

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



**P-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMİTE-HADAMARD TİP
EŞİTSİZLİKLER**

İpek AYANA GÜVEN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OCAK 2025

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



**P-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMİTE-HADAMARD TİP
EŞİTSİZLİKLER**

İpek AYANA GÜVEN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OCAK 2025

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

P-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMİTE-HADAMARD TİP
EŞİTSİZLİKLER

İpek AYANA GÜVEN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 27/01/2025 tarihinde jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Gültekin TINAZTEPE (Danışman)

Prof. Dr. Mümin CAN

Doç. Dr. İlknur YEŞİLCE IŞIK

ÖZET

P-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMİTE-HADAMARD TİP EŞİTSİZLİKLER

İpek AYANA GÜVEN

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç.Dr. Gültekin TINAZTEPE

Ocak 2025, 37 sayfa

Konveks fonksiyonların özelliklerinden biri, fonksiyonun integral ortalaması için, fonksiyonun integral sınırlarındaki değerleri cinsinden alt ve üst sınır sunan Hermite-Hadamard eşitsizliğini sağlamasıdır. Konveks fonksiyonların bir genellemesi olan p-konveks fonksiyonlar ve türevinin mutlak değeri p-konveks olan fonksiyonlar için sağ ve sol Hermite-Hadamard tip eşitsizlikler literatürde ifade edilmiştir. Bu tezde, bu çalışmalar derlenmiş ayrıca henüz literatürde rastlanılmayan ikinci türevinin mutlak değeri p-konveks olan fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tip eşitsizlikler elde edilmiştir. Bu şekilde p-konveks fonksiyonlar için verilen Hermite-Hadamard tip eşitsizliklerin bir araya getirilmesi ve konunun ilgilileri için bir kaynak oluşturulması hedeflenmiştir.

Çalışmada sırayla p-konveks fonksiyonların temel özellikleri, kendisi ve türevinin mutlak değeri p-konveks olan fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizlikler ve ikinci türev içeren integral özdeşlikler verilmiş, daha sonra integral özdeşlikler kullanılarak, ikinci türevinin mutlak değeri p-konveks olan fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tip eşitsizlikler elde edilmiştir. Elde edilen bu eşitsizliklerde bir p-konveks fonksiyon örneği konularak bazı özel fonksiyonlar ve ortalamalarla ilgili eşitsizlikler uygulama olarak verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELEER: Beta fonksiyonu, Hermite-Hadamard eşitsizliği, Hipergeometrik fonksiyonlar, p-konveks fonksiyonlar, İntegral eşitsizlikler.

JÜRİ: Doç. Dr. Gültekin TINAZTEPE

Prof. Dr. Mümmün CAN

Doç. Dr. İlknur YEŞİLCE IŞIK

ABSTRACT

HERMITE-HADAMARD TYPE INEQUALITIES FOR P-CONVEX FUNCTIONS

İpek AYANA GÜVEN

MSc Thesis in MATHEMATICS

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Gültekin TINAZTEPE

January 2025, 37 pages

One of the properties of convex functions is that they satisfy the Hermite-Hadamard inequality, which provides lower and upper bounds for the integral mean of the function in terms of its values at the integral limits of the function. Right and left Hermite-Hadamard type inequalities have been expressed in the literature for p -convex functions, which are generalizations of convex functions, and for functions whose absolute value is p -convex. In this work, these studies were compiled and Hermite-Hadamard type inequalities were obtained for functions whose absolute value of the second derivative is p -convex, which have not yet been found in the literature. In this way, it is aimed to bring together the Hermite-Hadamard type inequalities given for p -convex functions and to create a resource for those interested in the subject.

In the study, the basic properties of p -convex functions, Hermite-Hadamard inequalities for functions whose absolute value and derivative are p -convex, and integral identities involving the second derivative are presented. Then, by using these integral identities, Hermite-Hadamard-type inequalities for functions whose second derivative's absolute value is p -convex are derived. In the obtained inequalities, an example of a p -convex function is provided, and inequalities related to certain special functions and averages are given as applications.

KEYWORDS: Beta function, Hermite-Hadamard inequality, Hypergeometric functions, Integral inequalities, p -convex functions.

COMMITTEE: Assoc. Prof. Dr. Gültekin TINAZTEPE

Prof. Dr. Mümün CAN

Assoc. Prof. Dr. İlknur YEŞİLCE IŞIK

ÖNSÖZ

Bu yüksek lisans tezinin gerçekleştirilmesinde, değerli bilgilerini benimle paylaşan, kendisine ne zaman danışsam bana kıymetli zamanını ayırıp sabırla ve büyük bir ilgiyle bana faydalı olabilmek için elinden gelenden fazlasını sunan her sorun yaşadığımda yanımda olan, gelecekteki mesleki hayatımda da bana verdiği değerli bilgilerden faydalanacağımı düşündüğüm kıymetli danışman hocam Doç. Dr. Gültekin TINAZTEPE'ye teşekkürü bir borç biliyor ve şükranlarımı sunuyorum.

Lisans ve lisansüstü eğitimim sırasında, bilgileri ışığında aydınlandığım tüm hocalarıma teşekkür ederim.

Tüm hayatım boyunca her zaman yanımda olan çok değerli annem Hülya AYANA'ya, keşke bu günleride görseydi dediğim babam Ahmet Ali AYANA ve canım kardeşim Berkay AYANA'ya içten teşekkür ederim.

Çalışmalarım sırasında yardımlarını esirgemeyen ve beni her koşulda destekleyen canım eşim Fırat GÜVEN'e ve kızıma sabır ve anlayışlarından ötürü çok teşekkür ederim.

Ayrıca bu yüksek lisans tez çalışmasını kızım Berfin Nare GÜVEN'e ithaf ediyorum.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	iii
AKADEMİK BEYAN	v
SİMGELER VE KISALTMALAR	vi
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK TARAMASI	4
2.1. P-Konveks Fonksiyonlar	4
2.2. P-konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tip Eşitsizlikler	5
2.3. Türevi P-konveks Olan Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tip Eşitsizlikler	7
2.4. İkinci Türevle İlgili Bazı İntegral Özdeşlikler	8
3. MATERYAL VE METOT	11
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	12
4.1. İkinci Türevi p-konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tip Eşitsizlikler	12
4.1.1. Sağ Hermite-Hadamard tip eşitsizlikler	12
4.1.2. Sol Hermite-Hadamard tip eşitsizlikler	20
4.2. Bulgularla İlgili Bazı Uygulamalar	28
5. SONUÇLAR	35
6. KAYNAKLAR	36
ÖZGEÇMİŞ	

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “ p -konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tıp Eşitsizlikler” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

...../...../20.....

İpek AYANA GÜVEN

İmza



SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler:

$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}_-$	: Negatif tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_+$	: Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	: n boyutlu Öklit uzayı
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\lfloor x \rfloor$	: x 'in tam değeri
$\ x\ _p$	: x 'in p -normu
$\max\{a, b, c\}$	: a, b, c 'nin maksimumu
$C^2[a, b]$	: $[a, b]$ 'de 1. ve 2. türevi olan ve sürekli olan fonksiyonlar kümesi
$L[a, b]$	: $[a, b]$ 'de integrallenebilen fonksiyonlar kümesi

1. GİRİŞ

Konvekslik kavramı analiz, geometri ve optimizasyon gibi değişik matematiğin dallarını birbirine bağlayan önemli kavramlardan bir tanesidir. Konveks fonksiyonların tek minimum noktaya sahip olması, optimal değer aranan kümenin konveksliği durumu onu özellikle maksimum minimum değer hesaplamalarının temelini oluşturduğu optimizasyon teorisinde önemli bir araç yapmaktadır. Bu yönüyle onu ekonomiden mühendisliğe geniş bir disiplin alanında kullanılır yapmaktadır.

Konveks küme kavramı reel sayılar üzerinde aşağıdaki gibi verilir.

$B \subset \mathbb{R}$ olsun. Her $x_1, x_2 \in B$ ve $\alpha \in [0, 1]$ için

$$\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2 \in B$$

oluyorsa yani x_1 ile x_2 'nin konveks kombinasyonunu $(\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2)$ içeriyorsa B kümesi konvekstir denir. Reel sayılarda konveks kümeler ya tek nokta kümeleri ya da aralıklardır. Sabit bir x ve y noktası için

$$\{z : z = \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2, \alpha \in [0, 1]\}$$

ile gösterilen noktalar kümesi geometrik olarak x_1 ve x_2 'yi birbirine bağlayan doğru üzerinde kalan noktalar kümesidir. Dolayısıyla konveks küme için, içerdiği herhangi iki noktayı birbirine bağlayan doğru parçasının da içinde kaldığı kümelerdir denebilir.

Konveks fonksiyon, konveks küme üzerinde tanımlanır.

$B, \mathbb{R}^n$ de bir konveks küme ve $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Her $x_1, x_2 \in B$ ve $\alpha \in [0, 1]$ için

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha) f(x_2) \quad (1.1)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.

Yukarıdaki tanım geometrik olarak bir fonksiyon eğrisi üzerinde alınan iki noktayı birleştiren doğrunun, noktaların apsisi ile oluşan $z = \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2$ noktalarının görüntüsünün üstünde kalması anlamına gelir.

Bilim insanları bu kavramı zamanla genelleştirmişlerdir. Bu genelleştirmelerde farklı yollar izlemişlerdir. Bu yollardan biri iç yaklaşım yolu olup bu yaklaşımda geometrik bir bakış açısı kullanılarak yukarıda tanımı sunulan klasik konveks küme ve fonksiyon tanımında verilen noktaları birbirine bağlayan doğru parçası yerine bir parametreye bağlı

eğri kullanılmasıdır. Zayıf konveks, orta konveks, metrik konveks, geodezik konveks kümeler ile B-konveks, çeşitli anlamlarda (birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü) s-konveks, üstel, harmonik, logaritmik konveks küme ve fonksiyonlar bu metodla üretilmiş küme ve fonksiyonlar altında sayılabilir (Tanrıverdi 2022).

Son yıllarda bu şekilde birçok yeni konveks fonksiyon türü elde edilmiş olup bunlardan biri de p-konveks küme ve fonksiyonlardır. Literatürde çeşitli p-konveks fonksiyon kavramı yer almaktadır. Burada kastedilen Sezer vd. (2021) tarafından verilen p-konveks fonksiyondur.

p-konveks bir küme, p , 0 (0 hariç) ile 1 (dahil) arasında bir reel sayı olmak üzere içinde bulunan her x_1 ve x_2 noktası ve $\alpha \in [0, 1]$ için onları bağlayan α 'ya bağlı

$$\left\{ z : z = \alpha^{\frac{1}{p}} x_1 + (1 - \alpha)^{\frac{1}{p}} x_2, \alpha \in [0, 1] \right\}$$

noktalarını (eğri parçasını veya x_1 ile x_2 'nin p-konveks kombinasyonunu) içerir. Diğer taraftan p-konveks bir küme üzerinde tanımlı bir fonksiyonun eğrisi üzerinde alınan $(x_1, f(x_1))$ ve $(x_2, f(x_2))$ için, bu noktaları birbirine bağlayan $\alpha^{\frac{1}{p}} f(x_1) + (1 - \alpha)^{\frac{1}{p}} f(x_2)$ eğrisi her değeri için karşılık gelen $f(\alpha^{\frac{1}{p}} x_1 + (1 - \alpha)^{\frac{1}{p}} x_2)$ 'nin üstünde kalıyorsa f fonksiyonu p-konveks olur. Kısaca p-konveks fonksiyonlarda (1.1) eşitsizliği

$$f\left(\alpha^{\frac{1}{p}} x_1 + (1 - \alpha)^{\frac{1}{p}} x_2\right) \leq \alpha^{\frac{1}{p}} f(x_1) + (1 - \alpha)^{\frac{1}{p}} f(x_2)$$

olacaktır. Tam tanımını bir sonraki bölümde verilecektir.

Konveks fonksiyonların önemli özelliklerinden bir tanesi Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak adlandırılan isimleri verilen matematikçiler tarafından tanımlanan konveks fonksiyonun integral ortalama değeri için alt ve üst sınır belirleyen eşitsizliği sağlamasıdır. Bu eşitsizlik $f : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ ile verilen konveks bir fonksiyon için

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

şeklinde ifade edilir. Literatürde soldaki ve ortadaki terim arasında eşitsizlik sol Hermite-Hadamard eşitsizliği; sağdaki ve ortadaki terim arasındaki eşitsizlik ise sağ Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak adlandırılır.

Birçok yazar yeni konvekslik türleri için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin nasıl ifade edileceğine dair araştırmalar yapmışlardır. Bu çalışmaların bir kısmı Pearce ve Dragomir (2002)'den görülebilir. p-konvekslik ile ilgili çalışmalar da bunlar arasında yer alır.

Eken vd. (2021) p-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliklerini elde etmiş, Sezer (2021) türevi p-konveks fonksiyonlar için sağ ve sol Hermite-Hadamard tip eşitsizlikleri, birinci türev içeren integral özdeşlikler kullanarak elde etmiştir. Literatürde ikinci türevi p-konveks fonksiyonlarla ilgili bir çalışma yapılmamış olduğu gözlemlenmiştir. Bu çalışmada Eken vd. (2021) ve Sezer (2021) tarafından verilen sonuçlar özetlenmiş ayrıca ikinci türevi p-konveks fonksiyonlar için sağ ve sol Hermite-Hadamard tip eşitsizlikler elde edilmiştir. Bunun için literatürde ikinci türevle ilgili integral özdeşlikler kullanılmıştır. Daha sonra elde edilen eşitsizliklerde p-konveks fonksiyon örnekleri konularak, beta, hipergeometrik fonksiyon genelleştirilmiş integral fonksiyonu içeren eşitsizlikler elde edilmiş ve aynı zamanda aritmetik ortalama, kuvvet ortalaması ile Stolarsky ortalaması ile ilgili eşitsizlikler uygulama olarak verilmiştir.

2. KAYNAK TARAMASI

Bu bölümde p-konveks fonksiyonlar ile onların bazı özellikleri verilecek, kendisi p-konveks fonksiyonlar ve daha sonra türevi p-konveks olan fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tip eşitsizlikler sunulacak, daha sonra ikinci mertebeden türev içeren bazı integral özdeşlikler ile bulgulara kullanılacak bazı eşitsizlikler sunulacak ve son olarak bazı özel fonksiyonların tanımları hatırlatılacaktır.

2.1. P-Konveks Fonksiyonlar

Tanım 2.1. (Sezer vd. 2021) $U \subset \mathbb{R}^n$ ve $0 < p \leq 1$ olsun. Eğer $\lambda^p + \mu^p = 1$ koşulunu sağlayan $\lambda, \mu \geq 0$ sayıları ve $\forall x, y \in U$ için

$$\lambda x + \mu y \in U$$

oluyorsa $U, \mathbb{R}^n$ 'de p-konveks küme olarak adlandırılır.

Tanım 2.1'de $\mu = (1 - \lambda^p)^{\frac{1}{p}}$ yazılırsa p-konveks küme tanımı şu şekilde de verilebilir:

$$\forall x, y \in U \text{ ve } \lambda \in [0, 1], \lambda x + (1 - \lambda^p)^{\frac{1}{p}} y \in U$$

Bu tanımdan da anlaşılacağı üzere $p = 1$ için konveks küme elde edilir. Ayrıca sıfır içeren veya sıfırı bir sınır noktası olarak kabul eden herhangi bir reel sayı aralığının bir p-konveks küme olduğu açıktır. Diğer taraftan konveks kümelerin, içerdiği tüm noktaların konveks kombinasyonunu da içermesi özelliğine benzer şekilde aşağıdaki şekilde de konveks küme tanımı verilebilir:

$U \subseteq \mathbb{R}^n, 0 < p \leq 1$ ve $x_1, x_2, \dots, x_m \in U$ olsun. Eğer katsayıları $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$ ve $\lambda_1^p + \lambda_2^p + \dots + \lambda_m^p = 1$ ise $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m$ vektör toplamına $x_1, x_2, \dots, x_m \in U$ 'nun p-konveks kombinasyonu denir. Bir $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi, ancak ve ancak elemanlarının tüm p-konveks kombinasyonlarını içeriyorsa p-konveks bir küme olur (Sezer vd. 2021).

Tanım 2.2. (Sezer vd. 2021) $U \subset \mathbb{R}^n$ ve $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\text{epi } f = \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in U, \alpha \in \mathbb{R}, f(x) \leq \alpha\}$$

ile belirtilen küme p-konveks küme ise o zaman f , p-konveks fonksiyon olarak adlandırılır.

Aşağıda p -konveks fonksiyonun Tanım 2.2'dekine denk olan ve literatürde daha çok kullanılan bir karakterizasyonu sunulmuştur.

Teorem 2.3. (Sezer vd. 2021) $U \subseteq \mathbb{R}^n$ bir p -konveks küme ve $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. O zaman f 'nin p -konveks küme olması için gerek ve yeter koşul $\lambda^p + \mu^p = 1$ eşitliğini sağlayan her $\lambda, \mu \geq 0$ ve her $x, y \in U$ için

$$f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda f(x) + \mu f(y)$$

olmasıdır.

Örnek 2.4. (Sezer 2021) $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ bir p -konveks fonksiyondur.

Yukarıdaki örnek bu çalışmada en çok faydalanılacak örnek olup bunun haricinde aşağıdaki fonksiyonlar da birer p -konveks fonksiyon olarak literatürde sunulmuştur.

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ bir p -konveks küme ve $k \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = k(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ olarak tanımlanırsa f , p -konveks bir fonksiyondur. Ayrıca

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n) = \|x\|_q = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad 1 \leq q$$

ve

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$$

şeklinde tanımlanan $h, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları birer p -konveks fonksiyondur.

Teorem 2.5. (Sezer vd. 2021) Eğer $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu p -konveks bir fonksiyon ve $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ artan p -konveks bir fonksiyon ise, o zaman $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}$ bir p -konveks fonksiyondur.

Örnek 2.6. Yukarıdaki teoremden f ve g , Örnek 2.4'te verilen fonksiyon alınır ve n ikiden büyük pozitif bir tamsayı olmak üzere teorem $n - 1$ defa uygulanırsa $k(x) = x^{2^n}$ in de bir p -konveks fonksiyon olduğu görülür.

2.2. P-konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tip Eşitsizlikler

Eken vd. (2021) tarafından p -konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tip eşitsizlikler verilmiştir. Bunlar aşağıda sunulmuştur.

$f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ integrallenebilen bir p -konveks fonksiyon, $a, b \in \mathbb{R}_+$ ve $a < b$ olsun.

Bu durumda Hermite-Hadamard eşitsizliği aşağıdaki gibi verilir:

$$\theta(a, b, p) = p [bf(b) + af(a)] + [bf(a) + af(b)] \beta \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p} \right)$$

olmak üzere

$$2^{\frac{1}{p}-1} f \left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{p}}} \right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{1}{2(b-a)p} \theta(a, b, p).$$

Ayrıca aynı koşullar altında

$$\int_0^1 f \left((1-t)^{\frac{1}{p}} a + t^{\frac{1}{p}} b \right) \left[1 + (1-t^p)^{\frac{1}{p}-1} t^{\frac{1}{p}} \right] dt \leq \left(1 + \frac{1}{p} \beta \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p} \right) \right) \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} \right)$$

olur. Burada beta fonksiyonunun tam değer fonksiyonu cinsinden üstten sınırlanmasını kullanarak

$$\psi(p) = 1 + \frac{\left\lfloor \frac{1}{p} \right\rfloor^{\frac{2}{p}-2} \left\lfloor \frac{1}{p} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{1}{p} \right\rfloor! \right)^2 \left(\frac{2}{p} \right)^{\frac{p-2}{p} + \left\lfloor \frac{2}{p} \right\rfloor}}{p \left\lfloor \frac{2}{p} \right\rfloor \left\lfloor \frac{2}{p} \right\rfloor!}$$

olmak üzere

$$\int_0^1 f \left((1-t)^{\frac{1}{p}} a + t^{\frac{1}{p}} b \right) \left[1 + (1-t^p)^{\frac{1}{p}-1} t^{\frac{1}{p}} \right] dt \leq \psi(p) \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} \right]$$

elde edilir.

$$\int_a^\infty x^{\frac{2}{p-1}} f(x) dx$$

integralinin sonlu olması durumunda

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{p}{1-p} \left[a^{\frac{1+p}{1-p}} \int_a^\infty x^{\frac{2}{p-1}} f(x) dx + b^{\frac{1+p}{1-p}} \int_b^\infty x^{\frac{2}{p-1}} f(x) dx \right]$$

olur.

İlaveten f 'nin azalmayan bir p -konveks fonksiyon olması durumunda

$$\begin{aligned} f \left(\frac{a+b}{2^{\frac{2}{p}-1}} \right) &\leq \int_0^1 f \left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{p}}} \left[t + (1-t^p)^{\frac{1}{p}} \right] \right) dt \\ &\leq \frac{1}{2^{\frac{1}{p}}} \int_0^1 f \left((1-t^p)^{\frac{1}{p}} a + tb \right) \left[1 + (1-t^p)^{\frac{1}{p}-1} t^{p-1} \right] dt \end{aligned}$$

ve

$$\int_0^1 f(t^{\frac{1}{p}}a + (1-t)^{\frac{1}{p}}b)dt \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

ile

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{p}-1}}\right) &\leq \int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{p}}} \left[t^{\frac{1}{p}} + (1-t)^{\frac{1}{p}}\right]\right) dt \\ &\leq 2^{1-\frac{1}{p}} \int_0^1 f\left(at^{\frac{1}{p}} + b(1-t)^{\frac{1}{p}}\right) dt \\ &\leq \frac{2p}{2^{\frac{1}{p}}(p+1)} [f(a) + f(b)]. \end{aligned}$$

eşitsizlikleri sunulmuştur.

2.3. Türevi P-konveks Olan Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tip Eşitsizlikler

Literatürde türevinin mutlak değeri p -konveks olan fonksiyonlar için aşağıdaki sağ ve sol Hermite-Hadamard tip eşitsizlikler, Sezer (2021) tarafından verilmiştir.

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $a, b \in \mathbb{R}_+$, $a < b$, $f \in C(\mathbb{R})$ ve $|f'| \in L[-b, b]$ bir p -konveks fonksiyon olsun.

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{3}{2(p+1)(b-a)} (|a| + |b|)^2 (|f'(a)| + |f'(b)|),$$

$\rho_1(x, y) = |y|(7|y| + 3|x|)$, $\rho_2(x, y) = |x|(|x| + 3|y|)$ ve $v(a, b) = \rho_2(a, b) |f'(b)|$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| &\leq \frac{1}{12(b-a)} [\rho_1(a, b) |f'(b)| + \rho_1(b, a) |f'(a)|] \\ &\quad + \frac{1}{4p(b-a)} (|a| + |b|) (|af'(b)| + |bf'(a)|) \beta\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right) \\ &\quad + \frac{1}{3p(b-a)} [v(a, b) + v(b, a)] \beta\left(\frac{1}{p}, \frac{2}{p}\right). \end{aligned}$$

Ayrıca $s > 1$ ve $|f'|^s \in L[-b, b]$ olması durumunda, $\kappa(a, b, s) = (|f'(a)|^s + |f'(b)|^s)^{\frac{1}{s}}$ olmak üzere

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{3}{2p(b-a)} \left(\frac{p}{p+1}\right)^{\frac{1}{s}} (|a| + |b|)^2 \kappa(a, b, s)$$

şeklindeki sağ Hermite-Hadamard tip eşitsizlikler verilmiştir.

Ayrıca aşağıdaki sol Hermite-Hadamard tip eşitsizlikler sunulmuştur:

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $a, b \in \mathbb{R}_+$, $a < b$, $f \in C(\mathbb{R})$ ve $|f'| \in L[-b, b]$ bir p -konveks fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{1}{(p+1)(b-a)} \\ \times \left[\left(\frac{3|a| + |b|}{2} \right)^2 |f'(a)| + \frac{5a^2 + 6|ab| + 5b^2}{2} \left| f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| + \left(\frac{|a| + 3|b|}{2} \right)^2 |f'(b)| \right]$$

olur. İlaveten

$$\rho_3(a, b) = 2a^2 |f'(a)| + (a+b)^2 \left| f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| + 2b^2 |f'(b)|,$$

$$\rho_4(a, b) = |a|(|a| + |b|) |f'(a)| + 2(a^2 + b^2) \left| f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| + |b|(|a| + |b|) |f'(b)|,$$

$\omega(a, b) = (7|a| + |b|)(|a| + |b|) |f'(a)|$ olmak üzere

$$\rho_5(a, b) = \omega(a, b) + 2(5a^2 + 6|a||b| + 5b^2) \left| f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| + \omega(b, a)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{5}{12(b-a)} \rho_3(a, b) + \frac{1}{4p(b-a)} \rho_4(a, b) \beta\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right) \\ + \frac{1}{12p(b-a)} \rho_5(a, b) \beta\left(\frac{1}{p}, \frac{2}{p}\right),$$

ayrıca $s > 1$ ve $|f'|^s \in L[-b, b]$ olması durumunda da

$$\rho_6(a, b) = \left(2|a| + \left| \frac{a+b}{2} \right| \right) \left(|a| + \left| \frac{a+b}{2} \right| \right) \left(\left| f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^s + |f'(a)|^s \right)^{\frac{1}{s}}$$

olmak üzere

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{1}{p(b-a)} \left(\frac{p}{p+1} \right)^{\frac{1}{s}} (\rho_6(a, b) + \rho_6(b, a))$$

ile verilen sol Hermite-Hadamard eşitsizlikleri sağlanır.

2.4. İkinci Türevle İlgili Bazı İntegral Özdeşlikler

Aşağıda verilen teoremlerde eşitliğin sol tarafı, Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sırasıyla sağ ve sol parçaları ile ilgilidir. Bu teoremler literatürde 2. türevi klasik konveks veya s -konveks olan fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tip eşitsizliklerin elde edilmesinde kullanılmışlardır.

Teorem 2.7. (Niculescu 2006)(Sayfa 53) $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f \in C^2[a, b]$ olsun.

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b f''(x) \frac{(b-x)(x-a)}{2} dx$$

(Hussain vd. 2009) ve (Khan vd 2017) yukarıdaki eşitliği kullanarak ikinci türevi ikinci anlamda s-konveks olan fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı ile ilgili eşitsizlikler elde etmişlerdir.

Teorem 2.8. (Özdemir vd. 2013) $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ve $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Eğer $f'' \in L[a, b]$ ise

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= \frac{(b-a)^2}{16} \left[\int_0^1 t^2 f''\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)a\right) dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 (t-1)^2 f''\left(tb + (1-t)\frac{a+b}{2}\right) dt \right] \end{aligned}$$

olur.

(Sarıkaya ve Kiriş 2015) ve (Özdemir vd. 2013) yukarıda verilen teorem yardımıyla ikinci türevi ikinci anlamda s-konveks olan fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafı ile ilgili eşitsizlikler elde etmiştir.

Şimdi bulgular kısmında gerekli olacak bazı bilgiler ve fonksiyon tanımları verilecektir. Bunlar için ayrı bir alt bölüm oluşturulması gerekli görülmemiştir.

Bulgularda kullanılacak integraller için aşağıdaki iki eşitsizlik kullanılacaktır.

$f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilir bir fonksiyon ise

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

olur. Bu eşitsizlik integraller için üçgen eşitsizliği olarak da ifade edilir.

$p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı reel fonksiyonlar ve $|f|^p, |g|^q$ $[a, b]$ üzerinde integrallenebilir fonksiyonlar olmak üzere $q \geq 1$ ise

$$\int_a^b |f(x) g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

olur, burada A ve B sabit olmak üzere, yukarıdaki eşitsizliğin eşitlik olması ancak ve ancak $A|f(x)|^p = B|g(x)|^q$ olması durumunda gerçekleşir. Bu eşitsizlik integraller için Hölder eşitsizliği olarak bilinir.

Bulguların uygulamalarında karşılaşılabilecek iki özel fonksiyon tanımı aşağıda verilmiştir.

$m, n > 0$ olmak üzere

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$$

ile tanımlı fonksiyon beta fonksiyonudur.

$z \in \mathbb{C}$ ve $p \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$E_p(z) = \int_1^\infty x^{-p} e^{-zx} dx$$

fonksiyonuna genelleştirilmiş üstel integral fonksiyonu denir.

c sıfır ya da negatif tamsayı olmayan bir reel sayı, $a, b \in \mathbb{R}$ olsun.

$$(q)_n = q(q+1)(q+2) \cdots (q+n-1)$$

olmak üzere $z \in \mathbb{C}$ için

$${}_2F_1(a, b; c; z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

ile ifade edilen (yakınsak olması koşuluyla) fonksiyona hipergeometrik fonksiyon denir.

$|z| < 1$ durumu için seri yakınsak, $a + b < c$ olması koşuluyla $|z| = 1$ için yakınsaktır.

Bunlardan başka bulgularda karşılaşılabileceğinden bazı ortalama çeşitleri aşağıda sunulmuştur.

$a, b \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{Z}_+$ ve $p \in [1, \infty)$ olmak üzere

$$A(a, b) = \frac{a+b}{2}, \quad P_m(a, b) = \frac{a^m + b^m}{2}, \quad S_q(a, b) = \left(\frac{b^q - a^q}{q(b-a)} \right)^{\frac{1}{q-1}}$$

ile tanımlanan ortalamalar sırasıyla aritmetik, kuvvet ve Stolarsky ortalaması (veya genelleştirilmiş logaritmik orta) olarak adlandırılır.

3. MATERYAL VE METOT

Kaynak taraması bölümünde verilen p -konveks fonksiyonlar ile ilgili bilgiler ve ikinci türev içeren bazı integral özdeşlikler bu çalışmanın materyalini oluşturmaktadır. Çalışmada kullanılan metod temel olarak integralde değişken dönüşümlerine dayanmaktadır. İntegral özdeşliklerden Teorem 2.7’de $x = (1 - t)^{1/p}a + t^{1/p}b$ değişken dönüşümü yapılarak özdeşlikteki integral a ve b ’nin konveks kombinasyonunu içeren hale (Sonuç 4.10) getirilecektir. Teorem 2.8’de verilen özdeşliğin sağ tarafındaki terimlerde sırasıyla $x = t^{\frac{a+b}{2}} + (1-t)a$ ve $x = tb + (1-t)^{\frac{a+b}{2}}$ değişken dönüşümleri yapılarak integral özdeşlik içindeki türev $f''(x)$ cinsinden ifade edilecek (Önteorem 4.19), daha sonra elde edilen yeni özdeşliğin sağ tarafındaki terimlerin birinde $x = a(1-t)^{\frac{1}{p}} + \frac{a+b}{2}t^{\frac{1}{p}}$ ve diğerinde $x = (1-t)^{\frac{1}{p}}\frac{a+b}{2} + t^{\frac{1}{p}}b$ dönüşümü yapılarak özdeşlik a ve $\frac{a+b}{2}$ ile $\frac{a+b}{2}$ ve b ’nin p -konveks kombinasyonunu içeren hale (Önteorem 4.20) getirilecektir. Daha sonra a ve b ’nin pozitif değerleri için f'' ’nin p -konveksliği ile integraller için üçgen ve Hölder eşitsizlikleri yardımıyla Hermite-Hadamard tip eşitsizlikler elde edilecektir. Eşitsizlikler a ve b ’nin tüm reel değerleri için geçerli olacak şekilde genişletilecektir. Elde edilen eşitsizliklerde Sonuç 2.6 kullanılarak bazı ortalamalar ile genelleştirilmiş üstel fonksiyon, Hipergeometrik fonksiyon, gamma ve beta fonksiyonları gibi özel fonksiyonlarla ilgili eşitsizlikler elde edilecektir. Yapılan integral hesaplarında Wolfram Alpha LLC tarafından geliştirilen Mathematica 14.1 destekli bilimsel hesaplar yazılmış websitesi kullanılacaktır.(Wolfram Alpha 2024)

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde kaynak taraması bölümünde verilen integral özdeşlikler materyal metot kısmında anlatıldığı şekilde değişken değişimi yardımıyla p-konveks fonksiyon tanımının kullanılabileceği forma dönüştürülecek, bu formda integraller için üçgen eşitsizliği ve Hölder eşitsizliği kullanılarak sağ ve sol Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler elde edilecektir. Ayrıca elde edilen bazı eşitsizliklerde p-konveks fonksiyon olduğu bilinen fonksiyon örnekleri kullanılarak bazı özel fonksiyonlarla ve ortalamalarla ilgili sonuçlar uygulama olarak verilmiştir.

4.1. İkinci Türevi p-konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tip Eşitsizlikler

Bu altbölümde ikinci türevinin mutlak değeri p-konveks olan fonksiyonlar için sağ ve sol Hermite-Hadamard eşitsizlikler elde edilecektir.

4.1.1. Sağ Hermite-Hadamard tip eşitsizlikler

Önteorem 2.7’de verilen integral özdeşliği ikinci türevi p-konveks fonksiyonlar için kullanılabilecek şekle getirebilmek için aşağıdaki önteroem verilecektir.

Önteorem 4.9. *a, b sayıları ve f fonksiyonu Önteorem 2.7’deki koşulları sağlasın.*

$$w_1(t) = b - (1 - t)^{\frac{1}{p}}a - t^{\frac{1}{p}}b, \quad w_2(t) = (1 - t)^{\frac{1}{p}}a + t^{\frac{1}{p}}b - a$$

ve

$$w_3(t) = t^{\frac{1}{p}-1}b - (1 - t)^{\frac{1}{p}-1}a$$

olmak üzere

$$\int_a^b f''(x) \frac{(b-x)(x-a)}{2} dx = \frac{1}{2p} \int_0^1 f''((1-t)^{\frac{1}{p}}a + t^{\frac{1}{p}}b) w_1(t) w_2(t) w_3(t) dt$$

eşitliği sağlanır.

İspat Önteorem 2.7’de $x = (1 - t)^{1/p}a + t^{1/p}b$ dönüşümü yapılırsa $x = a$ için $t = 0$ ve $x = b$ için $t = 1$ olduğu görülür. Diğer taraftan $dx = \frac{1}{p}(t^{\frac{1}{p}-1}b - (1 - t)^{\frac{1}{p}-1}a)dt$, $b - x = b - (b - t)^{\frac{1}{p}}a + t^{\frac{1}{p}}$ ve $x - a = (b - t)^{\frac{1}{p}}a + t^{\frac{1}{p}}b - a$ olduğu dikkate alınırsa istenen elde edilir. $\square$

Önteorem 2.7 ve Önteorem 4.9'dan aşağıda sonuç olarak verilen eşitlik elde edilir.

Sonuç 4.10.

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2p(b-a)} \int_0^1 f''((1-t)^{\frac{1}{p}}a + t^{\frac{1}{p}}b) w_1(t) w_2(t) w_3(t) dt$$

elde edilir.

Sonuç 4.10'u kullanarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.11. $0 < a < b$ ve $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2[0, b]$ olmak üzere $|f''|$, $(0, b)$ aralığında p -konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{(a+b)^3}{2(p+1)(b-a)} (|f''(a)| + |f''(b)|)$$

olur.

İspat Sonuç 4.10'da kullanılmak üzere $w_1(t)$, $w_2(t)$, $w_3(t)$ ve $|f''|$ 'ye ait bazı bilgileri elde edilmelidir. Mutlak değer için üçgen eşitsizliği kullanılırsa $t \in [0, 1]$ için

$$|w_1(t)| \leq \left| b - (1-t)^{\frac{1}{p}}a - t^{\frac{1}{p}}b \right| \leq \left| (1-t^{\frac{1}{p}})b \right| + \left| -(1-t)^{\frac{1}{p}}a \right| \leq a+b, \quad (4.1)$$

$$|w_2(t)| \leq \left| (1-t)^{\frac{1}{p}}a + t^{\frac{1}{p}}b - a \right| \leq \left| \left((1-t^{\frac{1}{p}}) - 1 \right) a \right| + \left| t^{\frac{1}{p}}b \right| \leq a+b \quad (4.2)$$

ve

$$|w_3(t)| \leq \left| t^{\frac{1}{p}-1}b - (1-t)^{\frac{1}{p}}a \right| \leq \left| t^{\frac{1}{p}-1}b \right| + \left| (1-t)^{\frac{1}{p}-1}a \right| \leq a+b \quad (4.3)$$

olduğu görülür. Diğer taraftan $|f''|$ 'nin p -konveksliği de kullanılırsa

$$\left| f''((1-t)^{\frac{1}{p}}a + t^{\frac{1}{p}}b) \right| \leq (1-t)^{\frac{1}{p}} |f''(a)| + t^{\frac{1}{p}} |f''(b)| \quad (4.4)$$

elde edilir. (4.1), (4.2), (4.3) ve (4.4) kullanılırsa

$$\left| f''((1-t)^{\frac{1}{p}}a + t^{\frac{1}{p}}b) w_1(t) w_2(t) w_3(t) \right| \leq (a+b)^3 \left((1-t)^{\frac{1}{p}} |f''(a)| + t^{\frac{1}{p}} |f''(b)| \right)$$

olur. Bu Sonuç 4.10'da kullanılırsa $\nu(a, b, p) = \frac{(a+b)^3}{2p(b-a)}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| &\leq \nu(a, b, p) \int_0^1 \left((1-t)^{\frac{1}{p}} |f''(a)| + t^{\frac{1}{p}} |f''(b)| \right) dt \\ &\leq \nu(a, b, p) \left(|f''(a)| \int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{p}} dt + |f''(b)| \int_0^1 t^{\frac{1}{p}} dt \right) \end{aligned}$$

ve $\int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{p}} dt = \int_0^1 t^{\frac{1}{p}} dt = \frac{p}{p+1}$ olduğu dikkate alınırsa istenen eşitsizlik elde edilmiş olur. $\square$

Yukarıda verilen teorem integraller için Hölder eşitsizliği kullanılarak daha genel bir hale getirilebilir.

Teorem 4.12. $0 < a < b, s > 1$ ve $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^2[0, b]$ olmak üzere $|f''|^s, (0, b)$ aralığında p -konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{(a+b)^{\frac{3s}{s-1}}}{2p(b-a)} \left(\frac{p}{p+1} \right)^{\frac{1}{s}} (|f''(a)|^s + |f''(b)|^s)^{\frac{1}{s}} \quad (4.5)$$

olur.

İspat Sonuç 4.10'da integraller için Hölder eşitsizliği, daha sonra (4.1), (4.2), (4.3) ve $\int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{p}} dt = \int_0^1 t^{\frac{1}{p}} dt = \frac{p}{p+1}$ olduğu gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| &\leq \frac{1}{2p(b-a)} \\ &\times \int_0^1 \left| f''((1-t)^{\frac{1}{p}}a + t^{\frac{1}{p}}b) w_1(t) w_2(t) w_3(t) \right| dt \\ &\leq \frac{1}{2p(b-a)} \left(\int_0^1 \left| f''((1-t)^{\frac{1}{p}}a + t^{\frac{1}{p}}b) \right|^s dt \right)^{\frac{1}{s}} \\ &\times \left(\int_0^1 |w_1(t) w_2(t) w_3(t)|^{\frac{s}{s-1}} dt \right)^{\frac{s-1}{s}} \\ &\leq \frac{1}{2p(b-a)} \left(\int_0^1 \left((1-t)^{\frac{1}{p}} |f''(a)|^s + t^{\frac{1}{p}} |f''(b)|^s \right) dt \right)^{\frac{1}{s}} \times \left(\int_0^1 ((a+b)^3)^{\frac{s}{s-1}} dt \right)^{\frac{s-1}{s}} \\ &\leq \frac{(a+b)^{\frac{3s}{s-1}}}{2p(b-a)} \left(\frac{p}{p+1} \right)^{\frac{1}{s}} (|f''(a)|^s + |f''(b)|^s)^{\frac{1}{s}} \end{aligned}$$

olacaktır. $\square$

(4.5) eşitsizliğinin sol tarafı $|f''(a)|$ ve $|f''(b)|$ nin maksimumları cinsinden yazılabilir.

Teorem 4.13. (Bellman ve Beckenbach 1961)(Sayfa 16) $s \in \mathbb{R}, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere x_i pozitif sayıları düşünölsün. Bu durumda

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^s \right)^{\frac{1}{s}} = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

olur.

Teorem 4.13, Teorem 4.12’de kullanılırsa

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (|f''(a)|^s + |f''(b)|^s)^{\frac{1}{s}} = \lim_{s \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{s}} \left(\frac{|f''(a)|^s + |f''(b)|^s}{2} \right)^{\frac{1}{s}} = \max\{|f''(a)|, |f''(b)|\}$$

olacağından eşitsizliğin her iki tarafında $s \rightarrow \infty$ için limit alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.14. a, b, p sayıları ile f fonksiyonu Teorem 4.12’deki koşulları sağlasın. Bu durumda

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{(a+b)^3}{2p(b-a)} \max\{|f''(a)|, |f''(b)|\}$$

olur.

Yukarıda elde edilen sonuçlar sadece a ve b sayılarının pozitif olduğu durumlar için geçerlidir. a ve b nin negatiflik durumlarını içermemektedir. Yukarıdaki eşitsizlik ispatlarından da görüleceği üzere sağ tarafta integral içerisindeki ifadelerin mutlak değerleri için üst sınırlar elde edilmektedir. Sonuçları daha genel hale getirebilmek için Sonuç 4.10’de ki integral özdeşlikte yer alan $|w_1(t)|$, $|w_2(t)|$ ve $|w_3(t)|$ ’nin a ve b ’nin durumlarına göre ayrıca incelenmesi gerekmektedir. Aşağıda verilen ön teoremlerde bu yapılacaktır.

Önce $|w_1(t)|$ için üst sınırlar belirlenecektir.

Önteorem 4.15. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$, $0 < p < 1$ ve $t \in [0, 1]$ olsun. $w_1(t)$, Önteorem 4.9’deki gibi verilsin.

i) $a = 0$ ise $|w_1(t)| \leq w_1(0)$

ii) $a \neq 0$ ise $t_1 = (1 + (\frac{b}{a})^{\frac{p}{1-p}})^{-1}$ olmak üzere

ii-1) $0 < a < b$ ise $|w_1(t)| \leq w_1(t_1)$

ii-2) $a < b < 0$ ise $|w_1(t)| < \max\{w_1(0), |w_1(t_1)|\}$,

ii-3) $a < 0 < b$ ise $|w_1(t)| \leq w_1(0)$.

İspat i) $a = 0$ ise $w_1(t) = b(1 - t^{\frac{1}{p}})$ ve $b > 0$ olduğundan $w_1(t) > 0$ ve $w_1'(t) < 0$ yani $w_1(t)$ azalandır. Dolayısıyla maksimum değerini 0’da alacaktır. Buna göre $t \in [0, 1]$ için $|w_1(t)| = w_1(t) \leq w_1(0)$.

ii) Bütün durumlarda gerekli incelemelerde kullanmak için $w_1(t)$ ’nin türevini bulun:

$$w_1'(t) = \frac{1}{p} \left((1-t)^{\frac{1}{p}-1} a - t^{\frac{1}{p}-1} b \right)$$

ve $w_1'(t) = 0$ denirse $t_1 = \left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p}{1-p}}\right)^{-1}$ bulunur ki $w_1'(t)$ 'nin tek köküdür.

ii-1) $0 < a < b$ olsun.

$t \in [0, t_1]$ ise $w_1'(t) > 0$ (yani $w_1(t)$ artan) ve $t \in (t_1, 1]$ ise $w_1'(t) < 0$ (yani $w_1(t)$ azalan) olduğundan t_1 değeri yerel bir maksimum değerdir. $w(0) = b - a$, $w(1) = 0$ olduğundan $t \in [0, 1]$ için $w(t) > 0$ olur. Dolayısıyla $t = t_1$ mutlak maksimum olur. Buna göre $|w_1(t)| = w_1(t) \leq w_1(t_1)$ olur.

ii-2) $a < b < 0$ olsun.

$t \in [0, t_1]$ için $w_1'(t) < 0$ (yani $w_1(t)$ azalan)'dır ve $t \in (t_1, 1]$ için $w_1'(t) > 0$ yani $w_1(t)$ artan olduğundan $w(t)$, t_1 'de yerel minimuma sahiptir. Diğer taraftan $w_1(0) = b - a > 0$ ve $w_1(1) = 0$ olduğundan $w_1(t_1) < 0$ olduğu anlaşılır. Dolayısıyla

$$|w_1(t)| < \max\{w_1(0), |w_1(t_1)|\}.$$

ii-3) $a < 0 < b$ olsun.

$t \in [0, 1]$ için $w_1'(t) < 0$ olacağından $w_1(t)$ kesin azalandır, dolayısıyla $t \in [0, 1]$ için $w_1(t) > 0$ olduğundan

$$|w_1(t)| = w_1(t) \leq w_1(0)$$

bulunur. □

Şimdi $|w_2(t)|$ için üst sınırlar belirlenecektir.

Önteorem 4.16. $0 < p < 1$, $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ ve $t \in [0, 1]$ olsun. $w_2(t)$, Önteorem 4.9'deki gibi verilsin.

i) $a = 0$ ise $|w_2(t)| \leq w_2(1)$

ii) $a \neq 0$ ise $t_1 = \left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p}{1-p}}\right)^{-1}$ olmak üzere

ii-1) $0 < a < b$ ise $|w_2(t)| \leq \max\{w_2(1), |w_2(t_1)|\}$,

ii-2) $a < b < 0$ ise $|w_2(t)| < w_2(t_1)$,

ii-3) $a < 0 < b$ ise $|w_2(t)| \leq w_2(1)$.

İspat i) $a = 0$ ise $w_2(t) = bt^{\frac{1}{p}}$ ve $b > 0$ olduğundan $w_2(t) > 0$ ve $w_2'(t) > 0$ yani $w_2(t)$ artandır. Dolayısıyla maksimum değerini 1'de alacaktır. Buna göre $t \in [0, 1]$ için $|w_2(t)| = w_2(t) \leq w_2(1)$.

ii) $a \neq 0$ olsun. Gerekli incelemelerde kullanmak için $w_2(t)$ 'nin türevi bulunsun:

$$w_2'(t) = -w_3(t) \tag{4.6}$$

ve $w_2'(t) = 0$ eşitliğini sağlayan nokta Önteorem 4.15 ii) de verilen t_1 değeridir ve $w_2'(t)$ 'nin tek köküdür. $w_2(t)$ fonksiyonunun azalanlık artanlık davranışı (4.6)'dan dolayı Önteorem 4.15 ispatındaki benzer durumların tersine olacaktır.

ii-1) $0 < a < b$ için $t \in [0, t_1)$ ise $w_1'(t) < 0$ (yani $w_2(t)$ azalan) ve $t \in (t_1, 1]$ ise $w_1'(t) > 0$ (yani $w_1(t)$ artan) olduğundan t_1 değeri yerel bir minimum değerdir. $w_2(0) = 0$, $w_2(1) = b - a > 0$ olduğundan $w(t_1) < 0$ olur. Buna göre $|w_2(t)| \leq \max\{w_2(1), |w_2(t_1)|\}$ olur.

ii-2) $a < b < 0$ olsun. $t \in [0, t_1)$ için $w_2'(t) > 0$ 'dir yani $w_2(t)$ artar ve $t \in (t_1, 1]$ için $w_2'(t) < 0$ yani $w_2(t)$ azalan olduğundan $w(t)$, t_2 'de yerel maksimuma sahiptir. Diğer taraftan $w_2(0) = 0$ ve $w_2(1) = b - a > 0$ olduğundan $w_2(t_1) > 0$ olduğu anlaşılır. Dolayısıyla $t \in [0, 1]$ için

$$|w_2(t)| < w_2(t_1).$$

ii-3) $a < 0 < b$ olsun. $t \in [0, 1]$ için $w_2'(t) > 0$ olacağından $w_2(t)$ artandır, dolayısıyla $t \in [0, 1]$ için $w_2(0) = 0$ olduğundan $t \in [0, 1]$ için $w_2(t) > 0$ olur. Buradan

$$|w_2(t)| < w_2(1) = b - a$$

bulunur. □

Şimdi $|w_3(t)|$ için üst sınırlar belirlenecektir.

Önteorem 4.17. $0 < p < 1$, $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ verilsin. $t \in [0, 1]$ olmak üzere $w_3(t)$, Önteorem 4.9'deki gibi verilsin.

i) $p = \frac{1}{2}$ ise $|w_3(t)| \leq \max\{|a|, |b|\}$

ii) $p \neq \frac{1}{2}$ ise $t_2 = (1 + (-\frac{b}{a})^{\frac{p}{1-2p}})^{-1}$ olmak üzere

ii-1) $a < b < 0$ ise $|w_3(t)| \leq -a$

ii-2) $0 < a < b$ ise $|w_3(t)| \leq b$

ii-3) $a < 0 < b$ ise $|w_3(t)| \leq \max\{-a, b, w_3(t_2)\}$

ii-4) $a = 0$ ise $|w_3(t)| \leq b$

İspat i) $p = \frac{1}{2}$ için $w_3(t) = t(b + a) - a$ olur ki $w_3(t)$, $a + b > 0$ ise artan ve $b > a$ olduğu dikkate alınırsa $w_3(0) = -a$ ve $w_3(1) = b$ olduğundan $|w_3(t)| < |b|$ olur. Diğer taraftan $a + b < 0$ ise azalan ve $b > a$ olduğu dikkate alınırsa $w_3(0) = -a$ ve $w_3(1) = b$

oluşundan $|w_3(t)| < |a|$ olur. $a + b = 0$ durumunda fonksiyon sabit olup $w_3(t) = -a$ olur. Her üç durumdan $|w_3(t)| \leq \max\{|a|, |b|\}$ olduğu ortaya çıkar.

ii) $p \neq \frac{1}{2}$ için

$$w'_3(t) = \left(\frac{1}{p} - 1\right) \left(bt^{\frac{1}{p}-2} + (1-t)^{\frac{1}{p}-2}a\right)$$

olur.

ii-1) $a < b < 0$ ise $w'_3(t) < 0$ olur. Bu durumda $w_3(t)$ azalan olacaktır. $w(0) = -a$ ve $w_3(1) = b$ olacağından $|w_3(t)| \leq \max\{|a|, |b|\} = |a| = -a$ bulunur.

ii-2) $0 < a < b$ ise $w'_3(t) > 0$ olur. Bu durumda $w_3(t)$ artan olacaktır. $w_3(0) = -a$ ve $w_3(1) = b$ olacağından $|w_3(t)| \leq \max\{|a|, |b|\} = b$ bulunur.

ii-3) $a < 0 < b$ ise $w'_3(t) = 0$ denkleminin kökü $t_2 = \left(1 + \left(-\frac{b}{a}\right)^{\frac{p}{1-2p}}\right)^{-1}$ olarak bulunur. Burada $w'_3(t)$ nin $[0, t_2)$ ve $(t_2, 1]$ aralığındaki pozitif veya negatiflik durumları p 'nin $\frac{1}{2}$ 'den küçük veya büyüklük durumuna göre ayrı ayrı incelenmelidir.

Burada $p < \frac{1}{2}$ için $w'_3(t)$ nin sürekliliği ve $w'_3(0) = \left(\frac{1}{p} - 1\right)a < 0$ ve t_2 'nin $w'_3(t)$ 'nin $[0, 1]$ aralığındaki tek kökü olduğu bilindiğinden $w'_3(t)$, $[0, t_2)$ 'de negatif ve $w'_3(1) = \left(\frac{1}{p} - 1\right)b > 0$ olduğu da gözönüne alınırsa, $(t_2, 1]$ 'de pozitif olduğu görülür. Dolayısıyla $p < \frac{1}{2}$ için $w_3(t)$, $[0, t_2)$ 'de azalan ve $(t_2, 1]$ 'de artan olacaktır. Buna göre t_2 , w_3 'ün bir minimum noktasıdır. $t \in [0, 1]$ için $w_3(t) > 0$ olduğundan $|w_3(t)| \leq \max\{w_3(0), w_3(1)\} = \max\{-a, b\}$ olacaktır.

$p > \frac{1}{2}$ için $w'_3(t)$ 'nin $t = 0$ ve $t = 1$ noktalarında limit değerlerine bakılırsa

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} w'_3(t) &= \left(\frac{1}{p} - 1\right) \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(bt^{\frac{1}{p}-2} + (1-t)^{\frac{1}{p}-2}a\right) = \infty \\ \lim_{t \rightarrow 1^-} w'_3(t) &= \left(\frac{1}{p} - 1\right) \lim_{t \rightarrow 1^-} \left(bt^{\frac{1}{p}-2} + (1-t)^{\frac{1}{p}-2}a\right) = -\infty \end{aligned}$$

olduğu görülür. t_2 'nin $w'_3(t)$ 'nin $[0, 1]$ aralığındaki tek kökü olduğu bilindiğinden $w'_3(t)$, $(0, t_2)$ 'de pozitif ve $(t_2, 1)$ aralığında negatif değerler alacaktır. Dolayısıyla $p > \frac{1}{2}$ için $w_3(t)$, $(0, t_2)$ 'de artan ve $(t_2, 1]$ 'de azalan olacaktır. Buna göre t_2 , w_3 'ün bir maksimum noktasıdır. $t \in [0, 1]$ için $w_3(t) > 0$ olduğundan $|w_3(t)| \leq w_3(t_2)$ olur.

