



GİRESUN
ÜNİVERSİTESİ



FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**P-FONKSİYONLAR İÇİN BAZI KESİRLİ
İNTEGRALLER EŞİTSİZLİKLER**

**MATEMATİK
ANA BİLİM DALI
Yüksek Lisans Tezi
Görkem CENGER
20152110024
Haziran 2019**

GİRESUN

**T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**P-FONKSİYONLAR İÇİN BAZI KESİRLİ
İNTEGRALLER EŞİTSİZLİKLER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Görkem CENGER

Enstitü Anabilim Dalı : Matematik

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Feyzullah AHMETOĞLU

Haziran 2019

T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**P-FONKSİYONLAR İÇİN BAZI KESİRLİ
İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Görkem CENGER

Enstitü Anabilim Dalı : Matematik

Bu tez 27/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.



Prof. Dr.
Selahattin MADEN
Jüri Başkanı



Prof. Dr.
Feyzullah AHMETOĞLU
Üye



Doç. Dr.
İmdat İŞCAN
Üye

Doç. Dr.
Bahadır KOZ
Enstitü Müdürü

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.



Görkem CENGER
27/06/2019

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans eğitimim sürecinde, benden bilgi ve deneyimini esirgemeyen, çalışmalarımın tamamlanabilmesi için bana her türlü şartı sağlayan ve her zaman desteğini sunan çok değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Feyzullah AHMETOĞLU' na teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışmamın her safhasında geniş bilgi birikimiyle benden desteğini esirgemeyen, her zaman yol gösterici ve yardımcı olan Sayın Doç. Dr. İmdat İŞCAN' a teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca bana manevi olarak destek veren aileme, daima yanımda olan ve benden hiçbir fedakârlığı esirgemeyen her fırsatta destek olan değerli eşime teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	I
İÇİNDEKİLER.....	II
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	III
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	IV
ÖZET.....	V
SUMMARY.....	VI
BÖLÜM 1. GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI.....	4
2.1. Konveks Fonksiyonlar.....	4
2.2. Bazı Fonksiyon Sınıfları.....	9
2.3. P-Fonksiyonu İçin Hermite Hadamard Eşitsizliği	10
2.4. Kesirli İntegral Eşitsizlikleri.....	11
BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	14
3.1. Hölder ve Power Mean Eşitsizlikleri.....	14
3.2. Bazı Lemmalar.....	15
3.3. Konveks Fonksiyonlar İçin Elde Edilen Eşitsizlikler.....	19
3.4. S-Konveks Fonksiyonlar İçin Elde Edilen Eşitsizlikler.....	29
BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	33
BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	46
KAYNAKLAR.....	47

ÖZGEÇMİŞ.....	49
---------------	----

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\forall$	: Her
$\in$	: Elemanıdır
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
f'	: f fonksiyonunun birinci mertebeden türevi
f''	: f fonksiyonunun ikinci mertebeden türevi
f^{-1}	: f Fonksiyonunun Ters
I	: $\mathbb{R}$ de bir aralık
I°	: I nın içi
$Q(I)$	: Gudunova-Levin Fonksiyonlar Sınıfı
$P(I)$	: P - Fonksiyonlar Sınıfı
$L[a, b]$	: $[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonların kümesi
β	: Beta Fonksiyonu
Γ	: Gamma Fonksiyonu
J_{a+}^α	: Sol Taraflı Riemann-Liouville Kesirli İntegrali
J_{b-}^α	: Sağ Taraflı Riemann-Liouville Kesirli İntegrali
$\sup A$	: A ' nın Supremumu

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1.1.....	4
Şekil 2.1.2.....	5

P-FONKSİYONLAR İÇİN BAZI KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

ÖZET

Bu tez çalışmasında, literatürde daha önce verilmiş olan bazı özdeşlikler ile Hölder ve Power mean integral eşitsizlikleri de kullanarak p -fonksiyonlar için bazı yeni kesirli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Bu amaçla, öncelikle tezin giriş bölümünde eşitsizlik teorisi, konveks fonksiyonlar, integral eşitsizlikleri, kesirli türev, kesirli integral ve bazı fonksiyon sınıfların hakkında kısa bir bilgi verdikten sonra, kaynak araştırması bölümünde konveks fonksiyonlarla ilgili tanım, teorem, örnek ve özelliklere yer verildi. Yine bazı fonksiyon sınıfları (Godunova-Levin Fonksiyonu, P -fonksiyon) tanımlandı. P -fonksiyonu için Hermite-Hadamard Eşitsizliği teoremi ispatlandı. Son olarak Gamma ve Beta fonksiyonları tanımlanarak, Sarıkaya M.Z. ve arkadaşları tarafından konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard kesirli integral eşitsizliği verildi. Materyal ve yöntem bölümünde ise araştırma bulguları kısmındaki ispatlarda kullanılan bazı eşitsizliklere ve özdeşliklere yer verildi. Araştırma bulguları bölümünde, p -fonksiyonlar sınıfı için kesirli integraller yardımıyla bazı yeni eşitsizlikler elde edildi.

Anahtar kelimeler: P -Fonksiyon, Kesirli İntegral Eşitsizlikleri, Hermite Hadamard'ın Eşitsizlik Teoremi

SOME FRACTIONAL INTEGRAL INEQUALITIES FOR P-FUNCTIONS

SUMMARY

In this thesis, some new fractional integral inequalities for p-functions have been obtained by using some identities previously given in the literature with Hölder and Power mean integral inequalities. For this purpose, firstly, in the introduction part of the thesis, after giving a brief information about inequality theory, convex functions, integral inequalities, fractional derivative, fractional integral and some function classes, definition, theorem, sample and features related to convex functions were included in the source research section. Again, some function classes (Godunova-Levin Function, P-function) were defined. Hermite-Hadamard's Inequality Theorem for P-function has been proved. Finally Hermite-Hadamard fractional integral inequality was given for convex functions by Sarıkaya M.Z. and his colleagues. In the section on materials and methods, some inequalities and identities that used in the proofs of the research findings were included. In the research findings section, some new inequalities were obtained with the help of fractional integrals for the class of P-functions.

Keywords: P-Function, Fractional Integral Inequalities, Hermite-Hadamard's Inequality Theorem

1.GİRİŞ

“Eşitsizlik” kelimesi matematikte iki farklı miktar arasındaki farklılığı ifade eder ve bu iki miktar arasında oran kurmak için kullanılır. Modern matematikte eşitsizlik her alanda önemli bir rol oynamaktadır. Örneğin, eşitsizlik sayesinde fizik, mühendislik gibi birçok bilimsel alanda yeni uygulamalar ortaya çıkmıştır. Bu nedenle birçok araştırmacının dikkatini çekmiş ve diğer bilim dallarıyla ilişkili olarak günümüze kadar gelmiştir. Eşitsizlik teorisinin temeli 18 ve 19. yüzyıllarda K. F. Gauss (1777-1855), A. L. Cauchy (1789-1857) ve P. L. Chebyshev (1821-1894) gibi matematikçiler tarafından atıldı. Daha sonraki yıllarda eşitsizliklerin önemi gittikçe arttı ve H. Poincare (1854-1912), A. M. Lyapunov (1857-1918), O. Hölder (1859-1937) ve J. Hadamard (1865-1963) gibi ünlü matematikçilerin dikkatini çekti. Bu alanın matematiğin bir branşı olarak gelişmesi 1934’te G. H. Hardy, J. E. Littlewood ve G. Polya tarafından “Inequalities” adlı çalışmayla gerçekleşmiştir [1]. Diğer matematikçiler tarafından geliştirilen bu teorik temeller, birçok yeni eşitsizliğin bulunmasına ve matematiğin matematiksel analiz, uygulamalı matematik, olasılık teorisi gibi değişik alanlarında ilginç uygulamalara öncülük etmiştir. Bununla birlikte Beckenbach ve Bellman’ın 1965’te yazdığı “Inequalities” [2] adlı eser ve Mitrinovic’in 1970’te yazdığı “Analytic Inequalities” adlı eseri de söyleyebiliriz [3]. Bu üç temel kaynağın yanı sıra Mitrinović *et al.* (1993) tarafından “Classical and New Inequalities in Analysis” [4], Pachpatte (2005) tarafından “Mathematical Inequalities” [5] ve son yıllarda Sever S. Dragomir, V. Lakshmikantham, Ravi P. Agarwal gibi araştırmacılar tarafından eşitsizlikler konusunda pek çok kitap, makale ve monografi kaleme alınmıştır.

Konveks fonksiyonların başlangıcı 19. yüzyılın sonları olarak gösterilmektedir. Konveks fonksiyonların ilk kez sistemli olarak 1905 ve 1906 yıllarında J.L.W.V. Jensen tarafından çalışıldığı ve Jensen’ın bu öncü çalışmalarından sonra konveks

fonksiyonlar teorisinin hızlı bir gelişme gösterdiği kabul edilmektedir. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikleri içeren ilk kaynak “Convex Funtions: Inequalities” [6] 1987 yılında J.Pečarić tarafından yazılmıştır. Ayrıca Roberts and Varberg (1973), Pečarić *et al.* (1992), Niculescu and Persson (2006) gibi matematikçiler konveks fonksiyonlar üzerinde eşitsizliklerle ilgili çok sayıda çalışma yapmışlardır. Yapılan çalışmaların bir kısmını integral eşitsizlikleri oluşturmaktadır.

Eşitsizlik teorisiyle ilişkili olan konvekslik kavramı ile eşitsizlik birlikte ele alındığında birçok çalışma ve integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Bunun en önemli örneklerinden biri Ekim 1881 yılında Hermite’in (1822 - 1901) Journal Mathesis adlı dergiye gönderdiği orijinal haliyle aşağıda yer alan konveks fonksiyonlar için Hermite – Hadamard eşitsizliğidir.

Sur deux d'une integrale définie. Soit $f(x)$ une fonction qui varie toujours dans le meme sens de $x=a$; $x=b$; On aura les relation

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \int_a^b f(x) dx < (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

ou bien

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \int_a^b f(x) dx > (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

suivantque la courbe $y = f(x)$ tourne sa convexité ou sa concavité vers l'axe des abscisses. '

Bu eşitsizlik hakkında günümüze kadar birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmaların büyük bir bölümü S.S. Dragomir ve C.E.M Pearce tarafından 2000 yılında yazılmış olan “Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications” [7] adlı kaynakta bir araya getirilmiştir.

Hermite-Hadamard Eşitsizliği, geometrik yorumu ve uygulamaları konveks fonksiyonun ilk temel sonucudur. Çoğu matematikçi farklı konveks fonksiyon sınıfları (quasi-konveks fonksiyonlar, Godunova-Levin sınıfı, log-konveks, p-

konveks fonksiyonlar, s -fonksiyonlar vb.) ve özel ortalamaları (p -logarithmic ortalamalar, identric ortalama, Stolarsky ortalamalar vb.) için bu önemli teoremi uygulamaya, genişletmeye, sadeleştirmeye ve genelleştirmeye çalışmaktadır.

Son yıllarda klasik konvekslik tanımından daha genel konveks fonksiyon türleri oluşturulmaktadır. Bunlardan biri 1978 yılında Breckner tarafından “Stetigkeitsaussagen für eine klasse verallgemeinerter konvexer funktionen in topologischen linearen Raumen” [8] adlı çalışmasında tanımlanan s -konveks fonksiyonlardır. s -konvekslik ile ilgili bazı özelliklere Hudzik ve Maligranda tarafından yazılan “Some remarks on s -convex functions” [9] adlı çalışmada yer verilmiştir.

Kesirli türev ve kesirli integral kavramları ilk olarak Liouville tarafından ortaya konuldu. Kesirli türev ve kesirli integral kavramı “Türev ve integraller sadece tamsayılar için var mıdır ?” sorusundan yola çıkılarak ortaya kondu. 17. yüzyıldan itibaren Leibniz, Euler, Lagrange, Abel, Liouville ve diğer birçok matematikçinin, kesirli mertebe için diferansiyel ve integrasyonun genelleştirilmesine dayanan öncü çalışmalarıyla gelişmeye başlamıştır.

Uygulamalı alanlarda kesirli türev ve kesirli integral kavramları için birçok çalışma olmasına rağmen herhangi bir monografi yayınlanmamıştır. Bu boşluk S.G. Samko ile A.A. Kilbas ve O.I. Marichev tarafından doldurulmuştur [10]. Kesirli türev ve kesirli integral kavramları ile ilgili geniş kapsamlı bir monografi yayınlanmıştır.

Son yıllarda, Dragomir ve arkadaşları tarafından [11] de p -fonksiyon tanımını vermiş ve bu fonksiyon sınıfı için Hermite Hadamard eşitsizliklerini vermiştir. Bu tez çalışmasında fonksiyonların bu sınıfı için bazı kesirli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

2.1. Konveks Fonksiyonlar

Tanım 2.1.1. $I, \mathbb{R}$ 'de bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere $\forall x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için;

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eğer eşitsizliği $x \neq y$ ve $t \in [0,1]$ için kesin ise f fonksiyonuna kesin konvekstir denir [12].

Eğer $t \in [0,1]$ kapalı aralığındaki uç noktaları dışarıda bırakırsak, o zaman konveks fonksiyon koşulunda " $\leq$ " yerine " $<$ " gelir, yani;

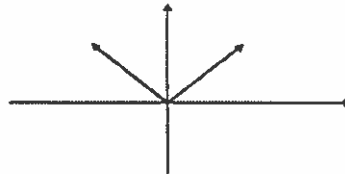
$$f(tx + (1 - t)y) < tf(x) + (1 - t)f(y)$$

olur. Bu fonksiyona kesin konveks denir.

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$$

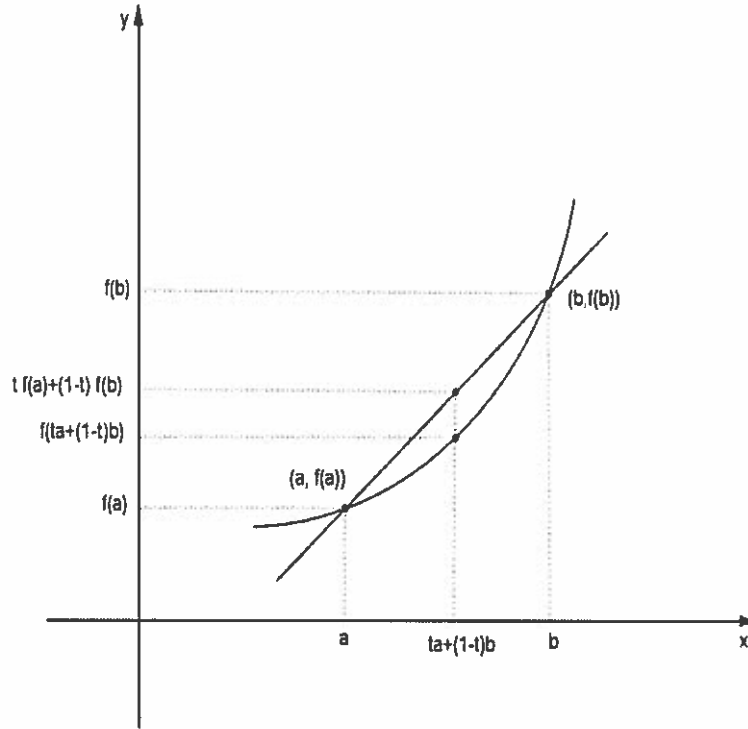
eşitsizliğinin tersi alınırsa, f fonksiyonuna $I \neq \emptyset$ için konkavdır, denir.

Örnek 2.1.1. $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$ fonksiyonu I üzerinde konveks fonksiyondur.



Şekil 2.1.1. Aralıklar üzerinde konveks fonksiyon ($f(x) = |x|$)

Konveks fonksiyonun geometrik yorumu Şekil 2.1.2' deki gibidir:



Şekil 2.1.2. Konveks fonksiyon

Geometrik olarak; f fonksiyonunun $ta + (1 - t)b$ noktasında almış olduğu değer, $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarını birleştiren doğru parçasının aynı noktada almış olduğu değerden her zaman daha küçüktür. Yani bu iki noktayı birleştiren kiriş her zaman eğrinin $[a, b]$ aralığında kalan kısmının üzerindedir. Konkav fonksiyon için kiriş eğrinin $[a, b]$ aralığında kalan kısmının altındadır.

Teorem 2.1.1. I bir açık aralık, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ve ikinci mertebeden türevleri alınabilen bir fonksiyon olsun. Bu takdirde f konvektir ancak ve ancak her $x \in I$ için

$$f''(x) \geq 0 .$$

Örnek 2.1.2. $f(x)$ fonksiyonu $(-\infty, \infty)$ aralığında $f(x) = e^x$ olsun. Bu takdirde

$f''(x) = e^x > 0$ olur. Böylece f konvektir. Orta nokta konveksliği ile

$$e^{\frac{1}{2}(x+y)} \leq \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^y$$

elde edilir. Eğer a ve b , $(0, \infty)$ da keyfî iki sayı olmak üzere $a = e^x$ ve $b = e^y$ olarak seçilirse

$$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a + b)$$

aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliği elde edilir. Bu durumda verilen eşitsizlik, e^x fonksiyonunun konveksliğini genelleştirir.

Örnek 2.1.3. $x \in (0, \infty)$ için $g(x) = \ln x$ fonksiyonunu ele alalım. Burada $g''(x) = -\frac{1}{x^2}$ olur ki bu da g fonksiyonunun konkav olduğunu gösterir. Tanım 2.1.1' e göre f kesin konveks, g kesin konkavdır. Yukarıdaki verilenlere göre e^x 'in tersi $\ln x$ fonksiyonunu ele alalım. Burada $g''(x) = -\frac{1}{x^2}$ olur ki bu da g fonksiyonunun konkav olduğunu gösterir. Tanım 2.1.2' e göre f kesin konveks, g kesin konkavdır. Yukarıdaki verilenlere göre e^x 'in tersi $\ln x$ fonksiyonunun konkav olması tesadüf değildir. Eğer f kesin monoton artan ve konveks ise f^{-1} , fonksiyonun tersi, konkavdır. Bu durumu göstermek amacıyla, x ve y , f nin değer kümesinden alınan keyfî iki nokta ise $x = f(a)$ ve $y = f(b)$ olacak şekilde a, b vardır. Bu taktirde, f nin konveksliğinden

$$\theta f(a) + (1 - \theta)f(b) \geq f((1 - \theta)a + \theta b) \quad (2.1)$$

olur. f monoton artan olduğundan, f^{-1} fonksiyonu da monoton artandır. O halde (2.1) eşitsizliğine f^{-1} uygulanırsa

$$f^{-1}(\theta x + (1 - \theta)y) \geq (1 - \theta)a + \theta b = (1 - \theta)f^{-1}(x) + \theta f^{-1}(y)$$

elde edilir ki bu da bize f^{-1} fonksiyonunun konkav olduğunu gösterir.

Konveks fonksiyonun bazı özellikleri:

- i. Kapalı bir aralıkta tanımlı konveks fonksiyon sınırlıdır.
- ii. Açık bir aralıkta tanımlı konveks fonksiyon süreklidir.

- iii. $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ azalmayan konveks fonksiyon ve $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olsun. Bu takdirde; $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = (goh)(x)$ bileşke fonksiyonu da konvektir.
- iv. $f_j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, j = 1, 2, 3 \dots k$, k tane konveks fonksiyonlar olsun. Bu takdirde;

$$f(x) = \sum_{j=1}^k a_j f_j(x), \quad a_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3 \dots k)$$

fonksiyonu da konvektir.

- v. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ise, I^o de kalan herhangi bir $[a, b]$ kapalı aralığında Lipschitz şartını sağlar. Bu nedenle, f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli ve I^o süreklidir.
- vi. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I açık aralığında konveks ise bu aralıkta sayılabilir bir E kümesi hariç f' mevcut ve süreklidir.
- vii. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ise I^o de f'_- ve f'_+ türevleri mevcut olup, bu türevler artandır.

Teorem 2.1.2. I , $\mathbb{R}$ de bir aralık, $a < b$ ve $a, b \in I$ olmak üzere $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı konveks bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (2.2)$$

eşitsizliği Hermite-Hadamard eşitsizliğidir [12].

İspat: f fonksiyonu, I üzerinde konveks olduğundan (a, b) aralığında sürekli ve $[a, b]$ aralığında sınırlıdır. Dolayısıyla f , $[a, b]$ aralığında integrallenebilir. O halde

$$x = f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

yazılır. Bu ifadenin her iki yanı $[0,1]$ üzerinden t 'ye göre integre edilirse

$$\int_0^1 f(ta + (1-t)b) dt \leq \int_0^1 (tf(a) + (1-t)f(b)) dt$$

$$\begin{aligned}
&= f(a) \int_0^1 t dt + f(b) \int_0^1 (1-t) dt \\
&= \frac{f(a) + f(b)}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \int_a^b (f(ta + (1-t)b) dt$$

olur ki bu (2.2) eşitsizliğinin sağ tarafıdır. (2.2)'nin sol tarafının ispatını verelim.

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

integralini

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx \right] \quad (2.3)$$

şeklinde yazıp $x = a + t(b-a)/2$ değişken değiştirmesi ile ilk terim

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_0^1 f\left(a + \frac{t(b-a)}{2}\right) dt$$

şeklinde elde edilir. Daha sonra $x = b - t(b-a)/2$ değişken değiştirmesi ile ikinci terim

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx = -\frac{b-a}{2} \int_1^0 f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right) dt = \frac{b-a}{2} \int_0^1 f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right) dt$$

şeklinde elde edilir. (2.3) eşitliğinde bu sonuçlar yazılıp ve konveksliğin tanımı uygulanırsa

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[f\left(a + \frac{t(b-a)}{2}\right) + f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right) \right] dt \\ &\geq \int_0^1 f\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right) dt = f\left(\frac{a+b}{2}\right)\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

2.2. Bazı Fonksiyon Sınıfları

Tanım 2.2.1. (Godunova-Levin Fonksiyonu) $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan fonksiyonu $\forall x, y \in I, \lambda \in (0,1)$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \frac{f(x)}{\lambda} + \frac{f(y)}{1-\lambda}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f 'ye Godunova-Levin Fonksiyonu veya $Q(I)$ sınıfına aittir denir. Bu tanıma denk olarak; eğer $f \in Q(I)$ veya $x, y, z \in I$ ise bu taktirde

$$f(x)(x-y)(x-z) + f(y)(y-x)(y-z) + f(z)(z-x)(z-y) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır [13].

Tanım 2.2.2. (P-Fonksiyon) $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olmak üzere $\forall x, y \in I, \lambda \in (0,1)$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq f(x) + f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna P-fonksiyonu veya $P(I)$ sınıfına aittir denir [11].

Tanım 2.2.3. $\forall x, y \in I, t \in [0,1], s \in (0,1)$ için aşağıdaki koşulu sağlayan $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ikinci türden s -konveks fonksiyondur [14]:

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)^s f(x) + t^s f(y).$$

2.3. P-Fonksiyonu İçin Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu bölümde, Godunova-Levin sınıfını kısıtlayacağız ve bu sınıftaki Hadamard eşitsizliklerinin net bir versiyonunu kanıtlayacağız. Daha kesin bir ifadeyle, bir $f: I \rightarrow R$ nin negatif olması durumunda $P(I)$ sınıfına ait olduğunu ve tüm $x, y \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitsizliği sağladığını söyleriz.

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq f(x) + f(y) \quad (2.4)$$

Açıktır ki $Q(I) \supset P(I)$ ve uygulamalar için $P(I)$ 'nin tüm negatif olmayan monoton, konveks ve yarı konveks fonksiyonları, yani

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max(f(x), f(y))$$

şeklinde yeterli negatif olmayan fonksiyonları içerdiği not edilir [11].

Teorem 2.3.1. (P-Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Eşitsizliği) $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f \in P(I)$ ve $f \in L_1[a, b]$ olsun. Bu taktirde

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq 2(f(a) + f(b)). \quad (2.5)$$

Her iki eşitsizlik de olasıdır [11].

İspat: (2.4)'e göre $x = ta + (1 - t)b, y = (1 - t)a + tb$ ve $\lambda = 1/2$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f(at + (1 - t)b) + f((1 - t)a + tb)$$

olur. Böylece integralini alarak

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_0^1 (f(at + (1 - t)b) + f((1 - t)a + tb)) dt = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

elde edilir ve ilk eşitsizlik ispatlanır. İkinci eşitsizliğin ispatı, $x = a$ ve $y = b$ ile (2.4)'ü kullanarak ve λ 'ya göre $[0,1]$ üzerinden integral olur.

(2.5)' teki ilk eşitsizlik, (azalmayan)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & a \leq x \leq \frac{a+b}{2}, \\ 1, & \frac{a+b}{2} \leq x \leq b, \end{cases}$$

fonskiyonu ve ikinci eşitsizlik (azalmayan)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = a \\ 1, & a < x \leq b \end{cases}$$

fonskiyonu için bir eşitliğe indirgenir. İspat tamamlanır.

2.4. Kesirli İntegral Eşitsizlikleri

Tanım 2.4.1. (Gamma Fonskiyonu) $n > 0$ için

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

şeklinde tanımlanan fonskiyon Gamma fonskiyonudur. Bu integral $n > 0$ için yakınsaktır. Gamma fonskiyonunun bazı önemli özellikleri aşağıdaki gibi sıralanır:

- i. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$,
- ii. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
- iii. $2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2n)$.
- iv. $\int_0^{\infty} \frac{x^p}{1+x} dx = \Gamma(p) = \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}, \quad 0 < p < 1,$

Tanım 2.4.2. (Beta Fonskiyonu) $Re(x), Re(y) > 0$ için

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon Beta fonksiyonudur. Bu integral $x > 0$ ve $y > 0$ için yakınsaktır [15]. Beta fonksiyonunun bazı önemli özellikleri aşağıdaki gibi sıralanır [16]:

- i. $\beta(x, y) = \beta(y, x)$
- ii. $\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt, \quad x, y > 0$
- iii. $\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad x, y > 0$
- iv. $\beta(1, y) = \frac{1}{y}$
- v. $\beta(x+1, y) = \frac{x}{x+y} \beta(x, y), \quad x, y \in (0, \infty).$

İlave olarak $0 < a < 1$ olmak üzere, tamamlanmamış Beta fonksiyonu

$$\beta(a, x, y) = \int_0^a t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

ile tanımlanır.

Kilbas A.A ve arkadaşları tarafından sağ taraf ve sol taraf Riemann-Liouville kesirli integrallerinin tanımları aşağıdaki gibidir [17]:

Tanım 2.4.3. $f \in L[a, b]$ olsun. $b > a \geq 0$ ile $\alpha > 0$ için $J_{a+}^\alpha f$ ve $J_{b-}^\alpha f$ sırasıyla sağ taraflı ve sol taraflı Riemann-Liouville kesirli integralleri aşağıda gibi tanımlanır:

$$J_{a+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, x > a$$

ve

$$J_{b-}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, x < b.$$

Burada $\Gamma(\alpha)$, Gamma fonksiyonudur.

Sarıkaya M.Z. ve arkadaşları tarafından konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard kesirli integral eşitsizliği aşağıdaki gibi verilir [18]:

Teorem 2.4.1. $0 \leq a < b$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif bir fonksiyon ve $f \in L[a, b]$ olsun. Eğer f , $[a, b]$ aralığında konveks ise $\alpha > 0$ olduğunda kesirli integraller için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [J_{a+}^\alpha f(b) + J_{b-}^\alpha f(a)] \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

eşitsizliği verilir.

İşcan İ. tarafından kesirli integraller yoluyla konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér eşitsizliği sunulmuştur [19].

Teorem 2.4.2. $a < b$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir konveks fonksiyon ve $f \in L[a, b]$ olsun. Bu taktirde w negatif olmayan, integrallenebilir ve $\frac{a+b}{2}$ ye göre simetrik ise yani her $x \in [a, b]$ için

$$w(x) = w(a+b-x)$$

ise $\alpha > 0$ olduğunda kesirli integraller için eşitsizlik

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) [J_{a+}^\alpha w(b) + J_{b-}^\alpha w(a)] &\leq [J_{a+}^\alpha (fw)(b) + J_{b-}^\alpha (fw)(a)] \\ &\leq \frac{f(a) + f(b)}{2} [J_{a+}^\alpha w(b) + J_{b-}^\alpha w(a)] \end{aligned}$$

şeklinde verilir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Hölder ve Power Mean Eşitsizlikleri

Teorem 3.1.1. (Hölder Eşitsizliği) $a = (a_1, \dots, a_n)$ ve $b = (b_1, \dots, b_n)$ reel veya kompleks sayıların iki n – lisi olsun. Bu taktirde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olmak üzere

a. $p > 1$ ise

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

b. $p < 0$ veya $q < 0$ ise

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \geq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizlikleri sağlanır [20].

Teorem 3.1.2. (İntegraller için Hölder Eşitsizliği) $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığında integrallenebilen iki fonksiyon olsun. $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir [21].

Benzer şekilde iki katlı integraller için Hölder eşitsizliği aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\int_a^b \int_a^b |f(x)g(x)|dxdy \leq \left(\int_a^b \int_a^b |f(x)|^p dxdy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b \int_a^b |g(x)|^q dxdy \right)^{\frac{1}{q}}$$

Ayrıca Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olan Power Mean eşitsizliği aşağıdaki gibi ifade edilir.

Sonuç 3.1.1. (Power Mean Eşitsizliği) $q \geq 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığında integrallenebilen iki fonksiyon olsun. $|f|$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır. Benzer şekilde iki katlı integraller için Power Mean eşitsizliği

$$\int_a^b \int_a^b |f(x)g(x)|dxdy \leq \left(\int_a^b \int_a^b |f(x)|dxdy \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b \int_a^b |f(x)||g(x)|^q dxdy \right)^{\frac{1}{q}}$$

şeklinde verilir.

3.2 Bazı Lemmalar

Lemma 3.2.1. $a < b$ olmak üzere $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) üzerinde iki kez türevlenebilir fonksiyon olsun. $f'' \in L[a, b]$ ise kesirli integraller için aşağıdaki eşitlik sağlanır [14]:

$$\begin{aligned} & \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left[J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a) + J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b) \right] - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ &= \frac{(b-a)^2}{8(\alpha+1)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha+1} \left[f''\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right) + f''\left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b\right) \right] dt. \end{aligned}$$

İspat:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 (1-t)^{\alpha+1} \left[f'' \left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b \right) + f'' \left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b \right) \right] dt \\
 &= \int_0^1 (1-t)^{\alpha+1} f'' \left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b \right) dt \\
 &\quad + \int_0^1 (1-t)^{\alpha+1} f'' \left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b \right) dt = I_1 + I_2 \quad (3.1).
 \end{aligned}$$

olsun. I_1 'in integrali:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^1 (1-t)^{\alpha+1} f'' \left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b \right) dt \\
 &= - \frac{2(1-t)^{\alpha+1} f' \left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b \right)}{b-a} \Big|_0^1 \\
 &\quad - \frac{2(\alpha+1)}{b-a} \int_0^1 (1-t)^{\alpha} f' \left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b \right) dt \quad (3.2) \\
 &= \frac{2}{b-a} f' \left(\frac{a+b}{2} \right) - \frac{2(\alpha+1)}{b-a} \left[\frac{2}{b-a} f \left(\frac{a+b}{2} \right) - \frac{2^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}} J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)}^{\alpha} f(a) \right] \\
 &= \frac{2}{b-a} f' \left(\frac{a+b}{2} \right) - \frac{4(\alpha+1)}{(b-a)^2} f \left(\frac{a+b}{2} \right) - \frac{2^{\alpha+2} \Gamma(\alpha+2)}{(b-a)^{\alpha+2}} J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)}^{\alpha} f(a).
 \end{aligned}$$

I_2 'nin integrali:

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_0^1 (1-t)^{\alpha+1} f'' \left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b \right) dt \\
 &= \frac{2(1-t)^{\alpha+1} f' \left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b \right)}{b-a} \Big|_0^1 + \frac{2(\alpha+1)}{b-a} \int_0^1 (1-t)^{\alpha} f' \left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b \right) dt \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{2}{b-a} f' \left(\frac{a+b}{2} \right) - \frac{2(\alpha+1)}{b-a} \left[-\frac{2}{b-a} f' \left(\frac{a+b}{2} \right) + \frac{2^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}} J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^{\alpha} f(b) \right] \\
&= -\frac{2}{b-a} f' \left(\frac{a+b}{2} \right) - \frac{4(\alpha+1)}{(b-a)^2} f' \left(\frac{a+b}{2} \right) + \frac{2^{\alpha+2} \Gamma(\alpha+2)}{(b-a)^{\alpha+2}} J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^{\alpha} f(b).
\end{aligned}$$

(3.1), (3.2) ve (3.3)' ün toplamı ve daha sonra her iki tarafın $\frac{(b-a)^2}{8}$ ile çarpılması ile ispat tamamlanır.

$\alpha = 1$ için Lemma 3.2.1 aşağıdaki sonuca indirgenir.

Lemma 3.2.2. $a < b$ olmak üzere $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) üzerinde iki kez türevlenebilir fonksiyon olsun. $f'' \in L[a, b]$ ise kesirli integraller için aşağıdaki eşitlik sağlanır [14]:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - f \left(\frac{a+b}{2} \right) \\
&= \frac{(b-a)^2}{16} \int_0^1 (1-t)^2 \left[f'' \left(\frac{1+t}{2} a + \frac{1-t}{2} b \right) + f'' \left(\frac{1-t}{2} a + \frac{1+t}{2} b \right) \right] dt.
\end{aligned}$$

Lemma 3.2.3. $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I^0 üzerinde iki kez türevlenebilen bir fonksiyon $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f'' \in L[a, b]$ olsun. Bu taktirde, herhangi bir $0 \leq \lambda \leq 1$ ve $r \geq 1$ için aşağıdaki özdeşlik sağlanır [22]:

$$\begin{aligned}
&I \left(f; \alpha, \lambda, \frac{1}{r} \right) \equiv \lambda(1-\lambda)(1-2\lambda) \left(1 - \frac{1}{r} \right) (b-a)^2 f'(x) \\
&+ \left(\frac{r(1+\alpha)-1}{r} \right) \{ (1-\lambda)^2 + \lambda^2 \} f(x) + \frac{\lambda^2 f(a) + (1-\lambda)^2 f(b)}{r} \\
&- \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^{\alpha} \alpha (1-\lambda)^{\alpha} (b-a)^{\alpha}} \{ \lambda^{\alpha+2} J_{x^-}^{\alpha} f(a) + (1-\lambda)^{\alpha+2} J_{x^+}^{\alpha} f(b) \} \\
&= \lambda^2 (1-\lambda)^2 (b-a)^2
\end{aligned}$$

$$\times \left[\int_0^1 t \left(\frac{1}{r} - t^\alpha \right) \{f''(tx + (1-t)a) + f''(tx + (1-t)b)\} dt \right]$$

dir, burada $x = \lambda a + (1 - \lambda)b$ olur.

İspat: İntegralde kısmi integrasyon ve değişken değiştirme metodları kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 t \left(\frac{1}{r} - t^\alpha \right) f''(tx + (1-t)a) dt \\ &= - \left(1 - \frac{1}{r} \right) \frac{f'(x)}{(1-\lambda)(b-a)} + \frac{\alpha + 1 - \frac{1}{r}}{(1-\lambda)^2(b-a)^2} f(x) \\ &+ \frac{1}{r(1-\lambda)^2(b-a)^2} f(a) - \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{(1-\lambda)^{\alpha+2}(b-a)^{\alpha+2}} J_{x^-}^\alpha f(a) \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 t \left(\frac{1}{r} - t^\alpha \right) f''(tx + (1-t)a) dt = \left(1 - \frac{1}{r} \right) \frac{f'(x)}{\lambda(b-a)} + \frac{\alpha + 1 - \frac{1}{r}}{\lambda^2(b-a)^2} f(x) \\ &+ \frac{1}{r\lambda^2(b-a)^2} f(b) - \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\lambda^{\alpha+2}(b-a)^{\alpha+2}} J_{x^-}^\alpha f(b) \end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki iki eşitlik değerini ekleyerek istenen sonuç elde edilir. $r = 3$ ve $\lambda = \frac{1}{2}$ alınırsa,

$$\begin{aligned} & I \left(f; \alpha, \frac{1}{2}, \frac{1}{r} \right) = \left(\alpha + 1 - \frac{1}{r} \right) f \left(\frac{a+b}{2} \right) + \frac{1}{r} \left\{ \frac{f(a) + f(b)}{2} \right\} \\ & - \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{2^{1-\alpha}(b-a)^\alpha} \left\{ J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a) + J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b) \right\} = \frac{(b-a)^2}{8} \left[\int_0^1 t \left(\frac{1}{r} - t^\alpha \right) \right. \\ & \left. \times \left\{ f'' \left(t \frac{a+b}{2} + (1-t)a \right) + f'' \left(t \frac{a+b}{2} + (1-t)b \right) \right\} dt \right] \end{aligned}$$

olur.

Lemma 3.2.4. $r \geq 1$ için

$$\int_0^1 \left| t \left(\frac{1}{r} - t^\alpha \right) \right| dt \equiv \mu_{11} \left(\alpha, \frac{1}{r} \right) = \frac{\alpha r^{-(1+\frac{2}{\alpha})} + 1}{\alpha + 2} - \frac{1}{2r}$$

İspat: Bu eşitlik, belirli integrallerin basit bir hesaplamasından kaynaklanır [22].

3.3. Konveks Fonksiyonlar İçin Elde Edilen Eşitsizlikler

Teorem 3.3.1. (Ostrowski Eşitsizliği) $f: I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, I^0 üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $f' \in L[a, b]$ ve $a, b \in I$ için $a < b$ olsun. Eğer $|f'(x)| \leq M$ ise

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| \leq \frac{M}{b-a} \left[\frac{(x-a)^2 + (b-x)^2}{2} \right]$$

elde edilir. Bu eşitsizliğe Ostrowski Eşitsizliği denir [23]:

İspat: Bu teoremi ispatlamak için aşağıdaki eşitlik kullanılır. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) aralığında diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Bu taktirde $x \in [a, b]$ için

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt + \frac{1}{b-a} \int_a^b p(x, t) f'(t) dt$$

$$p(x) := \begin{cases} t-a, & a \leq t \leq x \text{ için} \\ t-b, & x < t \leq b \text{ için} \end{cases}$$

eşitliği not edilir. Bu eşitlikten

$$\begin{aligned} f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt &= \frac{1}{b-a} \int_a^b p(x, t) f'(t) dt \\ &= \frac{1}{b-a} \left[\int_a^x (t-a) f'(t) dt + \int_x^b (t-b) f'(t) dt \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafı mutlak değere alınır

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| = \left| \frac{1}{b-a} \left[\int_a^x (t-a) f'(t) dt + \int_x^b (t-b) f'(t) dt \right] \right|$$

olur. İntegralin mutlak değer özelliği kullanılarak

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| \leq \frac{1}{b-a} \left[\int_a^x |t-a| |f'(t)| dt + \int_x^b |t-b| |f'(t)| dt \right]$$

not edilir. $|f'(x)| \leq M$ olduğundan

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| &\leq \frac{M}{b-a} \left[\int_a^x (t-a) dt + \int_x^b (t-b) dt \right] \\ &= \frac{M}{b-a} \left[\left(\frac{t^2}{2} - ta \right) \Big|_a^x + \left(tb - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_x^b \right] \\ &= \frac{M}{b-a} \left[\frac{(x-a)^2 + (b-x)^2}{2} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. İspat tamamlanır [24].

Teorem 3.3.2. (Simpson Eşitsizliği) $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) üzerinde dördüncü mertebeden türevi sürekli bir fonksiyon ve $\|f^{(4)}\|_{\infty} = \sup_{x \in (a, b)} |f^{(4)}(x)| < \infty$ olsun. Bu taktirde

$$\left| \frac{1}{3} \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} \right] + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{1}{2880} \|f^{(4)}\|_{\infty} (b-a)^4$$

elde edilir. Bu eşitsizliğe Simpson Eşitsizliği denir [25].

İspat: Bu teoremi ispatlamak için aşağıdaki eşitlik kullanılır. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) üzerinde dördüncü mertebeden türevi sürekli bir fonksiyon ve $\|f^{(4)}\|_{\infty} = \sup_{x \in (a, b)} |f^{(4)}(x)| < \infty$ olmak üzere

$$\int_a^b S(x) f^{(4)}(x) dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{1}{24} (x-a)^3 \left(x - \frac{a+2b}{3} \right) f^{(4)}(x) dx$$

$$+ \int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{1}{24} (x-b)^3 \left(x - \frac{2a+b}{3}\right) f^{(4)}(x) dx \quad (3.4)$$

not edilir. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınıp üçgen eşitsizliği yapılırsa

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b S(x) f^{(4)}(x) dx \right| &= \left| \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{1}{24} (x-a)^3 \left(x - \frac{a+2b}{3}\right) f^{(4)}(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{1}{24} (x-b)^3 \left(x - \frac{2a+b}{3}\right) f^{(4)}(x) dx \right| \\ &\leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{1}{24} (x-a)^3 \left(x - \frac{a+2b}{3}\right) f^{(4)}(x) dx \\ &\quad + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{1}{24} (x-b)^3 \left(x - \frac{2a+b}{3}\right) f^{(4)}(x) dx \\ &\leq \frac{\|f^{(4)}\|_{\infty}}{24} \left\{ \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)^3 \left(-x + \frac{a+2b}{3}\right) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-b)^3 \left(x - \frac{2a+b}{3}\right) dx \right\} \\ &= \frac{\|f^{(4)}\|_{\infty}}{2880} (b-a)^5 \end{aligned}$$

olur. İlk ve son terimlerden

$$\begin{aligned} &\left| \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{1}{24} (x-a)^3 \left(x - \frac{a+2b}{3}\right) f^{(4)}(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{1}{24} (x-b)^3 \left(x - \frac{2a+b}{3}\right) f^{(4)}(x) dx \right| \\ &\leq \frac{\|f^{(4)}\|_{\infty}}{2880} (b-a)^5 \end{aligned} \quad (3.5)$$

olur. Son bulunan eşitsizlik Simpson Eşitsizliğinin sağ tarafıdır.

Şimdi (3.4) eşitliğine adım adım kısmi integrasyon metodu uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b S(x) f^{(4)}(x) dx \right| &= \left| \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{1}{24} (x-a)^3 \left(x - \frac{a+2b}{3} \right) f^{(4)}(x) dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{1}{24} (x-b)^3 \left(x - \frac{2a+b}{3} \right) f^{(4)}(x) dx \right| \\
&\leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{1}{24} (x-a)^3 \left(x - \frac{a+2b}{3} \right) f^{(4)}(x) dx \\
&\quad + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{1}{24} (x-b)^3 \left(x - \frac{2a+b}{3} \right) f^{(4)}(x) dx \\
&= \left| -\frac{2}{3} (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{6} (b-a) [f(a) + f(b)] + \int_a^b f(x) dx \right| \quad (3.6)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.4) eşitliğinde (3.5) ve (3.6) eşitsizlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\left| -\frac{2}{3} (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{6} (b-a) [f(a) + f(b)] + \int_a^b f(x) dx \right| \\
&= \left| \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{1}{24} (x-a)^3 \left(x - \frac{a+2b}{3} \right) f^{(4)}(x) dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{1}{24} (x-b)^3 \left(x - \frac{2a+b}{3} \right) f^{(4)}(x) dx \right| \\
&\leq \frac{\|f^{(4)}\|_{\infty}}{2880} (b-a)^5
\end{aligned}$$

not edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
&\left| -\frac{2}{3} (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{6} (b-a) [f(a) + f(b)] + \int_a^b f(x) dx \right| \\
&\leq \frac{\|f^{(4)}\|_{\infty}}{2880} (b-a)^5
\end{aligned}$$

olur. Her iki taraf $(b-a)$ 'ya bölünürse

$$\left| \frac{1}{3} \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{\|f^{(4)}\|_{\infty}}{2880} (b-a)^4$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.3.3. $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I^0 üzerinde iki kez türevlenebilen bir fonksiyon $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f'' \in L[a, b]$ olsun. Bu taktirde, herhangi bir $\lambda \in [0, 1]$ ve $r \geq 1$ için $|f''|$, $[a, b]$ üzerinde konveks ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır [22]:

$$\begin{aligned} \left| I\left(f; \alpha, \lambda, \frac{1}{r}\right) \right| &\leq \lambda^2 (1 - \lambda)^2 (b - a)^2 \\ &\times \left[\left\{ (2\lambda - 1) \mu_{12}\left(\alpha, \frac{1}{r}\right) + \mu_{11}\left(\alpha, \frac{1}{r}\right) \right\} |f''(a)| \right. \\ &\left. + \left\{ (1 - 2\lambda) \mu_{12}\left(\alpha, \frac{1}{r}\right) + \mu_{11}\left(\alpha, \frac{1}{r}\right) \right\} |f''(b)| \right]. \end{aligned}$$

Burada

$$\int_0^1 \left| t \left(\frac{1}{r} - t^\alpha \right) \right| dt \equiv \mu_{11}\left(\alpha, \frac{1}{r}\right) = \frac{\alpha r^{-(1+\frac{2}{\alpha})} + 1}{\alpha + 2} - \frac{1}{2r},$$

$$\int_0^1 \left| t \left(\frac{1}{r} - t^\alpha \right) \right| t dt \equiv \mu_{12}\left(\alpha, \frac{1}{r}\right) = \frac{2\alpha r^{-(1+\frac{3}{\alpha})} + 3}{3(\alpha + 3)} - \frac{1}{3r}.$$

İspat: $[a, b]$ üzerinde $|f''|$ 'nin konveksliği ve Lemma 3.2.3'ten

$$\begin{aligned} \left| I\left(f; \alpha, \lambda, \frac{1}{r}\right) \right| &\leq \lambda^2 (1 - \lambda)^2 (b - a)^2 \\ &\times \left[\int_0^1 \left| t \left(\frac{1}{r} - t^\alpha \right) \right| \{ t |f''(x)| + (1 - t) |f''(a)| \} dt \right. \\ &\left. + \int_0^1 \left| t \left(\frac{1}{r} - t^\alpha \right) \right| t \{ |f''(x)| + (1 - t) |f''(b)| \} dt \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \lambda^2(1-\lambda)^2(b-a)^2 \left[2\mu_{12}\left(\alpha, \frac{1}{r}\right) f''(x) \right. \\
&\quad \left. + \left\{ \mu_{11}\left(\alpha, \frac{1}{r}\right) - \mu_{12}\left(\alpha, \frac{1}{r}\right) \right\} \{|f''(a)| + |f''(b)|\} \right] \\
&\leq \lambda^2(1-\lambda)^2(b-a)^2 \left[2\mu_{12}\left(\alpha, \frac{1}{r}\right) \{\lambda|f''(a)| + (1-\lambda)|f''(b)|\} \right. \\
&\quad \left. + \left\{ \mu_{11}\left(\alpha, \frac{1}{r}\right) - \mu_{12}\left(\alpha, \frac{1}{r}\right) \right\} \{|f''(a)| + |f''(b)|\} \right] \leq \lambda^2(1-\lambda)^2(b-a)^2 \\
&\quad \times \left[\left\{ (2\lambda-1)\mu_{12}\left(\alpha, \frac{1}{r}\right) + \mu_{11}\left(\alpha, \frac{1}{r}\right) \right\} |f''(a)| \right. \\
&\quad \left. + \left\{ (1-2\lambda)\mu_{12}\left(\alpha, \frac{1}{r}\right) + \mu_{11}\left(\alpha, \frac{1}{r}\right) \right\} |f''(b)| \right],
\end{aligned}$$

olur. İspat tamamlanır.

Teorem 3.3.4. $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I^0 üzerinde iki kez türevlenebilen bir fonksiyon $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f'' \in L[a, b]$ olsun. Bu taktirde, herhangi bir $\lambda \in [0, 1]$ ve $r \geq 1$ için $|f''|^q$, $q > 1$ için $[a, b]$ üzerinde konveks ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır [22]:

$$\begin{aligned}
&\left| I\left(f; \alpha, \lambda, \frac{1}{r}\right) \right| \leq \lambda^2(1-\lambda)^2(b-a)^2 \mu_{21}^{\frac{1}{p}}\left(\alpha, \frac{1}{r}, p\right) \\
&\quad \times \left[\left\{ \frac{(1+\lambda)|f''(a)|^q + (1-\lambda)|f''(b)|^q}{2} \right\}^{\frac{1}{q}} + \left\{ \frac{\lambda|f''(a)|^q + (2-\lambda)|f''(b)|^q}{2} \right\}^{\frac{1}{q}} \right].
\end{aligned}$$

Burada

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left| t\left(\frac{1}{r} - t^\alpha\right) \right|^p \equiv \mu_{21}\left(\alpha, \frac{1}{r}, p\right) = \frac{r^{-\frac{(\alpha+1)p+1}{\alpha}}}{\alpha} \left[\beta\left(\frac{p+1}{\alpha}, p+1\right) \right. \\
&\quad \left. + (-1)^{p+1} \left\{ \beta\left(\frac{p+1}{\alpha}, p+1\right) - \beta\left(r, \frac{p+1}{\alpha}, p+1\right) \right\} \right].
\end{aligned}$$

İspat: Lemma 3.2.3. ve Hölder integral eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
\left| I\left(f; \alpha, \lambda, \frac{1}{r}\right) \right| &\leq \lambda^2(1-\lambda)^2(b-a)^2 \\
\left[\int_0^1 t \left(\frac{1}{r} - t^\alpha \right) |f''(tx + (1-t)a)| dt + \int_0^1 t \left(\frac{1}{r} - t^\alpha \right) |f''(tx + (1-t)b)| dt \right] \\
&\leq \lambda^2(1-\lambda)^2(b-a)^2 \\
&\times \left[\left\{ \int_0^1 \left| t \left(\frac{1}{r} - t^\alpha \right) \right|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_0^1 |f''(tx + (1-t)a)|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + \left\{ \int_0^1 \left| t \left(\frac{1}{r} - t^\alpha \right) \right|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_0^1 |f''(tx + (1-t)b)|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}} \right] \\
&\leq \lambda^2(1-\lambda)^2(b-a)^2 \mu_{21}^{\frac{1}{p}} \left(\alpha, \frac{1}{r}, p \right) \\
&\times \left[\left\{ \int_0^1 |f''(tx + (1-t)a)|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}} + \left\{ \int_0^1 |f''(tx + (1-t)b)|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}} \right]. \quad (3.7)
\end{aligned}$$

olur. $|f''|^q$, $q > 1$ için $[a, b]$ üzerinde konveks olduğundan

$$(i) \int_0^1 |f''(tx + (1-t)a)|^q dt \leq \frac{(1+\lambda)|f''(a)|^q + (1-\lambda)|f''(b)|^q}{2}, \quad (3.8)$$

$$(ii) \int_0^1 |f''(tx + (1-t)b)|^q dt \leq \frac{\lambda|f''(a)|^q + (2-\lambda)|f''(b)|^q}{2}. \quad (3.9)$$

olur. (3.7)'da (3.8) ve (3.9)'u yerine koyarak istenen sonuç elde edilir.

Teorem 3.3.5. $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I^0 üzerinde iki kez türevlenebilen bir fonksiyon $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f'' \in L[a, b]$ olsun. Bu takdirde, herhangi bir $\lambda \in [0, 1]$ ve $r \geq 1$ için $|f''|^q$, $q > 1$ için $[a, b]$ üzerinde konveks ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır [22]:

$$\begin{aligned}
& \left| I \left(f; \alpha, \lambda, \frac{1}{r} \right) \right| \\
& \leq \lambda^2 (1 - \lambda)^2 (b - a)^2 \left[\left\{ \mu_{21} \left(\alpha, \frac{1}{r}, q \right) - (1 - \lambda) \mu_{22} \left(\alpha, \frac{1}{r}, q \right) |f''(a)|^q \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (1 - \lambda) \mu_{22} \left(\alpha, \frac{1}{r}, q \right) |f''(b)|^q \right\}^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left\{ \lambda \mu_{22} \left(\alpha, \frac{1}{r}, q \right) |f''(a)|^q + \left(\mu_{21} \left(\alpha, \frac{1}{r}, q \right) - \lambda \mu_{22} \left(\alpha, \frac{1}{r}, q \right) |f''(b)|^q \right) \right\}^{\frac{1}{q}} \right].
\end{aligned}$$

Burada

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \left| t \left(\frac{1}{r} - t^\alpha \right) \right|^p \equiv \mu_{21} \left(\alpha, \frac{1}{r}, p \right) = \frac{r^{\frac{(\alpha+1)p+1}{\alpha}}}{\alpha} \left[\beta \left(\frac{p+1}{\alpha}, p+1 \right) \right. \\
& \quad \left. + (-1)^{p+1} \left\{ \beta \left(\frac{p+1}{\alpha}, p+1 \right) - \beta \left(r, \frac{p+1}{\alpha}, p+1 \right) \right\} \right], \\
& \int_0^1 \left| t \left(\frac{1}{r} - t^\alpha \right) \right|^p \equiv \mu_{22} \left(\alpha, \frac{1}{r}, p \right) = \frac{r^{\frac{(\alpha+1)p+2}{\alpha}}}{\alpha} \left[\beta \left(\frac{p+2}{\alpha}, p+1 \right) \right. \\
& \quad \left. + (-1)^{p+1} \left\{ \beta \left(\frac{p+2}{\alpha}, p+1 \right) - \beta \left(r, \frac{p+2}{\alpha}, p+1 \right) \right\} \right].
\end{aligned}$$

İspat: Lemma 3.2.3. ve Hölder integral eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
& \left| I \left(f; \alpha, \lambda, \frac{1}{r} \right) \right| \leq \lambda^2 (1 - \lambda)^2 (b - a)^2 \\
& \quad \times \left[\left\{ \int_0^1 \left| t \left(\frac{1}{r} - t^\alpha \right) \right|^q |f''(tx + (1 - t)a)|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left\{ \int_0^1 \left| t \left(\frac{1}{r} - t^\alpha \right) \right|^q |f''(tx + (1 - t)b)|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}} \right].
\end{aligned}$$

olur. $[a, b]$ üzerinde $|f'|^q$ 'nin konveks olması nedeni ile

$$\begin{aligned}
& \left| I \left(f; \alpha, \lambda, \frac{1}{r} \right) \right| \leq \lambda^2 (1 - \lambda)^2 (b - a)^2 \\
& \times \left[\left\{ \int_0^1 \left| t \left(\frac{1}{r} - t^\alpha \right) \right|^q (t |f''(x)|^q + (1 - t) |f''(a)|^q) dt \right\}^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \left. + \left\{ \int_0^1 \left| t \left(\frac{1}{r} - t^\alpha \right) \right|^q (t |f''(x)|^q + (1 - t) |f''(b)|^q) dt \right\}^{\frac{1}{q}} \right] \\
& \leq \lambda^2 (1 - \lambda)^2 (b - a)^2 \left[\left\{ \mu_{22} \left(\alpha, \frac{1}{r}, q \right) |f''(x)|^q \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\mu_{21} \left(\alpha, \frac{1}{r}, q \right) - \mu_{22} \left(\alpha, \frac{1}{r}, q \right) \right) |f''(a)|^q \right\}^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \left. + \left\{ \mu_{22} \left(\alpha, \frac{1}{r}, q \right) |f''(x)|^q \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\mu_{21} \left(\alpha, \frac{1}{r}, q \right) - \mu_{22} \left(\alpha, \frac{1}{r}, q \right) \right) |f''(b)|^q \right\}^{\frac{1}{q}} \right]. \quad (3.10)
\end{aligned}$$

olur.

Teorem 3.3.6. $a, b \in I$ ve $a < b$, $\lambda \in [0, 1]$ ve $r \geq 1$ olmak üzere $f: I \subseteq R \rightarrow R$, I aralığının içteki I^0 üzerinde iki kez türevlenebilen bir fonksiyon olmasını sağlayacak şekilde $f'' \in L([a, b])$ olsun. $|f''|^q$, $q \geq 1$ için $[a, b]$ üzerinde konveks ise aşağıdaki eşitsizlik vardır [22]:

$$\begin{aligned}
& \left| I \left(f; \alpha, \lambda, \frac{1}{r} \right) \right| \leq \lambda^2 (1 - \lambda)^2 (b - a)^2 \mu_{11}^{\frac{1}{p}} \left(\alpha, \frac{1}{r} \right) \\
& \times \left[\left\{ \left(\mu_{11} \left(\alpha, \frac{1}{r} \right) - (1 - \lambda) \mu_{12} \left(\alpha, \frac{1}{r} \right) \right) |f''(a)|^q + (1 - \lambda) \mu_{12} \left(\alpha, \frac{1}{r} \right) |f''(b)|^q \right\}^{\frac{1}{q}} \right.
\end{aligned}$$

$$+ \left\{ \lambda \mu_{12} \left(\alpha, \frac{1}{r} \right) |f''(a)|^q + \left(\mu_{11} \left(\alpha, \frac{1}{r} \right) - \lambda \mu_{12} \left(\alpha, \frac{1}{r} \right) \right) |f''(b)|^q \right\}^{\frac{1}{q}} \Bigg].$$

Burada

$$\int_0^1 \left| t \left(\frac{1}{r} - t^\alpha \right) \right| dt \equiv \mu_{11} \left(\alpha, \frac{1}{r} \right) = \frac{\alpha r^{-(1+\frac{2}{\alpha})} + 1}{\alpha + 2} - \frac{1}{2r},$$

$$\int_0^1 \left| t \left(\frac{1}{r} - t^\alpha \right) \right| t dt \equiv \mu_{12} \left(\alpha, \frac{1}{r} \right) = \frac{2\alpha r^{-(1+\frac{3}{\alpha})} + 3}{3(\alpha + 3)} - \frac{1}{3r}.$$

İspat: Lemma 3.2.3. ve ortalama kuvvet integral eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned} \left| I \left(f; \alpha, \lambda, \frac{1}{r} \right) \right| &\leq \lambda^2 (1 - \lambda)^2 (b - a)^2 \left\{ \int_0^1 \left| t \left(\frac{1}{r} - t^\alpha \right) \right| dt \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &\times \left[\left\{ \int_0^1 \left| t \left(\frac{1}{r} - t^\alpha \right) \right| |f''(tx + (1 - t)a)|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}} \right. \\ &\left. + \left\{ \int_0^1 \left| t \left(\frac{1}{r} - t^\alpha \right) \right| |f''(tx + (1 - t)b)|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}} \right]. \end{aligned}$$

olur. $[a, b]$ üzerinde $|f'|^q$ 'nin konveks olması nedeni ile

$$\begin{aligned} &(i) \int_0^1 \left| t \left(\frac{1}{r} - t^\alpha \right) \right| |f''(tx + (1 - t)a)|^q dt \\ &\leq \mu_{12} \left(\alpha, \frac{1}{r} \right) |f''(x)|^q + \left(\mu_{11} \left(\alpha, \frac{1}{r} \right) - \mu_{12} \left(\alpha, \frac{1}{r} \right) \right) |f''(a)|^q \\ &\leq \left(\mu_{11} \left(\alpha, \frac{1}{r} \right) - (1 - \lambda) \mu_{12} \left(\alpha, \frac{1}{r} \right) \right) |f''(b)|^q + (1 - \lambda) \mu_{12} \left(\alpha, \frac{1}{r} \right) |f''(b)|^q \quad (3.12) \end{aligned}$$

$$(ii) \int_0^1 \left| t \left(\frac{1}{r} - t^\alpha \right) \right| |f''(tx + (1 - t)b)|^q dt$$

$$\begin{aligned}
&\leq \mu_{12}\left(\alpha, \frac{1}{r}\right) |f''(x)|^q + \left(\mu_{11}\left(\alpha, \frac{1}{r}\right) - \mu_{12}\left(\alpha, \frac{1}{r}\right)\right) |f''(b)|^q \\
&\leq \mu_{12}\left(\alpha, \frac{1}{r}\right) |f''(a)|^q + \left(\mu_{11}\left(\alpha, \frac{1}{r}\right) - \mu_{12}\left(\alpha, \frac{1}{r}\right)\right) |f''(b)|^q \quad (3.13)
\end{aligned}$$

olur. (3.10)'u (3.11) ve (3.12)'de yerine koyarak istenen sonuç elde edilir.

3.4. S-Konveks Fonksiyonlar İçin Elde Edilen Eşitsizlikler

Teorem 3.4.1. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a < b$ olacak şekilde (a, b) üzerinde iki kez türevlenebilir fonksiyon olsun. $f'' \in L[a, b]$ ve $|f''|$ ikinci türden s – konveks fonksiyon ise kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır [14]:

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left[J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a) + J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b) \right] - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\
&\leq \frac{(b-a)^2}{2^{s+3}(\alpha+1)} \left\{ \mathcal{C}(s, \alpha, t) + \frac{\Gamma(s+\alpha+2)}{\Gamma(s+\alpha+3)} \right\} [|f''(a) + f''(b)|],
\end{aligned}$$

burada $\mathcal{C}(s, \alpha, t) = \int_0^1 (1-t)^{\alpha+1} (1-t)^s dt$, dir.

İspat: Lemma 3.2.1.'i ve $|f''|$ 'nin ikinci türden s – konveks fonksiyon olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left[J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a) + J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b) \right] - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\
&= \left| \frac{(b-a)^2}{8(\alpha+1)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha+1} \left[f''\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right) + f''\left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b\right) \right] dt \right| \\
&\leq \left| \frac{(b-a)^2}{8(\alpha+1)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha+1} f''\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right) dt \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left| \frac{(b-a)^2}{8(\alpha+1)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha+1} f'' \left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b \right) dt \right| \\
& \leq \frac{(b-a)^2}{8(\alpha+1)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha+1} \left| f'' \left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b \right) \right| dt \\
& \quad + \frac{(b-a)^2}{8(\alpha+1)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha+1} \left| f'' \left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b \right) \right| dt \\
& \leq \frac{(b-a)^2}{8(\alpha+1)} \left[\int_0^1 (1-t)^{\alpha+1} \left[\left(\frac{1+t}{2} \right)^s |f''(a)| + \left(\frac{1-t}{2} \right)^s |f''(b)| \right] dt \right. \\
& \quad \left. + \int_0^1 (1-t)^{\alpha+1} \left[\left(\frac{1-t}{2} \right)^s |f''(a)| + \left(\frac{1+t}{2} \right)^s |f''(b)| \right] dt \right] \\
& = \frac{(b-a)^2}{2^{s+3}(\alpha+1)} \left[|f''(a)| \int_0^1 (1-t)^{\alpha+1} (1+t)^s dt + |f''(b)| \int_0^1 (1-t)^{\alpha+1} (1-t)^s dt \right. \\
& \quad \left. + |f''(a)| \int_0^1 (1-t)^{\alpha+1} (1-t)^s dt + |f''(b)| \int_0^1 (1+t)^{\alpha+1} (1-t)^s dt \right] \\
& = \frac{(b-a)^2}{2^{s+3}(\alpha+1)} \left[|f''(a)| \mathcal{C}(s, \alpha, t) + |f''(b)| \frac{\Gamma(s+\alpha+2)}{\Gamma(s+\alpha+3)} \right. \\
& \quad \left. + |f''(a)| \frac{\Gamma(s+\alpha+2)}{\Gamma(s+\alpha+3)} + |f''(b)| \mathcal{C}(s, \alpha, t) \right] \\
& = \frac{(b-a)^2}{2^{s+3}(\alpha+1)} \left\{ \mathcal{C}(s, \alpha, t) + \frac{\Gamma(s+\alpha+2)}{\Gamma(s+\alpha+3)} \right\} [|f''(a) + f''(b)|]
\end{aligned}$$

olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.4.2. $a < b$ olmak üzere $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) üzerinde iki kez türevlenebilir fonksiyon olsun. $f'' \in L[a, b]$ ve $|f''|^q$ ikinci türden $s -$ konveks fonksiyon ise kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır [14]:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left[J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a) + J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b) \right] - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{2^{\frac{3q+s}{q}} (\alpha+1)} \left(\frac{1}{p(\alpha+1)+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} \left[\{|f''(a)|^q (2^{s+1}-1) + |f''(b)|^q\}^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \{|f''(a)|^q + |f''(b)|^q (2^{s+1}-1)\}^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

İspat: Lemma 3.2.1., Hölder eşitsizliği ve $|f''|^q$ 'nin ikinci türden $s -$ konveks fonksiyon olduğunu kullanarak

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left[J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a) + J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b) \right] - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\ & = \left| \frac{(b-a)^2}{8(\alpha+1)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha+1} \left[f''\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right) + f'\left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b\right) \right] dt \right| \\ & \leq \left| \frac{(b-a)^2}{8(\alpha+1)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha+1} f''\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right) dt \right| \\ & \quad + \left| \frac{b-a}{4} \int_0^1 (1-t)^{\alpha+1} f''\left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b\right) dt \right| \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{8(\alpha+1)} \left\{ \left(\int_0^1 (1-t)^{p(\alpha+1)} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| f''\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_0^1 (1-t)^{p(\alpha+1)} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| f''\left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b\right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\int_0^1 (1-t)^{p(\alpha+1)} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| f'' \left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\} \\
& \leq \frac{(b-a)^2}{8(\alpha+1)} \left(\frac{1}{p(\alpha+1)+1} \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \left\{ \left(|f''(a)|^q \int_0^1 \left(\frac{1+t}{2} \right)^s dt + |f''(b)|^q \int_0^1 \left(\frac{1-t}{2} \right)^s dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \left. + \left(|f''(a)|^q \int_0^1 \left(\frac{1-t}{2} \right)^s dt + |f''(b)|^q \int_0^1 \left(\frac{1+t}{2} \right)^s dt \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\
& = \frac{(b-a)^2}{2^{\frac{3q+s}{q}}(\alpha+1)} \left(\frac{1}{p(\alpha+1)+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} \left[\{|f''(a)|^q(2^{s+1}-1) + |f''(b)|^q\}^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \{|f''(a)|^q + |f''(b)|^q(2^{s+1}-1)\}^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

olur ve ispat tamamlanır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu kısımda, Lemma 3.2.1 ve Lemma 3.2.3 de verilen özdeşlikler ile Hölder ve Power mean integral eşitsizlikleri de kullanılarak p-fonksiyonlar için bazı yeni kesirli integral eşitsizlikleri elde edildi.

Bu kısım boyunca

$$\begin{aligned} I\left(f; \alpha, \lambda, \frac{1}{r}\right) &\equiv \lambda(1-\lambda)(1-2\lambda)\left(1-\frac{1}{r}\right)(b-a)^2 f'(x) \\ &+ \left(\frac{r(1+\alpha)-1}{r}\right)\{(1-\lambda)^2 + \lambda^2\}f(x) + \frac{\lambda^2 f(a) + (1-\lambda)^2 f(b)}{r} \\ &- \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^\alpha \alpha (1-\lambda)^\alpha (b-a)^\alpha} \{\lambda^{\alpha+2} J_{x^-}^\alpha f(a) + (1-\lambda)^{\alpha+2} J_{x^+}^\alpha f(b)\} \end{aligned}$$

sembolü kullanılacaktır.

Teorem 4.1. $a < b$ olmak üzere $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) üzerinde iki kez türevlenebilir fonksiyon olsun. $f'' \in L[a, b]$ ve $|f''|$ P-fonksiyon ise kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned} &\left| \frac{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left[J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a) + J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b) \right] - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\ &\leq \frac{(b-a)^2}{4(\alpha+1)(\alpha+2)} [|f''(a)| + |f''(b)|], \end{aligned}$$

İspat: Lemma 3.2.1. ve $|f''|$ 'nin P-fonksiyon olduğu kullanılırsa;

$$\left| \frac{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left[J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a) + J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b) \right] - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{(b-a)^2}{8(\alpha+1)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha+1} \left[f''\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right) + f''\left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b\right) \right] dt \right| \\
&\leq \left| \frac{(b-a)^2}{8(\alpha+1)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha+1} f''\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right) dt \right| \\
&\quad + \left| \frac{(b-a)^2}{8(\alpha+1)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha+1} f''\left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b\right) dt \right| \\
&\leq \frac{(b-a)^2}{8(\alpha+1)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha+1} \left| f''\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right) \right| dt \\
&\quad + \frac{(b-a)^2}{8(\alpha+1)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha+1} \left| f''\left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b\right) \right| dt \\
&\leq \frac{(b-a)^2}{8(\alpha+1)} \left[\int_0^1 (1-t)^{\alpha+1} [|f''(a)| + |f''(b)|] dt \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 (1-t)^{\alpha+1} [|f''(a)| + |f''(b)|] dt \right] \\
&= \frac{(b-a)^2}{4(\alpha+1)} [|f''(a)| + |f''(b)|] \int_0^1 (1-t)^{\alpha+1} dt \\
&= \frac{(b-a)^2}{4(\alpha+1)(\alpha+2)} [|f''(a)| + |f''(b)|]
\end{aligned}$$

olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.2. $a < b$ olmak üzere $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) üzerinde iki kez türevlenebilir fonksiyon olsun. $f'' \in L[a, b]$ ve $|f''|^q$ P-fonksiyon ise kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left[J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a) + J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b) \right] - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{8(\alpha+1)} \left(\frac{1}{p(\alpha+1)+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(|f''(a)|^q + \left| f''\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\left| f''\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^q + |f''(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

İspat: Lemma 3.2.1., Hölder eşitsizliği ve $|f''|^q$ 'nin P-fonksiyon olduğunu kullanarak

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left[J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a) + J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b) \right] - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\ & = \left| \frac{(b-a)^2}{8(\alpha+1)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha+1} \left[f''\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right) + f''\left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b\right) \right] dt \right| \\ & \leq \left| \frac{(b-a)^2}{8(\alpha+1)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha+1} f''\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right) dt \right| \\ & \quad + \left| \frac{b-a}{4} \int_0^1 (1-t)^{\alpha+1} f''\left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b\right) dt \right| \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{8(\alpha+1)} \left\{ \left(\int_0^1 (1-t)^{p(\alpha+1)} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| f''\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_0^1 (1-t)^{p(\alpha+1)} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| f''\left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b\right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\int_0^1 (1-t)^{p(\alpha+1)} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| f'' \left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\} \\
& \leq \frac{(b-a)^2}{8(\alpha+1)} \left(\frac{1}{p(\alpha+1)+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(|f''(a)|^q + \left| f'' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\left| f'' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^q + |f''(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.3. $a < b$ olmak üzere $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) üzerinde iki kez türevlenebilir fonksiyon olsun. $|f''| \in L[a, b]$ ve $|f''|^q$ P-fonksiyon ise kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left[J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a) + J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b) \right] - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\
& \leq \frac{(b-a)^2}{8(\alpha+1)} \left(\frac{1}{\alpha+2} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\left(|f''(a)|^q + \left| f'' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\left| f'' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^q + |f''(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right].
\end{aligned}$$

İspat: Lemma 3.2.1., power mean eşitsizliği ve $|f''|^q$ 'nin P-fonksiyon olduğunu kullanarak

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left[J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a) + J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b) \right] - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\
& = \left| \frac{(b-a)^2}{8(\alpha+1)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha+1} \left[f'' \left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b \right) + f'' \left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b \right) \right] dt \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \leq \left| \frac{(b-a)^2}{8(\alpha+1)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha+1} f'' \left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b \right) dt \right| \\
& \quad + \left| \frac{b-a}{4} \int_0^1 (1-t)^{\alpha+1} f'' \left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b \right) dt \right| \\
& \leq \frac{(b-a)^2}{8(\alpha+1)} \left\{ \left(\int_0^1 (1-t)^{(\alpha+1)} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. \left(\int_0^1 (1-t)^{(\alpha+1)} \left| f'' \left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 (1-t)^{(\alpha+1)} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 (1-t)^{(\alpha+1)} \left| f'' \left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\
& \leq \frac{(b-a)^2}{8(\alpha+1)} \left(\frac{1}{\alpha+2} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\left(|f''(a)|^q + \left| f'' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\left| f'' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^q + |f''(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right].
\end{aligned}$$

ispat tamamlanır.

Teorem 4.4. $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I^0 üzerinde iki kez türevlenebilen bir fonksiyon $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f'' \in L[a, b]$ olsun. Bu takdirde, herhangi bir $\lambda \in [0, 1]$ ve $r \geq 1$ için $|f''|$, $[a, b]$ üzerinde P-fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned}
& \left| I \left(f; \alpha, \lambda, \frac{1}{r} \right) \right| \leq \lambda^2 (1-\lambda)^2 (b-a)^2 \\
& \quad \times \{ 2|f''(x)| + |f''(a)| + |f''(b)| \} \mu_{11} \left(\alpha, \frac{1}{r} \right)
\end{aligned}$$

$$\leq 3\lambda^2(1-\lambda)^2(b-a)^2\{|f''(a)| + |f''(b)|\}\mu_{11}\left(\alpha, \frac{1}{r}\right).$$

Burada,

$$\int_0^1 \left| t \left(\frac{1}{r} - t^\alpha \right) \right| dt \equiv \mu_{11}\left(\alpha, \frac{1}{r}\right) = \frac{\alpha r^{-(1+\frac{2}{\alpha})} + 1}{\alpha + 2} - \frac{1}{2r}.$$

İspat: $[a, b]$ üzerinde $|f''|$ P-fonksiyonu, Lemma 3.2.3.'ten

$$\left| I \left(f; \alpha, \lambda, \frac{1}{r} \right) \right| \leq \lambda^2(1-\lambda)^2(b-a)^2$$

$$\begin{aligned} & \times \left[\int_0^1 t \left(\frac{1}{r} - t^\alpha \right) \{|f''(x)| + |f''(a)|\} dt + \int_0^1 t \left(\frac{1}{r} - t^\alpha \right) \{|f''(x)| + |f''(b)|\} dt \right] \\ & = \lambda^2(1-\lambda)^2(b-a)^2\{2|f''(x)| + |f''(a)| + |f''(b)|\}\mu_{11}\left(\alpha, \frac{1}{r}\right) \end{aligned}$$

olur. $x = \lambda a + (1-\lambda)b$ olduğundan

$$|f''(x)| = |f''(\lambda a + (1-\lambda)b)| \leq |f''(a)| + |f''(b)|$$

eşitsizliğini de kullanırsak

$$\left| I \left(f; \alpha, \lambda, \frac{1}{r} \right) \right| \leq 3\lambda^2(1-\lambda)^2(b-a)^2\{|f''(a)| + |f''(b)|\}\mu_{11}\left(\alpha, \frac{1}{r}\right)$$

olur. İspat tamamlanır.

Sonuç 4.1. Teorem 4.4'te $r = 1$ ve $\lambda = \frac{1}{2}$ alınırsa

$$\begin{aligned} & \left| I \left(f; \alpha, \frac{1}{2}, 1 \right) \right| \\ & = \frac{\alpha}{2} \cdot f(x) + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} \right] - \frac{2^{\alpha-2}\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(b-a)^\alpha} \cdot \{J_{x-}^\alpha f(a) + J_{x+}^\alpha f(b)\} \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{16} \{2 \cdot |f''(x)| + |f''(a)| + |f''(b)|\}\mu_{11}(\alpha, 1) \end{aligned}$$

$$\leq \frac{3}{16} \cdot (b-a)^2 \cdot \{|f''(a)| + |f''(b)|\} \mu_{11}(\alpha, 1)$$

eşitsizliği sağlanır.

Özel olarak $x = \frac{a+b}{2}$ alınırsa aşağıdaki Simpson tipli eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & \left| I\left(f; \alpha, \frac{1}{2}, 1\right) \right| \\ & \frac{1}{4} \cdot \left[f(a) + 2\alpha f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{2^{\alpha-2} \Gamma(\alpha+2)}{\alpha(b-a)^\alpha} \cdot \left\{ J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a) + J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b) \right\} \\ & \leq \frac{1}{16} (b-a)^2 \cdot \left\{ 2 \cdot \left| f''\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| + |f''(a)| + |f''(b)| \right\} \mu_{11}(\alpha, 1) \\ & \leq \frac{3}{16} \cdot (b-a)^2 \cdot \{|f''(a)| + |f''(b)|\} \mu_{11}(\alpha, 1), \end{aligned}$$

burada $\mu_{11}(\alpha, 1) = \frac{\alpha}{2(\alpha+2)}$, dir.

Teorem 4.5. $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I^0 üzerinde iki kez türevlenebilen bir fonksiyon $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f'' \in L[a, b]$ olsun. Bu taktirde, herhangi bir $\lambda \in [0, 1]$ ve $r \geq 1$ için $|f''|^q$, $q > 1$ için $[a, b]$ üzerinde P-fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned} & \left| I\left(f; \alpha, \lambda, \frac{1}{r}\right) \right| \leq \lambda^2 (1-\lambda)^2 (b-a)^2 \mu_{21}^{\frac{1}{p}}\left(\alpha, \frac{1}{r}, p\right) \\ & \times \left[\{2|f''(a)|^q + |f''(b)|^q\}^{\frac{1}{q}} + \{|f''(a)|^q + 2|f''(b)|^q\}^{\frac{1}{q}} \right], \end{aligned}$$

burada

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left| t\left(\frac{1}{r} - t^\alpha\right) \right|^p \equiv \mu_{21}\left(\alpha, \frac{1}{r}, p\right) = \frac{r^{\frac{(\alpha+1)p+1}{\alpha}}}{\alpha} \left[\beta\left(\frac{p+1}{\alpha}, p+1\right) \right. \\ & \left. + (-1)^{p+1} \left\{ \beta\left(\frac{p+1}{\alpha}, p+1\right) - \beta\left(r, \frac{p+1}{\alpha}, p+1\right) \right\} \right]. \end{aligned}$$

dir.

İspat: Lemma 3.2.3. ve Hölder integral eşitsizliğini kullanarak

$$\left| I\left(f; \alpha, \lambda, \frac{1}{r}\right) \right| \leq \lambda^2(1-\lambda)^2(b-a)^2$$

$$\left[\int_0^1 t \left(\frac{1}{r} - t^\alpha \right) |f''(tx + (1-t)a)| dt + \int_0^1 t \left(\frac{1}{r} - t^\alpha \right) |f''(tx + (1-t)b)| dt \right]$$

$$\leq \lambda^2(1-\lambda)^2(b-a)^2$$

$$\times \left[\left\{ \int_0^1 \left| t \left(\frac{1}{r} - t^\alpha \right) \right|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_0^1 |f''(tx + (1-t)a)|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$\left. + \left\{ \int_0^1 \left| t \left(\frac{1}{r} - t^\alpha \right) \right|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_0^1 |f''(tx + (1-t)b)|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}} \right]$$

$$\leq \lambda^2(1-\lambda)^2(b-a)^2 \mu_{21}^{\frac{1}{p}} \left(\alpha, \frac{1}{r}, p \right)$$

$$\times \left[\left\{ \int_0^1 |f''(tx + (1-t)a)|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}} + \left\{ \int_0^1 |f''(tx + (1-t)b)|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}} \right], \quad (4.1)$$

olur. $|f''|^q$, $q > 1$ için $[a, b]$ üzerinde P-fonksiyonu olduğundan

$$(i) \quad \int_0^1 |f''(tx + (1-t)a)|^q dt \leq |f''(a)|^q + |f''(x)|^q,$$

$$(ii) \quad \int_0^1 |f''(tx + (1-t)b)|^q dt \leq |f''(x)|^q + |f''(b)|^q,$$

olur. $x = \lambda a + (1-\lambda)b$ ve $|f''|^q$ nun P-fonksiyon olduğundan

$$|f''(x)|^q = |f''(\lambda a + (1-\lambda)b)|^q \leq |f''(a)|^q + |f''(b)|^q$$

eşitsizliğini de kullanırsak

$$(iii) \quad \int_0^1 |f''(tx + (1-t)a)|^q dt \leq 2|f''(a)|^q + |f''(b)|^q, \quad (4.2)$$

$$(iv) \quad \int_0^1 |f''(tx + (1-t)b)|^q dt \leq |f''(a)|^q + 2|f''(b)|^q, \quad (4.3)$$

olur. (4.1)'de (4.2) ve (4.3)'ü yerine koyarak, istenen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2. Teorem 4.5'te $r = 1$ ve $\lambda = \frac{1}{2}$ alınırsa

$$\begin{aligned} & \left| I\left(f; \alpha, \frac{1}{2}, 1\right) \right| \\ &= \frac{\alpha}{2} \cdot f(x) + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} \right] - \frac{2^{\alpha-2} \Gamma(\alpha+2)}{\alpha(b-a)^\alpha} \cdot \{J_{x-}^\alpha f(a) + J_{x+}^\alpha f(b)\} \\ &\leq \frac{1}{16} (b-a)^2 \cdot \mu_{21}^{\frac{1}{p}}(\alpha, 1, p) \\ &\quad \times \left[\{2|f''(a)|^q + |f''(b)|^q\}^{\frac{1}{q}} + \{|f''(a)|^q + 2|f''(b)|^q\}^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

Özel olarak $x = \frac{a+b}{2}$ alınırsa aşağıdaki Simpson tipli eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & \left| I\left(f; \alpha, \frac{1}{2}, 1\right) \right| \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left[f(a) + 2\alpha f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{2^{\alpha-2} \Gamma(\alpha+2)}{\alpha(b-a)^\alpha} \cdot \left\{ J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)-}^\alpha f(a) + J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)+}^\alpha f(b) \right\} \\ &\leq \frac{1}{16} (b-a)^2 \cdot \mu_{21}^{\frac{1}{p}}(\alpha, 1, p) \\ &\quad \times \left[\{2|f''(a)|^q + |f''(b)|^q\}^{\frac{1}{q}} + \{|f''(a)|^q + 2|f''(b)|^q\}^{\frac{1}{q}} \right]. \end{aligned}$$

Burada $\mu_{21}(\alpha, 1, p) = \frac{1}{\alpha} \left[\beta \left(\frac{p+1}{\alpha}, p+1 \right) \right]$, dir.

Teorem 4.6. $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I^0 üzerinde iki kez türevlenebilen bir fonksiyon $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f'' \in L[a, b]$ olsun. Bu taktirde, herhangi bir $\lambda \in [0, 1]$ ve $r \geq 1$ için $|f''|^q$, $q > 1$ için $[a, b]$ üzerinde P-fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned} & \left| I \left(f; \alpha, \lambda, \frac{1}{r} \right) \right| \\ & \leq \frac{\lambda^2(1-\lambda)^2(b-a)^2}{(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left\{ \int_0^1 \left| \frac{1}{r} - t^\alpha \right|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}} \\ & \times \left[\{2|f''(a)|^q + |f''(b)|^q\}^{\frac{1}{q}} + \{|f''(a)|^q + 2|f''(b)|^q\}^{\frac{1}{q}} \right]. \end{aligned}$$

İspat: Lemma 3.2.3. ve Hölder integral eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned} & \left| I \left(f; \alpha, \lambda, \frac{1}{r} \right) \right| \leq \lambda^2(1-\lambda)^2(b-a)^2 \\ & \times \left[\left\{ \int_0^1 \left| t \left(\frac{1}{r} - t^\alpha \right) \right|^q |f''(tx + (1-t)a)|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \left. + \left\{ \int_0^1 \left| t \left(\frac{1}{r} - t^\alpha \right) \right|^q |f''(tx + (1-t)b)|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

olur. $[a, b]$ üzerinde $|f'|^q$ p -fonksiyonu olması nedeni ile

$$\begin{aligned} & \left| I \left(f; \alpha, \lambda, \frac{1}{r} \right) \right| \leq \lambda^2(1-\lambda)^2(b-a)^2 \\ & \times \left[\left\{ \int_0^1 t^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_0^1 \left| \frac{1}{r} - t^\alpha \right|^q |f''(tx + (1-t)a)|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \int_0^1 t^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_0^1 \left| \frac{1}{r} - t^\alpha \right|^q |f''(tx + (1-t)b)|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}} \Bigg] \\
& \leq \frac{\lambda^2(1-\lambda)^2(b-a)^2}{(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left\{ \int_0^1 \left| \frac{1}{r} - t^\alpha \right|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}} \\
& \times \left[\{2|f''(a)|^q + |f''(b)|^q\}^{\frac{1}{q}} + \{|f''(a)|^q + 2|f''(b)|^q\}^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

de kullanırsak istenen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3. Teorem 4.6'te $r = 1$ ve $\lambda = \frac{1}{2}$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| I \left(f; \alpha, \frac{1}{2}, 1 \right) \right| \\
& = \frac{\alpha}{2} \cdot f(x) + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} \right] - \frac{2^{\alpha-2} \Gamma(\alpha+2)}{\alpha(b-a)^\alpha} \cdot \{J_{x-}^\alpha f(a) + J_{x+}^\alpha f(b)\} \\
& \leq \frac{(b-a)^2}{16(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left\{ \int_0^1 |1 - t^\alpha|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}} \\
& \times \left[\{2|f''(a)|^q + |f''(b)|^q\}^{\frac{1}{q}} + \{|f''(a)|^q + 2|f''(b)|^q\}^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

Özel olarak $x = \frac{a+b}{2}$ alınırsa aşağıdaki Simpson tipli eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \left| I \left(f; \alpha, \frac{1}{2}, 1 \right) \right| \\
& = \frac{1}{4} \cdot \left[f(a) + 2\alpha f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{2^{\alpha-2} \Gamma(\alpha+2)}{\alpha(b-a)^\alpha} \cdot \left\{ J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)-}^\alpha f(a) + J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)+}^\alpha f(b) \right\}
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{16(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left\{ \int_0^1 |1-t^\alpha|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\times \left[\{2|f''(a)|^q + |f''(b)|^q\}^{\frac{1}{q}} + \{|f''(a)|^q + 2|f''(b)|^q\}^{\frac{1}{q}} \right].$$

Teorem 4.7. $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I^0 üzerinde iki kez türevlenebilen bir fonksiyon $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f'' \in L[a, b]$ olsun. Bu taktirde, herhangi bir $\lambda \in [0, 1]$ ve $r \geq 1$ için $|f''|^q$, $q > 1$ için $[a, b]$ üzerinde P-fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left| I \left(f; \alpha, \lambda, \frac{1}{r} \right) \right| \leq \lambda^2 (1-\lambda)^2 (b-a)^2 \mu_{11} \left(\alpha, \frac{1}{r} \right)$$

$$\times \left[\{2|f''(a)|^q + |f''(b)|^q\}^{\frac{1}{q}} + \{|f''(a)|^q + 2|f''(b)|^q\}^{\frac{1}{q}} \right],$$

burada

$$\int_0^1 \left| t \left(\frac{1}{r} - t^\alpha \right) \right| dt \equiv \mu_{11} \left(\alpha, \frac{1}{r} \right) = \frac{\alpha r^{-(1+\frac{2}{\alpha})} + 1}{\alpha + 2} - \frac{1}{2r}.$$

dir.

İspat: Lemma 3.2.3 ve power mean integral eşitsizliğini kullanarak

$$\left| I \left(f; \alpha, \lambda, \frac{1}{r} \right) \right| \leq \lambda^2 (1-\lambda)^2 (b-a)^2 \left\{ \int_0^1 \left| t \left(\frac{1}{r} - t^\alpha \right) \right| dt \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\times \left[\left\{ \int_0^1 \left| t \left(\frac{1}{r} - t^\alpha \right) \right| |f''(tx + (1-t)a)|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$\left. + \left\{ \int_0^1 \left| t \left(\frac{1}{r} - t^\alpha \right) \right| |f''(tx + (1-t)b)|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}} \right]$$

$$\leq \lambda^2(1-\lambda)^2(b-a)^2\mu_{11}\left(\alpha, \frac{1}{r}\right) \\ \times \left[\{2|f'''(a)|^q + |f'''(b)|^q\}^{\frac{1}{q}} + \{|f'''(a)|^q + 2|f'''(b)|^q\}^{\frac{1}{q}} \right]$$

olduğu görülür.

Sonuç 4.4. Teorem 4.7’te $r = 1$ ve $\lambda = \frac{1}{2}$ alınırsa

$$\left| I\left(f; \alpha, \frac{1}{2}, 1\right) \right| \\ = \frac{\alpha}{2} \cdot f(x) + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} \right] - \frac{2^{\alpha-2}\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(b-a)^\alpha} \cdot \{J_{x-}^\alpha f(a) + J_{x+}^\alpha f(b)\} \\ \leq \frac{1}{16}(b-a)^2\mu_{11}(\alpha, 1) \\ \times \left[\{2|f'''(a)|^q + |f'''(b)|^q\}^{\frac{1}{q}} + \{|f'''(a)|^q + 2|f'''(b)|^q\}^{\frac{1}{q}} \right]$$

eşitsizliği sağlanır.

Özel olarak $x = \frac{a+b}{2}$ alınırsa aşağıdaki Simpson tipli eşitsizlik elde edilir:

$$\left| I\left(f; \alpha, \frac{1}{2}, 1\right) \right| \\ = \frac{1}{4} \cdot \left[f(a) + 2\alpha f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{2^{\alpha-2}\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(b-a)^\alpha} \cdot \left\{ J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)-}^\alpha f(a) + J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)+}^\alpha f(b) \right\} \\ \leq \frac{1}{16}(b-a)^2\mu_{11}(\alpha, 1) \\ \times \left[\{2|f'''(a)|^q + |f'''(b)|^q\}^{\frac{1}{q}} + \{|f'''(a)|^q + 2|f'''(b)|^q\}^{\frac{1}{q}} \right].$$

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

P fonksiyon sınıfı için Hölder ve power mean eşitsizlikleri kullanılarak Hermite-Hadamard tipli kesirli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Son yıllarda İşcan tarafından verilen Hölder-İşcan eşitsizliği ve Kadakal ve arkadaşları tarafından verilen geliştirilmiş power mean integral eşitsizliği kullanılarak yeni sonuçlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Hardy, G., Littlewood, J.E. and Polya, G., Inequalities. 2nd Ed., Cambridge University Press, United Kingdom, 1952.
- [2] Beckenbach, E.F., Bellman, R., Inequalities, Springer-Verlag, Berlin, 1961.
- [3] Mitrinović, D.S., Analytic Inequalities, Springer, Berlin, 1970.
- [4] Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink, A.M., Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1993.
- [5] Pachpatte, B.G., Mathematical Inequalities, Elsevier B.V., Amsterdam, The Netherlands, 2005.
- [6] Pečarić, J., Convex Functions: Inequalities, Scientific Books, Belgrade, 1987.
- [7] Dragomir, S.S., Pečarić, C.E.M., Selected Topics on Hermite-Hadamard Type Inequalities and Applications, Research Group In Mathematical Inequalities and Applications, Monographs, 2000.
- [8] Breckner W. W., Stetigkeitsaussagen Für Eine Klasse Verallgemeinerter Konvexer Funktionen In Topologischen Linearen Raumen, Publicaions de l'Institut Mathematique, 23, 13-20, 1978.
- [9] Hudzik H., Maligranda L., Some Remarks on S-convex Functions, Aequationes Mathematicae., 48, 100-111, 1994.
- [10] Samko, S.G., Kilbas, A.A., Marichev, O.I., Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications, Gordon and Breach, Longhorne, Pennsylvania, 1993.
- [11] Dragomir, S.S., Pečarić, J. and Presson, L.E., Some Inequalities of Hadamard Type, Soochow Journal of Mathematics, 21, 335-341, 1995.
- [12] Pečarić, J., Proschan, F. and Tong, Y.L., Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications, Academic Press, Inc, 1992.
- [13] Godunova, E. K., Levin, V. I., Neravenstva dlja funkicii širokogo klassa, soderž aščego vypuklye, monotonnye i nekotorye drugie vidy funkicii,

Vyčislitel. Mat. i. Mat. Fiz. Mežvuzov. Sb. Nauč. Trudov, MGPI, Moskva, 138-142, 1985.

- [14] Noor, M. A., Awan, M.U., Some Integral Inequalities for Two Kinds of Convexities VIA Fractional Integrals, Transylvanian Journal of Mathematics and Mechanics, 129-136, 2013.
- [15] Dragomir, S.S., Pearce, C.E.M., Selected Topics on Hermite-Hadamard Type Inequalities and Applications, Research Group In Mathematical Inequalities and Applications, Monographs, 2000.
- [16] Jeffrey, A., Dai, H-H., Handbook of Mathematical Formulas and Integrals, Elsevier Inc. 4. Edition, 589, United Kindom, 2008.
- [17] Kilbas, A.A., Srivastava, H.M. and Trujillo, J.J., Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, Amsterdam, 2006.
- [18] Sarıkaya, M. Z., Set, E., Yaldız, H. and Başak, N., Hermite-Hadamard's Inequalities for Fractional Integrals and Related Fractional Inequalities, Mathematical and ComputerModelling, 57 (9), 2403-2407, 2013.
- [19] İşcan, İ., Hermite-Hadamard-Fejer Type Inequalities for Convex Functions via Fractional Integrals, Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica, 60(3), 355-366, 2015.
- [20] Mitrinović, D.S., Analytic Inequalities, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
- [21] Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink, A.M., Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1993.
- [22] Park, J., Generalized Simpson-like Type Integral Inequalities for Twice Differentable Convexs Functions via Riemann-Liouville Integrals, International Journal of Mathematical Analysis, 9(16), 767-777, 2015.
- [23] Ostrowski, A., Über die Absolutabweichung Einer Differentienbaren Funktionen von Ihren Integralmittelwert, Commentarii Mathematici Helvetici, 10, 226-227, 1938.
- [24] Dragomir, S.S., Sofo, A., Ostrowski Type Inequalities for Functions Whose Derivatives are Convex. Research Group In Mathematical Inequalities and Applications, Research Report Collection, 5(30), 2002.
- [25] Dragomir, S.S., Agarwal, R.P. and Cerone, P., On Simpson's Inequality and Applications, Journal of Inequalities and Applications, 5, 533-579, 2000.

ÖZGEÇMİŞ

Görkem CENGER 1990 yılında Giresun'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Giresun'da tamamladı. 2008 yılında Giresun Hamdi Bozbağ Anadolu Lisesi'nden mezun oldu. 2009 yılında başladığı Kocaeli Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'nü 2013 yılında bitirdi. 2015 yılında Giresun Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı. Halen Giresun Dereli İmam Hatip Ortaokulu'nda İlköğretim Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır. Evli ve bir çocuk annesidir.

