

**$p(x)$ – LAPLACE OPERATÖRÜNÜ İÇEREN STEKLOV SINIR
DEĞER PROBLEMİ İÇİN ÇÖZÜMLERİNİN
İNCELENMESİ**

MUHAMMED ABDULLAHELNİMİR

OCAK 2024

DİYARBAKIR

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**$p(x)$ – LAPLACE OPERATÖRÜNÜ İÇEREN STEKLOV SINIR
DEĞER PROBLEMİ İÇİN ÇÖZÜMLERİNİN
İNCELENMESİ**

MUHAMMED ABDULLAHELNİMİR

DİCLE ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM-ÖĞRETİM VE SINAV
YÖNETMELİĞİNİN BİR PARÇASI OLARAK
MATEMATİK ANA BİLİM DALINDA
YÜKSEK LİSANS TEZİ
OLARAK HAZIRLANMIŞTIR

OCAK 2024

DİYARBAKIR

**$p(x)$ – LAPLACE OPERATÖRÜNÜ İÇEREN STEKLOV SINIR
DEĞER PROBLEMİ İÇİN ÇÖZÜMLERİNİN İNCELENMESİ**

Muhammed ABDULLAHELNİMİR tarafından Dicle Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin bir parçası olarak hazırlanan bu çalışma, aşağıda bilgileri yazılı jüri üyeleri tarafından değerlendirilerek **Matematik Ana Bilim Dalı**'nda **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Neslihan DALKILIÇ
Müdür, **Fen Bilimleri Enstitüsü**

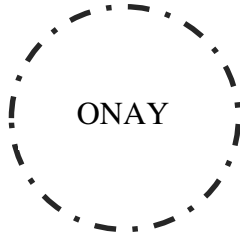
Prof. Dr. Zehra YÜCEDAĞ
Danışman, **Matematik Bölümü,**
Dicle Üniversitesi

Sınav Jürisi:

Prof. Dr. Erhan PİŞKİN (*)
Matematik Bölümü, Dicle Üniversitesi

Prof. Dr. Zehra YÜCEDAĞ (**)
Matematik Bölümü, Dicle Üniversitesi

Prof. Dr. Hasan DALMAN
Matematik Bölümü, Batman Üniversitesi



Savunma Tarihi: 10 /01 / 2024

(*) Jüri Başkanı.
(**) Tez Danışmanı.



Karima ...

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tez çalışmasında yer alan tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu beyan ederim. Ayrıca, bahse konu bu kural ve ilkelerin gerektirdiği üzere, bu çalışmada özgün olmayan tüm bilimsel içerikleri kurallara uygun biçimde alıntılıyıp kaynak gösterdiğimi beyan ederim. Beyanımınla çelişen herhangi bir delil bulunduğu takdirde tüm sorumluluğu üstleneceğimi kabul ederim.

Ad, Soyad: Muhammed ABDULLAHELNİMİR

İmza:

TEŞEKKÜR

Öncelikle danışmanım Prof. Dr. Zehra YÜCEDAĞ'a çalışmamın her aşamasında sağladığı rehberlik ve destekten dolayı teşekkür ederim. Ayrıca, jüri üyelerime bu çalışmanın kalitesini artırmak için yaptıkları değerli eleştiriler ve öneriler için teşekkür ederim.

Bu süreçte yardımcı olan tüm akademisyenlere ve diğer destek sağlayanlara da minnettarlığımı sunar, emekleri için teşekkür ederim.

Anneme ve babama minnettarım, hayatımın her aşamasında beni destekleyenlerdir.

Şeyh Dr. Abdülkârim Haddâd'a, beni destekleyip, Türkiye'de yüksek lisans eğitimime devam etmem için yönlendirdiği için teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	v
İÇİNDEKİLER	vi
ŞEKİLLER LİSTESİ	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	ix
ÖZET.....	x
ABSTRACT.....	xi
1. GİRİŞ	1
1.1 Değişken Üslü Uzayların Tarihi.....	1
1.2 Önceki Çalışmalar	5
1.3 Temel Problem	12
2. ÖN BİLGİLER.....	13
2.1 Temel Tanımlar ve Özellikler.....	13
2.2 Ölçüm Kavramı	21
2.3 Lebesgue Uzayı	23
2.4 Sobolev Uzayı	27
2.5 Ağırlıklı Lebesgue ve Sobolev Uzayları	32
2.6 Eşitsizlikler	33
2.7 Değişken Üslü Lebesgue Uzay $(L^{p(\cdot)}(E))$	34
2.8 Değişken Üslü Sobolev Uzayı $W^{m,p(\cdot)}$	37
2.9 Değişken Üslü Ağırlıklı Lebesgue Uzayları.....	39
3. VARYASYONEL YÖNTEMİ İLE İLGİLİ ÇALIŞMALARDA KULLANILAN BAZI TEOREMLER VE UYGULAMALARI.....	42
3.1 Varyasyonel Yaklaşım	42
3.2 Standart ve Standard Olmayan Büyüme Koşullu Denklemlerin Çözümlerinde Kullanılan Bazı Teoremler	44

3.3	Teoremlerin Kullanıldığı Bazı Çalışmalar	53
4.	$p(x)$ – LAPLACE OPERATÖRÜNÜ İÇEREN AĞIRLIKLİ STEKLOV SINIR DEĞER PROBLEMİ İÇİN ÇÖZÜMLERİN VARLIĞI	58
4.1	Temel Problem	58
4.2	Temel Sonuçlar.....	60
5.	SONUÇLAR VE ÖNERİLER	69
	KAYNAKLAR	70
	ÖZGEÇMİŞ	76



ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 3.1 Konveks fonksiyon	42
-----------------------------------	----



SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

Simge	Açıklama
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^N$	N boyutlu Euclid uzayı
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{H}$	$\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ kümelerinden herhangi birisi
$C(E)$	E kümesi üzerinde sürekli fonksiyonlar uzayı
$C^m(E)$	E kümesi üzerinde kendisi ve m . mertebeye kadar sürekli fonksiyonlar uzayı
$C^\infty(E)$	Sonsuz mertebeye türevlenebilir ve sürekli fonksiyonlar uzayı
$L^p(E)$	p . kuvveti Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$L^\infty(E)$	E bölgesindeki h.h.h yerde sınırlı fonksiyonlar uzayı
$L^p_a(E)$	Ağırlık Lebesgue uzayı
$L^p_{loc}(E)$	p . kuvveti lokal integrallenebilir fonksiyonlar kümesi
$W^{m,p}(E)$	Sovolev uzayı
$W^{m,p}_0(E)$	$C^\infty_0(E)$ uzayının $W^{m,p}(E)$ uzayındaki kapınışı
$L^{p(\cdot)}(E)$	Değişken üslü Lebesgue Uzayı
$W^{m,p(\cdot)}(E)$	Değişken üslü Sovolev uzayı
∂E	E kümenin sınırı
E^*	E uzayının dual uzayı
E^{**}	E uzayının ikinci dual uzayı
$v_n \rightharpoonup v_0$	v_n dizinin, v_0 noktasına zayıf yakınsamak
$v_n \rightarrow v_0$	v_n dizinin, v_0 noktasına güçlü yakınsamak
$\ \cdot\ _E$	E normlu uzayı üzerinde tanımlanan norm
$I: E \rightarrow F$	E den F ya birirm operatörü
$E \hookrightarrow F$	Sürekli gömülme
$E \hookrightarrow\hookrightarrow F$	Kompakt gömülme

Kısaltma

h.h.h.

Açıklama

Hemen hemen her yer de

ÖZET

$p(x)$ – LAPLACE OPERATÖRÜNÜ İÇEREN STEKLOV SINIR DEĞER PROBLEMİ İÇİN ÇÖZÜMLERİNİN İNCELENMESİ

ABDULLAHELNİMİR, Muhammed

Yüksek Lisans, Matematik Bölümü

Danışman: Prof. Dr. Zehra YÜCEDAĞ

Ocak 2024, 88 sayfa

Bu tezde, $p(x)$ – Laplace operatörünü içeren Steklov sınır değer probleminin sıfırdan farklı bir tane zayıf çözümünün varlığı değişken üslü Sobolev uzayında araştırılmıştır. Bu çözümler araştırılırken varyasyonel yaklaşım yöntemi kullanılmıştır.

Birinci bölümde, başlangıçta üzerinde çalıştığımız değişken üslü uzayların tarihsel gelişimi ile ilgili bilgi verilmiştir. Ayrıca $p(x)$ – Laplace operatörünü içeren farklı sınır değer koşullarına sahip problemlerin varyasyonel yaklaşım altında çözümlerinin varlığı, katlılığı, en az bir zayıf çözümünün varlığı, sıfırdan farklı en az bir zayıf çözümünün varlığı, sonsuz çözümün varlığı veya en az üç çözümün varlığı üzerinde yapılan çalışmaların bazıları verilmiştir. En son da üzerinde çalışacağımız problem ve kullanılacak yöntem tanımlanmıştır.

İkinci bölümde, tezin içerisinde geçen bazı temel tanım ve teorem hakkında bilgi verilmiştir. Daha sonra da, problemimizin çözümlerini araştırdığımız uzaylar olan değişken üslü Lebesgue uzayı ve değişken üslü Sobolev uzayının tanımı ve bu uzaylarda kullanılan teoremler hakkında bilgi verilmiştir.

Üçüncü bölümde, standart ve standart olmayan büyüme koşulunu içeren farklı sınır değer koşullarına sahip problemlerin çözümlerinin varlığını araştırırken kullanılan yöntem olan varyasyonel yaklaşım ile ilgili bilgi verilmiştir. Bu yaklaşım kullanılırken ihtiyaç duyulan bazı teoremlere yer verilmiştir. Ayrıca bu teoremler için gerekli olan bazı tanımlarda tanımlanmıştır. Daha sonra da, bu teoremlerin kullanıldığı bazı çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir.

Dördüncü bölümde, tez çalışmasının orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu kısımda, standart olmayan büyüme koşullarını içeren ağırlıklı eliptik Steklov problemi üzerinde çalışılacaktır. Çalışmada, uygun koşullar altında problemin sıfırdan farklı en az bir zayıf çözümünün varlığı değişken üslü Sobolev uzayında araştırılmıştır. Problemin sıfırdan farklı en az bir zayıf çözümünün varlığı araştırılırken Mountain-Pass teoremi ile birlikte Ambrosetti-Rabinowitz koşulu bir arada kullanılmıştır.

Anahtar Kelimeler: $p(x)$ – Laplace, Steklov problemi, Varyasyonel yaklaşım, Mountain-Pass teoremi, Ambrosetti-Rabinowitz koşulu, Zayıf çözüm.

ABSTRACT

EXAMINING THE SOLUTIONS OF STEKLOV BOUNDARY VALUE PROBLEM INVOLVING THE $p(x)$ –LAPLACE OPERATOR

ABDULLAHELNIMIR, Muhammed
Master of Science in Department of Mathematic
Supervisor: Prof. Dr. Zehra YÜCEDAĞ
January 2024, 88 pages

In this thesis, the existence of a nontrivial weak solution to the Steklov boundary value problem involving the $p(x)$ –Laplacian operator is investigated in the variable exponent Sobolev space. The variational approach method is employed in the exploration of these solutions.

In the first section, information is given about the historical development of variable exponent spaces that we initially worked on. In addition, the existence of solutions to problems with different boundary value conditions involving the $p(x)$ –Laplacian operator under the variational approach, their multiplicity, the existence of at least one weak solution, the existence of at least one non-zero weak solution, the existence of infinite solutions or the existence of at least three solutions are examined. Some of the studies are given. Finally, the problem we will work on and the method to be used are defined.

In the second section, information about some basic definitions and theorems in the thesis is given. Then, information is given about the definition of variable exponent Lebesgue space and variable exponent Sobolev space, which are the spaces where we search for solutions to our problem, and the theorems used in these spaces.

In the third section, information is given about the variational approach, which is the method used when investigating the existence of solutions to problems with different boundary value conditions, including standard and non-standard growth conditions. Some theorems needed when using this approach are included. In addition, some definitions necessary for these theorems are defined. Then, information is given about some studies using these theorems.

In the fourth section, the original contribution of the thesis is presented. This section focuses on the weighted elliptic Steklov problem with nonstandard growth conditions. Under suitable conditions, the existence of at least one nontrivial weak solution to the problem is explored in the variable exponent Sobolev space using both the Mountain-Pass theorem and the Ambrosetti-Rabinowitz condition.

Keywords: $p(x)$ – Laplacian, Steklov problem, Variational approach, Mountain-Pass theorem, Ambrosetti-Rabinowitz condition, Weak solution.

1. GİRİŞ

1.1 Değişken Üslü Uzayların Tarihi

Birçok problem klasik Lebesgue (L^p) (p üst sabit bir değer) ve Sobolev ($W^{m,p}$) uzayları kullanılarak modellendirmek yeterli olmuştur. Ancak, bazı homojen olmayan problemlerde (örneğin; Elektroeolojik akışkanlar) etkin enerjisinin (underlying energy) doğru ifade edilebilmesi için p üstünün değişken olmasını zorunlu bir hal almıştır. Bu durum, p reel değerli bir fonksiyon olmak üzere değişken üslü Lebesgue ($L^{p(\cdot)}$) ve Sobolev ($W^{m,p(\cdot)}$) uzayların ortaya çıkış nedenlerinden biri olmuştur.

Değişken üslü Lebesgue ve Sobolev uzaylarının incelenmesinde, ilk ve modern dönemler arasındaki ayrım çizgisi Kováčik ve Rákosník (1991) tarafından yapılan makale olduğu kabul edilir. Ancak değişken üslü Lebesgue ve Sobolev uzayları ile ilgili çalışmalar, bu çalışmadan 60 yıl öncesinde 1931'de Orlicz tarafından ilk kez incelenmiştir.

Orlicz çalışmasında;

$p(\cdot)$ üst fonksiyon ve $1 < p(x) < \infty$ olmak üzere

$$\int_0^1 |f(x)|^{p(x)} dx < \infty$$

ise, o zaman

$$\int_0^1 f(x) g(x) dx < \infty$$

eşitsizliğinin sağlaması için g fonksiyonuna bırakılması gereken gerekli ve yeterli koşul bazı λ pozitif sayı değerleri için

$$\int_0^1 \left(\left| \frac{g(x)}{\lambda} \right| \right)^{p'(x)} dx < \infty$$

olmasıdır. Burada;

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$$

Yalnız, bu makale esasen Orlicz'in değişken üslü Lebesgue uzaylarındaki tek makalesiydi. Bunun tek istisnası, Musielak ile yaptığı çalışmadır (Musielak ve Orlicz,

1959). Daha sonra Orlicz, bu uzaylarda çalışmayı bırakıp kendi ismi ile anılan Orlicz uzaylarında çalışmaya başladı. Bu uzaylar, Birnbaum (1931) ile ortak yapılan bir makalede ortaya çıktı.

Değişken Lebesgue uzaylarının geliştirilmesindeki bir sonraki önemli bir adım, yirmi yıl sonra modüler uzaylar teorisini geliştiren Nakano'nun çalışmalarıyla devam etti (Nakano, 1950; Nakano, 1951). Bu uzaylar bazen Nakano uzayları olarak adlandırılır. Modüler uzay, modüler ile donatılmış bir topolojik vektör uzayıdır, yani bir normun genelleştirilmesidir.

Modüler uzayın önemli bir örneği; Musielak-Orlicz uzayları veya genelleştirilmiş Orlicz uzaylarıdır (Musielak, 1983).

Bu uzaylar, aşağıdaki koşulu sağlayan f fonksiyonlarını içeren fonksiyon uzayıdır: bazı $\lambda > 0$ değerleri için

$$\int_{\Omega} \Phi\left(x, \frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx < \infty$$

olur ve burada;

Hemen hemen her $x \in \Omega$ için $\Phi: \Omega \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu, Yong fonksiyonu gibi davranış göstermektedir ve bu uzay L^{Φ} ile gösterilmektedir

Genelleştirilmiş Orlicz uzayları içinde birkaç fonksiyon uzaylarını da barındırır. Özel durum olarak; eğer $\Phi(x, t) = \Phi(t)$ (t 'e bağlı) ise Orlicz uzayları elde edilir. Eğer, $\Phi(x, t) = t^{p(x)}$ olarak alınırsa değişken üslü Lebesgue uzayları elde edilir ve $\Phi(x, t) = t^{p(x)}w(x)$ ($w(x)$ ağırlık fonksiyonu) ise ağırlıklı Lebesgue uzayları elde edilir. Bu durum da genelleştirilmiş Orlicz uzayları değişken üslü Lebesgue uzayların daha genel uzayları olarak ele alınmıştır.

Bu alanda çalışan araştırmacılar, modüler veya Musielak-Orlicz uzaylarının topolojik özelliklerine odaklandı ve değişken Lebesgue uzayları öncelikle ilginç örnekler olarak kabul edildi.

Rus araştırmacılar tarafından da, bağımsız olarak değişken üslü Lebesgue uzayları reel bir aralıkta çalışılmıştır ve bu uzaylarla ilgili çalışmalar yeniden ortaya çıkmıştır. Bu çalışmaların ilk adımı Tsenov (1961) tarafından atılmıştır ve daha sonra bu çalışma

Portnov tarafından özetlenip tekrar düzenlenmiştir (Portnov, 1966; Portnov, 1967). Tsenov (1961), $p(\cdot): [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı ölçülebilir fonksiyonlar, f sürekli bir fonksiyon ve ϕ sabit dereceli bir polinom olmak üzere

$$\int_0^1 |f(x) - \phi(x)|^{p(x)} dx$$

integrali minimize etme problemini düşündü. Daha sonra, bu problem Sharapudinov tarafından çözülmüştür.

Sharapudinov (1979) çalışmasında, Lüksemburg normunu

$$|u|_{p(\cdot)} = \inf \left\{ \lambda > 0: \int_{\Omega} \left| \frac{u(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\}$$

olarak tanıtarak, reel doğru üzerindeki aralıklar da değişken Lebesgue uzaylarının fonksiyon uzayı teorisini geliştirdi ve gösterdi ki: $p(\cdot)$ sınırlı olduğunda $(1 < p^- \leq p^+ < \infty)$ $L^{p(\cdot)}([0,1])$ ayrılabilir uzaydır ve dual uzayı $L^{p'(\cdot)}([0,1])$ olur (Sharapudinov, 1983; Sharapudinov, 1986).

Değişken Lebesgue uzaylarının incelenmesindeki "modern" dönemin genellikle Kováčik ve Rákosník 1991 tarihli makalesiyle başladığı söylenebilir de, Zhikov'un çalışmaları önceki dönemler arasında bir köprü sağlamıştır. En etkili çalışmaları da, 1986'dan başlayarak değişken Lebesgue uzaylarını varyasyon hesabındaki problemlere uygulamıştır (Zhikov, 1982; Zhikov, 1986; Zhikov, 1994; Zhikov, 1986). Yukarıda belirttiğimiz gibi, Zhikov,

$$F(u) = \int_{\Omega} f(x, \nabla u) dx$$

fonksiyonellerinin minimize problemi ile ilgileniyordu. Burada; f fonksiyoneli

$$-c_0 + c_1 |\xi|^{p(x)} \leq f(x, \xi) \leq c_0 + c_2 |\xi|^q$$

standart olmayan büyüme koşulunu sağlar, c_i ise pozitif reel sabitler ($i = 0,1,2$) ve $0 < p < q$. Ayrıca, $p \leq p(x) \leq q$ için $f(x, \xi) = |\xi|^{p(x)}$ Lagrangian'ın özel bir örneğidir. Bu fonksiyonelle ilişkili Euler-Lagrange denklemi:

$$\Delta_{p(\cdot)} u = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(\cdot)-2} \nabla u) = 0$$

$p(\cdot)$ -Laplace denklemi olarak adlandırılır.

1990 yılların ortalarında ve 2000 yılının başlarında ise, standart olmayan büyüme koşuluna, coercive koşuluna sahip ve $p(\cdot)$ -Laplace operatörünü içeren problemler üzerinde çalışılmaya başlanılmıştır (Fan, 1996a; Fan, 1996b; Fan ve Zhao, 1996a; Fan ve Zhao, 1996b). Ancak değişken üslü uzaylarla ilgili olarak da yapılan önemli çalışmalardan biri de 90'lı yılların başlarında Kovacic ve Rakosnik (1991)'nin birlikte yapmış olduğu çalışma olmuştur. Bu çalışma ile $\mathbb{R}^N$ de Değişken üslü Lebesgue ve Sobolev uzayların temel özelliklerinin çoğu inşa etmiştir. Ayrıca bu alanda yapılan önemli çalışmalar arasında $p(\cdot)$ üzerindeki koşullar (sınırlılık, Hölder koşulu, lokal log-Hölder gibi) bu alanda ciddi çalışmalar ortaya çıkarmıştır. Sonraki on yılda da bu uzayları anlamak için çeşitli ve ciddi çaba harcanmıştır.

1990'ların başından bu yana, değişken üslü Lebesgue-Sobolev uzaylarına olan ilginin ve bu uzaylarda çalışılmasının önemli nedenlerinden biri olarak da çeşitli uygulama alanlarında kullanılmalarından dolayı artmıştır. Bunlar arasında en önemlisi Elektroeolojik akışkanların matematiksel modellemesidir. Bu akışkanlar, elektrik alanla etkileşime girdiklerinde viskoziteleri (çoğu kez dramatik şekilde) değişen akışkanlardır (Halsey, 1992; Stangroom, 1983). Elektroeolojik akışkanlar deneysel olarak anlaşılırsa ancak tam bir teorik model hala eksiktir. Akışkan dinamiği çalışmalarında, bunlar Newton olmayan akışkanlar olarak ele alınır; çok sayıda incelenen bir modelde enerji, aşağıdaki integral ile verilir

$$\int_{\Omega} |Du(x)|^{p(x)} dx$$

burada; Du hız alanının gradyanının simetrik kısmıdır ve üst kısım elektrik alanının bir fonksiyonudur. Růžička bu modeli tanıttı (Růžička, 2000; Růžička, 2007) ve Acerbi ve Mingione tarafından daha da geliştirildi (Acerbi ve Mingione, 2002; Acerbi ve Mingione, 2005). Bu problem, değişken Lebesgue ve Sobolev uzaylarının teorisinin gelişmesinde önemli bir rol oynamıştır (Diening ve Růžička, 2003; Růžička, 2007).

Değişken üslü Lebesgue uzayları, diğer fiziksel problemlerin davranışını modellemek için de kullanılmıştır. Bazı örnekler arasında yarı-Newton akışkanlar (Zhikov, 1997), termistör problemi (Zhikov, 1998) ve gözenekli ortamda akışkan akışı (Antontsev ve Shmarev, 2005; Amaziane vd., 2009).

Değişken üslü Lebesgue uzayları, görüntü iyileştirme problemlerine de uygulanmıştır. 1997 gibi erken bir tarihte, Blomgren vd., görüntü rekonstrüksiyonunda bir değişken üst kullanan bir enterpolasyon tekniği ile daha yumuşak bir görüntü elde edilebilir (Blomgren vd., 1997):

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^{p(x)} dx$$

burada; ∇u arttıkça üst $p(\cdot)$ 'nin iki ile bir arasında monoton olarak azalmaktadır. Bu yaklaşım ve ilgili fikirler, son yıllarda birçok araştırmacı tarafından da araştırılmıştır (Aboulaich vd., 2008; Chen vd., 2006; Harjulehto vd., 2013; Levine, 2006).

1.2 Önceki Çalışmalar

Değişken üslü Lebesgue ve Sobolev uzayları kullanılarak yapılan çalışmalar da önemli oranda bir artış olmuştur. Örneğin; "değişken üslü" başlık altında yapılan araştırmaların sayısı 2000 yılından önce bu sayı 15 iken, 2000 ile 2004 yılları arasında bu sayı 31'e çıkarılmış, 2005 ile 2010 yılları arasında bu alandaki çalışmaların sayısında artış ile bu sayı 242'e ulaşmıştır ve 2010 yılından sonra bu sayı önemli ölçüde bir artış göstermiştir.

Bu konuyla ilgili daha kapsamlı hem araştırma makaleleri hem de kitaplar yazılmaya devam edilmiştir (Cruz-Urbe ve Fiorenza, 2013; Diening vd, 2011; Fan ve Zhao, 2001; Willem, 1996).

Bu alanda, farklı sınır koşullarında (Dirichlet sınır değer koşulu, Neumann sınır değer koşulu ve Steklov sınır değer koşulu) yapılan bazı çalışmalar aşağıda verilmiştir.

Bonanno ve Chinni (2014) yaptığı çalışmasında, aşağıdaki Dirichlet koşuluna sahip değişken üslü eliptik denklem için zayıf çözümlerin varlığı ve katlılığı incelemiştir;

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = \lambda f(x, u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.1)$$

(1.1) probleminde; $\Delta_{p(x)} u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u)$ ise $p(x)$ -Laplace operatörüdür,

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ düzgün sınırlı bir bölge, p fonksiyonu $\bar{\Omega}$ da sürekli ve yeterli kadar düzgün bir fonksiyondur ve $1 < p^- := \inf_{x \in \Omega} p(x) \leq p(x) \leq p^+ := \sup_{x \in \Omega} p(x) < +\infty$ koşulunu sağlar, $f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Carathéodory koşulunu sağlayan bir fonksiyon ve λ gerçek pozitif bir parametredir. Bu çalışmada yazarlar, f 'e bırakılan özel koşullar altında Ricceri teoremi ve Mountain-Pass teoremini kullanarak, Dirichlet koşuluna sahip değişken üslü eliptik denklemin en az üç çözümünün varlığını $W_0^{1,p(x)}$ uzayında göstermişlerdir.

Rashti, vd. (2023) çalışmalarında, $p(x)$ -Laplace operatörünü içeren aşağıdaki Steklov sınır değer problemini incelemiştir;

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[b_0(x, \nabla \omega)] + |\omega|^{p(x)-2} \omega = \lambda f_0(x, \omega), & x \in \Omega \\ b_0(x, \nabla \omega) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \nu} = \mu_0 g_0(x, \omega), & x \in \partial \Omega \end{cases} \quad (1.2)$$

Denklemden; $N \geq 2$ olmak üzere $\Omega, \mathbb{R}^N$ de düzgün sınırlı bir bölge, $\nu, \partial \Omega$ üzeri normal vektördür. Ayrıca; $f_0: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_0: \partial \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $b_0: \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ Carathéodory koşulunu sağlayan fonksiyonlardır ve $p(x) \in C(\bar{\Omega})$ yeterli kadar düzgün değişken üslü fonksiyonudur. (1.2) probleminde yazarlar, $f_0: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_0: \partial \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $b_0: \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ fonksiyonlarına bırakılan uygun koşullar altında varyasyonel metodu ile birlikte Ricceri teoremini kullanarak problemin sıfırdan farklı en az üç tane çözümünün varlığını $W^{1,p(x)}$ uzayında göstermişlerdir.

Ayazoğlu, vd. (2022) çalışmalarında, aşağıdaki $p(x)$ – Laplace operatörünü içeren Kirchhoff tipinden Dirichlet sınır değerli eliptik problemini incelemişler;

$$\begin{cases} M \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx \right) (-\Delta_{p(x)} u) = f(x, u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial \Omega \end{cases} \quad (1.3)$$

denklemden; $N \geq 2$ olmak üzere $\Omega, \mathbb{R}^N$ de düzgün sınırlı bir bölge,

$\Delta_{p(x)} = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u)$ ise $p(x)$ –Laplace operatörüdür, $p: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ sınırlı ve Lipschitz sürekli bir fonksiyondur, $f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Carathéodory fonksiyondur ve $M: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ Kirchhoff fonksiyondur.

Bu çalışmada; M ve f fonksiyonlar için aşağıdaki koşulları bırakılmıştır.

(M1): $M: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ sürekli bir fonksiyondur ve aşağıdaki polinom büyüme koşulunu sağlar:

Her $t > 0$ ve m_1, m_2 gerçekte sayılar için $m_2 \geq m_1 \geq 0$ ve $\beta > 1$ olmak üzere

$$m_1 t^{\beta-1} \leq M(t) \leq m_2 t^{\beta-1},$$

(f₁): Her $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$ ve $q \in C_+(\bar{\Omega})$ için $f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Carathéodory fonksiyonu bir $C_1 > 0$ sabiti için aşağıdaki koşulu sağlasın:

$$|f(x, t)| \leq C_1(1 + |t|^{q(x)-1}),$$

(f₂): Herbir $x \in \Omega$ için $t \rightarrow 0$ iken $f(x, t) = o(|t|^{\beta p^+-1})$,

(f₃):

$$F(x, t) := \int_0^t f(x, s) ds$$

olmak üzere

$$\inf_{\{x \in \Omega, |t|=1\}} F(x, t) > 0,$$

(f₄): Her $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$ için $f(x, -t) = -f(x, t)$,

(AR):

$$0 < \theta F(x, t) := \theta \int_0^t f(x, s) ds \leq t f(x, t); \quad \forall t \in \mathbb{R}; x \in \Omega,$$

(1.3) için; Fountain teoremi, dual Fountain teoremi ve Mountain-Pass teoremini kullanılarak problemin çözümlerinin varlığı ve katlılığı $W_0^{1,p(x)}$ uzayında göstermişlerdir.

Mihăilescu ve Rădulescu (2008), aşağıdaki Dirichlet sınır koşulu problem için öz değer problemi $W_0^{1,p(x)}$ uzayında çalışılmıştır;

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left((|\nabla u|^{p_1(x)-2} + |\nabla u|^{p_2(x)-2}) \nabla u \right) = \lambda |u|^{q(x)-2} u, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1.4)$$

(1.4) denkleminde; $N \geq 3$ olmak üzere $\Omega, \mathbb{R}^N$ de düzgün sınırlı bir bölge, her $x \in \bar{\Omega}$ için p_1, p_2 ve q fonksiyonları $1 < p_2(x) < q(x) < p_1(x) < N$ ve $\max_{y \in \bar{\Omega}} q(y) <$

$\frac{Np_2(x)}{N-p_2(x)}$ koşullarını sağlayan sürekli fonksiyonlar ve λ gerçekte pozitif bir sayıdır. Bu çalışmada, $\lambda_0 \leq \lambda_1$ için λ_0 ve λ_1 gerçekte iki pozitif sayısının varlığını $\lambda \in [\lambda_1, \infty)$ için bir öz değeri olduğu ve $\lambda \in [0, \lambda_0)$ bir öz değeri olmadığını gösterilmiştir.

Mihăilescu ve Rădulescu (2006) çalışmalarında, aşağıdaki standart olmayan büyüme koşullu denklemini değişken üslu uzaylarda ele almışlar;

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, \nabla u)) = \lambda f(x, u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1.5)$$

(1.5) denklemde; $N \geq 3$ olmak üzere $\Omega, \mathbb{R}^N$ de düzgün sınırlı bir bölge, $1 < p(x)$, $p(x) \in C(\bar{\Omega})$ ve $a(x, \xi): \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, $A(x, \xi): \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $A = A(x, \xi)$ fonksiyonun ξ 'e göre sürekli türevidir yani $a(x, \xi) = \nabla_{\xi} A(x, \xi)$.

Bu çalışmada: a ve A aşağıdaki koşullar bırakılmıştır:

(A₁): Her $x \in \bar{\Omega}$ için $A(x, 0) = 0$.

(A₂): Bir $c_1 > 0$ vardır ki $|a(x, \xi)| \leq c_1(1 + |\xi|^{p(x)-1})$, her $x \in \bar{\Omega}$ ve $\xi \in \mathbb{R}^N$.

(A₃): Her $x \in \bar{\Omega}$ ve $\xi, \psi \in \mathbb{R}^N$ için

$$0 \leq (a(x, \xi) - a(x, \psi)) \cdot (\xi - \psi)$$

ve eşitlik durumu ancak ve ancak $\xi = \psi$ olduğunda sağlanır.

(A₄): Her $x \in \bar{\Omega}$ ve $\xi, \psi \in \mathbb{R}^N$ için öyle bir $k > 0$ sabiti vardır ki

$$A\left(x, \frac{\xi + \psi}{2}\right) \leq \frac{1}{2}A(x, \xi) + \frac{1}{2}A(x, \psi) - k|\xi - \psi|^{p(x)}$$

(A₅): Her $x \in \bar{\Omega}$ ve $\xi \in \mathbb{R}^N$ için

$$|\xi|^{p(x)} \leq a(x, \xi) \cdot \xi \leq p(x)A(x, \xi)$$

ve

$f: \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Carathéodory fonksiyonu:

$$1 < \beta < \gamma < \inf_{x \in \bar{\Omega}} p(x) \text{ ve } t \geq 0 \text{ için } f(x, t) = \lambda(t^{\gamma-1} - t^{\beta-1})$$

olarak tanımlanmıştır.

Bu koşullar ile birlikte; varyasyonel yaklaşımla Kritik nokta teorisini ve Mountain-Pass teoremini kullanarak, denklemin yarı-lineer durumunu inceleyerek, denklemin negatif olmayan en az iki zayıf çözümlerinin varlığını $W_0^{1,p(x)}$ uzayında göstermişlerdir.

Fan ve Zhao (2003), aşağıdaki Dirichlet koşuluna sahip standart olmayan büyüme koşullu eliptik denklemler ve varyasyonel problemlerini incelemişler;

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) = f(x, u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1.6)$$

Yazarlar; f 'ye özel koşullar koyarak, varyasyonel yaklaşımla Kritik nokta teorisini, Mountain Pass teoremini ve Fountain teoremini kullanarak (1.6) denklemin çözümlerinin varlığını ve katlılığını (tek bir zayıf çözümün varlığı, zayıf çözümü, sıfırdan farklı bir çözümü ve sonsuz tane çözüm çiftinin varlığı) $W_0^{1,p(x)}$ uzayında göstermiştir.

Zhou ve Wu (2018), aşağıdaki Dirichlet koşuluna sahip $p(x)$ –Laplace denklemi özel koşullar altında incelemişlerdir.

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x)|\nabla u|^{p(x)-2}) = \lambda(b(x)|u|^{q(x)-2}u - c(x)|u|^{r(x)-2}u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1.7)$$

(1.7) denkleminde; $\Omega, \mathbb{R}^N$ de düzgün sınırlı bir bölge, $a(x), b(x) > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}^N$ ve $C_+(\bar{\Omega}) := \left\{p \in C(\bar{\Omega}), \inf_{x \in \bar{\Omega}} p(x) > 1\right\}$ olarak tanımlandığı zaman $p, q, r \in C_+(\bar{\Omega})$ olmak üzere her $x \in \bar{\Omega}$ için

$$q^+ := \sup_{x \in \bar{\Omega}} q(x) < p^- := \inf_{x \in \bar{\Omega}} p(x) \leq p^+ < r^- = \inf_{x \in \bar{\Omega}} r(x) < p^*, p^* := \frac{Np(x)}{N-p(x)}.$$

Aşağıdaki koşullar altında çalışma yapılmıştır:

(h_a) : $\xi \in C_+(\bar{\Omega})$ ve $\xi(x) < p(x)$ olmak üzere $0 < a \in L_{loc}^1(\Omega)$, $a^{-\frac{1}{p(x)-1}} \in L_{loc}^1(\Omega)$ ve $a^{-\frac{\xi(x)}{p(x)-\xi(x)}} \in L^1(\Omega)$,

(h_b) : $\alpha \in C_+(\bar{\Omega})$ için $0 < b \in L^{\alpha(x)}(\Omega)$,

(h_c) : $\gamma \in C_+(\bar{\Omega})$ için $0 < c \in L^{\gamma(x)}(\Omega)$,

$$(\mathbf{h}_q): q^+ < \frac{(\alpha(x)-1)\xi^*(x)}{\alpha(x)},$$

$$(\mathbf{h}_r): r(x) < \frac{(\gamma(x)-1)\xi^*(x)}{\gamma(x)}.$$

Bu çalışmada, Fountain teoremi ve Mountain-Pass teoremini kullanarak problemin çözümlerinin varlığını ve katlılığını (sıfırdan farklı çözümü ve sonsuz çözümü) $W_{a(x)}^{1,p(x)}$ uzayında göstermişlerdir.

Eddine ve Repovš (2023) yaptıkları çalışmalarında; kritik büyüme ve gerçek pozitif parametre içeren yarı lineer sabit Kirchhoff tipi potansiyel sistemlerin bir sınıfının Neumann problemi;

$$\begin{cases} M_i(A_i(u_i)) \left(-\operatorname{div} (B_{1_i}(\nabla u_i)) + B_{2_i}(u_i) \right) = |u_i|^{s_i(x)-2} u_i + \lambda F_{u_i}(x, u), & x \in \Omega \\ M_i(A_i(u_i)) B_{2_i}(u_i) \cdot \mathfrak{N}_i = |u_i|^{\ell_i(x)-2} u_i, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1.8)$$

(1.8) denkleminde; $i = 1, 2, \dots, n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $N \geq 2$ olmak üzere $\Omega, \mathbb{R}^N$ de düzgün sınırlı bir bölge, $\mathfrak{N}_i$, $\partial\Omega$ üzeri normal vektördür. λ pozitif bir parametredir. $\nabla F = (F_{u_1}, \dots, F_{u_n})$, C^1 'deki $F: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonun gradyentidir ve $p_i, q_i, w_i, s_i \in C(\bar{\Omega})$ ve $\ell_i \in C(\partial\Omega)$. Yazarlar; (1.8) denklemini özel koşullar koyarak ve Mountain-Pass teoremini kullanarak problemin en az bir çözüm varlığını değişken üslü Sobolev uzayında göstermişlerdir.

Yücedağ (2022) çalışmasında, aşağıdaki Steklov sınır koşuluna sahip standart olmayan büyüme koşullu problemlimi incelemiştir;

$$\begin{cases} M(A(x, \nabla u)) \operatorname{div}(a(x, \nabla u)) = |u|^{p(x)-2} u, & x \in \Omega \\ a(x, \nabla u) \frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda f(x, u), & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1.9)$$

(1.9) denkleminde; $N \geq 2$ olmak üzere $\Omega, \mathbb{R}^N$ de düzgün sınırlı bir bölge, λ pozitif bir parametredir, p fonksiyonu, $\bar{\Omega}$ üzerinde sürekli fonksiyondur, $a(x, \xi): \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $A: \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}, A = A(x, \xi)$ fonksiyonunun ξ 'e göre sürekli türevidir yani; $a(x, \xi) = \nabla_{\xi} A(x, \xi)$, $f: \partial\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Carathéodory fonksiyondur ve $M: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ sürekli fonksiyondur.

Yazar; M , $A(x, \xi)$ ve $a(x, \xi)$ için aşağıdaki koşulları koyarak problemin çözümlerini incelemiştir:

(M₁): $M: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ sürekli fonksiyon ve $0 < m_1 < m_2$, $\alpha > 1$ reel sayılar ve her $s > 0$ için

$$m_1 s^{\alpha-1} \leq M(s) \leq m_2 s^{\alpha-1},$$

(A₁): Her $x \in \bar{\Omega}$ ve $\xi \in \mathbb{R}^N$ için bir $c_0 > 0$ sabiti vardaki aşağıdaki büyüme koşulunu sağlasın

$$|a(x, \xi)| \leq c_0(1 + |\xi|^{p(x)-1}),$$

(A₂): Her $x \in \bar{\Omega}$ ve $\xi \in \mathbb{R}^N$ için

$$|\xi|^{p(x)} \leq a(x, \xi)\xi \leq p(x)A(x, \xi),$$

(A₃): Her $x \in \bar{\Omega}$ için $A(x, 0) = 0$,

(A₄): $A: p(x)$ –düzgün konvektir: her $x \in \bar{\Omega}$ ve $u, v \in \mathbb{R}^N$ için aşağıdaki koşulu sağlayan $k_0 > 0$ vardır,

$$A\left(x, \frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{1}{2}A(x, u) + \frac{1}{2}A(x, v) - k_0|u - v|^{p(x)},$$

(1.9) problemi; Ricceri teoremini kullanarak problemin en az üç çözümünün varlığı ve Mountain-Pass teoremini kullanarak sıfırdan farklı zayıf çözümlerinin varlığını $W_0^{1,p(x)}$ uzayında ispatlanmıştır.

Irzi ve Kefi (2021) çalışmalarında; aşağıdaki lokal olmayan Neumann sınır koşulu sahip kesirli $p(\cdot, \cdot)$ –Laplace problemini ele almışlar;

$$\begin{cases} (-\Delta)_{p(\cdot, \cdot)}^s u + |u|^{\bar{p}(x)-2}u = \lambda V_1(x)|u|^{\bar{q}(x)-2}u, & x \in \Omega \\ \mathcal{N}_{s,p(\cdot, \cdot)} u = \mu V_2(x)|u|^{r(x)-2}u, & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases} \quad (1.10)$$

Denklemden; $N \geq 1$ olmak üzere $\Omega, \mathbb{R}^N$ de düzgün sınırlı bir bölge, $s \in (0, 1)$ $p: \mathbb{R}^{2N} \rightarrow (1, +\infty)$ alttan 1 ile sınırlı, simetrik, sürekli bir fonksiyondur, $\lambda, \mu > 0$ pozitif parametreler ve V_1, V_2 negatif olmayan ağırlık fonksiyonlar ve $\bar{p}(x) = p(x, x)$, q ve r sınırlı ve sürekli fonksiyonlar,

$$(-\Delta)_{p(\cdot, \cdot)}^s u(x) := p.v. \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^{p(x,y)-2}(u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+s.p(x,y)}} dy, \quad x \in \Omega$$

$$\mathcal{N}_{s,p(\cdot,\cdot)}u := \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^{p(x,y)-2} (u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+s.p(x,y)}} dy, \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$$

Bu çalışmada; s, p, V_1 ve V_2 özel koşulları altında Ekeland prensibini ve varyasyonel yöntemi kullanılarak, (1.10) probleminin kesirli değişken üslü Sobolev uzayında sıfırdan farklı zayıf çözümlerinin var olduğunu ispatlamışlardır.

1.3 Temel Problem

Yukarıdaki çalışmalar ve bu çalışmalardaki yöntemler incelendikten sonra tezimizde aşağıdaki (1.11) problemi çalışılmıştır.

Bu çalışmada, aşağıdaki Steklov sınır koşuluna sahip standart olmayan büyüme koşullu problemi çalışılmıştır. Çalışmada, Ambrosetti- Rabinowitz koşulu ile birlikte Mountain-Pass teoremini kullanarak sıfırdan farklı en az bir zayıf çözümünün varlığı değişken üslü Sobolev uzayında ispatlanmıştır.

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, \nabla u)) = g(x, u), & x \in \Omega \\ a(x, \nabla u) \frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda h(x) |u|^{r(x)-2} u, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1.11)$$

(1.11) deki çalışmada, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) de düzgün sınırlı bir bölge, $\lambda > 0$ pozitif parametreler, ν , $\partial\Omega$ üzeri normal vektördür, $x \in \overline{\Omega}$ için $p(x) > 1$ olmak üzere $p(x) \in C(\overline{\Omega})$, $y \in \partial\Omega$ için $r(x) > 1$ olmak üzere $r(x) \in C(\partial\Omega)$ ve $p(x) \neq r(y)$, $g: \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Carathéodory fonksiyondur $h(x) \in L^\infty(\partial\Omega)$ bir ağırlık fonksiyonu ve $a(x, \zeta): \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ bir Carathéodory fonksiyondur ve $A(x, \zeta): \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ fonksiyonunun ζ 'e göre sürekli türevidir yani; $a(x, \zeta) = \nabla_\zeta A(x, \zeta)$.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, daha sonraki bölümlerde gerekli olan bazı temel kavram, tanım ve teoremlerin yanı sıra değişken üslü Lebesgue ve Sobolev uzayları hakkında bilgi verilecektir.

2.1 Temel Tanımlar ve Özellikler

Tanım 2.1.1 (Vektör uzaylar)

$E \neq \emptyset$ bir küme ve $\mathbb{H} \neq \emptyset$ bir cisim olsun. Eğer, her $(m, n) \in E \times E$ ve $h \in \mathbb{H}$ için

$$+ : E \times E \rightarrow E$$

$$(m, n) \rightarrow m + n$$

ve

$$\cdot : \mathbb{H} \times E \rightarrow E$$

$$(h, m) \rightarrow h \cdot m$$

fonksiyonları aşağıda yazılan aksiyonları sağlasa E kümesine $\mathbb{H}$ üzerinde bir vektör uzayı denir.

Her $m, n, l \in E$ ve $h, k \in \mathbb{H}$ için

(i) $m + n = n + m$

(ii) $m + (n + l) = (m + n) + l$

(iii) Bir tek $0 \in \mathbb{H}$ vardır ki $m + 0 = m$

(iv) Bir tek $-m \in \mathbb{H}$ vardır ki $m + (-m) = 0$

(v) $1 \cdot m = m$

(vi) $h \cdot (k \cdot m) = (h \cdot k) \cdot m$

(vii) $h \cdot (m + n) = h \cdot m + h \cdot n$

(viii) $(h + k) \cdot m = h \cdot m + k \cdot m$

$\mathbb{H} = \mathbb{R}$ ($\mathbb{H} = \mathbb{C}$) durumda *reel (kompleks) vektör (lineer) uzayı* denir (Soykan, 2008).

Tanım 2.1.2 (Norm ve Normlu Uzaylar)

E , $\mathbb{H}$ üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu,

(i) $\|m\| \geq 0$

(ii) $\|m\| = 0 \Leftrightarrow m = 0$

$$(iii) \|h \cdot m\| = |h| \cdot \|m\|$$

$$(iv) \|m + n\| \leq \|m\| + \|n\| \text{ (üçgen eşitsizliği)}$$

özelliklerini sağlıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna *norm* denir ve E üzerinde tanımlanmış olan vektör uzayına *normlu vektör uzayı* denir ve $(E, \|\cdot\|)$ ile gösterilir (Soykan, 2008).

Tanım 2.1.3 (Denk normlar)

E bir vektör uzayı olsun ve E üzerinde $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ iki norm verilsin. Bu durumda, eğer her $x \in E$ için

$$a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1$$

olacak şekilde $a, b > 0$ pozitif sayıları varsa, o zaman $\|x\|_1$ ve $\|x\|_2$ normlarına *denk normlar* denir.

Teorem 2.1.4

E sonlu boyutlu bir vektör uzayı ise E üzerinde tanımlanan bütün normlar denktir.

Örnek 2.1.5

$E = \mathbb{R}^N$ ise o zaman $\mathbb{R}^N$ üzerinde tüm tanımlı normlar denktir. Aşağıdaki normlar gibi;

$$(i) \|x\|_p = (\sum_{k=1}^N |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} \quad ; 1 \leq p \leq \infty$$

$$(ii) \|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq N} |x_k|$$

ve burada aşağıdaki eşitsizlik sağlanır

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq \sqrt[p]{N} \|x\|_\infty.$$

Tanım 2.1.6 (Fonksiyoneller)

$E, \mathbb{H}$ üzerinde bir vektör uzayı olsun. Her $h: E \rightarrow \mathbb{H}$ ile tanımlanan fonksiyona *fonksiyonel* adı verilir.

Tanım 2.1.7 (Lineer fonksiyonel)

$E, \mathbb{H}$ üzerinde bir vektör uzayı ve $h: E \rightarrow \mathbb{H}$ bir fonksiyoneli olarak verilsin. Eğer, h fonksiyoneli; her $x, y \in E$ ve her $a, b \in \mathbb{H}$ için

$$h(ax + by) = a h(x) + b h(y)$$

sağlıyorsa h fonksiyoneline *lineer fonksiyonel* adı verilir.

Tanım 2.1.8 (Sınırlı fonksiyoneller)

$E, \mathbb{H}$ üzerinde bir vektör uzayı ve $h: E \rightarrow \mathbb{H}$ bir fonksiyonel olsun. Eğer her $x \in E$ ve $c > 0$ sabiti için $|h(x)| \leq c$ eşitsizliği sağlanırsa h fonksiyoneline *sınırlı fonksiyonel* denir.

Tanım 2.1.9

$(E, \|\cdot\|)$ normlu uzayındaki bir (v_n) dizisi, her $n \in \mathbb{N}$ için $\|v_n\| \leq c$ olacak şekilde bir c pozitif sabiti varsa (v_n) dizisine *sınırlı dizi* denir.

Tanım 2.1.10 (Güçlü yakınsak)

$(E, \|\cdot\|)$ normlu uzayındaki bir (v_n) dizisi, eğer bir $v_0 \in E$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v_0\| = 0$ eşitliği sağlanıyorsa (v_n) dizisine v_0 'a *yakınsıyor* veya *güçlü yakınsıyor* denir ve $v_n \rightarrow v_0$ şeklinde yazılır.

Teorem 2.1.11

$(E, \|\cdot\|)$ normlu uzayındaki bir (v_n) dizisi, eğer bir $v_0 \in E$ elemanına yakınsıyorsa,

- (i) v_0 limiti tektir,
 - (ii) (v_n) dizisi sınırlı bir dizidir,
 - (iii) (v_n) dizisinin her alt dizisi de v_0 elemanına yakınsıyor,
- (Balcı, 2010; Soykan, 2008).

Tanım 2.1.12 (Cauchy dizisi)

(v_n) , $(E, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi olarak verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve $k, l > n_\varepsilon$ için $\|v_k - v_l\| < \varepsilon$ olacak şekilde yalnız ε 'na bağlı bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı bulunursa (v_n) dizisine $(E, \|\cdot\|)$ uzayında *Cauchy dizisi* olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.13 (Banach uzayı)

$(E, \|\cdot\|)$ normlu uzayındaki, her Cauchy dizisi E uzayında bir elemana yakınsıyor ise bu normlu uzay *Banach uzayı* olarak adlandırılır. (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.1.14 (Dual uzayı)

$(E, \|\cdot\|)$, $\mathbb{H}$ üzerinde normlu bir vektör uzay olsun. E üzerinde tanımlı tüm sınırlı lineer fonksiyonların kümesine E 'nin *dual uzayı* denir ve E^* ile gösterilir. Burada; bir h elemanı, E 'nin dual uzayının elemanı ise,

$$\|h\|_{E^*} := \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{|h(x)|}{\|x\|_E}$$

şeklinde verilir ve bu uzay $(E^*, \|\cdot\|_{E^*})$ tanımlanan norm altında bir Banach uzay olur.

Tanım 2.1.15 (İkinci dual uzay)

E^* dual uzayının dualine *ikinci dual uzayı* denir ve E^{**} ile gösterilir yani $E^{**} = (E^*)^*$ olarak yazılabilir. Burada da $h \in E^{**}$ ise o zaman bu uzaydaki norm

$$\|h\|_{E^{**}} = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{|h(x)|}{\|x\|_E}$$

şeklinde verilir.

Tanım 2.1.16 (Yansılmalı Banach uzay)

$(E, \|\cdot\|)$, $\mathbb{H}$ üzerinde normlu bir vektör uzay olsun. Eğer $E^{**} = E$ eşitliği sağlanıyorsa E vektör uzayına *yansılmalı uzay* denir.

Tanım 2.1. 17 (Zayıf yakınsaklık)

$(E, \|\cdot\|)$, $\mathbb{H}$ üzerinde normlu bir vektör uzay ve $(v_n) \in E$ bir dizi olsun. Eğer her $h \in E^*$ ve bir $v_0 \in E$ için

$$h(v_n) \rightarrow h(v_0), n \rightarrow \infty$$

sağlanıyorsa, o zaman (v_n) dizisi v_0 noktasına *zayıf yakınsıyor* denir ve aşağıdaki ifadelerden biri ile gösterilir

$$v_n \rightharpoonup v_0, v_n \xrightarrow{z} v_0 \text{ veya } v_n \xrightarrow{w} v_0.$$

Teorem 2.1.18

Eğer $(E, \|\cdot\|)$, $\mathbb{H}$ üzerinde normlu bir vektör uzay ve bu uzayda $v_n \rightarrow v_0$ ise o zaman;

- (i) v_0 limiti tektir,
- (ii) $\|v_n\|_E$ reel dizisi sınırlıdır,
- (iii) Eğer (v_{n_k}) , (v_n) dizisinin bir alt dizisi ise, $v_{n_k} \rightarrow v_0$ olur,
- (iv) $v_n \rightarrow v_0$ ise $v_n \rightarrow v_0$ ama tersi doğru olmayabilir,
- (v) $(E, \|\cdot\|)$ vektör uzayı sonlu boyutlu ise $v_n \rightarrow v_0 \Leftrightarrow v_n \rightarrow v_0$ olur,

(Balcı, 2010).

Teorem 2.1.19

$(E, \|\cdot\|)$, $\mathbb{H}$ üzerinde yansılmalı ve Banach normlu bir vektör uzayı ve $(v_n) \in E$ olsun.

Bu durumda;

(v_n) sınırlı ise (v_n) dizisinin bir alt dizisi E uzayında zayıf yakınsak dizi bulunur.

Tanım 2.1.20 (Kümenin açık örtüsü ve sonlu alt örtüsü)

$(E, \|\cdot\|)$, $\mathbb{H}$ üzerinde normlu bir vektör uzay, $A \subset E$ ve $\mathcal{L} = \{M_i, i \in H\}$, E de açık kümeler ailesi olsun. Eğer

$$A \subset \bigcup_{i \in H} M_i$$

sağlarsa $\mathcal{L}$ ailesine A kümesinin *açık bir örtüsü* adı verilir. Eğer H 'ın sonlu bir alt kümesi H_0 için

$$A \subset \bigcup_{i \in H_0} M_i$$

sağlanırsa $\mathcal{L}_0 = \{M_i, i \in H_0\}$ ailesine A kümesinin *sonlu alt örtüsü* olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.21 (Kompaktlık)

$(E, \|\cdot\|)$, $\mathbb{H}$ üzerinde normlu bir vektör uzay ve $A \subset E$ olsun. Eğer A kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüye sahip ise A kümesine E uzayında *kompakt* bir küme denir. Eğer A kümesinin kapanışı $\bar{A}$, E uzayında kompakt bir küme ise A kümesine E uzayında bir ön-kompakt küme adlandırılır (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.1.22 (Dizisel kompaktlık)

$(E, \|\cdot\|)$, $\mathbb{H}$ üzerinde normlu bir vektör uzay ve $A \subset E$ olsun. Eğer her $(v_n) \in E$ dizisinin en az bir (v_{n_k}) alt dizisi için $\lim_{k \rightarrow \infty} (v_{n_k}) = v_0$ olacak şekilde bir $v_0 \in E$ elemanı bulunuyorsa A kümesine E uzayında *dizisel kompakt küme* denir.

Teorem 2.1.23 (Heine-Borel teoremi)

$A \subset \mathbb{R}$ bir küme olarak verilsin. A kompakt ancak ve ancak A sınırlı ve kapalıdır (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.1.24 (Operatörler)

E ve F , $\mathbb{H}$ cismi üzerinde iki vektör uzayları olarak tanımlansın. Her $B: E \rightarrow F$ ile tanımlanan fonksiyonuna *Operatör* adı verilir.

Tanım 2.1.25 (Sınırlı operatör)

$(E, \|\cdot\|_E)$ ve $(F, \|\cdot\|_F)$, $\mathbb{H}$ cismi üzerinde iki normlu uzaylar ve $B: E \rightarrow F$ bir operatör olsun. Eğer, her $u \in E$ için

$$\|Bu\|_F \leq c\|u\|_E$$

eşitsizliğini sağlayan en az bir $c > 0$ sabiti varsa, o zaman B operatörüne *sınırlı operatör* denir. Ayrıca, E 'den F 'ye tüm lineer ve sınırlı operatörlerin uzayı $L(E, F)$ ile gösterilir ve F uzayı Banach uzayı olduğunda $L(E, F)$ Banach uzayı olur.

Tanım 2.1.26 (Lineer operatörler)

E ve F , $\mathbb{H}$ cismi üzerinde iki vektör uzaylar ve $B: E \rightarrow F$ bir operatör olarak verilsin.

Eğer, B operatörü her $x, y \in E$ ve her $a, b \in \mathbb{H}$ için

$$B(ax + by) = a B(x) + b B(y)$$

eşitliği varsa B operatörüne *lineer operatör* adı verilir.

Tanım 2.1.27 (Kompakt operatör)

$(E, \|\cdot\|_E)$ ve $(F, \|\cdot\|_F)$, $\mathbb{H}$ cismi üzerinde iki normlu vektör uzaylar ve $B: E \rightarrow F$ bir operatör olsun. Eğer her $A \subset E$ sınırlı küme için $B(A)$ ön kompakt küme olursa B operatörüne *kompakt operatör* denir.

Burada, eğer B operatör ayına zaman da lineer ve kompakt ise, *tamamen sürekli* operatör denir.

Tanım 2.1.28 (Sürekli gömme ve kompakt gömme tanımı)

$(E, \|\cdot\|_E)$ ve $(F, \|\cdot\|_F)$, $\mathbb{H}$ cismi üzerinde iki normlu vektör uzaylar olsun. Eğer

(i) $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ 'nin bir alt uzayı,

(ii) Eğer $I: E \rightarrow F$ birim operatörü, her $v \in E$ için

$$\|Iv\|_F \leq \alpha \cdot \|v\|_E$$

eşitsizliğini sağlayacak bir $\alpha > 0$ sabiti varsa $(E, \|\cdot\|_E)$ uzayı, $(F, \|\cdot\|_F)$ 'uzayına *gömülür* adı verilir ve $E \hookrightarrow F$ ile gösterilmektedir.

Eğer $I: E \rightarrow F$ birim operatörü sürekli bir operatör ise $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ 'uzayına *sürekli gömülür* denir.

Eğer $I: E \rightarrow F$ birim operatörü kompakt bir operatör ise $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ 'uzayına *kompakt gömülür* denir ve $E \hookrightarrow\hookrightarrow F$ ile gösterilmektedir.

Tanım 2.1.29 (Sürekli fonksiyonlar uzayı)

Eğer $i = 1, 2, \dots, N$ için $\mu_i \geq 0$ ise $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$ N –bileşenlisine çoklu-indis denir ve

$$|\mu| = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_N = \sum_{i=1}^N \mu_i$$

sayısına μ uzunluğu denir.

Burada, μ çoklu- indis ve $v = (v_1, v_2, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N$ için $v^\mu = v_1^{\mu_1} v_2^{\mu_2} \dots v_N^{\mu_N}$ yazılır.

Ayrıca,

$$D = (D_1, D_2, \dots, D_N) = \left(\frac{\partial}{\partial v_1}, \frac{\partial}{\partial v_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial v_N} \right) \text{ için } D^\mu = D_1^{\mu_1} D_2^{\mu_2} \dots D_N^{\mu_N}$$

$|\mu|$. mertebeden kısmi (diferansiyel) operatör olarak tanımlanır.

Örneğin; $v = (v_1, v_2, v_3)$ ve $\mu = (1, 0, 1)$ için

$$D^{(1,0,1)}v = \frac{\partial^2 v}{\partial v_1 \partial v_3} = D_1 v_1 D_3 v_3$$

v fonksiyonun 2. mertebeden kısmi türevidir.

$A \subset \mathbb{R}^N$ bir bölge olmak üzere, E kümesi üzerinde tanımlı bütün sürekli fonksiyonlar kümesine *sürekli fonksiyonlar uzayı* denir ve $C(E)$ ile gösterilir.

Bu uzaydaki norm

$$\|v\|_{C(A)} = \sup_{x \in A} |v(x)|$$

şeklinde yazılır. Ayrıca, herhangi bir m negatif olmayan tam sayı için A bölgesinde, v sürekli ve v 'nin m . ($|\mu| \leq m$) mertebeye kadar tüm $D^\mu v$ kısmi türevleri sürekli olan v fonksiyonların kümesine *m . mertebeye kadar sürekli fonksiyonlar uzayı* denir ve $C^m(A)$ ile gösterilir ve bu uzaydaki norm

$$\|v\|_{C^m(A)} = \sum_{|\mu| \leq m} \sup_{x \in A} |D^\mu v(x)|$$

ile gösterilir. A kümesi üzerinde tanımlanan bütün mertebeden türevlenebilir ve sürekli fonksiyonlar kümesi ise $C^\infty(A)$ ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde yazılır

$$C^\infty(A) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(A)$$

(Adams ve Fournier, 2003).

Tanım 2.1.30 (Gateaux türevi)

E ve F , iki reel vektör uzaylar, $B: E \rightarrow F$ bir operatör, olsun. $0 \neq h \in E$, $v \in E$ ve $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere $v + th \in E$ koşulu sağlansın. Bu durumda,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{B(v + th) - B(v)}{t} := D_h B(v)$$

limiti varsa $D_h B(v)$ operatörüne B operatörünün v vektöründeki h doğrultusunda *Gateaux türevi* denir. B operatörü v de her h için Gateaux türevi varsa v vektöründe Gateaux türevlenebilir denir.

Tanım 2.1.31 (Fréchet türevi)

$(E, \|\cdot\|_E)$ ve $(F, \|\cdot\|_F)$ iki Banach uzaylar olsun. Eğer $B: E \rightarrow F$ ile tanımlanan operatör her $c \in E$ için

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{\|B(x + c) - B(x) - J_x(c)\|_F}{\|c\|_E} = 0$$

eşitliğini sağlayan $J_x \in L(E, F)$ varsa B operatörüne $x \in E$ noktasında *Fréchet türevlenebilir* söylenir ve J_x operatörüne B operatörünün $x \in E$ noktasında *Fréchet türevi* söylenir. Eğer bu türevi E 'nin her noktasında var ise B operatörüne *Fréchet türevlenebilir* denir.

2.2 Ölçüm Kavramı

Tanım 2.2.1

M bir küme ve $\mathcal{L}$, M 'nin bazı alt kümelerin kümesi olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanırsa;

- (i) $M \in \mathcal{L}$
- (ii) Eğer $E \in \mathcal{L}$ ise $E' := M \setminus E \in \mathcal{L}$
- (iii) $i = 1, 2, \dots$ için eğer $E_i \in \mathcal{L}$ ise

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{L}$$

$\mathcal{L}$ kümesine σ -cebir denir.

Yukarıdaki koşullardan da aşağıdaki sonuçlar elde edilir

- (i) $\emptyset \in \mathcal{L}$
 - (ii) $i = 1, 2, \dots$ için eğer $E_i \in \mathcal{L}$ ise
- $$\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{L}$$
- (iii) Eğer $E, F \in \mathcal{L}$ ise $E \setminus F \in \mathcal{L}$ olur.

Tanım 2.2.2

M bir küme ve $\mathcal{L}$, M 'nin bazı alt kümeleri σ -cebiri olsun. Negatif değerli olmayan $\mu: \mathcal{L} \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlarsa;

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$
- (ii) $i = 1, 2, \dots$ için $E_i \in \mathcal{L}$ ikişer ayrık kümeler ise

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

μ fonksiyonuna *ölçüm* denir.

Tanım 2.2.3 (Lebesgue ölçümü)

$\mathcal{L}$, $\mathbb{R}^N$ uzayının bazı alt kümeleri σ -cebiri ve μ , $\mathcal{L}$ üzeri bir ölçüm olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanırsa bu $\mathcal{L}$ kümesinin elemanlarına $\mathbb{R}^N$ 'nin Lebesgue ölçülebilir alt kümeleri; μ fonksiyonuna $\mathbb{R}^N$ de *Lebesgue ölçüm* denir ve her $E \in \mathcal{L}$ ölçümü $\mu(E)$ veya $|E|$ ile gösterilir.

(i) $\mathbb{R}^N$ 'de her açık küme, $\mathcal{L}$ de bir elmandır,

(ii) Eğer $E \subset F$, $F \in \mathcal{L}$ ve $\mu(F) = 0$ ise o zaman $E \in \mathcal{L}$ ve $\mu(E) = 0$,

(iii) Eğer $E = \{x \in \mathbb{R}^N : a_i \leq x_i \leq b_i; i = 1, 2, \dots, N\}$ o zaman $E \in \mathcal{L}$ ve

$$\mu(E) = \prod_{i=1}^N (b_i - a_i),$$

(iv) Eğer $x \in \mathbb{R}^N$ ve $E \in \mathcal{L}$ ise $x + E := \{x + u; u \in E\}$ ve $\mu(x + E) = \mu(E)$. Yani μ ötelemeye göre değişmeyen bir fonksiyondur,

Tanım 2.2.4

$E \subset F \subset \mathbb{R}^N$ ve $|E| = 0$ olsun. Eğer $F \setminus E$ kümenin üzerinde bir koşul veya bir özellik sağlanırsa o zaman bu koşul veya özellik, F kümesinde *hemen hemen her yerde (h.h.h)* sağlanır denir.

Tanım 2.2.5 (Ölçülebilir fonksiyon)

E bir küme ve $h: E \rightarrow [-\infty, +\infty]$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $c \in \mathbb{R}$ için $\{x \in E : h(x) < c\}$ ölçülebilir bir küme ise, h fonksiyonuna ölçülebilir fonksiyon söylenir.

Teorem 2.2.6

h , g ve h_n ($n = 1, 2, \dots$) ölçülebilir fonksiyonlar, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve ψ , $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman aşağıdaki fonksiyonlar ölçülebilir fonksiyonlardır;

(i) $\alpha \cdot h$, $h + g$, $|h|$, hg ve h/g ,

(ii) $\max(h, g)$, $\min(h, g)$,

(iii) $\sup h_n$, $\inf h_n$, $\limsup h_n$ ve $\liminf h_n$,

(iv) $\psi \circ h$,

(Adams ve Fournier, 2003).

2.3 Lebesgue Uzayı

Tanım 2.3.1 (Lebesgue uzayı)

E , $\mathbb{R}^N$ de bir bölge ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere E üzerinde bütün ölçülebilir h fonksiyonları

$$\int_E |h(x)|^p dx < \infty$$

özellğine sahip ise bu fonksiyonların oluşturduğu kümeye *Lebesgue uzayı* adı verilir ve bu fonksiyonların yer aldığı uzay $L^p(E)$ ile gösterilir. Yani;

$$L^p(E) = \{h: h: E \rightarrow \mathbb{R} \text{ ölçülebilir fonksiyon ve } \int_E |h(x)|^p dx < \infty\}$$

şeklinde de yazılabilir. Bu uzaydaki norm:

$$\|h\|_{L^p(E)} = |h|_p = \left(\int_E |h(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.1)$$

ile tanımlanır.

Teorem 2.3.2

E , $\mathbb{R}^N$ de bir bölge ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $L^p(E)$ uzayı (2.1) norm ile bir vektör uzayıdır.

Teorem 2.3.3

$L^p(E)$ uzayı lineer bir vektör uzayıdır (Adams ve Fournier, 2003).

İspat:

(i) $h \in L^p(E)$ ise $\alpha h \in L^p(E)$ olur. Yani;

$$\int_E |\alpha h(x)|^p dx = |\alpha|^p \int_E |h(x)|^p dx < \infty$$

(ii) $h, g \in L^p(E)$ ise $(h + g) \in L^p(E)$ olur. Yani

$$\int_E |h(x) + g(x)|^p dx \leq \int_E (|h| + |g|)^p dx \leq \int_E [2 \cdot \max\{|h|, |g|\}]^p dx$$

$$\leq 2^p \int_E (|h|^p + |g|^p) dx = 2^p \left(\int_E |h|^p dx + \int_E |g|^p dx \right) < \infty$$

olduğundan $L^p(E)$ lineer uzaydır.

Örnek 2.3.4

$E = (0,4)$ ve $h(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ olsun.

(i) $h \in L(0,4)$ olduğunu gösteriniz.

(ii) $h \notin L(0,4)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

(i)

$$\int_E |h(x)| dx = \int_0^4 \left| \frac{1}{2\sqrt{x}} \right| dx = \sqrt{x} \Big|_0^4 = 2 < \infty$$

olduğundan $h(x) \in L(0,4)$.

(ii)

$$\int_E |h(x)|^2 dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^4 \left| \frac{1}{4x} \right| dx = \frac{1}{4} \lim_{a \rightarrow 0^+} (\ln x \Big|_a^4) = \frac{1}{4} \lim_{a \rightarrow 0^+} \ln \frac{4}{a} \longrightarrow \infty$$

olduğundan $h(x) \notin L^2(0,4)$.

Teorem 2.3.5

$E, \mathbb{R}^N$ de bir bölge ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $L^p(E)$ uzayı (2.1) norm altında bir Banach uzayıdır (Adams ve Fournier, 2003).

Tanım 2.3.6 ($L^\infty(E)$ uzayı)

E bölgesinde ölçülebilir bir h fonksiyonu için (h.h.h) $|h(x)| \leq c$ olacak şekilde bir $c \geq 0$ sabiti bulunabiliyorsa h fonksiyonu (h.h.h) sınırlıdır denir. Böyle c ların en büyük alt sınırına $|h|$ nin E bölgesindeki esas (essential) supremumu denir ve norm

$$\text{ess sup}_{x \in E} |h(x)|$$

ile gösterilir. E bölgesinde (h.h.h) sınırlı h fonksiyonları ile tanımlanan uzaya $L^\infty(E)$ uzayı denir. Yani

$L^\infty(E) = \{h: E \rightarrow \mathbb{R}: h \text{ ölçülebilir ve h. h. h. } |h| \leq c \text{ olacak şekilde bir } c \text{ sabiti vardır}\}$

Bu uzayındaki norm, aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\|h\|_{L^\infty(E)} := |h|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in E} |h(x)| = \inf \{c: |h| \leq c\} \quad (2.2)$$

Örnek 2.3.7

(i) $h(x) = \cos x$ fonksiyonu $L^\infty(\mathbb{R})$ uzayının elemanı mıdır?

(ii) $g(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu $L^\infty(0,1)$ uzayının elemanı mıdır?

Çözüm:

(i) $|h(x)| = |\cos x| \leq 1$ olduğundan $h \in L^\infty(\mathbb{R})$ olur. Ayrıca, $\|\cos x\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 1$

(ii) $g(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu $(0,1)$ aralığı üzerinde sınırlı olmadığından $g \notin L^\infty(0,1)$ olur.

Teorem 2.3.8

Eğer $1 \leq p \leq \infty$ ise $L^\infty(E)$ uzayı, (2.2) norm altında bir Banach uzayıdır (Brezis, 2011).

Teorem 2.3.9

$L^\infty(E)$ uzayında, h ve g iki fonksiyon ise o zaman $h + g \in L^\infty(E)$ ve

$$\|h + g\|_{L^\infty(E)} \leq \|h\|_{L^\infty(E)} + \|g\|_{L^\infty(E)}$$

olur (Pişkin, 2017).

Teorem 2.3.10

$1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

(i) $L^p(E)$ uzayı ayrılabilir, yansılalı uzayıdır ve bu uzayın duali $(L^p(E))^* = L^q(E)$,

(ii) $L^1(E)$ uzayı ayrılabilir değil, yansılalı uzayıdır ve bu uzayın duali

$$(L^1(E))^* = L^\infty(E),$$

(iii) $L^\infty(E)$ uzayı ayrılabilir değil, yansılalı değil ve $(L^\infty(E))^* \subset L^1(E)$

(Brezis, 2011).

Teorem 2.3.11 ($L^p(E)$ uzayında gömülme teorem)

$1 \leq p \leq q \leq \infty$, $E \subset \mathbb{R}^N$ ve $vol(E) = \int_E 1 dx < \infty$ olsun. O zaman $L^q(E) \subset L^p(E)$ ve

$$|h|_p \leq (vol(E))^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} |h|_q$$

olduğundan $L^q(E) \hookrightarrow L^p(E)$ sürekli gömülme vardır.

Tanım 2.3.12 ($L^p_{loc}(E)$ uzayı)

$E, \mathbb{R}^N$ de bir bölge ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$L^p_{loc}(E) = \{h: h \in L^p(E_1) \text{ ve } \forall E_1 \subset E \text{ kompakt kümedir}\}$$

kümesine p . kuvveti lokal integrallenebilir fonksiyonlar kümesi adı verilir (Robert, 2003; Pişkin ve Okutmuş, 2017; Yücedağ, 2010).

Örnek 2.3.13

$E = (0, \frac{\pi}{2})$, $h(x) = \tan x$ fonksiyonu verilsin. $h \notin L^1(0, \frac{\pi}{2})$ fakat $h \in L^1_{loc}(0, \frac{\pi}{2})$ olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$$\int_E |h(x)| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\tan x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \infty$$

olduğundan $h \notin L^1(0, \frac{\pi}{2})$. Şimdi $(0, \frac{\pi}{2})$ bölgesinde $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$ olacak şekilde (a, b) bir alt aralığını alalım. O zaman

$$\int_a^b |h(x)| dx = \int_a^b |\tan x| dx = -\ln|\cos x| \Big|_a^b = -\ln|\cos b| + \ln|\cos a| = \ln \left| \frac{\cos a}{\cos b} \right| < \infty$$

olur. Yani $h \in L^1_{loc}(0, \frac{\pi}{2})$.

Tanım 2.3.14

$E \subset \mathbb{R}^N$ ve $h: E \rightarrow \mathbb{R}$ ölçülebilir sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda h fonksiyonun destek kümesi

$$supp(h) = \overline{\{x \in E; h(x) \neq 0\}}$$

ile tanımlanır.

$m \geq 0$ için tüm E de kompakt (kapalı ve sınırlı) destek kümesi var olan $h \in C^m(E)$ fonksiyonlar sınıfına $C_0^m(E)$ ile gösteririz.

Eğer $m = \infty$ ise $C_0^\infty(E)$ elemanlarına *test fonksiyonları* denir (Kinnunen, 2022).

Örnek 2.3.15

$h: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^{|x|^2-2}} & ; x \in B(0, \sqrt{2}) \\ 0 & ; x \in \mathbb{R}^N \setminus B(0, \sqrt{2}) \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa. Bu durumda $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ ve

$$\text{supp}(h) = \overline{B(0, \sqrt{2})}.$$

2.4 Sobolev Uzayı

Tanım 2.4.1 (Zayıf türev)

$E \subset \mathbb{R}^N$ ve $h \in L_{loc}^1(E)$ ve $\mu \in \mathbb{N}^N$ çoklu indis olmak üzere her bir test fonksiyon $\psi \in C_0^\infty(E)$ için

$$\int_E \psi g \, dx = (-1)^{|\mu|} \int_E h D^\mu \psi \, dx$$

eşitliğini sağlanıyorsa, $g \in L_{loc}^1(E)$ fonksiyonuna h fonksiyonunun μ . mertebeden zayıf (genelleştirilmiş) türevi denir ve $g = D^\mu h$ şeklinde yazılır. Burada

$$D^0 h = D^{(0,0,\dots,0)} h = h$$

Eğer $|\mu| = 1$ ise bu durumda Dh , h fonksiyonun zayıf gradientidir. Yani

$$Dh = (D_1 h, D_2 h, \dots, D_N h) \text{ ve } i = 1, \dots, N \text{ için}$$

$$D_i h = \frac{\partial h}{\partial x_i} = D^{(0,\dots,1,\dots,0)}.$$

Teorem 2.4.2

Eğer $h \in L_{loc}^1(E)$ fonksiyonunun μ . mertebeden zayıf türevi varsa, bu zayıf türevi h.h.h. E üzerinde tek şekilde tanımlıdır (Kinnunen, 2022).

Örnek 2.4.3

$E = (-1,1)$ olmak üzere ve

$$h(x) = \begin{cases} 1+x; & -1 < x \leq 0, \\ 1-x; & 0 < x < 1 \end{cases}$$

fonksiyonun zayıf türevini bulalım.

Çözüm:

$\psi \in C_0^\infty(-1,1)$ ve $Dh(x) = g(x)$ olsun

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 h D\psi \, dx &= \int_{-1}^0 h D\psi \, dx + \int_0^1 h D\psi \, dx \\ &= \int_{-1}^0 (1+x) D\psi \, dx + \int_0^1 (1-x) D\psi \, dx \end{aligned} \quad (2.3)$$

dir. Burada, (2.3) eşitliğine kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 h D\psi \, dx &= (1+x)\psi \Big|_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \psi \, dx + (1-x)\psi \Big|_0^1 - \int_0^1 -\psi \, dx \\ &= \psi(0) + 2\psi(-1) - \int_{-1}^0 \psi \, dx - \psi(0) - \int_0^1 -\psi \, dx \\ &= - \int_{-1}^0 \psi \, dx - \int_0^1 -\psi \, dx \\ &= - \int_{-1}^1 g\psi \, dx \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan da

$$g(x) = \begin{cases} 1; & -1 < x \leq 0, \\ -1; & 0 < x < 1 \end{cases}$$

h fonksiyonun zayıf türevidir.

Teorem 2.4.4

(i) Eğer bir fonksiyonunun μ . mertebeden klasik kısmi türevi varsa, o zaman μ . mertebeden zayıf türevi vardır. Fakat ters durumu doğru olmayabilir.

(ii) Klasik türevi noktasaldır, ama zayıf türevi bir bölge üzerinde tanıtlır.

(iii) Zayıf türev lineerdir. Yani, eğer $h_1, h_2 \in L_{loc}^1(E)$ ve $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ise

$$D^\alpha(c_1 h_1 + c_2 h_2) = c_1 D^\alpha(h_1) + c_2 D^\alpha(h_2)$$

(iv) Eğer h.h.h. $h = 0$ bir açık bölge üzerinde ise, o zaman h.h.h. $D^\alpha h = 0$ bu bölge üzerindedir.

Tanım 2.4.5 (Sobolev uzayı)

$\mathbb{R}^N$, de E açık bir alt küme, $m \geq 0$ herhangi bir tamsayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere h fonksiyonun kendisi ve h fonksiyonun m . mertebeye kadar bütün zayıf türevleri $L^p(E)$ uzayında olan fonksiyonların oluşturduğu uzaya *Sobolev uzayı* adı verilir ve bu uzay $W^{m,p}(E)$ ile gösterilir. Yani;

$$W^{m,p}(E) = \{h \in L^p(E) : D^\mu h \in L^p(E), |\mu| \leq m\}.$$

Bu uzayda tanımlanan normlar ise;

$1 \leq p < \infty$ ise

$$\|h\|_{W^{m,p}(E)} = \|h\|_{m,p} = \left(\sum_{|\mu| \leq m} \|D^\mu h\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ve $p = \infty$ ise

$$\|h\|_{W^{m,\infty}(E)} = \|h\|_{m,\infty} = \max_{|\mu| \leq m} \|D^\mu h\|_\infty$$

(Kinnunen, 2022).

Örnek 2.4.6

$E = (-1,1) \times (0,2)$ ve $h = h(x_1, x_2)$ olsun. $h \in W^{1,2}(E)$ olması için $h \in L^2(E)$, $\frac{\partial h}{\partial x_1} \in L^2(E)$ ve $\frac{\partial h}{\partial x_2} \in L^2(E)$ olmalıdır. Burada $L^2(E)$ normu ise

$$\begin{aligned} \|h\|_{W^{1,2}(E)} &= \left(\sum_{|\mu| \leq 1} \|D^\mu h\|_{L^2(E)}^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_0^2 \int_{-1}^1 |h|^2 dx_1 dx_2 + \int_0^2 \int_{-1}^1 \left| \frac{\partial h}{\partial x_1} \right|^2 dx_1 dx_2 + \int_0^2 \int_{-1}^1 \left| \frac{\partial h}{\partial x_2} \right|^2 dx_1 dx_2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Teorem 2.4.7

(i) Sobolev uzayı ($W^{m,p}$) Banach uzayıdır.

(ii) Eğer $1 < p < \infty$ ise $W^{m,p}(E)$ uzayı, ayrılabilir ve yansımalıdır.

(Adams ve Fournier, 2003).

Tanım 2.4.8

$W_0^{m,p}(E)$ uzayı, elemanları $W^{m,p}(E)$ uzayında olan ve bu elemanların hem kendileri hemde $(m-1)$. mertebeye kadar bütün türevleri E nin sınırında (∂E) sıfır olan fonksiyonların kümesidir.

O halde;

$$W_0^{m,p}(E) = \{h \in W^{m,p}(E) : h|_{\partial E} = h'|_{\partial E} = \dots = h^{(m-1)}|_{\partial E} = 0\}$$

olur. Bu durum; $W_0^{m,p}(E)$ uzayı, $W^{m,p}(E)$ uzayının bir alt uzayıdır. Yani

$$W_0^{m,p}(E) \subset W^{m,p}(E) \text{ olur.}$$

Sonuç 2.4.9

$W^{m,p}(E)$ uzayın da $C_0^\infty(E)$ uzayının kapanışı $W_0^{m,p}(E)$ olur. Yani; $h \in W_0^{m,p}(E)$ olması için gerek ve yeter koşul $\lim_{k \rightarrow \infty} h_k(x) = h(x)$ olacak şekilde bir $(h_k) \subset C_0^\infty(E)$ fonksiyon dizisinin varlığıdır. Yukarıdaki uzaylarda her $m \geq 0$ tam sayısı için

$$W_0^{m,p}(E) \hookrightarrow W^{m,p}(E) \hookrightarrow L^p(E)$$

sağlanır (Adams, 1975; Fan ve Zhang, 2003).

Örnek 2.4.10

$E = [0, \pi] \times [0, \pi]$ ve $h(x) = h(x, y) = \sin(x + y)$ olsun. Bu durumda, h fonksiyonu $W^{1,3}(h)$ uzayının elemanı olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$h \in W^{1,3}(E)$ olması için h ve birinci mertebeden kısmi türevlerinin $L^3(E)$ elemanı olması gerekir. Yani $h \in L^3(E)$, $\frac{\partial h}{\partial x} \in L^3(E)$ ve $\frac{\partial h}{\partial y} \in L^3(E)$ olmalıdır. O halde,

$$\int_E |h|^3 dx = \int_0^\pi \int_0^\pi |\sin(x + y)|^3 dx dy \leq \int_0^\pi \int_0^\pi |1|^3 dx dy = \pi^2 < \infty$$

$$\int_E \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right|^3 dx = \int_0^\pi \int_0^\pi |\cos(x + y)|^3 dx dy \leq \int_0^\pi \int_0^\pi |1|^3 dx dy = \pi^2 < \infty$$

ve

$$\int_E \left| \frac{\partial h}{\partial y} \right|^3 dx = \int_0^\pi \int_0^\pi |\sin(x+y)|^3 dx dy \leq \int_0^\pi \int_0^\pi |1|^3 dx dy = \pi^2 < \infty$$

olur. Böylece,

$h \in L^3(E)$, $\frac{\partial h}{\partial x} \in L^3(E)$ ve $\frac{\partial h}{\partial y} \in L^3(E)$ olduğundan $h \in W^{1,3}(E)$ dır.

Örnek 2.4.11

$h(x) = x^2$ fonksiyonu $W^{2,2}(0,2)$ uzayının elemanı olduğunu ve $\|h\|_{W^{2,2}(0,2)}$ bulunuz.

Çözüm:

$h \in W^{2,2}(0,2)$ olması için h fonksiyonun, birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri $L^2(0,2)$ elemanı olması gerekir. Yani

$h \in L^2(0,2)$, $\frac{\partial h}{\partial x} \in L^2(0,2)$ ve $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \in L^2(0,2)$ olmalıdır.

$$\int_E |h|^2 dx = \int_0^2 |x^2|^2 dx = \int_0^2 x^4 dx = \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 = \frac{32}{5} < \infty$$

$$\int_E \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right|^2 dx = \int_0^2 |2x|^2 dx = \int_0^2 4x^2 dx = \frac{4x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{32}{3} < \infty$$

ve

$$\int_E \left| \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right|^2 dx = \int_0^2 |2|^2 dx = \int_0^2 4 dx = 4x \Big|_0^2 = 8 < \infty$$

dur. Bu durumda;

$h \in L^2(0,2)$, $\frac{\partial h}{\partial x} \in L^2(0,2)$ ve $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \in L^2(0,2)$ olduğundan $h \in W^{2,2}(0,2)$ olur. O halde

$$\begin{aligned} \|h\|_{W^{2,2}(0,2)} &= \left(\|h\|_{L^2(0,2)}^2 + \left\| \frac{\partial h}{\partial x} \right\|_{L^2(0,2)}^2 + \left\| \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right\|_{L^2(0,2)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{32}{5} + \frac{32}{3} + 8} = 2\sqrt{\frac{94}{15}} \end{aligned}$$

Teorem 2.4.12 (Sobolev Gömme Teoremi)

$E \subset \mathbb{R}^N$ koni özelliğine sahip açık bir bölge, $m \geq 1$ ve $j \geq 0$ şeklinde tamsayılar ve $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda aşağıdaki gömmeler yazılabilir.

Eğer;

(i) $mp < N$ ise

$$W^{j+m,p}(E) \hookrightarrow W^{j,q}(E), \quad p \leq q \leq q^* := \frac{Np}{N - mp}$$

özel olarak $j = 0$ için

$$W^{m,p}(E) \hookrightarrow L^q(E), \quad p \leq q \leq q^* = \frac{Np}{N - mp}$$

elde edilir,

(ii) $mp = N$ ise

$$W^{j+m,p}(E) \hookrightarrow W^{j,q}(E), \quad p \leq q < \infty$$

yada

$$W^{m,p}(E) \hookrightarrow L^q(E), \quad p \leq q < \infty$$

olur. Burada $p = 1$ alınırsa

$$W^{j+m,1}(E) \hookrightarrow C_B^j(E)$$

elde edilir,

(iii) $mp > N$ ise

$$W^{j+m,p}(E) \hookrightarrow C_B^j(E)$$

elde edilir (Adams, 1975).

2.5 Ağırlıklı Lebesgue ve Sobolev Uzayları**Tanım 2.5.1**

Eğer her $x \in \mathbb{R}^N$ için $a(x) > 0$ fonksiyonu h.h.h. $\mathbb{R}^N$ de lokal integrallenebilir bir fonksiyon ise $a(x)$ fonksiyonuna *ağırlık fonksiyon* adlandırılır.

Tanım 2.5.2

$E \subset \mathbb{R}^N$ açık bir bölge ve $a(x)$ ağırlık fonksiyon olsun. Aşağıdaki koşulu sağlayan ölçülebilir fonksiyonlar kümesine,

$$\int_E a|h|^p dx < \infty$$

Ağırlıklı Lebesgue uzayı adı alır ve $L_a^p(E)$ şekilde yazılır. Ağırlıklı Lebesgue uzayındaki norm ise;

$$\|h\|_{L_a^p(E)} = |h|_{p,a} = \left(\int_E a|h|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

olarak yazılır. Ağırlıklı Lebesgue uzayı yukarıdaki norm altında bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.5.3

$E \subset \mathbb{R}^N$ açık bir bölge ve $a(x)$ bir ağırlık fonksiyon olsun. $m \geq 0$ bir tam sayı ve $p \in [1, \infty)$ için hem fonksiyonun kendisi hem de bu fonksiyonun m . mertebeye kadar bütün zayıf türevleri ağırlıklı Lebesgue uzayının elemanı olan fonksiyonların oluşturduğu uzaya *Ağırlıklı Sobolev uzayı* denir ve bu uzay $W_a^p(E)$ sembol ile gösterilir. Yani

$$W_a^p(E) = \{h \in L_a^p(E) : D^\mu h \in L_a^p(E), |\mu| \leq m\}$$

şeklinde yazılır. Bu uzayı aşağıdaki norm ile ayrılabilir bir Banach uzayıdır,

$$\|h\|_{W_a^p(E)} = \left(\sum_{|\mu| \leq m} |D^\mu h|_{p,a}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

(Drabek vd., 1996).

2.6 Eşitsizlikler

Teorem 2.6.1 (Young eşitsizliği)

n, m iki negatif olmayan reel sayılar ve $p > 1$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. O zaman

$$nm \leq \frac{n^p}{p} + \frac{m^q}{q}$$

olur.

Teorem 2.6.2 (Hölder eşitsizliği)

$1 \leq p \leq \infty$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olarak tanımlayalım. Eğer, $h \in L^p(E)$ ve $g \in L^q(E)$ ise

$h \cdot g \in L(E)$ ve

$$\|hg\|_{L(E)} \leq \|h\|_{L^p(E)} \|g\|_{L^q(E)}.$$

Sonuç 2.6.3

Yukarıdaki teorem de, eğer $p, q, r > 0$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ ise $h \cdot g \in L^r(E)$ ve

$$\|hg\|_{L^r(E)} \leq \|h\|_{L^p(E)} \|g\|_{L^q(E)}$$

olur.

Teorem 2.6.4 (Minkowski eşitsizliği)

$1 \leq p < \infty$ olsun. Eğer $h, g \in L^p(E)$ ise

$$\|h + g\|_{L^p(E)} \leq \|h\|_{L^p(E)} + \|g\|_{L^p(E)}$$

olur.

2.7 Değişken Üslü Lebesgue Uzay $(L^{p(\cdot)}(E))$ **Tanım 2.7.1**

$E, \mathbb{R}^N$ de pozitif ölçümlü bir bölge olsun. Aşağıdaki gibi tanımlanan ölçülebilir fonksiyonlara;

$$p: E \rightarrow [1, \infty]$$

değişken üst denir. Değişken üst fonksiyonların kümesini $\mathcal{P}(E)$ ile gösterelim. Burada

$$1 \leq p^- := \operatorname{ess\,inf}_{x \in E} p(x) \leq p^+ := \operatorname{ess\,sup}_{x \in E} p(x) \leq \infty$$

ve E bölgesini

$$E_\infty := \{x \in E, p(x) = \infty\}$$

$$E_1 := \{x \in E, p(x) = 1\}$$

$$E_* := \{x \in E, 1 < p(x) < \infty\}$$

olarak yazalım.

Tanım 2.7.2

$p(\cdot) \in \mathcal{P}(E)$ olsun. Eğer her $x \in E$ için aşağıdaki eşitlik;

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$$

sağlanırsa $p'(\cdot)$ fonksiyonuna $p(\cdot)$ fonksiyonun eşleniği denir.

Burada

$$(p'(\cdot))^+ = (p^-)' \text{ ve } (p'(\cdot))^- = (p^+)'$$

$p(x) \in C_+(E)$ fonksiyonun eşleniğini ise $q(x)$ ile gösterilir ve $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1$ olur.

Tanım 2.7.3 (Değişken üslü Lebesgue uzay $L^{p(\cdot)}(E)$)

$E, \mathbb{R}^N$ de pozitif ölçümlü bir bölge, $p^+ < \infty$ ve $h(\cdot): E \rightarrow \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$\rho_{p(\cdot)}(h) = \int_E |h(x)|^{p(x)} dx < \infty$$

koşulunu sağlayan $h(\cdot)$ fonksiyonların kümesine değişken üslü Lebesgue uzayı adlandırılır ve bu uzayı $L^{p(x)}(E)$ veya $L^{p(\cdot)}(E)$ sembollerinden biri ile gösterilir.

Ya da

$$\begin{aligned} \rho_{p(\cdot)}(h) &= \int_{E \setminus E_\infty} |h(x)|^{p(x)} dx + \operatorname{esssup}_{x \in E_\infty} |h(x)| \\ &= \int_{E \setminus E_\infty} |h(x)|^{p(x)} dx + \|h(x)\|_{L^\infty(E_\infty)} < \infty \end{aligned}$$

olarak da tanımlayabiliriz.

Eğer $p^+ < \infty$ ise $L^{p(\cdot)}(E)$ uzayındaki norm aşağıdaki gibi tanımlanır

$$\begin{aligned} \|h(x)\|_{L^{p(x)}(E)} &= |h(x)|_{p(\cdot)} = \inf \left\{ \alpha > 0: \rho_{p(\cdot)} \left(\frac{h}{\alpha} \right) \leq 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \alpha > 0: \int_E \left| \frac{h(x)}{\alpha} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

ve bu norm ile $(L^{p(\cdot)}(E), |\cdot|_{p(\cdot)})$ uzayı, yansımali Banach normlu uzayı olur.

Yukarıdaki $|\cdot|_{p(\cdot)}$ normu *Luxemburg normu* olarak adlandırılır ve $\rho_{p(\cdot)}(h)$ ise *modular fonksiyonel* adı alır ve bazen $\rho(h)$ ile gösterilir.

$C_+(E)$ uzayı ise

$$C_+(E) := \{p: p \in C(E), \text{ess inf}_{x \in E} p(x) \geq 1\}$$

olarak tanımlanır ve çalışmamız da aksi belirtmedikçe, $p(x) \in C_+(E)$ için

$1 \leq p^- \leq p^+ < \infty$ olarak alınır ve

$$p^* = \begin{cases} \frac{Np(x)}{N - p(x)}, & p(x) < N \\ \infty, & p(x) \geq N \end{cases}$$

sobolev kritiğidir.

Benzer şekilde, $p(\cdot) \in C_+(\partial E)$ için

$$L^{p(\cdot)}(\partial E) = \left\{ h: h: \partial E \rightarrow \mathbb{R} \text{ ölçülebilir fonksiyonlar}, \int_{\partial E} |h(x)|^{p(x)} d\partial < \infty \right\}$$

olarak tanımlanır ve $d\partial$, E sınırında tanımlanan bir ölçümdür ve bu uzaydaki norm

$$\|h(x)\|_{L^{p(\cdot)}(\partial E)} = \inf \left\{ \gamma > 0: \int_{\partial E} \left| \frac{h(x)}{\gamma} \right|^{p(x)} d\partial \leq 1 \right\}$$

ile gösterilir.

Örnek 2.7.4

$E = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $h(x) = (\sqrt{\sin x})^x$ ve $p(x) = \frac{2}{x}$ olarak alalım. Bu durumda,

$h(x) \in L^{p(\cdot)}(E)$ olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \rho_{p(\cdot)}(h) &= \int_E |h(x)|^{p(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left| (\sqrt{\sin x})^x \right|^{\frac{2}{x}} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \cos 0 - \cos \frac{\pi}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} < \infty \end{aligned}$$

dolayısıyla $h(x) \in L^{p(\cdot)}(E)$ olur.

Teorem 2.7.5

$h(x), g(x) \in L^{p(\cdot)}(E)$ ve h.h.h. $|h(x)| \leq |g(x)|$ olsun. O zaman

$$\|h(x)\|_{L^{p(\cdot)}(E)} \leq \|g(x)\|_{L^{p(\cdot)}(E)}$$

olur (Kováčik ve Rákosník, 1991).

Teorem 2.7.6

$n = 1, 2, \dots$ için $h, h_n \in L^{p(\cdot)}(E)$ ve $1 \leq p(x) < \infty$ olsun. O zaman

(i) $|h|_{p(\cdot)} < 1 (= 1, > 1)$ ancak ve ancak $\rho_{p(\cdot)}(h) < 1 (= 1, > 1)$

(ii) $|h|_{p(\cdot)} > 1$ ise $|h|_{p(\cdot)}^{p^-} \leq \rho_{p(\cdot)}(h) \leq |h|_{p(\cdot)}^{p^+}$

(iii) $|h|_{p(\cdot)} < 1$ ise $|h|_{p(\cdot)}^{p^+} \leq \rho_{p(\cdot)}(h) \leq |h|_{p(\cdot)}^{p^-}$

(iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} |h|_{p(\cdot)} = 0$ ancak ve ancak $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{p(\cdot)}(h_n) = 0$

(v) $\lim_{n \rightarrow \infty} |h_n|_{p(\cdot)} \rightarrow \infty$ ancak ve ancak $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{p(\cdot)}(h_n) \rightarrow \infty$

olur (Fan ve Zhao, 2001; Fan ve Zhang, 2003).

Teorem 2.7.7

$n = 1, 2, \dots$ için $h, h_n \in L^{p(\cdot)}(E)$ ise, aşağıdaki ifadeler birbirine denktir;

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|h_n - h\|_{\rho(x)} = 0,$

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(h_n - h) = 0,$

(iii) $h_n \rightarrow h, E$ bölgesinde ölçülebilir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(h_n) = \rho(h)$

(Fan ve Zhao, 2001; Yücedağ, 2015).

2.8. Değişken Üslü Sobolev Uzayı $W^{m,p(\cdot)}$

Tanım 2.8.1

$E, \mathbb{R}^N$ de bir bölge, $m \geq 0$ bir tam sayı ve $\mu, \mathbb{R}^N$ de çoklu indisi olmak üzere hem fonksiyonun kendisi ve hem de fonksiyonun m . mertebeye kadar bütün zayıf türevleri $L^{p(\cdot)}(E)$ uzayında olan fonksiyonların oluşturduğu uzaya *Değişken üslü Sobolev uzayı* adı verilir ve $W^{m,p(\cdot)}(E)$ ile gösterilir. Ya da;

$$W^{m,p(\cdot)}(E) = \{h \in L^{p(\cdot)}(E) : D^\mu h \in L^{p(\cdot)}(E), |\mu| \leq m\}$$

yazılabilir. Bu uzayda ki norm

$$\|h\|_{W^{m,p(\cdot)}(E)} = \|h\|_{m,p(\cdot)} = \sum_{|\mu| \leq m} \|D^\mu h\|_{p(\cdot)}$$

olur. Eğer, $m = 1$ alınırsa

$$W^{1,p(\cdot)} = \{h \in L^{p(\cdot)}(E) : \nabla h \in L^{p(\cdot)}(E)\}$$

ve bu uzayın normu;

$$\|h\|_{W^{1,p(\cdot)}(E)} = \|h\|_{1,p(\cdot)} = \|h\|_{p(\cdot)} + \|\nabla h\|_{p(\cdot)}$$

$C_0^\infty(E)$ uzayının $W^{1,p(\cdot)}(E)$ uzayındaki kapanışı $W_0^{1,p(\cdot)}(E)$ ile gösterilir ve bu uzay Sobolev uzayının bir alt uzayıdır ve normu;

$$\|h\|_{W_0^{1,p(\cdot)}} = \|h\| = \|\nabla h\|_{p(\cdot)}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.8.2

Eğer $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ ise $W^{m,p(\cdot)}$ ve $W_0^{m,p(\cdot)}$ uzayları ayrılabilir ve yansılabilir Banach uzaylardır (Willem, 1996).

Teorem 2.8.3

$E, \mathbb{R}^N$ de sınırlı bir bölge ve $p(x), q(x) \in C(E)$ olsun. Her $x \in E$ için

$L^{q(\cdot)}(E) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(E)$ sürekli gömülmenin olması için gerekli ve yeterli koşul $p(x) \leq q(x)$ olmasıdır. Eğer, her $x \in E$ için $p(x) \leq q(x)$ ise $W^{m,p(\cdot)}(E) \hookrightarrow W^{m,q(\cdot)}(E)$ sürekli gömme vardır (Kováčik ve Rákosník, 1991).

Teorem 2.8.4

$E, \mathbb{R}^N$ de sınırlı bir bölge, $m < N$ ($m \in \mathbb{N}$), $p(x) \in C(\bar{E})$ ve $\forall x \in \bar{E}$ için $p(x) < \frac{N}{m}$ olsun. Eğer, $x \in \bar{E}$ için $0 < \varepsilon < \frac{m}{N-m}$ olduğunda $1 \leq q(x) \leq p^*(x) - \varepsilon$ oluyorsa bu durumda $h \in W_0^{1,p(\cdot)}(E)$ için $|h(x)|_{q(\cdot)} \leq c \|h\|_{1,p(\cdot)}$ olacak şekilde bir $c > 0$ sabiti vardır. Üstelik $W_0^{1,p(\cdot)}(E) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(E)$ kompakt gömmesi var (Edmunds ve Rákosník, 2000; Kováčik ve Rákosník, 1991).

Teorem 2.8.5

$E, \mathbb{R}^N$ de koni özeliğine sahip bir bölge ($N > 1$), $m \in \mathbb{N}^*$, $p(x): \bar{E} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$1 \leq p^- \leq p^+ < \frac{N}{m}, \quad mp(x) < N$$

ve $p(x)$ düzgün sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $q(x): \bar{E} \rightarrow \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyonu h.h.h. her $x \in \bar{E}$ için

$$p(x) \leq q(x) \text{ ve } \operatorname{ess\,inf}_{x \in \bar{E}} (p^*(x) - q(x)) > 0$$

sağlanırsa, o zaman $W^{m,p(\cdot)}(E) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(E)$ sürekli ve kompakt gömmesi vardır (Fan, Shen vd., 2001).

Teorem 2.8.6

$E, \mathbb{R}^N$ de koni özeliğine sahip bir bölge ($N > 1$), $p(x)$ ve $q(x), \bar{E}$ da ölçülebilir fonksiyonlar ve

$$1 \leq p^- \leq p^+ < \frac{N}{m}, \quad mp(x) < N$$

sağlansın. Eğer

- (i) $\forall x \in \bar{E}$ için $p(x) \leq q(x) \leq p^*(x)$,
- (ii) $q(x): \bar{E} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Lipschitz sürekli
- (iii) $\operatorname{ess\,inf}_{x \in \bar{E}} \left(q(x) \frac{N-1}{N} - p(x) \right) > 0$

koşulları sağlanırsa $W^{1,p(\cdot)}(E) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(E)$ sürekli gömmesi vardır (Fan, Shen vd., 2001).

2.9 Değişken Üslü Ağırlıklı Lebesgue Uzayları

Tanım 2.9.1

$E \subset \mathbb{R}^N$ açık bir bölge, $a(x)$ bir ağırlık fonksiyon ve $p(x) \in [1, \infty]$ olmak üzere

$$\int_E a|h|^{p(x)} dx < \infty$$

koşulu sağlayan ölçülebilir fonksiyonlar kümesine *Değişken üslü ağırlıklı Lebesgue uzayı* adlandırılır ve $L_{a(x)}^{p(x)}(E)$ ile gösterilir.

Bu uzaydaki norm;

$$\|h\|_{L_a^p(E)} = |h|_{p,a} := \inf \left\{ \lambda > 0: \int_E a(x) \left| \frac{h(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\}$$

olarak yazılır. Değişken üslü ağırlıklı Lebesgue uzayı yukarıdaki norm altında Banach uzayıdır.

Değişken üslü ağırlıklı Lebesgue $L_{a(x)}^{p(x)}(E)$ uzayında, eğer $a(x) = 1$ ise $L_{a(x)}^{p(x)}(E) = L^{p(\cdot)}(E)$ olur.

Üstelik;

$$\rho_{a(x),p(x)}(h): L_{a(x)}^{p(x)}(E) \rightarrow \mathbb{R}$$

olmak üzere

$$\rho_{(a(x),p(x))}(h) = \int_E a(x) |h(x)|^{p(x)} dx$$

değişken üslü ağırlıklı Lebesgue uzayın üzerinde tanımlanan modüler normdur.

Teorem 2.9.2

$n = 1, 2, 3 \dots$ için her $h, h \in L_{a(x)}^{p(x)}(E)$ olarak olsun

$$(i) \|h\|_{L_{a(x)}^{p(x)}(E)} \geq 1 \Rightarrow \|h\|_{L_{a(x)}^{p(x)}(E)}^{p^-} \leq \rho_{(a(x),p(x))}(h) \leq \|h\|_{L_{a(x)}^{p(x)}(E)}^{p^+}$$

$$(ii) \|h\|_{L_{a(x)}^{p(x)}(E)} \leq 1 \Rightarrow \|h\|_{L_{a(x)}^{p(x)}(E)}^{p^+} \leq \rho_{(a(x),p(x))}(h) \leq \|h\|_{L_{a(x)}^{p(x)}(E)}^{p^-}$$

$$(iii) \|h_n\|_{L_{a(x)}^{p(x)}(E)} \rightarrow 0 (\rightarrow \infty) \Leftrightarrow \rho(h_n) \rightarrow 0 (\rightarrow \infty).$$

(Ben Ali vd., 2017; Yücedağ, 2023).

Teorem 2.9.3

Eğer $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ ise $L_{a(x)}^{p(x)}(E)$ uzayı ayrılabilir ve yansılmalı bir Banach uzayıdır (Fan ve Zhao, 2005).

Teorem 2.9.4

(i) E koni özeliğine sahip bir küme, $|E| < \infty$ ve $p(x)$, $\bar{E}$ kümesi üzerinde sürekli fonksiyon olsun. Ayrıca, $a(x)$ bir ağırlık fonksiyon ve $a(x) \in L^{r(x)}$, $1 < r^-$ için $r(x) \in C(\bar{E})$ olmak üzere, eğer her $x \in \bar{E}$ ve $q(x) \in C(\bar{E})$ için $1 \leq q(x) < \frac{r(x)-1}{r(x)}p^*$ ise $W^{1,p(x)}(E) \hookrightarrow L_{a(x)}^{q(x)}(E)$ kompakt gömmesi vardır.

(ii) Eğer $s(x) \in C_+(\bar{E})$ ve $p^*(x) > s(x) \geq 1$ ise, o zaman her $x \in \bar{E}$ için; $W^{1,p(x)}(E) \hookrightarrow L^{s(x)}(E)$ ve $W^{1,p(x)}(E) \hookrightarrow L^{s(x)}(E)$ sürekli ve kompakt gömülmeleir vardır.

(iii) Her $x \in \partial E$ için $r(x) \in C_+(\partial E)$ ve $p^\partial(x) > r(x) \geq 1$ ise, o zaman $W^{1,p(x)}(E) \hookrightarrow L^{r(x)}(\partial E)$ ve $W^{1,p(x)}(E) \hookrightarrow L^{r(x)}(\partial E)$ gömülmeler vardır. (Allaoui, 2015; Deng, 2008; Fan, 2005).

3. VARYASYONEL YÖNTEMİ İLE İLGİLİ ÇALIŞMALARDA KULLANILAN BAZI TEOREMLER VE UYGULAMALARI

Bu bölümde; standart ve standart olmayan büyüme koşulunu içeren bazı denklemlerin (eliptik, parabolik ve hiperbolik denklemler) çözümlerinin araştırılmasında varyasyonel yöntem kullanılmaktadır. Bu yöntem kullanıldığı zaman, bazı teoremlere ve tanımlara ihtiyaç duyulmaktadır. Bu kısımda, o teorem ve tanımların bazılarını vurgulayacağız ve son zamanlarda, bu yöntemi kullanarak çalıştığımız alan ile ilgili yapılan bazı çalışmalardan da bahsedeceğiz. Ayrıca, sonraki bölümümüzdeki çalışmamızda da, bu tanım ve teoremlerin bazıları kullanılacaktır.

3.1 Varyasyonel Yaklaşım

Lineer olmayan diferansiyel (kısmi) denklemlerin çözümlerinin varlığının araştırılmasında kullanılan yaklaşımlardan biridir. Bu yöntem: verilen bir diferansiyel denklemi doğrudan çözmek yerine öncelikle bu denkleme karşılık gelen enerji fonksiyoneli bulmak ve daha sonra da bu çözümleri enerji fonksiyonelinin kritik noktalarına veya minimize dizisine karşılık getirerek bulmayı amaçlayan bir yaklaşımdır.

Tanım 3.1.1

F ve E iki Banach uzay, $B: F \rightarrow E$ tanımlı bir (lineer olmayan) operatör ve $v \in F$ fonksiyon için

$$B(v) = 0 \quad (3.1)$$

olacak şekilde bir fonksiyonel denklem olarak yazılabilirse, bu probleme *varyasyonel problem* denir.

Tanım 3.1.2

F ve E iki Banach uzay, $B: F \rightarrow E$ tanımlı bir operatör ve $v \in F$ fonksiyon olmak üzere

$$B(v) = \psi'(v) \quad (3.2)$$

olacak şekilde bir $\psi \in C^1(F, \mathbb{R})$ fonksiyoneli bulunabiliyorsa, bu fonksiyonele probleme karşılık gelen *enerji fonksiyoneli* veya *Euler-Lagrange fonksiyoneli* adı verilir ve B operatörüne de varyasyonel denir.

Tanım 3.1.3

F ve E iki Banach uzay, $B: F \rightarrow E$ tanımlı bir operatör ve $\psi \in C^1(F, \mathbb{R})$ bir fonksiyoneli olsun. Eğer, her bir $u \in F$ için

$$\langle \psi'(u), v \rangle = 0 \quad (3.3)$$

eşitliğini sağlayacak her bir $v \in F$ elemanına ψ fonksiyonelinin *kritik noktası* adı verilir.

Yukarıda tanımlanan yöntem, klasik metot olarak adlandırılır. Yukarıdaki tanımlardan ifade edildiği gibi; (3.1) denklemi aynı zamanda (3.3) denklemine dönüşmektedir. Böylece (3.2) eşitliğin bir sonucu olarak da, (3.1) denklemini sağlayan v bilinmeyen fonksiyonlarını bulma problemi, aynı zamanda (3.3) denklemini sağlayan v bilinmeyen fonksiyonlarını bulma problemine dönüşecek ve bu durumda $\psi(v)$ enerji fonksiyonelinin kritik noktaları, (3.1) denkleminin (zayıf) çözümlerine karşılık gelmektedir.

Tanım 3.1.4

F bir Banach uzay ve $\psi: F \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyonel olsun. Eğer, her bir $(v_n) \subset F$ dizisi için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(v_n) = \inf_{v \in F} \psi(v)$$

oluyorsa, bu durumda (v_n) dizisine ψ fonksiyonelinin *minimize dizisi* adı verilir.

Bu yöntemde, direkt metot olarak adlandırılır. Bu yöntemde de, öncelikle ψ fonksiyonelinin bir (v_n) minimize dizisi bulunur ve bu (v_n) minimize dizisinin (v_{n_k}) gibi bir alt dizisinin yakınsadığı (v) değerinin aynı zamanda (v_n) minimize dizisinin de yakınsadığı değer olduğu ve bu (v) değeri ψ fonksiyonelinin bir minimumu (kritik değeri) olmaktadır. Dolayısıyla, bu değer aynı zamanda (3.1) denkleminin bir (zayıf) çözümü olur. Yukarıda ifade edilen (v_{n_k}) alt dizisinin varlığını

gösterebilmek için bazı kompaktlık koşullarına ihtiyaç (Palais-Smale koşulunu ve Cerami koşulu) duyulmaktadır.

Örnek 3.1.5

F bir Banach uzay, $N \geq 2$ olmak üzere $E \subset \mathbb{R}^N$ sınırlı bir bölge, her $(x, k) \in E \times \mathbb{R}$ için $h: E \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon olmak üzere

$$H(x, s) = \int_0^s h(x, k) dk \quad (3.4)$$

tanımlı (3.4) fonksiyon için

$$-div(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) = h(x, u) \quad (3.5)$$

diferansiyel denklemini inceleyelim. Burada, her $u \in F$ için (3.5) denkleminin karşılık gelen enerji fonksiyoneli $\psi \in C^1(F, \mathbb{R})$ olmak üzere

$$\psi(u) = \int_E \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx - \int_E H(x, u) dx \quad (3.6)$$

(3.6) da tanımlanan $\psi \in C^1(F, \mathbb{R})$ enerji fonksiyonelinin türevi aşağıdaki şekilde yazılır. $u, v \in F$ olmak üzere

$$\langle \psi'(u), v \rangle = \int_E |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx - \int_E h(x, u) v dx.$$

Ayrıca, her bir $u \in C_0^\infty(E)$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitliği sağlayan her $v \in F$ elemanına (3.5) denkleminin zayıf çözüm denir

$$\int_E |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx - \int_E h(x, u) v dx = 0.$$

olur. Ayrıca, bir denklemin zayıf çözüm aynı zamanda denklemin kritik noktalarıdır

3.2 Standart ve Standart Olmayan Büyüme Koşullu Denklemlerin Çözümlerinde Kullanılan Bazı Teoremler

Tanım 3.2.1 (Konveks fonksiyonlar)

F reel vektör uzayı ve $h: F \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyonel olsun. Eğer her $\xi, \eta \in F$ ve

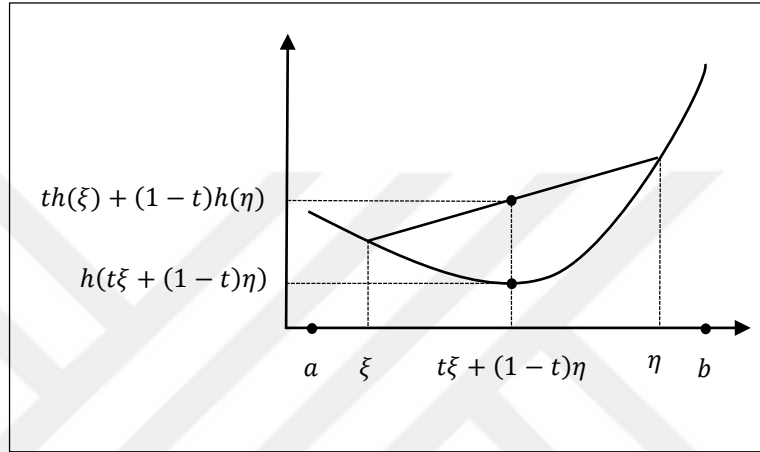
$0 < t < 1$ için

$$h(t\xi + (1-t)\eta) \leq th(\xi) + (1-t)h(\eta)$$

eşitsizliği sağlarsa h fonksiyoneline *konveks fonksiyonel* denir (Castillo ve Rafeiro, 2016).

Örneğin $h: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olmak üzere bu fonksiyonun grafiği aşağıdaki gibi olur

(Bkz. Şekil 3.1).



Şekil 3.1 Konveks fonksiyon

Tanım 3.2.2 (Alttan zayıf yarı sürekli fonksiyonlar)

F Banach uzayı, $\psi: F \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyonel ve $v_0 \in F$ olsun. Eğer, F de her zayıf yakınsayan dizi $v_n \rightharpoonup v_0$ için

$$\psi(v_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \psi(v_n)$$

koşulunu sağlarsa, ψ fonksiyoneline v_0 noktasında alttan zayıf yarı sürekli fonksiyoneldir.

Tanım 3.2.3 (Coercive fonksiyoneller)

$(F, \|\cdot\|)$ normlu Banach uzayı, $v \in F$ ve $\psi: F \rightarrow \mathbb{R}$, $C^1(F, \mathbb{R})$ 'de tanımlı bir fonksiyonel olsun. Eğer ψ fonksiyoneli,

$$\|v\| \rightarrow \infty \text{ iken } \psi(v) \rightarrow \infty$$

koşulu sağlarsa ψ fonksiyoneline *coercive fonksiyonel* denir (Yücedağ, 2010).

Tanım 3.2.4 (Carathéodory koşulu)

$E, \mathbb{R}^N$ de açık bir küme, $h: E \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ olsun. Eğer h fonksiyoneli aşağıdaki iki koşulları sağlarsa h fonksiyoneli *Carathéodory koşulunu* sağladığı söylenir.

- (i) Hemen hemen her $x \in E$ için $\xi \rightarrow h(x, \xi)$ sürekli fonksiyondur,
- (ii) Her $\xi \in \mathbb{R}^N$ için $x \rightarrow h(x, \xi)$, E de ölçülebilir fonksiyoneldir,

Tanım 3.2.5

(3.5) denkleminin bir kısmını oluşturan $\varphi(v)$ fonksiyoneli

$$\varphi(v) = \int_E \frac{1}{p(x)} |\nabla v|^{p(x)} dx$$

olarak yazılırsa bu kısmın türevi

$$\langle \varphi'(v), u \rangle = \int_E |\nabla v|^{p(x)-2} \nabla v \nabla u \, dx$$

olur. Ayrıca, bu fonksiyon aşağıdaki koşulları sağlar;

- (i) $\varphi(v)$ fonksiyoneli konveks,
- (ii) $\varphi': F \rightarrow F^*$ fonksiyoneli sürekli, sınırlı ve kesin monotondur,
- (iii) $\varphi': F \rightarrow F^*$ fonksiyoneli (S_+) tipindedir:

Eğer $(v_n) \subset F$ dizisi için F uzayında $v_n \rightharpoonup v$ (zayıf yakınsak) iken

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \langle \varphi'(v_n) - \varphi'(v), v_n - v \rangle \leq 0$$

olduğu zaman da, F' de $v_n \rightarrow v$ (güçlü yakınsak) olur,

- (iv) $\varphi': F \rightarrow F^*$ fonksiyoneli bir homeomorfizmdir.

Aşağıdaki tanımlar (tanım 3.2.6, tanım 3.2.7 ve teorem 3.2.11) bir minimize fonksiyon bulmak için kullanılmaktadır.

Tanım 3.2.6

F bir Banach uzay ve $\psi \in C^1(F, \mathbb{R})$ bir fonksiyonel olsun. Eğer ψ fonksiyoneli,

- (i) ψ, F üzerinde konveks,
- (ii) ψ, F üzerinde alttan zayıf yarı sürekli oluyorsa,

bu durumda $\psi(u) = \inf_{v \in F} \psi(v)$ olacak şekilde bir $u \in F$ minimize fonksiyonu vardır

(Willem, 1996).

Tanım 3.2.7

F bir Banach uzay ve $\psi, C^1(F, \mathbb{R})$ de bir fonksiyonel diyelim. Eğer, ψ fonksiyoneli

(i) F uzayında alttan sınırlı,

(ii) F uzayında alttan zayıf yarı süreklili,

(iii) F uzayında coercive,

oluyorsa, bu durumda $\psi(u) = \inf_{v \in F} \psi(v)$ olacak şekilde bir $u \in F$ minimize fonksiyonu vardır (Willem, 1996; Winslow, 1949).

Tanım 3.2.8

F bir Banach uzay ve $N \geq 2$ olmak üzere $E \subset \mathbb{R}^N$ sınırlı bir bölge olsun. Ayrıca; her $(x, k) \in E \times \mathbb{R}$ için $h: E \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu

$$H(x, k) = \int_0^k h(x, s) ds$$

olarak tanımlayalım. Eğer her $x \in E$ ve $k \in \mathbb{R}$ için $|k| \geq K$ ($\exists K > 0$)

$$0 < \sigma H(x, k) < k h(x, k)$$

olacak şekilde en az bir tane σ ($\sigma > p^+$ sağlayan) sayısı varsa, bu durumda h fonksiyonu *Ambrosetti – Rabinovitz koşulu* (*AR*) sağlar denir. Buradaki; $\sigma > p^+$ eşitsizliğindeki p^+ esnek olan kısmıdır.

Bu koşul; sınırlı bir dizi bulmak için (3.5) denklemin sol tarafındaki fonksiyona yani lineer olmayan kısma (h fonksiyonu) bırakılan önemli koşullardan biridir. Bu koşulun kullanılmadığı çalışmalarda özellikle kullanılmadığına dair vurgu yapılır.

Tanım 3.2.9 (Palais-Smale dizisi)

F bir Banach uzay ve $\psi \in C^1(F, \mathbb{R})$ bir fonksiyonel ve herhangi bir $(v_n) \subset F$ dizisi için

$$(i) |\psi(v_n)| \leq \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(ii) F^* \text{ uzayında } n \rightarrow \infty \text{ için } \psi'(v_n) \rightarrow 0$$

koşulları sağlanırsa, bu durumda (v_n) dizisine ψ enerji fonksiyonelinin bir *Palais-Smale dizisi* olarak adlandırılır.

Buradaki Palais-Smale dizisi; ψ fonksiyoneli minimize eden dizidir. Ayrıca, ψ fonksiyoneli alttan sınırlı değilse, ψ fonksiyonelinin Palais-Smale dizisi hakkında kesin bir şey söylemeyiz (Winslow, 1949).

Tanım 3.2.10 (Palais-Smale koşulu)

F bir Banach uzay ve $\psi \in C^1(F, \mathbb{R})$ fonksiyoneli Palais-Smale koşulunu sağladığını göstermek için aşağıdaki adımlar sırasıyla izlenir:

(i) (v_n) , ψ enerji fonksiyonelinin herhangi Palais-Smale dizisi olsun.

(ii) (v_n) dizisinin güçlü yakınsak bir alt dizisi bulunmasıdır

(Fan ve Zhang, 2003; Schechter, 2007).

ψ enerji fonksiyonelinin Palais-Smale koşulunu sağladığını göstermek için ilk olarak; (v_n) dizisinin F uzayında sınırlı olduğunu gösterilecektir. Ayrıca, çalışılan uzay F yansılmalı bir Banach uzay olduğu zaman (v_n) sınırlı dizisinin F uzayında bir v elemanına zayıf yakınsak olacak şekilde bir alt diziye sahip olur. Daha sonra da; bu bilgi ile birlikte kompakt gömme teoremleri kullanılarak, (v_n) dizisinin F uzayında bir v elemanına güçlü yakınsadığı gösterilecektir.

Teorem 3.2.11

F bir Banach uzay ve $\psi, C^1(F, \mathbb{R})$ de bir fonksiyonel olsun. Eğer

(i) ψ fonksiyoneli F uzayında alttan sınırlı,

(ii) ψ fonksiyoneli (PS) koşulunu sağlıyor,

ise, bu durumda $\psi(u) = \inf_{v \in F} \psi(v)$ olacak şekilde bir $u \in F$ minimize fonksiyonu

vardır (Willem, 1996; Winslow, 1949).

Tanım 3.2.12 (Cerami koşulu)

F bir Banach uzay ve $\psi, C^1(F, \mathbb{R})$ de bir fonksiyonel olsun. Eğer, ψ fonksiyoneli, herhangi bir $v_n \subset F$ dizisi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, bu durumda, (v_n) dizisine ψ enerji fonksiyonelinin *Cerami dizisi* denir

(i) $|\psi(v_n)| \leq c$,

(ii) $\psi': F \rightarrow F^*$ fonksiyonel için $n \rightarrow \infty$ olduğunda $(1 + \|v_n\|_F) |\psi'(v_n)| \rightarrow \infty$.

Eğer, (v_n) Cerami dizisi yakınsak bir alt diziye sahip ise bu durumda ψ enerji fonksiyoneli Cerami koşuluna sahiptir denir (Schechter, 2007).

Cerami koşulu, Palais-Smale koşulunun sağlanmadığı durumlarda kullanılır. Ancak, bu koşul Palais-Smale koşulundan daha zayıf bir koşuldur.

Teorem 3.2.13 (Ekeland Varyasyonel Prensibi)

F bir Banach uzay ve $\psi: F \rightarrow (-\infty, \infty]$ tanımlı bir fonksiyoneli olsun. Eğer ψ fonksiyoneli,

(i) ψ, F' de alttan sınırlı,

(ii) ψ, F' de alttan zayıf yarı sürekli,

koşullarını sağlarsa, bu durumda her $\varepsilon > 0$ için

$$\psi(v_\varepsilon) < \inf_{v \in F} \psi(v) + \varepsilon$$

ve

$$\psi(v_\varepsilon) < \psi(v) + \varepsilon \|v_\varepsilon - v\|, \quad v_\varepsilon \neq v$$

olacak şekilde bir $v_\varepsilon \in E$ dizisi vardır. Ekeland Varyasyonel yaklaşımı, ψ fonksiyoneli için bir Palais-Smale dizisi elde edilebilir (Mihăilescu, 2006; Willem, 1996).

Teorem 3.2.14 (Mountain-Pass Geometrisi)

F bir Banach uzay ve $\psi \in C^1(F, \mathbb{R})$ fonksiyoneli hem Palais-Smale (PS) koşulunu hem de $\psi(0) = 0$ koşulunu sağladığını kabul edelim. Ayrıca, ψ fonksiyoneli aşağıdaki koşulları sağlasın;

(i) Her $v \in F$ fonksiyonu için $\|v\|_F = \alpha$ iken $\psi(v) \geq \beta > 0$ olacak şekilde α ve β pozitif sayılar vardır,

(ii) $\|v\|_F > \alpha$ için $\psi(v) < 0$ (veya $t \rightarrow \infty$ iken $\psi(tv) < -\infty$) olacak şekilde bir $v \in F$ fonksiyon vardır.

O halde, ψ fonksiyoneli, F uzayında sıfır dan farklı en az bir kritik noktaya sahiptir (Calotă, 2008; Mihăilescu, 2007; Napoli, 2003; Vu, 2005; Willem, 1996).

Teorem 3.2.15 (Genelleştirilmiş Mountain-Pass Teoremi)

F bir Banach uzay ve $\psi \in C^1(F, \mathbb{R})$ fonksiyoneli hem Palais-Smale (PS) koşulunu hem de $\psi(0) = 0$ koşulunu sağladığını kabul edelim. Ayrıca, ψ fonksiyoneli ρ pozitif sayısı ve $v \in F$ olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlasın.

(i) $\|v\|_F > \alpha$ olduğunda $\psi(v) \leq \psi(0)$,

(ii) $\gamma = \inf\{\psi(v) : v \in F, \|v\| = \alpha\} > 0$,

Ayrıca M boş küme den farklı olacak bir küme

$M = \{\phi \in C([0,1], E) : \phi(0) = 0, \phi(1) = v\}$, $\delta = \inf\{\max \psi(\phi([0,1])) : \phi \in M\}$

kümeleri tanımlansın. Böylece, $\gamma \leq \delta < +\infty$ olmak üzere δ , ψ 'nin kritik noktasıdır (Ambrosetti ve Rabinowitz, 1973; Duc, 1989).

Bu teorem, problemin sıfırdan farklı en az bir zayıf çözümünün varlığını göstermek için kullanılır.

Teorem 3.2.16 (Z_2 -Symmetric Mountain-Pass Teoremi)

F Sonsuz boyutlu bir Banach uzayı olsun. Ayrıca $\varphi \in C^1(F, \mathbb{R})$ çift fonksiyonel, φ fonksiyoneli (PS) koşulunu sağlayan ve $\varphi(0) = 0$ olsun. Ayrıca φ fonksiyoneli, aşağıdaki koşullar sağlasın

(i) Her $v \in F$ fonksiyonu için $\|v\|_F = \alpha$ olduğu zaman $\varphi(v) \geq \beta > 0$ iki pozitif α ve β sayıları vardır,

(ii) F 'in her sonlu boyutlu F_1 ($F_1 \subset F$) alt uzay için $\{v \in F_1 : \varphi(v) \geq 0\}$,

Bu durumda; φ fonksiyoneli, F uzayında sonsuz sayıda bir kritik değerler dizisine sahip olur (Mihălieşcu, 2008; Ogras vd, 2008; Vu, 2005).

Teoremin bir sonucu olarak; verilen denklemin sonsuz sayıda çözüme sahip olduğunu göstermek için Z_2 -Symmetric Mountain-Pass teoremin koşullarını sağladığını göstermek yeterli olur.

Teorem 3.2.17 (Riccieri Teoremi)

F bir Banach uzay ve $\varphi: F \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli-Gateaux türevlenebilir ve Gateaux türevinin tersi F^* üzerinde sürekli olan, dizisel alttan zayıf yarı-sürekli bir fonksiyonel;

$\phi: F \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli-Gateaux türevlenebilir ve Gateaux türevi kompakt olan bir fonksiyonel olsun. Ayrıca, aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim

- (i) Her $\gamma > 0$ için $\lim_{\|v\|_E \rightarrow \infty} (\phi(v) + \gamma\phi'(v)) = \infty$,
- (ii) Öyle bir $r \in \mathbb{R}$ ve $v_0, v_1 \in E$ vardır ki $\phi(v_0) < r < \phi(v_1)$,
- (iii) $\inf_{v \in \phi^{-1}((-\infty, r])} \phi(v) > \frac{(\phi(v_1) - r)\phi(v_0) + (r - \phi(v_0))\phi(v_1)}{\phi(v_1) - \phi(v_0)}$.

O halde, öyle bir $\Gamma \subset (0, \infty)$ açık aralığı ve pozitif bir ρ sayısı vardır ki her $\gamma \in \Gamma$ için

$$\phi'(v) + \gamma\phi'(v) = 0$$

denkleminin F üzerinde, normları ρ 'dan küçük olan, en az üç çözümü vardır (Mihailescu, 2007).

Tanım 3.2.18

F yansılmalı ve ayrılabilir bir Banach uzay olsun. Ayrıca, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ olmak üzere her $k, n \in \mathbb{N}^*$ için

$$g_k(e_n) = \delta_{k,n} = \begin{cases} 1 & , \quad k = n \\ 0 & , \quad k \neq n \end{cases}$$

ve

$$F = \overline{\text{span}\{e_k : k \in \mathbb{N}^*\}} \text{ ve } F^* = \overline{\text{span}\{g_k : k \in \mathbb{N}^*\}}$$

olacak şekilde $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}^*} \subseteq F$ ve $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}^*} \subseteq F^*$ vardır. O halde, $m \in \mathbb{N}^*$ için

$$E_m = \text{span}\{e_m\}, \quad F_m = \bigoplus_{j=1}^m X_j = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_m\} \text{ ve } G_m = \overline{\bigoplus_{j=1}^m X_j}$$

olmak üzere F uzayını, $F = F_m \oplus G_m$ şeklinde iki uzayın toplamı olarak yazılabilir.

Teorem 3.2.19 (Fountain Teorem)

F yansılmalı ve ayrılabilir bir Banach uzay, $\phi \in C^1(F, \mathbb{R})$ çift bir fonksiyoneli ve E_m, F_m ve G_m alt uzayları yukarıda tanımladığımız gibi birer uzay olsunlar. Eğer, herbir $m \in \mathbb{N}^*$ için

- (i) $m \rightarrow \infty$ iken $\inf_{v \in F_m, \|v\|_F = \gamma_m} \phi(v) \rightarrow +\infty$,
- (ii) $\max_{v \in G_m, \|v\|_F = \rho_m} \phi(v) \leq 0$,
- (iii) Herbir $c > 0$ için ϕ fonksiyoneli $(PS)_c$ koşulunu sağlayan $\rho_m > \gamma_m > 0$

pozitif sayıları sayısı varsa,

o zaman, φ fonksiyoneli F uzayında sınırsız olan (∞ 'a yakınsayan) bir kritik değerler dizisine sahip olur (Fan, 2004; Willem, 1996).

Teorem 3.2.20 $(PS)_c^*$ dizisi

F bir Banach uzay ve $\varphi \in C^1(F, \mathbb{R})$ fonksiyoneli, $c \in \mathbb{R}$ ve E_m, F_m ve G_m alt uzayları yukarıda tanımladığımız gibi birer uzay olarak verilsin. Eğer herhangi bir $(v_{n_j}) \subset F$ dizisi için

- (i) $|\varphi(v_{n_j})| < c, (v_{n_j}) \in F_{v_{n_j}},$
- (ii) $v_{n_j} \rightarrow \infty$ iken $(\varphi|_{F_{v_{n_j}}})' (v_{n_j}) \rightarrow 0,$

koşulları sağlanırsa, o halde (v_{n_j}) dizisine φ enerji fonksiyonelinin bir $((PS)_c^*)$ dizisi adlandırılır. Eğer $((PS)_c^*)$ dizisi aynı zamanda, (güçlü) yakınsak bir alt diziye sahip oluyorsa φ fonksiyoneli $((PS)_c^*)$ koşulunu sağlar denir. Bu durumda, $((PS)_c^*)$ dizisi φ fonksiyonelinin bir kritik noktasıdır (Fan, 2005; Vu, 2005; Willem, 1996).

Teorem 3.2.21 (Dual Fountain Teorem)

F bir Banach uzayı, $\varphi \in C^1(F, \mathbb{R})$ çift fonksiyonel, E_m, F_m ve G_m alt uzayları yukarıda tanımladığımız gibi birer uzay olsunlar. Eğer herbir $m \geq m_0$ için $m_0 > 0$ olacak şekilde m_0 var ve

- (i) $a_m := \inf_{v \in G_m, \|v\|_F = \rho_m} \varphi(v) \geq 0,$
- (ii) $b_m := \max_{v \in F_m, \|v\|_F = \gamma_m} \varphi(v) < 0,$
- (iii) $d_m := \inf_{v \in G_m, \|v\|_F \leq \rho_m} \varphi(v) \rightarrow 0, m \rightarrow \infty,$
- (iv) Herbir $c \in [d_{m_0}, 0)$ için φ fonksiyoneli $((PS)_c^*)$ koşulu,

koşullarını sağlayacak şekilde $\rho_m > \gamma_m > 0$ pozitif sayıları da varsa, bu durumda φ fonksiyoneli F uzayında 0'a yakınsayan bir negatif kritik noktalar dizisine sahip olur (Wang, 2002).

3.3 Teoremlerin Kullanıldığı Bazı Çalışmalar

Chammem, vd. (2022) çalışmalarında, $p(x)$ -Laplace operatörünü içeren aşağıdaki Steklov sınır değer problemini incelemişlerdir;

$$\begin{cases} (-\Delta)_{p(x)}u + a(x)|u|^{p(x)-2}u = f(x, u), & x \in \Omega \\ |\nabla u|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} + b(x)|u|^{q(x)-2}u = g(x, u), & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3.7)$$

(3.7) denklemde; $N \geq 2$ olmak üzere $\Omega, \mathbb{R}^N$ de düzgün sınırlı bir bölge ve $\partial\Omega, \Omega$ 'nın sınıridir. $\nu, \partial\Omega$ üzeri normal vektördür. Ayrıca $p(x) > 1$ için $p(x) \in C(\overline{\Omega})$, $q(x) > 1$ için $q(x) \in C(\partial\Omega)$ ve her $x \in \overline{\Omega}$ ve $y \in \partial\Omega$ için $p(x) \neq q(y)$, $f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g: \partial\Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, özel koşullar bırakılan Carathéodory fonksiyonlardır. a_1, a_2, b_1 ve b_2 bazı pozitif sabitler için $a_1 \leq a(x) \leq a_2$ ve $b_1 \leq b(x) \leq b_2$ koşulları altında a ve b sürekli fonksiyonlardır. Yazarlar bu çalışmada; öncelikle Mountain-Pass teoremini ile birlikte Palais-Smale koşulu kullanılarak (3.7) probleminin sıfırdan farklı bir zayıf çözümün varlığını ve daha sonra da Mountain-Pass teoremini ile birlikte Ekeland prensibi kullanarak (3.7) probleminin sıfırdan farklı en az iki çözümünün varlığını $W^{1,p(x)}$ uzayında gösterilmiştir.

Yücedağ ve Murad (2022) çalışmalarında, $p(x)$ -Laplace operatörünü içeren aşağıdaki Steklov sınır değer problemini ele almışlar;

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, \nabla u)) = 0, & x \in \Omega \\ a(x, \nabla u) \frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda f(x, u), & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.8)$$

(3.8) denklemde; $N \geq 2$ olmak üzere $\Omega, \mathbb{R}^N$ de düzgün sınırlı bir bölge, $p(x) \in C(\overline{\Omega})$, $f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, Carathéodory fonksiyonlardır, λ pozitif parametredir, $\nu, \partial\Omega$ üzeri normal vektördür, $a(x, \xi): \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, $A(x, \xi): \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, $A = A(x, \xi)$ fonksiyonun ξ 'e göre sürekli türevidir yani $a(x, \xi) = \nabla_{\xi} A(x, \xi)$. (3.8) problemi için; f ve a fonksiyonlarına bırakılan uygun koşullar altında, Mountain-Pass teoremini ve Ambrosetti-Rabinowitz koşulunu kullanılarak problemin sıfırdan farklı

bir zayıf çözümün varlığını $W_0^{1,p(x)}$ uzayında göstermişlerdir. Bu çalışma da, Palais-Smale koşulu göstermek için Ambrosetti-Rabinowitz koşulundan yararlanılmıştır.

Mihăilescu ve Rădulescu (2007), aşağıdaki Dirichlet sınır koşulunu içeren problem için homojen olmayan öz değer problemi $W_0^{1,p(x)}$ uzayında çalışılmıştır;

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) = \lambda|u|^{q(x)-2}u, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.9)$$

(3.9) probleminde; $N \geq 3$ olmak üzere $\Omega, \mathbb{R}^N$ de düzgün sınırlı bir bölge, $\lambda > 0$ gerçek bir sayı ve $p, q \in C(\partial\Omega)$. Bu çalışmada; Mountain-Pass teoremini ile Ekeland prensibi bir arada kullanarak (3.9) problemin çözümlerinin sıfırdan farklı bir zayıf çözümün varlığını $W_0^{1,p(x)}$ uzayında göstermişlerdir. Ayrıca, (3.9) problemin bir tane öz değerinin varlığı gösterilmiştir.

Hamdani, vd. (2019) çalışmalarında, $p(x)$ -Laplace operatörünü içeren aşağıdaki Kirchhoff problemini incelemişler;

$$\begin{cases} -\left(a - b \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx\right) \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) = \lambda|u|^{p(x)-2}u + g(x, u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.10)$$

(3.10) denklemde; $a \geq b > 0$ iki sabit sayılar, $\Omega, \mathbb{R}^N$ de düzgün sınırlı bir bölge, $N > p(x) > 1$ ile $p \in C(\overline{\Omega})$ ve $g(x, t) \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$. (3.10) problemin de; başlangıçta Mountain-Pass teoremini ile Palais-Smale koşulunu bir arada kullanılarak bu problemin sıfırdan farklı bir zayıf çözümün varlığını ve daha sonra da Fountain teoremi ile birlikte $(PS)_c^*$ koşulunu kullanarak problemin sonsuz çözüm çiftini sahip olduğu $W^{1,p(x)}$ uzayında gösterilmiştir.

Chammem ve Sahbani (2021) makalelerinde, $(p_1(x), p_2(x))$ -Laplace operatörünü içeren aşağıdaki Steklov sınır değer problemini incelemişlerdir;

$$\begin{cases} (-\Delta)_{p_1(x)}u + (-\Delta)_{p_2(x)}u + a(x)|u|^{p_1(x)-2}u + b(x)|u|^{p_2(x)-2}u = f(x, u), & x \in \Omega \\ |\nabla u|^{p_1(x)-2} \frac{\partial u}{\partial v} + |\nabla u|^{p_2(x)-2} \frac{\partial u}{\partial v} = g(x, u), & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.11)$$

(3.11) de; $N \geq 2$ olmak üzere $\Omega, \mathbb{R}^N$ de düzgün sınırlı bir bölge, $i = 1, 2$ ve $x \in \bar{\Omega}$ için $p_i \in C(\bar{\Omega})$ ve $p_i(x) > 1$. Ayrıca, $f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g: \partial\Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Carathéodory fonksiyonlardır ve $v, \partial\Omega$ üzerinde normal vektördür, a_1, a_2, b_1 ve b_2 bazı pozitif sabitleri için $a(x)$ ve $b(x)$ fonksiyonları $a_1 \leq a(x) \leq a_2$ ile $b_1 \leq b(x) \leq b_2$ eşitsizlikleri sağlar. Yazarlar bu çalışmada; f, g, a ve b fonksiyonlarına bırakılan özel koşullar ile birlikte, öncelikle Mountain-Pass teoremini ile Palais-Smale koşulu bir arada kullanılarak problemin sıfırdan farklı bir zayıf çözümün varlığını ve daha sonra da Z_2 -Symmetric Mountain-Pass teoremini kullanarak sonsuz sayıda çözüme sahip olduğu $W^{1,p(x)}$ uzayında gösterilmiştir.

Yücedağ (2022) çalışmasında, aşağıdaki Steklov sınır koşuluna sahip lineer olmayan büyüme koşullu Kirchhoff problemlerini incelemiştir;

$$\begin{cases} M\left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx\right) \Delta_{p(x)}u = |u|^{p(x)-2}u, & x \in \Omega \\ |\nabla u|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial v} = \lambda f(x, u), & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.12)$$

(3.12) denklemde; $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) düzgün sınırlı bir bölge, λ gerçekte pozitif bir parametredir, p fonksiyonu $\bar{\Omega}$ da sürekli, $f: \partial\Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Carathéodory koşulunu sağlayan bir fonksiyon, $M: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ Kirchhoff fonksiyonu ve $v, \partial\Omega$ üzeri normal vektördür. (3.12) probleminde; Mountain-Pass teoremini ile Palais-Smale koşulunu bir arada kullanılarak problemin sıfırdan farklı bir zayıf çözümün varlığını ve Fountain teoremini de kullanarak problemin sonsuz çözüme sahip olduğu $W^{1,p(x)}$ uzayında gösterilmiştir.

Oğras, vd. (2008) çalışmalarında, lineer olmayan $(p(x), q(x))$ -Laplace operatörünü içeren aşağıdaki $\mathbb{R}^N$ de eliptik denklem sistemini incelemişler;

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = \frac{\partial F}{\partial u}(x, u, v), & x \in \mathbb{R}^N \\ -\Delta_{q(x)} v = \frac{\partial F}{\partial v}(x, u, v), & x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (3.13)$$

(3.13) denklemde; $\Omega, \mathbb{R}^N$ de düzgün sınırlı bir bölge ($N \geq 2$), her $x \in \mathbb{R}^N$ alındığında $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonlar için $1 < p(x), q(x) < N$ ve $F \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2)$. Bu çalışmada; Mountain-Pass teoremini ile Cerami koşulunu bir arada kullanılarak problemin sıfırdan farklı bir zayıf çözümün varlığını $W^{1,p(x)}$ uzayında gösterilmiştir.

Zeroual, vd. (2019) çalışmalarında, aşağıdaki $p(x)$ -Laplace operatörünü içeren Steklov sınır değer problemini incelemişlerdir;

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[a(x, \nabla u)] + |u|^{p(x)-2}u = \lambda f(x, u), & x \in \Omega \\ a(x, \nabla u) \cdot \nu = \mu g(x, u), & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.14)$$

Denklemde; $\lambda, \mu \in [0, \infty)$, $N \geq 2$ olmak üzere $\Omega, \mathbb{R}^N$ de düzgün sınırlı bir bölge, $\nu, \partial\Omega$ üzeri normal vektördür. Ayrıca; $f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \partial\Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $a: \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ Carathéodory koşulunu sağlayan fonksiyonlardır ve $p \in C(\bar{\Omega})$ değişken üslü fonksiyondur. Yukarıdaki (3.14) problemde; f, g ve a fonksiyonlarına bırakılan uygun koşullar altında, varyasyonel metodu ile birlikte Ricceri teoremini kullanarak problemin sıfırdan farklı en az üç tane zayıf çözümün varlığını $W^{1,p(x)}$ uzayında göstermişlerdir.

Allaoui, vd. (2012) de yaptıkları çalışmalarında, aşağıdaki $p(x)$ -Laplace operatörünü içeren Steklov sınır değer problemi için zayıf çözümlerin varlığı ve katlılığı incelemiştir;

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = |u|^{p(x)-2}u, & x \in \Omega \\ |\nabla u|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda f(x, u), & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.15)$$

Denklemde; $\lambda > 0$ reel bir sayı, $N \geq 2$ olmak üzere $\Omega, \mathbb{R}^N$ de düzgün sınırlı bir bölge, $p \in C(\bar{\Omega})$ ve $\nu, \partial\Omega$ 'da normal vektördür. Ayrıca; $f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Carathéodory

koşulunu sağlayan fonksiyonudur. Yazarlar (3.15) probleminde, f fonksiyonuna bırakılan uygun koşullar ile birlikte, Mountain-Pass teoremi ile sıfırdan farklı en az bir zayıf çözümünün varlığından, Fountain teoremi ile sonsuz çözümün varlığından ve Ricceri teoremi ile de en az üç tane zayıf çözümünün varlığını $W^{1,p(x)}$ uzayında gösterilmiştir.



4. $p(x)$ – LAPLACE OPERATÖRÜNÜ İÇEREN AĞIRLIKLI STEKLOV SINIR DEĞER PROBLEMİ İÇİN ÇÖZÜMLERİN VARLIĞI

4.1 Temel Problem

Bu bölüm de standart olmayan büyüme koşullarını içeren ağırlıklı eliptik Steklov problemi üzerinde çalışılacak. Bu çalışmada değişken üslü Sobolev uzayında uygun koşullar altında, (4.1) probleminin sıfırdan farklı en az bir zayıf çözümün varlığını elde edeceğiz. Bu problemin, sıfırdan farklı en az bir zayıf çözümün varlığını gösterirken aşağıdaki yol izlenir:

İlk olarak, $(v_n) \subset F$ bir Palais-Smale dizi alıp (Tanım 3.2.9) ve bu (v_n) dizinin F uzayında Palais-Smale koşulunu (Tanım 3.2.10) sağladığı gösterilecektir. Bunun için de öncelikle, (v_n) dizinin F uzayında sınırlı olduğunun ispatı yapılacaktır. Bu (v_n) dizinin F uzayında sınırlı olduğu gösterildiği zaman, (v_n) dizinin F uzayında zayıf yakınsak olduğu gösterilmiş olur. Bu durum da (v_n) dizinin F uzayında yakınsak bir alt dizisinin varlığı gösterilmiş olur. Çünkü F uzayı yansılmalı Banach uzay olduğundan dolayı, F uzayındaki her sınırlı dizi zayıf yakınsak bir alt diziye sahiptir. Daha sonra da (v_n) dizinin F uzayında güçlü yakınsaklığı, Kompakt gömme teoremlerin yardımıyla araştırılacaktır. Böylece, (v_n) dizinin F uzayında Palais-Smale koşulunu sağladığı gösterilmiş olur. Bu durumda, Teorem 3.2.11 den ϕ_λ fonksiyoneli F uzayında alttan sınırlı ve ϕ_λ fonksiyoneli Palais-Smale koşulunu sağlıyorsa, bu durumda $\phi_\lambda(v) = \inf_{u \in F} \phi_\lambda(u)$ olacak şekilde bir $v \in F$ minimize fonksiyonu vardır (Willem, 1996; Winslow, 1949). Böylece, ϕ_λ fonksiyoneli Palais-Smale koşulunu ve Teorem 3.2.14 ‘deki Mountain-Pass Geometri teoremini sağlarsa, o zaman ϕ_λ fonksiyoneli en az bir kritik noktaya sahip olur ve bu kritik nokta aynı zaman da denklemin sıfırdan farklı en az bir zayıf çözümünün olduğu sonucuna varılır.

Bu çalışmada aşağıdaki (4.1), lineer olmayan Steklov sınır değer problemi çalışılacaktır:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, \nabla v)) = f(x, v), & x \in E \\ a(x, \nabla v) \frac{\partial v}{\partial \omega} = \lambda h(x) |v|^{r(x)-2} v, & x \in \partial E. \end{cases} \quad (4.1)$$

(4.1) de; $E \subset \mathbb{R}^N (N \geq 2)$ düzgün sınır sahip olan sınırlı bir bölge, $\lambda > 0$ bir parametre, her $y \in \partial E$ ve $x \in \overline{E}$ için $p(x) \in C(\overline{E})$ ve $\inf_{x \in \overline{E}} p(x) > 1$, $r(x) \in C(\partial E)$ için de $\inf_{x \in \partial E} r(x) > 1$ ve $p(x) \neq r(y)$. Ayrıca $f: \overline{E} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ile tanımlı bir Carathéodory fonksiyondur ve $h(x) \in L^\infty(\partial E)$ bir ağırlık fonksiyonudur. Diğer taraftan, $A(x, \theta): \overline{E} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ bir Carathéodory fonksiyonu ve bu fonksiyonun θ 'ya göre sürekli türevi; $a(x, \theta): \overline{E} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ fonksiyon olsun yani $a(x, \theta) = \nabla_\theta A(x, \theta)$. $\text{div}(a(x, \nabla v))$, $p(x)$ - Laplace operatörüdür ve ω , ∂E üzeri normal vektörüdür.

Bu çalışmada, a ve A aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde kabul edilecektir;

(A₁) Her $x \in \overline{E}$ ve $\theta \in \mathbb{R}^N$ için bir $c_1 > 0$ sabiti vardaki aşağıdaki büyüme koşulunu sağlasın:

$$|a(x, \theta)| \leq c_1(1 + |\theta|^{p(x)-1}),$$

(A₂) Her $x \in \overline{E}$ için $A(x, 0) = 0$,

(A₃) Her $\theta, \eta \in \mathbb{R}^N$ ve $x \in \overline{E}$ için $a(x, \cdot)$ operatörü aşağıdaki monotonluk koşulu sağlar:

$$(a(x, \theta) - a(x, \eta))(\theta - \eta) \geq 0$$

eşitlik durumu ancak ve ancak $\theta = \eta$ durumunda sağlar,

(A₄) Her $\theta \in \mathbb{R}^N$ ve $x \in \overline{E}$ için aşağıdaki koşul sağlansın

$$|\theta|^{p(x)} \leq a(x, \theta) \cdot \theta \leq p(x) \cdot A(x, \theta).$$

Üstelik burada,

$$p^\partial(x) = \begin{cases} (N-1)p(x)/N - p(x), & p(x) < N \\ \infty, & p(x) \geq N \end{cases}$$

ve

$$p^*(x) = \begin{cases} Np(x) / N - p(x), & p(x) < N \\ \infty, & p(x) \geq N \end{cases}$$

Teorem 4.1.1

Eğer (A1) - (A4), $p^+ < r^- \leq r(x) < p^\partial(x)$, $\kappa < r^-$ ve aşağıdaki koşullar sağlarsa:

(F₁): $s(x) \in C(\overline{E})$ olmak üzere $r(x) < r^+ < s^- \leq s(x) < p^*(x)$ için,

$f: \overline{E} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Carathéodory fonksiyonu aşağıdaki koşulu sağlıyor;

$$f(x, t) \leq c_2 + c_3 |t|^{s(x)-1},$$

burada $c_2, c_3 > 0$ birer sabitler,

(F₂): Bütün $x \in \overline{E}$ ve $p^+ < s^-$ için $t \rightarrow 0$ iken $f(x, t) = o(|t|^{p^+-1})$ sağlanacak,

(F₃): $\kappa > p^+$ ve $K > 0$ sabitleri bulunsun ki her $|t_1| \geq K$ ve $x \in \overline{E}$ için

$$0 < \kappa F(x, t_1) \leq f(x, t_1) t_1,$$

o zaman herhangi $\lambda \in (0, \infty)$ için (4.1) probleminin sıfırdan farklı en az bir zayıf çözümü $W_0^{1,p(x)}(E)$ uzayında vardır.

4.2 Temel Sonuçlar

Burada $W_0^{1,p(x)}(E)$ değişken üslü Sobolev uzayına F ile göstereceğiz.

Tanım 4.2.1

Bütün $u \in F$ için

$$\int_E a(x, \nabla v) \nabla u \, dx - \int_E f(x, v) u \, dx - \lambda \int_{\partial E} h(x) |v|^{r(x)-2} u v \, d\sigma = 0$$

eşitliğini sağlayan $v \in F$ fonksiyonuna (4.1) probleminin bir zayıf çözümü denir.

(4.1) problemimize karşılık gelen enerji fonksiyonu $\phi_\lambda(v): E \rightarrow \mathbb{R}$

$$\phi_\lambda(v) = \int_E A(x, \nabla v) \, dx - \int_E F(x, v) \, dx - \lambda \int_{\partial E} \frac{h(x)}{r(x)} |v|^{r(x)} \, d\sigma$$

olur ve burada

$$\psi(v) = \int_E A(x, \nabla v) \, dx \text{ ve } \varphi(v) = \int_E F(x, v) \, dx$$

olarak alalım.

Yardımcı Teorem 4.2.2

(i) Her $(x, \eta) \in (\bar{E}, \mathbb{R}^N)$ için $A(x, \eta)$ operatörü aşağıdaki büyüme koşulunu sağlar;

$$|A(x, \eta)| \leq c_4(|\eta| + |\eta|^{p(x)})$$

bir c_4 pozitif sabittir.

(ii) $A(x, \eta)$, $p(x)$ – homojendir; yani, her $(x, \eta) \in (\bar{E}, \mathbb{R}^N)$ ve $M > 1$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır;

$$A(x, M\eta) \leq M^{p(x)} A(x, \eta)$$

İspat:

(i) Her $(x, \eta) \in (\bar{E}, \mathbb{R}^N)$ için

$$A(x, \eta) = \int_0^1 \frac{d}{ds} A(x, \eta s) ds = \int_0^1 a(x, \eta s) ds \quad (4.2)$$

(4.2) eşitliğinde, (A_1) koşulunu kullanarak aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir;

$$\begin{aligned} A(x, \eta) &\leq \int_0^1 a(x, \eta s) ds < \int_0^1 (1 + |s|^{p(x)-1} |\eta|^{p(x)-1}) |\eta| ds \\ &\leq c \int_0^1 a(|\eta| + |s|^{p(x)-1} |\eta|^{p(x)}) ds \\ &\leq c_4(|\eta| + |\eta|^{p(x)}) \end{aligned}$$

(ii) Her $(x, \eta) \in (\bar{E}, \mathbb{R}^N)$ ve $M > 1$ için $h(s) = A(x, s\eta)$ olarak tanımlayalım. O zaman;

$$h'(s) = \frac{d}{ds} A(x, s\eta) = \frac{1}{s} a(x, s\eta) \eta \quad (4.3)$$

olur. O halde, (A_3) koşulunu (4.3) kullanarak;

$$h'(s) = \frac{1}{s} a(x, s\eta) \eta \leq \frac{p(x)}{s} A(x, s\eta) = \frac{p(x)}{s} h(s) \quad (4.4)$$

olur. (4.4) eşitliğini düzenlersek;

$$\frac{h'(s)}{h(s)} = \frac{p(x)}{s} \quad (4.5)$$

şeklinde yazılır. (4.5) eşitliğini her iki tarafını $(1, M)$ aralığında integrali alınırsa,

$$\int_1^M \frac{h'(s)}{h(s)} ds \leq \int_1^M \frac{p(x)}{s} ds \quad (4.6)$$

eşitliliği yazılır ve (4.6) eşitsizliğinden de

$$\log h(M) - \log h(1) \leq p(x) \log M$$

olur. Buradan da

$$\frac{h(M)}{h(1)} \leq M^{p(x)} \quad (4.7)$$

yazılır. (4.7) eşitsizlikte, $h(M) = A(x, M\eta)$ fonksiyonunu kullanırsak;

$$A(x, M\eta) \leq M^{p(x)} A(x, \eta)$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 4.2.3

(i) $\psi(v)$ fonksiyoneli, F üzerinde iyi tanımlı fonksiyondur.

(ii) $\psi(v) \in C^1(F, R)$ ve her $\chi, v \in F$ için $\psi(v)$ türevi;

$$\langle \psi'(v), \chi \rangle = \int_E a(x, \nabla v) \nabla \chi \, dx$$

olur,

(iii) $\psi(v)$ fonksiyoneli F uzayında alttan zayıf yarı süreklidir,

(iv) $\phi_\lambda(v)$ fonksiyoneli F uzayında alttan zayıf yarı süreklidir,

(v) $\phi_\lambda(v)$ fonksiyoneli F uzayında iyi tanımlıdır,

(vi) Her $u, v \in F$ ve $L > 0$ sabiti için

$$\psi\left(\frac{v+u}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\psi(v) + \frac{1}{2}\psi(u) - L\|v-u\|^{p^-}$$

(vii) Her $u, v \in F$ için

$$\psi(u) - \psi(v) \geq \langle \psi'(u), u - v \rangle$$

(Deng, 2008; Kováčik, 1991).

Yukardaki teoremlerin bir sonucu olarak, $\phi_\lambda \in C^1(F, R)$ yazılabilir. Ayrıca, ϕ_λ fonksiyonun kritik noktaları, aynı zaman da (4.1) denkleminin birer zayıf çözümüdür.

O halde; her $u, v \in F$ için ϕ_λ fonksiyonun türevi $\phi'_\lambda: F \rightarrow \mathbb{R}$

$$\langle \phi'_\lambda(v), u \rangle = \int_E a(x, \nabla v) \nabla u \, dx - \int_E f(x, v) u \, dx - \lambda \int_{\partial E} h(x) |v|^{r(x)-2} v u \, d\sigma$$

şeklinde olur.

Yardımcı Teorem 4.2.4

Eğer $(F_1) - (F_3)$ ve $(A_1) - (A_4)$ koşulları sağlanırsa, o zaman aşağıdaki ifadeler de sağlanır;

- (i) Herhangi bir $v \in F$ için ve $\tau, \gamma > 0$ pozitif sabitler için $\phi_\lambda(v) \geq \gamma > 0$ ve $\|v\| = \tau$ koşulu sağlanır,
- (ii) $\|\omega_1\| > \tau$ ve $\phi_\lambda(\omega_1) < 0$ sağlayacak şekilde bir $\omega_1 \in F$ vardır.

İspat:

(i) $\|v\| < 1$ olsun. Bu durumda (F_1) ve (F_2) koşullarından aşağıdaki eşitsizlik elde edilir; $(x, v) \in E \times \mathbb{R}$ olmak üzere

$$|F(x, v)| \leq \varepsilon_1 |v|^{p^+} + c_\varepsilon |v|^{s(x)} \quad (4.8)$$

(4.8) eşitsizlikteki $\varepsilon_1, c_\varepsilon > 0$ birer pozitif sabitlerdir. $\phi_\lambda(v)$ enerji fonksiyonunel da, Teorem 2.7.6, Teorem 2.9.2 ve $p^+ < r(x), p^+ < r^-$, (4.8) ve (A_4) kullanarak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz;

$$\begin{aligned} \phi_\lambda(v) &= \int_E A(x, \nabla v) dx - \int_E F(x, v) dx - \lambda \int_{\partial E} \frac{h(x)}{r(x)} |v|^{r(x)} d\sigma \\ &\geq \int_E \frac{1}{p(x)} |\nabla v|^{p(x)} dx - \int_E \varepsilon_1 |v|^{p^+} dx - \int_E c_\varepsilon |v|^{s(x)} dx \\ &\quad - \lambda \int_{\partial E} h(x) \frac{1}{r(x)} |v|^{r(x)} d\sigma \end{aligned} \quad (4.9)$$

Ayrıca, Teorem 2.9.4 kullanarak da aşağıdaki sürekli gömmeleri yazabiliriz

$$F \hookrightarrow L^{p^+}(E), F \hookrightarrow L^{s(x)}(E) \text{ ve } F \hookrightarrow L_{h(x)}^{r(x)}(\partial E).$$

Bu süreklilik gömmelerin bir sonucu olarak da, her $v \in F$ için aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz

$$|v|_{p(x)}^{p^+} \leq c_5 \|v\|^{p^+}, |v|_{s(x)}^{s^-} \leq c_6 \|v\|^{s^-} \text{ ve } |v|_{L_{h(x)}^{r(x)}(\partial E)}^{r^-} \leq c_7 \|v\|^{r^-} \quad (4.10)$$

bu eşitsizliklerde c_5, c_6 ve c_7 birer pozitif sabittir. Üstelik; (4.9) eşitsizliğin de (4.10) kullanarak,

$$\phi_\lambda(v) \geq \frac{1}{p^+} \|v\|^{p^+} - c_8(\varepsilon_1 + c_\varepsilon) \|v\|^{p^+} - \frac{\lambda}{r^-} c_7^{r^-} \|v\|^{r^-} \quad (4.11)$$

Burada da, c_8 pozitif bir sabittir. (4.11) deki eşitsizlikte, $\varepsilon_1 > 0$ yeterince küçük seçersek ve $c_8(\varepsilon_1 + c_\varepsilon) < \frac{1}{2p^+}$ olarak seçilirse

$$\begin{aligned} \phi_\lambda(v) &\geq \frac{1}{p^+} \|v\|^{p^+} - c_8(\varepsilon_1 + c_\varepsilon) \|v\|^{p^+} - \frac{\lambda}{r^-} c_7^{r^-} \|v\|^{r^-} \\ &\geq \frac{1}{2p^+} \|v\|^{p^+} - \frac{\lambda}{r^-} c_7^{r^-} \|v\|^{r^-} \\ &= \|v\|^{p^+} \left(\frac{1}{2p^+} - \frac{\lambda}{r^-} c_7^{r^-} \|v\|^{r^- - p^+} \right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

eşitsizliğini elde edebiliriz. (4.12) deki eşitsizlikte, özel olarak $H: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$H = \frac{1}{2p^+} - \frac{\lambda}{r^-} c_7^{r^-} \|v\|^{r^- - p^+}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda, $p^+ < r^-$ olduğundan H fonksiyonun sıfırın bir komşuluğunda kesinlikle pozitiftir. O halde, $\|v\| = \tau$ iken $\phi_\lambda(v) \geq \gamma > 0$.

(ii) $v \in F$ ve $t_1 > 1$ olsun. Herbir $(x, t_1) \in E \times \mathbb{R}$ için (F_3) koşulunu kullanarak $|F(x, t_1)| \geq c_9 |t_1|^\kappa$ yazılır. Burada $c_9 > 0$ bir sabittir. O zaman, yardımcı teorem 4.2.2 kullanarak;

$$\begin{aligned} \phi_\lambda(t_1 v_1) &= \int_E A(x, t_1 \nabla v_1) dx - \int_E F(x, t_1 v_1) dx - \lambda \int_{\partial E} \frac{h(x)}{r(x)} |t_1 v_1|^{r(x)} d\sigma \\ &\leq \frac{c_{10} t_1^{p^+}}{p^-} \int_E A(x, \nabla v_1) dx - \lambda c_9 t_1^\kappa \int_E |v_1|^\kappa dx - \lambda \frac{t_1^{r^-}}{r^+} \int_{\partial E} h(x) |v_1|^{r(x)} d\sigma \end{aligned}$$

elde ederiz. Burada c_{10} bir pozitif sabittir. Yukarıdaki son eşitsizlikte $p^+ < \kappa$ koşulunu da kullandığımızda $t_1 \rightarrow \infty$ iken $\phi_\lambda(t_1 v_1) < 0$ elde edilir. Yani $\|\omega_1\| > \tau$ olduğunda $\phi_\lambda(\omega_1) < 0$ sağlayacak şekilde bir $\omega_1 = t_1 v_1$ vardır.

Yardımcı Teorem 4.2.5

Eğer (F_1) - (F_3) ve (A_1) - (A_4) koşulları sağlanırsa, o zaman ϕ_λ Palais-Smale koşulunu sağlar.

İspat:

$(v_n) \subset F$ bir Palais-Smale dizi olsun. O halde, Palais-Smale dizisinin tanımından (Tanım 3.2.9) aşağıdaki ifadeler yazılır.

$$\phi_\lambda(v_n) \rightarrow c_{11} \text{ ve } F^* \text{ uzayında } n \rightarrow \infty \text{ iken } \phi'_\lambda(v_n) \rightarrow 0 \quad (4.13)$$

Yukarıdaki F^* , F uzayının dual uzayıdır ve c_{11} pozitif bir sabittir.

Burada, öncelikle $(v_n) \subset F$ bir Palais-Smale dizi alıp ve bu (v_n) dizinin F uzayında Palais-Smale koşulunu (Tanım 3.2.10) sağladığını gösterilecektir. Bunun için de, (v_n) dizinin F uzayında sınırlı olduğunun ispatı yapılacaktır. Bu kanıtı çelişki yoluyla gerçekleştiriyoruz. Başka bir deyişle, $n \rightarrow \infty$ iken $\|v_n\| \rightarrow \infty$ gösteriyoruz. Bu durumda, $\|v_n\| > 1$ olduğunu dikkatte alarak, yardımcı teorem 4.2.2, (4.13), (F3), Teorem 2.7.6 ve $r^- > \kappa$ kullanarak ve yeterince büyük n için, aşağıdaki sonuca ulaşırız:

$$\begin{aligned} 1 + c_{11} &\geq \phi_\lambda(v_n) - \frac{1}{\kappa} \langle \phi'_\lambda(v_n), v_n \rangle \\ &= \int_E A(x, \nabla v_n) dx - \int_E F(x, v_n) dx - \lambda \int_{\partial E} \frac{h(x)}{r(x)} |v_n|^{r(x)} d\sigma \\ &\quad - \frac{1}{\kappa} \int_E a(x, \nabla v_n) \nabla v_n dx + \frac{1}{\kappa} \int_E f(x, v_n) v_n dx + \frac{\lambda}{\kappa} \int_{\partial E} h(x) |v_n|^{r(x)} d\sigma \\ &\geq \left(\frac{1}{p^+} - \frac{1}{\kappa} \right) \int_E |\nabla v_n|^{p(x)} dx - \lambda \frac{1}{r^-} \int_{\partial E} h(x) |v_n|^{r(x)} d\sigma + \frac{\lambda}{\kappa} \int_{\partial E} h(x) |v_n|^{r(x)} d\sigma \\ &\geq \left(\frac{1}{p^+} - \frac{1}{\kappa} \right) \|v_n\|^{p^-} \end{aligned} \quad (4.14)$$

(4.14) eşitsizliğinin her iki tarafını, $\|v_n\|^{p^-}$ ile bölünüp ve $n \rightarrow \infty$ limitine geçerse, $\kappa < p^+$ elde ederiz. Ancak bu sonuç, kabul koşulumuz olan $\kappa > p^+$ koşuluyla çelişir. Bu nedenle, (v_n) dizinin F uzayında sınırlı olduğunu göstermiş oluyoruz. Şimdi, (v_n) dizinin F uzayında v fonksiyonuna güçlü bir şekilde yakınsadığını kanıtlanacaktır. F uzayı yansılmalı bir uzay olduğundan, teorem 2.9.4 'dan dolayı F uzayında öyle bir alt dizisi (v_n) ve $v \in F$ vardır ki $v_n \rightharpoonup v$ (zayıf yakınsama) olur. Ayrıca teorem 2.9.4'teki kompakt gömmeler yardımıyla $F \hookrightarrow L^{s(x)}(E)$ ve $F \hookrightarrow L^{r(x)}(\partial E)$ kompakt gömmeler yazılabilir. Yani;

F uzayında $v_n \rightharpoonup v$ (zayıf yakınsak) iken

$$L^{s(x)}(E) \text{ uzayında } v_n \rightarrow v \text{ (güçlü yakınsak)} \quad (4.15)$$

olur ve

F uzayında $v_n \rightharpoonup v$ (zayıf yakınsak) iken

$$L^{r(x)}(\partial E) \text{ uzayında } v_n \rightarrow v \text{ (güçlü yakınsak)} \quad (4.16)$$

olur.

Diğer taraftan, (4.13)'den aşağıdaki ifade yazılır:

$n \rightarrow \infty$ iken $\langle \phi_\lambda'(v_n), v_n - v \rangle \rightarrow 0$. Yani;

$$\begin{aligned} & \int_E a(x, \nabla v_n) (\nabla v_n - \nabla v) dx \\ &= \langle \phi_\lambda'(v_n), v_n - v \rangle - \int_E f(x, v_n) (v_n - v) dx \\ & - \lambda \int_{\partial E} h(x) |v_n|^{r(x)-2} v_n (v_n - v) d\sigma \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

(4.17) eşitsizliğin aşağıdaki kısmı için; (F_1) ve teorem 2.6.2 kullanarak

$$\begin{aligned} & \left| \int_E f(x, v_n) (v_n - v) dx \right| \\ & \leq \left| \int_E (c_2 + c_3 |v|^{s(x)-1}) (v_n - v) dx \right| \\ & \leq c_{11} \|v_n - v\|_{s(x)} + c_{12} \| |v_n|^{s(x)-1} \|_{s'(x)} \|v_n - v\|_{s(x)} \end{aligned} \quad (4.18)$$

elde ederiz. (4.18) eşitsizliğinde, (4.15) kullanırsak;

$$n \rightarrow \infty \text{ iken } \int_E f(x, v_n) (v_n - v) dx \rightarrow 0 \quad (4.19)$$

elde ederiz. Ayrıca, (4.16) ve teorem 2.6.2'den aşağıdaki sonucu yazabiliriz:

$$n \rightarrow \infty \text{ iken } \int_{\partial E} h(x) |v|^{r(x)-2} v_n (v_n - v) d\sigma \rightarrow 0. \quad (4.20)$$

Eğer (4.19) ve (4.20), (4.17) denkleminde kullanırsak;

$$n \rightarrow \infty \text{ iken } \int_E a(x, \nabla v_n) (\nabla v_n - \nabla v) dx \rightarrow 0$$

veya

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \psi'(v_n), v_n - v \rangle = 0 \quad (4.21)$$

elde edilir. Bu durumda, (4.21) ifadesini ve yardımcı teorem 4.2.3 (vii) kullanarak;

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \psi'(v_n), v_n - v \rangle \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\psi(v) - \psi(v_n)) = \psi(v) - \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(v_n)$$

elde edilir. Yani;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(v_n) \leq \psi(v) \quad (4.22)$$

sonucuna varılır. O halde, yardımcı teorem 4.2.3 (iii) ve (4.22) eşitsizliğini kullanarak da aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(v_n) = \psi(v) \quad (4.23)$$

Şimdi, (v_n) , F uzayında v fonksiyonuna güçlü bir şekilde yakınsadığı gösterilecektir. Aksine; (v_n) , F uzayında v fonksiyonuna güçlü bir şekilde yakınsamam. Dolayısıyla, $\varepsilon > 0$ ve (v_{n_k}) dizisi (v_n) dizinin bir alt dizisi olacak şekilde bir alt dizi bulunur, böylece $\|v_{n_k} - v\| \geq \varepsilon$. Böylece, yardımcı teorem 4.2.3 (vi)'ten

$$\frac{1}{2} \psi(v) + \frac{1}{2} \psi(v_{n_k}) - \psi\left(\frac{v + v_{n_k}}{2}\right) \geq L \|v - v_{n_k}\|^{p^-} \geq L \varepsilon^{p^-} \quad (4.24)$$

elde ederiz. (4.24) eşitsizliğinde $k \rightarrow \infty$ alırsak ve (4.23) kullanarak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \psi\left(\frac{v + v_{n_k}}{2}\right) \leq \psi(v) - L \varepsilon^{p^-} \quad (4.25)$$

Diğer taraftan, Teorem 2.9.4'ü kullanarak, $\left(\frac{v + v_{n_k}}{2}\right)$ ifadesinin v fonksiyonuna F uzayında zayıf olarak yakınsadığını da biliyoruz. O halde, yardımcı teorem 4.2.3 (iii)'ü kullanarak şunu yazabiliriz:

$$\psi(v) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \psi\left(\frac{v + v_{n_k}}{2}\right)$$

ve bu eşitsizlikte (4.25) eşitsizliğiyle bir çelişki oluşturur. Yani;

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \psi\left(\frac{v + v_{n_k}}{2}\right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \psi\left(\frac{v + v_{n_k}}{2}\right) - L \varepsilon^{p^-}$$

Dolayısıyla, (v_n) dizisinin F uzayında v fonksiyonuna güçlü bir şekilde yakınsadığı sonucunu elde ederiz.

Teorem 4.2.1 ispatı

Yukarıda ıspatladığımız, yardımcı teorem 4.2.4, yardımcı teorem 4.2.5 ve (A_2) koşulundan $\phi_\lambda(0) = 0$ koşulların hepsi Teorem 3.2.14 koşullarıdır. Yani, Teorem 3.2.14 ıspatlamış olduk. Dolayısıyla, herhangi bir $\lambda \in (0, \infty)$ için, problem (4.1)'in F uzayında sıfır dan farklı en az bir zayıf çözümü var olduğunu elde ederiz (Willem,1996).



5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Ambrosetti- Rabinowitz koşulu ile birlikte Mountain-Pass teoremini kullanarak sıfırdan farklı en az bir zayıf çözümünün varlığı değişken üslü Sobolev uzayında çalışılmıştır.

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, \nabla v)) = f(x, v), & x \in E \\ a(x, \nabla v) \frac{\partial v}{\partial \omega} = \lambda h(x) |v|^{r(x)-2} v, & x \in \partial E, \end{cases}$$

Bu çalışmada;

İlk olarak Ricceri teoremi kullanarak, yukarıdaki problemin sıfırdan farklı en az üç zayıf çözümünün varlığını değişken üslü Sobolev uzayında çalışılabilir.

İkinci olarak da; Mountain-Pass teoremini ile birlikte Ekeland Varyasyonel yaklaşımını kullanarak, sıfırdan farklı en az bir zayıf çözümünün varlığı değişken üslü Sobolev uzayında çalışılabilir.

Üçüncü olarak; Fountain teoremi, Dual Fountain teoremi ve Mountain-Pass teoremini kullanarak problemin çözümlerinin varlığı ve katlılığı değişken üslü Sobolev uzayında çalışılabilir.

KAYNAKLAR

- Aboulaich, R., Meskine, D., and Souissi, A. (2008). New diffusion models in image processing. *Comput. Math. Appl.*, 56(4), 874–882.
- Acerbi, E., and Mingione, G. (2002). Regularity results for electrorheological fluids: the stationary case. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 334(9), 817–822.
- Acerbi, E., and Mingione, G. (2002). Regularity results for stationary electrorheological fluids. *Archive For Rational Mechanics And Analysis*, 164(3), 213–259.
- Acerbi, E., and Mingione, G. (2005). Gradient estimates for the $p(x)$ -Laplacian system. *J. Reine Angew. Math.*, 584, 117–148.
- Adams, R. A. (1975). *Sobolev Spaces*. Academic Press. New York.
- Adams, R. A., and Fournier, J. J. F. (2003). *Sobolev Spaces*. Netherlands: Elsevier Science.
- Ali, K. B., Ghanmi, A., and Kefi, K. (2017). On the Steklov problem involving the $p(x)$ –Laplacian with indefinite weight. *Opuscula Mathematica*, 37(6), 779-794.
- Allaoui, M., El Amrouss, A. R., and Ourraoui, A. (2012). Existence and multiplicity of solutions for a Steklov problem involving the $p(x)$ –Laplace operator. *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. 2012 (2012), No. 132, 1-12.
- Allaoui, M. (2015). Continuous spectrum of Steklov nonhomogeneous elliptic problem. *Opuscula Mathematica*, 35(6), 3-866.
- Amaziane, B., Pankratov, L., and Piatnitski, A. (2009). Nonlinear flow through double porosity media in variable exponent Sobolev spaces. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 10(4), 2521–2530.
- Ambrosetti, A., and Rabinowitz, P. H. (1973). Dual variational methods in critical point theory and applications. *Journal of Functional Analysis*, 14, 349-381.
- Antontsev, S. N. and Shmarev, S. I. (2005). A model porous medium equation with variable exponent of nonlinearity: existence, uniqueness and localization properties of solutions. *Nonlinear Analysis*, 60(3), 515–545.
- Ayazoğlu, R., Akbulut, S., and Akkoyunlu, E. (2022). Existence and multiplicity of solutions for $p(\cdot)$ –Kirchhoff-type equations. *Turkish Journal of Mathematics*, 46(4), 1342-1359. doi: 10.55730/1300-0098.3164
- Balcı, M. (2010). *Matematik Analiz*. Turkey: Balcı.
- Birnbaum, Z. W. and Orlicz, W. (1931). Über die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen. *Studia Mathematica*, 3, 1–67.
- Blomgren, P., Chan, T., Mulet, P., and Wong, C. K. (1997). Total variation image restoration: numerical methods and extensions. In *Proceedings of the 1997 IEEE International Conference on Image Processing* (Vol. III, pp. 384-387).
- Bonanno, G., and Chinnì, A. (2014). Existence and multiplicity of weak solutions for elliptic Dirichlet problems with variable exponent. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 418(2), 812-827.

- Brezis, H., (2011). Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations (Vol. 2, No. 3, p. 5). New York: Springer.
- Calotă, L. (2008). On some quasilinear elliptic equations with critical Sobolev exponents and non-standard growth conditions. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin*, 15, 249-256.
- Castillo, R. E. and Rafeiro, H. (2016). *An Introductory Course in Lebesgue Spaces*. Switzerland: Springer International Publishing AG.
- Chammem, R., Ghanmi, A., and Sahbani, A. (2022). Existence and multiplicity of solutions for some Styklov problem involving $p(x)$ -Laplacian operator. *Applicable Analysis*, 101(7), 2401-2417. doi: 10.1080/00036811.2020.1807014.
- Chammem, R., and Sahbani, A. (2023). Existence and multiplicity of solutions for some Steklov problem involving $(p_1(x), p_2(x))$ -Laplacian operator. *Applicable Analysis*, 102(3), 709-724. doi: 10.1080/00036811.2021.1961758.
- Chen, Y., Levine, S., and Rao, M. (2006). Variable exponent, linear growth functionals in image restoration. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 66(4), 1383-1406.
- Cruz-Uribe, D. and Fiorenza, A. (2013), *Variable Lebesgue spaces, Foundations and Harmonic Analysis*, Birkhauser/Springer, Heidelberg.
- Çekiç, B. (2005). The inequalities of embedding type in lebesgue and sobolev spaces with variable exponent. (Doctoral thesis). University of Dicle: Diyarbakır.
- Deng, S. G. (2008). Eigenvalues of the $p(x)$ –Laplacian Steklov problem. *Journal of mathematical analysis and applications*, 339(2), 925-937.
- Diening, L., , Harjulehto, P., Hästö, P., ..., Růžička, M. (2011). *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents*, *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 2017, Springer, Heidelberg, 2011.
- Diening, L., and Růžička, M. (2003). Calderón-Zygmund operators on generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$ and problems related to fluid dynamics. *J. Reine Angew. Math. (Crelles Journal)*, 563, 197-220.
- Diening, L., and Růžička, M. (2004). Integral operators on the halfspace in generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$ I. *J. Math. Anal. Appl.*, 298(2), 559-571.
- Diening, L., and Růžička, M. (2004). Integral operators on the halfspace in generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$ II. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 298(2), 572-588.
- Diening, L., and Růžička, M. (2007). Non-Newtonian fluids and function spaces. In *NAFSA 8—Nonlinear analysis, function spaces and applications* (Vol. 8, pp. 94-143). Czech. Acad. Sci., Prague.
- Drabek, P., Kufner, A., Nicolosi, F. (1996). *Nonlinear Elliptic equations*. University of West Bohemia in Pilsen.
- Duc, D. M. (1989). Nonlinear singular elliptic equations. *Journal of the London Mathematical Society* (2), 40, 420-440.
- Edmunds, D., Răkosnik, J. (2000). Sobolev embeddings with variable exponent. *Studia Math.* 143, 267-293.

- Fan, X. (1996). Regularity of nonstandard Lagrangians $f(x, \xi)$. *Nonlinear Anal.*, 27(6), 669-678.
- Fan, X. (1996). The regularity of Lagrangians $f(x, \xi) = |\xi|^{\alpha(x)}$ with Hölder exponents $\alpha(x)$. *Acta Math. Sinica (N.S.)*, 12(3), 254–261. (A Chinese summary appears in *Acta Math. Sinica*, 40(1), 158).
- Fan, X., and Zhao, D. (1996). Regularity of minimizers of variational integrals with continuous $p(x)$ -growth conditions. *Chinese J. Contemp. Math.*, 17(4), 327-336.
- Fan, X., and Zhao, D. (1996). Regularity of minimum points of variational integrals with continuous $p(x)$ -growth conditions. *Chinese Ann. Math., Ser. A*, 17(5), 557-564.
- Fan, X. L., Shen, J. S., Zhao, D. (2001). Sobolev embedding theorems for spaces $W^{k,p(x)(\cdot)}$. *J. Math. Anal. Appl.* 262, 749-760 .
- Fan, X. L. and Zhao, D. (2001). On the spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 263, 424–446.
- Fan, X. L., and Zhang, Q. H. (2003). Existence of solutions for $p(x)$ –Laplacian Dirichlet problem. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 52(8), 1843-12.
- Fan, X. L., and Han, X. (2004). Existence and multiplicity of solutions for $p(x)$ -Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$. *Nonlinear Analysis*, 59, 173-188.
- Fan, X. L. (2005). Solutions for $p(x)$ -Laplacian Dirichlet problems with singular coefficients. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 312, 464-477.
- Fan, X. L., Zhang, Q., Zhao, D. (2005). Eigenvalues of $p(x)$ -Laplacian Dirichlet problem. *J. Math. Anal. Appl.* 302, 306-317. MR2107835 (2005m:35213).
- Halsey, T. C. (1992). Electrorheological fluids. *Science, New Series*, 258(5083), 761-766.
- Hamdani, M. K., Harrabi, A., Mtiri, F., and Repovš, D. D. (2019). Existence and multiplicity results for a new $p(x)$ -Kirchhoff problem. *Nonlinear Analysis*, 190 (2020), 111598.
- Harjulehto, P., Hästö, P., Latvala, V., and Toivanen, O. (2013). Critical variable exponent functionals in image restoration. *Applied Mathematics Letters*, 26(1), 56-60.
- Khosravi Rashti, M., Alimohammady, M., and Ghobadi, S. (2023). Multiple Solutions for a $p(x)$ –Laplacian Problem: A Variational Approach. *Journal of Mathematics*, 2023.
- Kinnunen, J. (2022). *Sobolev Spaces*. Finland: Department of Mathematics, Aalto University.
- Kolmogorov, A. N. (1934). Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Räumes. *Studia Math.*, 5, 29-33.
- Kováčik, O., and Rákosník, J. (1991). On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$. *Czechoslovak Math. J.*, 41(116)(4), 592-618.

- Levine, S. E. (2005). An adaptive variational model for image decomposition. In Energy Minimization Methods in Computer Vision and Pattern Recognition: 5th International Workshop, EMMCVPR 2005, St. Augustine, FL, USA, November 9-11, 2005. Proceedings 5 (pp. 382-397). Springer Berlin Heidelberg.
- Mihăilescu, M., and Rădulescu, V. (2006). A multiplicity result for a nonlinear degenerate problem arising in the theory of electrorheological fluids. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 462(2073), 2625-2641. doi: 10.1098/rspa.2005.1633.
- Mihăilescu, M., and Rădulescu, V. (2007). On a nonhomogeneous quasilinear eigenvalue problem in Sobolev spaces with variable exponent. Proceedings of the American Mathematical Society, 135(9), 2929-2937.
- Musayev, B. and Alp, M. (2000). Fonksiyonel Analiz. Turkey: Balci.
- Nakano, H. (1950). Modulated Semi-Ordered Linear Spaces. Maruzen Co. Ltd., Tokyo.
- Nakano, H. (1951). Topology and Linear Topological Spaces. Maruzen Co. Ltd., Tokyo.
- Napoli, P. D., and Mariani, M. C. (2003). Mountain pass solutions to equations of p -Laplacian type. Nonlinear Analysis, 54, 1205-1219.
- Irzi, N., and Kefi, K. (2023). The fractional $p(\cdot, \cdot)$ –Neumann boundary conditions for the nonlocal $p(\cdot, \cdot)$ –Laplacian operator. Applicable Analysis, 102(3), 839-851.
- Ogras, S., Mashiyev, R. A., Avci, M., and Yücedağ, Z. (2008). Existence of solutions for a class of elliptic systems in $\mathbb{R}^N$ involving the $(p(x), q(x))$ -Laplacian. Journal of Inequalities and Applications, Volume 2008, Article ID 612938, 16 pages. doi:10.1155/2008/612938.
- Orlicz, W. (1931). Über konjugierte Exponentenfolgen. Stud. Math., 3, 200-11.
- Pişkin, E. and Okutmuşur, B. (2017). An Introduction To Sobolev Spaces. Turkey: Bentham Books.
- Portnov, V. R. (1966). Certain properties of the Orlicz spaces generated by the functions $M(x, w)$. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 170, 1269-1272.
- Portnov, V. R. (1967). On the theory of Orlicz spaces which are generated by variable N -functions. Doklady Akademii Nauk SSSR, 175, 296-299.
- Qing-Mei, Z., and Jian-Fang, W. (2018). Existence of solutions for a class of quasilinear degenerate $p(x)$ -Laplace equations. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2018(69), 1-10.
- Růžička, M. (2000). Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory (Vol. 1748). Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin.
- Růžička, M. (2004). Modeling, mathematical and numerical analysis of electrorheological fluids. Appl. Math., 49(6), 565-609.
- Schechter, M. (2007). The use of cerami sequences in critical point theory. Abstract and Applied Analysis, 2007, Article ID 58948, 28 p.

- Sharapudinov, I. I. (1979). The topology of the space $L^{p(t)}([0,1])$. *Matematicheskie Zametki*, 26(4), 613-632, 655.
- Sharapudinov, I. I. (1983). Approximation of functions in the metric of the space $L^{p(t)}([a, b])$ and quadrature formulas. In *Constructive function theory '81* (Varna, 1981), pages 189-193. Publ. House Bulgar. Acad. Sci.
- Sharapudinov, I. I. (1986). The basis property of the Haar system in the space $L^{p(t)}([0,1])$ and the principle of localization in the mean. *Mat. Sb. (N. S.)*, 130(172)(2), 275-283, 286.
- Soykan, Y. (2008). *Fonksiyonel Analiz*. Turkey: Nobel Akademik.
- Stangroom, J. E. (1983). Electrorheological fluids. *Physics in Technology*, 14, 290-296.
- Tsenov, I. V. (1961). Generalization of the problem of best approximation of a function in the space L^S . *Uchenye Zapiski Dagestan. Gos. Univ.*, 7, 25-37.
- Vu, N. T. (2005). Mountain pass theorem and nonuniformly elliptic equations. *Vietnam Journal of Mathematics*, 33(4), 391-408.
- Willem, M. (1996). *Minimax Theorems*, Birkhauser, Basel.
- Winslow, W. M. (1949). Induced vibration of suspensions. *Journal of Applied Physics*, 20, 1137-1140.
- Wunderli, T. (2010). On time flows of minimizers of general convex functionals of linear growth with variable exponent in BV space and stability of pseudosolutions. *J. Math. Anal. Appl.*, 364(2), 591-598.
- Yamamuro, S. (1959). On conjugate spaces of Nakano spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 90, 291-311.
- Yücedağ, Z. (2015). Solutions of nonlinear problems involving $p(x)$ -Laplacian operator, *Advances In Nonlinear Analysis*, 4, 2–293.
- Yücedağ, Z. (2022). Infinitely many solutions for a $p(x)$ -Kirchhoff type equation with Steklov boundary value. *Miskolc Mathematical Notes*, Vol. 23(2), 987-999.
- Yücedağ, Z., and Murad, V. (2022). Solution for Steklov Boundary Value Problem Involving the $p(x)$ -Laplacian Operators. *Middle East Journal of Science*, 8(2), 112-121.
- Yücedağ, Z. (2023). Variational approach for a Steklov problem involving nonstandard growth conditions. *AIMS Mathematics*, 8(3), 5352-5368.
- Zerouali, A., Karim, B., Chakrone, O., and Anane, A. (2019). Existence and multiplicity results for elliptic problems with nonlinear boundary conditions and variable exponents. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*, doi:10.5269/bspm.v33i2.23355.
- Zhikov, V. V. (1982). Problems of convergence, duality, and averaging for a class of functionals of the calculus of variations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 267(3), 524-528.
- Zhikov, V. V. (1986). Averaging of functionals of the calculus of variations and

elasticity theory. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya*, 50(4), 675-710, 877.

Zhikov, V. V. (1994). On the homogenization of nonlinear variational problems in perforated domains. *Russian Journal of Mathematical Physics*, 2(3), 393-408.

Zhikov, V.V. (1997). “Meyer-type estimates for solving the nonlinear Stokes system”, *Differential Equations*, 33, 1, 108–115, 1997.

Zhikov, V. V. (1998). On some variational problems. *Russian Journal of Mathematical Physics*, 5(1), 105-116.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyad, Ad	ABDULLAHELNİMİR, Muhammed
Web sayfası (Research Gate, Academia, vs.)	-

Eğitim Bilgileri

Derece	Kurum	Mezuniyet Yılı
Lisans	Albaath Üniversitesi	2005
Lise	İbn Haldun Fen Lisesi	2001

İş Deneyimi

Dönem (Yıl)	Şirket, Kurum	Görev
2008-2010	Milli Eğitim Bakanlığı-Türkiye	Eğitim destek personeli
2016-2022	Milli Eğitim Bakanlığı-Suriye	Matematik öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce ve Arapça

Yayınlar

1. Prof. Dr. Zehra YÜCEDAĞ and YL Öğrencisi, Muhammed ABDULLAHELNİMİR,
" Existence Nontrivial Weak of Solutions for Steklov Boundary Value Problem", Avrasya
9th International Conference On Applied Sciences, November, 24- 26, 2023, TBİLİSİ
(Tam Metin Bildiri)

Özel İlgiler

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ BENZERLİK BİLDİRİMİ FORMU

Öğrencinin Adı, Soyadı	Muhammed ABDULLAHELNİMİR
Öğrenci No	21804010
Ana Bilim Dalı	Matematik
Program Türü	Proje ☐ Yüksek Lisans ☒ Doktora ☐
Tez Danışmanı (Ünvanı, Adı, Soyadı)	Prof. Dr. Zehra YÜCEDAĞ
Tez Başlığı	$p(x)$ – Laplace Operatörünü İçeren Steklov Sınır Değer Problemi İçin Çözümlerinin İncelenmesi
RAPOR BİLGİLERİ	
Raporlama Aşaması	Tez Savunma Sınavı Sonrası
Sayfa Sayısı	88
Raporlama Tarihi	17/01/2024
Benzerlik Oranı (%)	% 15

Yukarıda bilgileri verilen tez çalışmamın toplam 88 sayfalık kısmına ilişkin, 17/01/2024 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından Turnitin isimli intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 15 olarak tespit edilmiştir.

Uygulanan filtrelemeler:

- ☐Başlangıç Bölümleri (Kabul ve Onay sayfası, Teşekkür sayfası, Özet/Abstract) dahil
☐Kaynaklar dahil
☐Alıntılar dâhil
☒Diğer (Herşey Dahil)

Tezimin benzerlik oranı, Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İntihal Raporu Uygulama Esaslarında belirtilen üst sınır benzerlik oranını aşmamaktadır. Tez benzerlik oranı üst sınır benzerlik oranının altında olsa dahi aksinin tespit edilmesi durumunda her türlü yasal sorumluluğu kabul ettiğimi ve hukuki sonuçlarına razı olduğumu bildirir, gereğini arz ederim.

Öğrencinin Adı, Soyadı: Muhammed ABDULLAHELNİMİR

Tarih:

İmza:

Danışman Adı, Soyadı: Prof. Dr. Zehra YÜCEDAĞ

İmza:

Tarih:

Ana Bilim Dalı Başkanı Adı, Soyadı: Prof. Dr. H. Özlem GÜNEY

İmza:

Tarih: