şekilde ayırmıştır. Bu çizim üzerinden sağladığı nicel verileri tekrar ilk çizim içerisine aktarmıştır. Görüşme sırasında işlevsel kavrayışı şu şekilde açıklamıştır:

Ö9: Yamuk olduğunu fark ettim. Daha sonra yamuğu da ayrı bir şekilde çizdim. Burada bir dikdörtgen oluyordu. Burası 4 oluyordu. O şekilde daha sonra onu da

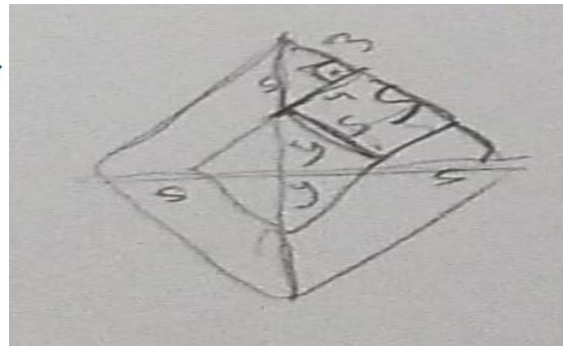
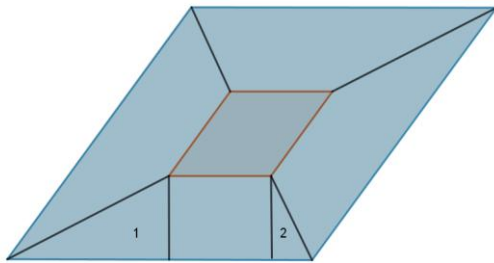
Araştırmacı: Oradan neden ilerleyemedin? Orada problemi çözmene ne engel oldu? Yani yamuğu çıkardın üst taban var yükseklik var.

Ö9: Yani şöyle şurası 4'tü şurası 5'te fakat buraları bir şekilde çıkmıyordu yani Mesela buraya rastgele 3 4 5 deyip şey yapabiliyordum onu buraya da yazdım ama o bir şekilde benim aklıma gelen bir şeydi.

Öğrenci Şekil 4.57'deki sarıya boyanmış üçgen çizimini ise “Öğretmenim ben burayı nasıl 3 bulduğumu hatırladım şimdi. Şurası ile şurasının aynı olduğunu fark edip bir dikdörtgen şeklinde birleştirmişim. Dik olduğunu da fark edince. Burası 5 Burası 4 Burası 3 yapmışım devamını getirememişim” olarak açıklamıştır. Tüm bu açıklamalardan öğrencinin problemin çözümünü şekli kullanarak, mereolojik bölünmeye bağlı muhakeme ile çözmeye çalıştığı görülmektedir. Şekil 4.58'de epistemolojik düzleme bağlı gerçekleşmesi beklenen parçalama ile öğrencinin gerçekleştirdiği parçalama sunulmuştur.

Şekil 4.58

Epistemolojik Düzleme Bağlı Parçalama- Ö9'a Ait Parçalama



Öğrencinin dikdörtgen oluşturduğunu söylediği parçalar Şekil 4.58'deki 1 ve 2 numaralı parçalardır. Öğrenci bu iki parçanın eş olduğunu düşünmüştür. Kendi çizdiği ikinci şekilde yamuğun ikizkenar formunda olmasına bağlı hatalı muhakemede bulunmuştur. Oluşturduğu dik üçgende kenar uzunluklarına 3-4-5 özel üçgen değerlerini

yerleştirmesini “aklına geldiği” için gerçekleştirdiğini ifade etmiştir. Öğrenci bilişsel düzlemde epistemolojik düzlem yöneliminde gerçekleştirdiği oluşumu devam ettirmemiştir. Eşkenar dörtgenin köşegenlerini içeren çizimlere bağlı olarak oluşan üçgen parçalarının konfigürasyonu ile dikdörtgeni Ö9 ve Ö19 oluşturmuştur. Öğrencilerin oluşan eş üçgenleri hipotenüsleri çakışacak şekilde bir araya getirdiği ve dikdörtgen oluşturduğu belirlenmiştir. Oluşturdukları dikdörtgenin kenar uzunluklarını hatalı yerleştirdikleri için gerçekleştirdikleri birleştirme öğrencileri çözüme götürmemiştir.

Bereket Motifi problemi oturumuna katılan öğrencilerin söylemsel oluşum yönelimlerine ait bulgular Tablo 4.32’de sunulmuştur.

Tablo 4.32

Öğrencilerin Söylemsel Oluşum Yönelimleri

Öğrenci	Epistemolojik Düzlem	Oluşumun yönü	Bilişsel Düzlem
Ö6 Ö20	Eşkenar dörtgenin paralelkenar olduğu bilgisine bağlı alan bilgisi	→	Eşkenar dörtgenin yüksekliğinin ve yeni dörtgenin yüksekliğinin hesaplamasının paralelkenara bağlı gerçekleştirilmesi
Ö1 Ö3 Ö4 Ö9 Ö11 Ö12 Ö15	Eşkenar dörtgenin bir paralelkenar olduğu bilgisi	←	Eşkenar dörtgenin karşılıklı kenarlarının paralel olduğunun ifade edilmesi
Ö3	Benzerlik bilgisi	→	Eylem 1: Eşkenar dörtgenlerin yüksekliklerinin arası oranı ile kenar uzunluklarının oranının aynı olması gerektiğinin ifade edilmesi Eylem 2: Eşkenar dörtgenin taban uzunluğunun benzerlik oranına göre hesaplanması Eylem 3: Alanın taban uzunluğu ve yükseklik ile hesaplanması
Ö1 Ö2 Ö4 Ö12	Eşkenar dörtgenlerin benzer olduğu bilgisi	←	Kenar uzunlukları arası oranın yükseklikler arası oran ile aynı olduğunun fark edilmesi

Birinci grup dışında diğer gruplar iki dörtgen arasında benzerlik ilişkisini kuramamıştır. Yeni dörtgenin yüksekliğini doğru şekilde bulmalarına karşılık dörtgenin kenarını yüksekliğe benzer şekilde 8 cm uzatarak 13 cm bulmuşlardır. Bunun sonucunda buldukları hatalı sonucu kontrol etme ihtiyacı hissetmemişlerdir. Sadece üçüncü grupta yer alan Ö11 kenarları hatalı şekilde genişlettiğini problem çözme oturumu sonrasında

fark etmiş, görüşmede bu durumu “ *Şu yüksekliğin 4 artacağını bulmuştuk da 5 olan kenarların yine 4 artacağını sanmıştık.*” olarak ifade etmiştir.

Bereket Motifi probleminde eksiksiz matematiksel çalışma gerçekleştiren Ö6’ya ait çalışma uzayı Tablo 4.33’te sunulmuştur.

Tablo 4.33

Ö6’ya Ait Çalışma Uzayı Dolaşımı

<i>Epistemolojik Düzlem</i>		<i>Bilişsel Düzlem</i>
Eşkenar dörtgenin paralelkenar olarak kodunun çözülmesi (T)	<i>Semiyotik oluşum</i> →	Paralelkenar formunda eşkenar dörtgen çizilmesi (G)
Alanın taban uzunluğu ve yükseklik ile bulunacağı bilgisi (R)	<i>Söylemsel oluşum</i> →	Eşkenar dörtgenin yüksekliğinin hesaplanması (İ)
Benzer çokgenlerin kodunun çözülmesi (T)	<i>Semiyotik oluşum</i> →	Eşkenar dörtgenin etrafına aynı uzamsal özelliklere sahip eşkenar dörtgen çizilmesi (G)
Eşkenar dörtgenin alanının köşegenlerinin çarpımı ile bulunacağı bilgisi (R)	<i>Söyleme</i> <i>bağlı</i> <i>işlevsel kavrayış</i> →	Prototip eşkenar dörtgen ve köşegen çizimi (G)
Pisagor Bağıntısı (R)	----- →	Köşegen uzunluklarının hesaplanamayacağını ifade edilmesi (İ)
Alanın taban uzunluğu ve yükseklik ile bulunacağı bilgisi (R)	<i>Söylemsel oluşum</i> →	Eylem 1: Benzer eşkenar dörtgenin yüksekliğinin hesaplanması (İ) Eylem 2: Benzer eşkenar dörtgenin kenar uzunluğunun hesaplanması (hatalı) (İ)
Dörtgenler hiyerarşisi bilgisi (R)	<i>Söylemsel oluşum</i> →	Eylem 1:Eşkenar dörtgen ile paralelkenarın ilişkisinin kare ve dikdörtgen arasındaki ilişki üzerinden ifade edilmesi (İ) Eylem 2:Her eşkenar dörtgenin bir paralelkenar olduğu, her paralelkenarın eşkenar dörtgen olmadığını ifade edilmesi (İ)
Mevcut eşkenar dörtgenin iki dar ve iki geniş açıya sahip olduğu bilgisi (R)	<i>Söylemsel oluşum</i> →	Eşkenar dörtgenin açılarının dik olmadığını ve köşegenlerinin eşit olmayacağını ifade edilmesi (İ)
Geometri şeridi ile kare ve eşkenar dörtgen elde etme bilgisi (A)	<i>Araca bağlı işlevsel kavrayış</i> →	El parmakları ile geometri şeridini taklit ederek kareden eşkenar dörtgene geçişin demonstrasyonu (O)

Not * :**T**: temsil; **A**: artefekt; **R**: referans; **G**: görselleştirme; **İ**: ispat **O**: oluşturma

Ö6 tarafından oluşturulan uzayda dörtgenler hiyerarşisi bilgisinin kullanımından sonra gerçekleştirilen dolaşım grup arkadaşı Ö15 ile gerçekleştirdikleri diyaloga bağlı olarak gerçekleşmiştir. Ö15'in eşkenar dörtgene ait hatalı kavrayışını gidermek amacı ile gerçekleştirdiği oluşumları içermektedir. Öğrencinin bu oluşumlar sonrasında problem çözme sürecini tamamladığı belirlenmiştir.

4.2 Semiyotik Oluşumla İlgili Bulgular

Bu bölümde analiz edilen Otlak Alanı, Kabilenin Güneşi, Bungalov Ev, Miras Kalan Tarla ve Bereket Motifi problemlerinin ve özel olarak bulguları sunulmayan ancak analize tabi tutulan diğer problem verilerinin analizi sonucunda ortaya çıkan semiyotik oluşuma yönelik genel bulgular sunulacaktır.

Semiyotik oluşum süreci görsel, sembolik ve sözel temsil olmak üzere üç farklı şekilde incelenmiştir. Görsel temsil bulguları ile algısal kavrayış bulguları birlikte sunulacaktır. Görsel temsil ile öğrencilerin geometrik muhakemede şekil kullanım ve temsile bağlı işlevsel kavrayış bulgularına da yer verilecektir.

4.2.1 Görsel temsil – algısal kavrayış bulguları

Öğrenciler ile gerçekleştirilen bütün oturumlarda öğrencilerin probleme yönelik bir geometrik çizim gerçekleştirdiği görülmüştür. Ayrıca öğrenciler her problem için en az bir şekil çizmiş, çoğunlukla birden fazla çizim gerçekleştirmiştir. Şekil içermeyen problemlerin çözümü için gerçekleştirilen çizimlerin muhakeme sürecinde birden fazla işlevi olduğu belirlenmiştir. Geometrik çizimlerin:

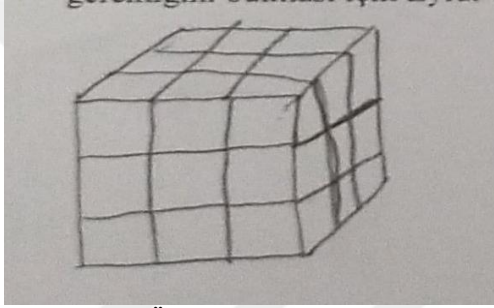
- Probleme ait metnin anlaşılması
- Problemde verilen yönergelerin takip edilmesi (Bkz. Kabilenin Güneşi, Uçurtma Yapımı, Bereket Motif)
- Probleme ilişkin anlamaların kontrol edilmesi
- Belirlenen bir ilişkinin sınanması
- Yeni çözüm arayışı
- Çözümün kontrol edilmesi
- Çözümün sunumu amacıyla gerçekleştirildiği görülmüştür.

Oturumlarda gerçekleştirilen gözlem ve video kayıtları öğrencilerin çoğunlukla problemi okumaya başladıkları anda çizim gerçekleştirdiklerini ortaya koymaktadır. Metin içerisinde yer alan geometrik nesne isimlerini yuvarlak içine alma, matematiksel

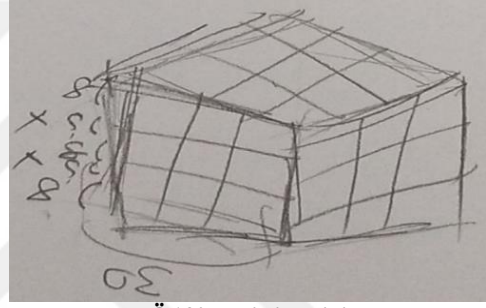
ilişkilerin altını çizme eylemi gerçekleştirdikleri belirlenmiştir. Gerçekleştirdikleri ilk çizimlerin buna bağlı gerçekleştiği, metin ile ifade edilen duruma ilişkin çizimin arandığı görülmüştür. Öğrencilerin ilk çizimleri algısal kavrayışlarını ortaya çıkarmıştır. Bu çizimlerin hızlıca gerçekleşen kaba çizimler sonucunda ortaya çıktığı, genellikle prototip çizim oldukları, öğrencinin problemle ilk ilişkilendirdikleri geometrik nesne ve matematiksel ilişkiyi yansıttıkları, günlük yaşama ait sözel veri ile desteklendiği veya gerçek yaşam modeli oldukları görülmüştür. Doğum günü pastası problemine ait öğrenci çizimleri Şekil 4.59'daki gibidir.

Şekil 4.59

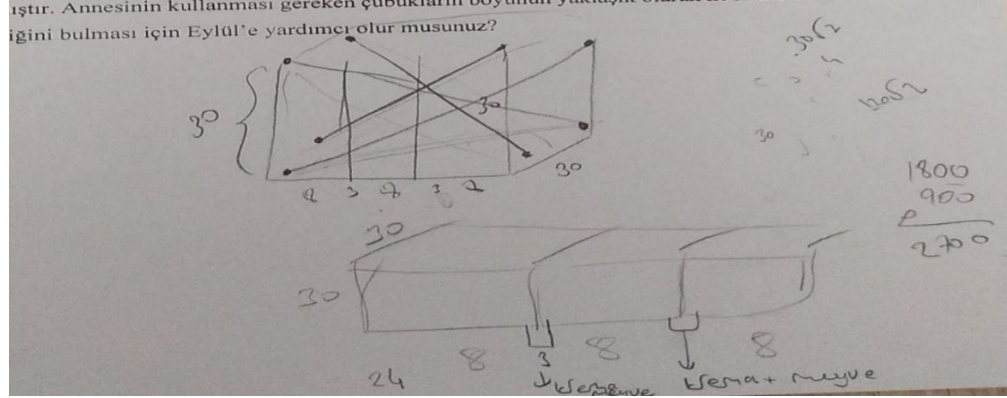
Doğum Günü Pastası Problemi İlk Çizimler



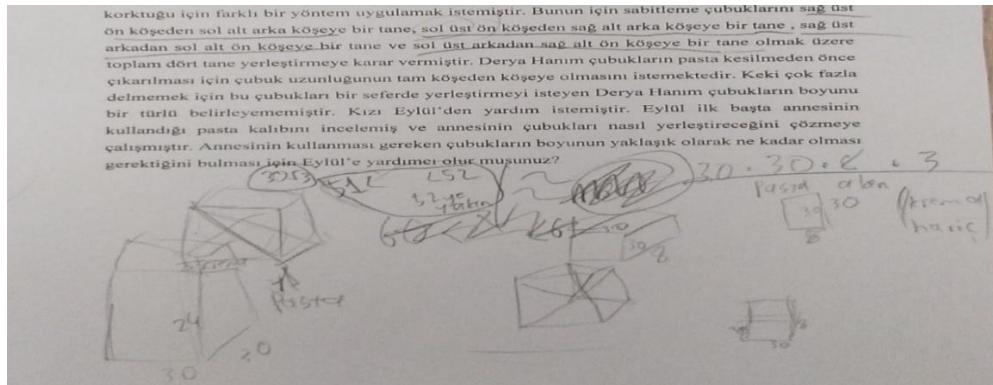
Ö10'a ait ilk çizim



Ö12'ye ait ilk çizim



Ö9' a ait ilk çizimler



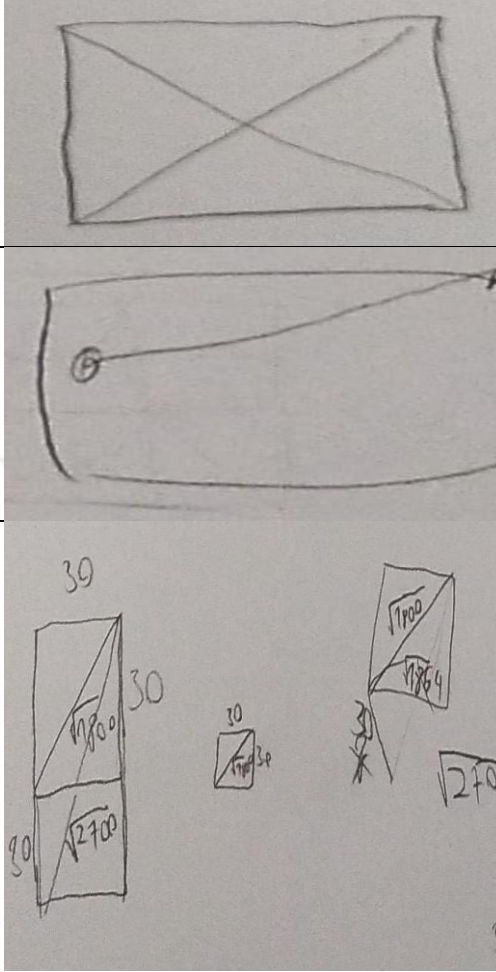
Ö11'e ait ilk çizimler

Ö10 ve Ö12 tarafından gerçekleştirilen çizimler Doğum Günü Pastası probleminde ifade edilen rubik küp ile ilişkili çizimlerdir. Öğrencilerin algısal kavrayışla ilişkili olarak gerçek yaşam durumuna bağlı bir görselleştirme gerçekleştirdikleri belirlenmiştir. Ö9'a ait çizimler incelendiğinde ise iki farklı durum öne çıkmaktadır. İlk çizimi cisim köşegenlerinin konumunu belirlemek amacıyla bir küp temsili ile gerçekleştirirken, ikinci çizim günlük yaşam bağlamı içerisinde ancak küp formunda olmayan bir görselleştirme içermektedir. İlk çizim üzerinden çubukların eşit olduğu sonucuna ulaştığını ifade etmiştir. Öğrenci ile gerçekleştirilen görüşmede ikinci çizime *“Yani işte 30 30 30'a tamamlamak için buranın nasıl 30 olacağını şey yaptım. Hani 8 8 8 krema hani benim için fark etmedi ya. Böyle ya böyle sonuç olarak bir küp olacağını fark ettiğim için buna çok takılmadım”* şeklinde bir açıklama getirmiştir. Ö9 tarafından gerçekleştirilen kaba çizim öğrencinin ihtiyaç duyduğu matematiksel fikri vermede yeterli olmuştur. Ö11 problem çözme oturumlarında metin içerisinde matematiksel açıdan önemli gördüğü yerlerin altını çizme davranışı göstermiştir. Öğrencinin çizimleri incelendiğinde altını çizdiği kısımlara yönelik kaba çizimler gerçekleştirdiği, sözel temsiller oluşturduğu görülmektedir.

Oturuma katılan tüm öğrencilerin ilk çizimleri manuel olarak gerçekleşmiştir. Bu manuel çizimlerin formları öğrencilerin çizim becerilerinden etkilenmiştir. Ancak öğrenciler genel olarak çizimin nitelikli olup olmasını önemsememiştir. Ö9'un yukarıda ifade ettiğine benzer durum diğer öğrencilerde de gözlemlenmiştir. Öğrencilerin hızlıca gerçekleştirdikleri çizimler Şekil 4.60'ta verilmiştir. Bulguların genelinde sunulan öğrenci çizimleri incelendiğinde prototip çizimler göze çarpmaktadır. Bu bulguya karşılık öğrencilerin çizime bağlı kalmadığı, çizimi görsel destek sağlaması amacıyla kullandıkları ve şekli yönettikleri belirlenmiştir. Çizimlerin yansıttığı matematiksel anlamın öğrenci için önemli olmadığı, kendi kurdukları ilişkinin önemli olduğu görülmüştür. Öğrencilerin dikdörtgen için kare çizip farklı kenar uzunlukları ataması, yüksekliğin, paralelliğin temsil edilmeden kullanılması, üçgen prizmanın sadece önden görünümünün çizilmesine karşılık 3B uzayda işlem gerçekleştirilmesi, eşkenar üçgen çiziminin çeşitkenar olarak ele alınması, cisim köşegeninin yüzey köşegeni gibi çizilmesi ama 3B olarak ele alınması, çizimde sunulmayan parçaların alanlarının hesaplamaya dahil edilmesi bu bulguya ait veriler olarak sıralanabilir.

Şekil 4.60

Doğum Günü Pastası Problemine Ait Çizimler



Ö10: Çubuklar hocam. Yani üstten bakıldığında şeklini çizdim diyebilirim.

(Görüşme-cisim köşegenleri)

Ö1: Zaten birini anlarsak diğerlerini de anlayacağız. Sağ üst ön köşeden yani şuradan

Ö3: Yani bir köşeden bir köşeye. Normal köşegen yaparken şöyle yaparsın ya.

Ö1: Ama bu içten geçecek. (Bu diyalog sonucunda soldaki şekli çizmiştir)

(Video kaydı-cisim köşegeni)

Araştırmacı: Sen soruyu okudun. Hemen çizdiğin bir kare var. Bu kare nedir?

Ö21: Pastanın üstü hocam

Araştırmacı: Pastanın üstü. Şu çizdiğin şey nedir? (Sağdaki çizim ve köşegen)

Ö21: Hipotenüs.

Araştırmacı: Peki şuradaki iki parçalı çiziminin sebebi nedir? (soldaki çizimi göstererek). Onu sorabilir miyim?

Ö21: Hocam onu üç boyutlu yapmaya çalıştım olmadı.

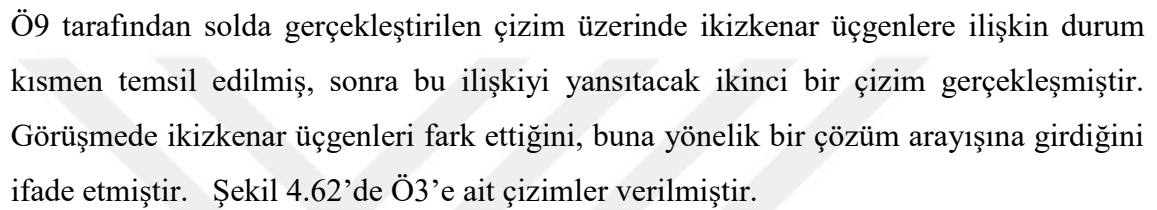
Araştırmacı: Özel farklı bir sebebi yok yani. Peki ilk olan köşegen şu köşegen arasındaki fark nedir

Ö21: Biri Aşağı iniyor hocam. Biri cismin köşegeni diğeri kenarın köşegeni.

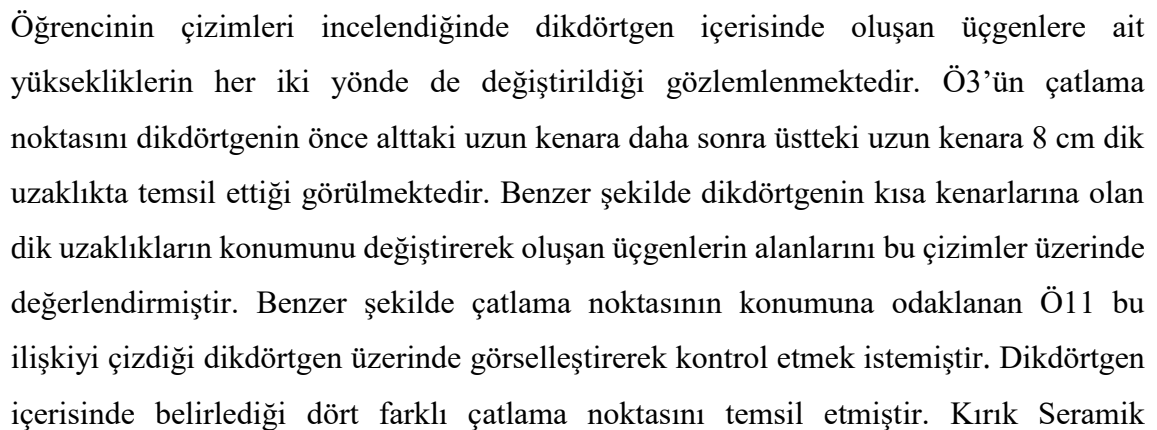
(Görüşme verisi-yüzey ve cisim köşegeni)

Oturumlar sırasında öğrencilerin Bereket Motifi, Kabilenin Güneşi, Uçurtma Yapımı problemlerinde sıralı kavrayışa bağlı olmayan ancak adım adım gerçekleştirdikleri bir çizim süreci takip ettikleri görülmüştür. Kabilenin Güneşi probleminde bu aşamalı çizimi sonrasında araçla gerçekleştirmişlerdir. Problem metinlerinde verilen aşamalı çizimi takip etmeleri problemin çözümü için gerekli şekli bulmaya yönelik gerçekleşmiştir. Öğrencilerin çizimleri birden fazla kez gerçekleştirdikleri belirlenmiştir. Bu tekrarlı çizimlerin bir kısmı öğrencinin problemde belirlediği bir durumun kontrol edilmesi, probleme ilişkin anlamaların görselleştirilmesi ve sınanması amacıyla gerçekleştirilmiştir. Ö9'a ait bu amaçla gerçekleştirilmiş çizim Şekil 4.61'de verilmiştir.

Ö9'a Ait Aynı İlişkiye Yer Veren İki Çizim (Park Peyzajı Problemi)



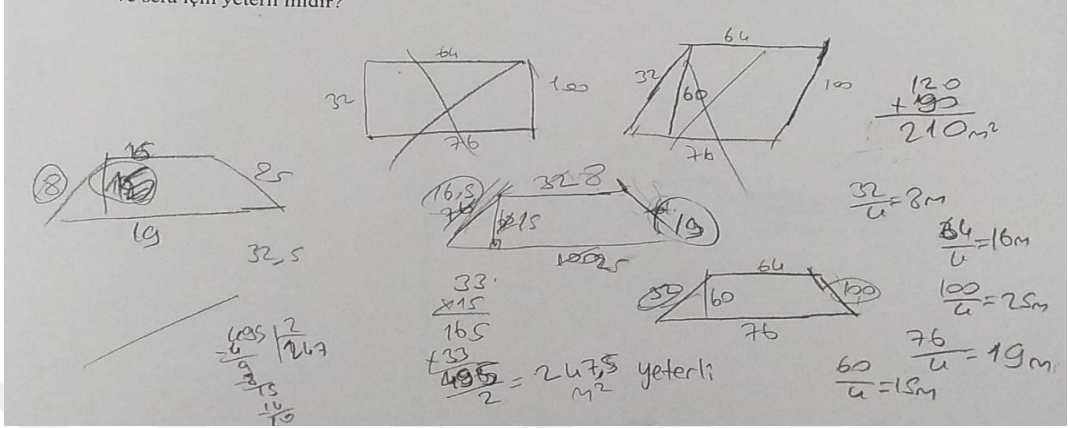
Ö3'e Ait Yükseklik İlişkisine Yönelik İki Çizim (Kırık Seramik Problemi)



Ö15'e ait çalışma kağıdı Şekil 4.64'te verilmiştir.

Şekil 4.64

Ö15'e Ait Çizimler (Ev için Arazi Problemi)



Öğrencinin Şekil 4.64'te en üstte yer alan iki çiziminde dikdörtgen, paralelkenara yönelik bir temsil gerçekleştirdiği, ancak bu iki çizimin doğru olmadığını fark ettiği için çizimlerin üzerine çarpı işareti koyduğu görülmektedir. Öğrenci ile gerçekleşen görüşmede bu iki çizime yönelik aşağıdaki cevapları vermiştir.

Araştırmacı: Dikdörtgen neden geldi aklına?

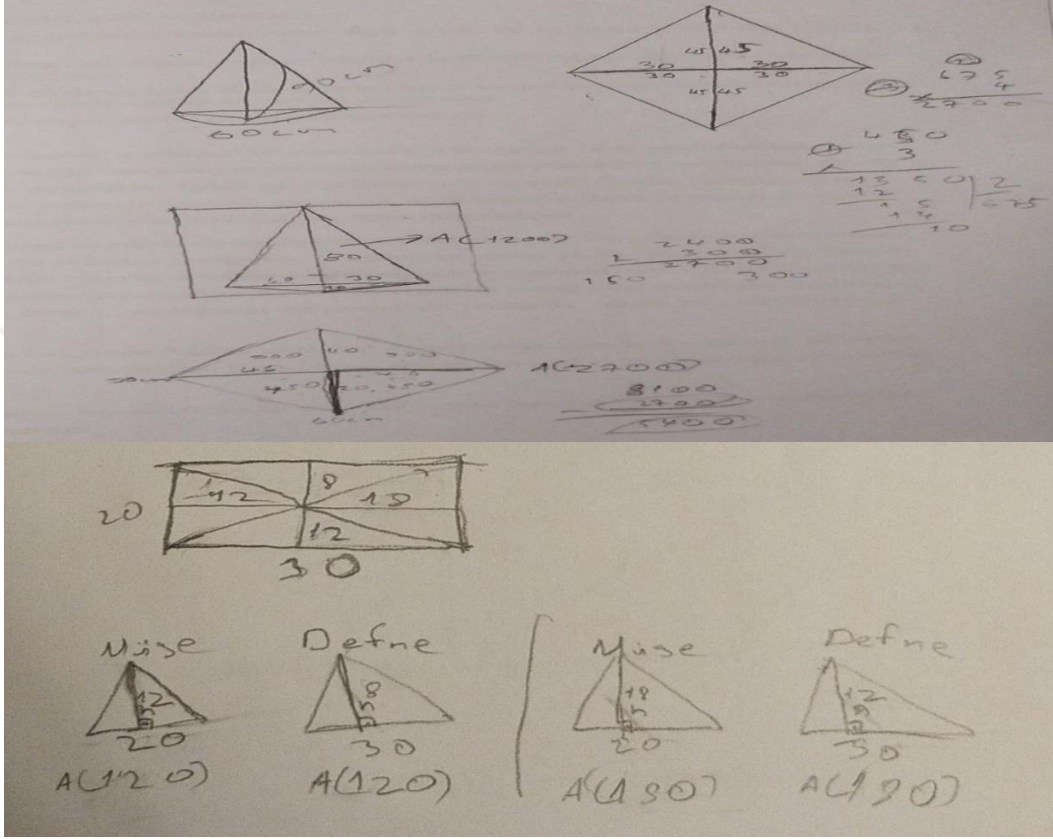
Ö15: İlk okuduğumda. Okuduğumda dik olmadığını fark ettim. Dikdörtgenden paralel kenara geçtim. Ondan sonra eşit değilmiş kenarları. Oradan da yamuk olduğuna karar verdim.

Öğrencinin sonrasında gerçekleştirdiği çizimlerde yamuk olduğunu belirlediği, kenar uzunluklarının doğru yerleşimini aradığı görülmektedir. Öğrenciler sadece cevaba ulaşmak amacıyla değil, sayısal sonucu bulduktan sonra çözümü kontrol etmek, daha anlaşılır şekilde sunmak amacıyla da çizimler gerçekleştirmiştir. Bu çizimler öğrencilerin çözümünden emin olma ve çözümü ispatlama çabalarının ürünü olarak gerçekleşmiştir. Problem çözme sürecinde hızlıca gerçekleştirdikleri çizimlerden sonra cevabı yansıtacak çizimlerin daha özenli çizildiği belirlenmiştir. Bireysel çözüm süreçlerinde ve grup halinde gerçekleşen çözüm süreci sonunda öğrencilerin kendi çalışma kağıtlarına ortak çözüme ait çizimleri aktardıkları belirlenmiştir. Ö13 Uçurtma Yapımı problemini çözdükten sonra doğrulama amacıyla çıtaların farklı kesişme durumlarını içeren çizimler gerçekleştirmiştir. Bu problemde alanın sabit kaldığını doğrulamak amacıyla üç ayrı çizim gerçekleştirmiştir. Kırık Seramik probleminde ise alanların hangi durumda eşit olduğunu göstermek amacıyla ilk çizime bağlı oluşturduğu parçaları ayrı ayrı çizerek

çözümü görselleştirmiştir. Uçurtma Yapımı problemi ve Kırık Seramik problemi Ö13'e ait çizimler Şekil 4.65'te verilmiştir.

Şekil 4.65

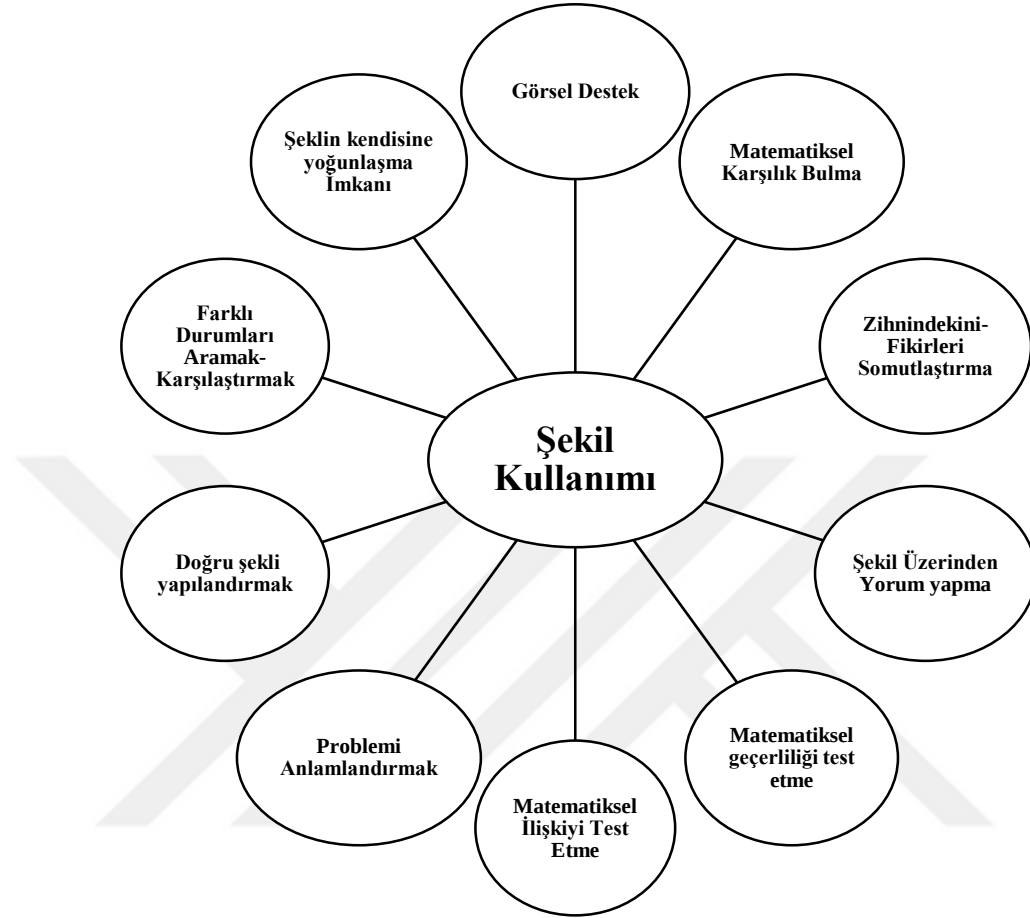
Ö13'e Ait Çizimler (Uçurtma Yapımı- Kırık Seramik Problemleri)



Bütün problem çözme oturumları için problemin ilişkili olduğu geometrik şekillerin görsel temsillerinin oluşturulduğu, çoğunlukla manuel çizim kullanıldığı, belirli problemlerde (Kabilenin Güneşi, Park Peyzajı, Miras Kalan Tarla) araca bağlı çizimle matematiksel açıdan doğru şeklin oluşturulduğu görülmüştür. Öğrencilerin problem çözme sürecinde şekil çizmelerinin sürece etkisi ile ilgili soruya verdikleri cevaplar sonucunda Şekil 4.66 oluşmuştur. Şekil 4.66'da sunulan şekil kullanımına yönelik öğrenci söylemleri çizimlerin birden fazla işlevi olduğunu, matematiksel çalışmanın farklı evrelerinde ihtiyaca yönelik işe koşulduğunu göstermektedir.

Şekil 4.66

Problem Çözme Sürecinde Şekil Çizmeye İlişkin Söylemler



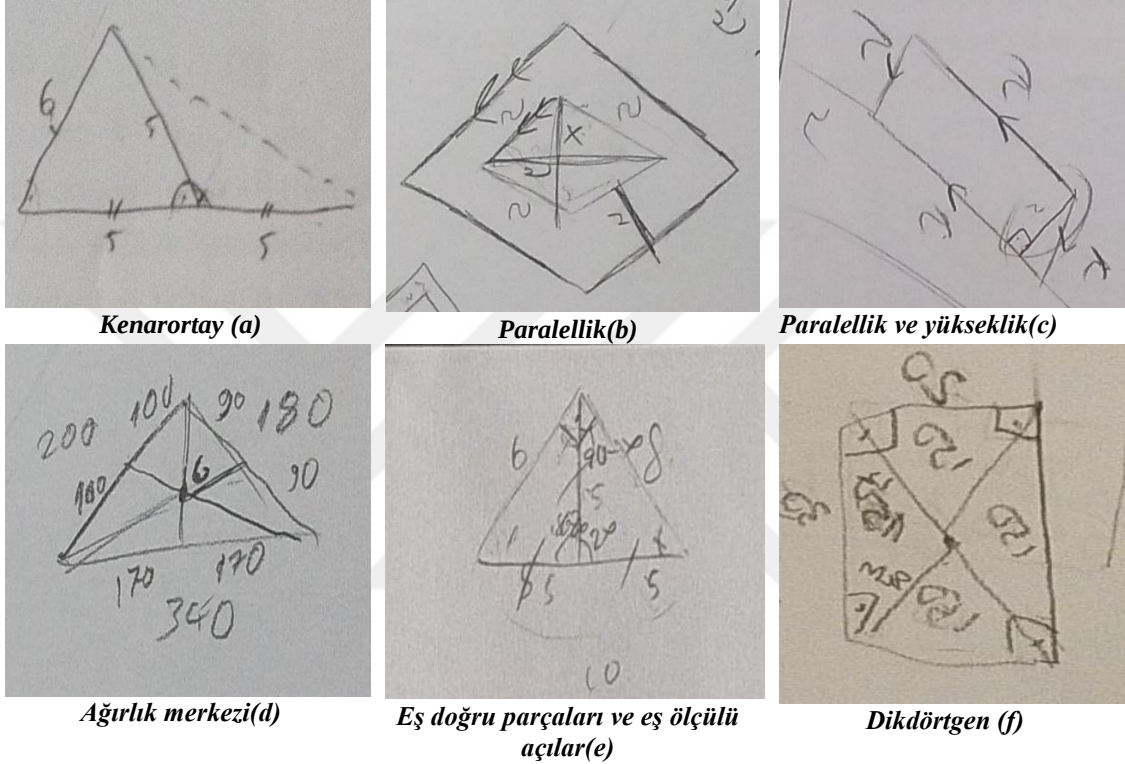
4.2.2 Sembolik temsil bulguları

Problem çözme oturumlarına ilişkin öğrencilerin sembolik kayıtları incelendiğinde beklenen düzeyde sembolik kayıt kullanılmadığı bulgusu elde edilmiştir. Öğrencilerin sembolik temsil kaydı oluşturması beklenen birden fazla geometrik nesne çizdikleri gözlemlenmiştir. Buna karşılık çizimini gerçekleştirdikleri üçgenler, dörtgenler için köşe noktalarına bağlı isimlendirme kullanmadıkları, doğru parçalarını, kesişim noktalarını, çemberin merkezini isimlendirmedikleri görülmüştür. Çizimlere ait doğru parçalarını sembolik olarak temsil etmek yerine uzunluklara ait sayısal verileri yazmayı tercih etmişlerdir. Ayrıca çizdikleri kare, dikdörtgen gibi özel dörtgenler için köşelerde oluşan dik açılardan, dik kesişen doğru parçalarının, çokgene ait yüksekliğin sembolik temsilinin oluşturulmadığı çizimler gözlemlenmiştir. Sembolik olarak ifade edilmemesine karşılık bu ilişkilere işlemsel olarak yer verdikleri görülmüştür. Benzer şekilde ikizkenar üçgen ve kenarortay genellikle kenarlar üzerine uzunluk değerleri girilerek görselleştirilmiş,

sembolik temsile nadiren yer verilmiştir. Öğrenci çalışma kağıtları sembolik temsiller için tarandığında temsillerin yükseklik-diklik, paralellik, kenarortay, eş ölçülü açı, üçgen eşitsizliği, ağırlık merkezi şeklinde çeşitlendiği gözlemlenmiştir. Öğrencilerin sembolik temsil kayıtlarından bazı örnekler Şekil 4.67’de sunulmuştur.

Şekil 4.67

Öğrencilerin Problemlere Yönelik Oluşturdıkları Sembolik Temsil Örnekleri



Şekil 4.67 incelendiğinde öğrencilerin kenarortayı sembolik olarak temsil etmelerinin yanı sıra sayısal veriler ile destekledikleri tespit edilmiştir. Bazı çizimlerde (bkz.d) doğrudan sayısal veriler ile ifade etmişlerdir. Ö19 tarafından gerçekleştirilen çizimde ağırlık merkezi “G” olarak ifade edilmiştir. Eş ölçülü açılarının aynı süsleme (bkz.a) ve açılarının temsilinde sıklıkla kullanılan “α” simgesi (bkz.e) ile ifade edildiği görülmektedir. Ö8 tarafından çizilen dikdörtgen (bkz. f) genel araştırma sürecinde gözlemlenen farklı olarak köşelerinde oluşan dik açılarının temsilini içermektedir. Sembolik temsilin Otlak Alanı probleminde dairenin alanı için $A = \pi r^2$ ve Bereket Motifi probleminde paralelkenarın alanı için “a.h” şeklinde kullanıldığı da bir diğer bulgudur.

4.2.3 Sözel temsil bulguları

Problem çözme oturumlarının grup içi diyaloga izin verecek şekilde yapılandırılmasına bağlı olarak elde edilen öğrencilerin sözel temsil bulguları bu bölümde sunulacaktır.

Bulgular öğrencilerin matematiksel nesne ve ilişkileri ifade ettikleri söylemler üzerinden aktarılacaktır. Görüşme sırasında öne çıkan sözel temsiller ile bulgular desteklenecektir.

Öğrencilerin sözel temsilleri incelendiğinde problem çözme süreci içerisinde matematiksel dil ve günlük dili bir arada kullandıkları görülmüştür. Temel geometrik nesnelerin ifade edilmesinde (üçgen, kare, dörtgen, yükseklik) matematiksel terimleri kullanmışlar, yeni karşılaştıkları nesneler için doğal dilden de destek almışlardır. Matematiksel işlemlerin ifade edilmesinde problem bağlamına paralel açıklamalarda bulundukları görülmüştür. Yüzey alanının hesaplanması gereken Bungalov Ev probleminde yüzey alanı yerine, malzeme miktarı, Otlak Alanı probleminde daire dilimlerinin alanı yerine otlama alanı, Kabilenin Güneşi probleminde kenar orta dikmelerin kesişim noktasına yerleşke kelimesi, Bereket Motifi probleminde benzer dörtgen için büyütülmüş şekil ifadesi örnek olarak sıralanabilir. Probleme dayalı gerçekleşen bu sözel temsiller dışında öğrencilerin günlük ve doğal dil desteğiyle matematiksel nesne ve ilişkiler için kullandıkları ifadeler sonucunda Tablo 4.34 oluşmuştur.

Tablo 4.34

Öğrencilerin Doğal Dile Ait Temsil Kayıtları

Matematiksel nesne-ilişki	Doğal dil Temsili
Cisim Köşegeni	<i>Küpün içinden geçen köşegen</i> <i>Hipotenüsün hipotenüsü</i>
Köşegen	<i>Çapraz giden çizgi</i>
Eşkenar Dörtgen	<i>Baklava şekli</i>
Dik açı	<i>Doksan</i>
Dönüşüm (dönme hareketi)	<i>Ters Döndürme, çevirme</i>
Benzerlik	<i>Büyütülmüş– küçültülmüş şekil</i>
Eş şekil	<i>Görüntüleri aynı olan şekil</i>
Oluşuma bağlı çizim	<i>Sabit şekil</i>
Prototip şekil	<i>Bildiğimiz şekil</i>
Prototip olmayan üçgen	<i>Köşesi uzun, yamuk olan üçgen, derslerde görmediğimiz üçgen</i>
İç teğet çember	<i>Üçgenin içinden geçen çember</i>
Çember	<i>Yuvarlak</i>
Dik üçgende hipotenüse ait kenarortay bağıntısı	<i>Süper üçlü</i>
Bir kenara ait yüksekliği inşa etmek	<i>Yükseklik çekmek</i>
Üçgen eşitsizliği	<i>Kenarların birbirini desteklemesi</i>
Yamuğun Alan bağıntısı	<i>Üstle altı toplayıp yükseklikle çarp ve ikiye böl</i>

Tablo 4.34 öğrencilerin çoğunlukla geometrik nesnenin görsel yapısına bağlı isimlendirme gerçekleştirdiği bulgusunu ortaya koymaktadır. Köşegene ait sözel temsil incelendiğinde prototip dörtgenlere ait kenarlardan birinin çizim yapılan kağıt tabanına

paralel olarak çizilmesi sonucunda öğrenci için görsel temsiline bağlı sözel temsil kaydının oluşturduğu görülmektedir. Benzer şekilde eşkenar dörtgenin prototip çizimine bağlı baklava dilimi temsili öğrenci tarafından geliştirilmiştir. Prototip olmayan üçgenlerin yamuk ve köşesi uzun şeklinde ifade edilmesi öğrencinin görsel temelli bir tanımlama yaptığını ortaya koymaktadır. Aynı matematiksel iş üzerine yoğunlaşan öğrenciler arası gerçekleşen diyalog sırasında doğal ve matematiksel dilin kullanımına bağlı bir engel durumu gözlemlenmemiştir. Öğrenciler arası iletişim akıcı şekilde devam etmiştir. Ö8, Ö9, Ö10 ve Ö11 arasında Miras Kalan Tarla problemi oturumunda gerçekleşen diyalog üzerinden bu durum aşağıda örneklendirilmiştir:

Ö8: Aynı mı olur alanları?

Ö9: Şununla şunu çarpacaksın şununla şunu çarpacaksın (kenarları göstererek) zaten farklı sayı bulacaksın. Bu aynı olsa ne?(kenarortayı kastederek)

Ö8: Bir de böyle üçgenim var. Bu ikisinin alanının aynı olmasını istiyorsun ya buraların eşit olması (tabanda oluşan eş parçalar) ile görüntü olarak eşit olması aynı şey mi?

Ö9: Ya görüntü olarak eşit olmasa da olur.

Ö8: Görüntü olarak eşit olması aynı şey mi?

Ö9: Değil mi?

Ö10: Tamam alan olarak eşit olsun ama görüntü olarak eşit olmasın.

Ö11: Çevresi farklı olur ama alanları eşit olur.

Öğrenciler arası diyalog incelendiğinde doğrudan yükseklik, taban ifadelerine yer vermedikleri ancak aynı matematiksel nesneler üzerine konuşmaya devam ettikleri gözlemlenmiştir. Benzer şekilde görüntü olarak aynı olmanın kenarların eşliği olduğunu dile getirmedikleri, buna rağmen bu temsilden aynı matematiksel anlama ulaştıkları görülmektedir.

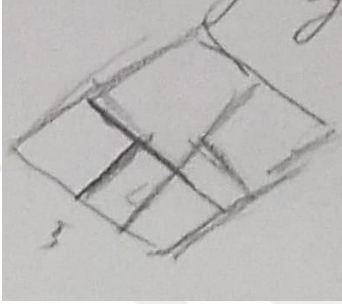
4.2.4 Temsile dayalı işlevsel kavrayış bulguları

Öğrencilerin kendilerine verilen matematiksel işin tamamlanması için gerekli olan görsel temsilin oluşturulması sırasında keşfetmeye yönelik gerçekleştirdikleri eylemler temsile dayalı işlevsel kavrayış kapsamında değerlendirilmiştir. Problem çözme oturumlarında gerçekleşen çizimlerde temsile dayalı işlevsel kavrayış çizimleri öğrencilerin ilk görsel temsilleri gerçekleştirdikten sonra bu temsiller üzerinde problem bağlamına dayalı gerçekleşmiştir. Örneğin Bereket Motifi probleminde eşkenar dörtgen çizilmiş,

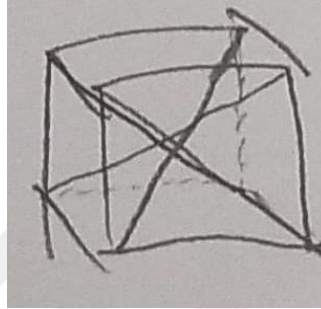
problemde ifade edilen paralel doğruların temsilleri bu eşkenar dörtgene bağlı olarak yerleştirilmeye çalışılmıştır. Burada eşkenar dörtgen ve paralel doğru ifadelerinin temsilleri semiyotik oluşumla ilişkili iken bu paralel doğruların farklı yerleştirilme denemeleri işlevsel kavrayışa ilişkin bulgudur. Bu bağlamda problemler özelinde işlevsel kavrayışa yönelik bulgulardan bir kısmı Şekil 4.68’de verilmiştir.

Şekil 4.68

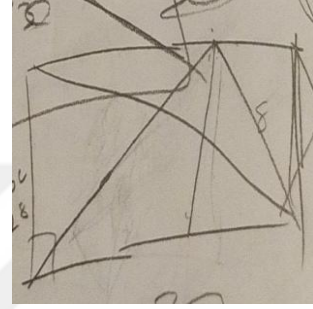
Temsile Dayalı İşlevsel Kavrayışa Ait Çizimler



Bereket Motifi (Ö19)



Doğum Günü Pastası (Ö5)



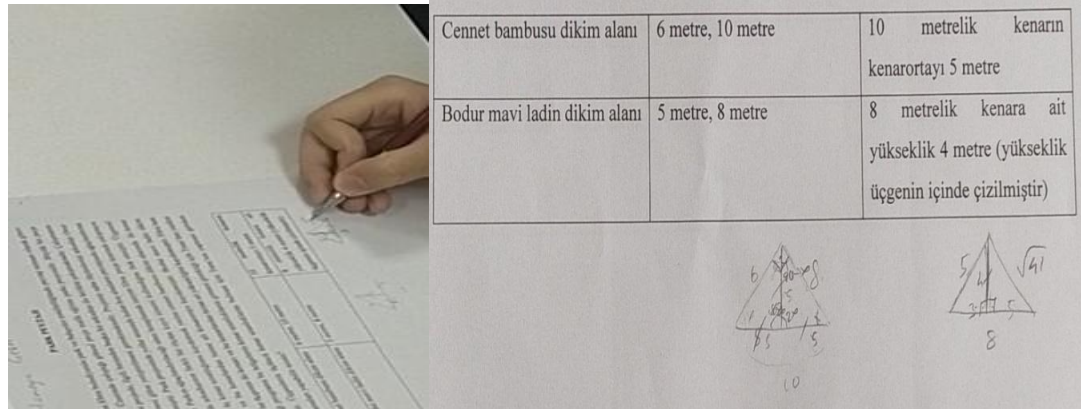
Kırık Seramik Problemi (Ö4)

Ö19’a ait çizim incelendiğinde problemde verilen eşkenar dörtgenin çizildikten sonra kenarlara 4 cm uzaklıkta çizilmesi istenen paralel doğruların yerleşiminin arandığı görülmektedir. Ö5 tarafından gerçekleştirilen çizim küp şeklindeki pastanın içerisine yerleştirilmesi istenen çubukların konumlarını aramaya yönelik gerçekleşmiştir. Son olarak Ö4 dikdörtgen çizimini gerçekleştirdikten sonra bağlamda sunulan üçgensel parçalamayı keşfetmek amacıyla dikdörtgen üzerinde diğer çizimleri gerçekleştirmiştir. Problemlere ilişkin temsile dayalı işlevsel kavrayışı harekete geçiren durumlar Tablo 4.35’te sunulmuştur. Oturumlara katılan tüm öğrencilerin şekil oluşturmaları, oluşturdukları şekiller üzerinde arayış gerçekleştirmeleri sonucunda temsile dayalı işlevsel kavrayışın öğrenci çalışma uzayları içerisinde kullanıldığını göstermektedir. Bunun yanı sıra öğrenci özelinde temsile bağlı işlevsel kavrayışın kullanılmadığı durumlar belirlenmiştir. Ö5 kodlu öğrenci Bungalov Ev probleminde üçgen prizmaya ait kodları metni okurken çözümlediği için doğru görseli oluşturmuş (Bkz. Bungalov Ev problemi bulguları), işlevsel kavrayışı işe koşmamıştır.

Tablo 4.35*Temsile Dayalı İşlevsel Kavrayışın Problemlerdeki Epistemolojisi*

Problemin Adı	Temsile Dayalı İşlevsel Kavrayışın Epistemolojisi
Otlak Alanı	İpin köşelerde dönüş sırasında kaybettiği uzunluğun belirlenmesi ve koyunun hareketinin görselleştirilmesi
Kabilenin Güneşi	Oyunun taktiğine bağlı ebenin konumunun aranması
Bungalov Ev	Taban ve çevreleme elemanları verilen 3B yapının elde edilmesi
Miras Kalan Tarla	Tarlanın sınırlarının yerleşiminin ve eş paylaşımı sağlayacak doğru parçasının görselinin oluşturulması
Bereket Motifi	Motifte genişletmeyi sağlayacak paralel doğruların yerleşiminin keşfedilmesi
Kırık Seramik	Seramiğin çatlama noktasının ve üçgenlerin oluşumunun görselleştirilmesine yönelik çizimler
Doğum Günü Pastası	Pasta içine yerleştirilen destek çubuklarının yerleşiminin keşfedilmesi
Ev için Arazi	Verilen uzunluklara sahip dörtgenin keşfedilmesi
Park Peyzajı	Verilen kenar uzunlukları ve yardımcı elemanların yerleşiminin aranması
Uçurtma Yapımı	Çıtalardan birinin diğerini ortaladığı farklı durumların görselleştirilmesi

Ö16 Park Peyzajı probleminde doğru görselleştirmeyi arayış gerçekleştirilmeden tek seferde oluşturmuştur. Öğrencinin Şekil 4.69'da Ö16'ya ait kamera kaydı görüntüsü ve çizimler sunulmuştur.

Şekil 4.69*Ö16'ya ait çizimler*

Şekil 4.69 incelendiğinde metinde geçen yükseklik ve kenarortayın doğru biçimde görselleştirildiği, işlemleri teorik sistemin yönettiği görülmüştür. Öğrencilerin temel çizimler (problemde ifade edilen üçgen, dikdörtgen vb.) üzerindeki çizimlerini teorik yapının yönlendirdiği işlevsel kavrayış bulguları ilgili başlık altında sunulmuştur.

İşlevsel kavrayışa bağlı boyutsal yapı sökümün 3B uzaydan 2B uzaya şeklinde gerçekleştiği görülmüştür. Doğum Günü Pastası probleminde küp içerisinde oluşturulan üçgen, Bungalov Ev probleminde ise prizmayı oluşturan üçgen ve dikdörtgenler ayrıca

temsil edilmiştir. 2B şekil kullanımı içeren problemlerde dönüşüm yine 2B uzay içinde gerçekleştirilmiştir. Bereket Motifi probleminde eşkenarın yamuk ve üçgene ayrılması, Uçurtma yapımı probleminde deltoidin dikdörtgene dönüştürülmesi aynı uzay içinde gerçekleşmiştir.

4.3 Enstrümantal Oluşumla İlgili Bulgular

Bu bölümde analiz edilen Otlak Alanı, Kabilenin Güneşi, Bungalov Ev, Miras Kalan Tarla ve Bereket Motifi problemlerinin ve özel olarak bulguları sunulmayan ancak analize tabi tutulan diğer problem verilerinin analizi sonucunda ortaya çıkan enstrümantal oluşuma yönelik genel bulgular sunulacaktır. Araştırmanın teorik çerçevesinde enstrümantal oluşumla ilişkilendirilen sıralı kavrayış ve araca bağlı işlevsel kavrayış bulgularına da bu bölümde yer verilecektir.

Enstrümantal oluşum süreci matematiksel araç, dinamik geometri yazılımı ve öğrencilerin çevrelerinde ulaşabildikleri materyaller ile gerçekleştirdikleri eylemler üzerinden bulgulanmıştır. Gerçekleştirilen problem çözme oturumlarında araçsal oluşum gözlemlenen problemler ve kullanılan araçlar Tablo 4.36’ da sunulmuştur.

Tablo 4.36

Enstrümantal Oluşum Gerçekleşen Problemler ve Kullanılan Araçlar

Problem Adı	Kullanılan Araç	Kullanım Amacı
Kabilenin Güneşi	Cetvel ve pergel	Üçgeni oluşturmak Kenar orta dikme inşası Yarıçap uzunluğunu ölçmek
Miras Kalan Tarla	Cetvel ve pergel	Üçgeni oluşturma Tabanı eş parçalama Yükseklik-kenarortay inşası
Bereket Motifi	DGY (GeoGebra) Eş uzunlukta kalemler	Köşegen uzunluklarını belirlemek Eşkenar ve kare ilişkisini görselleştirmek
Park Peyzajı	Pergel ve cetvel	Üçgeni oluşturmak Oluşuma bağlı kenar uzunluğunu ölçmek
Otlak Alanı	Kalem	Demonstrasyona bağlı daire dilimlerinin oluşumunu fark ettirmek
Doğum Günü Pastası	Küp ve uç kutusu	Cisim köşegenini görselleştirmek
Bungalov Ev	Silgi ve kalem	3B yapıyı oluşturmak

Tablo 4.36 incelendiğinde toplamda yedi problem çözme oturumunda araçsal oluşumun gerçekleştiği görülmektedir. Uçurtma yapımı, Ev için Arazi ve Kırık Seramik problemi

oturumlarının hiç birinde araç kullanımı gerçekleşmemiştir. Enstrümantal oluşum için gerçekleşen analizler sonucunda matematiksel araç gereçlerden pergel ve cetvel kullanımının daha fazla tercih edildiği, öğrencilerin yakın çevrelerinden ulaşabildikleri materyallerin ikinci sırada olduğu bulgusu elde edilmiştir. Dinamik geometri yazılımı olan GeoGebra'dan yararlanmak isteyen birinci grup süreç içerisinde araç ile çizimi gerçekleştiremedikleri için aracı kullanmaktan vazgeçmiştir. Diğer gruplarda DGY kullanımı gerçekleşmemiştir. Araç kullanımı öğrencilerin matematiksel çalışma süreçlerinin orta veya sonlarına doğru gözlemlenmiştir. Öğrenciler problem üzerinde teorik olarak çalışmaları sonucunda sayısal sonucu bulamadıkları durumlar (Kabilenin Güneşi, Miras Kalan Tarla) ve sözel olarak ifade edemedikleri matematiksel ilişkiler (Otlak Alanı, Bereket Motifi, Bungalov Ev, Doğum Günü Pastası) için araç kullanmaya yönelmiştir. Problemi çözmek için ilk tercihlerinin araç kullanmak olmadığı belirlenmiştir. Araç kullanımı gözlemlenmeyen oturumlarda öğrenciler araç kullanma ihtiyacı hissetmediklerini belirtmiştir. Ö1 kağıt üzerinde çalışmayı daha kolay olarak tanımlamıştır. Bereket Motifi probleminde araç kullanmayı denemelerine rağmen başarılı olamayan birinci grup araç kullanmada yetkin olmadıklarını ifade etmiştir. Grupların çalışma dinamikleri araç kullanımlarına yansımıştır. Birinci grupta yer alan öğrencilerden Ö1, üçüncü grupta Ö10 grup adına araç kullanırken, ikinci gruptaki tüm öğrenciler bireysel araç kullanımı tercih etmişlerdir. İkinci grupta öğrenciler cetvel ve pergel kullanma konusunda birbirlerinden etkilendiklerini ifade etmişlerdir.

Cetvel ve pergel kullanımının üçgen inşası için kullanıldığı ve matematiksel olarak anlamlı bir yol izlendiği görülmüştür. Cetvel ve pergele bağlı üçgen oluşumu için izlenen sıralı adımlar “üç kenarı bilinen üçgenin çizimi” adımlarının takip edildiğini ortaya koymuştur. Öğrencilerin algısal süreçlerden biri olan sıralı kavrayışı takip ettikleri belirlenmiştir. Öğrencilerden Ö5 ve Ö6 sıralı kavrayış adımlarını fark ettikleri ilişkilere göre farklılaştırmışlardır. Ö5'in Miras Kalan Tarla probleminde yüksekliğin inşası için gerçekleştirdiği oluşum, Ö6'nın ise Kabilenin Güneşi probleminde dik üçgenin inşasında gerçekleştirdiği oluşum ilgili problemlere ait bulgulara detaylandırılmıştır. Park Peyzajı probleminde sadece Ö5 tarafından cetvel ve pergele dayalı sıralı kavrayış adımları izlenmiştir. İlgili problemde öğrenci iki kenarı ve kenarlardan birine ait kenarortay uzunluğu verilen üçgeni üç kenarı bilinen üçgenin çizim adımlarını uyarlayarak gerçekleştirmiştir. Öğrenci sıralı kavrayışa bağlı araçsal oluşum adımlarını aşağıdaki gibi sıralamıştır.

Ö5: 10 santimlik kenarı

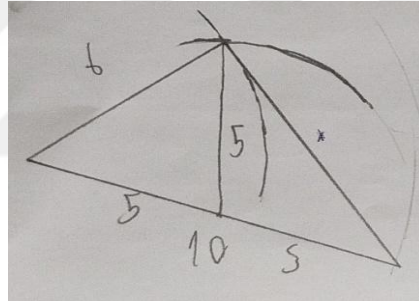
Araştırmacı: 10 santimlik kenarı çizdin. Sonra orta noktasına buldun. Sonra ne yaptın?

Ö5: Sonra orta noktasından 5 santimetrelik yarıçapı 5 santimlik bir daire çizdim. Ondan sonra şuradan (10 santimlik kenarım köşe noktalarından soldakini göstermiştir) başından 6 santimetrelik yarıçapı olan bir daire çizdim. İkisinin kesiştikleri nokta da diğer 10 santimetrelik kenarın köşesi ile birleştirdim.

Öğrencinin enstrümantal oluşumu pergeli ve cetveli duruma uygun şekilde kullanabildiğini, kendi sıralı kavrayış adımlarını oluşturduğunu ortaya çıkarmıştır. Ancak Ö5 görüşme sırasında “İkinci üçgenin üzerine düşünmedim de sonradan buldum. Cetvelle pergeli ile gerek yokmuş ikinci üçgende” açıklamasını yapmıştır. Öğrencinin bu açıklamasından teorik olarak hesaplanabilen durumlar için araç kullanmayı tercih etmediği sonucu elde edilmiştir. Ö5’in oluşuma bağlı çizimi Şekil 4.70’teki gibidir.

Şekil 4.70

Ö5’in Enstrümantal Oluşuma Bağlı Çizimi



Enstrümantal oluşum kapsamında değerlendirilen ancak matematiksel materyale bağlı gerçekleşmeyen inşalar Tablo 4.36’da sunulmuştur. Dört farklı problem çözme oturumunda öğrenciler yakın çevrelerinde bulunan materyallerden destek almışlardır. Araçlar Otlak Alanı probleminde otlama alanını keşfetmek, Bereket Motifi probleminde eşkenar dörtgen ve kare arasındaki hiyerarşiyi açıklamak, Bungalov Ev problemlerinde 3B yapıyı görselleştirmek, Doğum Günü Pastası probleminde aranan geometrik nesneyi somutlaştırmak amacıyla kullanılmıştır. Öğrencilerin materyal kullanmadan önce çubukların kare prizma içerisinde yerleşimine yönelik çizimler gerçekleştirmelerine rağmen cisim köşegeni hipotenüs kabul eden dik üçgeni fark edemedikleri belirlenmiştir. Doğum Günü Pastası probleminde uç kutusu ve kare prizma ile oluşturulan 3B yapı öğrencilerin problemin çözümüne ulaşmalarında etkili olmuştur. Yüzey köşegeni, kare prizmanın bir ayrıtı ve cisim köşegeni ile oluşan üçgeni çizim gerçekleştirilmeden uzamsal

olarak zihinlerinde görselleştirmişlerdir. Şekil 4.71’de 1. grup tarafından oluşturulan yapı verilmiştir.

Şekil 4.71

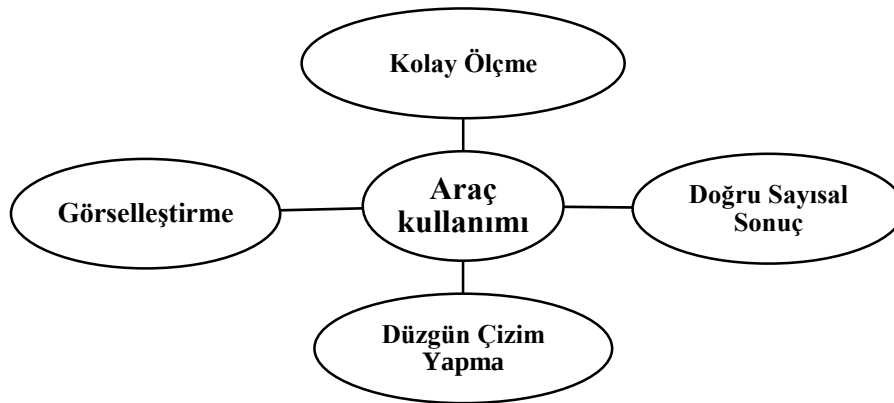
Doğum Günü Pastası Problemi için Birinci Grup Tarafından Oluşturulan Yapı



Enstrümantal oluşum sürecinde oluşumu gerçekleştirerek arkadaşlarına matematiksel ilişkiyi ifade eden öğrenciler için oluşum yönü epistemolojik düzlemde bilişsel düzlemde doğru gerçekleşirken, bu yapılara bağlı matematiksel anlam çıkaran öğrenciler bilişsel düzlemde epistemolojik düzlemde doğru bir yönelim ortaya koymuşlardır. Birinci grubun cisim köşegenini hipotenüs kabul eden üçgeni fark etmeleri sonucunda çözüm gerçekleşmiştir. Bu sonuca bağlı oluşum yönü bilişsel düzlemde epistemolojik düzlemde olarak belirlenmiştir. Görüşmelerde araç kullanımına yönelik öğrenci söylemleri sonucunda Şekil 4.72 oluşmuştur.

Şekil 4.72

Problem Çözümünde Araç Kullanımına İlişkin Öğrenci Söylemleri



Enstrümantal oluşumla ilgili söylemlerden kolay ölçme ve doğru sayısal sonuç elde etme tam ölçülere sahip çizimin bir sonucu olarak ifade edilmiştir. Öğrenciler doğru ölçülere sahip şekli “düzgün şekil”, “sabit şekil”, “tam şekil” ile ifade etmişlerdir. Düzgün çizim yapma aracın öğrencilere sağladığı bir imkân olarak ifade edilmiştir. Araçla gerçekleşen çizim sonucunda ortaya çıkan geometrik şeklin öğrenci için algısal olarak doğru bir matematiksel görsel sunmasına bağlı olarak görselleştirme özelliğine vurgu yapılmıştır.

4.3.1 Araca bağlı işlevsel kavrayış bulguları

Araç kullanımı gerçekleştirilen problem bulguları öğrencilerin araca bağlı işlevsel kavrayış gerçekleştirdiklerini ortaya koymuştur. Aracı ölçüm yapmak, düzgün çizim yapmak gibi amaçlar dışında matematiksel ilişkilerin keşfi için kullandıkları durumlara bağlı işlevsel kavrayış bulguları Tablo 4.37’de verilmiştir.

Tablo 4.37

Araca Bağlı İşlevsel Kavrayışın Problemlerdeki Epistemolojisi

Problemin Adı	Araca bağlı işlevsel kavrayışın epistemolojisi
Otlak Alanı	Koyunun bağlı olduğu ip uzunluğu ve kulübeye göre otlayabileceği alanı görselleştirme
Kabilenin Güneşi	Kozalakların dik üçgen oluşturduğunun keşfedilmesi Taktikte kullanılan doğrunun kenarortay ve yükseklikten farklı olduğunun keşfedilmesi Yerleşke noktasının hipotenüsün orta noktasında olduğunun keşfedilmesi
Bereket Motifi	Eşkenar dörtgen ile kare arasındaki ilişkinin keşfedilmesi
Doğum Günü Pastası	Çubuğun uzunluğunun hesaplanmasında işe koşulacak uzunlukların keşfedilmesi

Öğrencilerin matematik çalışma uzayları içerisinde araç kullanım durumlarına bağlı olarak araca bağlı işlevsel kavrayış bulguları sadece Tablo 4.37’deki problemlerle sınırlanmıştır. Ayrıca bu problemlerden sadece Kabilenin Güneşi oturumunda matematiksel araç kullanılmıştır. Öğrencilerin yakın çevrelerinde bulunan materyalleri duruma göre uyarladıkları, aradıkları ilişki için arabulucu olarak kullandıkları görülmüştür.

4.4 Söylemsel Oluşumla İlgili Bulgular

Bu bölümde analiz edilen Otlak Alanı, Kabilenin Güneşi, Bungalov Ev, Miras Kalan Tarla ve Bereket Motifi problemlerinin ve özel olarak bulguları sunulmayan ancak analize tabi tutulan diğer problem verilerinin analizi sonucunda ortaya çıkan söylemsel oluşuma yönelik genel bulgular sunulacaktır. Bu bulgular araştırmancının teorik

çerçevesinde söylemsel oluşumla ilişkilendirilen söylemsel kavrayış ve söyleme bağlı işlevsel kavrayış bulgularına da içermektedir.

Matematiksel işin sonucunda öğrencilerin muhakemeye dayalı elde ettikleri sonuçlar problemler özelinde incelendiğinde Tablo 4.38 oluşmuştur.

Tablo 4.38

Problemlere İlişkin Söylemsel İfadeler

Problemin Adı	Öğrenci Söylemlerinin Matematiksel Karşılıkları
Otlak Alanı	Dikdörtgenin uzun ve kısa kenarının orta noktasını merkez kabul ederek çizilen daire dilimlerinin alanları farklı olmaktadır. Dairenin merkez noktası dikdörtgenin köşesi olduğunda en büyük alan elde edilir.
Kabilenin Güneşi	Üçgende kenarların orta noktasından geçen dik doğruların kesişiminin üçgenin köşelerine uzaklığı eşittir, bu nedenle yarıçaptır. Üçgenin köşelerinden bir çember geçer. Çemberin merkezi kenarların orta noktasından dik geçen doğruların kesişimi olmaktadır. Düzlemde doğrusal olmayan üç noktadan bir çember geçer. Düzlemde doğrusal üç noktanın ikisinden bir çember geçer ve diğer nokta ya çemberin içinde ya da dışında kalır.
Bungalov Ev	Üçgen prizmanın alanı dikdörtgen prizmanın yarısıdır. Prizmaların hacmi taban alanı ile yüksekliğin çarpılması ile bulunur. Prizmaların hacmi üç boyut bileşenlerine bağlıdır. Prizmaların hacmi silindirin hacmi yardımıyla bulunur.
Bereket Motifi	Eşkenar dörtgen bir paralelkenardır.
Doğum Günü Pastası	2B uzayda köşegen a^2+b^2 , 3B uzayda $a^2+b^2+c^2$ olarak hesaplanır. Bir ayırtı a olan küpün cisim köşegeni (içinden geçen köşegen) $a\sqrt{3}$ olur.
Uçurtma Yapımı	Köşegen uzunluklarının aynı olmasına bağlı olarak farklı oranlarda gerçekleştirilen dik kesişim dörtgenin alanını değiştirmez.
Miras Kalan Tarla	Bir üçgende kenarortay üçgenin alanını iki eş parçaya ayırır.
Ev İçin Arazi	En az iki kenarı paralel olan dörtgen yamuktur. Verilen uzunluk değerleri sonucunda tek bir dörtgen çizilebilir, o da yamuktur.
Park Peyzajı	Kenarortay ve kenarda ayırdığı parçaların uzunlukları eşitse kenarortayın çizildiği köşe açısının ölçüsü 90° dir.
Kırık Seramik	Dikdörtgen içindeki alınan herhangi bir noktaya göre oluşturulan karşılıklı üçgenlerin alanları toplamı eşittir.

Tablo 4.38 incelendiğinde öğrencilerin matematiksel olarak tutarlı ve problemin çözümü sonrasında ulaşması beklenen söylemlerde bulunduğu görülmüştür. Bu söylemler bireysel veya grup olarak gerçekleştirilmiştir. Öğrencilerin ulaştıkları matematiksel sonucu ifade etmek için doğal dili ve matematiksel dili bir arada kullandıkları belirlenmiştir. Kabilenin Güneşi, Doğum Günü Pastası ve Park Peyzajı problemlerinde problem bağlamından uzaklaşarak teorik dil (matematiksel nesne ve kavramlar) ile muhakeme öne çıkmıştır. İlgili genellemelere öğrencilerle gerçekleştirilen görüşmeler ile

ulaşılmıştır. Bilişsel düzlemden epistemolojik düzleme doğru gerçekleşen söylemsel oluşumlar olduğu görülmüştür.

Genel anlamda problemde yer alan günlük yaşam bağlamı doğal dilde yer alan öğrenci kavramlarını yönlendirmiştir. Öğrenciler tartışmalar sırasında hem matematiksel hem de bağlamsal öğeleri bir arada kullanmıştır. Bu durum Şekil 4.73'te Kırık Seramik problemine yönelik öğrencilerin geri bildirim notları ile örneklendirilmiştir.

Şekil 4.73

Ö8 ve Ö6'nın Öğrenci Geri Bildirim Notları

Dört üçgenden ikisinin alanı 120 diğer ikisinin alanı 180 olacak şekilde parçalara ayrılıyor. Sibel öğretmen 120'lik parçadan ve 180'lik parçadan birer tane kızlarına verse $120 + 180 = 300$ olmak üzere iki kıza da eşit şekilde paylaştırmış olur. Sibel öğretmen haklı.

Dört üçgenden ikisinin alanı 120 diğer ikisinin alanı 180 olacak şekilde parçalara ayrılıyor. Sibel öğretmen 120'lik parçadan ve 180'lik parçadan birer tane kızlarına verse $120 + 180 = 300$ olmak üzere iki kıza da eşit şekilde paylaştırmış olur. Sibel öğretmen haklı.

Çözüm: Mümkün olabilir. Çünkü dikdörtgenin neresinde olursa olsun iki karşılıklı üçgenin toplamı diğer iki üçgenin toplamı eşit olur. Yani merkezden köşelere çizilen çizgiler oluşturduğumuz üçgenleri ikişer ikişer eşitleyebiliriz. Sayısal olarak da denedim. 2 tane alanı 180cm^2 olan, iki tane de alanı 120cm^2 olan üçgen oluşuyor. İki çeşit üçgenden de birer tane alırsak, Defne'de toplam 300cm^2 'lik parça; Müge'de de 300cm^2 'lik parça olur.

Çözüm: Mümkün olabilir. Çünkü çatlak dikdörtgenin neresinde olursa olsun iki karşılıklı üçgenin toplamı eşit olur. Yani merkezden köşelere çizilen çizgiler oluşturduğumuz üçgenleri ikişer ikişer eşitleyebiliriz. Sayısal olarak da denedim. 2 tane alanı 180cm^2 iki tane de alanı 120cm^2 olan üçgen oluşuyor. İki çeşit üçgenden birer tane alırsak Defne'de toplam 300cm^2 'lik parça, Müge'de de 300cm^2 'lik parça olur.

Şekil 4.73 öğrencilerin problem bağlamına dayalı bir açıklama içerisinde bir genelleme gerçekleştirdiklerini göstermektedir. Geri bildirim notları dışında görüşmeler sırasında da benzer kayıtlar olduğu görülmüştür. Ö6 görüşme sırasında geri bildirim notunda ifade ettiği matematiksel ilişkiyi “Başlangıçta hani dikdörtgenin ortasında veya herhangi bir yerinde içinde nokta koyarsak ve bu noktadan köşelerine 4 çizgi çizersek bu noktayı hareket ettirdiğimiz de birbirine karşılıklı olan üçgenlerin toplamı iki tarafta da aynı çıkıyor diye düşündüm” şeklinde ifade etmiştir. Yine Ö6, Uçurtma Yapımı probleminde “Eşkenar dörtgenin köşegenlerini çarpıp 2'ye böldüğümüzde alanı buluyoruz. Burada

çıtararın uzunlukları değişmediği için köşegenleri de değişmemiş oluyor. Yani bulduğumuz değer aynı oluyor” açıklamasını yapmıştır. 6 açıklamalarında geometrik kavramları çıta, çizgi olarak ifade etmesine rağmen köşegen ve kenar uzunluğuna atıf yapmaktadır. Benzer açıklamalar diğer problemlerde de gerçekleşmiştir. Öğrencilerin bağlamda yer alan kavramlarla açıklamalar yapmalarına karşın matematiksel olarak temsil ettiği yapıya sahip oldukları grlmştir.

Öğrencilerin problemi okudukları andan itibaren epistemolojik düzlem bileşenlerinden biri olan referans sistemini aktif olarak kullandıkları belirlenmiştir. zerinde çalıştıkları probleme ait geometrik nesnelerle ilgili referans sistemini aktif hale getirmişler, bu referanssal sistem lokomotif görevi üstlenmiştir. Söylemsel oluşum sırasında matematiksel işle ilgili teorik yapının sözel veya görsel olarak ifade edildiği grlmştir. Ev için arazi probleminde birinci grupta gerçekleştirilen oturuma ait diyalog aşağıda verilmiştir.

4: Pisagor bağıntısını düşündün m?

1: şeyi düşündüm ben üçgene, iki parça üçgene bölüp bir de şu dikdörtgenin alanını bulurum diye düşündüm. Ama yamuk mu? Yoksa paralelkenar mı?(zel dörtgenler)

4: Muhtemelen paralelkenardır.

1: Yamuktur. Onun bir şartı vardı onu unuttum ben.

4:  kenarın toplamı diğer kenarın iki ile çarpımından küçüktür dedim ben (gen eşitsizliği ile hatalı ilişkilendirme)

.....

1: Yamuk diye düşünüyorum. Yamuğun alanını hatırlayamasak ta (gen ve dikdörtgenin alanını kullanma durumunu ifade edemedi arkadaşını araya girmiştir)

4: Ben biliyorum. A artı b çarpı h bölü 2 (yamuğun alan formülü)

.....

1: Burası 16 ya burası 19 vermişsin. Burası nasıl 25 olsun?

4: Olabilir. $a^2 + b^2 = c^2$ den. Pisagor gibi düşün burayı (Pisagor bağıntısı)

2: şu arayı 15 vermişler. şurası 8’den küçük olmaz mı? (gen eşitsizliği)

.....

1: Peki yamuktan yüzde yüz emin miyiz?

Ö4: Kardeşim bak şimdi paralelkenarın zorunlulukları vardır. Paralelkenarın şu ikisi şu ikisine (karşılıklı kenarlar) eşit olmak zorunda. Doksan derece olmadığı için kare olamaz, dikdörtgen olamaz. Yamuk kaldı sadece (Özel dörtgenlerin özellikleri)

Yukarıdaki diyalog incelendiğinde öğrencilerin aradıkları dörtgenin yamuk olduğunu belirleyene kadar özel dörtgenler, üçgende kenar açı ilişkileri gibi birden fazla teorik yapıyı kullandıkları belirlenmiştir. Bir diğer araştırma problemi olan Miras Kalan Tarla oturumu sırasında gerçekleştirilen gözlem öğrencilerin üçgenle ilgili sahip oldukları yapıları işe koştuklarını, süreçte işlerine yaramayacak teorik bilgileri elediklerini ortaya çıkarmıştır. Üçgenin formunu anlamak için özel üçgen, ikizkenar, eşkenar, dik açılı üçgen, geniş açılı üçgen olup olmadığı kontrol edilmiştir. Daha sonrasında üçgen eşitsizliği ile kenarortayın değerinin hesaplanıp hesaplanamayacağı kontrol edilmiştir.

Uygulama problemlerinin tamamında sayısal sonuca ulaşılmıştır. Öğrencilerin buldukları sayısal sonuçlara ait durumu gösteren Tablo 4.39 sunulmuştur.

Tablo 4.39

Grupların Problemlere İlişkin Sonuçları

Problemin Adı	Gruplar	Sayısal Sonucun Niteliği
Otlak Alanı	Tüm gruplar	İşleme bağlı sayısal sonuç II sayısının 3 olarak kullanılmasına bağlı birbiri ile tutarlı ancak yaklaşık sonuç 2 öğrenci hatalı sonuç bulmuştur
Kabilenin Güneşi	Grup 1	Teorik bilgiye dayalı doğru sonuç
	Grup 2- Grup 3	Araca bağlı ölçüm ile doğru sayısal sonuç
Park Peyzajı	Tüm gruplar	İşleme bağlı doğru sayısal sonuç 1 öğrenci araca bağlı doğru sonuç
Doğum Günü Pastası	Tüm gruplar	İşleme bağlı doğru sayısal sonuç- karekök değerine bağlı yaklaşık sonuç
Miras Kalan Tarla	Grup 1, Grup 2	Araç kullanımına bağlı yaklaşık sayısal sonuç
	Grup 3	Sayısal sonuç bulunmadı
Bereket Motifi	Tüm gruplar	İşleme bağlı doğru sayısal sonuç
Ev için Arazi		
Uçurtma Yapımı		
Bungalov Ev		
Kırık Seramik		

Öğrencilerin sayısal sonuca ulaşma yönelimleri incelendiğinde teorik bilgiye dayalı işlemsel bilginin tercih edildiği bulgusu elde edilmiştir. Araç kullanımı ile cevaba ulaşılan problemlerde de öncelik teorik yapıya bağlı geliştirilen işlemlere verilmiş, süreci bu şekilde ilerletemeyince araç kullanımı gerçekleştirmişlerdir. Ancak bu problemler sonrasında gerçekleştirilen görüşmeler araç ile gerçekleştirilen ölçümlere bağlı sayısal

cevabın öğrenciler için tamamlanmış bir matematiksel iş algısı oluşturmadığını ortaya çıkarmıştır.

Kabilenin Güneşi problemine ait görüşmede Ö8 “ *Ama biz sadece dedik ki, ölçtük aa burası 5 burası da 5 dedik geçtik. Yani sonucu bulduk geçtik gibi oldu. Yani o yüzden 5 olduğunu ben de gördüm de, hani bir mantığını şey yapamadım*” şeklinde açıklamıştır. Aynı problemde Ö6 araç ile bulduğu sonucu teorik olarak doğrulama ihtiyacı hissetmiştir. Sayısal değeri çizim üzerine yerleştirip Pisagor bağıntısı ile kontrol etmiştir. Ö5 cetvelle gerçekleştirdiği ölçüm değerinden emin olmadığını ifade etmiştir. Miras Kalan Tarla probleminde de öğrenciler buldukları sonucun ölçümlerindeki hata payından etkilendiğinin farkında olduklarını, sonucun ulaşmaları gereken sonuçtan farklılaştığını belirtmişlerdir. Aynı probleme ilişkin ikinci grupta oturuma katılan Ö19 araç ile tekrar tekrar inşa gerçekleştirmiştir. Öğrenci ile araştırmacı arasında aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir:

Araştırmacı: Sonrasında ilk çizimi yapan sensin sayısal sonucu bulan da sensin yaklaşık 80'e yuvarladın. Yüksekliği ama sonra birden fazla işlem yine gerçekleştirdin. Çözümü en son sen bitirdin. Sonrasında ne yaptın Arda?

Ö19: Ben sonrasında aslında bitirmiştim soruyu. Ama dediğim gibi biraz noktayı büyük çizmiştim. Ya da başka bir yöntemle denklemle çözsem acaba nasıl olur diye düşündüm. Denklem kurmadım ama yani bir de kanıt için birkaç kez işlem yaptım. Kanıtlama ihtiyacı hissettim.

Araştırmacı: İşlemlerin sonuçları tutarlı çıktı mı?

Ö19: Yani

Öğrenci sayısal cevaba ulaştıktan sonra denklem ile doğrulamayı düşünmüştür. İnşa adımlarını izleyerek gerçekleştirdiği diğer çizimler ile bulduğu sayısal sonucu doğrulamaya çalışmıştır. Tüm bu bulgulardan hareketle söylemsel oluşumda teorik yapının öncülendiği bulgusu elde edilmiştir.

4.4.1 Öğrencilerin çalışma uzayındaki teorik yapı ve kavram yanlışları bulguları

Oturumlarda teorik yapının aktif kullanılmasına bağlı öğrencilerin kendi teorik yapıları ve sahip oldukları kavram yanlışları ortaya çıkmıştır. Bilişsel düzlemde gerçekleştirilen eylemleri yöneten bu teorik yapılardan belirlenenler Tablo 4.40'ta verilmiştir.

Tablo 4.40*Öğrencilere Ait Teorik Yapılar ve Kavram Yanılgıları*

Öğrenci	Öğrenciye Ait Teorik Yapı
Ö1	Eşkenar dörtgeni kareden ayıran köşe açılarının ölçülerinin 90° olma zorunluluğunun olmaması Eşkenar dörtgenin açıları eşittir. Yamukta üst kenar kısa alt kenar uzun olmalıdır. Kenar uzunlukları farklı olan dörtgenlerin alanları eşit olamaz.
Ö5	Üçgende yükseklik daima açıortay ve kenarortay fark etmeden ondan küçük olmak zorunda yani dik olan bir şey yamuk inen bir şeyden daha uzun olmak zorunda Paralelkenarın karşılıklı kenarlarının eş olma şartı yoktur
Ö6	Prizmalar az sayıda olan yüzey sayısına göre isimlendirilir. Eşkenar dörtgen karenin dar açılısidir
Ö8	Yamuğun alanı üst ve alt tabanının toplamının yükseklikle çarpımının yarısı kadardır. Üçgenin alanı farklı kenarları üzerinden hesaplandığında taban değiştiği için alan değişir. Kenar uzunlukları aynı olan dörtgenlerin alanları aynı olmak zorundadır
Ö15	Eşkenar dörtgen karenin yan yatmış halidir. Eşkenar dörtgenin köşegenleri de eşittir. Eşkenar dörtgen paralelkenar değildir. Eşkenar dörtgenin alanı sadece köşegenleri ile hesaplanabilir.

Öğrencilerin görüşme ve gözlem verileri ile elde edilen Tablo 4.40 incelediğinde eşkenar dörtgen olmak ve yamukla ilgili kavram yanılgıları olduğu görülmüştür. Eşkenar dörtgenin açı özellikleri, köşegen özellikleri ve kare ile olan ilişkisine yönelik hatalı kavrayış gerçekleştirdikleri belirlenmiştir. Yamuk için görsel kavrayışla hareket eden iki öğrenci “alt ve üst taban”, üst kısa ve alt uzun” diyerek prototip çizime işaret etmektedir. Öğrencilerin çokgenlerde alan ve çevre ilişkilendirmesi konusunda da hatalı kavrayış geliştirdikleri belirlenmiştir. Çevreleri farklı olan çokgenlerin alanlarının eşit olmayacağı bilgisinin yanı sıra üçgenin farklı kenarlarına bağlı hesaplanan alanın da değişebileceği süreç içerisinde ifade edilmiştir.

4.4.2 Söyleme Dayalı İşlevsel Kavrayış Bulguları

Problemlerde öğrenci çizimleri incelendiğinde bu çizimlerden bazılarının söyleme dayalı işlevsel kavrayış güdümünde gerçekleştiği görülmüştür. Tüm problemler için belirlenen bu durum ve öğrencinin çizimi gerçekleştirme amacı Tablo 4.41’de sunulmuştur.

Tablo 4.41*Söyleme Dayalı İşlevsel Kavrayışın Problemlerdeki Epistemolojisi*

Problemin Adı	Söyleme Dayalı İşlevsel Kavrayış Epistemolojisi
Otlak Alanı	Koyunun otlama alanının orta noktaya bağlama durumuna bağlı simetrik alanlar oluşma bilgisine bağlı çizimler Köşelerde çakışan daire dilimlerinin oluşumuna bağlı çizim gerçekleştirilmesi İpin kenar üzerinde farklı noktalara bağlandığında oluşan daire dilimlerinin alanlarının keşfedilmesi amacıyla gerçekleşen çizimler
Kabilenin Güneşi	Kenar orta dikmenin kenarortay ve yükseklik olup olmadığını kontrol etmeye yönelik çizimler Dar, dik ve geniş açılı üçgenlerde kenar orta dikmenin durumunun aranmasına yönelik çizimler Araç ile ulaşılan ölçüm sonucunun Pisagor Bağıntısına göre kontrol edilmesine yönelik çizim
Bungalov Ev	Evin hacmini hesaplamada kullanılacak taban plakasının üçgen olmasına bağlı çizim yapılması Üçgen prizmanın hacmini hesaplamak için prizmanın dikdörtgen prizmaya dönüştürme
Miras Kalan Tarla	Tarlanın ölçülerinin aynı oranda küçültülmesine bağlı benzerinin çizilmesi Arsanın dik üçgen olup olmadığının Pisagor Bağıntısı ile kontrolüne yönelik dik üçgen çizilmesi Dere kenarını gören açının geniş aç olduğunu belirlenmesine bağlı geniş açılı üçgen çizimi Aradıkları doğru parçasının kenarortay olduğu bilgisine bağlı kenarortay-ağırlık merkezi, alanı hesaplamaya ilişkin yükseklik çizimi
Bereket Motifi	Büyük ve küçük motif arasında kalan bölgenin yamuk olmasına bağlı parçalanması Eşkenar dörtgenin kullanılacak alan formülüne bağlı gerekli bileşenleri ön plana çıkaran farklı çizimlerinin oluşturulması
Kırık Seramik	Verilen ölçülere bağlı çatlama noktasının birden fazla olası konumunun çizilmesi Alanlarının hesaplanması için oluşan üçgen parçalarının dikdörtgenden ayrılarak çizilmesi
Doğum Günü Pastası	Çubuğun uzunluğunu hesaplamak için kullanılacak dik üçgenin fark edilmesine bağlı bu üçgenin küp içinden ayrılarak çizilmesi Küpün bir yüzünün yüzey köşegeniyle ilgili eylemler için ayrı çizilmesi
Ev için Arazi	Özel dörtgenlerin özelliklerine bağlı arsanın yamuk olarak çizilmesi Üçgende açı kenar ilişkisine bağlı yamuğun paralel olan kenarlarının çizilmesi Yamuğun alanını hesaplamak için yamuğun dikdörtgen ve üçgen parçalara ayrılması, üçgen parçaların birleştirilmesi
Park Peyzağı	İkizkenar üçgenin açı özellikleri aracılığıyla verilen üçgenin alan özelliklerinin çizime aktarılması Kenarortay ve kenarortayın ayırdığı parça uzunluklarının eşit olduğu bilgisine bağlı dik üçgen çizilmesi
Uçurtma Yapımı	Uçurtmanın yüzey alanı hesaplamasında kullanılacak çıtaların çizilip kenarların çizilmemesi Deltoid içinde oluşan üçgenlerin parçalanarak dikdörtgen oluşturacak şekilde yeniden birleştirilmesi Kenarları deltoidin köşelerine teğet olan, deltoidi içine alan dikdörtgen çizilerek alanın keşfi Köşegenlerden birinin simetri eksenini olduğunun gösterilmesi amacıyla gerçekleştirilen deltoidin yarısının çizimi Birbirini ortalamayan ama dik kesişen köşegenlerin oluşturduğu dörtgenin çizilmesi Alanın her durumda eşit olduğunu ispat amacıyla kesişme noktasının köşegenlerin köşesine yakın olduğu çizimler gerçekleştirme

Tablo 4.41 incelendiğinde öğrencilerin söyleme dayalı işlevsel kavrayışı yoğun şekilde işe koştukları görülmektedir. Öğrencilerin sayısal cevaba ulaşmadan önce ve sonra işlevsel kavrayışı kullandıkları belirlenmiştir. Buldukları sayısal sonucu, problemde fark edilen ilişkiyi kullanma, çözüm yolunu doğrulama gibi farklı amaçlara hizmet ettiği görülmüştür. Uçurtma Yapımı problemi oturumuna ait görüşmede Ö1 *“Beni acaba farklı değerler verdiğimde alanların değişip değişmeyeceğini, özel bir değerle değişip değişmeyeceğine gibi düşüncesi üzerine kafa yordum. 1'e 89 gibi tuhaf ölçüler verdiğimde değişmediğini gördüğümde o düşüncede kafamdan çıktı zaten.”* açıklamasını yapmıştır. Öğrencinin bu söylemine yönelik çizimler gerçekleştirdiği görülmüştür. Bulduğu sayısal sonucun bu çizimler üzerinde sağlanıp sağlanmadığını kontrol etmiştir. Aynı problemde Ö6 köşegenlerin farklı birleşiminin alanda bir değişikliğe sebep olup olmadığını kontrol etmek için köşegen uzunlukları için kendi sayısal değerlerini kullanmış ve bu değerlere bağlı çizimler gerçekleştirmiştir. Bereket Motifi probleminde Ö9 büyütülmüş motifi alanını hesaplamayı bildiği parçalara ayırmıştır. Bu kavrayışı gerçekleştirme durumunu “yamuk olduğunu fark ettim. Yamuğu da ayrı bir şekilde çizdim” şeklinde açıklamıştır.

4.5 Muhakemenin Niteliği

Bu bölümde çalışmanın temel kavramı olan geometrik muhakemeye ilişkin bulgular sunulacaktır. Öğrencilerin muhakemeyi gerçekleştirme biçimleri doğal söylemsel ve teorik söylemsel bağlamlarında ele alınacaktır. Öğrencilerin problem çözümleri ve bu çözümlere dair açıklamaları, problem çözme sonucunda elde ettiği ilişkiyi sunma biçimleri birlikte değerlendirilmiştir.

Verilerin analizi sonucunda öğrencilerin teorik ve doğal söylemsel muhakemeyi bir arada kullandıkları görülmüştür. Problem çözme oturumlarında teorik muhakeme baskın şekilde kullanılmıştır. Doğal söylemsel muhakeme ise gözlemlenmiş ancak teorik muhakeme ile desteklendiği belirlenmiştir. Doğal söylemsel muhakemeye yönelik söylemler şekil üzerinden ve problemlerin metin bağlamları ile gerçekleştirilmiştir. Günlük konuşma dili ile ifade edilen matematiksel kavram ve ilişkiler problemlerin semiyotik oluşum bulguları içerisinde sunulmuştur.

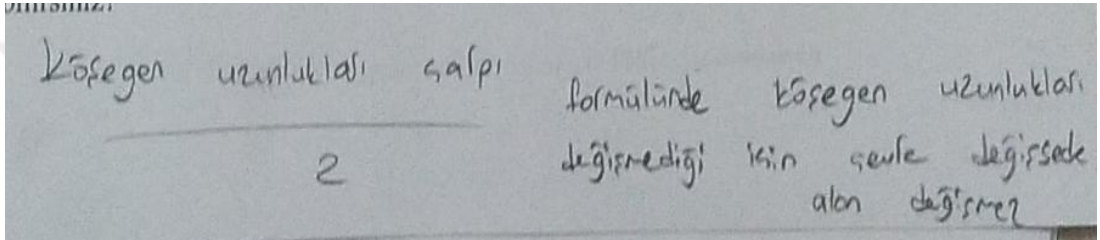
Teorik muhakeme matematiksel-geometrik ilişki ve kavramlar, tanımlar, teoremler üzerinden gerçekleştirilmiştir. Teorik muhakemenin çizimlere ve işlemlere aktarıldığı, sözel olarak ortaya çıktığı belirlenmiştir. Bunun yanı sıra matematiğin sembolik dilinin

kullanımının sınırlı kaldığı görülmüştür. Öğrencilerin gerçekleştirdikleri muhakemeyi problem çözme sırasında gerçekleştirdikleri işlemler ile açıkladıkları problemler olduğu görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin oturumlarda gözlemlenenden daha fazla muhakeme gerçekleştirdikleri görüşmelerde ortaya çıkmıştır. Problem çözme sürecini destekleyen bu muhakemeler görüşmenin doğası gereği sözel olarak ifade edilmiştir.

Oturum ve görüşmelerden elde edilen doğal ve teorik muhakemeye ait bulgular Şekil 4.74'te örneklendirilmiştir.

Şekil 4.74

Ö9'a Ait Muhakeme (Uçurtma Yapımı)

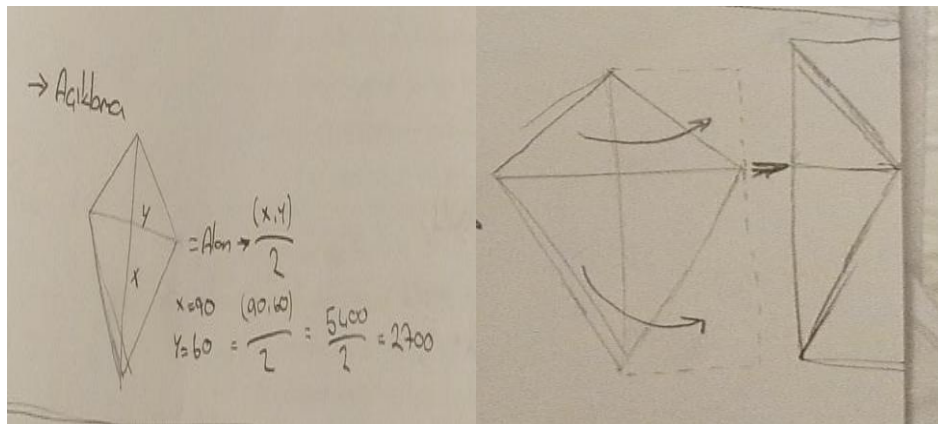


(Köşegen uzunlukları çarpı/2) formülünde köşegen uzunlukları değişmediği için çevre değişse alan değişmez.

Ö9 tarafından gerçekleştirilen açıklama incelendiğinde problemdeki uçurtma çitasını doğru parçası hatta köşegen olarak matematikleştirdiği görülmektedir. Köşegen uzunlukları metinsel olarak yazılmış, sembolik dil kullanılmamıştır. Problemde elde ettiği ilişkiyi yine matematiksel nesnelerle açıklamıştır. Öğrencinin teorik bir muhakeme gerçekleştirdiği görülmektedir. Şekil 4.75'te Ö7'ye ait çalışma kağıdı sunulmuştur.

Şekil 4.75

Ö7'ye Ait Teorik ve Doğal Muhakeme (Uçurtma Yapımı)



Öğrenciye ait çözüm ve çizim incelendiğinde teorik ve doğal muhakemeyi bir arada kullandığı görülmektedir. Deltoidin alanını veren ilişkiyi köşegenlere genel sayılar (x ve

y) vererek teorik dille, deltoidin dikdörtgen oluşturduğunu çizim üzerinden doğal dille ifade etmiştir.

Bereket Motifi probleminde oturum sırasında gözlemlenmeyen ancak öğrencinin görüşme sırasında ifade ettiği durum aşağıda sunulmuştur:

Ö20: Köşegen uzunluğunu bulmaya çalıştım. Köşegen uzunluğunu eşit olarak düşündüm ilk başta. Sonra arkadaşlar şeyi tartışırken fark ettim. Köşegen uzunluğunu da 2 kök 10 buldum. Çünkü çarpımlarının bölümü 20 idi ya. Sonra ikisini toplayayım dedim.

Araştırmacı: O cebirsel ifadelerini görebilir miyim? $2\sqrt{10}$ bulduğun işlemler nerede?

Ö20: Yazmadım. Ben kafamdan yaptım. $2\sqrt{10}$ 'dan sonra artı 5 buradan 5 buradan da 5 artı 10 2 kök 10 + 10 çarptım 2'ye böldüm. Sonra baktım çok büyük bir rakam yani çok değişik çıktı. Onu demek ki yanlışmış dedim.

İlgili diyalog incelendiğinde öğrencinin eşkenar dörtgende köşegen uzunluklarının birbirine eşit olduğu durumu değerlendirdiği, problemin çözümünü bu durum üzerinden gerçekleştirdiği görülmektedir. Ö20 ilgili problem oturumunda eşkenar dörtgenin kare ile ilişkisini araç ile ifade etmiştir. Dolayısı ile öğrencinin kareye ait bir durum olan köşegenlerin birbirine eşit ve dik olma ihtimali üzerinde muhakeme yürüttüğü gözlemlenmemiştir.

Oturumlarda öğrenciler arası diyaloglar ve öğrenci geri bildirim notları incelendiğinde teorik muhakemede matematiğin sembolik dili yerine matematiğin kavramlarını içeren konuşma dilini kullandıkları gözlemlenmiştir. Örneğin yamuğun alan bağıntısı Ö8 tarafından “alt ve üst kenarı toplayıp yükseklik ile çarpıp ikiye bölmek” şeklinde yapılandırıldığı görülmüştür. Kırık Seramik probleminde en kısa uzaklığın yükseklik olması gerektiğine ilişkin gerçekleştirdiği muhakemeyi Ö4 “Sonra eğer dik almazsak diğerleri gibi milyonlarca sonuç çıkabilir. Onun yerine tek bir sonuç yeter diye düşündüm” şeklinde ifade etmiştir. Öğrencinin burada bir doğru parçası ile dışındaki bir noktadan doğru parçasına çizilebilecek sonsuz sayıda doğru parçası olduğunu ifade etmek için “milyonlarca sonuç” ifadesine yer verdiği görülmektedir.

4.6 Günlük Yaşam Bağlamı ile İlgili Bulgular

Bu bölümde problemlerin tasarımında ölçüt olan günlük yaşam bağlamına yönelik bulgular sunulacaktır. Bulgular tüm uygulama problemlerinin tamamlanmasından sonra birinci grupla gerçekleştirilen görüşme, problem çözme oturumları ve oturumlardan sonra gerçekleşen verilerden elde edilmiştir.

Öğrenciler araştırma problemlerini: okulda çözdüklerine benzemeyen, daha önce karşılaşmadıkları tarzda, şekilsiz, hikayesi olan, temel bilgiler içermeyen (belli bir kalıbı olmayan), daha fazla düşünme gerektiren, matematiğin günlük hayatta olduğunu hissettiren şeklindeki ifadelerle tanımlamışlardır. Uçurtma Yapımı, Doğum Günü Pastası, Bungalov Ev, Otlak Alanı problemlerinin çözülmesi sırasında öğrenciler gerçek yaşam bağlamına ilişkin söylemlerde bulunmuşlardır. Uçurtma Yapımı probleminde Ö1, uçurtma yapımında kullanılan çıtalari doğru parçası olarak düşünmemiş, kalınlıklarını da değerlendirmeye almıştır. Çıtaların üçüncü boyutuna bağılı “altta ve üstte kalan parça” ifadesini hem uzunluk için hem de çıtaların birbirinin altında ve üstünde olma durumları için değerlendirmiştir. Öğrencinin gerçek yaşam bağlamı içinde problemi ele alması çözüm sürecinde zorluk yaşamasına sebep olmuştur. Doğum Günü Pastası probleminde birinci grup öğrencileri Ö1, Ö2, Ö4, Ö12 pasta içerisine yerleştirilen dört çubuğun kesişimi ve kesişim noktası için gerçek yaşam bağlamına yer vermişlerdir. Oturumda Ö4 çubukların hepsinin yerleştirilmesi durumunda tek noktada kesişme durumunu sorgulamıştır. Ö1 çubukların birbirini delerek geçeceğini ifade etmiştir. Ö12 ise çubukların birbirine teğet olacağını düşünmüştür. Ö2 grup arkadaşlarından farklı olarak bu durumun problemin çözümü için önemsenmemesi gerektiğini belirtmiştir. Bungalov Ev problemi sırasında birinci grupta Ö4 alan ve hacim hesaplamalarında malzeme kalınlığının önemsenmeyeceğini ayrıca belirtmiştir. Bu kalınlığın ihmal edilmesi gerektiğini söylemiştir. Otlak Alanı probleminde Ö10 keçinin bağlandığı kulübenin duvar yüksekliğini değerlendirmeye almıştır. Burada ifade edilen durumlar dışında uygulama problemlerinde öğrencilerin matematikleştirmeye bağılı göz ardı ettiğı durumlar Tablo 4.42’deki gibi olmuştur.

Tablo 4.42

Problemlerde İhmal Edilen Gerçek Yaşam Durumları

Problem Adı	Matematikleştirme
Otlak Alanı	Meranın düzlem olarak kabul edilmesi Keçinin nokta olarak işe koşulması
Kabilenin Güneşi	Kozalak ve yerleşkelerin nokta olarak kabul edilmesi İp uzunluğunun hesaplanmasında çocukların kol uzunluklarının ihmal edilmesi
Miras Kalan Tarla	Dere kenarının düz bir hat olduğunun kabul edilmesi Tarlanın düzlem olarak kabul edilmesi
Kırık Seramik	Seramik kalınlığının ihmal edilmesi
Doğum Günü Pastası	Şeker hamuru kaplamasının kalınlığının ihmal edilmesi Kremanın ve keklerin yerleşim sırasının ihmal edilmesi
Ev için Arazi	Arsanın düzlem olarak kabul edilmesi Adım ile gerçekleştirilen ölçüm hatalarının ihmal edilmesi

Problemde kulübenin otlama alanına dahil edilmemesinin ifade edilmesine karşılık öğrenci kulübenin 3B yapısını değerlendirme ihtiyacı hissettiğini belirtmiştir. Öğrencinin çözüm sürecinde zorluk yaşamasına sebep olmuştur. Öğrencilerin çözümlerine bağlı olarak oluşturulan Tablo 4.42 incelendiğinde öğrencilerin alan ölçümüne dayalı problemlerde zemini düzlem olarak kabul ettikleri görülmektedir. Birinci grupta gerçekleştirilen görüşmede Ö3 ile aşağıdaki konuşma gerçekleşmiştir.

Araştırmacı: Otlak alanı probleminde doğrudan düzlem olarak hesaplama yaptınız. Arazinin durumunu, engebeyi düşündünüz mü?

Ö3: İlk başta aklıma gelmedi. Hani toprağın engebeli olması falan. Ama hani kullansaydım bile şu anki matematik bilgimle hesaplayamazdım. Gelmemesinin sebebi ise bize sorulan matematik sorularında genelde düzlem veriliyor. Hiç engebeli olduğu söylenmedi. O kadar detaylı düşünmüyorum yani. Yeri düz olarak düşündüm. Duvarı düz olarak düşündüm.

Araştırmacı: Problemi doğrudan matematik içinde mi düşünüyorsun? Problemde yer alan gerçekliğin bir etkisi oldu mu sende?

Ö3: İlk başta okurken zaten hani hikayeliydi. İlk başta koyun mera falan düşündüm. Ama daha sonra matematikte problem çözmeye başladığım için matematik oldu.

Bu görüşmede Ö4'ün problemlerde yer alan gerçek yaşam durumlarına yönelik görüşü istendiğinde durumu “Çünkü biz oradan tamamen matematik sorusu çözmeye odaklandığımız için gerçek hayatla tam bir bağ kurmadım. Sadece resim olarak kendi zihnime yedirmeye çalıştım.” şeklinde ifade etmiştir. Görüşmeye katılan Ö1 benzer bir söylemde bulunmuştur.

Gerçek yaşam bağlamı ile ifade edilen matematiksel durumlara yönelik öğrencilerin zorluk yaşadığı durumlar olduğu gözlemlenmiştir. Kabilenin Güneşi probleminde Ö6 çocukların arasındaki ipin nasıl yerleştireceğini ilk başta belirleyememiştir. Öğrenci bu durumu görüşme sırasında şu şekilde açıklamıştır:

Ö6: Bu aralarındaki ip acaba hani böyle bir elips şeklinde kendilerini kavrayacak şekilde mi olacak diye düşündüm. Çünkü ipe düğüm atıyorlardı sanırım. Hani bir çember şeklinde. Böyle iki kişi var hani bu kişilerin de kalınlıkları var.

Aynı problemde Ö9 kozalakların havaya atılmasına bağlı gerçekleşen durumu yapılandırmakta zorlanmıştır. Öğrenci bu zorluğu görüşme sırasında şu şekilde açıklamıştır:

Ö6: Ama hocam ben doğrusal deyince deyince böyle böyle anlamadım ki (Kağıt üzerinde iki oyuncu arasındaki yeri gösteriyor) yukarı doğru atılıyor derken yukarı doğrusal atılıyor anladım.

Doğum Günü Pastası sorusunun çözümü sırasında Ö11 pasta kalıbı ve krema ile küpün elde edilmesi ilişkisini kurmakta zorlanmıştır. Kek katmanları ve kremanın nasıl yerleştirileceğini arkadaşı Ö9'dan destek alarak yapılandırmıştır.

Bu veriler öğrencilerin matematiksel dil ile ifade edilmeyen durumların matematiksel karşılığını yapılandırmakta zorlandıkları bulgusunu ortaya koymuştur.



5 TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada özel yetenekli öğrencilerin şekil içermeyen geometri problemlerinde gerçekleştirdikleri muhakeme süreci MWS'ye göre incelenmiştir. Öğrencilerin muhakeme sürecinde kullandıkları temsiller, araçlar ve teorik yapıların ortaya çıkarılması için iki eğitim-öğretim dönemini kapsayan uzun soluklu bir araştırma gerçekleştirilmiştir. Araştırma verileri toplanmaya başlamadan önce araştırmaya dahil edilecek gruplarda matematiksel araç kullanımına yönelik destek eğitimi yürütülmüştür. Araştırma üç grupta gerçekleştirilmiş olup tüm gruplarda araştırmanın amacına yönelik hazırlanan on problem ayrı ayrı uygulanmıştır. Katılımcılar şekil içermeyen, günlük yaşam bağlamı içerisinde sunulan geometri problemlerini cevaplandırmıştır. Problem çözme oturumları ve görüşmelerden elde edilen veriler nitel analize tabi tutulmuş, öğrencilerin matematik çalışma uzaylarından semiyotik oluşum, enstrümantal oluşum, söylemsel oluşum, geometrik şeklin muhakemedeki rolü, muhakeme türü ve günlük yaşam bağlamı başlıklarında bulgular elde edilmiştir. Bulgulardan hareketle araştırma sonuçlarına, sonuçların literatür ile karşılaştırmasına yer verilmiş alana, uygulamaya ve ileride yürütülebilecek çalışmalara yönelik önerilerde bulunulmuştur.

5.1 Sonuç ve Tartışma

Bu bölümde araştırma bulgularının bir özeti olan sonuçlara ve bu sonuçların literatür ile çeşitli boyutlardan tartışmasına yer verilmiştir. Muhakeme sürecinde şeklin rolü, MWS bileşenleri, algısal süreçler, muhakeme türü, günlük yaşam bağlamı bileşenlerinin her biri detaylı şekilde irdelenmiştir. Bu başlıkların birbiri ile ilintili yapısı sebebiyle ayrıca başlıklandırmaya gidilmemiştir. Ancak çalışmadan elde edilen sonuçlar araştırmacı için önem sırasına göre tartışılmıştır

Gerçek yaşam bağlamı içerisinde sunulan geometri problemlerinin tamamı için öğrencilerin geometrik şekil çizdikleri, bu çizimleri farklı amaçlarla gerçekleştirdikleri ve muhakeme sürecinde şekli yönettikleri tespit edilmiştir.

Araştırmada geometrik şeklin muhakemede rolüne ilişkin farklı görüşler olduğu daha önce ifade edilmiştir. Duval (2000) de geometrik şekil kompozisyonu içerisinde hangi görsel elemanların ilgili hangisilerinin ilgisiz olduğunun ayırt edilmesinin karmaşık bir yapı sunduğunu ve şeklin ikonik yapısı ile tümdengelimsel akıl yürütmeye engel olabildiğini ifade etmektedir. Mevcut araştırmada şeklin sunulmadığı bir muhakeme

sürecinin nasıl olacağı sorusu ile yola çıkılmıştır. Bu amaçla doğrudan matematiğin sembolik diliyle ifade edilmeyen problemlerde günlük yaşam bağlamından destek alınmıştır. Öğrencilerle gerçekleştirilen oturumlar sonucunda oturumlara katılım sağlayan öğrencilerin tamamının geometrik şekil çizdikleri görülmüştür. Öğrenciler genellikle tek bir çizimle yetinmemiş, birden fazla çizim gerçekleştirmiştir. Bu çizimlerin farklı amaçlarla gerçekleştirildiği belirlenmiştir. Metin içerisine gömülü olan matematiksel durumu ortaya çıkarmak bu amaçlardan ilki olarak öne çıkmaktadır. Literatürde matematiksel modellemenin yatay matematikleştirme olarak ifade ettiği durum araştırmada geometrik şekil çizimi ile karşılanmıştır. Duval (2017)'in günümüzde geometri öğretiminde geometrik şekillerin gerçek hayatta gözlemlediğimiz ilişkilerin bir temsilini ve somut problemlerin bir modelini sunduğu söylemi bu sonucu desteklemektedir. Çizimler akıl yürütmeye destek (İmamoğlu vd., 2023) ve görselleştirme muhakeme sürecinde sezgisel dayanak (Duval, 1998, Gómez-Chacón ve Kuzniak, 2015) sağlamaktadır. Bu bağlamdan hareketle öğrencinin geometrik muhakeme sürecinde görselleştirmeye ihtiyaç duyduğu ifade edilebilir. Ancak Duval ilgili teoride halihazırda geometrik çizim barındıran muhakeme ile ilgili açıklamalar getirmiş, matematiksel çalışmada şekle bağlı gerçekleştirilen muhakemeyi “acemi” olarak nitelendirmiştir. Öğrencilerin kendi çizdikleri şekiller üzerinden ilerlettikleri muhakemenin bu nitelendirmenin dışında olacağı çalışmamızın bulguları üzerinden ifade edilebilir. Çoğunlukla hızlıca ve manuel olarak gerçekleştirilen çizimler öğrencilerin matematiksel fikirlerinin bir temsili olarak işlev kazanmıştır. Örneğin öğrencinin kare formunda çizdiği dikdörtgen çözüm sürecinde dikdörtgen, geniş açı oluşturmak amacıyla çizdiği dar açı geniş açı ve üçgen çizimi 3B uzayda prizma olarak işe koşulmuştur. Bir başka deyişle çizime bakan herhangi bir kişi tarafından kare, dar açı veya üçgen olarak algılanacak imajlar özel yetenekli öğrencilerin algısal kavrayışlarına bağlı farklı kavram ve ilişkileri temsil etmektedir. Bu durum kavramın şekli yönettiği üst düzey muhakeme (Fischbein, 1993) ile tutarlılık göstermektedir. Torregrosa ve Quesada (2008) muhakeme sürecinde şekil üzerinde gerçekleştirilen eylemlerin matematiksel bir fikir elde edildiğinde sonlandırılmasını kesme (truncation) olarak tanımlamaktadır. Araştırmada bir çizimin yarıda bırakılıp farklı bir çizim gerçekleştirme davranışlarının bir kısmı şeklin kontrolünün öğrencide olması bakımından bu kapsamda değerlendirilebilir. Muzaini vd. (2023) 14-15 yaş grubu öğrencilerinin Şekilsel Kavrayış Teorisi içerisinde matematiksel yaratıcılıklarını inceledikleri çalışmada öğrencilerin sözel bilgiye bağlı görselleştirme

gerçekleştiremediğini, görsel bilgiden sözel bilgiyi elde edemediğini ve çizimlerin etkisinde muhakeme gerçekleştirdiklerini belirlemiştir. Her ne kadar araştırmaların katılımcı yaş grubu paralellik gösterse de bu araştırmanın özel yetenekli öğrencilerle gerçekleştirilmesi şekil odaklı muhakeme sürecinde farklılaşmasını açıklamaktadır.

Özel yetenekli öğrencilerin şekil kullanımından bağımsız bir muhakeme gerçekleştirmedikleri, epistemolojik düzlemin bileşenlerine bağlı işlevsel kavrayışın şekil kullanımı üzerinde etkili olduğu belirlenmiştir. İşlevsel kavrayışa dayalı gerçekleştirilen muhakemenin şekil üzerinde farklı bilişsel döngüler oluşturmaları nedeniyle muhakemenin sınıflandırılması zorlaşmıştır. Özel yetenekli öğrencilerin farklılaştığı bu muhakeme teorik çerçevede de ifade edilen muhakemeden şeklin kullanımı açısından farklılaşmaktadır. Duval (1998) matematiksel davranış olarak ifade ettiği muhakeme sürecinde şeklin rolünün ikinci planda kaldığı ve tamamen söylemsel olarak gerçekleşen, geometrik şeklin kullanılmadığı iki çalışma yolu tanımlamıştır. Bizim çalışmamızın sonuçları öğrencilerin şekilden bağımsız bir muhakemeyi hiç kullanmadıklarını ortaya koymaktadır. Buna karşın tamamen konfigüratif olarak ifade edilen, şeklin manipülasyonu odaklı muhakemenin de gerçekleşmediği belirlenmiştir. Öğrencilerin geometrik çizimden bağımsız bir akıl yürütme gerçekleştirmemesinin nedenlerinden birinin problemlerin tasarımı olduğu söylenebilir. Öğrencilerin problem bağlamında ifade edilen matematiksel duruma ait doğru temsili oluşturma girişimleri şekil kullanımının başlangıcı olmuştur. Örgün eğitimin geometri eğitimini temel geometrik şekiller ve görsel imajlar üzerinden sunması sürecin şekil üzerinden devam etmesinin nedenlerinden biri olarak söylenebilir. Diğer taraftan Duval (1998) şekil kullanımı içeren ve içermeyen (pure) teorik muhakemeyi ele alsada farklı türde muhakemelerin gerçekleştirilebileceğinin altını çizmektedir. Aynı çalışmada işlevsel kavrayışa bağlı görme eyleminin tanım, teorem gibi teorik yapıyı gerektiren durumlarda söylemsel kavrayışı ortaya çıkardığını belirtmektedir. Özel yetenekli öğrencilerin gözlemlenen muhakemelerinin teorik yapının harekete geçirdiği işlevsel kavrayışı baskın yapıda olduğu ifade edilebilir. Bu özelliklere bağlı özel yetenekli öğrencilerin işlevsel kavrayışı içeren matematiksel davranış yolunu (Duval, 1998, s.48) izledikleri, farklı olarak görselleştirme adımına sık sık geri döndükleri ifade edilebilir. Kuzniak ve Nechache (2021) gerçekleştirdikleri çalışmada öğretmen adaylarının geometrik çalışma karakterizasyonunu Duval (2005) tarafından tanımlanan beş başlık altında ve geometrik paradigmlar ışığında irdemişlerdir. Sonuç olarak öğretmen adaylarının belli bir

paradigmayla uyumlu ancak tam olarak o paradigmaya ait bir çalışma karakteri ortaya koymadıklarını, geometrinin eğitim uygulamalarına bağlı beklentilerini karşılayacak uygulamalar gerçekleştirdikleri görülmüştür. Mevcut araştırmada öğrencilerin muhakemelerinde literatür ile uyumlu noktalar olmasına karşılık ortaya çıkan muhakemenin bütünüyle bir tanımlamaya uymadığı söylenebilir. İşlevsel kavrayışın yanı sıra okul paradigması muhakemenin şekillenmesinde önemli rol oynamıştır.

Şekil içermeyen geometri problemleri öğrencilerin geometrik şekil ve kavramlara ilişkin sahip oldukları imajları, çözüme yönelik kurdukları ilişkileri ve çizimlere yaklaşımlarını ortaya koymuştur.

Problemlerin şekil içermeyecek şekilde tasarlanmasının araştırma için önemli sonuçlardan biri öğrencilerin matematiksel fikirlerini yansıtacak çizimler gerçekleştirmeleri olmuştur. Bu uygulama ile öğrenciler algısal kavrayışın etkisinde kalmadan problemde ifade edilen matematiksel ilişkiye ait ipuçları sunan çizimler gerçekleştirmiştir. Örneğin Kabilenin Güneşi probleminde yerleşke noktasını üçgen içinde, Kırık Seramik probleminde çatlama noktasının köşegen üzerinde yansıtan çizimler bu kapsamdadır. Duval'ın (2017) geometrik şekilleri gözlemlediğimiz ilişkilerin bir temsili, somut durumlar için bir modelleme olarak görmesi gerçek yaşam bağlamları kullanılan araştırmanın bu sonucunu desteklemektedir.

Öğrenci çizimleri incelendiğinde üçgen ve dörtgen çizimlerinde prototip çizimlerin yer aldığı sonucu elde edilmiştir. Prototip çizimlerde üçgenlerin taban üzerine eşkenar, ikizkenar formunda çizildiği belirlenmiştir. Eşkenar dörtgen iki geniş iki dar açıya sahip formda ve köşesi üzerine çizilirken yamuğun birbirine paralel kenarları kağıdın üst ve alt kenarına paralel olacak şekilde üstteki kenar kısa, alttaki kenar uzun temsil edilmiştir. Törnüklü vd. (2013) matematik öğretmen adayları ile gerçekleştirdikleri dörtgenlerle ilgili çalışmada özellikle eşkenar dörtgen ve yamukta hatalı çizim gerçekleştiğini, Karpuz vd. (2014) şekilsiz geometri soruları uyguladıkları ortaöğretim öğrencilerinin üçgen için prototip dar açılı üçgen çizdiğini tespit etmiştir. Çalışma bulguları prototip çizilen geometrik şekiller bakımından literatür ile tutarlıdır. Ancak öğrencilerin problem çözme süreci bütüncül incelendiğinde prototip etkisinde kalmadıkları ifade edilebilir. Buradan hareketle özel yetenekli öğrencilerin prototip çizimlerinin temel sebebi de literatüre paralel şekilde kavramların öğretiminde prototiplerden yararlanılması olarak söylenebilir. Kuzniak (2011) bir işaretin bir nesneye ithafen kurallar taşıdığında sembol olarak

nitelendirileceğini, bu kuralların da a priori olarak gelenek tarafından ya da posteriori olarak alışkanlık ve kültürel olarak belirleneceğini söylemiştir. Geometrik şekillerin prototip çizimlerinin öğrenme ortamı kültürü ve öğretmen alışkanlıklarının bir sonucu olması bu görüşü desteklemektedir. Nitekim bu prototip çizimlerin sebep olduğu literatüre benzeşik kavram yanılgıları olduğu da tespit edilmiştir. Eşkenar dörtgenin karenin köşesi üzerine çizilmiş hali olduğu, paralelkenar olamayacağı bu yanılgılar arasında gösterilebilir. Duval (1999) algıya bağlı geometrik şekillere ilk bakışın görüntü oluşturduğunu ve bu görüntünün şekle sabit bir yapı kazandırdığını belirtmiştir. Kavram yanılgısına sahip öğrenciler bu sebeple daha önce gördükleri geometrik şekillerin görüntüsüne atadıkları özellikleri kullanmıştır. Deliyanni vd. (2011) yürüttükleri çalışmada geometrik şekil üzerinden gerçekleştirilen anlamaların kavramsal anlama üzerinde güçlü etkileri olduğunu ortaya koymuştur. Araştırmada öğrencilerin geometrik şekil üzerinden sahip olduğu anlamaların dörtgenlerin hiyerarşisini yapılandırmalarında engel oluşturduğu belirlenmiştir. Süreçte öğrencilerin çoğu bu engele bağlı eşkenar dörtgenin bir paralelkenar olabileceğini ilk başta belirleyememiştir. Özel yetenekli öğrencilerin görsele bağlı karşılaştıkları engeli eşkenar dörtgenin kavramsal özelliklerini kullanarak aşmaları araştırmanın önemli bir sonucudur.

İşlevsel kavrayış epistemolojik düzlemin temsil, artefekt ve referans bileşenlerine bağlı olarak gerçekleşmiştir. İşlevsel kavrayışı yöneten durumların farklılaştığı, aynı gerekçeye bağlı farklı işlevsel kavrayış uygulamaları gerçekleştiği belirlenmiştir. Geometrik muhakeme sürecinde işlevsel kavrayışın düzlemler arası artikülasyonu sağlama rolünün olduğu belirlenmiştir.

Araştırmanın kuramsal çerçevesinde diğer kavrayışlara göre ayrıcalıklı olan işlevsel kavrayışın temsile, araca ve söyleme bağlı üç farklı şekilde gerçekleşeceği öngörülmüştür. Araştırma sonuçları işlevsel kavrayışın düşünüldüğü gibi muhakeme sürecinde aktif işlevinin olduğunu ve temsile, araca, söyleme dayalı kullanıldığını ortaya koymaktadır. İşlevsel kavrayışının epistemolojik işlevi Duval (1995) tarafından keşfetme olarak tanımlanmaktadır. Problemin çözümü için manuel çizim üzerinde doğru şekli keşfetmeye yönelik çizimler gerçekleştiği belirlenmiştir. Kırık Seramik probleminde dikdörtgen içinde üçgenlerin aranmasına yönelik çizimler örnek olarak verilebilir. Her ne kadar araç kullanımı sınırlı kalsa da araçların teknik özelliklerinin şekil üzerinde eylemlere bağlı keşfetme amacıyla kullanımı olduğu belirlenmiştir. Söyleme dayalı

işlevsel kavrayış şekil üzerinde matematiksel bilgiye bağlı durumun doğruluğunun keşfedilmesi, kurulan matematiksel ilişkinin kullanılması amacıyla işe koşulmuştur. Miras Kalan Tarla probleminde aranan yardımcı elemanın yükseklik olup olmadığının keşfedilmesi amacıyla yükseklik çizimi, Bereket Motifi probleminde alanın hesaplamasında taban ve yüksekliğin kullanımının keşfi amacıyla eşkenar dörtgenin paralelkenar olarak çizilmesi örnekleri verilebilir. Bu araştırmanın bulgularından hareketle işlevsel kavrayışın epistemolojik düzlemin farklı bileşenlerine bağlı harekete geçirilen ve görselleştirme ile sonuçlanan bir süreç olduğu ifade edilebilir. Duval (1999) geometrik etkinliğin tüm dengelimsel akıl yürütme ve görselleştirme arasında koordinasyon gerektirdiğini belirtmektedir. Torregrosa ve Quesada (2008)'ya göre de tüm dengelimli muhakeme için işlevsel ve söylemsel kavrayışın bir arada kullanılması gerekmektedir. Bu açıklamalar ve araştırma bulguları birlikte ele alındığında tüm dengelimsel akıl yürütmenin kaynağının epistemolojik düzlem, koordinasyonu sağlayan bileşenin işlevsel kavrayış olduğu yorumu getirilmiştir. Paralel olarak Or (2013) işlevsel kavrayışın görselleştirilme ve muhakemenin gelişimi için geometri görevi tasarımlarında önemini vurgulamaktadır. Öğrencileri çizime, yani görselleştirmeye yönlendiren birden fazla süreç olduğu ifade edilmiştir. Benzer çizimlerin farklı amaçlarla gerçekleştirildiği süreç içinde gözlemlenmiştir. Bu sonuç Aktivite Teorisi (Leont'ev, 1981) ile ifade edilen aynı eylemin farklı amaçlarla gerçekleşeceği ile tutarlıdır. Tersinir olarak aynı amaca bağlı işlevsel kavrayışın farklı görselleştirme ile sonuçlandığı da belirlenmiştir. Örneğin Otlak Alanı probleminde otlama alanının simetrik olduğunu fark eden iki öğrenciden biri simetrik çizimi tamamlarken diğeri sadece şeklin yarısını çizmiştir. Duval (1994)'in işlevsel kavrayışın şekil üzerinde meydana getireceği değişimleri sınıflandırmasına karşın (*optik, konumsal, mereolojik*) işlevsel kavrayışın geometrik çalışmada çeşitliliği sağlayarak süreci kişiye özgü hale getirdiği söylenebilir.

Kuzniak ve Rauscher (2011) geometri öğretimine yönelik Geometri I-II-III olmak üzere tanımladıkları üç paradigmadan Geometri I ve II'nin ortaöğretim düzeyinde önemli rol oynadığını ifade etmiştir. Çalışmanın bulguları bu bağlamda analize tabi tutulmamıştır. Ancak MWS'nin başlangıç noktası olan GWS'nin geometrik paradigmalarla ilişkisi bu sonucun doğal akış içerisinde elde edilmesini sağlamıştır. Özel yetenekli öğrencilerin teorik bilgiyi kullanma ve teorik doğrulama ihtiyacı içinde olmaları geometri II baskın bir muhakeme sürecini göstermiştir. Öğrencilerin Geometri I çerçevesinde ele alınacak araca bağlı çizim ve ölçme gerçekleştirdiği, oluşturulan şekilden elde edilen ölçümün

yaklaşık olarak hesaplandığının değerlendirildiği gözlemlenmiştir. Güncel çalışmadan elde edilen bu sonuç Kuzniak ve Nechache (2021) tarafından öğretmen adayları ile gerçekleştirilen çalışmanın sonuçları ile paralellik göstermektedir. Ancak çalışmaların katılımcı düzeyleri göz önünde bulundurulduğunda özel yetenekli öğrencilerin lisans düzeyi öğrencileri ile benzerlik göstermesi dikkat çekicidir. Buradan elde edilecek diğer bir sonuç ise öğrencilerin özel yetenekli olmalarına karşın okul matematiğinin sınırları içerisinde geometrik muhakeme gerçekleştirebildikleridir. Geometri II için teorik bilginin kullanımı ele alındığında kavramlar ve kavramlar arası ilişkinin öğrencilerin potansiyellerine göre tartışmalı durumda olduğu ifade edilebilir.

Semiyotik oluşum içerisinde görsel temsil ve sözel temsil yoğun şekilde kullanılmış, sembolik temsil kullanımı sınırlı olmuştur.

MWS çerçevesinde incelenen ilk oluşum semiyotik oluşumdur. Öğrencilerin probleme ilişkin görsel, sembolik ve sözel temsilleri semiyotik oluşum kapsamında incelenmiştir. Semiyotik oluşum göstergebilimsel sistemler tarafından temsil ve organize edilen matematiksel nesnelere ait sözdizimsel ve anlamsal yapı arasındaki artikülasyonu ifade etmektedir (Kuzniak, 2022). Araştırmada problemlerde ifade edilen geometrik nesne ve ilişkilere ait temsiller belirlenen başlıklarda (görsel, sembolik, sözel) öğrenci çalışma uzayları içinde incelenmiştir. Matematiğin soyut doğasından kaynaklı temsil edilen ile temsil eden arasındaki ilişki için öğrenci bilişsel düzlemi içerisinde kanıtlar aranmıştır. Bu kanıtlar öğrencilerin matematik çalışma uzayına dahil ettikleri matematiksel bilgiyi öğrencilerin kavram imajları üzerinden görünür kılmaktadır. Öğrencilerin geometri problemlerinde en çok görsel kayıt oluşturdıkları belirlenmiştir. Görsel temsillerin öğrenci çizimlerini içermesi ve algısal kavrayışla ilişkili olması bakımından detaylı tartışılması gerekliliği ortaya çıkmaktadır. Öncelikle öğrencilerin problemde sözel olarak ifade edilen temel şekiller ve ilişkileri (kare, dikdörtgen, üçgen, diklik, paralellik, vb.) genellikle hızlı ve doğru şekilde çizdikleri belirlenmiştir. Ancak bu çizimlerde nicel verilere dikkat eden ve etmeyen öğrencilerin olduğu görülmüştür. Öğrenci çizimi ile epistemolojik düzlem beklentisi arasında oluşan farkın yukarıda ifade edilen durumlar hariç (kavram yanılgıları) hatadan kaynaklanmadığı ifade edilebilir. Öğrenci çizimlerinin problemde tanımlanan sayısal verileri yansıtan uzamsal özellikleri taşıması çözüm süreci içerisinde engel oluşturmamıştır. Bu durum göz önüne alındığında öğrenci çizimlerinin doğru görsel sunmamasına karşın öğrenci için sezgisel bir dayanak sunduğu,

öğrencinin kodunu çözdüğü matematiksel nesne olarak işlev kazandığı söylenebilir. Gagatsis vd. (2011) ispat görevlerinde geometrik şekillerin doğasını inceledikleri çalışmada geometrik şeklin görevlerin çözümünde önemli destek sağladığını ortaya koymuştur. Araştırma bu yönü ile literatür ile uyum göstermektedir.

Semiyotik oluşumun yönelim durumu incelendiğinde aynı öğrenci özelinde, problemler arasında ve grup içindeki öğrenciler arasında farklılaşma belirlenmiştir. Temel geometrik şekiller (dikdörtgen, üçgen, yükseklik, vb.) için oluşum yönü çoğunlukla epistemolojik düzlemde bilişsel düzleme gerçekleşmiştir. Burada çizimlerin niteliğinden ziyade öğrenci için işlevine dikkat edilmiştir. Problemlerde bağlam içerisinde verilen matematiksel ilişkinin semiyotik oluşum yönü ilişkinin kodunun çözülmesine bağlı çizim gerçekleştirme, çizimden ilişkinin kodlanması olmak üzere iki farklı yönelimde gerçekleşmiştir. İlişkinin kodunun çözüldüğü durum görselleştirmenin matematiksel çıkarımlara dayandırılması açısından önemlidir. Duval (1999)'e göre görme hipotezlerle başlamaz ve matematiksel çıkarımlardan kaynaklanmaz. Görselleştirme bu nedenle görmeye indirgenmemelidir. Görselleştirme bir ilişkiye bağlı oluşum ürününü tam şekilde kavramaya olanak sağlar. Epistemolojik düzlemde bilişsel düzleme gerçekleşen öğrenci semiyotik oluşumlarının kavramsal ilişkiyi organize ederek gerçekleştirdiği görülmüştür. Bu açıdan ele alındığında özel yetenekli öğrencilerin görselleştirmesi görme eyleminden ve görsel kavrayıştan ayrılmaktadır.

Semiyotik oluşum içerisinde ele alınan temsil biçimlerinden biri de sembolik temsildir. Geometri problemi çözerken matematiksel çalışma çizim-doğal dil ve sembolik dilin bir arada kullanımını ve birbirlerine dönüşümünü içermektedir (Duval, 1999). Araştırmada bu ifadeye benzer şekilde öğrencilerin problemler için doğru geometrik şekli çizimleri ve şekil üzerinde sembolik temsil kayıtları oluşturması, çözüme ait ilişkileri sembolik olarak ifade etmeleri beklenmiştir. Matematğin bir dil olarak öğrenciler tarafından kullanımı matematiksel fikirlerin en sade ve ekonomik şekilde aktarılması ve matematik çalışma uzayı içerisinde anlaşılır bir yapı sunması açısından önemsenmiştir. Öğrencilerin gerçekleştirdikleri muhakeme sürecinin teorik ayağı hakkında ipuçları sunması beklenmiştir. Ancak araştırma sonucunda öğrencilerin diklik, yükseklik, paralellik, eşlik gibi temel sembolik temsilleri, genelleştirilmiş sayı ve parametre için harfli ifadeleri kullanmalarına karşılık bu temsilin kullanımının tüm problem çözme süreci içinde oranının düşük olduğu görülmüştür. Öğrencilerin tabi oldukları öğretim programı

geometri alanında doğrudan sembolik temsil kullanımını vurgulayan kazanımlar yer almaktadır. Beşinci sınıf düzeyinde “Doğru, doğru parçası, ışını açıklar ve sembolle gösterir.”, altıncı sınıf düzeyinde “Açıyı, başlangıç noktaları aynı olan iki ışının oluşturduğunu bilir ve sembolle gösterir.” bu kazanımlara örnek olarak verilebilir. Programın genelinde de sembolik temsilin geometri kazanımlarının verilmesi sırasında kullanıldığı bilinmektedir. Programın geometri öğretiminde sahip olduğu bu yapıya karşılık öğrencilerin geometrik sembolleri problem çözme süreçlerinin bir aracı olarak kullanmadıkları söylenebilir. Programın uygulanmasında öğrencilerin sembol kullanımlarının sadece ilgili kazanım kapsamında değerlendirilmesi, geometrik çalışmanın genel değerlendirilmesinde bir kriter olarak ele alınmaması bu sonuç üzerinde etkili olmuş olabilir. Araştırma problemlerinin sembolik temsil kullanımını önceliklendirmemesi, sembol kullanımına vurgu yapmaması bu durumun diğer bir sebebi olarak gösterilebilir. Öğrencilerin sembolik temsil kullanmadan da sayısal sonuca ulaşabiliyor oluşu bu durumu desteklemektedir. Sayısal sonuca ulaşmaya yönelik öğrenci işlemleri incelendiğinde takip edilebilir işlem gerçekleştirme oranının düşük olduğu söylenebilir. Aritmetik işlemleri zihinden gerçekleştirme, kullanılan bağıntıyı yazmadan sayısal değerlerin atanması gibi eylemler nedeniyle de sembolik temsiller daha az kullanılmıştır. Ölçme ve değerlendirme uygulamalarının matematiksel çözüm adımlarını değersiz kılacak şekilde gerçekleştirilmesinin bir sonucu olarak değerlendirilebilir.

Öğrencilerin sembolik temsil kullanımını arka plana atmalarına karşılık bu sembollerin ilişkili olduğu matematiksel yapıyı işlemlerine aktarabildikleri ifade edilmiştir. Öğrenciler paralellik, diklik, açı gibi geometrik nesnelerin gerçek yaşam bağlamı içerisindeki temsillerini bu kavramların günlük yaşamda güçlü örnekleri olmasına bağlı olarak hızlıca işe koşabilmişlerdir. Tanguay ve Venant (2016) açı kavramının semiyotik ve kavramsal oluşumunu inceledikleri çalışmada açının soyut yapısının, açının ne olduğu ve ölçüsü arasındaki ayrımın öğrencilerin zihinlerinde net olarak oluşmadığını belirlemişlerdir. Araştırmacılar açının ölçme ve açıklık yönünün baskın olarak ele alındığını ortaya koymuşlardır. Bu çalışmada da yüksekliğin alan hesaplama- Pisagor bağıntısı, yarıçapın dairenin alanı-çevresi ile ilişkili olarak kavramsallaştığına yönelik ipuçları elde edilmiştir.

Algısal kavrayış görsel temsiller ile sezgisel bir destek sağlamıştır. Sıralı kavrayış enstrümantal oluşum içerisinde geometrik inşa adımlarının bilindiği durumlarda

kullanılmıştır. Söylemsel kavrayış ise özel yetenekli öğrencilerin matematiksel çalışmalarının arka planında aktif olarak işe koşulmuştur.

Gürhan ve Tapan-Broutin (2017) farklı kavrama türleri arasındaki geçişlerin ilişkisinin ve bu geçişlerin altında yatan etmenlerin belirlenmesi gerektiğini ifade etmiştir. Güncel çalışmanın böyle bir amacı bulunmamaktadır. Ancak öğrencilerin çalışma uzayı içerisindeki dolaşımın oluşumlar ve bu oluşumlarla ilişkilendirilen kavrayışlar ile açıklanması çalışmanın sonuçlarında ele alınabilecek bu bağlamda bazı ipuçları vermiştir. Algısal kavrayışın matematiksel ilişkinin keşfinde sezgisel işlevi bulunduğu belirlenmiştir. Problem içeriği sıralı kavrayışı tanımladığında veya öğrenci sıralı kavrayış adımları bilgisine sahip olduğu durumlarda sıralı kavrayış işe koşulmuştur. Örneğin üç kenar uzunluğu verilen üçgenin geometrik inşa adımları öğretim müfredatı içinde yer almaktadır. Öğrenciler didaktik ortamlarında sahip oldukları bu bilgiye bağlı üç kenar uzunluğu verilen üçgen problemlerinde sıralı kavrayışı kullanma eğilimi göstermiştir. Araştırma da özel yetenekli öğrencilerin teorik çözüm yolu elde edemedikleri durumlarda sıralı kavrayışa yöneldikleri de belirlenmiştir. Ancak öğrencilerin bu durumlarda tam bir geometrik inşa olarak takip edilebilecek adımlar izlemediği ifade edilebilir. Araştırmanın sıralı kavrayış bulguları ifade edilen durumlar için literatür ile benzerdir (Gürhan, Tapan-Broutin, 2017, Michael, 2013). Söylemsel kavrayışın algısal kavrayışta dahil tüm kavrayışların arka planında yer aldığı görülmüştür. Bu sonuç Duval (1998)'in söylemsel kavrayışın algısal kavrayışı kapsamı bulgusu ile tutarlılık göstermektedir. Karpuz'un (2018) söylemsel kavrayış ve algısal kavrayışın birbirinin tersi olduğu görüşü ile ise farklılaşmaktadır. Burada problemlerin şekil içermediğinin bir kez daha altının çizilmesi önemlidir. Çünkü araştırmada öğrenciler hazır bir çizimi algısal olarak kavramak yerine problemdeki söylemsel ifadelere dayalı çizim gerçekleştirmişlerdir. Söylemsel kavrayış tanımlanan şekil ile ilgili tanım, teorem ve aksiyom arasında bağlantı kurmayı içeren bilişsel bir faaliyettir (Torregrosa ve Quesada, 2008). Bu ifadeden anlaşılacağı üzere algısal kavrayışta görselleştirmenin doğru gerçekleşmesi için söylemsel kavrayıştan destek alınması gerekmektedir. Duval (1998)'in görselleştirmenin her zaman muhakemeye yardımcı olmadığını belirtmesinin gerekçesini de bu bağlamda ele alabiliriz. Duval (1999)'e göre geometrik faaliyet görselleştirme ve söylemsel kavrayış arasında sürekli bir geçiş gerektirmektedir. Bu koordinasyonu sağlayan işlevsel kavrayışa bağlı farklı görselleştirmeler ortaya çıkabilir. Nitekim Duval (1998) bir figürün söylemsel kavrayışının görselleştirilmede nasıl farklılaştığını, çizimlere yansımaları sunmaktadır.

Paralelkenar olduğu belirtilen bir dörtgende çizimler köşegenlerin birbirini ortalaması, karşılıklı kenarların eşliğini vurgulayacak şekilde farklılaşmıştır. Sonuç olarak işlevsel kavrayışın şekille ilişkili tüm fiziksel ve zihinsel eylemlerde kullanıldığı tespit edilmiştir. Öğrencilerin işlevsel kavrayışı kullanmaları çoğunlukla görselleştirme ile sonuçlanmıştır. Görselleştirmeye bağlı çizimlerin nicelik ve niteliklerinin birbirinden farklılaştığı bulgular içinde sunulmuştur. Bu bulgu ve sonuçtan hareketle Duval'in (1998) alışılması gerektiğine işaret ettiği farklı görselleştirme türlerinin ayrımının işlevsel kavrayış üzerinden açıklanabileceği düşünülmektedir. Deliyianni vd. (2011) işlevsel kavrayışın geometrik şekillerin anlaşılmasında en çok kullanılan kavrayış olduğunu ortaya koyarak bu düşünceyi desteklemektedir. Duval (2017) geometrik şekillerin manipülasyonunu şekilsel işlem olarak tanımlamaktadır. Işlevsel kavrayışa bağlı olarak şekilsel işlemlerin aritmetik işlemlere nazaran daha fazla kullanıldığı ifade edilebilir.

Enstrümantal oluşum özel yetenekli öğrencilerin matematiksel çalışmalarında sınırlı kalmıştır. Matematiksel araçlar problemlerdeki potansiyellerine rağmen beklenen düzeyde kullanılmamıştır. Öğrenciler çevrelerindeki farklı nesneleri matematiksel fikirler için semiyotik arabuluculu olarak kullanılmıştır.

Briseño-Miranda ve Guzmán-Hernández (2016) teknolojinin geometrik temsillerin görselleştirilmesi için katkı sağlamasına karşılık kağıt kalemin araç olarak soyut kavramlar hakkında varsayımda bulunmak için gerekli olduğunun altını çizmişlerdir. Araştırmada da đrencilerin DGY ve somut araç kullanmalarına rağmen enstrümantal oluşumun sınırlı kaldığı görülmüştür. Problem zme süreci genellikle kağıt-kalem ile gerçekleştirilmiştir. Öğrencilerin süreçte ilk tercihleri de kağıt ve kalem ile çalışmak olmuştur. Problemin çözümünde teorik bilgiyi yapılandıramadıklarında araç kullanmaya yönelmişler, araç ile gerçekleştirilen çözüm sonrasında teorik doğrulamayı kağıt kalem ile gerçekleştirdikleri durumlar gözlemlenmiştir. Öğrenciler referans sistemine dayalı ilişki kurduklarında mkemmek çizimlere (araç ile gerçekleştirilen) ihtiyaç duymadıklarını ifade etmişlerdir. Araç ile gerçekleştirdikleri çözümün teorik olarak sağlamasını yapamadıklarında ise tamamlanmış bir çalışma gerçekleştirmediklerini ifade etmişlerdir. Dolayısı ile özel yetenekli öğrenciler de söylemsel oluşumu baskın bir muhakeme için kağıt kalemi öncelemektedir. Bu đrencilerin çalışma uzaylarında enstrümantal oluşum en az gözlemlenen oluşum olmuştur. Bu durumun sebepleri arasında her ne kadar araç kullanımına yönelik destek eğitim verilmiş olsa da bu çalışmanın

artefektleri olan pergel, cetvel, Geogebra'nın öğrenciler için enstrümana dönüşmemesi gösterilebilir. Öğrencilerin halihazırda tabi oldukları öğretim programında araç kullanımına yer verilmesine karşın öğrenciler kendilerini yetkin hissetmediklerini ifade etmişlerdir. Buna karşın öğrenciler çevrelerinde yer alan çeşitli malzemeleri teknik özelliklerinden soyutlayarak matematiksel ilişkileri açıklamak için esnek şekilde kullanabilmişlerdir. Örneğin eşit uzunluktaki kalemler ile eşkenar ve kare ilişkisinin açıklanması bu duruma örnek olarak gösterilebilir. Bu örnek detaylı incelendiğinde kalemleri kullanarak açıklama yapan öğrenci tarafından araca şekil verildiği, açıklamayı dinleyen öğrencinin düşüncesinin araç tarafından şekillendirildiği sonucuna ulaşılabilir. Guin ve Trouche (1999) birbiriyle etkileşimli araçsal oluşumun iki sürecini birbirinden ayırır. Patsiomitou & Koleza (2008) kompleks bir yapıda olan enstrümantal oluşumun belirli bir hedefe ulaşmak için aynı aracı işleyen, manipüle eden aynı amaca sahip öğrencilerin olduğu sınıflarda gerçekleşeceğini ifade etmektedir. Matematiksel araç dışındaki nesneleri kullanarak matematiksel anlamaların gerçekleştiği problem çözme oturumları bu kapsamda değerlendirilebilir.

Araştırmanın bu bağlamdaki sonuçlarına bağlı özel yetenekli öğrencilerin araç kullanmadaki yetkinliklerinden bağımsız olarak geometrik muhakeme sürecinde enstrümantal oluşumu geri plana attığı ifade edilebilir. Daha önce ifade edildiği gibi öğrenciler semiyotik ve söylemsel düzlemi kullanarak tamamlayabilecekleri matematiksel çalışmada araç kullanımını gereksiz olarak nitelendirmiştir. Öğrenciler için matematiksel araçların problem çözme sürecinde matematiksel fikirler için semiyotik bir arabulucu olmak yerine sadece ölçme aracı olarak işlev kazanması bu durumun sebepleri arasında gösterilebilir. Enstrümantal oluşumun sınırlı kalmasının bir diğer nedeni de süreçte araç kullanımına özel bir vurgu yapılmaması olarak söylenebilir. Oturumlardan sonra gerçekleştirilen görüşmeler içerisinde öğrencilere araç kullanma tercihleriyle ilgili sorular yöneltilmesine karşılık öğrenciler araştırmacının beklentilerine göre hareket etmemiştir. Araç kullanımına yönelik destek eğitimleri ve görüşme süreci sorularına rağmen araştırmacı ve öğrenciler arasında bu bağlamda didaktik bir sözleşme gerçekleşmediği ifade edilebilir. Gómez-Chacón vd. (2016b) MWS bileşenleri ile geometrik muhakemeyi inceledikleri çalışmada 14-15 yaş grubu öğrencilere önce kağıt kalem ve geleneksel araçlar sonrasında Geogebra kullanımı içeren etkinlikler uygulamıştır. Araştırma sonucunda öğrencilerin çalışma uzaylarının çeşitliliğinde öğretmen rehberliğinin önemi ortaya konmuştur. Bu araştırma öncesinde de öğrencilere

araç kullanımına yönelik eğitimler verilmiş olmasına karşılık araştırmının doğasına uygun olarak araştırmacı problem çözme oturumlarında pasif kalmıştır. Süreç içerisinde öğrencilerin rehberliğe ihtiyaç duyduğu durumlar kolaylıkla gözlemlenmiştir. Öğrencilerin oturumlar sırasında uygun dönüt ve yönlendirici sorulara ulaşmalarının önemli olduğunu belirlenmiştir. Sonuç olarak matematiksel araç kullanılan süreçte enstrümantal oluşum için öğretmen rehberliğinin önemli olduğu ifade edilebilir (Guin ve Trouche, 1999; Trouche, 2004). İlgili alan yazın incelendiğinde cebir, istatistik, geometri gibi alanlarda çeşitlenen çalışmaların teknolojinin önemine binaen enstrümantal oluşumu merkeze aldığı ve sürece rehberlik edildiği görülmüştür. Sonuç olarak araştırmının uygulanma esasları enstrümantal oluşum bulgularının literatür ile tartışılmasını sınırlandırmıştır.

Söylemsel oluşum sırasında epistemolojik düzlem aktif şekilde kullanılmış, problemlerin çözümü ile elde edilmesi beklenen ilişkilerin yapılandırılabilirdiği görülmüştür. Muhakeme için kullanılan dil formal ve informal terminolojiden oluşmaktadır. Matematiksel olarak tutarlı sonuçlar elde edilmesi ve teorik yapının muhakeme sürecinde faaliyetine rağmen matematiksel ispat dili kullanılmamıştır.

Söylemsel oluşum MWS'nin ele alınan son oluşumudur. Referans sistemi ile ispatlama arasında kurulan bu oluşuma yönelik sonuçlar özel yetenekli öğrencilerin problemlerin çoğunda epistemolojik düzleme bağlı muhakeme beklentilerinin önemli bir kısmını karşıladığını ortaya koymuştur. Benzer şekilde Yıldız (2016) üstün yetenekli öğrencilerin düşünme süreçlerinde başarılı olduklarını tespit etmiştir. Öğrencilerin problemi okudukları andan itibaren referans sistemini temel alan bir çalışma biçimi geliştirdikleri sonucu elde edilmiştir. Örneğin üçgenle ilgili problemde üçgene ait referans sistemlerinde var olan tüm bilgiyi (üçgenin elamanları, özel üçgenler, dik açılı üçgen, açı kenar bağıntıları, Pisagor bağıntısı, üçgende yardımcı elemanlar, vb.) işe koşmuşlardır. Öğrencilerin kullandıkları referans bilginin öğretim programının kapsamı ile dolayısı ile referans çalışma uzayı ile tutarlı olduğu görülmüştür. Ancak Kabilenin Güneşi probleminde olduğu gibi (dik açılı üçgende hipotenüse ait kenarortay bilgisi) farklılaşmalar da tespit edilmiştir. Öğrencinin maruz kaldığı öğretim programının içeriği dışında bir bilgiyi işe koştugu görülmüştür. Referans sistemi söylemsel oluşumda iki farklı şekilde işletilmiştir. Bunlardan ilki öğrencinin belirlediği matematiksel ilişkinin kurulduğu durumdur. Problemden elde edilen matematiksel ilişkinin ilintili olduğu teorik

bilginin referans sisteminden seçilip kullanılmasını içermektedir. Ev için arazi probleminde arazinin yamuk olduğunu belirleyen öğrenciler birbirine paralel olan kenarları belirlemek için Pisagor bağıntısına ve üçgende kenar açı ilişkisine yönelmiştir. Öğrenci kullanacağı teorik bilgiyi ayırt etmiş ve bilinçli olarak işe koşturmuştur. İkinci durumda ise öğrenci ilgili kavramla ilgili teorik sistemi sıra ile kontrol ederek uygun bilgiyi belirlemiştir. Miras Kalan Tarla probleminde yardımcı elemanın durumunun belirlenmesi amacıyla üçgen eşitsizliği, Pisagor Bağıntısı, benzerlik ilişkisinin sıra ile kullanımı örnek olarak söylenebilir. Özellikle birinci ve üçüncü grup katılımcıları arasında gerçekleştirilen diyaloglar öğrencilerin söylemsel oluşumları hakkında önemli veri sunmuştur. Problem çözme sürecinde bu etkileşim sonucunda bilişsel sıçramalar gerçekleştiği görülmüştür. Grup içi etkileşime bağlı sesli olarak gerçekleştirdikleri muhakemede birbirlerinin akıl yürütme süreçlerine dönütler vermeleri çoğunlukla problemin çözümüne yönelik ipuçları sunmuştur. Bunun yanı sıra bu etkileşim öğrencilerin hatalı akıl yürütmelerinin farkına varmasına olanak sağlamış, nadiren de olsa hatalı muhakemeye sebep olmuştur. Genel olarak grup içi diyalogun serbest bırakılmasından beklenen maksimum yararın elde edildiği ifade edilebilir. Robotti (2012)'ye göre problem çözme sürecinde doğal dil kullanıldığında öğrenciler birbirlerinin bilişsel süreçlerini desteklemektedir. Ayrıca doğal dilin bu özelliğe bağlı iletişim aracı olmasının ötesinde öğrencilerin bilişsel süreç gelişiminin incelenmesi için bir araç olduğunu ifade etmektedir. İlgili araştırmayla tutarlı sonuçlar elde edilmiştir. Öğrencilerin çözümlerini ve elde ettikleri matematiksel sonuçları akranlarına aktarmaları zihinsel olarak gerçekleştirdikleri söylemsel oluşumun belirlenmesi, söylemsel oluşuma ilişkin dilin fark edilmesinde etkili olmuştur.

Öğrencilerin kullandıkları doğal dilin niteliği incelendiğinde formal ve informal terminolojinin birlikte kullanıldığı belirlenmiştir. Günlük dile ait kavramlarla matematiksel kavramların iç içe geçtiği söylenebilir. Matematik sınıfındaki konuşmalar resmi olan ve olmayan arasında bulunmakta ve matematiksel anlama öğrenme fırsatı sunmaktadır (Ingram vd., 2023). Bu ikili dil kullanımının matematik sınıflarının doğal bir bileşeni olduğu ifade edilebilir. İnfomal terminolojinin kaynağı problemlere ait metinler, matematiksel kavram ve ilişkilere atanan günlük dile ait ifadelerdir. Problem çözme oturumlarında bu kullanım şekli muhakeme için engel oluşturmamış, öğrencilerin diyaloglarda birbirini rahatlıkla takip ettikleri gözlemlenmiştir. Benzer şekilde görüşmelerde bu dil kullanımını sürdüren öğrencileri anlama noktasında araştırmacı da

zorluk yaşamamıştır. Hem öğrenci hem de araştırmacının bilişsel olarak aynı bağlam üzerine yoğunlaşması bu durumu kolaylaştırmıştır. Matematiğe ait dili sınıf kültürünün şekillendirdiği söylenebilir. Örneğin dikdörtgen içinde “çapraz giden” ifadesi köşegeni temsil etmek amacıyla kullanılmış, araştırmacı ve diğer öğrenciler tarafından kodu köşegen olarak çözümlenmiştir. Bu dil kullanım şeklinin semiyotik olarak arabulucu rolünü yerine getirdiği sonucuna ulaşılmaktadır.

Öğrencilerin birbirlerinden etkilenmeden gerçekleştirdikleri bilişsel sıçramalar olduğu da belirlenmiştir. Bungalov Ev problemi bu sıçramaların görüldüğü problemlerden biri olmuştur. 2018 matematik öğretim programında yer alan “M.8.3.4.4. Dik dairesel silindirin hacim bağıntısını oluşturur; ilgili problemleri çözer” kazanımı içeriğinde “Dik dairesel silindirin hacim bağıntısını dik prizmanın hacim bağıntısı ile ilişkilendirmeye yönelik çalışmalara yer verilir” ifadesi yer almaktadır. İlgili kazanım yıllık planda 34. haftaya karşılık gelen 27 Mayıs-2 Haziran tarihleri arasında işlenmesi ön görülmüştür. Öğrencilerle gerçekleştirilen problem çözme oturumları ise mart, nisan ayları ve mayıs ayının ilk haftası itibari ile gerçekleştirilmiştir. Üçgen prizmanın hacim bağıntısının dikdörtgen prizma ile yapılandırılması epistemolojik bir beklenti iken silindirin üzerinden yapılandırılması bilişsel düzlemle epistemolojik düzlemin farklılaşması açısından önemlidir. Araştırmanın bu sonucu öğrencilerin özel yetenekliliği ile ilişkilendirilmiştir. Hem bu sonuç hem de tüm çalışma boyunca gözlemlenen öğrenci performansları göz önünde bulundurulduğunda özel yetenekli öğrencilerin literatürün işaret ettiği şekilde problem üzerinde hızlı eyleme geçme ve çözme, soyut fikirleri esnek şekilde kullanma ve yüksek ilişkilendirme gerçekleştirme (Van Tassel-Baska ve Stambaugh, 2008) konusunda başarılı oldukları doğrulanmıştır. Bu sonuçlar araştırmanın içeriği için özelleştirilecek olursa öğretimin öğrencilerin bilişsel düzeylerine uygun şekilde farklılaştırılmasının özel yetenekli bireylerin ihtiyaçlarını karşılama ve bunun yanı sıra gelişimleri için bir meydan okuma olanağı sunduğu ifade edilebilir. Zenginleştirme kapsamında hazırlanan geometri uygulama problemlerinin farklılaştırmaya esas olan kriterleri- kavramlara üst düzey bir yaklaşım, karmaşıklık ve soyutluk (Avcı-Doğan ve Bal-Sezerel, 2021) sağladığı belirlenmiştir.

Özel yetenekli öğrenciler gerçekleştirdikleri muhakemede teorik ve doğal dili bir arada kullanmış, teorik yapıya ağırlık vermiştir. Ancak teorik olarak yapılandırdıkları muhakemeyi ifade ederken matematiksel ispat dilini kullanamadıkları belirlenmiştir.

Benzer şekilde Winer (2017) geometrik ispat sürecindeki muhakemeyi incelediği çalışmada öğrencilerin oturumlarda ifade ettikleri tutarlı ispat gerekçelerini biçimsel olarak doğru şekilde ifade edemediklerini tespit etmiştir. Yıldırım ve Yavuzsoy-Köse (2017) dörtgen problemlerindeki matematiksel düşünmeyi inceledikleri çalışmayı sekizinci sınıfa devam eden orta ve yüksek başarılı öğrencilerle gerçekleştirmiş, öğrencilerin ulaştıkları genellemeyi sözel olarak ifade edebilmelerine karşılık cebirsel olarak ifade ederken zorlandıklarını ortaya koymuştur. Özel yetenekli öğrencilerin bilişsel olarak yeterli oldukları bilinmektedir. Bu durumunun nedeni olarak aksiyomatik yapıda ispat gerçekleştirme tecrübelerinin olmaması gösterilebilir. Kulm (1984)'un özel yetenekli öğrenciler için geometri eğitiminin zenginleştirilmesi üzerine gerçekleştirdiği çalışmanın sonuçları da benzerdir. Ancak bu araştırmanın üzerinden geçen yaklaşık kırk yıllık zaman içerisinde özel yetenekli öğrencilerin aksiyomatik ispat gerçekleştiremiyor oluşu da üzerinde düşünülmesi gereken önemli bir noktadır.

Gómez-Chacón vd. (2016b) söylemsel oluşumla ilgili zorlukları öğrencilerin argümantasyon sürecinde yeterince deneyim sahibi olmamalarından kaynaklanan söylemsel oluşuma içsel ihtiyaç duymamalarına ayrıca akıl yürütmenin geometrik muhakeme sürecindeki işlevini fark edememelerine dayandırmıştır. Sonuç olarak özel yetenekli öğrencilerin matematik içinde tutarlı söylemler geliştirdikleri buna karşılık söylemsel oluşumu potansiyelleri ölçüsünde ifade edemedikleri belirlenmiştir. Araştırmanın katılımcılarının en az beş yıl boyunca BİLSEM'e devam ettikleri göz önünde bulundurulduğunda bu konudaki tecrübelerinin beklenen düzeyde olmaması, üzerinde düşünülmesi gereken husustur. Sak vd. (2015) BİLSEM'lerde verilen eğitimde ders içeriklerinin öğretmenlerin inisiyatifine bırakılması, eğitimci kalitesinin düşük olması ve program çerçevelerinin kurumlar arası tutarlı olmamasına bağlı eğitimin düşük olduğunu ifade etmektedir. Araştırmanın bu sonucu detaylı ve farklı bir çalışma konusu olmakla beraber Sak ve arkadaşlarının ifade ettiği duruma bağlı olduğu düşünülebilir.

Özel yetenekli öğrencilerin matematiksel çalışma karakterinde semiyotik ve söylemsel oluşum öne çıkmıştır.

Yukarıda ifade edilen durumla birlikte özel yetenekli öğrencilerin geometri problemleri üzerinde çalışma alışkanlıkları değerlendirildiğinde temsil ve referans sistemini esas alan bir çalışma karakteri ortaya çıkmıştır. Bu durumun temel sebebi olarak öğrencilerin okul ortamında karşılaştıkları matematik öğretme ve öğrenme kültürünün yapısı gösterilebilir.

Karahan (2021) 3., 4., ve 5. sınıf ders kitaplarını MWS kapsamında incelemesi sonucunda semiyotik-söylemsel düzleme daha fazla yer verildiğini belirlemiştir. Kaya vd. (2023) Türkiye’de okutulan ders kitapları ve liselere geçiş merkezi sınav sorularını geometri alanında içerik analizine tabi tuttıkları çalışmanın sonuçları ise en çok söylemsel kavrayışın vurgulandığını ortaya koymaktadır. Araştırmanın yürütüldüğü 8. sınıf öğrencilerinin eğitim öğretim sürecinin sonunda girecekleri LGS için hazırlanmalarının altının çizilmesi gerekmektedir. Ayrıca bu durum öğrencilerin sayısal sonuca ulaşma isteğini de açıklamaktadır. Ancak öğrencilerle gerçekleştirilen oturum sayısı arttıkça sayısal sonuçtan ziyade geometrik yapı içerisinde tutarlı sonuç elde etmeye çalışılan durumlar olduğu belirtilmelidir. Öğrencilerin bu yönelimlerinde oturum sonunda gerçekleştirilen görüşmeye ait sorularının etkili olduğu düşünülmektedir. Buradan öğrencilerin matematiksel çalışma içerisinde argüman geliştirme, buldukları matematiksel durum ve ilişki üzerine düşünme farkındalıklarının olduğu sonucu çıkarılabilir. Artefekt kullanımının sınırlı olmasının nedeni olarak da benzer şekilde matematiksel araçların öğrencinin çalışma ortamlarının bir parçası olarak yerleşmemesi söylenebilir. Araştırmacının enstrümantal oluşuma yönelik kaygısı ile gerçekleştirilen destek eğitimler matematiksel araç kullanımının öğretim sürecinin bir parçası olarak işlev kazanması için yeterli olmamıştır. Bu noktada Türkiye’de 2010 yılında çalışmaları başlatılan ve 2012’de uygulamaya geçirilen FATİH Projesi’ne rağmen eğitimde teknoloji kullanımının geçen on iki yıl içerisinde istenilen seviyeye gelmemiş olması da dikkat çekicidir. Diğer taraftan matematik öğretiminde araç kullanımına yönelik çalışmaların alan yazında önemli bir yer etmesine karşılık uygulamada istenilen düzeyde olmadığı aşıkardır. Bu bakımdan 2024 yılında yayımlanan Maarif Modeli Öğretim Programı’nda kademeli olarak uygulamadan kaldırılacak 2018 öğretim programı ve daha önceki programlarda görmediğimiz bir beceri olarak “matematiksel araç ve teknoloji ile çalışma” becerisine yer verilmesi önemli görülmektedir. Programda matematiksel araç ve teknoloji kullanımı öğretmenin tercihine bırakılmamış, öğretim sürecinin bir parçası haline getirilmiştir. Geometri bağlamında gerçekleştirilen bu çalışmaya ait bulgular araç-gereç kullanımının öğretimsel amaca hizmet etmesi için öğretmen mentörlüğüne ihtiyaç duyulduğunun bir kez daha altını çizmiştir. Maarif Modeli Öğretim Programı’nın bu beceriyle somut araç ve teknolojinin dikkat çekmek, ölçüm yapmak gibi işlevlerinin çok daha ötesinde bir potansiyelde kullanılmasının önünü açacağı, öğrencilerde enstrümantal oluşumu destekleyeceği beklentisi oluşmuştur.

Öğrencilerin yürüttükleri geometrik muhakemede özel yetenekliliğe bağlı bilişsel ilerleyiş süreçlerinin takibini beklenen düzeyde gerçekleştirmedikleri görülmüştür. Bu sonuç öğrencilerin akıl yürütme sürecini aktarmaları üzerinde etkili olmuştur.

2024 Maarif Modeli Öğretim Programı matematik alan becerilerinden biri de matematiksel muhakemedir. Geometri özelinde muhakemenin incelendiği bu çalışmada öğrencilerin gerçekleştirdikleri muhakeme sürecine ilişkin farkındalıklarının beklenen düzeyde olmadığı ifade edilebilir. Diğer bir deyişle öğrencilerin çoğunlukla kendi bilişsel sistemlerinin işleyişi hakkında düşünmedikleri, üstbilişsel bilgiye sahip olmadıkları görülmüştür. Öğrenci özelinde muhakeme sürecini gerçekleştirdiği eylemler, çizdiği şekil ve kullandığı matematiksel ilişkiler üzerinden detaylı şekilde aktaran öğrenciler bulunmaktadır. Ancak genele baktığımızda problemi doğru şekilde çözmüş veya çözümünü anlamış bile olsa hatırlayamadıkları durumların olduğu ve süreci bilişsel bütünlük içinde aktaramadıkları belirlenmiştir. Özel yetenekli öğrencilerin yaşlarına göre daha fazla üstbilişsel beceriye sahip oldukları bilinmektedir (Callahan ve Miller, 2005). Süreçten ziyade sonuç odaklı problem çözme yaklaşımının bu sonuç üzerinde etkili olduğu, okul paradigmasının ve sınav odaklı öğretim sürecinin bu sonucu ortaya çıkardığı söylenebilir. Eğitim ve öğretim sürecinde öğrencilerin süreçte nasıl düşündüğünün üzerine düşünceleri önemli olmasına rağmen gerekli önemin verilmediği ifade edilebilir. Eğitime yeni bir paradigma ile yaklaşan Maarif Modeli kapsamında ele alınan muhakeme becerisinin ve bütünleşik becerilerin (çözümleme, yorumlama, çıkarım yapma, matematiksel doğrulama-ispat yapma) uygulanmasıyla öğrencilerin kendi akıl yürütmelerine ilişkin farkındalıklarının artacağı düşünülmektedir. Programın nitelikli uygulanması sonucunda sınıf içerisinde oluşan iklimin öğretmen ve öğrenci arasındaki didaktik sözleşmeyi bu yönde etkilemesi beklenmektedir.

MWS araştırmanın nihai amacı olan geometrik muhakemenin açıklanmasında etkili bir araç olmuştur. Yatay düzlemleri, düzlem bileşenleri, düzlemler arası oluşumlar, köken aldığı teoriler gibi kapsamlı yapısı ile araştırmanın detaylı analizine olanak sağlamıştır.

MWS, öğrencilerin sınıf ortamında gerçekleştirdikleri matematiksel çalışmayı sadece doğru cevaba ulaşıp ulaşılmadığı gibi sınırlı bir değerlendirme perspektifinden çıkararak detaylı şekilde inceleme olanağı sunmuştur. Teorinin çok kavramlı yapısına karşılık uygulamada hem araştırmacıya matematiksel çalışmanın bileşenleri için rehberlik etmiş

hem de bütüncül bir bakış açısı sağlamıştır. Araştırma bulguları teorinin özel yetenekli öğrencilerin temsil, matematiksel araç ve teorik yapıyı kullanma potansiyellerini ortaya koyduğunu, tüm bunların toplamı ile de geometrik muhakemenin yorumlanabildiğini göstermiştir. Araştırmadan elde edilen bu sonuç teorinin başka teoriler ve çeşitli bağlamlarda çalışılma (Kuzniak vd., 2016a) iddiasını doğrulamaktadır. İmamoğlu vd. (2023) geometri alanında gerçekleştirdikleri çalışmayla teorinin geometri dersinin geliştirilmesi ve değerlendirilmesi için yararlı olduğunu ifade etmişlerdir. Bu duruma olanak sağlayan yapının araştırmacıya bilimsel dayanak sağlayan epistemolojik düzlem ve öğrenci çalışmalarını ayırt etmeye olanak sağlayan bilişsel düzlem olduğu ifade edilebilir. Güncel çalışmada araştırmacının öğrenci çalışma uzaylarından beklentisi epistemolojik düzleme göre belirlenmiştir. Bu bağlamda araştırma problemlerinin potansiyelleri belirlenebilmiştir. Öğrenci eylemleri ise bilişsel düzlem içerisinde sınıflandırılabilmiştir. Geometrik muhakemeyle ilişkili potansiyel matematik çalışma uzayı ve gerçek çalışma uzayı arasındaki fark gerekçeleri ile ortaya konulabilmiştir. Lagrange vd. (2022) MWS'nin üç boyutunun matematiksel modellemenin bir çeviri ve bir dile indirgenmesinin önüne geçeceğini ifade etmiştir. Bu araştırma her ne kadar matematiksel modelleme içerisinde tasarlanmasa da gerçek yaşam bağlamları içeren problemlerin her birinin geometri alanı içerisine entegre edilmesi beklenmiştir. Öğrencilerin gerçeklik içinde ifade edilen duruma ilişkin matematiksel temsilleri (yatay matematikleştirme) semiyotik oluşum sayesinde kapsamlı şekilde irdelenebilmiştir. Epistemolojik ve bilişsel düzlem bileşenleri ve bu düzlemlerin artikülasyonunu sağlayan oluşumlar ile dikey matematikleştirme olarak tanımlanan matematiksel dolaşım ele alınmıştır. Bu yönüyle ele alındığında MWS'nin modellemede gerçek yaşamdan matematik alanına çeviriden daha fazlasına olanak sağladığı söylenebilir.

Panqueban vd. (2024) teorinin kullanıldığı çalışmaların sistematik analizini gerçekleştirdikleri araştırmada teori bileşenlerinin farklı sınıf seviyeleri, eğitim paydaşları ve bağlamlarda etkili olduğunu ortaya koymuşlardır. Araştırmacılar çalışmaların % 56'lık bir oranla kişisel çalışma uzayına yönelik gerçekleştirildiğini ortaya koymuşlardır. Araştırmaların % 4'ü referans-uygun, % 1'i uygun- kişisel çalışma uzayı kapsamında gerçekleştirilmiştir. Mevcut çalışmada özel yetenekli öğrencilerin geometrik muhakemelerinin odak noktası olmasına bağlı bu çalışmanın da bir yönü ile kişisel çalışma uzayını irdelediği kabul edilebilir. Bu açıdan çalışmanın literatürün güncel analizi ile tutarlılık gösterdiği ifade edilebilir.

MWS'nin oluşum bileşenlerinin şekilsel Kavrayış Teorisi'nin algısal sũreçleriyle desteklenmesi sonucunda geometrik çalışma için özelleştirilmiş bir yapı ortaya çıkmıştır.

Geometrik muhakemenin esas alındığı bu çalışmada Matematik alışma Uzayı'nın şekilsel Kavrayış Teorisi'nin bilişsel dũzlemini kullanmasından (Kuzniak, 2011) yola çıkılarak teorik ereve oluşturulmuştur. Çalışmanın niteliğine pozitif katkı sağlayacağı beklentisi ile MWS'nin oluşumları ile şekilsel Kavrayış Teorisi'nin algısal sũreleri literatũrũn bir yorumu olarak eşleştirilmiştir. Mevcut araştırma sonuçları kavramsal olarak uyumlu bu iki teorinin geometri alanında birlikte kullanılabileceği sonucu elde edilmiştir. Her iki teorinin Fransız didaktiği geleneğinin bir parçası olması, ortak paradigmayı kullanmaları bu durumun nedenleri arasında gösterilebilir. Bunun yanı sıra elde edilen bulgular bu iki teorinin diğer bileşenlerinin de ahenk içerisinde çalıştığını ortaya koymuştur. şekle bakma sũreleri olarak da tanımlanan algısal sũrelerin her biri ayrı ayrı çalışma alanı olan semiyotik, enstrũmantal ve söylemsel oluşum başlıkları içerisinde ngrũldũėũ şekilde çalıştığını belirlenmiştir. Teorilerin entegre edildiği ereve matematiksel çalışmanın detaylı analizine olanak sağlamıştır. Algısal sũrelerle ilgili ne çıkan ğrenci eylemleri oluşum sũrelerinin geometride spesifikleştirilmesine olanak sağlamıştır. Bunun yanı sıra algısal sũrelerin MWS ile birlikte geometri alanında çalışılması sonucunda özellikle işlevsel kavrayışın rolũnũn belirginleştiği de ifade edilebilir. İşlevsel kavrayışa ait sonuçlar ayrıca tartışılmıştır.

Problem özme sũrecinde öğrencilerin benzer hatalar gerçekleştirdikleri, problemleri benzer yaklaşımla ele aldıkları belirlenmiştir.

Öğrencilerin matematiksel çalışma uzayları sũrete belirlenen hatalar için incelendiğinde birbirine benzer hatalar gerçekleştirdikleri belirlenmiştir. Kabilenin Gũneři probleminde yerleşkenin ũgenin içine yerleştirmek, Otlak Alanı probleminde dairenin alanından dikdörtgenin alanını çıkarmak, Bereket Motifi probleminde alanı sadece köşegen uzunlukları ile hesaplamaya çalışmak, aynı problemde benzer dörtgenin kenar uzunluğunu benzerlik oranı kullanmadan hesaplamak, Kırık Seramik probleminde çatlama noktasını köşegen ũzerinde yapılandırmak şeklinde örneklendirilebilir. Tũm ğrencileri kapsamasa da aynı durumda benzer hataların gerçekleştirilmesi öğrencilerin geometrik kavram ve ilişkileri benzer bağlamlarda öğrenmesi ile ilişkilendirilmiştir. Öğrencilerin matematiksel çalışmada yaşadıkları zorlukların problemleri ele alma

biçimlerinin benzerliğinden kaynaklandığı ifade edilebilir. Kuzniak ve Nechache (2021) öğrencilerin gerçek uygulamalarda ortaya koydukları zorlukları anlamak için “okul paradigmasının” önemini vurgulamaktadır. Başka bir deyişle öğrencilerin gerçekleştirdikleri hataların okullarında aldıkları eğitim ve bu eğitime bağlı oluşan şemalar perspektifinden de incelemek faydalı olacaktır. Renzulli (1986) özel yetenekliliği okul üstün yetenekliliği dışında yaratıcı üstün özel yeteneklilik ile el almaktadır. Bu açıdan çalışma sonuçları değerlendirildiğinde ise katılımcı öğrencilerin problem çözümlerine ilişkin kendilerinden beklenen yaratıcılığı göstermedikleri belirlenmiştir. Öğrencilerin problem çözme oturumlarında yüksek düzeyde motivasyon göstermelerine karşılık yaratıcılık boyutunun işe koşulmaması okul üstün yetenekliliğinin öne çıktığı şeklinde yorumlanmıştır.

Araştırmada geliştirilen problemlerin düzlemler arası dolaşımı sağlayan eksiksiz matematiksel görevler olarak işlev kazandığı belirlenmiştir. Problemlere ait gerçek yaşam bağlamlarının problemlerin epistemolojik düzleminin öğrenciye örtük olduğu bir yapı sunduğu belirlenmiştir.

Araştırmada kullanılan uygulama problemleri eksiksiz matematiksel görev işlevi kazanacak şekilde tasarlanmıştır. Uygulama problemleri için pilot uygulamalar gerçekleştirilse de asıl sonuçlar ana uygulamalardan elde edilmiştir. Çalışmanın sonucunda tüm problemlerin öğrencilerin epistemolojik ve bilişsel düzlem arasında dolaşımına imkân tanıdığı, farklı çalışma uzayları oluşturduğu belirlenmiştir. Problemler salt otantik gerçek yaşam durumları üzerine kurgulanmasa da barındırdığı gerçek yaşam bağlamları öğrenciler tarafından kabul görmüştür. Sonuç olarak sunulan bağlam Heuvel-Panhuizen (2000) tarafından ifade edilen öğrenci bilişsel sistemi içerisinde gerçeklik zeminine oturtulmuştur. Ancak çözüm sürecinde gerçek yaşam koşulları göz ardı edilmiş ve salt matematik içerisinde bir çalışma gerçekleşmiştir. Çalışmanın matematik dersi kapsamında gerçekleştirilmesi bu sonucun sebeplerinden biridir. Ancak temelde bu sonuç öğrencilerin gerçek yaşam koşullarının hesaplamalara dahil edildiği bir çözüm süreci inşa edemeyeceklerini ifade etmeleriyle ilişkilidir. Örneğin Otlak Alanı probleminde merayı düzlem olarak kabul etmezlerse problemi çözemeyeceklerini ifade etmişlerdir. Öğrencilerin bu ve buna benzer durumları çözüm içerisinde göz ardı edecekleri beklentisiyle hareket edilmiştir. Araştırma bulguları da öğrencilerin gerçek yaşam değişkenlerini fark ettiklerini ama çözüm sürecinde değerlendirmeye almadıklarını

göstermiştir. Bu durumla ilgili araştırma süreci içerisinde bir engelle karşılaşılmamış olsa da problemlerin bu tasarımının özel yetenekli öğrenciler için zorluk oluşturma durumunun ihmal edildiği fark edilmiştir. Özel yetenekli öğrencilerin akranlarından farklı olarak detayları fark etmeleri olasıdır. Özetlemek gerekirse problemler bu hali ile planlanan şekilde çalışmıştır. Gerçek yaşam bağlamları problemlerde verilmek istenen ama doğrudan matematiksel dille ifade edilmek istenmeyen geometrik kavram ve ilişkileri aktarmada etkili olmuştur. Bu sayede öğrencinin bilişsel sisteminin sınırları belli olan çalışma uzayı oluşturmalarının önüne geçildiği söylenebilir.

5.2 Öneriler

Araştırmadan elde edilen bulgular ve bulguların literatür ile karşılaştırılması sonucunda alana, matematik eğitimcilerine ve ileride yürütülebilecek çalışmalara yönelik önerilerde bulunulmuştur.

5.2.1 Uygulamaya yönelik öneriler

1. Araştırmada geometrik muhakeme süreci geometrik şekil uyararı ile başlatılmayan bir süreç olarak incelenmiştir. Öğrencilerin kendi çizdikleri şekil üzerinden yürüttükleri muhakemenin incelenmesi sonucunda şeklin muhakemede ki rolüne ilişkin önemli bulgular elde edilmiştir. Öğrencilerin geometrik kavramlara ait algısal kavrayışları, kavramlar arası ilişkilendirme, geometrik şekil ve kavramları temsil etme yeterlikleri, kavram imajları ve kavram yanılgıları bunlardan bazıları olarak ifade edilebilir. Bu nedenle geometri alanında eğitim ve öğretim içerisinde öğrencilerin kendi çizimlerini yapmalarına daha fazla imkân tanınmasının faydalı olacağı düşünülmektedir.
2. Öğrencilerin geometri problemlerini çözerken çok sayıda şekil çizdikleri belirlenmiştir. Öğrencilerin çizdikleri şekil üzerinde çizimler yapması veya sıfırdan çizimler gerçekleştirmesi görselleştirme ile ilişkilidir. Süreçte görselleştirme sezgisel bir destek sağlamasının yanı sıra keşifsel, doğrulama, ispat gibi amaçlarla gerçekleşmiştir. Diğer bir deyişle öğrencileri görselleştirmeye götüren nedenlerin çok çeşitli olduğu görülmüştür. Öğrencilerin sadece görselleştirme ile tüm muhakeme sürecini aktarabilme kapasitesi olduğu ifade edilebilir. Bu nedenle görselleştirmeyi bir çizim eylemi olarak değil matematiksel çalışmanın muhakemeyle ilgili kanıtlar sunan bileşeni olarak tanımlayabiliriz. Bu sebeple öğrenci çizimlerinin

arkasındaki matematiksel fikrin ortaya konulmasının öğretmene ipuçları sunması açısından önemli olduğu düşünülmektedir.

3. Semiyotik oluşum içinde ele alınan sembolik temsil geometri gibi uygun bir alan içerisinde oldukça sınırlı kullanılmıştır. Bazı öğrencilerin yüksekliği kullandıkları, paralellikten yararlandıkları ancak sembolik olarak ifade etmedikleri belirlenmiştir. Çokgenlerle ilgili hiçbir sembolik temsil kaydı oluşmamıştır. Öğretim programı temel geometrik kavramların (doğru, doğru parçası, ışın, açı) ve geometrik ilişkilerin (diklik, yükseklik, paralellik, eşlik ve benzerlik) sembolik gösterimini vurgulamaktadır. Sembolik temsillerin doğru kullanımlarının ölçme ve değerlendirme içinde yer aldığı da bilinmektedir. Ancak öğrencilerin sembolik temsili geometrik bir çözümün parçası haline getirmediği söylenebilir. Geometrik kavramlara ait semboller sadece kavramlarla ilişkilendirilerek sınırlandırmak yerine tüm geometri öğretiminin bir parçası haline getirmek gerekmektedir. Örneğin doğru parçasının sembolik gösterimi sadece doğru parçasının öğretimi ile sınırlandırılmamalı, üçgen ve dörtgen gibi geometrik şekiller üzerinden de verilmelidir. Bu şekilde hem çokgeni oluşturan alt boyuttan yapıların fark edilmesi (boyutsal yapı söküm) sağlanmış olacaktır hem de sembollerin kullanım alanının uygulamalar ile çeşitlenmesi sağlanacaktır.

4. Temel geometrik şekillerin öğretimi sırasında prototip kullanımı yaygındır. Geometrik şekillerin doğası gereği ilk öğretimleri sırasında kavramsal bir yaklaşım uygulanmadığı için prototip kullanımı ile şeklin imajı üzerinden tanınırlık sağlanmaktadır. Ancak eğitimin ilerleyen yıllarında geometrik şekillerin öğretiminde prototip kullanmaya devam etmek şekillerin matematiksel arka planını yansıtmadaki yetersizliğinden dolayı kavram yanlışlarına sebep olmaktadır. Öğrenci çizimleri ve söylemleri incelendiğinde katılımcıların prototip çizimler gerçekleştirdiği, bazı öğrencilerin prototipe bağlı kavram yanlışları olduğu görülmüştür. Öğrencilerden çoğunun eşkenar dörtgen ve paralelkenar arasındaki hiyerarşiyi kuramadıkları belirlenmiştir. Pek çok öğretmenin geometri öğretimleri sırasında kullandığı prototip çizimlerin sebep olduğu kavramsal sınırlılıklar, kavram yanlışları gibi dezavantajların farkında olmadığı söylenebilir. Geometri eğitimi alanında farklı kültür ve ülkede gerçekleştirilen araştırmalar

prototip kullanımının benzer sonuçlarını rapor etmektedir. Öğretim süreci, ders kitapları, etkinlikler ve dijital eğitim içeriklerinin hazırlanması sırasında geometrik şekillerin prototip olmayan çizimleri ile çeşitlendirilmesi önerilmektedir.

5. Araştırma sonuçları matematiksel araç gereç ve teknoloji kullanımının beklenen düzeyde gerçekleşmediğini ortaya çıkarmıştır. Enstrümantal oluşuma yönelik bu sonucun gerekçeleri detaylı şekilde irdelenmiştir. Bu durum için Maarif Modeli Öğretim Programı'nın kavramsal öğrenmeyi esas alan, geometrik oluşum temelli bir yaklaşım benimsediği görülmektedir. Programın uygulayıcısı olan öğretmenlerin geometri eğitiminde getirilen bu yeni yaklaşımın altında yatan nedenleri özümsemesi gerekmektedir. Artefektlerin dikkat çekmek, demonstrasyon veya doğrulama için kullanımı gibi özellikleri olsa da geometrik muhakeme sürecinde farklı bir bağlamla ele alınması beklenmektedir. Matematiksel fikirler için bir araç olarak işe koşulmasına özen gösterilmelidir. Öğrencilerin araç ile matematiksel bir çözüm süreci gerçekleştirmeleri için öğretmen rehberliğinin önemli olduğu bilinmektedir. Sonuç olarak öğrencilerin daha fazla matematiksel araç ve teknoloji ile çalışmalarına olanak sağlanması, böyle bir öğretimin kavramsal anlamayı sağlayacak şekilde tasarlanması ve süreçteki kritik noktalarda öğretmen desteğinin verilmesi önerilmektedir.
6. Öğrencilerin problem çözme alışkanlıklarının söylemsel oluşum süreçlerini etkilediği görülmüştür. Öğrenciler problemi çözdükten sonra sayısal sonucuna ulaştıran işlem adımlarını açıklama davranışı göstermiştir. Problem çözerken gerçekleştirilen ilişkilendirme, kullanılan teorik bilgi, elde edilen genel matematiksel sonuç sözel olarak ifade edilmiştir. Bazı durumlarda ise söyleme yönelik gerçekleştirilen akıl yürütme görüşme sırasında ortaya çıkmıştır. Ancak öğrenci çalışma kağıdına beklenildiği gibi aktarılmamıştır. Öğrencilerin akıl yürütme süreçlerini matematiksel tutarlılık içinde gerekçelendirerek aktarmalarının, öğrencinin kendi çözümü üzerinde düşünmesinin ve çözümlerini matematiksel temsilden yararlanarak yazmalarının önemli olduğu düşünülmektedir.

5.2.2 İleride yapılabilecek araştırmalara yönelik öneriler

1. Bu çalışmada görselleştirme MWS ve Şekilsel Kavrayış Teorisi'nin sınırları içerisinde ele alınmıştır. Duval (1999) görselleştirmenin görme gibi basit bir eylem olmadığını ifade etmektedir. Görselleştirme somut çizimlere ihtiyaç duymadan zihinsel olarak da gerçekleşebilen derinlikli bir yapıya sahiptir. Şekilsel Kavrayış Teorisi görselleştirmeyi açıklamak için şekle bakma süreçlerini (bu çalışmada algısal süreçler) tanımlamaktadır. Görselleştirme bu süreçler ve epistemolojik düzleme bağlı gerçekleşen oluşumlarla incelenmiştir. Bu detaylı analizler görselleştirmenin ve görselleştirmeyle ilişkili olabilecek parametrelerin ayrıca çalışılması gerektiğini ortaya koymuştur. Duval görselleştirmeyle ilgili tanımlamaları bir çalışmaya bağlı gerçekleştirmemiştir. Bu çalışmanın sonuçları tutarlılık gösterme eğiliminde olsa da farklı çalışmalar ile görselleştirmenin rolünün belirlenmesi önerilmektedir.
2. Özel yetenekli öğrencilerin geometrik muhakeme süreçlerinin incelendiği çalışma sonucunda öğrencilerin genel eğilimlerinin semiyotik-söylemsel düzlemde çalışma gerçekleştirdiği belirlenmiştir. Bu çalışma karakterinin ortaya çıkmasında matematiksel araçların öğrenciler için enstrümana dönüşmemesi etkili olmuştur. Araçla çalışma gerçekleştirdikleri durumda da öğretmen rehberliğine ulaşamamışlardır. Eğitimde teknoloji kullanılan çalışmalar genellikle öğretim sırasında öğrenci öğretmen etkileşimini içermektedir. Dolayısı ile öğretmenin ipuçları ve dönütlerini içeren bir çalışma uzayında özel yetenekli öğrencilerin geometrik muhakemelerinin incelenmesi önerilmektedir.
3. MWS'nin üzerine tanımlandığı epistemolojik ve bilişsel düzlemler arası dolaşımın sıklığının işlevsel kavrayışa bağlı olduğu belirlenmiştir. Algısal süreçlerle ilgili gerçekleştirilen çalışmalar işlevsel kavrayışın muhakemede rolünün belirginleştirilmesi gerektiğini ifade etmektedir. Güncel araştırmayla işlevsel kavrayışın epistemolojik düzlem bileşenlerine bağlı farklılaştığı, Duval'ın (1994) tanımlandığı işlevsel kavrayış eylemlerinin çok daha çeşitli olduğu belirlenmiştir. İşlevsel kavrayışa bağlı şekil üzerinde gerçekleştirilen eylemlerin ve işlevsel kavrayışı ortaya çıkaran durumların gerçekleştirilecek çalışmalarla ayrıca incelenmesi önemli görülmektedir.

4. MWS'nin kökleri her ne kadar geometriye dayansa da gerçekleştirilen literatür taraması geometri alanında sınırlı sayıda çalışma olduğunu ortaya koymuştur. Bu çalışmaların çoğunun teoremin erken zamanlarında ve geometrik paradigmlar kapsamında çalışıldığı görülmüştür. Geometrinin matematik tarihindeki ve kendi ait teoremleri, kavramları, cebir- aritmetikle ilişkisine bağlı matematik içindeki yeri geometriyi ayrıcalıklı bir yere taşımaktadır. Geometrik düşünme matematiksel düşüncenin başlangıcı olarak ele alındığında bu alanda gerçekleştirilecek çalışmalara hala ihtiyaç duyulduğunu rahatlıkla ifade edebiliriz. Teorinin ortaya konulduğu tarihten itibaren güncel çalışmalarla desteklendiği, hem bu çalışma hem de uygulamaya yönelik çalışmalarla sınıf matematiğinde pek çok amaca hizmet eden etkili bir araç olduğu ortaya konmuştur. Doğrudan MWS bileşenlerine yönelik geometri öğretim süreçleri planlanabileceği ve uygulanabileceği düşünülmektedir.
5. Özel yetenekliliğin tanımı, kapsamı, eğitim standartları literatürde önemli bir çalışma alanı haline gelmiştir. Özel yetenekliliğin sınırları belli bir tanımlı yapılamasa da bilişsel açıdan akranlarından ileride oldukları ve soyut düşünebildikleri rahatlıkla söylenebilir. Matematiğin soyut yapısı göz önünde bulundurulduğunda öğrencilerin bilişsel yeterlilikleri gereği matematiksel kavram ve ilişkileri rahatlıkla zihinlerinde somut bir zemine oturtabilmeleri (*reification*) beklenmektedir. Araştırma öğrencilerin saf matematiksel bir muhakeme süreci, aksiyomatik bir ispat gerçekleştiremediklerini ortaya çıkarmıştır. Bu bağlamdan hareketle matematiksel sembolik dilin kullanıldığı, teorik yapının vurgulandığı aksiyomatik bir ispat sürecine yönelik öğretim sonucunda özel yetenekli öğrencilerin muhakemelerinin incelenmesi önemli görülmektedir.
6. Maarif Modeli Öğretim Programı'nın bu çalışmada esas alınan muhakeme, temsil, matematiksel araç kullanımı gibi kavramlarla yakından ilişkili bir doğaya sahip olduğu görülmüştür. Araştırmanın gerçekleştirildiği grup 2018 programına tabi olmaları bakımından bu açıdan bir değerlendirme yapılamamıştır. Maarif Modeli'ne tabi olan öğrencilerle gerçekleştirilecek bir çalışmayla muhakeme, temsil, araç kullanımı, ispat süreçlerinin incelenebileceği düşünülmektedir.

KAYNAKÇA

- Akar, H. (2019). Durum çalışması. İçinde A. Saban ve A. Ersoy (Ed.), *Eğitimde nitel araştırma desenleri* (1. Basım, ss. 139-177). Anı yayıncılık.
- Akdemir, M. (2022). *Ortaokul öğrencilerinin çokgenler konusundaki geometrik muhakemelerinin incelenmesi* (Yayın Numarası: 753433) [Doktora tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi]. Ulusal Tez Merkezi.
- Akkaş, E. ve Tortop, H. S. (2015). Üstün yetenekliler eğitiminde farklılaştırma: temel kavramlar, modellerin karşılaştırılması ve öneriler. *Journal of Gifted Education and Creativity*, 2(2), 31-44. DOI: 10.18200/JGEDC.2015214250
- Almonacid-Adriano, I. A. (2018). *Modelización de funciones cuadráticas: Espacio de trabajo matemático personal de estudiantes de humanidades* (Publication No: 27751914) [Doctoral dissertation, Pontificia Universidad Catolica del Peru]. ProQuest Dissertations and Theses Global.
- Alphayta, B. (2022). *8.sınıf öğrencilerinin geometrik muhakeme becerileri ile öz-yeterlik algıları arasındaki ilişkinin incelenmesi* (Yayın Numarası: 7156667) [Yüksek Lisans tezi, Ordu Üniversitesi]. Ulusal Tez Merkezi.
- Artigue, M. (2016). Mathematical working spaces through networking lens. *ZDM*, 48(6), 935-939. DOI 10.1007/s11858-016-0810-z
- Avcı-Doğan, G. ve Ateşgöz, N. (2021). Özel yeteneklilerin eğitim modelleri. İçinde M.A. Melekoğlu ve U. Sak (Ed.), *Öğrenme güçlüğü ve özel yetenek* (5. Basım, ss.179-196). Pegem Akademi. DOI 10.14527/9786053188049
- Avcı-Doğan, G. ve Bal- Sezerel, B. (2021). Özel yeteneklilerin eğitiminde öğretim programının farklılaştırılması. İçinde M.A. Melekoğlu ve U. Sak (Ed.), *Öğrenme güçlüğü ve özel yetenek* (5. Basım, ss.197-215). Pegem Akademi. DOI 10.14527/9786053188049
- Bacelo, A. and Gómez-Chacón, I. M. (2023). Characterising algorithmic thinking: A university study of unplugged activities. *Thinking Skills and Creativity*, 48, 101284. <https://doi.org/10.1016/j.tsc.2023.101284>
- Baki, A. (2020). *Matematiği öğretme bilgisi* (3. Baskı). Pegem Akademi. DOI 10.14527/9786052410318
- Barrera, R.(2013,February 6-10). *On the geometrical meanings of multiplication: geometrical work space, semiotic mediation and students' chosen paths* [Paper Presentation]. Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8), Manavgat-Side, Antalya, Türkiye.
- Batdal-Karaduman, G. (2012). *İlköğretim 5. sınıf üstün yetenekli öğrenciler için farklılaştırılmış geometri öğretiminin yaratıcı düşünme, uzamsal yetenek düzeyi ve erişime etkisi* (Yayın Numarası: 351574) [Doktora tezi, İstanbul Üniversitesi] Ulusal Tez Merkezi.
- Batdal-Karaduman, G. ve Davaslıgil, Ü. (2020). Üstün zekâlı ve yetenekli öğrenciler için yaratıcı düşünme ve uzamsal yeteneği destekleyen farklılaştırılmış geometri öğretimi (2. Baskı). Pegem Akademi. DOI. 10.14527/9786257880237

- Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester (Eds.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843–908). NCTM.
- Bogdan, R. C. ve Biklen, S. K. (2022). *Eğitimde nitel araştırma: teori ve metodlara giriş*. (S. Balcı ve B. Ahi, Çev.; 5. Baskı). Pegem Akademi. (Orijinal yayın tarihi 1997).
- Briseño-Miranda, C., & Guzmán-Hernández, J. (2016,3-6 November). *Visualización Y Análisis De Representaciones Geométricas= Visualization and Analysis of Geometric Representations* [Paper presentation]. North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 38th Annual Meeting, Tuscon, Arizona, United States. ED583699
- Brousseau, G. (2002). *Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des Mathématiques 1970-1990* (19), (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield, Trans.). Kluwer Academic Publishers.
- Brousseau, G., & Warfield, V. (2020). Didactic situations in mathematics education. In S. Lerman (Eds.), *Encyclopedia of mathematics education* (2nd. ed., pp. 206-213). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0>
- Callahan, C. M., & Miller, E. M. (2005). A child-responsive model of giftedness. In R. J. Sternberg & J. E. Davidson (Eds.), *Conceptions of giftedness* (2nd ed., pp. 38-51). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511610455.004>
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique* (p. 1991). France: La pensée sauvage éditions. Deuxième édition.
- Chevallard, Y., & Bosch, M. (2020). Anthropological theory of the didactic (ATD). In S. Lerman (Eds.), *Encyclopedia of mathematics education* (2nd. ed., pp. 53-61). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0>
- Cobb, P., & Steffe, L. (2011). The constructivist researcher as teacher and model builder. In E. Yackel, Gravemeijer & A. Sfard (Eds.), *A journey in mathematics education research: Insights from the work of Paul Cobb* (pp. 19–30). Springer. DOI 10.1007/978-90-481-9729-3
- Cosmes Aragón, S. E., & Montoya Delgadillo, E. (2021). Understanding links between mathematics and engineering through mathematical modelling—The case of training civil engineers in a course of structural analysis. In K.G.S Leung, G. A. Stillman, G. Kaiser & K. L. Wong (Eds.), *Mathematical modelling education in east and west* (pp. 527-537). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-66996-6>
- Creswell, J. W. (2021). *Nitel araştırma yöntemleri, beş yaklaşıma göre nitel araştırma ve araştırma deseni*. (S.B. Demir ve M.Bütün, Çev., 6.Basım). Siyasal Kitapevi. (Orijinal yayın tarihi 2013).
- Çetin, A. ve Doğan, A. (2018). Bilim ve sanat merkezlerinde görev yapan matematik öğretmenlerinin karşılaştıkları sorunlar. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Özel Eğitim Dergisi*, 19(4), 615-641. DOI: 10.21565/ozelegitimdergisi.370355
- Delgadillo, E. M., Viola, F., & Vivier, L. (2017, February 1-5). *Choosing a Mathematical Working Space in a modelling task: The influence of teaching* [Paper

- presentation]. Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 10), Dublin, Ireland.
- Delice, A. ve Sevimli, E. (2016). Matematik eğitiminde çoklu temsiller. İçinde E. Bingölbalı, S. Arslan ve İ. Ö. Zembat (Ed.), *Matematik eğitiminde teoriler* (1. Basım, ss. 519-537). Pegem Akademi.
- Deliyanni, E., Gagatsis, A., Monoyiou, A., Michael, P., Kalogirou, P., & Kuzniak, A. (2011, February 9- 13). *Towards a comprehensive theoretical model of students' geometrical figure understanding and its relation with proof* [Paper presentation]. Proceedings VII of European Research in Mathematics Education (CERME 7). Rzeszów, Poland.
- Deniz, S. (2024). *Eşitlik ve değişken kavramlarına yönelik öğrencilerin bilişsel süreçlerinin matematiksel çalışma uzayı teorik çerçevesinde incelenmesi*. (Yayın Numarası: 860065) [Doktora tezi, Anadolu Üniversitesi]. Ulusal Tez Merkezi.
- Derouet, C. (2016). *La fonction de densité au carrefour entre probabilités et analyse. Étude de la conception et de la mise en oeuvre de tâches d'introduction articulant lois à densité et calcul integral* (Publication No: tel-01431913) [Thèse de doctorat, L'université Paris Diderot]. HAL open science.
- Derouet, C. (2019). La fonction de densité au carrefour entre probabilités et analyse. Une ingénierie didactique en classe de terminale scientifique. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* 2017. (pp. 174-193). Université de Paris.
- Derouet, C. and Parzysz, B. (2016). How can histograms be useful for introducing continuous probability distributions?. *ZDM*, 48(6), 757-773. DOI 10.1007/s11858-016-0769-9
- Derouet, C., Kuzniak, A., L., Nechache, A. , Parzysz, B. & Vivier, L. (2017a, February 1-5). *The mathematical working space model: an open and adaptable theoretical framework?* [Paper presentation]. Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 10), Dublin, Ireland.
- Derouet, C., Kuzniak, A., Laval, D., Montoya- Delgadillo, E., Moutet, L., Nechache, A. , Parzysz, B. & Vivier, L. (2017b, February 1-5). *Modeling tasks and mathematical work* [Paper presentation]. Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 10), Dublin, Ireland.
- Duatepe-Paksu, A. (2016). van Hiele geometrik düşünme düzeyleri. İçinde E. Bingölbalı, S. Arslan ve İ. Ö. Zembat (Ed.), *Matematik eğitiminde teoriler* (1. Basım, ss. 265-275). Pegem Akademi.
- Duval, R. (1994). Les Différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique, *Repères-IREM*, 17, 121-138.
- Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of Representation and specific Processings. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematic Education* (pp. 142-157). Springer.
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point a view. In C. Mammana and V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp. 37-52). Springer. DOI 10.1007/978-94-011-5226-6

- Duval, R. (1999, October 23-26). *Presentations, vision and visualization: Cognitive functioning in mathematical thinking* [Paper presentation]. Proceedings of the North America chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 21st, Cuernavaca, Morelos, Mexico.
- Duval, R. (2000). *Basic issues for research in mathematics education*. (ERIC Document Reproduction Service No ED 452 031)
- Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5–53.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103-131. DOI: 10.1007/s10649-006-0400-z
- Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking – The registers of semiotic representations*. Springer. DOI 10.1007/978-3-319-56910-9
- Elia, I., Özel, S., Gagatsis, A., Panaoura, A. and Özel, Z. E. Y. (2016). Students' mathematical work on absolute value: focusing on conceptions, errors and obstacles. *ZDM*, 48(6), 895-907. DOI 10.1007/s11858-016-0780-1
- Elia, I., van den Heuvel-Panhuizen, M., Gagatsis, A. (2018). Geometry Learning in the Early Years: Developing Understanding of Shapes and Space with a Focus on Visualization. In V. Kinnear, M. Y. Lai & T. Muir, (Eds.), *Forging Connections in Early Mathematics Teaching and Learning* (pp. 73-95). Springer, Singapore. <https://doi.org/10.1007/978-981-10-7153-9>
- Erdoğan, A. (2016). Didaktik durumlar teorisi. İçinde E. Bingölbali, S. Arslan ve İ. Ö. Zembat (Ed.), *Matematik eğitiminde teoriler* (1. Basım ss.413-430). Pegem Akademi.
- Erdoğan, A. ve Özdemir-Erdoğan, E. (2013). Didaktik durumlar teorisi ışığında ilköğretim öğrencilerine matematiksel süreçlerin yaşatılması. *Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi*, 14(1), 17-34.
- Espinoza-Vásquez, G., Henríquez-Rivas, C., Climent, N., Ponce, R. and Verdugo-Hernández, P. (2024). Teaching Thales's theorem: relations between suitable mathematical working spaces and specialised knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 1-23. <https://doi.org/10.1007/s10649-024-10367-9>
- Feldhusen, J. F. (1986). A conception of giftedness. In K. A. Heller & J. F. Feldhusen (Eds.), *Identifying and nurturing the gifted. An international perspective* (pp. 33-39). Hans Huber Publisher.
- Feldhusen, J. F. (2005). Giftedness, talent, expertise, and creative achievement. In R. J. Sternberg & J. E. Davidson (Eds.), *Conceptions of giftedness* (2nd. ed., pp. 64-79). Cambridge University Press.
- Feldhusen, J. F., & Jarwan, F. A. (2000). Identification of gifted and talented youth for educational programs. In K. H. Heller, F. J. Mönks, R. J. Sternberg & R. F. Subotnik (Eds.), *International handbook of giftedness and talent* (2nd. ed., pp. 271-282). Elsevier Science.

- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139–162. doi:10.1007/BF01273689
- Fischbein, E. and Nachlieli, T. (1998). Concepts and figures in geometrical reasoning. *International Journal of Science Education*, 20(10), 1193–1211. <https://doi.org/10.1080/0950069980201003>
- Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics*, 3, 413–435. <https://doi.org/10.1007/BF00302305>
- Gagatsis, A., & Geitona, Z. (2021). A multidimensional approach to students' creativity in geometry: spatial ability, geometrical figure apprehension and multiple solutions in geometrical problems. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 18, 5-16.
- Gagatsis, A., Michael, P., Deliyianni, E., Monoyiou, A., & Kuzniak, A. (2011, February 9-13). *Secondary students' behavior in proof tasks: understanding and the influence of the geometrical figure* [Paper Presentation]. Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 7). Rzeszów, Poland.
- Gallagher, J. J. (2000). Changing paradigms for gifted education in the United States. In K. H. Heller, F. J. Mönks, R. J. Sternberg & R. F. Subotnik (Eds.), *International handbook of giftedness and talent* (2nd. ed., pp. 682-693). Elsevier Science.
- Gaona, J., López, S. S. and Montoya-Delgadillo, E. (2022). Prospective mathematics teachers learning complex numbers using technology. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 55(9), 2219–2248. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2133021>
- Gómez-Chacón, I. M. and Kuzniak, A. (2015). Spaces for geometric work: figural, instrumental, and discursive geneses of reasoning in a technological environment. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13(1), 201-226.
- Gómez-Chacón, I. M., Kuzniak, A. and Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los Espacios de Trabajo Matemático. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 30 (54), 1-22. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a01>
- Gómez-Chacón, I. M., Romero Albaladejo, I. M. and del Mar García López, M. (2016). Zig-zagging in geometrical reasoning in technological collaborative environments: a Mathematical Working Space-framed study concerning cognition and affect. *ZDM*, 48, 909-924. DOI 10.1007/s11858-016-0755-2
- Gridos, P., Avgerinos, E., Mamona-Downs, J., & Vlachou, R. (2021). Geometrical Figure Apprehension, Construction of Auxiliary Lines, and Multiple Solutions in Problem Solving: Aspects of Mathematical Creativity in School Geometry. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1-18. <https://doi.org/10.1007/s10763-021-10155-4>
- Guin, D. and Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3, 195-227.

- Güçyeter, Ş. (2017). DİSCOVER değerlendirme ve program modeli. İçinde S. Emir (Ed.), *Özel yeteneklilerin eğitiminde program tasarımı* (1. Basım, ss. 67-94). PegemA. DOI 10.14527/9786052410943
- Güler, A., Halıcıoğlu, M.,B. ve Taşgın S. (2015). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri teorik çerçeve – pratik öneriler 7 farklı nitel araştırma yaklaşımı – kalite ve etik hususlar* (2. Baskı). Seçkin Yayıncılık.
- Güven, B. and Baki, A. (2010). Characterizing student mathematics teachers' levels of understanding in spherical geometry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(8), 991–1013. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2010.500692>
- Güven, B. ve Karpuz, Y. (2016). Geometrik muhakeme: Bilişsel perspektifler. İçinde E. Bingölbalı, S. Arslan ve İ. Ö. Zembat (Ed.), *Matematik eğitiminde teoriler* (1. Basım, ss. 245-263). Pegem Akademi.
- Heinze, A. (2005). Differences in Problem Solving Strategies of Mathematically Gifted and Non-Gifted Elementary Students. *International Education Journal*, 6(2), 175-183.
- Henríquez-Rivas, C., Kuzniak, A., & Masselin, B. (2022). The idoine or suitable mws as an essential transitional stage between personal and reference mathematical work. In A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo & P. R. Richard (Eds.), *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (pp.121-146). Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8>
- Hershkowitz, R.,(1998). *Reasoning in geometry*. In C. Mammana &V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: an ICMI Study* (pp. 29-83). Springer. DOI 10.1007/978-94-011-5226-6
- Hitt, F., Saboya, M. and Cortés Zavala, C. (2016). An arithmetic-algebraic work space for the promotion of arithmetic and algebraic thinking: triangular numbers. *ZDM*, 48 (6),775-791. <https://doi.org/10.1007/s11858-015-0749-5>
- Horsman, R. (2019). International perspectives on the teaching and learning of geometry in secondary schools. *Research in Mathematics Education*, 21(1), 96–100. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1531055>
- Houdement, C. and Kuzniak, A. (1999). Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics*, 40(3), 283–312.
- Ingram, J., Erath, K., Schüller-Meyer, A., Gíslason, I., & Ríordáin, M. N. (2023,July 10-14). *An introduction to TWG9: Mathematics and language* [Paper presentation]. Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13), Budapest, Hungary.
- İmamoğlu, Y., Özcan, Z. Ç., Pesen, M. ve Erktin, E. (2023). Bir geometri öğretimi dersinin geometrik çalışma düzlemleri modeline göre incelenmesi. *Boğaziçi Üniversitesi Eğitim Dergisi*, 40-2(2), 101- 118, <https://doi.org/10.52597/buje.1128602>
- Jiménez, L., & Ärlebäck, J. B. (2018, January 23–24). *Using the mathematical working space model as a lens on geometry in the Swedish mathematics upper secondary*

- curriculum [Paper presentation]. *Perspectives on Professional development of mathematics teachers, Proceedings of MADIF*, Karlstad, Sweden.
- Jones, K. (1998). Theoretical frameworks for the learning of geometrical reasoning. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 18 (1,2), 29–34.
- Kanbur- Tekerek, B. (2023). *Üstün yetenekli ortaokul öğrencilerinin geometri problemleri yoluyla akıl yürütme becerilerinin incelenmesi* (Yayın Numarası: 785487) [Doktora tezi, Gazi Üniversitesi]. Ulusal Tez Merkezi.
- Karaca, E.T. (2023). *Fourth grade students' geometrical reasoning related to 2d and 3d shapes* (Yayın Numarası: 823407) [Doctoral dissertation, Middle East Technical University]. National Thesis Center.
- Karahan, V. (2021). *İlkokul ve ortaokul matematik ders kitaplarındaki temel geometrik kavramların incelenmesi* (Yayın Numarası: 672068) [Yüksek Lisans tezi, Rize Üniversitesi]. Ulusal Tez Merkezi.
- Karataş-Aydın, F.İ. (2022). *Üstün yetenekli ilköğretim öğrencilerinin modelleme yeterliliklerinin mühendislik temelli model oluşturma etkinlikleri yoluyla incelenmesi* (Yayın Numarası: 757677) [Doktora Tezi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi]. Ulusal Tez Merkezi.
- Karpuz, Y. (2018). *Duval'in bilişsel modeline uygun tasarlanan öğrenme ortamının değerlendirilmesi* (Yayın Numarası: 509944) [Doktora tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi]. Ulusal Tez Merkezi.
- Karpuz, Y., Koparan, T. ve Güven, B. (2014). Geometride öğrencilerin şekil ve kavram bilgisi kullanımı. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 5(2), 108-118. <https://doi.org/10.16949/turcomat.16832>
- Kaufman, S. B., & Sternberg, R. J. (2008). Conceptions of giftedness. In S. I. Pfeiffer (Eds.), *Handbook of giftedness in children: Psychoeducational theory, research, and best practices* (pp. 71-91). Springer.
- Kaya, S. N., Tapan Broutin, M. S., Arslan, Ç. ve Ezentaş, R. (2023). Sekizinci sınıf matematik ders kitabında bulunan çözümlü örneklerinde geometrik muhakeme. *Batı Anadolu Eğitim Bilimleri Dergisi*, 14(özel sayı-2), 96-125. <https://doi.org/10.51460/baebd.1069045>
- Kertil, M., Çetinkaya, B., Erbaş, A. K., & Çakıroğlu, E. (2016). Matematik eğitiminde matematiksel modelleme. İçinde E. Bingölbalı, S. Arslan ve İ. Ö. Zembat (Ed.), *Matematik eğitiminde teoriler* (1. Basım, ss.539-563). Pegem Akademi.
- Kızıltoprak, A. (2020). *Ortaokul öğrencilerinin dörtgenlere ilişkin geometrik muhakemelerinin gelişimi* (Yayın Numarası: 647265) [Doktora tezi, Anadolu Üniversitesi]. Ulusal Tez Merkezi.
- Koichu, B., & Berman, A. (2005). When Do Gifted High School Students Use Geometry to Solve Geometry Problems? *Journal of Secondary Gifted Education*, 16(4), 168-179. <https://doi.org/10.4219/jsge-2005-481>
- Kulm, G. (1984). Geometry enrichment for mathematically gifted students. *Roeper Review*, 6(3), 150–151. <https://doi.org/10.1080/02783198409552791>

- Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. In *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 16, 9-24.
- Kuzniak, A. (2014). Understanding the nature of the geometric work through its development and its transformation. In S. Rezat, M. Hattermann, & A. Peter-Koop (Eds.), *Transformation: a fundamental idea of mathematics education* (pp. 311–325). Springer.
- Kuzniak, A. (2022). The theory of mathematical working spaces—theoretical characteristics. In A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo & P. R. Richard (Eds.), *Mathematical work in educational context: the perspective of the theory of mathematical working spaces* (pp. 3-31). Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8>
- Kuzniak, A. and Masselin, B. (2024). Strongly didactic contracts and mathematical work. *Educational Studies in Mathematics*, 115(2), 289-312. <https://doi.org/10.1007/s10649-023-10286-1>
- Kuzniak, A., & Nechache, A. (2015, February 4 – 8). *Using the geometric working spaces to plan a coherent teaching of geometry* [Paper presentation]. *Proceeding of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 9), Prag, Czech Republic.
- Kuzniak, A., Nechache, A. and Drouhard, J. P. (2016b). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM*, 48, 861-874. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0773-0>
- Kuzniak, A., & Nechache, A. (2017, February 1-5). *On dialectic and dynamic links between the Mathematical Working Space model and practice in the teaching and learning of mathematics* [Paper presentation]. *Proceeding of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 10), Dublin, Ireland.
- Kuzniak, A., Nechache, A., & Salazar, J. V. F. (2020, September 16-18). *Student teachers' geometric work and flexible use of digital tools* [Paper presentation]. *Proceedings of the Tenth ERME Topic Conference (ETC 10) on Mathematics Education in the Digital Age (MEDA)*, Linz, Austria.
- Kuzniak, A. and Nechache, A. (2021). On forms of geometric work: A study with pre-service teachers based on the theory of mathematical working spaces. *Educational Studies in Mathematics*, 106(2), 271-289. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-10011-2>
- Kuzniak, A. and Rauscher, J. C. (2011). How do teachers' approaches to geometric work relate to geometry students' learning difficulties? *Educational studies in Mathematics*, 77(1), 129-147. DOI 10.1007/s10649-011-9304-7
- Kuzniak, A. and Richard, P. (2014). Spaces for mathematical work: Viewpoints and perspectives. *Relime*, 17(4.1), 17–26. DOI: 10.12802/relime.13.1741b
- Kuzniak, A., & Vivier, L. (2019, February 6-10). *An epistemological and philosophical perspective on the question of mathematical work in the mathematical working space theory* [Paper presentation]. In *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 11). Utrecht, Netherlands.

- Kuzniak, A., Tanguay, D. and Elia, I. (2016a). Mathematical working spaces in schooling: an introduction. *ZDM*, 48, 721-737. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x>
- Kuzniak, A. & Masselin, B. (2024). Strongly didactic contracts and mathematical work. *Educational Studies in Mathematics*, 115, 289-312. <https://doi.org/10.1007/s10649-023-10286-1>
- Lagrange, J. B. (2021). Les espaces de travail connectés: une perspective nouvelle pour la modélisation dans le secondaire? *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 21, 9-28. <https://doi.org/10.1007/s42330-020-00130-6>
- Lagrange, J. B., Huincahue, J., & Psycharis, G. (2022). Modeling in education: new perspectives opened by the theory of mathematical working spaces. In A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo & P. R. Richard (Eds.), *Mathematical work in educational context: the perspective of the theory of mathematical working spaces* (pp.247-266). Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8>
- Llinares, S. & Clemente, F. (2014) Characteristics of pre-service primary school teachers' configural reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 16(3), 234-250. <https://doi.org/10.1080/10986065.2014.921133>
- Malkevitch, J. (1998). Geometry in our world. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 37-52). Kluwer Academic Publishers.
- Mariotti, M. A. and Fischbein, E. (1997). Defining in Classroom Activities. *Educational Studies in Mathematics*, 34(3), 219–248. <http://www.jstor.org/stable/3482837>
- Marland, S. P. (1972). *Education of the Gifted and Talented: Report to the Congress of the United States by the U.S. Commissioner of Education*. Washington: U.S. Government Printing Office. <https://www.valdosta.edu/colleges/education/humanservices/document%20/marl-and-report.pdf>
- MEB (2017). Çocuk gelişimi ve eğitimi üstün zekâlılar ve özel yetenekliler. http://megep.meb.gov.tr/mte_program_modul/moduller/%C3%9Cst%C3%BCn%20Zek%C3%A2l%C4%B1lar%20ve%20%C3%96zel%20Yetenekliler.pdf
- MEB (2019). PISA 2018 Türkiye Ön Raporu. http://pisa.meb.gov.tr/meb_iys_dosyalar/2023_05/15170226_PISA_2018_Turkiye_On_Raporu.pdf
- MEB (2023, Temmuz). Millî eğitim bakanlığı bilim ve sanat merkezleri yönergesi. https://orgm.meb.gov.tr/meb_iys_dosyalar/2022_12/06214921_BIYLIYM_VE_SANAT_MERKEZLERIY_YOYNERGESIY.pdf
- MEB (2024, Eylül). Türkiye Yüzyılı Maarif Modeli Ortak Metni. <https://tymm.meb.gov.tr/upload/brosur/2024programortakmetinOnayli.pdf>
- Michael, P., Gagatsis, A., Avgerinos, E. & Kuzniak, A. (2011). Middle and high school students' operative apprehension of geometrical figures. *Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematica*, 11, 47-57.

- Michael, P. (2013). *Geometrical figure apprehension: cognitive processes and structure* (Publication No: 7/39202) [Doctoral thesis, The University of Cyprus]. Gnosis Library.
- Minh, T. K. and Lagrange, J. B. (2016). Connected functional working spaces: a framework for the teaching and learning of functions at upper secondary level. *ZDM*, 48, 793-807. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0774-z>
- Miranda, V. C., Pluvinage, F. and Adjage, R. (2016). Facilitating the genesis of functional working spaces in guided explorations. *ZDM*, 48, 809-826. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0791-y>
- Montoya-Delgadillo, E., Mena-Lorca, J. and Mena-Lorca, A. (2016). Estabilidad epistemológica del profesor debutante y espacio de trabajo matemático. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 30, 188-203. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n5a09>
- Moutet, L. (2018, December, 13-18). *Le cadre théorique de l'ETM étendu: Potentialités en physique et en chimie* [Paper presentation]. Actes du Sixième Symposium sur le Travail Mathématique (ETM6), Valparaíso, Chile.
- Moutet, L. (2019a, February 6-10). *The extended theoretical framework of mathematical working space (extended MWS): Potentialities in physics* [Paper presentation]. Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME11), Utrecht, Netherlands.
- Moutet, L. (2021). The extended theoretical framework of mathematical working space (extended MWS): potentialities in chemistry. In F.K.S Leung, G.A. Stillman, G.Kaiser & K. L. Wong, (Eds.), *Mathematical modelling education in east and west. international perspectives on the teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 631-640). Springer
- Mönks, F. J., & Mason, E. J. (2000). Developmental psychology and giftedness: theories. In K. H. Heller, F. J. Mönks, R. J. Sternberg & R. F. Subotnik (Eds.), *International handbook of giftedness and talent* (2nd. ed., pp. 141-155). Elseiver Science.
- Muzaini, M., Rahayuningsih, S., Ikram, M., and Nasiruddin, F. A.-Z. (2023). Mathematical creativity: Student geometrical figure apprehension in geometry problem-solving using new auxiliary elements. *International Journal of Educational Methodology*, 9(1), 139-150. <https://doi.org/10.12973/ijem.9.1.139>
- Nechache, A. (2016). *La validation dans l'enseignement des probabilités au niveau secondaire* (Publication No: tel-01345747) [Doctoral dissertation, L'université Paris Diderot]. HAL open science.
- Nechache, A., & Gómez-Chacón, I. M. (2022). Methodological aspects in the theory of mathematical working spaces. In A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo & P. R. Richard (Eds.), *Mathematical work in educational context: the perspective of the theory of mathematical working spaces* (pp. 33-56). Springer.
- Newton, J. (2010). An examination of K-8 geometry state standards through the lens of van Hiele levels of geometric thinking. In J. P. Smith (Ed.), *Variability is the rule: a companion analysis of K-8 state mathematics standards* (pp. 71-94). Information Age Publishing.

- Or, A. C. M. (2013, July 22-26). *Designing Tasks for Visualization and Reasoning in Dynamic Geometry Environment* [Paper presentation]. International Commission on Mathematical Instruction Study Conference (ICMI 22), Oxford, United Kingdom.
- Oruç, Ş., Ateş, H. Ve Çağır, S. (2019). Türk eğitim sisteminde geçmişten günümüze üstün yetenekliler için yapılan uygulamalar. *Uluslararası Ders Kitapları ve Eğitim Materyalleri Dergisi*, 2 (2), 253-273.
- Özdemir-Erdoğan, E. (2016). Enstümantal oluşum teorisi. İçinde E. Bingölbali, S. Arslan ve İ. Ö. Zembat (Ed.), *Matematik eğitiminde teoriler* (1.Basım ss. 803-818). Pegem Yayıncılık.
- Öztelli-Ünal, D. (2019). *Matematikte üstün yetenekli türk öğrencilerin rutin olmayan problem çözme süreçleri* (Yayın Numarası: 603294) [Yüksek Lisans tezi, Boğaziçi Üniversitesi]. Ulusal Tez Merkezi.
- Panero, M., Arzarello, F. and Sabena, C. (2016). The mathematical work with the derivative of a function: Teachers' practices with the idea of "generic". *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 30, 265-286. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a13>
- Panqueban, D., Henríquez-Rivas, C. and Kuzniak, A. (2024). Advances and trends in research on mathematical working spaces: A systematic review. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 20(6) em2450. <https://doi.org/10.29333/ejmste/14588>
- Papademetri-Kachrimani, C. (2012). Revisiting van hiele. *For the learning of mathematics*, 32(3), 2-7. <https://www.jstor.org/stable/23391967>
- Patsiomitou, S., & Koleza, E. (2008, July, 17-21). *Developing students' geometrical thinking through linking representations in a dynamic geometry environment* [Paper presentation]. Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX, Morelia, Mexico.
- Patton, M.,Q. (2018). *Nitel araştırma ve değerlendirme yöntemleri* (M. Bütün ve S. B. Demir, Çev.;2. Basım). Pegem Akademi. (orijinal yayın tarihi 2002).
- Pérez, K. M. and Delgadillo, E. M. (2022). The mathematical work of Chilean secondary teachers in the domain of probability. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 22(3), 558-575. <https://doi.org/10.1007/s42330-022-00235-0>
- Pluvinage, F. and Flores, P. (2016). Génesis Semiótica de los enteros. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 30, 120-141. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a06>
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin. HAL Id: hal-01017462
- Rabardel, P. (2002). *People and technology—a cognitive approach to contemporary instruments*. <https://hal.science/hal-01020705/document>
- Radford, L. (2016). The epistemic, the cognitive, the human: a commentary on the mathematical working space approach. *ZDM*, 48, 925-933. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0811-y>

- Ramatlapana, K. and Berger, M. (2018). Prospective mathematics teachers' perceptual and discursive apprehensions when making geometric connections. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, 22(2), 162-173. <https://doi.org/10.1080/18117295.2018.1466495>
- Renzulli, J. S. (1978). What makes giftedness? Reexamining a definition. *Phi delta kappan*, 60(3), 180. <http://www.jstor.org/stable/20299281>.
- Renzulli, J. S. (1986). The three-ring conception of giftedness. A developmental model for creative productivity. In R. J. Sternberg & J. E. Davidson (Eds.), *Conceptions of giftedness* (1nd ed., pp. 53-92). Cambridge University Press.
- Renzulli, J. S. (2005). The three-ring definition of giftedness: A developmental model for promoting creative productivity. In R. J. Sternberg & J. E. Davidson (Eds.), *Conceptions of giftedness* (2nd ed., pp. 246–280). Cambridge University Press
- Ribeiro, M. & Almeida, A. (2018, December, 13-18). *Kindergarten and primary Teachers' interpretative knowledge and MWS in the context of a measurement task* [Paper presentation]. Actes du Sixième Symposium sur le Travail Mathématique (ETM6), Valparaíso, Chile.
- Richard, P. R., Oller-Marcén, A. M. and Meavilla-Seguí, V. (2016). The concept of proof in the light of mathematical work. *ZDM*, 48, 843-859. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0805-9>
- Rivas, C. H. and Kuzniak, A. (2022). Deepening the geometric work of future teachers in technological environments and pencil and paper. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 35, 1550-1572. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a15>
- Robinson, A., & Clinkenbeard, P. R. (2008). History of giftedness: Perspectives from the past presage modern scholarship. In S. I. Pfeiffer (Eds.), *Handbook of giftedness in children: Psychoeducational theory, research, and best practices* (pp. 13-31). Springer.
- Robotti, E. (2012). Natural language as a tool for analyzing the proving process: the case of plane geometry proof. *Educational Studies in Mathematics*, 80, 433-450. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9383-0>
- Ross, P. (1993). *National Excellence: A Case for Developing America's Talent*. US Department of Education, Government Printing Office.
- Sak, U., Ayas, M. B., Sezerel, B. B., Öpengin, E., Özdemir, N. N. ve Gürbüz, Ş. D. (2015). Türkiye'de üstün yeteneklilerin eğitiminin eleştirel bir değerlendirilmesi. *Türk Üstün Zekâ ve Eğitim Dergisi*, 5(2), 110-132. <https://www.proquest.com/openview/620fd9f7915181de824f29afd5a64d70/1?pq-origsite=gscholar&cbl=1946344>
- Santos-Trigo, M., Moreno-Armella, L. and Camacho-Machín, M. (2016). Problem solving and the use of digital technologies within the mathematical working space framework. *ZDM*, 48, 827-842. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0757-0>
- Sharma, S. (2019). Use of theories and models in geometry education research: A critical review. *Waikato Journal of Education*, 24(1), 43-54. <https://doi.org/10.15663/wje.v24i1.644>

- Sierpinska, A. (2004). Research in mathematics education through a keyhole: Task problematization. *For the learning of mathematics*, 24(2), 7-15. <http://www.jstor.org/stable/40248450>
- Sinclair, N., Bartolini Bussi, M. G., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., and Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: An ICME-13 survey team report. *ZDM*, 48, 691-719. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0796-6>
- Şengil-Akar, Ş. (2017). *Üstün yetenekli öğrencilerin matematiksel yaratıcılıklarının matematiksel modelleme etkinlikleri sürecinde incelenmesi* (Yayın Numarası: 454933) [Doktora tezi, Hacettepe Üniversitesi]. Ulusal Tez Merkezi.
- Tanguay, D. and Venant, F. (2016). The semiotic and conceptual genesis of angle. *ZDM*, 48, 875-894. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0789-5>
- Tapan-Broutin, M., S. (2016). Çizim-geometrik şekil-geometrik nesne kavramları ışığında çizimlerin yorumlanmasını etkileyen faktörler. İçinde E. Bingölbalı, S. Arslan ve İ. Ö. Zembat (Ed.), *Matematik eğitiminde teoriler* (1. Basım, ss. 307-323). Pegem Yayıncılık.
- Tomlinson, C. A. (2001). *How to differentiate instruction in mixed-ability classrooms*. Association for Supervision and Curriculum Development.
- Torregrosa, G., & Quesada, H. (2008, July, 17-21). *The coordination of cognitive processes in solving geometric problems requiring formal proof* [Paper presentation]. Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX, Morelia, Mexico.
- Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for mathematical learning*, 9, 281-307. <https://doi.org/10.1007/s10758-004-3468-5>
- Tutan, S. (2019). *Geometrik muhakeme süreçleri bağlamında ortaokul matematik öğretmenlerinin geometri içerikli derslerinin incelenmesi* (Yayın Numarası: 567525) [Yüksek Lisans tezi, Gaziantep Üniversitesi]. Ulusal Tez Merkezi.
- Türkman, B. (2017). Genel eğitim programını özel yetenekli öğrencilerin ihtiyaçlarına göre farklılaştırma stratejileri. İçinde S. Emir (Ed.), *Özel yeteneklilerin eğitiminde program tasarımı* (ss. 23-44). Pegem Yayıncılık.
- Türnüklü, E., Alaylı, F. G. ve Akkaş, E. N. (2013). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının dörtgenlere ilişkin algıları ve imgelerinin incelenmesi. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri*, 13(2), 1213-1232.
- Unguru, S. (1975). On the need to rewrite the history of Greek mathematics. *Archive for history of exact sciences*, 15, 67-114. <https://doi.org/10.1007/BF00327233>
- Ülger, A. (2006). *Matematiğin kısa bir tarihi*. Türkiye Bilimler Akademisi.
- Van Boxtel, H. W., & Mönks, F. J. (1992). General, social, and academic self-concepts of gifted adolescents. *Journal of Youth and Adolescence*, 21(2), 169-186. <https://doi.org/10.1007/BF01537335>

- Van Tassel-Baska, J., & Stambaugh, T. (2008). Curriculum and instructional considerations in programs for the gifted. In S., I. Pfeiffer (Eds.), *Handbook of giftedness in children: Psychoeducational theory, research, and best practices* (pp. 347-365). Springer.
- Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2), 133-170.
- Vergnaud, G. (1994). Multiplicative Conceptual Field: What and Why?. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp. 41-60). State University of New York Press.
- Verillon, P. and Rabardel, P. (1995). Cognition and Artifacts: A Contribution to the Study of Thought in Relation to Instrumented Activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10(1), 77–101. <http://www.jstor.org/stable/23420087>
- Winer, M. L. (2017). *Students' Reasoning with Geometric Proofs that use Triangle Congruence Postulates* (Publication No: ED648165) [Doctoral dissertation, Ohio State University]. ERIC.
- Yaftian, N. and Pazoki, L. (2021). Assessing 10th Grade Male and Female Students' Apprehension of Geometrical Figures based on Duval's Theory. *New Educational Approaches*, 16(2), 153-170. doi: 10.22108/nea.2023.134538.1806
- Yıldırım, D. ve Yavuzsoy-Köse, N. (2018). Ortaokul öğrencilerinin çokgen problemlerindeki matematiksel düşünme süreçleri. *Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 18 (1), 605-633. <https://doi.org/10.17240/aibuefd.2018..-362044>
- Yildiz, A. (2016). The geometric construction abilities of gifted students in solving real-world problems: a case from Turkey. *Malaysian Online Journal of Educational Technology*, 4(4), 53-67. <https://eric.ed.gov/?id=EJ1116207>

EKLER

EK-1. Konya Milli Eğitim Müdürlüğünden Alınan İzin Belgesi

Gelen Evrak Tarih ve Sayısı: 07.12.2023-661961



T.C.
KONYA VALİLİĞİ
İl Millî Eğitim Müdürlüğü



Sayı : E-83688308-605.99-91447181
Konu : Araştırma İzni (Leyla AYDURMUŞ)

06.12.2023

DAĞITIM YERLERİNE

- İlgi : a) Millî Eğitim Bakanlığının (Yenilik ve Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğü) 21.01.2020 tarihli ve 2020/2 sayılı Genelgesi.
b) 21/11/2023 tarihli ve E.63784619-929-652860 sayılı yazınız.
c) 06/12/2023 tarihli Araştırma İzinleri Değerlendirme Komisyonu Tutanağı.

Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik ve Fen Bilimleri Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalı Doktora Programı öğrencisi Leyla AYDURMUŞ'un "Üstün Yetenekli Öğrencilerin Geometrik Muhakemelerinin Matematik Çalışma Uzaı Çerçevesinde İncelenmesi" konulu araştırmasını uygulama talebi incelenmiştir.

Araştırmanın; Karatay Bilim ve Sanat Merkezi, Meram Konya Bilim ve Sanat Merkezi ve Selçuklu Bilim ve Sanat Merkezlerinde eğitim gören öğrencilere eğitim öğretimi aksatmamak ve ilgi (a) Genelgede belirtilen açıklamalara uyulması kaydıyla gerçekleştirilmesi ilgi (c) komisyon tutanağı ile uygun görülmektedir. Müdürlüğümüze bağlı eğitim kurumlarındaki çalışmaların 2023-2024 eğitim öğretim yılı içerisinde tamamlanması zorunludur. Araştırma kapsamında yürütülecek çalışmaların 2023-2024 eğitim öğretim yılında tamamlanmaması durumunda Müdürlüğümüzden tekrar izin alınması gerekmektedir.

Araştırmada Müdürlüğümüz tarafından onaylanarak gönderilen veri toplama araçlarının kullanılması, elde edilecek kişisel verilerin gizliliği hususuna dikkat edilmesi ve araştırma sonucunun çalışma bitiminden itibaren 30 gün içerisinde elektronik ortamda Müdürlüğümüz istatistik42@meb.gov.tr e-posta adresine gönderilmesi gerekmektedir.

Arz/rica ederim.

Murat YİĞİT
İl Millî Eğitim Müdürü

Ek:

- 1-Genelge (3 Sayfa)
2-Veri Toplama Araçları (37 Sayfa)

Dağıtım:

Gereği:

Anadolu Üniversitesi Rektörlüğüne

Bilgi:

Karatay İlçe Millî Eğitim Müdürlüğü
Meram İlçe Millî Eğitim Müdürlüğü
Selçuklu İlçe Millî Eğitim Müdürlüğü

Bu belge güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır.

Adres : Akçeşme Mahallesi Garaj Cad. No:4 42020 Karatay/Konya

Belge Doğrulama Adresi : <https://www.turkiye.gov.tr/meb-ebys>

Telefon No : 0 (332) 353 30 50

E-Posta: istatistik42@meb.gov.tr

Kep Adresi : mebsis01.kep.tr

Bilgi için: Ali Naci İŞİK - 1223

Unvan : Veri Hazırlama ve Kontrol İşletmeni

İnternet Adresi: <http://konya.meb.gov.tr>

Faks: 3323515940

Bu evrak güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır. <https://evraksorgu.meb.gov.tr> adresinden 4792-69c2-3d69-8151-3bde kodu ile teyit edilebilir.

EK-2. Etik Kurul Karar Belgesi

Evrak Kayıt Tarihi: 12.10.2023

Protokol No: 627137

Tarih: 31.10.2023



ANADOLU ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL VE BEŞERÎ BİLİMLER BİLİMSEL ARAŞTIRMA VE YAYIN ETİĞİ KURULU
KARAR BELGESİ

ÇALIŞMANIN TÜRÜ:	Doktora Tez Çalışması
KONU:	Eğitim Bilimleri
BAŞLIK:	Üstün Yetenekli Öğrencilerin Geometrik Muhakemelerinin Matematik Çalışma Uzayı Çerçevesinde İncelenmesi
PROJE/TEZ YÜRÜTÜCÜSÜ:	Prof. Dr. Emel ÖZDEMİR ERDOĞAN
TEZ YAZARI:	Leyla AYDURMUŞ
ALT KOMİSYON GÖRÜŞÜ:	-
KARAR:	Olumlu.

EK-3. Öğrenci Velisi Bilgilendirme ve İzin Formu

Gelen Evrak Tarih ve Sayısı: 07.12.2023-661961

AYDINLATILMIŞ VELİ ONAM FORMU Tarih:

Sevgili anne/ baba

Bu çalışma Anadolu Üniversitesi Matematik Eğitimi Bölümü doktora öğrencisi Leyla AYDURMUŞ ve Anadolu Üniversitesi Matematik Eğitimi Bölümü öğretim üyesi Prof. Dr. Emel ÖZDEMİR ERDOĞAN tarafından doktora tezi kapsamında yürütülmektedir.

Bu çalışmada üstün yetenekli öğrencilere yönelik hazırlanan gerçek yaşam bağlamı içeren problemlere verecekleri cevapları çalışma parametrelerine göre incelemek amaçlanmaktadır. Bu amaç doğrultusunda çocuğunuzdan kendilerine sunulan gerçek yaşam durumu içeren problem çözme etkinliklere katılım sağlamasını isteyeceğiz. Bu etkinlik oturum süreçleri çocuğunuzun davranışları, cevapları, çalışma kağıtları, kullandığı materyaller gibi çalışmanın verilerini elde etmek için kamera, ses kayıt, not alma, gözlem vb. yöntemlerle kayıt altına alınacaktır. Çalışmaya katılım konusunda sizin izninizin önemli olmasının yanı sıra çocuğunuzun da katılımı ile ilgili rızası alınacaktır.

Bu araştırmanın sonuçları bilimsel amaçlarla kullanılacaktır. Çocuğunuzdan elde edilen tüm bilgiler gizli tutulacak sadece araştırmacılar tarafından değerlendirilecektir. Çalışmada öğrencilerden kimlik belirleyici hiçbir bilgi istenmemektedir. Araştırma yayımlandığında da varsa öğrencinin kimlik bilgilerinin gizliliği korunacaktır. Uygulamalar öğrencinin kendisini rahatsız hissedeceği sorular ve uygulamalar içermemektedir. Yine de çocuğunuz kendisini rahatsız hisseder ve süreci tamamlamak isterse uygulamayı sonlandırmak da özgürdür. Böyle bir durumda veri toplama aracını uygulayan kişiye, çalışmayı tamamlamayacağını söylemesi yeterli olacaktır. Rahatsızlığının giderilmesi konusunda araştırmacı gerekli hassasiyeti gösterecektir.

Çocuğunuz veya siz çalışmaya devam etmek istemezseniz ya da araştırmacı tarafından araştırmadan çıkarılmanız halinde, sizle ilgili veriler kullanılmayacaktır. Ancak veriler bir kez anonimleştikten sonra araştırmadan çekilmeniz mümkün olmayacaktır. Araştırmaya katılmama veya araştırmadan ayrılma durumunda öğrencilerin akademik başarıları, okul ve öğretmenleriyle olan ilişkileri etkilemeyecektir. Çalışma hakkında ve araştırma sonuçları ile ilgili bilgi almak için Leyla AYDURMUŞ ile iletişime geçebilirsiniz. Bu çalışmaya katılımınız için şimdiden teşekkür ederiz.

Yukarıda yer alan ve araştırmaya başlanmadan önce katılımcı velilerine verilmesi gereken bilgileri içeren metni okudum (ya da sözlü olarak dinledim). Eksik kaldığını düşündüğüm konularda sorularımı araştırmacılara sordum ve doyurucu yanıtlar aldım.

Yazılı ve sözlü olarak tarafıma sunulan tüm açıklamaları ayrıntılarıyla anladığım kanısındayım. Çocuğumun çalışmaya katılmasını isteyip istemediğim konusunda karar vermem için yeterince zaman tanındı. Bu koşullar altında, araştırma kapsamında elde edilen çocuğuma ait bilgilerin bilimsel amaçlarla kullanılmasını, gizlilik kurallarına uyulmak kaydıyla sunulmasını ve yayınlanmasını, hiçbir baskı ve zorlama altında kalmaksızın, kendi özgür irademle kabul ettiğimi beyan ederim.

Evet onaylıyorum _____

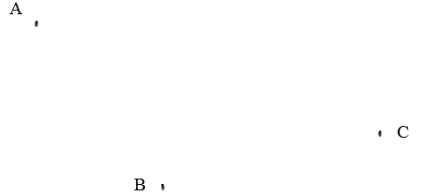
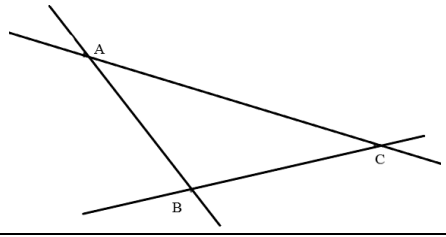
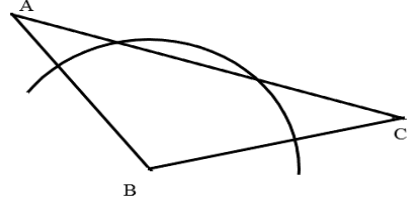
Hayır, onaylamıyorum _____

Annenin/Babanın adı-soyadı:

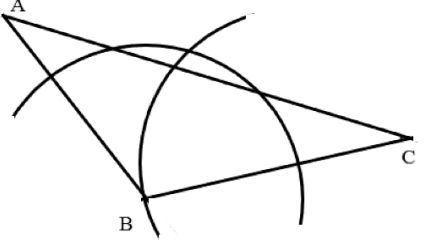
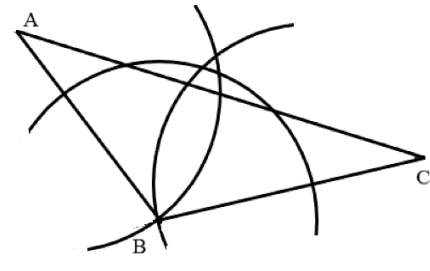
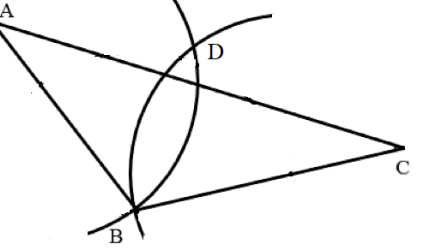
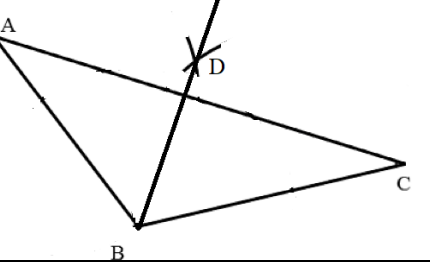
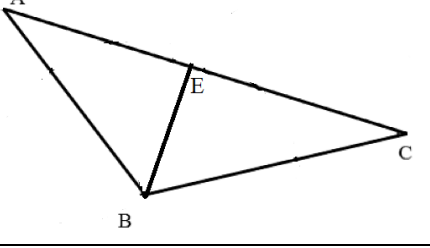
Çocuğun Adı-soyadı:

(Formu doldurup imzaladıktan sonra araştırmacıya ulaştırınız).

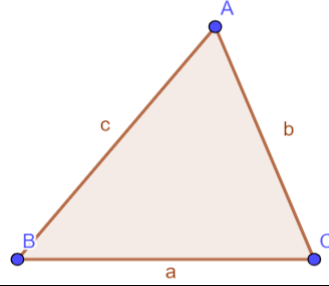
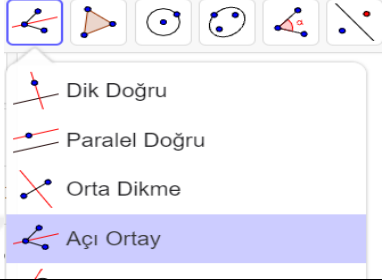
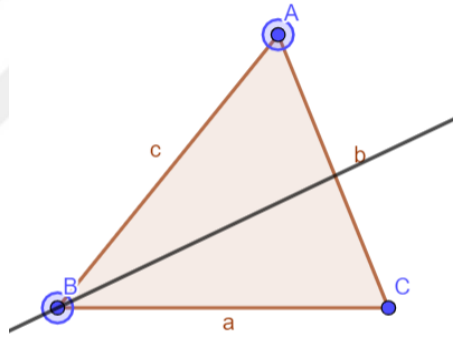
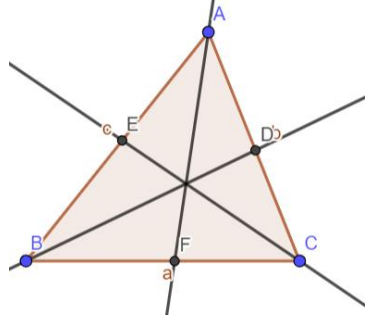
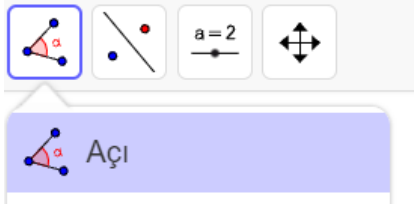
EK-4. Araç Kullanımı Destek Eğitimi İçerikleri

Üçgende Açortay Çizimi		
Kağıt Üçgen ile Açortay	1. Adım: Kağıt üzerine doğrusal olmayan üç nokta belirleyen. Büyük harfle isimlendirin.	
	2. Adım: Seçtiğiniz herhangi iki noktadan geçen bir doğru çizin. Aynı işlemi tüm ikili noktalar için gerçekleştirin ve doğruların kesişmesi ile üçgeninizi oluşturun.	
	3. Adım: Oluşan üçgeni makas ile keserek ayırınız.	
	4. Adım: Açortayını bulmak istediğimiz köşeyi belirleyelim. Açının iki yanında kalan kenarlardan birini diğer kenarla çakışacak şekilde üst üste getirin.	
	5. Adım: Kenarlar üst üste geldiğinde üçgeni tam bu konumdayken katlayın.	
	6. Adım: Katlama çizgisinin üzerinden cetvel kullanarak doğru parçası çiziniz.	
	7. Adım: Aynı işlemleri üçgeninizin diğer köşeleri için de gerçekleştirin.	
Sorular Kenarları çakıştırdığımızda üçgenin durumunu inceleyiniz. Dikkatinizi çeken noktalar nelerdir?		
Cetvel ve Pergel ile Çizim	Yönergeler 1. Adım: Kağıt üzerine doğrusal olmayan üç nokta belirleyin. Büyük harfle isimlendirin.	
	2. Adım: Seçtiğiniz herhangi iki noktadan geçen bir doğru çizin. Aynı işlemi tüm ikili noktalar için gerçekleştirin ve doğruların kesişmesi ile üçgeninizi oluşturun.	
	3. Adım: Açortayını çizeceğiniz köşeye pergelin sabitleme ucunu koyun ve pergeli uygun genişlikte açın. Açının kollarını kesecek bir yay çiziniz.	

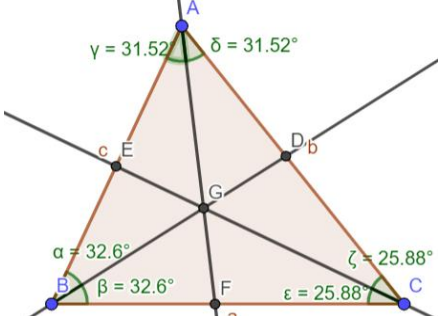
EK-4. (Devam) Araç Kullanımı Destek Eğitimi İçerikleri

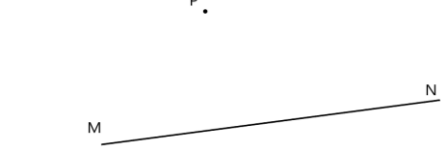
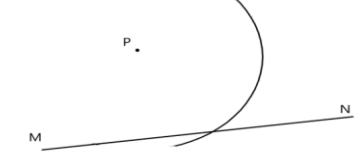
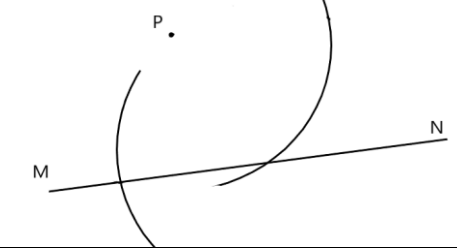
	4. Adım: Yayın açının kollarını kestiği noktalardan birini seçin ve pergelin sabitleme ucunu bu noktaya yerleştirin.	
	5. Adım: Pergelin açıklığını açının kolları arasında bir yay çizecek genişlikte açın ve bir yay çizin.	
	6. Adım: Pergel açıklığını değiştirmeden pergelin sabitleme ucunu çizdiğiniz ilk yayın açının diğer kolunu kestiği noktaya yerleştirin ve bir önceki adımda çizdiğiniz yayla kesişen bir yay çizin.	
	7. Adım: Yayların kesişim noktasını işaretleyiniz ve isimlendiriniz.	
	8. Adım: Kesişim noktası ile açının köşe noktasını birleştiren bir ışın çizin.	
	9. Adım: Işının açının karşısındaki kenarı kestiği noktayı belirleyiniz. Açının köşesi ve karşı kenar arasında çizdiğiniz doğru parçası açıya ait açığortaydır.	
Sorular Tüm kenarlar için açığortay çizimini tamamladığımızda açığortayların durumları için neler söyleyebilirsiniz?		

EK-4. (Devam) Araç Kullanımı Destek Eğitimi İçerikleri

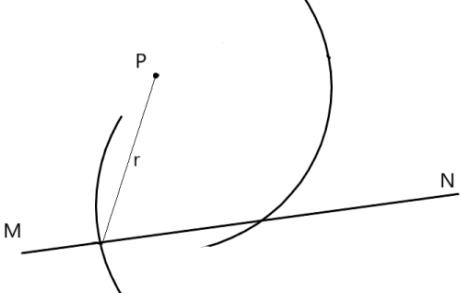
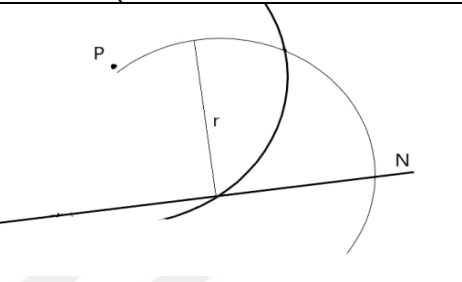
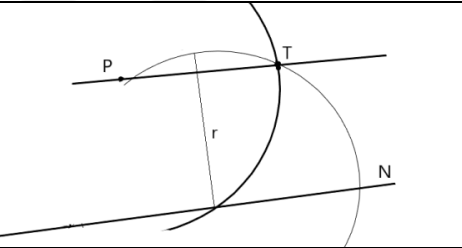
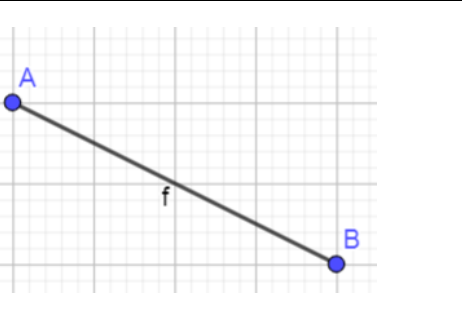
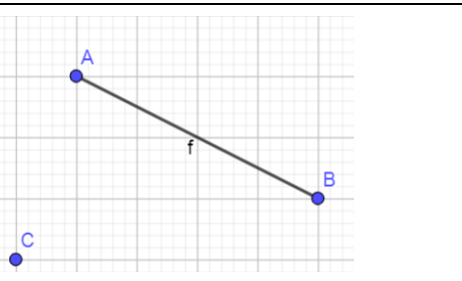
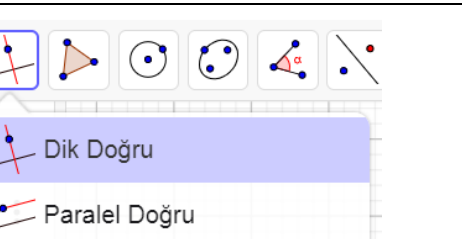
Geogebra ile Çizim	Adım 1: Çokgen butonunun altındaki “çokgen” seçeneğini aktif hale getirerek çizim alanına bir üçgen çizin.	
	Adım 2: Dik doğru (4. Sıradaki ikon) butonunun altındaki “açıortay” seçeneğini aktif hale getiriniz.	
	Adım 3: Üçgenin hangi köşesinde açıortay doğrusu oluşturmak istiyorsanız önce diğer köşelerden herhangi birinden başlayarak ikinci sırada açıortay köşesi ve en son kalan köşeye tıklayarak açıortay doğrusunu oluşturunuz. (Örn: Bir ABC üçgeninde A köşesinde açıortay oluşturmak için sırasıyla B-A-C veya C-A-B şeklinde işaretleme yapabilirsiniz.	
	Adım 4: Nokta ikonunun altında yer alan “kesiştir” seçeneğini aktif hale getirin ve kenarlar ile açıortay doğrularının kesişim noktalarını belirleyin.	
	Adım 5: Sekizinci sırada yer alan ikona tıklayarak “ Açı” seçeneğini aktif hale getiriniz. Sırası ile açığı oluşturan üç noktaya veya iki doğruya tıklayınız. Açı ölçülerini hesaplayınız.	

EK-4. (Devam) Araç Kullanımı Destek Eğitimi İçerikleri

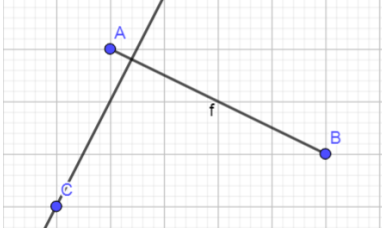
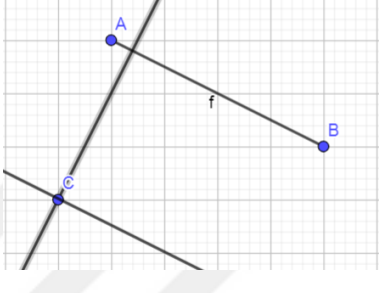
	Adım 6: Taşı butonu (ilk buton) ile taşıma işlemini aktif hale getirip üçgenin köşelerinin konumunu değiştirerek açışortayların durumunu gözlemleyebilirsiniz.	
Sorular Geogebra kullanarak cetvel ve pergel ile gerçekleştirdiğimiz oluşumu gerçekleştiriniz. Üçgenin dik açılı, geniş açılı, dar açılı formları için açışortayların durumu ile ilgili ne söylersiniz.		

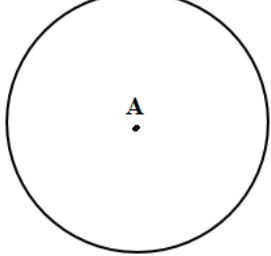
Bir Doğru Parçasına Dışındaki Bir Noktadan Paralel Çizmek		
Cetvel ve Pergel ile Çizim	Yönergeler 1. Adım: Kağıt üzerinde herhangi iki nokta belirleyin. Cetvel yardımı ile bu noktaları birleştirin. Doğru parçasının başlangıç ve bitiş noktalarını büyük harfler ile isimlendiriniz.	
	2. Adım: Doğru parçasının dışında bir nokta belirleyin.	
	3. Adım: Pergelin sabitleme ucunu 2. adımda belirlediğiniz bu noktaya koyunuz ve doğru parçasını kesen bir yay çizersiniz.	
	4. Adım: Pergelin açıklığını bozmadan pergelin sabitleme ucunu çizdiğiniz yayın doğru parçasını kestiği noktaya koyunuz ve doğru parçasını kesen bir yay daha çizersiniz.	

EK-4. (Devam) Araç Kullanımı Destek Eğitimi İçerikleri

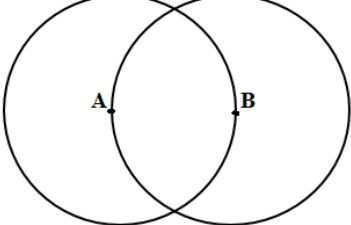
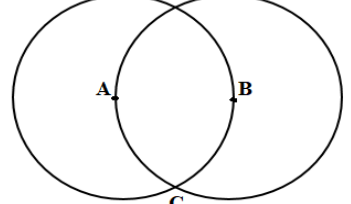
	5. Adım: Pergelin açıklığını 4. adımda çizdiğiniz yayın doğru parçasını kestiği nokta ile paralel çizmek istediğiniz nokta arasındaki mesafe kadar ayarlayınız.	
	6. Adım: Bir önceki adımda ayarlamış olduğunuz pergel açıklığını koruyunuz. Pergelin sabitleme ucunu ilk çizdiğiniz yayın doğru parçasını kestiği noktaya koyunuz ve ilk yayı kesen bir çember yayı çiziniz.	
	7. adım: Çember yaylarının kesişim noktasını belirleyiniz. Doğru dışında belirlediğiniz nokta ile 6. adımda bulduğunuz bu kesişim noktalarını birleştiren bir doğru veya doğru parçası çiziniz.	
Sorular Hangi durumda çember yayı doğru parçasının uzantısını keser?		
Geogebra ile Çizim	Adım 1: Üçüncü ikonun (doğru ikonu) altında bulunan “doğru parçası” seçeneğini aktif hale getirin. Çizim alanı üzerinde başlangıç ve bitiş noktası belirleyerek doğru parçasını çizin.	
	Adım 2: İkinci ikonun (nokta) altındaki “nokta” seçeneğini aktif hale getirin. Çizim alanı içerisinde oluşturduğunuz doğru parçası dışında bir nokta belirleyin.	
	Adım 3: Dördüncü ikonun içinde yer alan “dik doğru” seçeneğini aktif hale getiriniz.	

EK-4. (Devam) Araç Kullanımı Destek Eğitimi İçerikleri

Adım 4: Önce doğru parçasının dışında oluşturduğunuz noktaya daha sonra doğru parçasına tıklayarak doğru parçasını kesen dik doğruyu elde ediniz.	
Adım 5: Dik kesen doğru butonu aktifken en son oluşturduğunuz dik doğruya tıklayınız. İlk çizdiğiniz doğru parçasına paralel, ikinci çizdiğiniz doğruya dik olan bir doğru elde edin. Bu doğruyu fare yardımıyla doğru dışında oluşturduğunuz noktaya kadar taşıyınız.	
Sorular Geogebra kullanarak cetvel ve pergeli ile gerçekleştirdiğiniz oluşumu gerçekleştiriniz. Alternatif bir çizim süreci planlayabilir misiniz?	

Eşkenar Üçgen Çizimi		
Cetvel ve Pergel ile Çizim	Adım 1: Kağıt üzerinde eşkenar üçgenin köşelerinden biri olacak bir nokta belirleyin. Noktayı büyük harf ile isimlendirin. Pergelin sabitleme ayağını belirlediğiniz noktaya koyunuz. Pergelin açıklığını çizmek istediğiniz eşkenar üçgenin büyüklüğüne göre belirleyiniz ve çemberi çizin.	

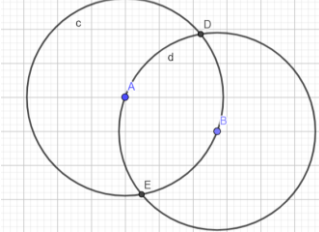
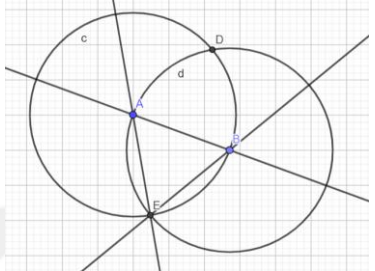
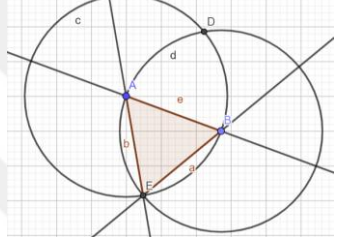
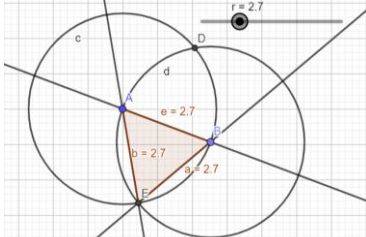
EK-3. (Devamı) Araç Kullanımı Destek Eğitimi İçerikleri

Adım 2: Pergelin açıklığını bozmadan sabitleme ucunu çizdiğiniz çember üzerinde bir nokta belirleyerek yerleştirin. Bu noktayı büyük harfle isimlendirin. Bir önceki çembere eş yeni bir çember çizin.	
Adım 3: Çemberlerin kesiştiği noktalardan birini belirleyin ve isimlendirin.	

EK-4. (Devam) Araç Kullanımı Destek Eğitimi İçerikleri

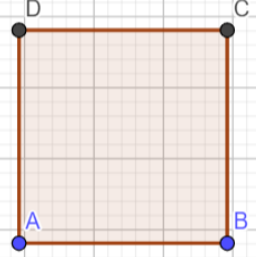
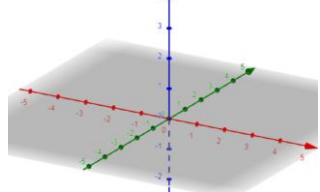
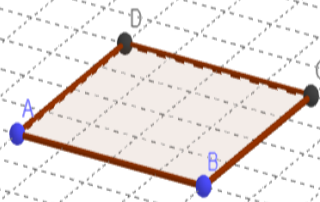
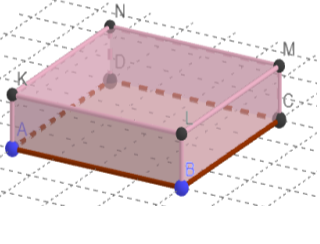
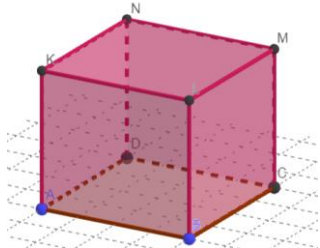
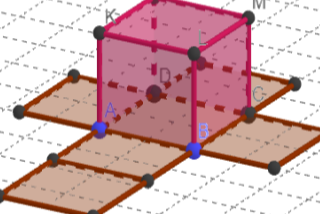
	Adım 4: Belirlediğiniz nokta ikililerinden (AB, AC, BC) geçen doğruları çizin. Oluşturduğunuz doğru parçalarının uzunluğunu cetvel ile ölçerek kontrol ediniz.	
Soru: Çemberden yararlanarak ikizkenar üçgen çizebilir misin?		
Geogebra ile Çizim	Adım 1: Sürgü seçeneğini aktif hale getiriniz ve sürgü adını “r” olarak yazınız. Sürgüde minimum değerini 0 maksimum değerini istediğiniz pozitif bir büyüklükte giriniz ve sürgüyü oluşturunuz.	
	Adım 2: Altıncı ikonun altında yer alan “Çember: Merkez & Yarıçap” seçeneğini aktif hale getiriniz. Çizim alanına tıklayınız ve açılan kutucukta çember yarıçap değerini “r” olarak giriniz. Çemberi oluşturunuz.	
	Adım 3: Nokta ikonunun altında yer alan “Nesne Üzerinde Nokta” seçeneğini aktif hale getiriniz ve çizdiğimiz çember üzerinde noktayı oluşturmak istediğiniz bir yere tıklayınız. Noktayı oluşturunuz.	
	Adım 4: Tekrar “Çember: Merkez & Yarıçap” seçeneğini aktif hale getiriniz ve merkez olarak çember üzerinde belirlediğimiz noktaya tıklayınız. Açılan pencerede yarıçap değerini “r” olarak giriniz.	

EK-4. (Devam) Araç Kullanımı Destek Eğitimi İçerikleri

	Adım 5: İkinci ikon altında bulunan “Kesıştır” seçeneğini aktif hale getiriniz ve sırayla oluşturduğunuz iki çembere tıklayınız. Kesişim noktalarını belirleyiniz.	
	Adım 6: Doğru ikonuna tıklayınız ve doğru oluşturma seçeneğini aktif hale getiriniz. Çemberlerin merkez noktalarından geçen doğru için merkez noktalarına, diğer doğrular için merkez noktalardan biri ve seçtiğiniz kesişim noktalarından birine, diğer merkez nokta ve seçtiğiniz kesişim noktasına tıklayarak üç adet doğruyu oluşturunuz.	
	Adım 7: Çokgen seçeneğini aktif hale getiriniz ve doğruların kesişim noktalarına tıklayınız. Çokgeni oluşturunuz.	
	Adım 8: Sekizinci ikon altında yer alan “Uzaklık veya Uzunluk” seçeneğini aktif hale getiriniz. Üçgenin kenarları üzerine sırası ile tıklayarak kenar uzunluklarını ölçünüz. Sürgü butonunu hareket ettirerek kenar uzunluklarının değişimini gözlemleyiniz.	
Soru Eşkenar üçgenin cetvel ve pergeli ile çizim ile dinamik geometri yazılımı arasında benzerlik ve farklılıklar nelerdir?		

Kare Prizma Oluşturma		
	Yönergeler Adım 1: Sürgü seçeneğini aktif hale getiriniz ve sürgü adını “h” olarak, minimum değeri 0 ve maksimum değeri istediğiniz pozitif bir değer olarak giriniz.	

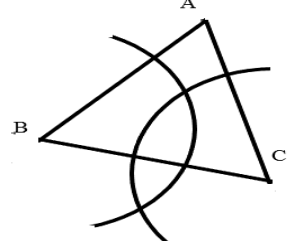
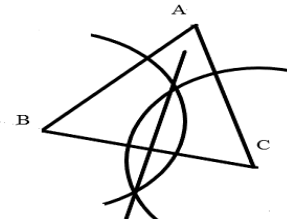
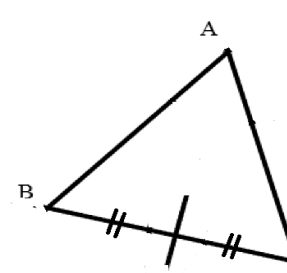
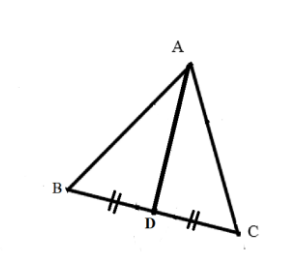
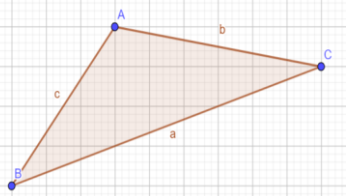
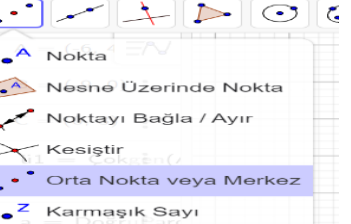
EK-4. (Devam) Araç Kullanımı Destek Eğitimi İçerikleri

  Düzenli Çokgen	Adım 2: Çokgen ikonu altında yer alan “düzenli çokgen” seçeneğini aktif hale getiriniz. Çizim alanında istediğiniz büyüklükte bir kenar uzunluğu belirleyip açılan pencerede “4” yazarak kare elde ediniz.	
 3D Grafik	Adım 3: Ekranın sağ üst köşesinde yer alan alt alta üç çizgiye tıklayarak açılan pencerede 3D grafiği seçiniz.	
Adım 4: 2D uzayda oluşturduğunuz kareyi hareket ettirerek 3D uzayda düzlem üzerine taşıyınız. Eksenleri ve düzlemi 3D çizim alanında sağa tıklayarak kapatabilirsiniz.		
  Prizmaya Dönüştür	Adım 5: 3D uzay aktifken prizma ikonunun altında yer alan “Prizmaya Dönüştür” seçeneğini aktif hale getiriniz. 3D düzlem üzerinde kare üzerine tıklayınız. Açılan pencerede yükseklik değerini “h” olarak giriniz.	
Adım 6: Oluşturduğunuz sürgüyü hareket ettirerek prizmanın yüksekliğini değiştirebilirsiniz.		
 Düzleme Aç	Adım 7: Prizma ikonunun altında yer alan “Düzleme aç” seçeneğini aktif hale getiriniz. Prizmaya tıklayarak kare prizmanın açılımını oluşturunuz.	
Sorular - Geogebra ile üçgen, beşgen, vb. prizmalar oluşturabilir misiniz? - Silindiri oluşturmak için gerekli adımları belirleyiniz ve oluşum adımlarını arkadaşlarınızla paylaşınız.		

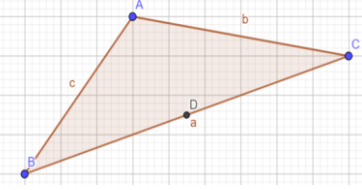
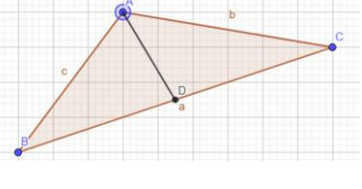
EK-4. (Devam) Araç Kullanımı Destek Eğitimi İçerikleri

Üçgende Kenarortay Çizimi		
Kağıt Üçgen ile Kenarortay	1. Adım: Kağıt üzerine doğrusal olmayan üç nokta belirleyin. Büyük harfle isimlendirin. 2. Adım: Seçtiğiniz herhangi iki noktadan geçen bir doğru çizin. Aynı işlemi tüm ikili noktalar için gerçekleştirin. Doğruların kesişmesi ile üçgeni oluşturun. 3. Adım: Oluşan üçgeni makas ile keserek kağıttan ayırınız. 4. Adım: Kenarortayını oluşturmak istediğiniz kenarı belirleyin. 5. Adım: Kenarın köşe noktalarını üst üste getirerek üçgeni katlayınız. 6. Adım: Katlama çizgisinin kenarla kesiştiği noktayı belirleyiniz. 7. Adım: Belirlediğiniz nokta ile kenarın karşısındaki köşeyi birleştiren doğru parçasını cetvel yardımıyla çiziniz	
	Sorular Kenarortay oluşturmak için üçgeni katladığınızda oluşan kat çizgisi ile dikkatinizi çeken noktalar nelerdir?	
	Cetvel –pergel ile çizim	1. Adım: Kağıt üzerine doğrusal olmayan üç nokta belirleyin. Noktaları büyük harfle isimlendirin.
		2. Adım: Seçtiğiniz herhangi iki noktadan geçen bir doğru çizin. Aynı işlemi tüm ikili noktalar için gerçekleştirin ve doğruların kesişmesi ile üçgeninizi oluşturun.
		3. Adım: Kenarortay çizmek istediğiniz kenarın köşe noktalarından birinin üzerine gelerek pergelin sabitleme ayağını köşe noktasına koyunuz.
		4. Adım: Pergeli kenarortay çizmek istediğiniz kenarın yarısından büyük olacak şekilde açınız ve bir yay çiziniz.

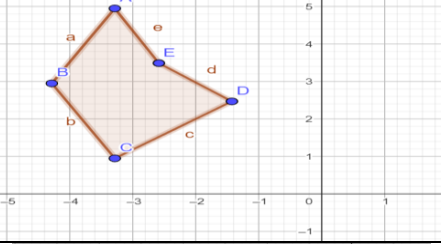
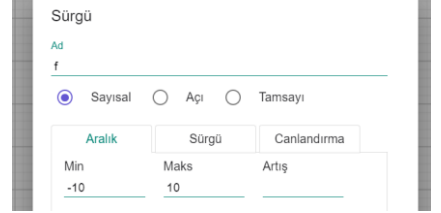
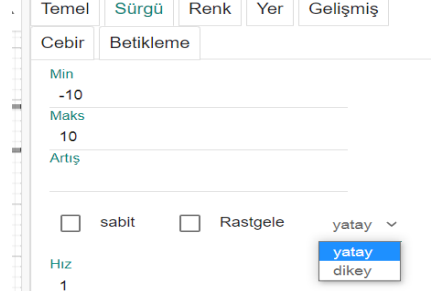
EK-4. (Devam) Araç Kullanımı Destek Eğitimi İçerikleri

	5. Adım: Pergelin açıklığını hiç bozmadan sabitleme ucunu kenarortay çizmek istediğiniz kenarın kullanmadığınız diğer köşesine koyunuz ve aynı şekilde bir yay çiziniz.	
	6. Adım: Çizdiğiniz yayların oluşan iki adet kesişim noktasını cetvel ile birleştiriniz.	
	7. Adım: Çizdiğiniz doğru parçasının kenarortay çizmek istediğiniz kenarı kestiği nokta o kenara ait orta noktadır. Büyük harf ile isimlendiriniz.	
	8. Adım: Bulduğumuz orta noktayı kenarın karşısındaki köşeyle cetvel aracılığıyla birleştiriniz.	
Sorular Çizdiğimiz yayların kesişim noktalarını birleştiren doğru parçası ile ilgili ne söylersiniz? Üçgenin tüm kenarlarının kenarortaylarını aynı şekilde çiziniz. Üçgenin kenarortaylarını çizdiğinizde oluşan şekil üzerinden cevap verirse dikkatinizi çeken nokta veya noktalar nedir?		
Geogebra ile Çizim	Adım 1: Çokgen butonun altında bulunan yer alan “Çokgen” seçeneğini aktif hale getiriniz. Adım 2: Grafik alanı içerisinde bir üçgen çiziniz.	
	Adım 3: Nokta ikonunun altındaki “Orta nokta veya Merkez” ikonunu aktif hale getiriniz.	

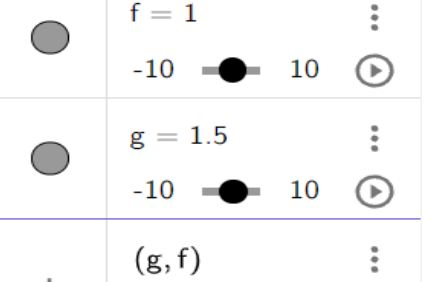
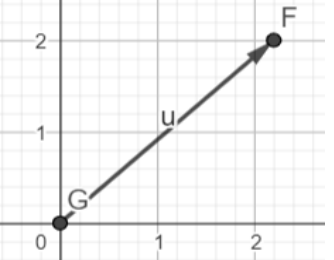
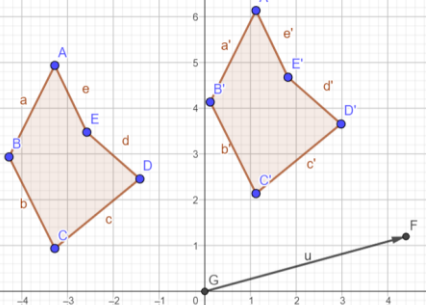
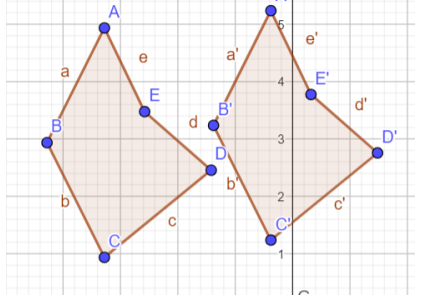
EK-4. (Devam) Araç Kullanımı Destek Eğitimi İçerikleri

	Adım 4: Kenar orta noktasını belirlemek istediğiniz kenarın köşe noktalarına sıra ile tıklayınız ve orta noktayı belirleyiniz.	
	Adım 5: Doğru ikonunun altında bulunan “Doğru parçası” seçeneğini aktif hale getiriniz. Adım 6: Bulduğunuz orta nokta ve karşı köşeyi birleştiriniz.	
- Geogebra üzerinde cetvel ve pergel için izlediğimiz adımları izleyerek üçgenin kenarortaylarını bulunuz. - Üçgeni taşı ikonuna tıklayarak aktif hale getirdikten sonra köşe noktalarını taşıyarak dar açılı, dik açılı ve geniş açılı üçgenler haline getiriniz. Üç durumu göz önünde bulundurarak nasıl bir sonuç çıkardınız? - Çizdiğiniz üçgen için tüm kenarların kenarortaylarını çizerek kenarortayların kesişim noktasını bulunuz. - Geogebra’nın ölçme özelliğini kullanarak kenarortayları oluşturan parça uzunluklarını ölçünüz.		

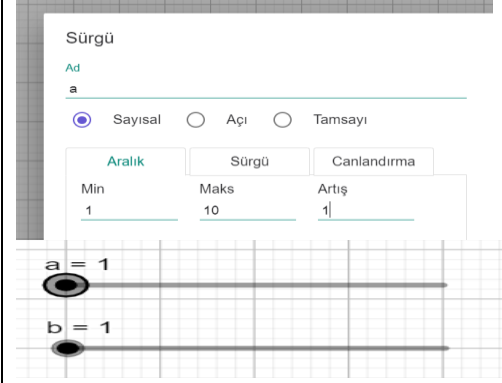
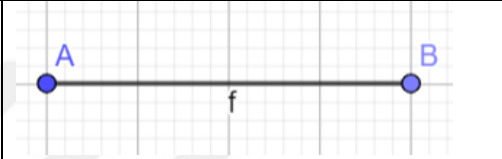
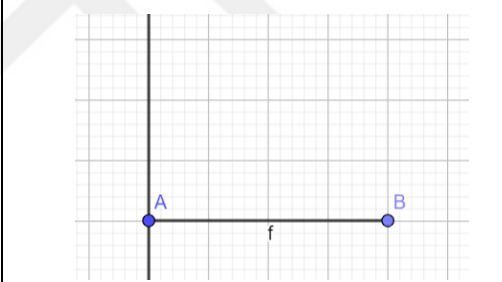
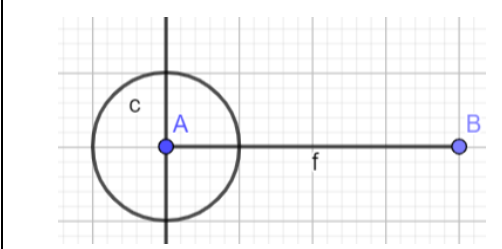
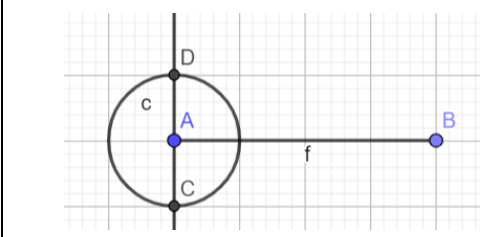
Nokta, Doğru Parçası ve Diğer Şekillerin Ötelemesinin Oluşturulması

Geogebra ile Çizim	Adım 1: Çokgen butonunu aktif hale getiriniz ve çizim alanına istediğiniz bir çokgen çiziniz.	
	Adım 2: Sürgü butonunu aktif hale getiriniz ve açılan kutucukta sürgü adını küçük bir harfle isimlendiriniz. Sürgünün maksimum ve minimum değerlerini belirlediğiniz yatay öteleme miktarına göre güncelleyiniz.	
	Adım 3: Dikey öteleme için bir önceki adımdakine benzer özelliklerde yeni bir sürgü oluşturunuz. Bu sürgünün işlevine bağlı olarak sürgünün yönünü dikey yapmak için sürgü üzerinde sağa tıklayınız. Açılan pencerede ayarlara tıklayarak sürgünün yönünü dikey olarak ayarlayınız.	

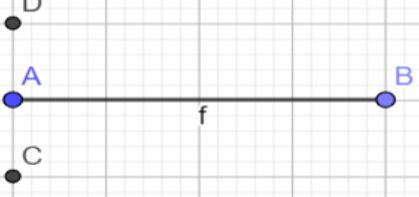
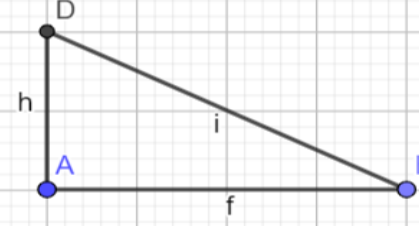
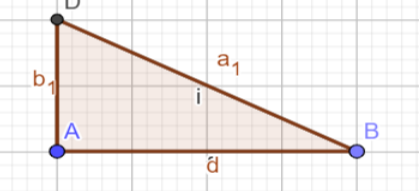
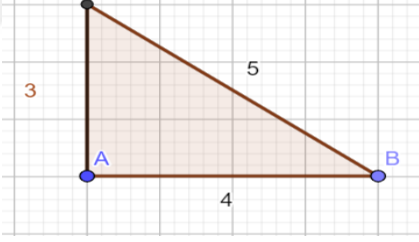
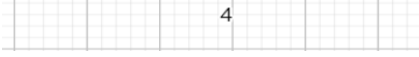
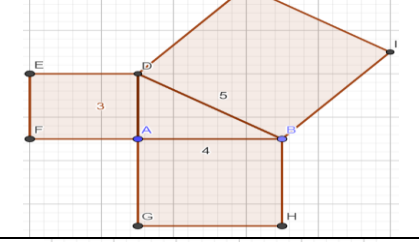
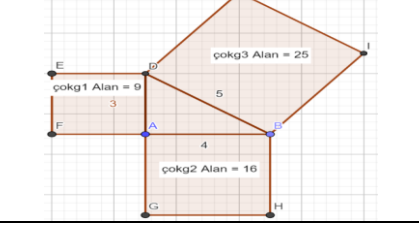
EK-4. (Devam) Araç Kullanımı Destek Eğitimi İçerikleri

	Adım 4: Cebir penceresine giriş bölümüne parantez içerisine sürgülerden ilki apsis, ikincisi ordinat olacak şekilde (a,b) noktasını oluşturunuz.	
	Adım 5: Doğru ikonunun altında yer alan vektör seçeneğini aktif hale getiriniz. Başlangıç noktası orjin olan belirlediğimiz noktaya bağlı bir vektör oluşturunuz.	
	Adım 6: Oluşturduğumuz çokgenin vektöre bağlı ötelemesi için dokuzuncu ikonun “doğruda yansıt” altındaki “vektörle ötele” seçeneğini aktif hale getiriniz. Ötelemek istediğimiz çokgene ve sonra vektöre tıklayınız ve çokgeni vektöre bağlayınız.	
	Adım 7: vektör üzerinde sağa tıklayarak “nesneyi göster” butonunu pasif hale getiriniz. Sürgüler aracılığı ile belirlediğiniz yöne belirlediğiniz miktarda öteleme gerçekleştiriniz.	
Soru Çokgenin bir doğru ve noktaya göre yansımaları nasıl elde edebiliriz? Geogebra üzerinde gerçekleştiriniz.		

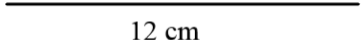
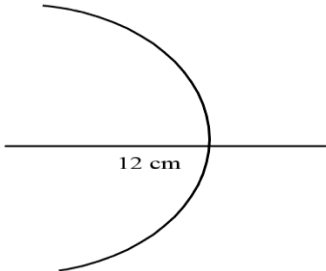
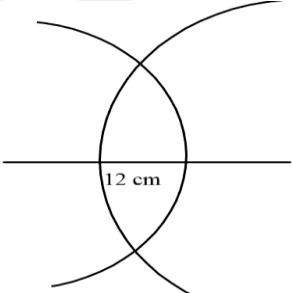
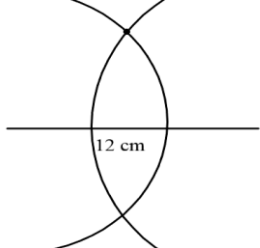
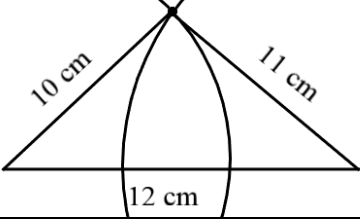
EK-4. (Devam) Araç Kullanımı Destek Eğitimi İçerikleri

Pisagor Bağntısının İspatı	
1. Adım: Geogebra'nın sürgü ikonuna tıklayarak iki adet sürgü oluşturunuz. Sürgüler üçgenlerin kenar uzunluklarını temsil edeceği için minimum değeri 1, maksimum değeri istediğiniz büyüklükte belirleyiniz. Artış miktarını kenar uzunluklarını tam sayı olması için 1 olarak giriniz.	
2. Adım: Doğru ikonu altında yer alan “Verilen Uzunlukta Doğru Parçası” seçeneğini aktif hale getiriniz. Çizim alanında boş bir yere tıklayarak açılan pencerede doğru parçasının uzunluğunu “a” olarak giriniz ve doğru parçasının uzunluğunu a sürgüsüne bağlayınız.	
3. Adım: Dik doğru seçeneğini aktif hale getiriniz. Sırası ile doğru parçasının bir noktasına ve doğru parçasına tıklayarak doğru parçasına dik doğru elde ediniz.	
4. Adım: Çember ikonu altında yer alan “Çember: Merkez & Yarıçap” seçeneğini aktif hale getiriniz. Dik doğru oluşturduğumuz noktayı merkez kabul eden çember çizmek için tıklayınız. Açılan pencerede yarıçap değerini “b” olarak giriniz.	
5. Adım: Nokta ikonu altında bulunan “Kesiştir” seçeneğini aktif hale getiriniz ve çember ile doğruya tıklayarak kesişim noktasını belirleyiniz.	

EK-4. (Devam) Araç Kullanımı Destek Eğitimi İçerikleri

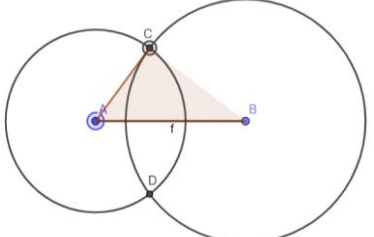
6. Adım: Çemberin görünmemesi için üzerlerinde sağa tıklayarak “nesneyi göster” seçeneğini pasif hale getiriniz. Aynı işlemi doğru için de gerçekleştiriniz.	
7. Adım: Doğru seçeneğinin altında yer alan “Doğru Parçası” seçeneğini aktif hale getiriniz. A noktası ile yeni oluşturduğunuz noktalardan birini seçerek birleştiriniz. Aynı şekilde B noktası ile seçtiğiniz noktayı birleştiren doğru parçasını çizin.	
8. Adım: Çokgen seçeneğini aktif hale getiriniz ve köşe noktalarına tıklayarak üçgeni oluşturunuz. Dilerseniz sağa tıklayarak “etiketi göster” butonunu pasif hale getiriniz ve etiketleri kapatınız	
9. Adım: Sürgüleri hareket ettirerek oluşturduğunuz üçgenin kenar uzunluklarını değiştirebilirsiniz.	
10. Adım: Açı ikonunun altında yer alan “Uzaklık veya Uzunluk” seçeneğini aktif hale getiriniz. Sıra ile üçgenin kenarlarına tıklayınız.	
11. Adım: Çokgen seçeneğinin altında yer alan “Düzgün çokgen” seçeneğini aktif hale getiriniz. Oluşturduğunuz dik üçgenin herhangi bir kenarını referans alacak şekilde kenarın köşe noktalarına tıklayınız ve açılan pencerede 4 değerini giriniz. Üçgenin kenarları üzerinde kareler oluşturunuz.	
12. Adım: Açı ikonunun altında yer alan “alan” seçeneğini aktif hale getiriniz. Oluşturduğunuz karelere tıklayarak alanlarını hesaplayınız.	
Soru: Üçgenin kenarlarında oluşturduğunuz düzgün çokgeni değiştirerek Pisagor bağıntısını sağlayıp sağlamadığını kontrol ediniz.	

EK-4. (Devam) Araç Kullanımı Destek Eğitimi İçerikleri

Üç Kenar Uzunluğu Verilen Üçgeni Çizme		
Cetvel ve Pergel ile Çizim	Yönergeler Verilen uzunluklar 10, 11 ve 12 olsun. 1. Adım: Cetvel yardımı ile 12 cm uzunluğunda bir doğru parçası çizin.	
	2. Adım: Pergelin açıklığını 10 cm olacak şekilde açın ve çizdiğiniz doğru parçasının bir ucunu merkez kabul eden 10 cm yarıçaplı bir çember yayı çizin.	
	3. Adım: Pergelin açıklığını 11 cm olarak ayarlayın ve çizdiğiniz 12 uzunluğundaki doğru parçasının diğer ucunu merkez kabul eden 11 cm yarıçaplı bir çember çizin.	
	4. Adım: Çizdiğimiz çemberlerin oluşan iki adet kesim noktasından birini seçin ve üçgenin üçüncü kenarı olarak belirleyin.	
	5. Adım: Cetvel yardımıyla doğru parçasının uç noktalarını belirlediğiniz kesişim noktası ile birleştirin.	
Sorular 6 cm, 8cm ve 10 cm uzunluğunda üç doğru parçası ile bir üçgen oluşturunuz. Üçgenle ilgili neler söylersiniz?		

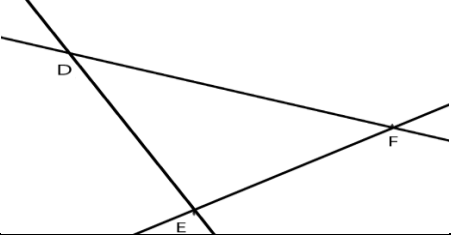
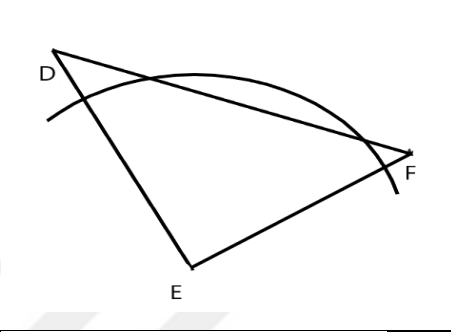
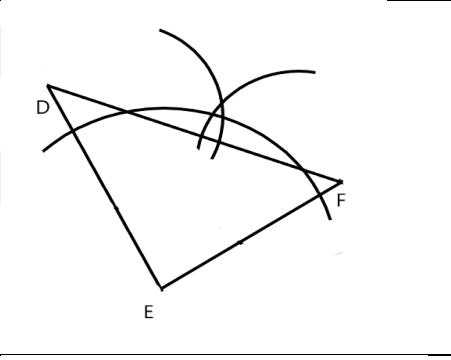
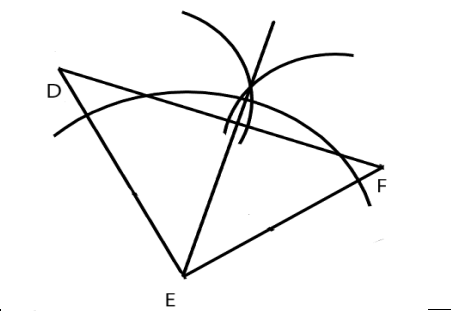
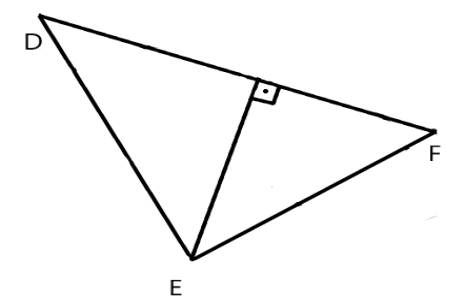
Geogebra ile çizim	Adım 1: Sürgü ikonuna tıklayarak sürgüyü aktif hale getiriniz. Çizim alanı üzerinde boş bir yere tıklayarak sürgünün adını “a” olarak giriniz. Uzunluk belirteceği için minimum değeri 0 maksimum değeri ise istediğiniz büyüklükte pozitif bir değer giriniz. Adım 2: Aynı şekilde sırasıyla b ve c sürgülerini oluşturunuz.	Sürgü Ad a ☒ Sayısal ☐ Açık ☐ Tamsayı Aralık Sürgü Canlandırma Min Maks Artış 0 20 1 a = 8 b = 3 c = 1
	Adım 3: Üçüncü sırada yer alan doğru ikonuna tıklayarak altındaki “Verilen Uzunlukta Doğru Parçası” seçeneğini aktif hale getiriniz. Çizim alanı üzerinde bir noktaya tıklayarak açılan pencereye uzunluk değerini “a” olarak giriniz.	Verilen Uzunlukta Doğru Parçası Uzunluk a
	Adım 4: Oluşturduğunuz doğru parçasının A noktasını merkez kabul eden b yarıçaplı bir çember çiziniz. Bunun için altıncı ikonun altında yer alan “Çember: Merkez&Yarıçap” seçeneğini aktif hale getiriniz. A noktasına tıklayınız ve açılan pencerede yarıçap değerini “b” olarak giriniz.	
	Adım 5: Aynı işlemi doğru parçasının B noktasını merkez kabul eden “c” yarıçaplı bir çember çizerek tekrar ediniz.	
	Adım 6: Oluşturduğunuz çemberlerin kesim noktalarını belirlemek için nokta ikonunun altındaki “Kesiştir” seçeneğini aktif hale getiriniz. Sırayla iki çembere dokununuz. (Eğer çemberlerin kesim noktası yoksa sürgü yardımı ile çemberleri büyütüp küçülterek kesiştiriniz).	

EK-4. (Devam) Araç Kullanımı Destek Eğitimi İçerikleri

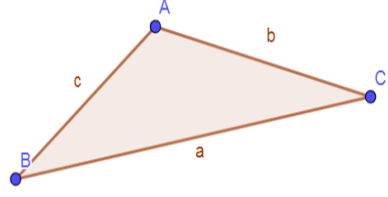
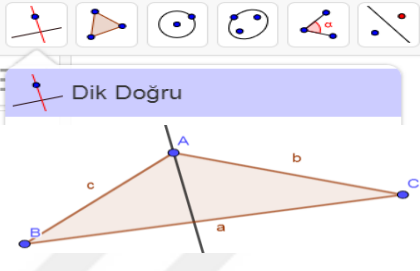
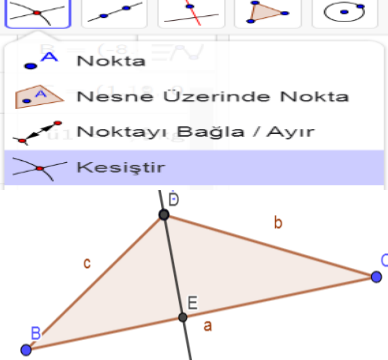
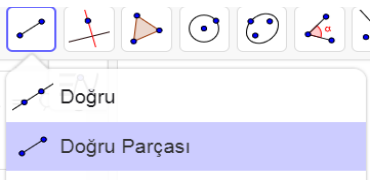
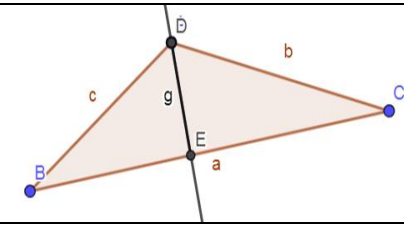
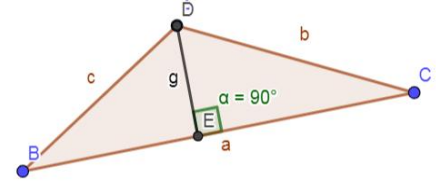
	Adım 7: Çokgen seçeneğini aktif hale getiriniz ve A, B ve çemberlerin kesişim noktalarından birini seçerek (C veya D) üçgeni tamamlayınız.	
Sorular Sürgüleri hareket ettirerek üçgen oluşan ve oluşmayan durumları gözlemleyiniz. Dar açılı, dik açılı ve geniş açılı üçgenler oluşturmaya çalışınız. Bu üçgenler için kenar uzunlukları arasında bir ilişkiden bahsedebilir miyiz?		

Üçgende Yükseklik İnşa Etme		
Kağıt Üçgen ile Yükseklik Çizimi	Yönergeler Adım: Kağıt üzerine doğrusal olmayan üç nokta belirleyiniz. Büyük harfle isimlendiriniz. Adım: Seçtiğiniz herhangi iki noktadan geçen bir doğru çiziniz. Aynı işlemi tüm ikili noktalar için gerçekleştiriniz ve doğruların kesişmesi ile üçgeninizi oluşturunuz. Üçgeninizin çeşitkenar olmasına dikkat ediniz. Adım: Oluşan üçgeni makas ile keserek kağıttan ayırınız. Adım: Yüksekliğini inşa etmek istediğiniz kenarı belirleyiniz. Adım: Taban ve tabanın karşısındaki köşe arasında oluşacak kat çizgisi için tabanın köşe noktalarından birini taban üzerine veya tabanla aynı doğrultuda olacak şekilde ayarlayınız. Bu şekilde katlamayı gerçekleştiriniz. Adım: Taban ve karşısındaki köşe arasında oluşan kat çizgisinin tabanı kestiği nokta ile yüksekliğin indirildiği köşeyi doğru parçası ile birleştiriniz.	
	Sorular Dik üçgen, eşkenar üçgen gibi farklı özellikte üçgenler için yüksekliği belirleyiniz.	
Cetvel ve Pergel ile	Yönergeler Adım: Kağıt üzerine doğrusal olmayan üç nokta belirleyin. Büyük harfle isimlendirin.	

EK-4. (Devam) Araç Kullanımı Destek Eğitimi İçerikleri

	2. Adım: Seçtiğiniz herhangi iki noktadan geçen bir doğru çiziniz. Aynı işlemi tüm ikili noktalar için gerçekleştiriniz ve doğruların kesişmesi ile üçgeninizi oluşturunuz.	
	3. Adım: Yüksekliğini çizmek istediğiniz kenarı belirleyiniz. Bu kenarın karşı köşesine pergelin sabitleme ucunu koyarak tabanı iki noktadan kesen bir yay veya biri tabanın uzantısını diğeri tabanı kesen bir yay çiziniz.	
	4. Adım: Pergelin sabitleme ucunu tabanı kestiğiniz noktalardan birine koyunuz. Pergelin açıklığını iki kesim noktasının uzunluğunun yarısından fazla olacak şekilde belirleyiniz ve bir yay çiziniz. 5. Adım: Pergelin açıklığını bozmadan sabitleme ucunu diğer kesim noktasına koyunuz ve bir önceki adımdaki yayla kesişen bir yay çiziniz.	
	6. Adım: Tabanın karşısındaki köşe ile yayların kesişim noktasını birleştiren bir doğru çiziniz.	
	7. Adım: Doğrunun tabanı kestiği nokta ile tabanın karşısındaki köşe arasında oluşan doğru parçası üçgenin belirlediğiniz tabana ait yüksekliğidir.	
Sorular Hangi üçgenler için taban üzerinde çizdiğiniz yayın iki kesim noktası oluşmaktadır.		

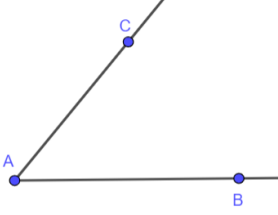
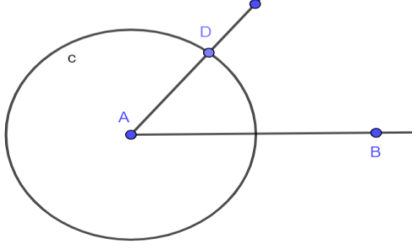
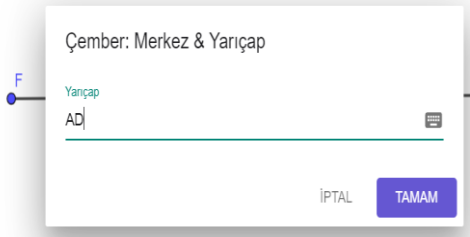
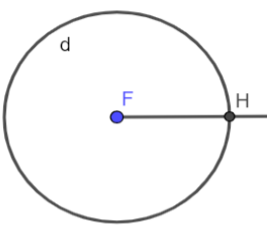
EK-4. (Devam) Araç Kullanımı Destek Eğitimi İçerikleri

Geogebra ile Yükseklik Çizimi	Adım 1: Çokgen butonunun altındaki “çokgen” butonunu aktif hale getirerek çizim alanına bir üçgen çiziniz.	
	Adım 2: Dördüncü sırada yer alan “dik doğru” butonunu aktif hale getiriniz. Yüksekliğini çizmek istediğiniz kenara (taban) ve bu kenarın karşı köşesine tıklayarak kenara dik doğruyu oluşturunuz.	
	Adım 3: Doğru ikonu altında yer alan “kesiştir” seçeneğini aktif hale getiriniz. Taban ve dik doğruya tıklayınız.	
	Adım 4: Doğru ile tabanın kesişim noktasını belirledikten sonra üçüncü sıradaki doğru ikonu altında yer alan “doğru parçası” seçeneğini aktif hale getiriniz.	
	Adım 5: Tabanın karşısındaki köşe ve doğrunun tabanı kestiği noktalara tıklayarak yüksekliği oluşturunuz.	
	Adım 6: Sekizinci sırada yer alan “açı” ikonuna tıklayarak açı ölçmeyi aktif hale getiriniz. Taban ve yüksekliğe tıklayarak açığı ölçünüz.	
Sorular Cetvel ve pergel ile çizim adımlarını Geogebra’da uygulayınız.		

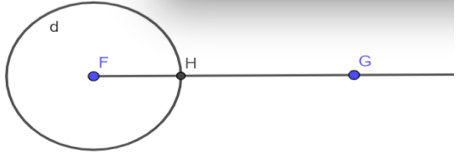
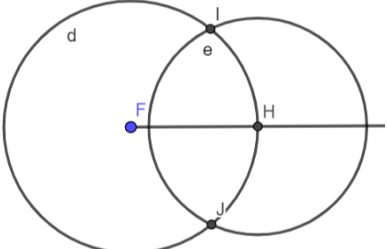
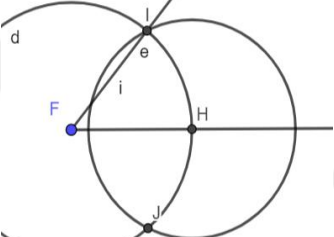
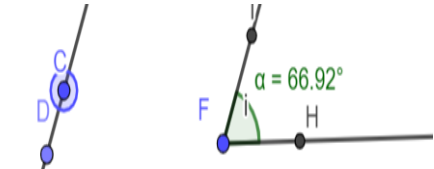
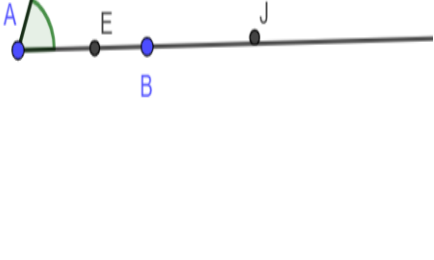
EK-4. (Devam) Araç Kullanımı Destek Eğitimi İçerikleri

Verilen Açıya Eşit Açı Çizmek		
Cetvel ve Pergel ile Çizim	Yönergeler 1. Adım: Pergelin sabitleme ucunu açının köşesine koyarak herhangi bir r miktarı açıklık belirleyiniz ve açının kollarını kesen yay çiziniz.	
	2. Adım: Cetvel yardımı ile bir ışın çiziniz ve kapalı ucu büyük harf ile tanımlayınız.	
	3. Adım: Pergelin sabitleme ucunu yeni oluşturulan ışının başlangıç noktasına koyunuz ve bir yay çiziniz.	
	4. Adım: Yayın ışın üzerinde kestiği noktayı işaretleyiniz ve büyük harf ile isimlendirin.	
	5. Adım: Eşitini çizmek istediğiniz açıya tekrar dönerek yayın açı kollarında kestiği noktalardan birine pergelin sabitleme ucunu koyun. Pergelin açıklığını yayın diğer kol üzerinde kestiği noktayla oluşan kiriş kadar açın.	
	6. Adım: Pergelin açıklığını değiştirmeden kendi çizdiğiniz ışına tekrar dönerek ilk çizdiğiniz yayın kestiği ve harflendirdiğiniz noktaya pergelin sabitleme ucunu koyarak bir yay çizin.	
	7. Adım: İlk çizdiğiniz yay ile ikinci çizdiğiniz yayın kesişim noktasını işaretleyip büyük harfle isimlendirin. 8. Adım: Cetvel yardımı ile ışının köşe noktasını başlangıç kabul eden ve yeni bulduğunuz kesişim noktasından geçen bir ışın çizin.	

EK-4. (Devam) Araç Kullanımı Destek Eğitimi İçerikleri

Geogebra ile Çizim	Adım 1: Doğru butonunun (3. Sıra) altındaki “ışın” seçeneğini aktif hale getiriniz. Adım 2: Çizim alanında başlangıç noktası aynı olan iki ışın çizerek bir açı oluşturunuz. Adım 3: 5. Sıradaki çember butonun altındaki “merkez ve nokta ile çember” butonunu aktif hale getiriniz ve çizdiğiniz açının köşe noktasını seçerek çemberin merkezi olarak belirleyin. Çemberi açının kolları üzerinde bir yere tıklayarak tamamlayın.	
		
	Adım 4: Nokta butonunun altındaki “kesiştir” seçeneğini aktif hale getirerek açının diğer kolu olan ışına ve oluşturduğunuz çembere tıklayınız.	
	Adım 5: Tekrar “ışın” seçeneğini aktif hale getiriniz ve çizim alanında bir ışın çiziniz.	
	Adım 6: Çember butonunun altındaki “merkez ve yarıçap” seçeneğini aktif hale getiriniz. İkinci çizdiğiniz ışının başlangıç noktasına tıklayınız ve karşınıza çıkacak çap değeri girme kutucuğuna büyük harfler ile daha önce oluşturduğumuz çemberi referans alarak yarıçapı bildiren harfleri (3. adımdaki merkez ve çemberin açısı ile kesişim noktası) giriniz.	
	Adım 7: Nokta butonunun altındaki “kesiştir” seçeneğini aktif hale getirerek sıra ile ışına ve yeni oluşturduğumuz çembere tıklayınız.	

EK-4. (Devam) Araç Kullanımı Destek Eğitimi İçerikleri

Adım 8: Çember butonunun altındaki “merkez ve yarıçap” seçeneğini aktif hale getiriniz. Çemberin merkezi olarak bu yeni belirlediğiniz kesişim noktasını seçiniz. Karşınıza çıkacak yarıçap değeri girme kutucuğuna bu defa açı ile çemberin kesişim noktalarının harflerini giriniz.	Çember: Merkez & Yarıçap Yarıçap ED 
Adım 9: Kesişen iki adet çember elde ettikten sonra nokta butonunun altındaki “kesiştir” seçeneğini aktif hale getirerek bu iki çemberin kesişim noktalarını belirleyiniz.	
Adım 10: Işın seçeneğini aktif hale getirerek ışının başlangıç noktasını başlangıç kabul eden ve yeni elde ettiğimiz kesişim noktasından geçen bir ışın çizersiniz.	
Adım 11: Taşı butonunu aktif hale getiriniz ve ilk oluşturduğumuz açının köşe noktasını hareket ettirerek açılar eş zamanlı hareketini gözlemleyiniz.	
Adım 12: Açı butonunun altındaki açı seçeneğini aktif hale getiriniz ve oluşturduğumuz her iki açıyı açının kollarına (saat yönünün tersi sıra ile) veya açılar üzerindeki üç noktaya (köşeye ikinci sırada) tıklayarak açıların değerlerini ölçünüz.	
Sorular Farklı şekilde eş ölçülü açılar elde etmenin yolunu bulabilir misiniz?	

EK-5. Uygulama Problemleri ve Analiz Çerçevesi

BEREKET MOTİFİ

Seda Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi geleneksel el sanatları bölümü öğrencisidir. Seda bu dönem El Sanatlarında Motif ve Kompozisyon dersini almaktadır. Final ödevi olarak kilim ve halılarda kullanılan motifleri inceleme ve bu motiflerden birini dokuma görevi verilmiştir. Seda ödev için Anadolu'da kullanılan elibeline, göz, hayatağacı ve bereket motiflerini incelemiştir. En çok eşkenar dörtgen şeklindeki bereket motifini beğenen Seda dokuma görevi için kâğıda şablonu çıkarmıştır. Ancak çıkardığı şablon ödevde istenilen ebatlara göre küçük kalacağı için motifi büyültmeye karar vermiştir. Bunun için belirlediği kenardan 4 cm uzaklıkta kenara paralel bir doğru çizmiştir. Aynı işlemi kalan üç kenara uygulamıştır. Bu doğruların kesiştiği noktaları köşe kabul eden daha büyük bir eşkenar dörtgen formunda bereket motifi oluşturmuştur. Böylece motifi bozmadan büyültmeyi başarmıştır. Ancak bu defa yeni motifin içinde yer alacak ilme, atkı ve çözgü sayısını belirleyebilmek için büyütülmüş motifin alanını hesaplaması gerekmektedir. Orijinal motifin bir kenar uzunluğu 5 cm ve alanı ise 20 cm² dir. Büyütülmüş motifin alanını ve yeni kenar uzunluğunu hesaplamaya kalkan Seda nasıl bir yol izlemelidir?

Epistemolojik Düzlem Bileşenleri	Oluşumlar			Bilişsel Düzlem Bileşenleri
Temsiller	Semiyotik Oluşum			Görselleştirme
Eşkenar dörtgen temsili Paralel doğrular temsili Yükseklik temsili	Görsel Temsil	Eşkenar dörtgen çizimi Paralel doğru çizimi Yükseklik çizimi	Algısal Kavrayış	
	Sembolik Temsil	Köşe noktaları kullanılarak eşkenarın sembolik ifade edilmesi Paralelliğin sembolik temsili (//) Yükseklik sembolik temsili		
	Sözel Temsil	Sözel ve günlük konuşma ile ifadeler (örn: motif diyerek eşkenar dörtgenin ifade edilmesi)		
Temsile Dayalı İşlevsel Kavrayış				
İlk dörtgenin etrafına paralel doğruların çizimi ile yeni dörtgenin aranması Paralel kenarlar arası mesafenin ayarlanmasına yönelik çizimler				
Artefekt	Enstrümantal Oluşum			Oluşturma

EK-5. (Devam) Uygulama Problemleri ve Analiz Çerçevesi

Pergel-cetvel veya Geogebra vb. ile verilen özelliklere sahip eşkenar dörtgen çizimi Paralel doğruların araçla çizimi Araç ile büyütülmüş eşkenar dörtgen çizimi Araç ile eşkenar dörtgenin yüksekliğini inşa etme Araç ile yeni eşkenar dörtgenin alanını hesaplama	Pergel ve cetvel veya Geogebra vb. ile eşkenar dörtgeni çizme adımlarının izlenmesi Paralel doğruların araç ile çizim adımlarının izlenmesi Yüksekliğin araç ile ölçülmesi Alanın araç ile hesaplanması	Sıralı Kavrayış	
Araca Bağlı İşlevsel Kavrayış			
Araç ile farklı formlarda eşkenar dörtgen çizimi ile doğru eşkenar dörtgenin aranması			
Referanslar	Söylemsel Oluşum		Muhakeme-İspat
Eşkenar dörtgenin dörtgenler içindeki hiyerarşisi Eşkenar dörtgenin alan formülü Eş ve benzer çokgenler bilgisi Üçgende açı-açı-açı benzerliği	Söylemsel Kavrayış	Eşkenar dörtgenin aynı zamanda bir paralelkenar olduğunun ifade edilmesi Benzer çokgenlerin açı ve kenar özelliklerinin ifade edilmesi Eşkenar dörtgenlerin yükseklikleri oranı ile kenar uzunlukları arası ilişkisinin kurulması Eşkenar dörtgenlerin alanları arasında benzerlik olduğunun ifade edilmesi Alanlar arası oranın benzerlik oranının karesi olduğunun ifade edilmesi	
Söyleme Dayalı İşlevsel Kavrayış			
Eşkenar dörtgenin kullanılacak alan formülüne uygun olarak çizilmesi Benzer eşkenar dörtgenin yüksekliğinin ilk yüksekliğe bağlı çizilmesi			

BUNGALOV EV

Bilge'nin babası mimardır. Müşterilerine özel üretim ahşap evler için çizim yapmaktadır. Bilge teknoloji tasarım ödevinde yapacağı maket eve yardım istemek için okul çıkışı babasının ofisine uğramıştır. Babası Bilge'ye yardım etmek için bir şart koşmuştur. Eğer okulda öğrendikleri ile babasının yapacağı bir sonraki projenin hesaplamasını yapabilirse babası da Bilge'ye maket ev yapması için yardım edecektir. Babası yeni yapacağı evin bazı özelliklerini söylemiştir.

- Evin tabanı için 6 metreye 10 metre dikdörtgen beton zemin oluşturulmuştur.
- Evin hem yan duvarları hem de çatısı olma özelliğine sahip dikdörtgen formda iki adet birbirine eş ahşap çevreleme kullanılmıştır. Bir ayrıtı 5 metre olan bu dikdörtgen levhalar zeminin karşılıklı iki kenarına yerleştirilmiş ve bir kenarları çakışacak şekilde evin tepesinde birleştirilmiştir.

EK-5. (Devam) Uygulama Problemleri ve Analiz Çerçeveleri

- Yapının kalan iki duvarı da beton zeminin karşılıklı diğer iki kenarına yerleştirilmiştir. Bu çevreleme elemanları ikizkenar üçgensel formda ve birbirine eştir.

Babası Bilge'den evin tabanı hariç geriye kalan dört yüzey için kullanılması gereken ahşap kaplama malzemesinin kaç metrekare olduğunu hesaplamasını istemiştir. Bilge biraz düşündükten sonra babasına başka bir bilgi verip veremeyeceğini sormuştur. Bunun üzerine babası Bilge'ye yeni bir bilgi karşılığında evin kaç metreküplük bir hacim işgal ettiğini hesaplaması gerektiğini söylemiştir. Bilge babasının şartını kabul etmiş ve ondan yeni bir bilgi daha istemiştir.

Babası evin içerisine ev sahibinin talebi üzerine bir şömine inşa ettiklerini, şöminenin zeminden başlayarak çatının en yüksek olduğu noktaya kadar uzanan taş bacasıyla toplam 4 metre olduğunu ifade etmiştir.

Bilge evin dört duvarı için kullanılması gereken malzeme miktarını ve evin hacmini hesaplarken nasıl bir yol izlemelidir?

(Çevreleme elemanı: Bir yapının etrafını kapatan duvar, çit, cam gibi yapılardır.)

Epistemolojik Düzlem Bileşenleri	Oluşumlar			Bilişsel Düzlem Bileşenleri
Temsiller	Semiyotik Oluşum			Görselleştirme
Dikdörtgen temsili Üçgen temsili Üçgen prizma temsili Taban yüksekliği temsili Taban temsili	Görsel Temsil	Üçgen çizimi Dikdörtgen çizimi Üçgen prizma çizimi Yükseklik çizimi	Algısal kavrayış	
	Sembolik Temsil	Dikdörtgenin sembolik temsili Üçgenin sembolik temsili Üçgen prizmanın sembolik temsili Yüksekliğin sembolik temsili		
	Sözel Temsil	Sözel ve günlük konuşma dili ile ifadeler (örn: Yüksekliğin şömine ile ifade edilmesi)		
Temsile Dayalı İşlevsel Kavrayış				
Verilen bilgilere bağlı çizimler ile yapının aranması Yüzeylerin ayrı ayrı çizim ile ifade edilmesi				
Artefekt	Enstrümantal Oluşum			Oluşturma

EK-5. (Devam) Uygulama Problemleri ve Analiz Çerçevesi

Araç ile dikdörtgenin çizilmesi Araç ile yüksekliğin inşa edilmesi Araç ile üçgen prizmanın çizilmesi Araç ile üçgen prizmanın yüzey alanının hesaplanması Araç ile üçgen prizmanın hacminin hesaplanması	Cetvel ile dikdörtgeni oluşturma adımları Geogebra ile dikdörtgeni oluşturma Araç ile yüksekliğin inşa edilmesi Geogebra ile üçgen prizmanın oluşturulması Geogebra “alan hesaplama” aracı ile yüzey alanlarının hesaplanması Geogebra ile üçgen prizmanın hacminin hesaplanması	<i>Sıradı kavrayış</i>		
<i>Araca Bağlı İşlevsel Kavrayış</i>				
Prizmanın Geogebra üzerinde döndürülmesi Prizmanın Geogebra’nın “yüzeyde açma” aracı ile yüzey parçaların oluşturulması				
Referanslar	Söylemsel Oluşum		Muhakeme-İspat	
Üçgen eşitsizliği Üçgenlerde eşlik-benzerlik Dikdörtgen alan bilgisi Üçgen alan bilgisi İkizkenar üçgen bilgisi Pisagor bağıntısı Prizmaların özellikleri Hacim bilgisi	Söylemsel Kavrayış	Yapının üçgen prizma olduğunun ifade edilmesi 5 metrelik kenarın üçgen prizmanın üçgen olan yüzeyine ait ayrıt olduğunun ifade edilmesi Üçgen yüzeylerin ikizkenar olduğunun ifade edilmesi Soruda gereksiz bilgi verildiğinin ifade edilmesi Yüksekliğin hesaplanabildiğinin ifade edilmesi Prizmaların hacimlerinin taban plakası ve yükseklik ile ilişkisinin ifade edilmesi		
<i>Söyleme Dayalı İşlevsel Kavrayış</i>				
Üçgen eşitsizliği bilgisine bağlı ayrıt uzunluklarının doğru yerleşiminin aranması				

EV İÇİN ARAZİ

Baha ailesi ile birlikte pikniğe gitmiştir. Baha’nın babası Bahadır uzun zamandır inşa ettirmek istediği bungalov ev için arazi araştırmaktadır. Piknik alanının yakınında imara uygun bir arazi olduğunu görmüştür. Arazinin satılık olduğunu belirten bir tabela olmasına karşılık tabela üzerinde iletişim numarası görememiştir. Yaptırmayı planladığı 2+1, 90 m² ev, 20 m² depo alanı, 100 m² sera alanı için arazinin büyüklüğünden emin olamamıştır. Bahadır oğlu Baha’dan dörtgen şeklindeki arazinin kenarlarını dörtgenin bir köşesinden başlayarak ardışık olarak ölçmesini istemiştir. Baha kenar uzunluklarını sırası ile 32, 64, 100, 76 ayak olarak belirlemiştir. Baha dört ayak uzunluğunun yaklaşık 1 metre olduğunu düşünerek hesaplama yaparken kenarların hiçbirinin diğerine dik olmadığını hatırlamıştır. Biraz uğraştıktan sonra araziye tekrar gitmesi gerektiğini fark etmiştir. Arazinin birbirine paralel olan iki kenarı arasındaki en kısa mesafeyi 60 ayak olarak ölçen Baha’nın alanı hesaplaması için gerekli adımların neler olduğunu söyleyebilir misiniz? Arazi Bahadır’ın yaptırmayı planladığı ev, depo ve sera için yeterli midir?

EK-5. (Devam) Uygulama Problemleri ve Analiz Çerçevesi

Epistemolojik Düzlem Bileşenleri	Oluşumlar			Bilişsel Düzlem Bileşenleri
Temsiller	Semiyotik Oluşum			Görselleştirme
Dörtgen temsili Yamuk temsili Yükseklik temsili Paralellik temsili	Görsel Temsil	Arazinin tanımlanmasına bağlı çeşitkenar dörtgen çizilmesi İki kenarın paralellğine bağlı yamuk çizilmesi Kenarların paralel olacak şekilde çizilmesi Paralel kenarlar arası en kısa mesafenin yükseklik olarak çizilmesi	Algısal Kavrayış	Çeşitkenar dörtgen çizimi Dikdörtgen çizimi Paralelkenar çizimi Yamuk çizimi Yükseklik çizimi Üçgen çizimi
	Sembolik Temsil	Dörtgenin sembolik ifade edilmesi Paralelliğin sembolik ifade edilmesi Yüksekliğin ve dikliğin sembolik ifade edilmesi		Yükseklik sembolü Yamuğun alan formülü
	Sözel Temsil	Sözel ve günlük konuşma dili ile ifadeler (örneğin yüksekliğin iki kenar arasındaki en kısa yürüme mesafesi olduğunu ifade etme)		
Temsile Dayalı İşlevsel Kavrayış				
Verilen kenar uzunluklarına sahip farklı dörtgen çizimleri gerçekleştirilmesi				Verilen kenar uzunluklarına sahip paralelkenar, çeşitkenar dörtgen ve yamuk çizilmesi
Artefekt	Enstrümantal Oluşum- Sıralı Kavrayış			Oluşturma
Yamuğun cetvel ve pergel ile çizilmesi Yamuğun Geogebra ile çizilmesi Yamuğun alanının Geogebra ile ölçülmesi	Verilen uzunlukların ölçümü için cetvelden yararlanılması Yamuğun oluşturulmasında cetvel ve pergel kullanılması Geogebra ile yamuğun oluşturulma adımlarının izlenmesi Geogebra’da oluşturulan yamuğun alanının alan ölçme aracı ile ölçülmesi		Sıralı Kavrayış	-
Araca bağlı işlevsel kavrayış				
Sadece kenar uzunluklarının bilindiği durumda birden fazla dörtgen çizildiğinin Geogebra ile keşfedilmesi				-
Referanslar	Söylemsel Oluşum			Muhakeme- İspat

EK-5. (Devam) Uygulama Problemleri ve Analiz Çerçeveleri

Özel dörtgenler bilgisi Yamuk bilgisi Yamuk alan formülü Üçgende kenar açı özellikleri Üçgende kenar açı bağıntısı Üçgen eşitsizliği Bir dörtgenin çizilmesi için gerekli şartlar bilgisi	Söylensel Kavrayış	Dörtgenin verilen bilgilere bağlı yamuk olduğunun ifade edilmesi Paralel kenarların hangileri olduğunu üçgende açı kenar bağıntısı ile gerekçelendirme Yamuğun alan formülünü gerekçeleri ile ifade etme Paralellik durumu ve yükseklik verilmediğinde aynı kenar uzunluğuna sahip birden fazla dörtgen çizileceğini ifade etme İlk durumda verilen bilginin yetersiz olduğunun ifade edilmesi Paralel kenarlar olduğu bilgisinin problemin çözümü için yeterli olduğunun ifade edilmesi Bir dörtgenin çizilmesi için en az beş bilginin gerekli olduğunun ifade edilmesi	Verilen kenar uzunluklarının birbirinden farklı olmasına bağlı dikdörtgen, kare, paralelkenar olmadığının ifade edilmesi Üçgen eşitsizliği ve üçgende kenar açı ilişkisine bağlı olarak paralel olan kenarların 8 cm ve 25 cm uzunluğundaki kenarlar olduğunun ifade edilmesi Yamuğun alan formülünü iki eş yamuğun birleşimi üzerinden ifade etme Yüksekliğe bağlı çizilebilen tek yamuk olduğunun ifade edilmesi
Söyleme Dayalı İşlevsel Kavrayış			
Üçgen eşitsizliği ve üçgende kenar açı bağıntılarının sağlandığının kontrolü için kenar uzunluklarının yamuk üzerine yerleştirilmesi Yamuğun alan bağıntısının oluşturulması için eş yamuğun çizilmesi, yamuğun parçalara ayrılması		Paralel olan kenarların 8-25 ve 16-19 cm olarak kontrol edildiği çizimler gerçekleştirilmesi Yamuğun bir dikdörtgen ve iki üçgene ayrılarak alanının hesaplanması	

KABİLENİN GÜNEŞİ

Afrika'nın Sahra Çölü'ne yakın coğrafyalarında oynanan bir oyun vardır. Oyun kabile liderlerinin herkese aynı yakınlıkta olması düşüncesine dayalıdır ve adı Kabilenin Güneşi'dir. Oyun 4 kişi ile oynanmaktadır. İçlerinden biri ebe olmaktadır. Oyunculardan biri eline aldığı 3 adet kozalağı atabildiği kadar çok yükseğe atmaktadır. Yere düşen kozalaklar oyuncuların yerleşkesidir. Eğer kozalaklar düz bir hat boyunca düşerse tekrar havaya atılmaktadır. Oyuncular kendilerine yakın olan bir kozalağı seçip oraya yerleşmektedir. Ebe tüm oyunculara eşit uzaklıkta bir nokta seçerek kendisine bir yerleşke noktası belirler. Yanlarında getirdikleri baobab ağacı liflerinden örülmüş ip ebe ve bir oyuncu arasında gerilir ve ipin uzunluğunun sabit kalması için düğüm atılır. Sonra ip sırasıyla diğer oyunculara verilir ve ipin gerginliğine bakılır ip çok sarkık kalıyor veya diğer oyuncunun olduğu yere yetişmiyorsa ebe yine ebe olmaya devam eder. Eğer ipin uzunluğu tüm oyuncular için yeterli geliyorsa ebenin tüm oyunculara eşit uzaklıkta olduğu anlamına gelir ve ebe diğer oyunculardan birini ebe olarak belirler.

EK-5. (Devam) Uygulama Problemleri ve Analiz Çerçeveleri

Eze, Ewe, Gora ve Inaya yukarıdaki oyunu oynamaktadır. Inaya bu oyunu çok iyi oynamaktadır ve neredeyse hiç kaybetmemektedir. Arkadaşlarının ısrarı üzerine onlara kullandığı taktiği kısmen açıklamıştır.

- Belirlediği herhangi iki kişinin arasında düz bir ip hayal etmektedir. Sonra da bu ipin orta noktasını göz kararı belirlemektedir. Kum üstünde geri geri giderken ayağıyla bu hayali ipin orta noktasından dik geçen yine hayali bir ipin izini toprak üzerine işaretlemektedir.
- Aynı işlemi ikişer ikişer tüm oyuncular için yaptığını ve belli etmeden bu oluşturduğu izlerin kesiştiği yeri yerleşke olarak kullandığını söylemiştir.

Inaya'nın verdiği ipucuna göre yeniden oynamak isteyen Ewe ebe olmayı kabul etmiştir. Eze tarafından atılan kozalakların doğrusal olmadığı ve ikişer ikişer aralarındaki mesafelerin 6m, 8m ve 10m olduğu bilindiğine göre Ewe'nin bulunduğu yeri ve kazanması için kaç metrelik ipin gerekli olduğunu belirleyebilir misiniz?

Epistemolojik Düzlem Bileşenleri	Oluşumlar			Bilişsel Düzlem Bileşenleri
<i>Temsiller</i>	<i>Semiyotik Oluşum</i>			<i>Görselleştirme</i>
3 adet doğrusal olmayan nokta temsili Noktaların kesişimi ile oluşan üçgen temsili Dik üçgen temsili Kenar orta nokta temsili Kenar orta dikme temsili Paralellik temsili İkizkenar üçgen temsili Kenar orta dikmelerin kesişim noktası temsili Yarıçap temsili Kenar orta dikmelerin kesişim noktasını merkez kabul eden çember temsili Çevrel çember temsili	Görsel Temsil	Nokta Üçgen çizimi Dik üçgen çizimi Paralellik temsili Benzer üçgen temsili İkizkenar üçgen temsili Kenar orta nokta çizimi Kenar orta dikme çizimi Kenar orta dikme kesişim çizimi Yarıçap çizimi Çember çizimi	<i>Algısal Kavrayış</i>	
	Sembolik Temsil	Harflerle noktaların ifade edilmesi Köşe noktalarını kullanarak üçgenin ifade edilmesi Dikliğin sembolik temsili Yarıçapın sembolik temsili		
	Sözel Temsil	Sözel ve günlük konuşma dili ile ifadeler (örn: iki çocuğun aralarındaki mesafenin yarısını bulma)		

EK-5. (Devam) Uygulama Problemleri ve Analiz Çerçeveleri

<i>Temsile Dayalı İşlevsel Kavrayış</i>			
Çeşitli formlarda üçgen temsilleri oluşturma Dik dar açılı, geniş açılı üçgen, çeşitkenar, ikizkenar ve eşkenar üçgen temsili oluşturma ve bu üçgen çizimi üzerinde kenar orta dikmelerin çizimi			
<i>Artefekt</i>	<i>Enstrümantal Oluşum</i>		<i>Oluşturma</i>
Araç ile verilen uzunluklara bağlı üçgenin çizimi Kenar orta noktaların araç ile hesaplanması Kenar orta dikmelerin araç yardımıyla çizilmesi Köşelere olan uzaklığın araç ile ölçülmesi Çevrel çemberin araç ile çizilmesi Üç noktadan geçen çemberin araç ile çizilmesi	Pergel ve cetvel ile üç kenarı bilinen üçgenin çizilmesi Geogebra ile üçgenin çizilmesi Kenar orta noktaların cetvel ile belirlenmesi Kenar orta dikmelerin cetvel ile çizilmesi Kenar orta noktaların Geogebra ile çizilmesi Kenar orta dikmelerin Geogebra ile çizilmesi Şekil üzerinde ölçümlerin araç ile gerçekleştirilmesi Pergel ile çevrel çember oluşturulması Geogebra ile çevrel çember oluşturulması	<i>Sıralı Kavrayış</i>	
<i>Araca Bağlı İşlevsel Kavrayış</i>			
Araç ile çeşitli üçgen formlarının çizilmesi Farklı üçgen formlarının orta dikmelerin araç ile inşası Farklı üçgen formları için kenar orta dikmelerin kesişim noktasının araç ile inşası			
<i>Referanslar</i>	<i>Söylemsel Oluşum</i>		<i>Muhakeme-İspat</i>
Bir doğru parçasının orta noktasını bulma Bir doğru parçasına dikme indirme bilgisi Özel üçgenler bilgisi Dik üçgen bilgisi Üçgende yardımcı eleman bilgisi Üçgenlerde benzerlik bilgisi İkizkenar üçgen bilgisi Çemberin geometrik tanımı	<i>Söylemsel Kavrayış</i>	Kenar orta dikmenin yükseklik ve kenarortay ile ilişkisi Dik üçgende kenar orta dikmeye bağlı oluşan benzer üçgenlerin olduğu bilgisi Dik üçgende kenar orta dikme çizimine bağlı oluşan ikizkenar üçgen bilgisi Bir üçgende kenar orta dikmelerin bir noktada kesişeceği bilgisi Dik üçgende kenar orta dikmelerin kesişim noktasının hipotenüs üzerinde olduğu bilgisi Üçgende kenar orta dikmelerin kesişim noktasının üçgenin köşelerine eşit uzaklıkta olduğu bilgisi Dik üçgende hipotenüse çizilen kenarortay uzunluğunun hipotenüs uzunluğunun yarısına eşit olduğu bilgisi Üçgende kenar orta dikmelerin kesişim noktasının çevrel çemberin merkezi olduğu bilgisi Düzlemde doğrusal olmayan herhangi üç noktadan geçen bir çember çizilebileceği bilgisi	

EK-5. (Devam) Uygulama Problemleri ve Analiz Çerçeveleri

<i>Söyleme Dayalı İşlevsel Kavrayış</i>	
Kenar orta dikmelerin farklı kesişim durumlarının aranması (üçgenin içinde, üzerinde, dışında) Tüm üçgenler için kenar orta dikmelerin köşelere eşit uzaklıkta olma durumunun aranması Bir üçgende kenar orta dikmelerin kesişim noktasının üçgenin çevrel çemberinin merkezi olduğunun aranması Üçgen oluşturma durumu olan üç noktadan geçen bir çember çizilebileceği bilgisinin aranması	

KIRIK SERAMİK

Müge ve Defne'nin annesi olan Sibel İngilizce öğretmenidir. Sibel öğretmen hobisi olan seramikle ilgilenmekte ve yaşadıkları şehirde halk eğitim merkezi kurslarına katılmaktadır. Kendisi için yaptığı dikdörtgen şeklindeki seramik duvar panosunu pişirmiş ve duvarına asmak için eve getirmiştir. Müge ve Defne panoyu çok beğenmiş her ikisi de kendi odalarına asmak istemişlerdir. Panoyu birbirlerinin ellerinden çekip almaya çalışırken yere düşürmüşler ve panoyu parçalamışlardır. Pano yere düştüğünde içerisinde kalan küçük bir hava noktasından başlayarak köşelere doğru düz bir çizgi şeklinde parçalanmış, dört üçgensel parçaya ayrılmıştır. Kızlarının bu dikkatsizliğine ve inatçılığına üzülen Sibel öğretmen yerden aldığı iki üçgen parçayı Müge'ye kalan iki parçayı da Defne'ye vermiş ve şöyle demiştir;

- Panoyu ikinize de eşit şekilde dağıtmış oldum. Şimdi istiyorsanız bu parçaları odanıza asabilirsiniz.

Müge ve Defne hem çok üzülmüş hem de annelerinin bu söylediğine çok şaşırılmışlardır. Çünkü ellerindeki üçgenlerin hepsi birbirinden farklıdır ve eşit görünmemektedir. Sibel Hanım'ın yaptığı panonun eni 20 cm boyu 30 cm uzunluğundadır. Kızlar tarafından parçaları bir araya getirilen panoda çatlağın merkez noktası uzun kenarlardan birine 8 cm, kısa kenarlardan birine de 12 cm uzaklıktadır. Müge ve Defne'ye annelerinin söylediğinin mümkün olup olmayacağı ile ilgili yardımcı olabilir misiniz?

EK-5. (Devam) Uygulama Problemleri ve Analiz Çerçevesi

Epistemolojik Düzlem Bileşenleri	Oluşumlar			Bilişsel Düzlem Bileşenleri
<i>Temsiller</i>	<i>Semiyotik Oluşum</i>			<i>Görselleştirme</i>
Dikdörtgen temsili Nokta temsili Üçgen temsili Yükseklik temsili	Görsel Temsil	Panonun tanımlanmasına bağlı dikdörtgen çizilmesi Çatlama noktasını temsil için dikdörtgen içinde nokta çizilmesi Panonun kırık parçaları için üçgen çizilmesi Uzaklık için yükseklik çizilmesi	<i>Algısal kavrayış</i>	Dikdörtgen çizimi Üçgen çizimi Yükseklik çizimi Dörtgensel bölgelere ayrılmış dikdörtgen çizimi Üçgensel bölgelere ayrılmış dikdörtgen çizimi Köşegen çizimi Koordinat sistemi çizimi
	Sembolik Temsil	Dikdörtgenin sembolik köşe noktaları ile temsil edilmesi Noktanın sembolik temsili Üçgenlerin sembolik temsili Yüksekliğin sembolik temsili		Yükseklik sembolü Koordinat sistemi üzerinde çatlama noktanın (x,y) yapısı ile temsil edilmesi
	Sözel Temsil	Sözel ve günlük konuşma dili ile ifadeler (örn yüksekliğin düz çizgi ile ifade edilmesi)		Üçgenlerin parçalar olarak ifade edilmesi İki nokta arasında doğru parçası çizilmesinin çizgiler çekmek olarak ifade edilmesi
<i>Temsile Dayalı İşlevsel Kavrayış</i>				
Dikdörtgenin ortak köşeye sahip üçgenlere parçalanmasına yönelik çizimler gerçekleştirme				Dikdörtgenin dörtgensel ve üçgensel bölgelere ayırmaya yönelik çizimlerin gerçekleştirilmesi Çatlama noktasının konumunun belirlenmesine yönelik çizimler gerçekleştirilmesi Farklı noktaları referans olarak dikdörtgenin içinde üçgenler elde edilen çizimler gerçekleştirilmesi
<i>Artefekt</i>	<i>Enstrümantal Oluşum</i>			<i>Oluşturma</i>
Pergel-cetvel veya Geogebra vb. ile verilen uzunluklara sahip dikdörtgen çizimi Araç ile dikdörtgen içinde üçgenlerin çizimi Geogebra ile oluşturulan üçgenlerin alanını hesaplama	Pergel-cetvel veya Geogebra ile dikdörtgeni çizme adımlarının izlenmesi Geogebra ile dikdörtgen içinde noktanın belirlenmesi ve bu nokta ile dikdörtgenin köşeleri arasında doğru parçalarının oluşturulması adımlarının izlenmesi Geogebra ile oluşan üçgenlerin çokgen aracı ile oluşturulması Geogebra'nın alan ölçme aracı ile üçgenlerin alanlarının belirlenmesi	<i>Sıralı Kavrayış</i>		-

EK-5. (Devam) Uygulama Problemleri ve Analiz Çerçeveleri

<i>Araca Dayalı İşlevsel Kavrayış</i>		
Geogebra ile noktayı hareketli hale getirip üçgenlerin alanlarındaki değişimi izleme		-
<i>Referanslar</i>	<i>Söylemsel Oluşum</i>	<i>Muhakeme- İspat</i>
Dikdörtgenin alan formülü Bir kenarı ve kenara ait yüksekliği bilinen üçgenin alanı	<i>Söylemsel Kavrayış</i> Üçgenlerin ortak köşe noktasının dikdörtgenin içinde olması gerektiğinin ifade edilmesi Ortak köşe noktasının oluşacağı dört konum olduğunu belirleme Ortak köşe noktasının bulunduğu yerin üçgenlerin alanlarının eşitliği için durumu değiştirmedeğinin ifade edilmesi Cebirsel ifade ile eşitliğin doğrulanması	Üçgen eşitsizliği ile dikdörtgenin köşegeninin uzunluğunun alacağı değer aralığının hesaplanması Noktanın kenarlara olan uzaklık bilgisine bağlı dört farklı konumu olduğunu ifade edilmesi Noktanın kenarlara olan dik uzaklığının yükseklik olarak işe koşulması Köşegen üzerinde alınan merkez noktasının köşegenin iki tarafında eşit alana sahip üçgenler oluşturacağını ifade edilmesi Üçgenlerin eşliğinin alanları üzerinden sağlanması
<i>Söyleme Dayalı İşlevsel Kavrayış</i>		
Dikdörtgen içerisinde farklı nokta konumlarının ilişkiyi kontrol etmek amacıyla aranması		Çatlama noktasının konumu belirlendikten sonra dikdörtgenin dönme sonucundaki görüntülerinin çizilmesi Dikdörtgene bağlı oluşan üçgenlerin dikdörtgenden ayrılarak çizilmesi

MİRAS KALAN TARLA

Ali yıllar sonra oğlu ile köyüne gitmiştir. Köy muhtarından dedesinden kendisine bir tarla kaldığını öğrenmiştir. Ali bu duruma hem çok şaşırılmış hem de araziyi görmek için heyecanlanmıştır. Muhtar üçgen şeklindeki arazinin dere kenarında olmasından kaynaklı çok kullanışlı olmadığını, ayrıca tarlanın yarısının aslında dedesinin erkek kardeşinin olduğunu da söylemiştir. Ali tarlayı görmek istemiş ancak köyün çıkışındaki baraj inşaatı yüzünden yolların kapalı olduğunu öğrenmiştir. Muhtar Ali'ye arsanın kenar uzunluklarını parsel üzerinden söylemiştir. Ali arsayı görmeden önce 8. sınıfa giden oğlu Mete'den tarlanın alanını hesaplamasını istemiştir. Tarlayı eşit alana sahip iki üçgensel parçaya ayırmak isteyen Ali oğlundan bu paylaşımı dere kenarı üzerinden yapmasını istemiştir. Bu bilgilere göre:

Muhtarın verdiği bilgilere göre Mete için alanı hesaplayabilir misiniz?

Babasının istediği şekilde araziye iki eş alana ayırabilir misiniz?

EK-5. (Devam) Uygulama Problemleri ve Analiz Çerçeveleri

Keçecilerin Ahmet'in tarlası ile ortak olan kısım	Hacıların İbrahim ile ortak olan kısım	Çoşandere ile ortak olan kısım (Dere
200 metre	180 metre	340 metre

Epistemolojik Düzlem Bileşenleri	Oluşumlar			Bilişsel Düzlem Bileşenleri
Temsiller	Semiyotik Oluşum			Görselleştirme
Çeşitkenar bir üçgen temsili Geniş açılı üçgen temsili Kenarortay temsili Yükseklik temsili	Görsel Temsil	Çeşitkenar üçgen çizimi Geniş açılı üçgen çizimi Kenarortay çizimi Yükseklik çizimi	Algısal Temsil	
	Sembolik Temsil	Köşe noktalarını kullanarak üçgenin ifade edilmesi Geniş açılı üçgende geniş açının sembolik temsili Kenarortayın sembolik ifadesi Yüksekliğin sembolik ifadesi		
	Sözel Temsil	Sözel ve günlük konuşma dili ile ifadeler (örn: kenarortayın çizgi olarak ifade edilmesi)		
Temsile Dayalı İşlevsel Kavrayış				
Verilen bilgilere bağlı çizimler ile üçgenin aranması Üçgeni iki üçgene ayıran doğru parçası çizimleri				
Artefekt	Enstrümantal Oluşum			Oluşturma
Pergel-cetvel ile veya Geogebra ile üçgenin çizilmesi Araç kullanarak yüksekliğin hesaplanması Araç kullanarak alanın hesaplanması	Pergel ve cetvel veya Geogebra ile üçgeni oluşturma adımlarının izlenmesi Kenar orta noktanın pergel, cetvel veya Geogebra ile belirlenmesi Kenarortayın pergel, cetvel veya Geogebra ile çizilmesi Yüksekliğin pergel, cetvel, Geogebra ile çizilmesi Alanın bulunmasında Geogebra “alan” aracının kullanılması			Sıralı Kavrayış
Araca Bağlı İşlevsel Kavrayış				
Doğru parçasının konumunun araç yardımı ile aranması (köşeden kenara çizilen doğru parçasının kenar üzerindeki konumunun değiştirilerek ayırdığı üçgenlerin alanlarının eşit olduğu noktanın belirlenmesi) Kenarortayın üçgenin alanını iki eş parçaya ayırmasının araç ile aranması				

EK-5. (Devam) Uygulama Problemleri ve Analiz Çerçeveleri

<i>Referanslar</i>	<i>Söylemsel Oluşum</i>		<i>Muhakeme- İspat</i>
Üçgen eşitsizliği bilgisi Üçgenin çizilebilmesi için yeterli ve gerekli eleman bilgisi Üçgende açı kenar ilişkisi bilgisi Çeşitkenar üçgen bilgisi Geniş açılı üçgen bilgisi Kenarortay bilgisi Üçgende alan bilgisi	<i>Söylemsel Kavrayış</i>	Verilen uzunlukların üçgen oluşturduğunun ifade edilmesi Üç kenar uzunluğu bilinen üçgenin çizilebildiğinin ifade edilmesi Üçgenin geniş açılı olduğunun ifade edilmesi Kenarortayın üçgenin alanını iki eş parçaya ayırdığının ifade edilmesi Üçgenin bir köşesinden karşı kenara çizilen doğru parçasının tabanda ayırdığı parçaların oranının oluşan üçgenlerin alanları oranına eşit olduğunun ifade edilmesi	
<i>Söyleme Dayalı İşlevsel Kavrayış</i>			
Dik üçgen oluşturmaya yönelik çizimler Üçgenin yardımcı elemanları bilgisine dayalı kenarortay çizimi			

OTLAK ALANI

7. sınıfa devam eden Ayşe'nin ailesi hayvancılık ile uğraşmaktadır. Ayşe hem okula devam etmekte hem de derslerden fırsat buldukça hayvanların bakımı konusunda ailesine destek olmaktadır. Ayşe kitap okumaya fırsat bulabildiği ve ödevlerini yapabildiği için en çok koyunların otlatılmasına yardımcı olmaktadır. Cumartesi günü de koyunları otlatmak için babasıyla birlikte meraya gitmiştir. Ayşelerin koyunları otlattığı mera düzlüktür. Ayşe burada ağacın altında matematik ödevini yapmakta bir taraftan da hayvanlara göz kulak olmaktadır. Bu sırada ahırın en yaramaz keçisi Polar'ı gözünün önünden ayırmamak için merada kulübelerinin dışından duvara 10 metre uzunluğundaki ip ile bağlamıştır. Kulübenin kapladığı alan dışında tüm alan otlamak için uygun olup kulübenin etrafında çit bulunmamaktadır. Ayşe'nin Polar'ı bağladığı yer eni 4 m boyu 6 m olan dikdörtgen kulübenin uzun olan kenarlarından birinin tam ortasıdır. Babası Ayşe'nin keçiyi bağladığı yeri beğenmeyerek yine dışardan kulübenin kısa kenarlarından birinin ortasına bağlamıştır. Keçinin bu sayede daha fazla otlayabileceğini söylemiştir. Babasının bu söylediğinin doğru olup olmadığını kontrol etmesi için Ayşe'ye yardım eder misiniz?

EK-5. (Devam) Uygulama Problemleri ve Analiz Çerçevesi

Epistemolojik Düzlem Bileşenleri	Oluşumlar			Bilişsel Düzlem Bileşenleri
Temsiller	Semiyotik Oluşum			Görselleştirme
Dikdörtgen temsili Orta nokta temsili Yarıçap temsili Daire dilimi temsili Yarım daire temsili Çeyrek daire temsili Dairenin merkezi temsilleri Alan Temsili	Görsel Temsil	Dikdörtgen çizimi Orta nokta temsili Yarıçap çizimi Yarım daire çizimi Çeyrek daire çizimi Alan tarama	Algısal Kavrayış	
	Sembolik Temsil	Dikdörtgenin köşe noktaları ile ifade edilmesi Yarıçapın sembolik temsili Daire diliminin sembolik temsili Alanın sembolik temsili		
	Sözel Temsil	Sözel ve günlük konuşma dili ile ifadeler (duvarın bu noktasından bu noktasına kadar olan alan, ip uzunluğu ile yarıçapın ifade edilmesi vb.)		
Temsile Dayalı İşlevsel Kavrayış				
Dikdörtgen üzerinde merkez noktası farklı noktalar referans alınarak yarım daire, çeyrek daire temsillerinin oluşturulması Uzun kenarın orta noktasını referans alarak yarım, çeyrek daire parçalarının oluşturulması Kısa kenarı referans alarak yarım ve çeyrek dairelerin oluşturulması				
Artefekt	Enstrümantal Oluşum			Oluşturma
Dikdörtgenin araç ile çizilmesi Daire dilimlerinin araç ile çizilmesi Alanın araç ile hesaplanması	Cetvel ile dikdörtgenin çizilmesi Cetvel ve pergel ile daire dilimlerinin çizilmesi Geogebra ile dikdörtgenin çizilmesi Geogebra ile daire dilimlerinin çizilmesi Daire dilimlerinin alanlarının Geogebra ile hesaplanması		Sıralı Kavrayış	
Araca Bağlı İşlevsel Kavrayış				
Araç desteği ile farklı merkez noktalarına sahip daire dilimlerinin çizilmesi Araç desteği ile merkez noktanın değişiminin gerçekleştirilmesi				
Referanslar	Söylemsel Oluşum			Muhakeme- İspat
Dikdörtgenin kenar ve açı özellikleri Dairenin alan formülü Daire diliminin alan bilgisi	Söylemsel Kavrayış	Dikdörtgenin üzerinde ulaşılamayan nokta olmadığının fark edilmesi Dikdörtgenin yarım ve çeyrek dairesel alanların oluşumundaki rolünün ifade edilmesi Dikdörtgenin farklı uzunluktaki kenarlarının orta noktasını başlangıç kabul eden durumlar için alanın değişiminin ifade edilmesi Dikdörtgen üzerindeki farklı başlangıç noktalarına göre alanda meydana gelen değişimin ifade edilmesi En büyük alanın elde edilmesi için bağlama noktasının köşe noktası olmasının ifade edilmesi		

EK-5. (Devam) Uygulama Problemleri ve Analiz Çerçeveleri

<i>Söyleme Dayalı İşlevsel Kavrayış</i>	
Dikdörtgenin köşelerine bağlı 180°'lik merkez açıya sahip yarım daire, 90°'lik açıya bağlı çeyrek daire, dikdörtgenin köşesinde oluşan 270° lik dış açıya bağlı $\frac{3}{4}$ 'lük daire çizimi. Kenarların orta noktasını merkez kabul eden daire dilimlerinin simetrik çizimi Kenar üzerinde farklı noktalara bağlama durumuna bağlı daire dilimleri çizilmesi	

PARK PEYZAJI

Tuna'nın annesi Ebru belediyenin park ve bahçeler müdürlüğünde peyzaj mimarı olarak görev yapmaktadır. Üzerinde çalıştığı güncel proje trafik eğitim parkı projesidir. Büyük bir proje olduğu için bu projede, ilgili birimden başka bir arkadaşı ile birlikte çalışmaktadır. Çalışmanın raporunun ertesi güne yetiştirilmesi gerekmektedir. Projenin saha ölçümlerini arkadaşı Onur gerçekleştirmiştir. Park projesinde yollar arasında kalan boş alanların peyzajında ağaçlandırma yapılacaktır. Parkın ağaçlandırılacağı alanı hesaplamak isteyen Ebru proje üzerinde çalışmaya başladığında arkadaşının farklı bir ölçüm kayıt sistemi kullandığını fark etmiştir. Üçgensel bölgelerin üç kenar uzunluğunu kaydetmek yerine cennet bambusu dikim alanında iki kenar uzunluğu ve bu kenarlardan birine ait kenarortayı kaydetmiştir. Bodur mavi ladin dikim alanında ise üçgenin iki kenarı ve bu kenarlardan birine ait yüksekliğini kaydetmiştir. Ebru'nun kullandığı programa bu bölgelerin kenar uzunluklarını girmesi gerektiği için Tuna'dan yardım istemiştir. Üçgenlerin üçüncü kenar uzunluklarını bulması için Tuna'nın yapması gereken hesaplamaları yapabilir misin?

	<i>İki kenar uzunluğu</i>	<i>Verilen diğer uzunluk</i>
<i>Cennet bambusu dikim alanı</i>	6 metre, 10 metre	10 metrelik kenarın kenarortayı 5 metre
<i>Bodur mavi ladin dikim alanı</i>	5 metre, 8 metre	8 metrelik kenara ait yükseklik 4 metre (yükseklik üçgenin içinde çizilmiştir)

EK-5. (Devam) Uygulama Problemleri ve Analiz Çerçevesi

Epistemolojik Düzlem Bileşenleri	Oluşumlar			Bilişsel Düzlem Bileşenleri
Temsiller	Semiyotik Oluşum			Görselleştirme
Üçgen temsili Dik üçgen temsili İkizkenar üçgen temsili Kenar orta nokta temsili Kenarortay temsili Yükseklik temsili	Görsel Temsil	Peyzaj alanlarının tanımına bağlı üçgen çizilmesi Yüksekliğin verilmesine bağlı üçgende yükseklik çizilmesi Yüksekliğe bağlı dik üçgen çizilmesi Kenarortaya bağlı orta nokta temsili ve kenarortayın çizilmesi	Algısal kavrayış	Doğru parçası ve orta nokta temsili Üçgen çizimi Dik üçgen çizimi İkizkenar üçgen çizimi Yükseklik çizimi Kenarortay çizimi
	Sembolik Temsil	Üçgenlerin sembolik temsili Yüksekliğin sembolik temsili Kenarortayın sembolik ifadesi Yüksekliğin sembolik ifadesi		Birinci üçgende oluşan ikizkenar üçgenlere ait kenar uzunluğu ve açılarının sembolik temsilleri
	Sözel Temsil	Sözel ve günlük konuşma dili ile ifadeler (üçgenlerin bitki isimleri ile temsil edilmesi)		Üçgen alanlarının bitkilerin ekildiği yer ile ifade edilmesi
Temsile Dayalı İşlevsel Kavrayış				
Verilen kenar uzunluklarının ve yardımcı elemanın yerleşiminin keşfedilmesine yönelik çizimler			Kenarın ve kenara ait kenarortayın çizimi üzerine diğer iki kenarın yerleşiminin arandığı çizimler Kenarın ve kenara ait yüksekliğin çiziminden sonra diğer kenarların yerleşimine yönelik çizimler	
Artefekt	Enstrümantal Oluşum			Oluşturma
Pergel-cetvel ile veya Geogebra ile üçgen oluşturma Kenarortayın pergel-cetvel veya Geogebra ile çizilmesi Yüksekliğin pergel-cetvel veya Geogebra ile inşa edilmesi Pergel-cetvel ile veya Geogebra ile verilmeyen kenarı oluşturma Pergel-cetvel ile veya Geogebra ile verilmeyen kenar uzunluğunu belirleme	Pergel-cetvel veya Geogebra ile üçgeni oluşturma adımlarının izlenmesi Kenar orta noktanın cetvel-pergel veya Geogebra ile belirlenmesi Yüksekliğin pergel –cetvel veya Geogebra ile çizilmesi Verilmeyen kenarın inşasının araç ile gerçekleşmesi Verilmeyen kenarın uzunluğunun cetvel ile ölçülmesi veya Geogebra'nın uzaklık veya uzunluk ölçme aracı ile belirlenmesi			10 cm uzunluğa sahip kenarın cetvel ile çizilmesi Bu kenarın orta noktasının cetvel ile belirlenmesi Kenarortayın oluşturduğu üçgenin köşelerinden biri kenarın orta noktası olacak şekilde cetvel ve pergelle çizim adımları izlenerek oluşturulması Üçgenin bulunan üçüncü köşesine bağlı bulunması istenen kenarın cetvelle çizilmesi Üçüncü kenarın uzunluğunun cetvel ile ölçülmesi

EK-5. (Devam) Uygulama Problemleri ve Analiz Çerçeveleri

<i>Araca Dayalı İşlevsel Kavrayış</i>		
Birinci üçgende açı özelliklerinin keşfedilmesinde Geogebra açı ölçme aracından yararlanma Birinci üçgende ikizkenar üçgenin tabanı ile üçüncü kenarın paralelliğinin Geogebra ile keşfedilmesi		-
<i>Referanslar</i>	<i>Söylemsel Oluşum</i>	<i>Muhakeme- İspat</i>
Üçgenin çizilebilmesi için bilinmesi gereken temel eleman bilgisi Kenarortay bilgisi Dik üçgen bilgisi Üçgende yükseklik bilgisi Çokgenlerde benzerlik Pisagor bağıntısı bilgisi	<i>Söylemsel Kavrayış</i> Birinci üçgende kenarortayın üç kenarı bilinen üçgen oluşturduğunun yapılandırılması Birinci üçgende kenarortaya bağlı ikizkenar üçgenlerin oluşturduğunun yapılandırılması İkizkenar üçgenlerin açı ölçülerine bağlı birinci üçgenin dik açılı üçgen olduğunun ifade edilmesi Dik açılı üçgende Pisagor bağıntısı ile üçüncü kenar uzunluğunun hesaplanması Birinci üçgende ikizkenar üçgenlerin yüksekliklerinin paralellik ve benzer üçgenler durumu oluşturduğunun fark edilmesi Benzerlik ilişkisine bağlı üçüncü kenar uzunluğunun hesaplanması Bir dik üçgende hipotenüse ait kenarortay uzunluğunun hipotenüs uzunluğunun yarısına eşit olduğunun ifade edilmesi Bir üçgende iki kenar ve bir kenara ait kenarortay uzunluğu biliniyorsa üçgenin çizilebileceğinin fark edilmesi İkinci üçgende yüksekliğin iki kenar uzunluğu bilinen dik açılı üçgen oluşturduğunun belirlenmesi İkinci üçgende Pisagor bağıntısı ile istenen kenar uzunluğunun hesaplanması Bir üçgenin çizilmesi için gerekli uzunlukların hepsinin kenar uzunluğu olması gerekmediğinin ifade edilmesi Bir üçgende iki kenar ve üçgende bir kenara ait yükseklik biliniyorsa bu üçgenin çizilebileceğinin fark edilmesi(yüksekliğin üçgenin içinde veya dışında olmasına bağlı iki farklı üçgen çizilebileceğinin fark edilmesi)	Dik üçgende kenarortayın hipotenüsün yarısı olduğunun ifade edilmesi Üçgen eşitsizliği ile üçüncü kenar uzunluğunun alabileceği değer aralığının hesaplanması Kenarların hesaplanmasında üçgende açı kenar ilişkisinin kullanılması Birinci üçgende kenarortayın aynı zamanda yükseklik olup olmadığının Pisagor bağıntısı ile kontrol edilmesi Birinci üçgende kenarortayın ikizkenar üçgen oluşturduğunun ifade edilmesi İkizkenar üçgenlerin açı özelliklerinin ve yüksekliğin oluşturduğu üçgenlerin kullanılması ile oluşan benzer üçgenlerin yapılandırılması Benzer üçgenler ile birinci üçgende istenen kenarın 8 m olarak hesaplanması İkizkenar üçgene bağlı birinci üçgenin dik açılı olduğunun belirlenmesi Birinci üçgende kenarortayın üçgenin alanını iki eş parçaya ayırdığının ifade edilmesi Dik açılı üçgen olma özelliğine bağlı üçüncü kenarın Pisagor bağıntısı ile hesaplanması Birinci üçgende istenen kenar uzunluğunun hesaplanmasında iki kare farkı özdeşliğinin kullanılması

EK-5. (Devam) Uygulama Problemleri ve Analiz Çerçeveleri

<i>Söyleme Dayalı İşlevsel Kavrayış</i>	
Birinci üçgende kenarortay ve kenarortayın kenarda ayırdığı parçaların eşit uzunlukta olmasına bağlı dik üçgenin çizilmesi İkinci üçgende kenara ait yüksekliğin üçgende ayırdığı üçgenin 3-4-5 özel üçgeni olarak çizilmesi	Birinci üçgende 6 metrelik kenara ve uzunluğunun bulunması istenen kenara Pisagor bağıntısı kullanmak için dikmeler çizilmesi Birinci üçgende kenarortayın yükseklik olmadığının kontrolüne bağlı tabanla yaptığı açılar geniş ve dar olacak şekilde çizilmesi Kenarortayın üçgenin alanını eşit iki parçaya ayırdığı bilgisine bağlı alanı oluşturan bileşenlerin (yükseklik, kenar uzunluğu) çizilmesi Birinci üçgende dik üçgende hipotenüse ait kenarortay bilgisine bağlı üçgenin dik açılı çizilmesi

DOĞUM GÜNÜ PASTASI

Eylül'ün annesi Derya özel günler için butik pasta yapmaktadır. Yeni bir sipariş almıştır. Siparişi veren aile çocuklarının rubik küpleri çok sevdiği için pastanın 3x3'lük rubik küp şeklinde olmasını istemişlerdir. Derya Hanım kişi sayısına göre pasta büyüklüğü ve istenilen pasta formunu elde etmek için kullanması gereken pasta kalıbının 30x30x8 cm ayırıt uzunluğuna sahip kare prizma biçimli kalıp olması gerektiğine karar vermiştir. Pastanın kek katmanları için kalıbı üç sefer kullanmış ve tam kalıbın ölçüsünde kekler elde etmiştir. Pastanın küp gibi görünmesi için yüksekliğini keklerin arasına koyduğu krema ve meyveler ile tamamlamıştır. Oldukça yüksek bir pasta yapan ve bol krema kullanmak zorunda kalan Derya Hanım pastanın rubik küp görüntüsü için kullanacağı şeker hamuru kaplamasını ağırlığından dolayı kaldırmayacağından endişelenmiştir. Bunun için şeker hamurunu yerleştirmeden önce sabitleme çubukları kullanmaya karar vermiştir. Önce pastanın dört köşesine dikey şekilde bambu çubuklar yerleştirerek katları birbirine sabitlemeyi düşünmüştür. Ancak kekin ortadan çatlamasından korktuğu için farklı bir yöntem uygulamak istemiştir. Bunun için sabitleme çubuklarını sağ üst ön köşeden sol alt arka köşeye bir tane, sol üst ön köşeden sağ alt arka köşeye bir tane, sağ üst arkadan sol alt ön köşeye bir tane ve sol üst arkadan sağ alt ön köşeye bir tane olmak üzere toplam dört tane yerleştirmeye karar vermiştir. Derya Hanım çubukların pasta kesilmeden önce çıkarılması için çubuk uzunluğunun tam köşeden köşeye olmasını istemektedir. Keki çok fazla delmemek için bu çubukları bir seferde yerleştirmeyi isteyen Derya Hanım çubukların boyunu bir türlü belirleyememiştir.

EK-5. (Devam) Uygulama Problemleri ve Analiz Çerçevesi

Kızı Eylül'den yardım istemiştir. Eylül ilk başta annesinin kullandığı pasta kalıbını incelemiş ve annesinin çubukları nasıl yerleştireceğini çözmeye çalışmıştır. Annesinin kullanması gereken çubukların boyunun yaklaşık olarak ne kadar olması gerektiğini bulması için Eylül'e yardımcı olur musunuz?

Epistemolojik Düzlem Bileşenleri	Oluşumlar			Bilişsel Düzlem Bileşenleri
Temsiller	Semiyotik Oluşum			Görselleştirme
Kare temsili Kare prizma temsili Küp temsili Köşegen temsili Dik açılı üçgen temsili Cisim köşegeni temsili	Görsel Temsil	Küpe bağlı karenin çizilmesi Kalıplara bağlı kare prizma çizilmesi Pastanın şekline bağlı küp çizilmesi Çubukların konumuna bağlı cisim köşegeni çizilmesi Cisim köşegeni üçgenine bağlı yüzey köşegeni çizilmesi	Algısal kavrayış	Kare Kare prizma Dik açılı üçgen Küp Cisim köşegeni Yüzey köşegeni Dikdörtgen prizma Rubik küp çizimi
	Sembolik Temsil	Kare prizmanın sembolik temsili Küpün sembolik temsili Köşegenin sembolik temsili Cisim köşegeninin sembolik temsili Cebirsel temsiller		Küpün bir ayrıtının, yüzey köşegeninin ve cisim köşegeninin genel sayı olarak " x ", " $x\sqrt{2}$ " ve " $x\sqrt{3}$ " ile temsil edilmesi
	Sözel Temsil	Sözel ve günlük konuşma dili ile ifadeler		Cisim köşegeninin küpün içindeki köşegen olarak isimlendirilmesi
Temsile Dayalı İşlevsel Kavrayış				
Verilen bilgilere bağlı parçaların yerleştirilmesine yönelik çizimler Sabitleme çubuklarının yerleşiminin aranmasına yönelik çizimler			Pasta katmanlarının ve kremanın yerleşimi ile küpü oluşturacak çizimler Çubukların yerleşiminin keşfedilmesi için farklı perspektiften ve boyutta gerçekleştirilen çizimler	

EK-5. (Devam) Uygulama Problemleri ve Analiz Çerçeveleri

<i>Artefekt</i>	<i>Enstrümantal Oluşum</i>		<i>Oluşturma</i>
Küpün Geogebra ile çizimi Yüzey köşegeninin Geogebra ile çizimi Cisim köşegeninin inşasında Geogebra kullanımı Cisim köşegeninin uzunluğunun Geogebra ile ölçülmesi	Verilen ayrıt uzunluklarına sahip küpün Geogebra 3B aracı ile oluşturulması Küpün yüzey köşegeninin Geogebra'nın doğru parçası aracı ile çizilmesi Küpün cisim köşegeninin Geogebra'nın doğru parçası aracı ile çizilmesi Çizilen cisim köşegeninin uzunluğunun Geogebra'nın uzaklık veya uzunluk ölçme aracı ile ölçülmesi	<i>Sırlı Kavrayış</i>	Hacimler takımındaki küpün pasta olarak kabul edilmesi Hacimler takımındaki küp içerisine cisim köşegeni olarak uç kutusunun yönergelere bağlı olarak yerleştirilmesi
<i>Araca Dayalı İşlevsel Kavrayış</i>			
Küp içinde oluşan dik üçgenin Geogebra çokgen aracı ile oluşturulması Geogebra küp çiziminin cisim köşegeni ve açı özelliklerinin keşfi için döndürülmesi, uzaklaştırıp yakınlaştırılması			Küp, uç kutusu ile oluşturulan 3B yapıda küp içinde oluşan üçgenin ayrıtlarının keşfedilmesi
<i>Referanslar</i>	<i>Söylemsel Oluşum</i>		<i>Muhakeme- İspat</i>
Kare bilgisi Kare prizma bilgisi Küp bilgisi İkizkenar dik üçgen bilgisi Yüzey köşegen bilgisi Pisagor bağıntısı bilgisi	<i>Söylemsel Kavrayış</i>	Cisim köşegenlerinin birbirine eşit olduğunun ifade edilmesi Cisim köşegenini hipotenüs kabul eden dik açılı üçgenin belirlenmesi Cisim köşegeninin uzunluğunun hesaplanmasında Pisagor bağıntısının kullanımının ifade edilmesi Küpün cisim köşegeninin $a\sqrt{3}$ olduğunun ifade edilmesi Cisim köşegeninin belirlenen bir köşe ile bu köşeden geçmeyen yüzlerin kesişim noktası birleştiren doğru parçası olduğunun ifade edilmesi Küpün cisim köşegeni için elde edilen bağıntının dikdörtgen prizma için yapılandırılması	Cisim köşegeninin küpün ayrıt uzunluğundan ve yüzey köşegeninden uzun olduğunun yapılandırılması Dört cisim köşegeninin de eşit olduğunun belirlenmesi Cisim köşegeninin yüzey köşegeninden farklı olduğunun ifade edilmesi Cisim köşegenlerinin küpün orta noktasında kesişeceğinin belirlenmesi Küp içerisinde cisim köşegeninin hesaplanması amacıyla kenar ayrıtı ve yüzey köşegeninin oluşturduğu dik açılı üçgenin yapılandırılması Pisagor bağıntısı ile cisim köşegeninin hesaplanması Küp için cisim köşegeninin cebirsel olarak genelleştirilmesi Dikdörtgen prizmanın cisim köşegeninin ayrıt uzunluklarının karelerinin toplamının karekökü olduğunun ifade edilmesi
<i>Söyleme Dayalı İşlevsel Kavrayış</i>			
Küp içinde oluşan dik üçgenin küpten ayrılarak çiziminin yapılması Küpün bir yüzünün yüzey köşegeniyle ilgili eylemler için ayrı çizilmesi			Cisim köşegeninin yüzey köşegeninden uzun temsil edilmesi

EK-5. (Devam) Uygulama Problemleri ve Analiz Çerçevesi

UÇURTMA YAPIMI

Onur sınıfında STEM uygulamaları yapmayı seven bir öğretmendir. Öğrencilerinin bir konuyu öğrenmeleri için farklı disiplinleri bir araya getirmeleri, bilimsel yaklaşımı bütünlük içinde ele almalarının yanı sıra yaparak yaşayarak öğrenmeleri gerektiğini düşünmektedir. Bu amaçla tasarladığı ders planında öğrencilerle uçurtma yapacaklardır. Öğrencilere uçurtma yapmaları için gerekli algoritmaların bir kısmını ve gerekli malzemeleri vermiştir.

Malzemeler: 90 cm ve 60 cm uzunluğunda ıhlamur veya köknar ağacından çıta, kaplama kağıdı, tutkal, selobant yapıştırıcı, bobin uçurtma ipi, falçata, cetvel.

Yönergeler:

1. Çıtaları dik kesişecek şekilde yerleştiriniz.
2. Dikliği bozmadan çیتالardan sadece birini diğer çıtayı iki eş parçaya ayıracak konuma getiriniz.
3. Çıtalar ile yukarıdaki yönergelerle uyarak küçük t harfi elde ediniz. Bu yapıyı koruyarak çıtalara birbirine yapıştırınız.
4. Çıtaların uçlarına küçük çentikler atınız ve bobin ipiyle bu çentiklerden birinden başlayarak ardışık köşeleri takip edecek şekilde bir çerçeve oluşturunuz.
5. Kaplama kağıdını uygun şekilde çıtaların altına koyunuz.
- ...

Tunahan Onur öğretmenin sınıfındaki bir öğrencidir. Yönergeleri takip eden Tunahan çıtalara öğretmenin verdiği talimatlara göre yapıştırdıktan sonra arkadaşı Erdem'in uçurtmasını görmüş ve kendi uçurtma çıtalarından farklı görüldüğünü fark etmiştir. Yanlış yaptığını düşünen Tunahan diğer arkadaşlarının uçurtma çıtalarının da birbirinden farklı olduğunu görmüştür. Tunahan öğretmenin yönergelerde bir hata yaptığını düşünmüştür. Onur öğretmenin uçurtma yapımı ile ilgili çeşitli soruları olmuştur. Örneğin neden ıhlamur veya köknar ağacı tercih edildiği, uçurtmanın kenarlarının neden ip ile çerçevelendiği, kuyruk yapımında kullanılan malzeme miktarının farklı olmasının sonuçları gibi. Ancak Tunahan'ın akli öğretmenin çıtalara yapıştırırken verilen yönergelerin yeterli olup olmadığına takılmıştır. Öğretmenine bu durumu sorduğunda öğretmeni de kendisine şöyle bir soru ile karşılık vermiştir;

“Sence çیتالardan hangisinin diğerini ortaladığı veya ortalanmayan çıtanın üstte ve altta kalan parça uzunluklarının birbirinizden farklı olması uçurtmaların yüzey alanında değişikliğe sebep olur mu?” Bu soruyu düşünmesi için kendisine bir ders süre verilen Tunahan'ın vereceği cevaplarla ilgili neler söyleyebilirsiniz?

EK-5. (Devam) Uygulama Problemleri ve Analiz Çerçevesi

Epistemolojik Düzlem Bileşenleri	Oluşumlar			Bilişsel Düzlem Bileşenleri
Temsiller	Semiyotik Oluşum			Görselleştirme
Köşegen temsili Diklik temsili Simetri eksen temsili Açıortay temsili İkizkenar üçgen temsili Dik üçgen temsili Eşkenar dörtgen temsili Deltoid temsili	Görsel Temsil	Çıtaların birleşme özelliğine bağlı biri diğerini ortalayan dik doğru parçalarının çizilmesi Dörtgenin kenarlarını tamamlamak için doğru parçalarının uç noktalarını ardışık olarak birleştiren doğru parçalarının çizilmesi İkizkenar üçgen çizilmesi İkizkenar üçgen oluşumuna bağlı eş açılarının çizilmesi İki doğru parçasının ortalanmasına bağlı eşkenar dörtgen çizilmesi Uçurtma oluşturma adımlarına bağlı deltoid çizilmesi	Algısal kavrayış	Dik kesişen doğru parçaları çizimi Doğru parçalarından sadece birinin ortaladığı birbirine dik doğru parçalarının çizimi Birbirini ortalayan dik doğru parçaları çizimi Eşkenar dörtgen çizimi Deltoid çizimi Kenarları deltoidin köşelerine teğet dikkörtgen çizimi İkizkenar üçgen çizimi Simetri eksen çizimi
	Sembolik Temsil	Köşegenlerin sembolik temsili Dikliğin sembolik temsili Deltoidin sembolik temsili İkizkenarın sembolik temsili Açıortayın sembolik temsili		Yükseklik Deltoidin alanına ait özdeşliğin sembolik temsili
	Sözel Temsil	Sözel ve günlük konuşma dili ile ifadeler		Köşegenlerin çubuk olarak temsil edilmesi
Temsile Dayalı İşlevsel Kavrayış				
Köşegenlerin farklı kesişimlerine uygun deltoid çizimi Köşegenlerden birinin diğerini ortaladığı dik kesişme durumlarına uygun farklı temsiller Köşegenlerin durumuna bağlı farklı deltoid temsilleri				Köşegenlerden birinin ortaladığı birbirinden farklı çizimler gerçekleştirme
Artefekt	Enstrümantal Oluşum			Oluşturma
Araç ile verilen ölçüde doğru parçası, kenar orta nokta, kenar orta dikme çizme adımlarının izlenmesi Araç ile köşegenlerin uç noktalarını dörtgen oluşturacak şekilde birleştiren doğru parçalarının çizim adımlarının izlenmesi Araç ile dörtgenin açı ve kenar özelliklerini belirleme adımlarının izlenmesi Dörtgenin alanının araç ile hesaplanma adımlarının izlenmesi	Köşegenlerden birinin cetvel veya Geogebra ile çizilmesi Çizilen köşegenin orta noktasının cetvel-pergel veya Geogebra ile çizilmesi Köşegene dik ve orta noktasından geçen diğer köşegenin cetvel-pergel veya Geogebra ile çizilmesi Köşegenlerin köşe noktalarını ardışık birleştiren doğru parçalarının cetvel veya Geogebra ile çizilmesi ve deltoid'in oluşturulması Geogebra'nın açı ölçüsü ve uzaklık veya uzunluk aracı ile deltoidin açı-kenar özelliklerinin belirlenmesi Geogebra'nın alan ölçme aracı ile deltoidin alanının hesaplanması			Sıralı Kavrayış

EK-5. (Devam) Uygulama Problemleri ve Analiz Çerçevesi

<i>Araca Dayalı İşlevsel Kavrayış</i>		
Geogebra’da köşegenlerin kesişim noktasının köşegenler üzerinde hareketine bağlı dörtgenin alanının değişiminin izlenmesi		
<i>Referanslar</i>	<i>Söylemsel Oluşum</i>	<i>Muhakeme- İspat</i>
Köşegen bilgisi Diklik bilgisi Simetri eksen bilgisi İkizkenar üçgen bilgisi Açıortay bilgisi Eşlik ve benzerlik bilgisi Üçgende alan bilgisi Dörtgenlerde alan bilgisi	<i>Söylemsel Kavrayış</i> Köşegenlerin dik kesişme durumuna bağlı oluşan dik açılı üçgenler aracılığı ile deltoidin alanının hesaplanabileceğinin ifade edilmesi Köşegenlerin farklı şekillerde kesiştirilmesi ile farklı kenar uzunluğuna sahip deltoidler çizilebildiğinin ifade edilmesi Deltoidin ikizkenar üçgenler ile ifade edilmesi Aynı köşegen uzunluğuna sahip deltoidlerin alanlarının aynı olduğunun ifade edilmesi Deltoidin alanının köşegenlerin çarpımının yarısına eşit olduğunu ifade edilmesi Deltoidin karşılıklı iki açısının eş olduğunu ifade eder. Köşegen uzunlukları aynı olan ve köşegenlerin dik kesiştiği tüm durumlara bağlı oluşan tüm dörtgenlerin alanlarının eş olacağını ifade edilmesi	Kenarların farklı kesişim durumları için deltoidin alanının hesaplanması ile doğrulama Deltoidin alanını köşegenleri üzerinden hesaplamayı sağlayan özdeşliğin $(x.y)/2$ olarak ifade edilmesi Köşegenlerden birinin dörtgeni simetrik olarak ayırdığının ifade edilmesi Köşegenlerin birleşimine bağlı alanın değişiminin kontrolünü işlem kolaylığı için küçük sayılar ile gerçekleştirme Deltoidin alanının köşegenlerin birbirini dik kesmeleri koşulu ile farklı kesişme durumları için alanın sabit kalacağını ifade edilmesi Köşegen uzunluklarının dik kesiştiği ancak birbirini ortalamadığı durumlar için köşegenlerin oluşturduğu üçgenlerin yüksekliklerinin değişmesine rağmen toplam alanın aynı kalacağını ifade edilmesi
<i>Söyleme Dayalı İşlevsel Kavrayış</i>		
Deltoidin sadece köşegenlerinin çizilmesi Farklı kesişim oranlarına sahip deltoid çizimi Köşegenlerin birbirini ortalamadığı ve ikisinin de ortalanmadığı durumların alan özelliklerinin keşfedilmesi amacıyla çizilmesi	Dörtgene ait kenar uzunluklarının alan hesaplamak için kullanılmayacağı bilgisinden hareketle sadece köşegenlerin çizilmesi 90 cm ve 60 cm uzunluğundaki çıtaların uç değerler olarak gördükleri 1-89 ve 5-55 cm gibi uzunluklar için kesişimlerinin çizilmesi Köşegenlerin oluşturduğu üçgenlerin dörtgenden ayrı çizilmesi Deltoidin alanını dikdörtgen yardımıyla hesaplamak için kenarları deltoidin köşelerine teğet dikdörtgen çizilmesi Köşegenlerden birinin simetri eksen olduğu bilgisine bağlı katlanmış dörtgen çizilmesi Birbirini ortalamayan ama dik kesişen köşegenlerin oluşturduğu dörtgenin çizilmesi	

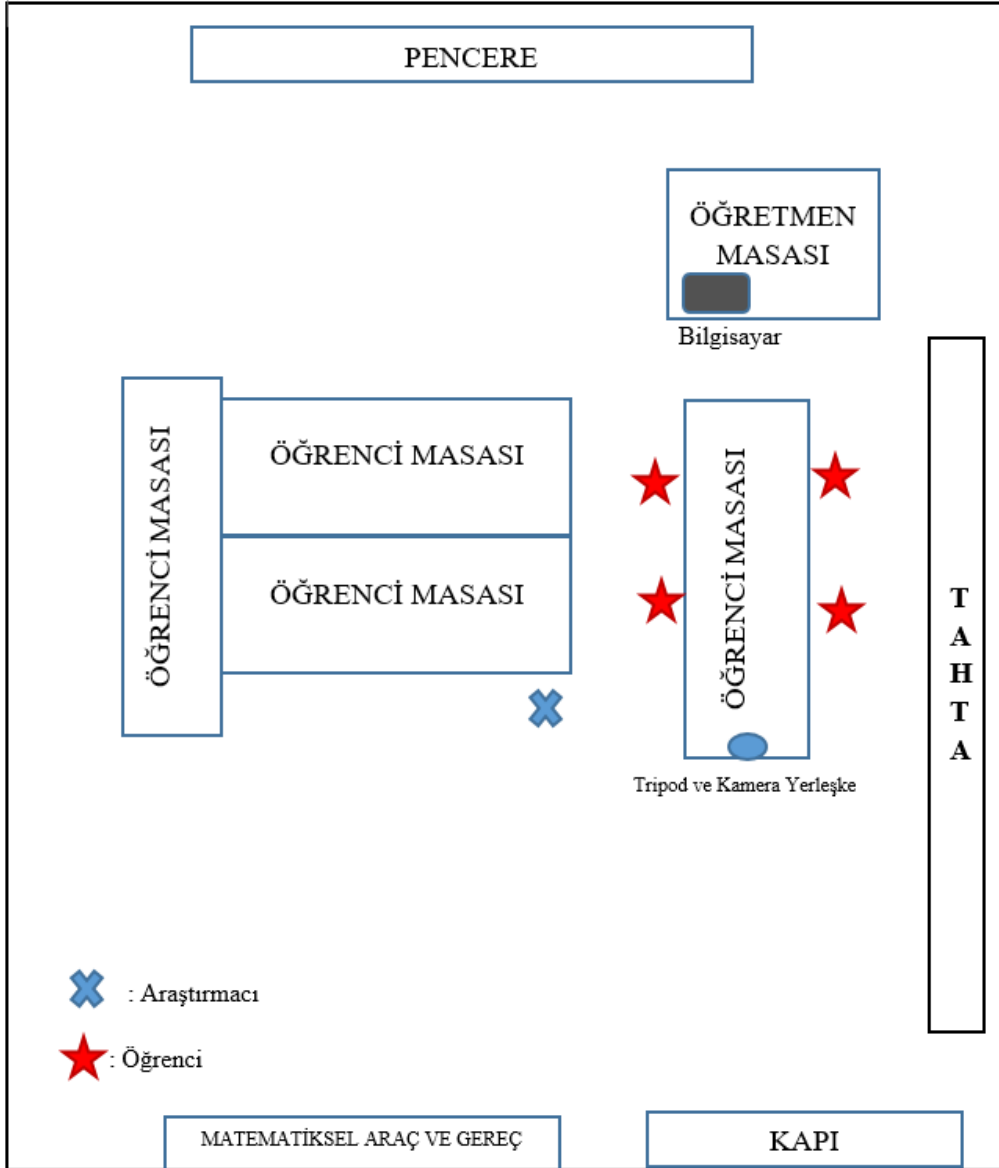
EK-6. Uygulamalar Sırasında Kullanılan Gözlem Protokolü

GÖZLEM PROTOKOLÜ			
Tarih:		Uygulama Problemi:	
Uygulamaya katılan öğrenciler:			
			İlgili diğer notlar
PROBLEMİN OKUNMASI	Geometrik nesnelerle ilgili bölümlerin altını çizme, önemli kavramları vurgulama		
	Şekil çizme		
	Nicel verileri belirleme, şekil üzerine yerleştirme		
SEMİYOTİK	Problemin içerdiği geometrik nesnelere yönelik soru yönelttiler mi? (paralellik neydi, üçgen prizmayı mı soruyor, vb.)		
	Probleme yönelik şekil çizildi mi?		
	Probleme yönelik geometrik nesneler sözel veya yazılı temsil edildi mi?		
	Probleme yönelik geometrik nesneler sembolik temsil edildi mi?		
	Çözüm sırasında şekil üzerinde değişiklik gerçekleştirildi mi? (parçalama, ek şekil çizme, vb.)		
	Çözüm için gerekli ilişkiler şekil üzerinde temsil edildi mi? Eşlik, paralellik, diklik vb.)		
	Şekil çizimlerinde nicel büyüklük dikkate alındı mı?		
ENSTRÜMENTAL	Çizimde materyal desteği alındı mı? (uç kutusu, cetvel, pergel, vb.)		
	Dinamik geometri yazılımı kullanıldı mı?		
	Araç kullanımı (varsa) hangi aşamada (çizim, ölçme, ispat, vb.) kullanıldı		

EK-6. (Devam) Uygulamalar Sırasında Kullanılan Gözlem Protokolü

	Araç kullanımını ihtiyacı nasıl ifade edildi		
SÖYLEMSEL	Öğrenciler nicel sonuca ulaştılar mı?		
	Buldukları sayısal sonucu nasıl doğruladılar?		
	Öğrenciler hangi matematiksel ilişkileri kullandılar (Alan bağıntısı, Pisagor bağıntısı, benzerlik ilişkisi vb.)		
	Şekil üzerinde matematiksel ilişkilere yönelik eylemde bulundular mı? (diklik çizmek, paralel çizmek, şekli parçalamak, vb.)		
	Şekil üzerinde matematiksel ilişkilere bağlı çapalama gerçekleştirildi mi? (şeklin bir parçasına odaklanma)		
	Öğrenciler genellemeye ulaştılar mı?		
	Şekli genellemede nasıl kullandılar?		
	Ulaştıkları genellemeyi gerekçelendirdiler mi?		
	Gerekçelendirmeyi hangi yolla gerçekleştirdiler? (doğal söylemsel, teorik, tümevarımsal, araç desteği, vb.)		
Problem çözme sürecinin kesintiye uğradığı, öğrencilerin üzerinde tartıştıkları noktalar nelerdir?			
Gözlemlenen diğer özel durumlar			

EK-7. Araştırma Ortamı



ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Leyla AYDURMUŞ

Yabancı Dil: İngilizce

Eğitim ve Mesleki Geçmişi:

Lisans: 2004-2008, Cumhuriyet Üniversitesi Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği

Yüksek Lisans: 2010-2013, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İlköğretim Matematik Eğitimi

Doktora: 2020-2021, Trabzon Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Eğitimi

2021-2025, Anadolu Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Eğitimi

2008-2009, Matematik Öğretmeni, 100. Yıl YİBO, Merkez/AĞRI

2009-2012, Matematik Öğretmeni, Cumhuriyet Ortaokulu, Maçka/TRABZON

2012-2014, Matematik Öğretmeni, Pelitli 75. Yıl Cumhuriyet Ortaokulu, Merkez/TRABZON

2014-2015, Matematik Öğretmeni, Çukurçayır Ortaokulu, Merkez/TRABZON

2015-2022, Matematik Öğretmeni, Mustafa BÜLBÜL Ortaokulu, Selçuklu/KONYA

2022-....., Matematik Öğretmeni, Konya Bilim ve Sanat Merkezi, Meram/KONYA

Yayınları ve/veya Bilimsel/Sanatsal Faaliyetleri:

Aydurmuş, L., Kurtuluş Kayan, A., & Arslan, S. (2022). Türkiye'deki Gerçekçi Matematik Eğitimi Araştırmalarının Eğilimleri: İçerik Analizi. Cumhuriyet Uluslararası Eğitim Dergisi, 11(4), 787-802. <https://doi.org/10.30703/cije.1163143>

Aydurmuş, L. ve Çekmez, E. (2021,28-30 Ekim). Bir Garip Matematik Problemi? Yeni Nesil, Beceri Temelli, Nitelikli, Pisa-tımmıs Tarzı? [Sözlü bildiri].5. Uluslararası Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi (TÜRKBİLMAT-5) Sempozyumu, Alanya, Antalya, Türkiye.

Aydurmuş, L. ve Çelik, D. (2013,20-22 Haziran). 8. sınıf öğrencilerinin problem çözme sürecinde kullandığı üstbiliş becerilerin incelenmesi [Sözlü bildiri]. 1. Uluslararası Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi (TÜRKBİLMAT-1) Sempozyumu, Trabzon, Türkiye.

Ödülleri: 2010-2013, TÜBİTAK BİDEB 2210-A Yurt İçi Yüksek Lisans Bursiyerliği, Ankara