$p > \frac{1}{2}$ ve $p < \frac{1}{2}$ durumları birleştirilirse $p \neq \frac{1}{2}$ için $|w_3(t)| \leq \max\{-a, b, w_3(t_2)\}$ yazılabilir.

ii-4) $a = 0$ ise $b > 0$ ve $w_3(t) = t^{\frac{1}{p}-1}b$ olup $t \in [0, 1]$ için $|w_3(t)| \leq b$ olduğu görülür.

□

Şimdi sağ tip Hermite-Hadamard tip eşitsizliği ifade edebiliriz.

Teorem 4.18. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ve $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(\mathbb{R})$ olmak üzere $|f''|$, $\mathbb{R}$ 'de p -konveks bir fonksiyon olsun.

i) $a = 0$ iken

$$z = b^3$$

ii) $0 < a < b$ iken

$$z = b - \frac{b}{\left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p}{1-p}}\right)^{\frac{1}{p}-1}} \times \max \left\{ b - a, \left| \frac{b}{\left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p}{1-p}}\right)^{\frac{1}{p}-1}} \right| \right\} \times b$$

iii) $a < b < 0$ iken

$$z = \max \left\{ b - a, \left| b - \frac{b}{\left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p}{1-p}}\right)^{\frac{1}{p}-1}} \right| \right\} \times \left| \frac{b}{\left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p}{1-p}}\right)^{\frac{1}{p}-1}} \right| \times -a$$

iv) $a < 0 < b$ iken

iv-1) $p \neq \frac{1}{2}$ ise

$$z = (b - a)^2 \max \left\{ -a, b, \frac{b}{\left(1 + \left(-\frac{b}{a}\right)^{\frac{p}{1-2p}}\right)^{\frac{1}{p}-2}} \right\}$$

iv-2) $p = \frac{1}{2}$ ise

$$z = (b - a)^2 \max \{-a, |b|\}$$

olmak üzere

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \right| = \frac{z}{2(p+1)(b-a)} (|f''(a)| + |f''(b)|)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat i) $a = 0$ durumu incelensin. Önteorem 4.15'den $|w_1(t)| \leq w_1(0) = b$, Önteorem 4.16'den $|w_2(t)| \leq w_2(1) = b$ ve Önteorem 4.17'den $|w_3(t)| \leq b$ olacağı dikkate alınır

$$|w_1(t)| |w_2(t)| |w_3(t)| \leq b^3$$

olur. Bu bulgu Önteorem 4.10'de aşağıdaki gibi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\
& \leq \frac{1}{2p(b-a)} \int_0^1 \left| f''((1-t)^{\frac{1}{p}}a + t^{\frac{1}{p}}b) \right| |w_1(t)| |w_2(t)| |w_3(t)| dt \\
& \leq \frac{1}{2p(b-a)} \int_0^1 \left((1-t)^{\frac{1}{p}} |f''(a)| + t^{\frac{1}{p}} |f''(b)| \right) |w_1(t)| |w_2(t)| |w_3(t)| dt \\
& \leq \frac{b^3}{2(1+p)(b-a)} (|f''(a)| + |f''(b)|)
\end{aligned}$$

elde edilmiş olur. Diğer verilen durumlar için $|w_1(t)|$, $|w_2(t)|$ ve $|w_3(t)|$ için Önteorem 4.15, 4.16, 4.17'de sunulan uygun üst sınırlar dikkate alınır ve

$$\begin{aligned}
w_1(0) &= b-a, \quad w_2(1) = b-a, \quad w_1(t_1) = b - \frac{b}{\left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p}{1-p}}\right)^{\frac{1}{p}-1}}, \\
w_2(t_1) &= \frac{b}{\left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p}{1-p}}\right)^{\frac{1}{p}-1}} - a, \quad w_3(t_2) = \frac{b}{\left(1 + \left(-\frac{b}{a}\right)^{\frac{p}{1-2p}}\right)^{\frac{1}{p}-2}}
\end{aligned}$$

olduğu gözönünde bulundurulursa $|w_1(t)| |w_2(t)| |w_3(t)|$ çarpımı için i) durumunda yapılabilecek şekilde getirebilmek için iki değişken dönüşümü kullanılacaktır. Bunun için önce 4.10'de benzer şekilde kullanılırsa istenen gösterilmiş olur. $\square$

4.1.2. Sol Hermite-Hadamard tip eşitsizlikler

Teorem 2.8'da verilen integral özdeşliği ikinci türevi p-konveks fonksiyonlar için kullanılabilecek şekilde getirebilmek için iki değişken dönüşümü kullanılacaktır. Bunun için önce aşağıdaki önteorem verilecektir.

Önteorem 4.19. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ve $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Eğer $f'' \in L[a, b]$ ise

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
& = \frac{2}{(b-a)} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)^2 f''(x) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)^2 f''(x) dx \right]
\end{aligned}$$

olur.

İspat Teorem 2.8'de $\int_0^1 t^2 f''(t \frac{a+b}{2} + (1-t)a) dt$ integralinde $x = t \frac{a+b}{2} + (1-t)a$ dönüşümü yapılırsa $t = \frac{2}{b-a}(x-a)$, $dt = \frac{2}{b-a}dx$, $t = 0$ için $x = a$ ve $t = 1$ için $x = \frac{a+b}{2}$

olacağından

$$\int_0^1 t^2 f'' \left(t \frac{a+b}{2} + (1-t)a \right) dt = \frac{8}{(b-a)^3} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)^2 f''(x) dx$$

elde edilir.

Diğer taraftan yine Teorem 2.8'de $\int_0^1 (t-1)^2 f''(tb + (1-t)\frac{a+b}{2}) dt$ integralinde $x = tb + (1-t)\frac{a+b}{2}$ dönüşümü yapılırsa $t = \frac{1}{b-a}(2x - a - b)$, $dt = \frac{2}{b-a}dx$, $t = 0$ için $x = \frac{a+b}{2}$ ve $t = 1$ için $x = b$ olacağından

$$\int_0^1 (t-1)^2 f'' \left(tb + (1-t)\frac{a+b}{2} \right) dt = \frac{8}{(b-a)^3} \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)^2 f''(x) dx$$

olur. Her iki integral Teorem 2.8'te konursa gösterilmek istenen eşitlik elde edilir. $\square$

Şimdi aşağıdaki önteoremden, Önteorem 4.19'de verilen yeni özdeşlikte tekrar değişken değiştirme yapılarak ikinci türevi p-konveks fonksiyonlar için uygun hale getirilecektir.

Önteorem 4.20. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ olsun.

$$u_1(t) = (a(1-t)^{\frac{1}{p}} + \frac{a+b}{2}t^{\frac{1}{p}} - a)^2, \quad u_2(t) = \left(\frac{a+b}{2}t^{\frac{1}{p}-1} - a(1-t)^{\frac{1}{p}-1} \right)$$

ve

$$v_1(t) = \left(b - (1-t)^{\frac{1}{p}} \frac{a+b}{2} - t^{\frac{1}{p}}b \right)^2, \quad v_2(t) = \left(bt^{\frac{1}{p}-1} - (1-t)^{\frac{1}{p}-1} \frac{a+b}{2} \right)$$

fonksiyonları tanımlansın. Eğer $f'' \in L[a, b]$ ise

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= \frac{2}{(b-a)p} \left[\int_0^1 u_1(t)u_2(t)f''\left(a(1-t)^{\frac{1}{p}} + \frac{a+b}{2}t^{\frac{1}{p}}\right) dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 v_1(t)v_2(t)f''\left((1-t)^{\frac{1}{p}} \frac{a+b}{2} + t^{\frac{1}{p}}b\right) dt \right] \end{aligned}$$

olur.

İspat Önteorem 4.19'de $\int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)^2 f''(x) dx$ integralinde $x = a(1-t)^{\frac{1}{p}} + \frac{a+b}{2}t^{\frac{1}{p}}$ dönüşümü yapılırsa $t = 0$ için $x = a$, $t = 1$ için $x = \frac{a+b}{2}$ ve $dx = \frac{1}{p} \left(-a(1-t)^{\frac{1}{p}-1} + \frac{a+b}{2}t^{\frac{1}{p}-1} \right) dt$ olduğu dikkate alınır

$$\begin{aligned} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)^2 f''(x) dx &= \int_0^1 \left(a(1-t)^{\frac{1}{p}} + \frac{a+b}{2}t^{\frac{1}{p}} - a \right)^2 f''\left(a(1-t)^{\frac{1}{p}} + \frac{a+b}{2}t^{\frac{1}{p}}\right) \\ &\quad \times \frac{1}{p} \left(\frac{a+b}{2}t^{\frac{1}{p}-1} - a(1-t)^{\frac{1}{p}-1} \right) dt. \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan $\int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)^2 f''(x) dx$ integralinde $x = (1-t)^{\frac{1}{p}} \frac{a+b}{2} + t^{\frac{1}{p}} b$ dönüşümü kullanılırsa $t = 0$ için $x = \frac{a+b}{2}$, $t = 1$ için $x = b$ ve $dx = \frac{1}{p} \left(bt^{\frac{1}{p}-1} - (1-t)^{\frac{1}{p}-1} \frac{a}{2} + b \right) dt$ olduğundan

$$\begin{aligned} \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)^2 f''(x) dx &= \int_0^1 \left(b - (1-t)^{\frac{1}{p}} \frac{a+b}{2} - t^{\frac{1}{p}} b \right)^2 f'' \left((1-t)^{\frac{1}{p}} \frac{a+b}{2} + t^{\frac{1}{p}} b \right) \\ &\quad \times \frac{1}{p} \left(bt^{\frac{1}{p}-1} - (1-t)^{\frac{1}{p}-1} \frac{a}{2} + b \right) dt. \end{aligned}$$

Bunlar Önteorem 4.19'de yerine konursa istenen elde edilir. $\square$

Şimdi ikinci türevinin mutlak değeri p -konveks olan fonksiyonlar için sol Hermite-Hadamard tip eşitsizlikler elde edilecektir.

Teorem 4.21. $0 < a < b$ ve $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2[0, b]$ olmak üzere $|f''|$, $(0, b)$ aralığında p -konveks bir fonksiyon ve $k(a, b) = (5a + b)(3a + b)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| &\leq \frac{1}{2(b-a)(p+1)} \left[k(a, b) \left(|f''(a)| + \left| f''\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \right) \right. \\ &\quad \left. + k(b, a) \left(\left| f''\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| + |f''(b)| \right) \right] \end{aligned}$$

İspat $u_1(t)u_2(t) = \varsigma(t)$ ve $v_1(t)v_2(t) = \varkappa(t)$ olmak üzere, Önteorem 4.20'den ve mutlak değer için üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| &\leq \frac{2}{(b-a)p} \\ &\quad \times \left[\left| \varsigma(t) f''\left(a(1-t)^{\frac{1}{p}} + \frac{a+b}{2} t^{\frac{1}{p}}\right) dt \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| \int_0^1 \varkappa(t) f''\left((1-t)^{\frac{1}{p}} \frac{a+b}{2} + t^{\frac{1}{p}} b\right) dt \right| \right]. \end{aligned}$$

$$\left| \int_0^1 u_1(t)u_2(t) f''\left(a(1-t)^{\frac{1}{p}} + \frac{a+b}{2} t^{\frac{1}{p}}\right) dt \right| \leq \int_0^1 \varsigma(t) \left| f''\left(a(1-t)^{\frac{1}{p}} + \frac{a+b}{2} t^{\frac{1}{p}}\right) \right| dt$$

ve

$$\left| \int_0^1 v_1(t)v_2(t) f''\left((1-t)^{\frac{1}{p}} \frac{a+b}{2} + t^{\frac{1}{p}} b\right) dt \right| \leq \int_0^1 |\varkappa(t)| \left| f''\left((1-t)^{\frac{1}{p}} \frac{a+b}{2} + t^{\frac{1}{p}} b\right) \right| dt$$

olacaktır. Mutlak değer için üçgen eşitsizliği ve $t \in [0, 1]$ için $|1-t|^{\frac{1}{p}} \leq 1$ ve $|t|^{\frac{1}{p}} \leq 1$ olduğu kullanılırsa

$$|u_1(t)| = \left| a(1-t)^{\frac{1}{p}} + \frac{a+b}{2} t^{\frac{1}{p}} - a \right| \leq |a| |1-t|^{\frac{1}{p}} + \left| \frac{a+b}{2} \right| t^{\frac{1}{p}} + |a| \leq \frac{5a+b}{2}, \quad (4.7)$$

$$|u_2(t)| = \left| \frac{a+b}{2} t^{\frac{1}{p}-1} - a(1-t)^{\frac{1}{p}-1} \right| \leq \left| \frac{a+b}{2} \right| |t|^{\frac{1}{p}-1} + |a| |1-t|^{\frac{1}{p}-1} \leq \frac{3a+b}{2} \quad (4.8)$$

olduğu görülür. Benzer şekilde

$$|v_1(t)| = \left| b - (1-t)^{\frac{1}{p}} \frac{a+b}{2} - t^{\frac{1}{p}} b \right| \leq |b| + |1-t|^{\frac{1}{p}} \left| \frac{a+b}{2} \right| + |t|^{\frac{1}{p}} |b| \leq \frac{a+5b}{2}, \quad (4.9)$$

$$|v_2(t)| = \left| bt^{\frac{1}{p}-1} - (1-t)^{\frac{1}{p}-1} \frac{a+b}{2} \right| \leq |b| |t|^{\frac{1}{p}-1} + |1-t|^{\frac{1}{p}-1} \left| \frac{a+b}{2} \right| \leq \frac{a+3b}{2} \quad (4.10)$$

Diğer taraftan $|f''|$ 'nin p -konveksliği de kullanılırsa

$$\left| f''\left(a(1-t)^{\frac{1}{p}} + \frac{a+b}{2} t^{\frac{1}{p}}\right) \right| \leq (1-t)^{\frac{1}{p}} |f''(a)| + t^{\frac{1}{p}} \left| f''\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \quad (4.11)$$

ve

$$\left| f''\left((1-t)^{\frac{1}{p}} \frac{a+b}{2} + t^{\frac{1}{p}} b\right) \right| \leq (1-t)^{\frac{1}{p}} \left| f''\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| + t^{\frac{1}{p}} |f''(b)| \quad (4.12)$$

elde edilir. (4.7), (4.8) ve (4.11) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left| u_1(t) u_2(t) f''\left(a(1-t)^{\frac{1}{p}} + \frac{a+b}{2} t^{\frac{1}{p}}\right) \right| &\leq \frac{(5a+b)(3a+b)}{4} \\ &\times \left((1-t)^{\frac{1}{p}} |f''(a)| + t^{\frac{1}{p}} \left| f''\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \right) \end{aligned}$$

ve (4.9), (4.10) ve (4.12) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left| v_1(t) v_2(t) f''\left((1-t)^{\frac{1}{p}} \frac{a+b}{2} + t^{\frac{1}{p}} b\right) \right| &\leq \frac{(a+5b)(a+3b)}{4} \\ &\times \left((1-t)^{\frac{1}{p}} \left| f''\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| + t^{\frac{1}{p}} |f''(b)| \right) \end{aligned}$$

ve $\int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{p}} dt = \int_0^1 t^{\frac{1}{p}} dt = \frac{p}{p+1}$ olduğu dikkate alınır istenen eşitsizlik elde edilmiş olur. $\square$

Yukarıda verilen teorem integraller için Hölder eşitsizliği kullanılarak daha genel bir hale getirilebilir.

Teorem 4.22. $s > 1$, $0 < a < b$, $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2[0, b]$ olmak üzere $|f''|^s$, $(0, b)$ aralığında p -konveks bir fonksiyon, $k(a, b) = (5a+b)(3a+b)$ ve

$$\varepsilon(a, b, s) = \left(|f''(a)|^s + \left| f''\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^s \right)^{\frac{1}{s}}$$

$$K(s, a, b) = k(a, b)\varepsilon(a, b, s) + k(b, a)\varepsilon(b, a, s)$$

olsun. Bu durumda

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{2p(b-a)} \left(\frac{p}{p+1}\right)^{\frac{1}{s}} K(s, a, b)$$

olur.

İspat Öntem 4.20’de (4.7), (4.8), (4.9) ve (4.10) ile $|f''|^s$ ’nin p -konveksliğinden

$$\begin{aligned} \left| f''\left(a(1-t)^{\frac{1}{p}} + \frac{a+b}{2}t^{\frac{1}{p}}\right) \right|^s &\leq (1-t)^{\frac{1}{p}} |f''(a)|^s + t^{\frac{1}{p}} \left| f''\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^s \\ \left| f''\left((1-t)^{\frac{1}{p}} \frac{a+b}{2} + t^{\frac{1}{p}}b\right) \right|^s &\leq (1-t)^{\frac{1}{p}} \left| f''\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^s + t^{\frac{1}{p}} |f''(b)|^s \end{aligned}$$

ve $\int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{p}} dt = \int_0^1 t^{\frac{1}{p}} dt = \frac{p}{p+1}$ olduğu dikkate alınır

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\ &\leq \frac{2}{(b-a)p} \left[\int_0^1 |u_1(t)u_2(t)| \left| f''\left(a(1-t)^{\frac{1}{p}} + \frac{a+b}{2}t^{\frac{1}{p}}\right) \right| dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 |v_1(t)v_2(t)| \left| f''\left((1-t)^{\frac{1}{p}} \frac{a+b}{2} + t^{\frac{1}{p}}b\right) \right| dt \right] \\ &\leq \frac{2}{(b-a)p} \left[\left(\int_0^1 |u_1(t)u_2(t)|^s dt \right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_0^1 \left| f''\left(a(1-t)^{\frac{1}{p}} + \frac{a+b}{2}t^{\frac{1}{p}}\right) \right|^s dt \right)^{\frac{1}{s}} \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_0^1 |v_1(t)v_2(t)|^s dt \right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_0^1 \left| f''\left((1-t)^{\frac{1}{p}} \frac{a+b}{2} + t^{\frac{1}{p}}b\right) \right|^s dt \right)^{\frac{1}{s}} \right] \\ &\leq \frac{2}{(b-a)p} \left[\left(\int_0^1 \left| \frac{5a+b}{2} \frac{3a+b}{2} \right|^s dt \right)^{\frac{1}{s}} \left(\frac{p}{p+1} \left(|f''(a)|^s + \left| f''\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^s \right) \right)^{\frac{1}{s}} \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_0^1 \left| \frac{a+5b}{2} \frac{a+3b}{2} \right|^s dt \right)^{\frac{1}{s}} \left(\frac{p}{p+1} \left(\left| f''\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^s + |f''(b)|^s \right) \right)^{\frac{1}{s}} \right] \\ &\leq \frac{2}{(b-a)p} \left[\frac{5a+b}{2} \frac{3a+b}{2} \left(\frac{p}{p+1} \right)^{\frac{1}{s}} \left(|f''(a)|^s + \left| f''\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^s \right)^{\frac{1}{s}} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 \frac{a+5b}{2} \frac{a+3b}{2} \left(\frac{p}{p+1} \right)^{\frac{1}{s}} \left(\left| f''\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^s + |f''(b)|^s \right)^{\frac{1}{s}} dt \right] \end{aligned}$$

bulunur. □

Yukarıda verilen sonuçlar $a, b \in (0, \infty)$ için elde edilmiştir. Bu sonuçları genişletebilmek için 4.20’deki integral özdeşlikte yer alan $|u_1(t)|$ ile $|u_2(t)|$ ve $|v_1(t)|$ ile $|v_2(t)|$ ’nin a ve b ’nin durumlarına göre ayrıca incelenerek üst sınırlar bulunmasına çalışılacaktır. Yapılan incelemeler, $0 < -a < b$ olması durumunda her bir fonksiyon için üst sınır ifade

edilebileceğini göstermiştir. Aşağıda verilen önteoremlerde bu durum için üst sınırlar elde edilecektir.

Şimdi $|u_1(t)|$ için üst sınır belirlenecektir.

Önteorem 4.23. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $0 < -a < b$ olsun. $u_1(t) = \left(a(1-t)^{\frac{1}{p}} + \frac{a+b}{2}t^{\frac{1}{p}} - a\right)^2$ ise her $t \in [0, 1]$ için $|u_1(t)| \leq u_1(1)$ olur.

İspat a ve b üzerindeki koşullardan $a < 0$, $a + b > 0$ olduğu aşikardır. $u_1(t)$ 'nin türevi alınırsa

$$\frac{du_1(t)}{dt} = \frac{2}{p} \left(a(1-t)^{\frac{1}{p}} + \frac{a+b}{2}t^{\frac{1}{p}} - a \right) \left(\frac{a+b}{2}t^{\frac{1}{p}-1} - a(1-t)^{\frac{1}{p}-1} \right)$$

bulunur. $a(1-t)^{\frac{1}{p}} + \frac{a+b}{2}t^{\frac{1}{p}} - a = a \left((1-t)^{\frac{1}{p}} - 1 \right) + \frac{a+b}{2}t^{\frac{1}{p}}$ olarak yazılırsa $a < 0$, $(1-t)^{\frac{1}{p}} < 1$ ve $a+b > 0$ olduğundan her $t \in [0, 1]$ için $a(1-t)^{\frac{1}{p}} + \frac{a+b}{2}t^{\frac{1}{p}} - a > 0$ olduğu görülür. Aynı şekilde $t \in [0, 1]$ için $\frac{a+b}{2}t^{\frac{1}{p}-1} - a(1-t)^{\frac{1}{p}-1} > 0$ olduğu görülür. Sonuç olarak $\frac{du_1(t)}{dt} > 0$ olur. Yani $u_1(t)$ artan bir fonksiyondur ve maksimum değerini $t = 1$ için alır. Fonksiyonun pozitif değerli olduğu bilindiğinden her $t \in [0, 1]$ için $|u_1(t)| \leq u_1(1) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$ olur. $\square$

Şimdi $|u_2(t)|$ için üst sınır belirlenecektir.

Önteorem 4.24. $0 < -a < b$, $t_* = \left(1 + \left(-\frac{a+b}{2a}\right)^{\frac{p}{1-2p}}\right)^{-1}$ ve $u_2(t) = \frac{a+b}{2}t^{\frac{1}{p}-1} - a(1-t)^{\frac{1}{p}-1}$ olarak tanımlansın. Bu durumda $t \in [0, 1]$ için

$$i) p \leq \frac{1}{2} \text{ ise } |u_2(t)| \leq \max\{u_2(0), u_2(1)\}$$

$$ii) p > \frac{1}{2} \text{ ise } |u_2(t)| \leq u_2(t_*) \text{ olur.}$$

İspat $a < 0$ ve $a + b > 0$ olduğundan $u_2(t) > 0$ olur.

$$\frac{du_2(t)}{dt} = \left(\frac{1}{p} - 1\right) \left(\frac{a+b}{2}t^{\frac{1}{p}-2} + a(1-t)^{\frac{1}{p}-2}\right)$$

olduğundan $\frac{du_2(t)}{dt}$, p 'nin değerlerine göre incelenmelidir.

$p = \frac{1}{2}$ için $u_2(t) = \frac{3a+b}{2}t - a$ olur. $3a + b < 0$ ise $u_2(t)$ azalan, $u_2(0) = -a$ ve $u_2(1) = \frac{a+b}{2}$ olacağından $|u_2(t)| \leq -a$ bulunur. $3a + b > 0$ ise $u_2(t)$ artan olacağından $|u_2(t)| \leq \frac{a+b}{2}$ bulunur. $3a + b = 0$ ise $u_2(t) = -a$ olur. Buna göre $p = \frac{1}{2}$ için $|u_2(t)| \leq \max\{-a, \frac{a+b}{2}\}$ elde edilir.

$p > \frac{1}{2}$ olsun. $\frac{1}{p} - 2 < 0$ olacağından $\lim_{t \rightarrow 0^+} u'_2(t) = +\infty$ ve $\lim_{t \rightarrow 1^-} u'_2(t) = -\infty$ olduğu dikkate alınırsa $u_2(t)$ 'nin, $(0, t_*)$ 'da artan ve $(t_*, 1)$ de azalan olduğu görülür. Buna göre $u_2(t)$, t_* 'da maksimuma sahip olur. $u_2(t)$ pozitif değerli olduğundan $|u_2(t)| \leq u_2(t_*)$ bulunur.

$p < \frac{1}{2}$ olsun. $t_* = \left(1 + \left(-\frac{a+b}{2a}\right)^{\frac{p}{1-2p}}\right)^{-1}$ için $u'_2(t) = 0$ olur. $u'_2(t)$ 'nin sürekli ve t_* , $u'_2(t)$ 'nin tek kökü olması ve $u'_2(0) = \left(\frac{1}{p} - 1\right)a < 0$ olmasından ve $u'_2(1) = \left(\frac{1}{p} - 1\right)\frac{a+b}{2} > 0$ olmasından $u_2(t)$ nin, $[0, t_*)$ 'da azalan ve $(t_*, 1]$ 'de artan olduğu anlaşılır. Buna göre $u_2(t)$, t_* 'da minimum değer alır. Her $t \in [0, 1]$ için $u_2(t) > 0$ olduğundan

$$|u_2(t)| \leq \max\{u_2(0), u_2(1)\} = \max\left\{-a, \frac{a+b}{2}\right\}$$

bulunur. □

Şimdi $|v_1(t)|$ için üst sınır belirlenecektir.

Önteorem 4.25. $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < -a < b$ ve $v_1(t) = \left(b - (1-t)^{\frac{1}{p}} \frac{a+b}{2} - t^{\frac{1}{p}}b\right)^2$ olarak tanımlansın. $t_* = \left(1 + \left(\frac{2b}{a+b}\right)^{\frac{p}{1-p}}\right)^{-1}$ ise $t \in [0, 1]$ için $|v_1(t)| \leq |v_1(t_*)|$.

İspat $v_1(t)$ 'nin türevini hesaplanırsa

$$\frac{dv_1(t)}{dt} = \frac{2}{p} \left(b - (1-t)^{\frac{1}{p}} \frac{a+b}{2} - t^{\frac{1}{p}}b\right) \left((1-t)^{\frac{1}{p}-1} \frac{a+b}{2} - t^{\frac{1}{p}-1}b\right).$$

$b - (1-t)^{\frac{1}{p}} \frac{a+b}{2} - t^{\frac{1}{p}}b = b \left(1 - t^{\frac{1}{p}}\right) - (1-t)^{\frac{1}{p}} \frac{a+b}{2}$ olup $t^{\frac{1}{p}} < t$ ve $(1-t)^{\frac{1}{p}} < 1-t$ olduğundan $t^{\frac{1}{p}} + (1-t)^{\frac{1}{p}} < 1$ dolayısıyla $(1-t)^{\frac{1}{p}} < 1 - t^{\frac{1}{p}}$ olur. $b > \frac{a+b}{2} > 0$ olduğu dikkate alınırsa $(1-t)^{\frac{1}{p}} \frac{a+b}{2} < \left(1 - t^{\frac{1}{p}}\right)b$ yani her $t \in [0, 1]$ için $b - (1-t)^{\frac{1}{p}} \frac{a+b}{2} - t^{\frac{1}{p}}b > 0$ olduğu görülür.

$s_1(t) = (1-t)^{\frac{1}{p}-1} \frac{a+b}{2} - t^{\frac{1}{p}-1}b$ 'nin işaret durumu incelensin.

$$\frac{d}{dt}s_1(t) = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left((1-t)^{\frac{1}{p}-2} \frac{a+b}{2} + t^{\frac{1}{p}-2}b\right) < 0$$

olduğundan $s_1(t)$ daima azalandır. $s_1(0) = \frac{a+b}{2}$ ve $s_1(1) = -b$ olduğundan $s_1(t) = 0$ denkleminin çözümü bulunmalıdır. $t_* = \left(1 + \left(\frac{2b}{a+b}\right)^{\frac{p}{1-p}}\right)^{-1}$ için $s_1(t_*) = 0$ olduğu göz önüne alınırsa $s_1(t)$ nin $[0, t_*)$ için pozitif ve $(t_*, 1]$ için negatif olduğu görülür. Sonuç olarak $[0, t_*)$ için $v'_1(t) > 0$ ve $(t_*, 1]$ için $v'_1(t) < 0$ olur. Dolayısıyla $v_1(t)$, maksimum değere sahiptir. $v_1(t) > 0$ olduğundan her $t \in [0, 1]$ için $|v_1(t)| \leq |v_1(t_*)|$ bulunur. □

Şimdi $|v_2(t)|$ için üst sınır belirlenecektir.

Önteorem 4.26. $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < -a < b$ ve $v_2(t) = bt^{\frac{1}{p}-1} - (1-t)^{\frac{1}{p}-1} \frac{a+b}{2}$ olsun. $t \in [0, 1]$ için $|v_2(t)| \leq b$.

İspat Türev hesaplanırsa

$$\frac{d}{dt}v_2(t) = \left(\frac{1}{p} - 1\right) \left(bt^{\frac{1}{p}-2} + (1-t)^{\frac{1}{p}-2} \frac{a+b}{2}\right)$$

olup $b > 0$ ve $\frac{a+b}{2} > 0$ olduğu dikkate alınır $t \in [0, 1]$ için $v_2'(t) > 0$ olur. Buna göre $v_2(t)$ artandır. $v_2(0) = -\frac{a+b}{2}$ ve $v_2(1) = b$ olduğundan $t \in [0, 1]$ için $|v_2(t)| \leq \max\{|v_2(0)|, |v_2(1)|\} = b$ olur. $\square$

Şimdi $|f''|$ için sol Hermite-Hadamard eşitsizlik verilecektir.

Teorem 4.27. $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < -a < b$ ve $f : [-b, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $|f''| \in L[-b, b]$ olsun. Eğer $|f''|$, p -konveks ise

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\ & \leq \frac{1}{(b-a)(p+1)} \times \left[|u_1(1)| \max\{u_2(0), u_2(1), u_2(t_*)\} \left(\left| f''\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| + |f''(a)| \right) \right. \\ & \quad \left. + v_1(t_*) b \left(\left| f''\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| + |f''(b)| \right) \right] \end{aligned}$$

İspat Önteorem 4.25 ve 4.26 dikkate alınır

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^1 v_1(t) v_2(t) f''\left((1-t)^{\frac{1}{p}} \frac{a+b}{2} + t^{\frac{1}{p}} b\right) dt \right| \leq \int_0^1 (|v_1(t)| |v_2(t)| \\ & \quad \times \left| f''\left((1-t)^{\frac{1}{p}} \frac{a+b}{2} + t^{\frac{1}{p}} b\right) \right| dt \\ & \leq v_1(t_*) b \int_0^1 \left| f''\left((1-t)^{\frac{1}{p}} \frac{a+b}{2} + t^{\frac{1}{p}} b\right) \right| dt \end{aligned}$$

olduğu görülür. $|f''(x)|$ 'nin p -konveksliğinden yani Teorem 2.3'ten

$$\left| f''\left((1-t)^{\frac{1}{p}} \frac{a+b}{2} + t^{\frac{1}{p}} b\right) \right| \leq (1-t)^{\frac{1}{p}} \left| f''\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| + t^{\frac{1}{p}} |f''(b)|$$

ve $\int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{p}} dt = \int_0^1 t^{\frac{1}{p}} dt = \frac{p}{p+1}$ olduğu kullanılırsa

$$\int_0^1 \left| f''\left((1-t)^{\frac{1}{p}} \frac{a+b}{2} + t^{\frac{1}{p}} b\right) \right| dt \leq \frac{p}{p+1} \left(\left| f''\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| + |f''(b)| \right).$$

Buradan

$$\left| \int_0^1 v_1(t) v_2(t) f'' \left((1-t)^{\frac{1}{p}} \frac{a+b}{2} + t^{\frac{1}{p}} b \right) dt \right| \leq v_1(t_*) b \frac{p}{p+1} \left(\left| f'' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| + |f''(b)| \right)$$

elde edilir. Diğer taraftan Önteorem 4.23 ve 4.24 dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 u_1(t) u_2(t) f'' \left(a(1-t)^{\frac{1}{p}} + \frac{a+b}{2} t^{\frac{1}{p}} \right) dt \right| &\leq \int_0^1 (|u_1(t)| |u_2(t)| \\ &\quad \times \left| f'' \left(a(1-t)^{\frac{1}{p}} + \frac{a+b}{2} t^{\frac{1}{p}} \right) \right|) dt \\ &\leq |u_1(t)| \max \{u_2(0), u_2(1), u_2(t_*)\} \\ &\quad \times \int_0^1 \left| f'' \left(a(1-t)^{\frac{1}{p}} + \frac{a+b}{2} t^{\frac{1}{p}} \right) \right| dt \end{aligned}$$

yazılır. $|f''(x)|$ 'in p -konveksliğinden

$$\int_0^1 \left| f'' \left(a(1-t)^{\frac{1}{p}} + \frac{a+b}{2} t^{\frac{1}{p}} \right) \right| dt \leq (1-t)^{\frac{1}{p}} |f''(a)| + t^{\frac{1}{p}} \left| f'' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|$$

ve $\int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{p}} dt = \int_0^1 t^{\frac{1}{p}} dt = \frac{p}{p+1}$ kullanılırsa

$$\int_0^1 \left| f'' \left(a(1-t)^{\frac{1}{p}} + \frac{a+b}{2} t^{\frac{1}{p}} \right) \right| dt \leq \frac{p}{p+1} \left(|f''(a)| + \left| f'' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \right)$$

dolayısıyla

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 u_1(t) u_2(t) f'' \left((1-t)^{\frac{1}{p}} \frac{a+b}{2} + t^{\frac{1}{p}} b \right) dt \right| &\leq |u_1(1)| \max \{u_2(0), u_2(1), u_2(t_*)\} \\ &\quad \times \frac{p}{p+1} \left(|f''(a)| + \left| f'' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \right) \end{aligned}$$

elde edilir. □

4.2. Bulgularla İlgili Bazı Uygulamalar

Bu bölümde önceki bölümlerde elde edilen sol ve sağ Hermite-Hadamard eşitsizliklerinin birer tanesinde p -konveks fonksiyon örneği kullanılarak özel fonksiyonlarla ilgili eşitsizliklerin elde edilebileceği gösterilmiştir.

Aşağıda bir sol Hermite-Hadamard eşitsizlik kullanılarak beta ve hipergeometrik fonksiyonla ilgili bir eşitsizlik elde edilmiştir.

Teorem 4.28. $n \in \mathbb{Z}^+$, $m = 2^n$ ve

$$f(m) = 29m^3 + 354m^2 + 874m + 648,$$

$$g(m) = 2^{3-m} (m^2 + 4m + 5)$$

olmak üzere

$$\frac{1}{m+1} + g(m) \leq \beta(m+4, m+1) + \frac{m+3}{m+1} {}_2F_1 \left(-m-2, m+2; m+3; \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{3} f(m)$$

olur.

İspat Teorem 4.21’de $t \in [0, 1)$ olmak üzere $a = t$ ve $b = 1$ ve $f(x) = \frac{x^{m+2}}{(m+1)(m+2)}$ alınır. $\frac{1}{p+1} < 1$ olduğu gözönünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)} \left(\frac{1-t^{m+3}}{1-t} - \frac{(1+t)^{m+2}(m+3)}{2^{m+2}} \right) \\ & \leq \frac{1}{2(1-t)} [(5t+1)(3t+1)(t^m + (1+t)^m 2^{-m}) \\ & \quad + (t+5)(t+3)(1 + (1+t)^m 2^{-m})], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)} \left(\frac{1-t^{m+3}}{1-t} - \frac{(1+t)^{m+2}(m+3)}{2^{m+2}} \right) \\ & \leq \frac{1}{2(1-t)} [(5t+1)(3t+1)(t^m + (1+t)^m 2^{-m}) \\ & \quad + (t+5)(t+3)(1 + (1+t)^m 2^{-m})] \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafı $(1-t)^{m+1}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)} [(1-t^{m+3})(1-t)^m - 2^{-m-2}(m+3)(1+t)^{m+2}(1-t)^{m+2}] \\ & \leq \frac{1}{2} [(t^2+8t+15)(1+(1+t)^m 2^{-m}) + (15t^2+8t+1)(t^m + (1+t)^m 2^{-m})] \\ & = \frac{1}{2} [16(t^2+t+1)(1+t)^m 2^{-m} + (15t^2+8t+1)t^m + t^2+8t+15] \end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafının $[0, 1]$ aralığı için t ’ye göre integrali alınır

$$\int_0^1 (1-t^{m+3})(1-t)^m dt = \frac{1}{m+1} - \beta(m+4, m+1),$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1+t)^{m+2} (1-t)^{m+1} dt &= \frac{2^{m+2}}{m+2} \times {}_2F_1 \left(-m-2, m+2; m+3; \frac{1}{2} \right), \\ \int_0^1 (t^2+t+1) (1+t)^m dt &= \frac{2^{m+1} (3m^2+9m+8) - m^2 - 4m - 5}{(m+1)(m+2)(m+3)}, \\ \int_0^1 (15t^2+8t+1) t^m dt &= \frac{24m^2+82m+60}{(m+1)(m+2)(m+3)}, \\ \int_0^1 (15t^2+8t+1) dt &= \frac{58}{3}\end{aligned}$$

olduğu dikkate alınır ve yazılırsa

$$\begin{aligned}& \frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)} \left[\frac{1}{m+1} - \beta(m+4, m+1) \right. \\ & \left. - \frac{m+3}{m+2} \times {}_2F_1 \left(-m-2, m+2; m+3; \frac{1}{2} \right) \right] \\ & \leq \frac{1}{2} \left[\frac{96m^2+288m+256-2^{4-m}(m^2+4m+5)}{(m+1)(m+2)(m+3)} \right. \\ & \left. + \frac{24m^2+82m+60}{(m+1)(m+2)(m+3)} + \frac{58}{3} \right]\end{aligned}$$

elde edilir. Her iki taraf $(m+1)(m+2)(m+3)$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}& \frac{1}{(m+1)} - \beta(m+4) - \frac{m+3}{m+2} \times {}_2F_1 \left(-m-2, m+2; m+3; \frac{1}{2} \right) \\ & \leq \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} (29m^3+354m^2+874m+648) - 2^{4-m}(m^2+4m+5) \right]\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan istenen sonuç elde edilir. $\square$

Aşağıdaki teoremden bir sağ Hermite-Hadamard eşitsizlik kullanılarak genelleştirilmiş üstel integral fonksiyonla ilgili bir eşitsizlik, bir sonraki teoremden aynı eşitsizlik yardımıyla beta fonksiyonu ile ilgili eşitsizlik elde edilmiştir.

Teorem 4.29. $n \in \mathbb{Z}$, $m = 2^n$ olsun. Bu durumda

$$f_1(x) = \frac{(x+1)(x+4)}{2(x+2)(x+3)}, \quad f_2(x) = \frac{3x^2+9x+5}{2(x+1)(x+2)}$$

ve

$$f_3(x) = \frac{4x^6+18x^5+24x^4+21x^3+7x^2-12x-6}{4x^2(x+3)}$$

olmak üzere

$$f_2(m) E_{-m-2}(m) - \left[f_1(m) E_{-m-3}(m) + \frac{1}{2} (3E_{-m-1}(m) + E_{-m}(m)) \right] \leq f_3(m).$$

İspat Teorem 4.11’de $f(x) = \frac{x^{m+2}}{(m+2)(m+1)}$, $t \in (1, \infty)$ olmak üzere $a = 1$ ve $b = t$ seçilirse

$$\frac{1}{(m+1)(m+2)} \left[\frac{1+t^{m+2}}{2} - \frac{1-t^{m+3}}{(1-t)(m+3)} \right] \leq \frac{(1+t)^3(1+t^m)}{2(p+1)(t-1)}$$

her iki taraf $e^{-mt}(t-1)$ ile çarpılırsa

$$\frac{e^{-mt}}{(m+1)(m+2)} \left[\frac{(1+t^{m+2})}{2} (t-1) + \frac{(1-t^{m+3})}{(m+3)} \right] \leq \frac{(1+t)^3(1+t^m)e^{-mt}}{2(p+1)}$$

ve buradan

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(m+1)(m+2)} \left[\frac{e^{-mt}(t^{m+3} - t^{m+2} + t - 1)}{2} - \frac{t^{m+3}e^{-mt} - e^{-mt}}{m+3} \right] \\ & \leq \frac{e^{-mt}}{2(p+1)} (1 + 3t + 3t^2 + t^3 + t^m + 3t^{m+1} + 3t^{m+2} + t^{m+3}) \end{aligned}$$

elde edilir. $E_p(z)$ tanımını dikkate alınarak burada her iki tarafın t ’ye göre $[1, \infty)$ aralığında integrali alınır ve $\frac{1}{p+1} < 1$ kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \int_1^\infty e^{-mt} t dt &= \frac{e^{-m}(m+1)}{m^2}, \quad \int_1^\infty e^{-mt} dt = \frac{e^{-m}}{m}, \quad \int_1^\infty x^m e^{-mx} dx = E_{-m}(m) \\ \int_1^\infty x^2 e^{-mx} dx &= \frac{e^{-m}(m^2 + 2m + 2)}{m^3}, \quad \int_1^\infty x^3 e^{-mx} dx = \frac{e^{-m}(m^3 + 3m^2 + 6m + 6)}{m^4} \\ \int_1^\infty x^{m+1} e^{-mx} dx &= E_{-m-1}(m), \quad \int_1^\infty x^{m+2} e^{-mx} dx = E_{-m-2}(m) \end{aligned}$$

ve

$$\int_1^\infty x^{m+3} e^{-mx} dx = E_{-m-3}(m)$$

olduğu dikkate alınır

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(m+1)(m+2)} \left[\frac{1}{2} \left(E_{-m-3}(m) - E_{-m-2}(m) + \frac{e^{-m}(m+1)}{m^2} \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{m+3} \left(E_{-m-3}(m) - \frac{e^{-m}}{m} \right) \right] \\ & \leq \frac{e^{-m}}{2} \left(\frac{1}{m} + \frac{3(m+1)}{m^2} + \frac{3(m^2 + 2m + 2)}{m^3} + \frac{m^3 + 3m^2 + 6m + 6}{m^4} \right) \\ & \quad + \frac{1}{2} (E_{-m}(m) + 3E_{-m-1}(m) + 3E_{-m-2}(m) + E_{-m-3}(m)) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada gerekli düzeltmeler yapılırsa istenen sonuç elde edilir. $\square$

Teorem 4.30. $n \in \mathbb{Z}_+$, $m = 2^n$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{m}{4(2m+1)(2m+3)} \left[\frac{(4m+9)\beta(m, m)}{4(m+2)} - \frac{9(3m+5)}{2^{2m}} \beta\left(m, \frac{1}{2}\right) \right] \\ \leq \frac{m^5 + 15m^4 + 90m^3 + 267m^2 + 369m + 184}{2(m+1)^2(m+2)^2(m+3)(m+4)}. \end{aligned}$$

İspat Teorem 4.11’de $f(x) = \frac{x^{m+2}}{(m+1)(m+2)}$, $b = 1$ ve $t \in (0, 1)$ olmak üzere $a = t$ ve $\frac{1}{p+1} < 1$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\frac{1}{(m+1)(m+2)} \left(\frac{1+t^{m+2}}{2} - \frac{1-t^{m+3}}{(1-t)(m+3)} \right) \leq \frac{(1+t)^3(1+t^m)}{2(1-t)}$$

Eşitsizliğin her iki tarafı $(1-t)^{m+1}$ ile çarpılır ve mutlak değer kaldırılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{(m+1)(m+2)} \left(\frac{(1+t^{m+2})(1-t)^{m+1}}{2} - \frac{(1-t)^m(1-t^{m+3})}{(m+3)} \right) \\ \leq \frac{(1+t)^3(1+t^m)(1-t)^m}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafının $[0, 1]$ aralığında integrali alınır ve

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1+t)^3(1-t)^m t^m dt &= \frac{9m(3m+5)}{2^{2m+2}(2m+3)(2m+1)} \beta\left(m, \frac{1}{2}\right) \\ \int_0^1 (1+t)^3(1-t)^m dt &= \frac{(m+5)(m^2+7m+18)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)} \\ \int_0^1 (1+t^{m+2})(1-t)^{m+1} dt &= \frac{1}{m+2} + \beta(m+3, m+2) \\ \int_0^1 (1-t)^m(1-t^{m+3}) dt &= \frac{1}{m+1} - \beta(m+3, m+1) \end{aligned}$$

olduğu gözönünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} \frac{1}{(m+1)(m+2)} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{m+2} + \beta(m+3, m+2) \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{m+3} \left(\frac{1}{m+1} - \beta(m+3, m+1) \right) \right] \\ \leq \frac{1}{2} \left[\frac{(m+5)(m^2+7m+18)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)} + \frac{9m(3m+5)\beta\left(m, \frac{1}{2}\right)}{2^{2m+2}(2m+3)(2m+1)} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\beta(m+3, m+2) = \frac{m(m+1)}{8(2m+1)(2m+3)} \beta(m, m),$$

$$\beta(m+3, m+1) = \frac{(m+2)m\beta(m, m)}{4(2m+1)(2m+3)}$$

olduğu dikkate alınır ise istenen elde edilmiş olur. $\square$

Sağ ve sol Hermite-Hadamard eşitsizlikleri kullanılarak bazı ortalar arası eşitsizlik ilişkileri elde edilebilir. Aşağıda sırasıyla bir sağ ve bir sol Hermite-Hadamard eşitsizliği kullanılarak aritmetik, kuvvet ve genelleştirilmiş logaritmik orta arasındaki eşitsizlik ilişkileri elde edilmiştir.

Teorem 4.31. $a, b \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{Z}_+$ ve $a+1 < b$ ve $m = 2^n$ ise

$$|P_{m+2}(a, b) - S_{m+3}^{m+2}(a, b)| \leq 8A^3(a, b) P_m(a, b) (m+2)(m+3).$$

İspat Teorem 4.11’ da $f(x) = \frac{x^{m+2}}{(m+2)(m+1)}$ kabul edilsin. Bu durumda her $p \in (0, 1)$ için $\frac{1}{p+1} < 1$ ve $\frac{1}{b-a} < 1$ olduğundan

$$\left| \frac{a^{m+2} + b^{m+2}}{2} - \frac{1}{m+3} \frac{b^{m+3} - a^{m+3}}{b-a} \right| \leq (a+b)^3 \frac{a^m + b^m}{2} (m+2)(m+3)$$

yazılabilir. Burada

$$2A(a, b) = a+b, \quad P_{m+2}(a, b) = \frac{a^{m+2} + b^{m+2}}{2}, \quad S_{m+3}^{m+2}(a, b) = \frac{b^3 - a^3}{(m+3)(b-a)}$$

eşitlikleri kullanılırsa istenilen elde edilir. $\square$

Teorem 4.32. $a, b \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{Z}_+$ ve $a+1 < b$ ve $m = 2^n$ ise

$$|S_{m+3}^{m+2}(a, b) - A^{m+2}(a, b)| \leq 4(Z(a, b) + Z(b, a))$$

olur. Burada

$$Z(a, b) = A(5a, b) A(3a, b) P_m\left(a, \frac{a+b}{2}\right).$$

İspat Teorem 4.31’nin ispatı, Teorem 4.21 için uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{b^{m+3} - a^{m+3}}{(m+3)(b-a)(m+1)(m+2)} - \frac{(a+b)^{m+2}}{2^{m+2}(m+1)(m+2)} \right| \\ & \leq \frac{1}{2(b-a)} \frac{1}{p+1} \left[(5a+b)(3a+b) \left(a^m + \left(\frac{a+b}{2} \right)^m \right) \right. \\ & \quad \left. + (a+5b)(a+3b) \left(\left(\frac{a+b}{2} \right)^m + b^m \right) \right] \end{aligned}$$

elde edilir. $2A(5a, b) = 5a + b$, $2A(3a, b) = 3a + b$, $2A(a, 5b) = a + 5b$, $2A(a, 3b) = a + 3b$ ile

$$P_m\left(a, \frac{a+b}{2}\right) = \frac{a^m + \left(\frac{a+b}{2}\right)^m}{2}, \quad P_m\left(b, \frac{a+b}{2}\right) = \frac{b^m + \left(\frac{a+b}{2}\right)^m}{2}$$

$$S_{m+3}^{m+2}(a, b) = \frac{b^{m+3} - a^{m+3}}{(b-a)(m+3)}$$

eşitlikleri kullanılırsa istenilen elde edilir. □

5. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında, literatürde p-konveks fonksiyonlar ve türevinin mutlak değeri p-konveks olan fonksiyonlar için sağ ve sol Hermite-Hadamard tip eşitsizlikler derlenmiş ve bunlara ek olarak literatürde yer almayan ikinci türevi p-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipi sol ve sağ eşitsizlikler türetilmiştir. Bu amaçla literatürde bulunan ikinci türeve ilişkin integral özdeşlikleri kullanılmıştır. Elde edilen eşitsizliklerde bazı p-konveks fonksiyon örnekleri kullanılarak beta, hipergeometrik fonksiyon ve genelleştirilmiş integral fonksiyonu içeren eşitsizlikler elde edilmiştir. Ayrıca aritmetik orta, kuvvet orta ve Stolarsky ortalaması ile ilgili eşitsizlikler uygulama olarak verilmiştir.

Çalışmada p-konveks fonksiyonlar için Eken vd. (2021) tarafından verilen sekiz ve türevinin mutlak değeri p-konveks olan fonksiyonlar için Sezer (2021) tarafından verilen altı eşitsizlik sunulmuş, ikinci türevi p-konveks fonksiyonlar için sağ Hermite-Hadamard eşitsizliği ile ilgili dört eşitsizlik, sağ Hermite-Hadamard eşitsizliği ile ilgili üç eşitsizlik bulgu olarak sunulmuştur. Yeni bulgulardan sadece birer adedi kullanılarak beta, hipergeometrik fonksiyon ve genelleştirilmiş integral fonksiyonu ile ilgili eşitsizlikler elde edilmiştir. Bulunan diğer eşitsizlikler kullanılarak daha farklı özel fonksiyonlarla ilgili eşitsizlikler elde edilmesi mümkündür. Benzer biçimde ortalarla ilgili farklı eşitsizlik ilişkilerinin elde edilmesi de olasıdır.

6. KAYNAKLAR

- Bellman, R. E. and Beckenbach, E. F. 1961. An Introduction to Inequalities. Random House.
- Eken, Z., Kemali, S., Tınaztepe, G., Adilov, G. 2021. The Hermite-Hadamard inequalities for p -convex functions. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 50(5), 1268-1279.
- Hussain, S., Bhatti, M. I., Iqbal, M. 2009. Hadamard-Type Inequalities for s -Convex Functions I. *Punjab University Journal of Mathematics*, 41, 51–60.
- Khan, M. A., Chu, Y., Khan, T. U., Khan, J. 2017. Some new inequalities of Hermite-Hadamard type for s -convex functions with applications. *Open Mathematics*, 15(1), 1414–1430. <https://doi.org/10.1515/math-2017-0121>.
- Niculescu, C. P., Persson, L. E. 2006. Convex Functions and Their Applications A Contemporary Approach. In Springer.
- Özdemir, M. E., Yıldız, Ç., Akdemir, A. O., Set, E. 2013. On some inequalities for s -convex functions and applications. *Journal of Inequalities and Applications*.
- Pearce, C. E. M., Dragomir, S. S. 2002. Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications (No. S1574-0358(04)70845-X; Science Direct Working Paper).
- Sarikaya, M. Z., Kiris, M. E. 2015. Some new inequalities of Hermite-Hadamard type for s -convex functions. *Miskolc Mathematical Notes*, 16(1), 491–501. <https://doi.org/10.18514/MMN.2015.1099>.
- Sezer, S., Eken, Z., Tınaztepe, G., Adilov, G. 2021. p -Convex functions and some of their properties. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 42(4), 443-459.
- Sezer, S. 2021. Hermite-Hadamard Type Inequalities for the Functions Whose Absolute Values of First Derivatives are p -Convex. *Fundamental Journal of Mathematics and Applications*, 4(2), 88-99.

Tanrıverdi, D. 2020. Konveks küme ve konveks fonksiyon kavramlarının bazı genelleştirme metotları. Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek lisans tezi. <https://ssrn.com/abstract=3158351>.

Wolfram Alpha LLC, 2024. Wolfram|Alpha. <https://www.wolframalpha.com/input>



ÖZGEÇMİŞ

İpek AYANA GÜVEN

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans:	Akdeniz Üniversitesi
2015-2025	Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Antalya
Lisans:	Akdeniz Üniversitesi
2010-2014	Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya

MESLEKİ VE İDARİ GÖREVLER

Öğretmen:	Milli Eğitim Bakanlığı
2014-devam	Nene Hatun Kız Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi