

**T.C.
ERZİNCAN BİNALİ YILDIRIM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**PADOVAN, PELL-PADOVAN, PERRİN OKTONYONLARI VE
SEDENYONLARI**

Ayşe KARANLIK AKPINAR

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Yasemin TAŞYURDU

**MATEMATİK
ANABİLİM DALI**

**ERZİNCAN
2021
Her Hakkı Saklıdır.**

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

PADOVAN, PELL-PADOVAN, PERRİN OKTONYONLARI VE SEDENYONLARI

Ayşe KARANLIK AKPINAR

Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Yasemin TAŞYURDU

Bu çalışmada, Padovan, Pell-Padovan ve Perrin sayı dizileri ile oktonyonlar ve sedenyonlar kullanılarak Padovan, Pell-Padovan, Perrin oktonyonları ve sedenyonları tanımlanmıştır. Bu oktonyonlar ve sedenyonların dizileri oluşturulmuş ve bu dizilerin rekürans bağıntıları ve özellikleri elde edilmiştir. Padovan, Pell-Padovan, Perrin oktonyonlar ve sedenyonlar dizilerinin terimlerini, diziyi oluşturmadan elde etmemizi sağlayan eşitlikler sunulmuştur. Padovan, Pell-Padovan, Perrin oktonyonlarının ve sedenyonlarının matris temsilleri türetilmiştir. Ayrıca bu oktonyonlar ve sedenyonlar için üreteç fonksiyonları, Binet formülleri ve toplam formülleri verilmiştir.

2021, 84 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Padovan sayısı, Padovan oktonyonu, Padovan sedenyonu, Pell-Padovan sayısı, Pell-Padovan oktonyonu, Pell-Padovan sedenyonu, Perrin sayısı, Perrin oktonyonu, Perrin sedenyonu

ABSTRACT

MSc Thesis

PADOVAN, PELL-PADOVAN, PERRIN OCTONIONS AND SEDENIONS

Ayşe KARANLIK AKPINAR

Erzincan Binali Yıldırım University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Yasemin TAŞYURDU

In this study, Padovan, Pell-Padovan, Perrin octonions and sedenions are defined by using Padovan, Pell-Padovan and Perrin number sequences with octonions and sedenions. Sequences of these octonions and sedenions are created and the recurrence relations and properties of these sequences are obtained. Equations are presented that allow us to obtain the terms of the sequences of Padovan, Pell-Padovan, Perrin octonions and sedenions without creating the sequences. Matrix representations of Padovan, Pell-Padovan, Perrin octonions and sedenions are derived. In addition, generation functions, Binet formulas and sum formulas are given for these octonions and sedenions.

2021, 84 Pages

Keywords: Padovan number, Padovan octonion, Padovan sedenion, Pell-Padovan number, Pell-Padovan octonion, Pell-Padovan sedenion, Perrin number, Perrin octonion, Perrin sedenion

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde yapılmıştır. Bu çalışmada bana her türlü kolaylığı sağlayan ve desteklerini esirgemeyen çok değerli hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Yasemin TAŞYURDU'ya en içten dileklerle teşekkür eder saygılarımı sunarım. Matematik Bölümü'nde gerekli ilgiyi ve yardımı esirgemeyen Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Engin ÖZKAN'a, değerli öğretim üyeleri Sayın Prof. Dr. İnci GÜLTEKİN'e, Sayın Dr. Öğr. Üyesi İsrail OKUMUŞ'a ve Matematik Bölümü'nün diğer tüm öğretim elemanlarına teşekkürlerimi sunarım. Bugünlere gelmemde en büyük emeği olan babam ve anneme, çalışmalarım boyunca her türlü desteği veren eşime ve bu süreçte hayatımı şenlendiren oğluma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayşe KARANLIK AKPINAR

Eylül, 2021

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
TABLOLAR LİSTESİ.....	v
SİMGELER ve KISALTMALAR	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	7
2.1. Genel Kavramlar	7
2.2. Rekürans Diziler.....	9
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	13
3.1. Padovan, Pell-Padovan ve Perrin Sayı Dizileri.....	13
3.1.1. Padovan sayı dizileri	16
3.1.2. Pell-Padovan sayı dizileri.....	18
3.1.3. Perrin sayı dizileri	20
3.2. Bazı Hiper Kompleks Sayılar.....	23
3.3. Sayı Dizileri ile Oktonyonlar ve Sedenyonlar.....	31
3.3.1. İkinci mertebeden sayı dizilerinin oktonyonları ve sedenyonları	31
3.3.2. Üçüncü mertebeden sayı dizilerinin oktonyonları ve sedenyonları	43
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	60
4.1. Padovan, Pell-Padovan, Perrin Oktonyonları ve Sedenyonları.....	60
4.2. Padovan, Pell-Padovan, Perrin Oktonyon ve Sedenyonların Özellikleri	73
5. SONUÇ ve ÖNERİLER.....	80
5.1. Sonuçlar.....	80
5.2. Öneriler.....	80
KAYNAKLAR	81
EKLER.....	84
Ek-1. Tez Çalışması Süresince Yapılan Akademik Çalışmalar	84

TABLÖLAR LİSTESİ

	Sayfa
Tablo 3.1. Bazı üçüncü mertebeden sayı dizileri	15
Tablo 3.2. Bazı pozitif ve negatif indisli Padovan sayıları	16
Tablo 3.3. Bazı pozitif ve negatif indisli Pell-Padovan sayıları.....	19
Tablo 3.4. Bazı pozitif ve negatif indisli Perrin sayıları	21
Tablo 3.5. $\mathbb{H}$ kümesinin taban elemanlarının çarpma tablosu	25
Tablo 3.6. $\mathbb{O}$ kümesinin taban elemanlarının çarpma tablosu	26
Tablo 3.7. $\mathbb{S}$ kümesinin taban elemanlarının çarpma tablosu	29

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

C_n	n -inci Pell-Perrin Sayısı
$\{C_n\}$	Pell-Perrin Sayı Dizisi
D_n	n -inci Jacobsthal-Perrin Sayısı
$\{D_n\}$	Jacobsthal-Perrin Sayı Dizisi
E_n^3	n -inci Üçüncü Mertebeden Modifiye Pell Sayısı
$\{E_n^3\}$	Üçüncü Mertebeden Modifiye Pell Sayı Dizisi
F_n	n -inci Fibonacci Sayısı
$\{F_n\}$	Fibonacci Sayı Dizisi
$\mathbb{H}$	Kuaterniyonların Kümesi
H_n	n -inci Hordam Sayısı
$\{H_n\}$	Horadam Sayı Dizisi
J_n	n -inci Jacobsthal-Lucas Sayısı
$\{J_n\}$	Jacobsthal-Lucas Sayı Dizisi
J_n	n -inci Jacobsthal Sayısı
$\{J_n\}$	Jacobsthal Sayı Dizisi
J_n^3	n -inci Üçüncü Mertebeden Jacobsthal Sayısı
$\{J_n^3\}$	Üçüncü Mertebeden Jacobsthal Sayı Dizisi
j_n^3	n -inci Üçüncü Mertebeden Jacobsthal-Lucas Sayısı
$\{j_n^3\}$	Üçüncü Mertebeden Jacobsthal-Lucas Sayı Dizisi
K_n	n -inci Tribonacci-Lucas Sayısı
$\{K_n\}$	Tribonacci-Lucas Sayı Dizisi
L_n	n -inci Lucas Sayısı
$\{L_n\}$	Lucas Sayı Dizisi
N_n	n -inci Narayana Sayısı
$\{N_n\}$	Narayana Sayı Dizisi
OP_n	n -inci Padovan Oktonyonu
$\{OP_n\}$	Padovan Oktonyonlarının Dizisi
$O\tilde{P}_n$	n -inci Perrin Oktonyonu
$\{O\tilde{P}_n\}$	Perrin Oktonyonlarının Dizisi
OR_n	n -inci Pell-Padovan Oktonyonu
$\{OR_n\}$	Pell-Padovan Oktonyonlarının Dizisi
$\mathbb{O}$	Oktonyonların Kümesi
$\mathbb{O}V_n$	n -inci Genelleştirilmiş Tribonacci Oktonyonu
$\{\mathbb{O}V_n\}$	Genelleştirilmiş Tribonacci Oktonyonlarının Dizisi

$\odot W_n$	n -inci Horadam Oktonyonu
$\{\odot W_n\}$	Horadam Oktonyonlarının Dizisi
P_n	n -inci Padovan Sayısı
$\{P_n\}$	Padovan Sayı Dizisi
$\tilde{P}_n$	n -inci Perrin Sayısı
$\{\tilde{P}_n\}$	Perrin Sayı Dizisi
$\mathcal{P}_n$	n -inci Pell Sayısı
$\{\mathcal{P}_n\}$	Pell Sayı Dizisi
R_n	n -inci Pell-Padovan Sayısı
$\{R_n\}$	Pell-Padovan Sayı Dizisi
P_n^3	n -inci Üçüncü Mertebeden Pell Sayısı
$\{P_n^3\}$	Üçüncü Mertebeden Pell Sayı Dizisi
SP_n	n -inci Padovan Sedenyonu
$\{SP_n\}$	Padovan Sedenyonlarının Dizisi
$S\tilde{P}_n$	n -inci Perrin Sedenyonu
$\{S\tilde{P}_n\}$	Perrin Sedenyonlarının Dizisi
SR_n	n -inci Pell-Padovan Sedenyonu
$\{SR_n\}$	Pell-Padovan Sedenyonlarının Dizisi
$\mathbb{S}$	Sedenyonların Kümesi
S_n	n -inci Padovan-Perrin Sayısı
$\{S_n\}$	Padovan-Perrin Sayı Dizisi
SV_n	n -inci Genelleştirilmiş Tribonacci Sedenyonu
$\{SV_n\}$	Genelleştirilmiş Tribonacci Sedenyonlarının Dizisi
$\mathbb{S}W_n$	n -inci Horadam Sedenyonu
$\{\mathbb{S}W_n\}$	Horadam Sedenyonlarının Dizisi
Q_n^3	n -inci Üçüncü Mertebeden Pell-Lucas Sayısı
$\{Q_n^3\}$	Üçüncü Mertebeden Pell-Lucas Sayı Dizisi
Q_n	n -inci Pell-Lucas Sayısı
$\{Q_n\}$	Pell-Lucas Sayı Dizisi
$\mathcal{Q}_n$	n -inci Jacobsthal-Padovan Sayısı
$\{\mathcal{Q}_n\}$	Jacobsthal-Padovan Sayı Dizisi
T_n	n -inci Tribonacci Sayısı
$\{T_n\}$	Tribonacci Sayı Dizisi
V_n	Genelleştirilmiş Tribonacci Sayı Dizisi
W_n	n -inci Horadam Sayısı

1. GİRİŞ

İnsanlık tarihi içinde verilen yaşam mücadelesini, araştırmalar sonucunda edinilmiş bilgilerin aklın ve mantığın çerçevesinde değerlendirilmesi belirlemektedir. Yıllardır yapılan araştırmalar evrenin rastgele değil kuşkusuz sistematik bir ölçü içerisinde yaratıldığını ortaya koymuştur. Bu sistematik evrenin temelini sayılar ile matematik düzeni olmuştur. Bu düzeni görmemizde en etkili olan sayılardan biri değeri 1,61803... olan oran olmuştur. Bu oran antik çağdan beri matematikçilerin, fizikçilerin, filozofların, sanatçıların ve hatta müzisyenlerin ilgilendiği bir konu olmuş ve altın oran, altın ortalama, altın bölüm, altın kesit, ilahi (kutsal) orantı, Fibonacci sayısı ve Phidias ortalaması şeklinde de adlandırılmıştır. Daha sonraki yıllarda araştırmacıların dikkatini mimaride ve matematikte uygulama alanı fazla olan ve altın orana benzeyen “Plastik Oran” çekmiştir. Bu oran $x^3 - x - 1 = 0$ denkleminin tek reel çözümü olup değeri $\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} \cong 1,32471 \dots$ şeklindedir. Diğer taraftan ilgi çeken konulardan biri de $x^3 - x - 1 = 0$ denkleminin, bilim insanlarının yıllardır incelediği rekürans dizilerden olan Padovan ve Perrin sayı dizilerinin de karakteristik denklemi olduğudur.

Horadam, 1965 yılındaki çalışmasında ikinci mertebeden rekürans diziyi $p, q, n \geq 2$ tam sayılar ve $W_0 = a, W_1 = b$ keyfi reel sayılar olmak üzere

$$W_n = pW_{n-1} - qW_{n-2}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlamıştır. Yaygın olarak bilinen sayı dizileri arasında en meşhur ikinci mertebeden sayı dizisi Fibonacci sayı dizisidir.

Fibonacci sayı dizisinin en iyi bilinen genelleştirmesi Tribonacci sayı dizisidir. Genelleştirilmiş Tribonacci sayı dizisi $\{V_n(a, b, c; r, s, t)\}_{n \geq 0}$, r, s, t reel sayılar ve $V_0 = a, V_1 = b, V_2 = c$ keyfi kompleks sayılar olmak üzere

$$V_n = rV_{n-1} + sV_{n-2} + tV_{n-3}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanmıştır. En iyi bilinen üçüncü mertebeden sayı dizileri arasında Padovan, Pell-Padovan ve Perrin sayı dizileri vardır.

İkinci ve üçüncü mertebeden sayı dizileri cebir, fizik, biyoloji, kimya, bilgisayar bilimi gibi birçok farklı alanda uygulamaları vardır ve dizilerin terimleri modern bilimde hem teorik hem de uygulamalı olarak çok geniş alanda çalışılmaktadır. Birçok çalışmada ikinci ve üçüncü mertebeden sayı dizilerinin Binet formülleri, üreteç fonksiyonları, toplam formülleri, matris temsilleri ve önemli eşitlikleri sunulmuştur (Feinberg, 1963; Horadam, 1965; Vorobyov 1976; Vajda, 1989; Koshy, 2001; Everest, vd., 2003; Shannon, vd., 2006; Kritsana, 2013; Li, vd., 2014; Gültekin ve Taşyurdu, 2013; Taşyurdu ve Gültekin, 2016; Taşyurdu, 2018, 2019).

Cebirde en önemli sayılar olan hiper kompleks sayılara, İrlandalı matematikçi William Rowan Hamilton tarafından temeli oluşturulmuştur. Optik, dinamik ve cebir üzerine önemli katkıları bulunan iyi bir matematikçi olmasının yanında iyi bir fizikçi ve astronomdur. İsminden söz ettirdiği en bilinen keşfi kuaterniyonlardır.

Kuaterniyonlar (dördeyler, dördübir, kvarterniyon) ilk olarak William Rowan Hamilton (1805-1865) tarafından 1843 yılında keşfedilmiştir. Kuaterniyonlar karmaşık sayıların genişletilmesiyle elde edilen bir sayı sistemidir. Hamilton'un kuaterniyonları keşfinden önce karmaşık sayılar 2 boyutlu uzayda düşünülmekteydi. Uzaydaki noktalar en fazla üçlü vektörel olarak gösterilmekle beraber toplama, çıkarma işlemi yapılmakta ancak çarpma ve bölme işlemleri yapılamamaktaydı. Hamilton, karmaşık sayıların 2 boyutlu değil 3 boyutlu uzayda düşünülmesi gerektiğini fark ederek ve bu karmaşaya bir son vermiştir. Bununla beraber karmaşık sayıların, 3 boyutlu uzaya çarpma işleminde değişme özelliği olmadan genişletilmesini sağlayarak bu sayıların belirttiği noktaların üçlü vektörel olarak değil dördü vektörel gösterimle temsil edilmesi ve işlemlere katılması gerektiğini keşfetmiştir.

Hamilton 16 Ekim 1843 tarihinde İrlanda Kraliyet toplantısına katılmak için kanal boyunda eşiyle birlikte yürürken, Brougham Köprüsü'ne geldiğinde aniden aklına bir formül gelmiş ve vakit kaybetmeden köprünün taşına formülü yazmıştır. Bu formül bugün dünya literatürlerinde ismi geçen kuaterniyonların formülüdür. Üstünden yüzyıldan uzun bir süre geçtikten sonra bu keşif Hamilton'ın tahmin edebileceğinden daha derin manada matematikte bir dönüm noktası niteliğinde olduğu anlaşılmıştır. Bu buluş, o dönemden sonrada Brougham Köprüsü'nün insanlar tarafından "Hamilton Köprüsü" olarak anılmasına sebep olmuştur.

Günümüzde adı geçen köprüde böyle bir iz bulunmamakla beraber Hamilton'un anısına köprüye kuaterniyon formüllerinin bulunduğu bir levha yapılmıştır.

Kuaterniyonlar, uzayda parçacıkların dönme hareketleri ve fiziksel büyüklüklerinin özyapıları ile parçacıkların sınıflandırılmasını belirlemede karşımıza çıkmaktadır. Kuaterniyonlar, matematikte ve fizikte vektör analizi kavramının daha anlaşılabilir ve gösterim açısından daha basit olmasını sağlamıştır. Kuaterniyonlar, bilgisayar grafikleri, manyetik alan, robotik, orijinal elektrik, grup teorisi, kontrol teorisi, işaret işleme, biyoinformatik, fizikte orijinal elektrik, yörünge mekaniği, modüler aritmetik, tutum kontrolü, bilgisayar simülasyonları gibi birçok alanda kullanılmaktadır.

Kuaterniyonlar bilim dünyasının oldukça ilgisini çekmiş ve birçok araştırmaya konu olmuştur. Kuaterniyonlar keşfinden sonra, cebir alanında çalışmalar yapmış ve grup kavramının modern bir şekilde tanımlayan İngiliz matematikçi Arthur Cayley ile özellikle sayılar teorisi alanında çalışan Amerikalı matematikçi Leonard Equene Dickson adını taşıyan Cayley-Dickson yöntemi kullanılarak oktonyonlar ve sedenyonlar sunulmuştur. Reel sayılar, kompleks sayıları, oktonyonlar ve sedenyonlar cebirinin genelleştirilen Cayley-Dickson yöntemi "ikiye katlama inşası" olarak adlandırılan hiper kompleks sayıları inşa etmek için kullanılan bir yöntemdir. Bu yöntem 1 boyutlu reel sayılara uygulandığında 2 boyutlu kompleks sayıları, kompleks sayılara uygulandığında 4 boyutlu kuaterniyonları, kuaterniyonlara uygulandığında 8 boyutlu oktonyonları, oktonyonlara uygulandığında ise 16 boyutlu sedenyonları elde etme işlemidir. Yani Cayley-Dickson yöntemi ile kuaterniyon, oktonyon ve sedenyon gibi kompleks sayı sistemlerinin en genel hali olan hiper kompleks sayılar oluşturulmaktadır (Hamilton, 1843; Carmody, 1988; Imaeda ve Imaeda, 2000; Baez, 2002; Cawagas, 2004; Conway ve Smith, 2005; Culbert, 2007; Cariow ve Cariowa, 2013; Mironov ve Mironov, 2015).

Son yıllarda bilinen sayı dizileri kuaterniyonlar, oktonyonlar ve sedenyonlar kullanılarak çalışılmaktadır. Bu çalışmalarda sayı dizilerinin terimlerinin yardımıyla kuaterniyonların, oktonyonların ve sedenyonların dizileri tanımlanmış, üreteç fonksiyonları, Binet formülleri, toplam formülleri, bilinen önemli eşitlikleri ve aralarındaki ilişkiler elde edilmiştir. Özellikle oktonyonların ve sedenyonların dizilerinin çeşitli aileleri birçok yazar tarafından ikinci ve üçüncü mertebeden rekürans diziler ile çalışılmıştır.

Keçilioğlu ve Akkuş 2015 yılında çalışmalarında Fibonacci ve Lucas oktonyonları sunmuştur. Bu oktonyonlar için üreteç fonksiyonu, Binet formüllerini ve bazı özdeşlik ve özelliklerini de vermişlerdir (Keçilioğlu ve Akkuş, 2015). Bilgici ise 2017 de sunduğu çalışmasında Fibonacci ve Lucas sayı dizlerini sedenyonlara taşıyarak Fibonacci ve Lucas sedenyonları tanımlamıştır. Bu sedenyonlar için üreteç fonksiyonları, Binet formülleri ile Fibonacci ve Lucas sayılarının iyi bilinen bazı özelliklerini kullanarak önemli eşitlikler elde etmiştir (Bilgici, 2017). Diğer taraftan Karataş ve Halıcı 2017 de sundukları çalışmalarında ikinci mertebeden rekürans bağıntılarının bir genellemesi olan Horadam sayı dizisi kullanılarak Horadam oktonyonlarını sunmuşlardır. Bu çalışmada oktonyonların dizileri oluşturularak n -inci Horadam oktonyonunu veren Binet formülleri, üreteç fonksiyonları ve Cassini eşitliği gibi dizilerin terimlerini içeren özellikleri vermişlerdir (Karataş ve Halıcı, 2017).

2016 ve 2020 yıllarında Fibonacci and Lucas tipli sayılar için (p, q) -Fibonacci oktonyonları, q -Fibonacci ve q -Lucas sedenyonları olarak adlandırılan oktonyonların ve sedenyonların yeni genelleştirilmeleri sunulmuştur. Bu çalışmalarda Binet formülleri, üstel üreten fonksiyonları, toplam formülleri, Catalan eşitliği, Cassini eşitliği ve d'Ocagne eşitliği gibi temel özellikler sunulmuştur (İpek, 2016; Kızılateş ve Kırak, 2020).

Szynał-Liana ve Wloch çalışmalarında Pell kuaterniyonlarını, Pell oktonyonlarını ve bunların bazı özelliklerini sunmuşlardır (Szynał-Liana ve Wloch, 2015).

Bolat Çimen ve İpek 2017 yılında Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayılarıyla ilişkili yeni oktonyon sayı sınıflarını oluşturmuşlardır. Çalışmalarında Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas oktonyonlarını tanımlamış ve önemli formülleri ile bazı özellikleri verilmişlerdir. Ayrıca Jacobsthal oktonyonları ve Jacobsthal-Lucas oktonyonları arasındaki ilişkileri sunmuşlardır (Bolat Çimen ve İpek, 2017).

2019 ve 2020 yıllarında oktonyonlar ve sedenyonlar üçüncü mertededden sayı dizileri kullanılarak çalışılan çalışmalar sunulmuştur. Bu çalışmalarda üçüncü mertededden sayı dizileri olan genelleştirilmiş Tribonacci sayı dizileri ile oktonyonlar ve sedenyonlar kullanılarak genelleştirilmiş Tribonacci oktonyon ve sedenyonlar tanımlanmıştır.

Bu oktonyonların ve sedenyonların dizileri oluşturulmuş ve rekürans bağıntıları, toplam formülleri, Binet formülleri, norm değerleri ile geren fonksiyonları elde edilmiştir. Ayrıca genelleştirilmiş Tribonacci sayı dizilerinin özellikleri kullanılarak genelleştirilmiş Tribonacci oktonyon ve sedenyonlar için birçok özelliği sunulmuştur (Özkoç Öztürk, 2019; Soykan, 2019; Cerda-Morales, 2019; Soykan, vd., 2020).

Taşçı 2018 yılında, Taşyurdu ve Akpınar 2019 ve 2020 yıllarında çalışmalarında Padovan, Pell-Padovan ve Perrin sayılarıyla ilişkili kuaterniyonların, oktonyonların ve sedenyonların yeni sayı sınıfı olarak Padovan, Pell-Padovan ve Perrin kuaterniyonlarını, oktonyonlarını ve sedenyonlarını tanımlamışlardır. Bu çalışmalarda Padovan, Pell-Padovan ve Perrin kuaterniyonların, oktonyonların ve sedenyonların dizileri ve rekürans bağıntıları sunulmuştur. Ayrıca Binet formülleri, üreteç fonksiyonları, toplam formülleri ve matris temsilleri sunulmuştur (Taşçı, 2018; Taşyurdu ve Akpınar, 2019; 2019a; 2019b; 2020).

Sunulan bu tezde Padovan, Pell-Padovan ve Perrin oktonyonları ve sedenyonları tanımlanmıştır ve birçok önemli özelliklerini içeren sonuçlar elde edilmiştir (Taşyurdu ve Akpınar, 2019; 2019a; 2019b; 2020). Bu amaçla kuramsal temeller adını alan ikinci bölümde temel kavramlar verildi.

Çalışmamız üçüncü bölümünde ilk olarak Padovan, Pell-Padovan ve Perrin sayı dizileri ile hiper kompleks sayılarına ait bazı ön bilgiler verilmiştir. Bu dizilerin rekürans bağıntıları göz önüne alınarak Binet formülleri, üreteç fonksiyonları ve teoremlerle özellikleri sunulmuştur. Daha sonra Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas gibi ikinci mertebeden rekürans dizilerle ilişkili oktonyonlar ve sedenyonlar ile bunların dizileri sunulmuştur. Bu dizilerin Binet formülleri, üreteç fonksiyonları, üreteç matrisleri ve bazı önemli özellikleri verilmiştir. Ayrıca Tribonacci ve Tribonacci-Lucas gibi üçüncü mertebeden rekürans dizilerle ilişkili oktonyonlar ve sedenyonlar ile bunların dizileri sunulmuştur. Bu dizilerin Binet formülleri, üreteç fonksiyonları, üreteç matrisleri ve bazı önemli özellikleri verilmiştir.

Tezin dördüncü bölümünde çalışmamız boyunca elde ettiğimiz araştırma bulgularımız sunulmuştur. İlk olarak Padovan, Pell-Padovan ve Perrin sayılarıyla ilişkili oktonyonların ve sedenyonların yeni sayı sınıfları tanımlanmıştır ve Padovan, Pell-Padovan ve Perrin oktonyonları ve sedenyonları olarak adlandırılmıştır.

Bu Padovan, Pell-Padovan ve Perrin oktonyonların ve sedenyonların dizileri oluşturulmuştur ve rekürans bağıntıları elde edilmiştir. Bu dizilerin n -inci genel terimini elde etmek için kullanılacak Binet formülleri ve matris temsilleri sunulmuştur. Ayrıca üreteç fonksiyonları, toplam formülleri ve birçok özellikleri elde edilmiştir.



2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

Bu bölümde çalışmamız için temel teşkil eden kavramlar verilecektir.

Tanım 2.1: $\alpha \neq \emptyset$ ve $\alpha \subset A^n$ olmak üzere α dan A ya tanımlı fonsiyona A da n -li işlem denir. Boş kümeden farklı bir küme üzerinde bir veya daha fazla ikili işlem tanımlanmış ise bu ikili işlemlerle birlikte bu kümeye bir cebirsel yapı denir. A kümesi üzerinde bir " $*$ " işlemi tanımlanmışsa bu cebirsel yapı $(A,*)$ ile gösterilir (Taşçı, 2010).

Tanım 2.2: G boş olmayan bir küme ve bu küme üzerinde bir ikili işlem $*$ olsun. Buna göre

- i. $\forall a, b, c \in G$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$ ise (Birleşme özelliği)
- ii. $\forall a \in G$ için $a * e = e * a = a$ olacak şekilde bir $e \in G$ varsa (Birim eleman varlığı)
- iii. e, G nin birim elemanı olmak üzere $\forall a \in G$ için $a * a' = a' * a = e$ olacak şekilde $a' \in G$ sayısı varsa (Ters elemanın varlığı)

$(G,*)$ cebirsel yapısına bir grup denir (Taşçı, 2010).

Tanım 2.3: $(G,*)$ bir grup olsun. Eğer $\forall a, b \in G$ için $a * b = b * a$ oluyorsa $(G,*)$ grubuna değişmeli (komutatif ya da abelyan) grup denir (Taşçı 2010).

Tanım 2.4: Boştan farklı bir R kümesi üzerinde toplama (+) ve çarpma ($\cdot$) denilen iki ikili işlem tanımlanmış olsun. Eğer

- i. $(R, +)$ değişmeli bir grup,
- ii. R kümesi çarpma işlemine göre birleşme özelliğine sahiptir. Yani $\forall a, b, c \in R$ için $a(bc) = (ab)c$ ise
- iii. Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği vardır. Yani $\forall a, b, c \in R$ için

$$a(b + c) = ab + ac \text{ ve } (b + c)a = ba + ca$$

oluyorsa $(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısına bir halka denir (Taşçı, 2010).

$(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısı bir halka olmak üzere çarpma işlemine göre değişmeli ise yani $\forall a, b \in R$ için $ab = ba$ ise o takdirde $(R, +, \cdot)$ halkasına değişmeli (komütatif) halka denir. $(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısı çarpma işlemine göre birim elemana sahip ise yani $\forall a \in R$ için $a1_R = 1_R a = a$ olacak şekilde bir $1_R \in R$ varsa o zaman $(R, +, \cdot)$ halkasına birimli halka denir (Taşçı, 2010).

Tanım 2.5: Birimli ve değişmeli bir halkanın sıfırdan farklı her elemanının çarpma işlemine göre bir tersi varsa o zaman bu halkaya cisim denir ve genel olarak F ile gösterilir (Taşçı, 2010).

Tanım 2.6: F bir cisim ve $a_{ij} \in F$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) olmak üzere

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklindeki bir dikdörtgen tabloya m satırlı ve n sütunlu ya da kısaca $m \times n$ boyutlu (mertebeli) matris denir (Taşçı, 2011).

Reel ya da kompleks sayılar cebirinde olduğu gibi matris cebirinde de işlemler tanımlanmıştır. Bunlar genel olarak

- i. İki matrisin toplamı; A ve B $m \times n$ tipinde iki matris olmak üzere bunların toplamı yine $m \times n$ tipinde C gibi bir matris olup

$$A + B = (a_{ij})_{m \times n} + (b_{ij})_{m \times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n} = (c_{ij})_{m \times n} = C,$$

- ii. Bir skalerle matrisin çarpımı; A $m \times n$ tipinde bir matris ve k bir tamsayı olmak üzere k skaleri ile A matrisinin çarpımı

$$kA = (ka_{ij}),$$

- iii. Matris çarpımı; $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ve $B = (b_{ij})_{n \times p}$ tipinde iki matris olmak üzere $AB = C$ ve C 'nin genel elemanını c_{ij} ile gösterilirse $C = (c_{ij})_{m \times p}$ tipinde bir matris olup ve c_{ij} elemanı,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p)$$

şeklindedir (Taşçı, 2011).

Tanım 2.7: Kompleks sayılar kümesi

$$H = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R} \text{ ve } i^2 = -1\}$$

şeklinde tanımlanır (Yaglom, 1968).

Tanım 2.8: Reel kuaterniyonlar kümesi

$$H = \{a.e_0 + b.e_1 + ce_2 + de_3 : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

şeklinde tanımlanır ve tabanı $\{e_0 = 1, e_1, e_2, e_3\}$ olan bir bölüm cebiridir (Hamilton, 1843).

Tanım 2.9: Tüm reel oktonyonların kümesi

$$\mathcal{O} = \{a_0e_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 + a_5e_5 + a_6e_6 + a_7e_7 : a_0, \dots, a_7 \in \mathbb{R}\}$$

şeklinde tanımlanır ve reel sayılar üzerinde normlu bir bölüm cebiri oluştururlar (Conway ve Smith, 2005).

Tanım 2.10: Tüm sedenyonların kümesi

$$S = \{a_0e_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + \dots + a_{15}e_{15} : a_0, \dots, a_{15} \in \mathbb{R}\}$$

şeklinde tanımlanır (Imaeda ve Imaeda, 2000).

2.2. Rekürans Diziler

Tanım 2.11: Tanım kümesi pozitif tamsayılar olan fonksiyonlara dizi denir (Kadıoğlu ve Kamali, 2003).

Matematikte çok farklı biçimlerde tanımlanan diziler bulunmaktadır. Burada, dizinin başlangıcındaki birkaç terim hariç olmak üzere, her bir teriminin kendisinden önceki terimler yardımıyla elde edildiği diziler hakkında genel bilgiler vereceğiz.

Tanım 2.12: Herhangi bir terimi kendisinden önceki terimler aracılığı ile hesaplanan diziye rekürans (tekrarlama, indirgeme) dizi denir. Bu terimi hesaplarken kullanılan bağıntıya ise rekürans bağıntısı denir (Everest vd., 2003).

Tanım 2.13: $\forall n \geq k$, sabit a_j ($0 \leq j \leq k-1$) ve $a_0 \neq 0$ katsayıları için

$$s_n = a_{k-1}s_{n-1} + a_{k-2}s_{n-2} + \dots + a_1s_{n-k+1} + a_0s_{n-k} \quad (2.1)$$

eşitliğini sağlayan (s_n) dizisine k . mertebeden homojen lineer rekürans dizi denir. Buradaki eşitliğe ise k . mertebeden homojen lineer rekürans bağıntı denir. Bu dizinin $s_0, s_1, \dots, s_{k-1}$ biçiminde olan ilk k terimine (s_n) dizisinin başlangıç koşulları denir (Everest vd., 2003).

Tanım 2.14: (2.1) eşitliğindeki gibi tanımlı olan (s_n) dizisi için

$$p(x) = x^k - a_{k-1}x^{k-1} - a_{k-2}x^{k-2} - \dots - a_1x - a_0$$

polinomuna (s_n) dizisinin karakteristik polinomu denir (Everest vd., 2003).

Tanım 2.15: $p(x) = x^k - a_{k-1}x^{k-1} - a_{k-2}x^{k-2} - \dots - a_1x - a_0 = 0$

denkleminin (s_n) dizisinin karakteristik denklemi denir (Everest vd., 2003).

Tanım 2.16: $p(x)$ polinomunun kökleri $b_1, b_2, \dots, b_k \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ için, $b_i \neq b_j$ ise, $u_n = c_1b_1^n + c_2b_2^n + \dots + c_kb_k^n$ olacak şekilde $c_1, c_2, \dots, c_k$ sabitleri vardır. Bu eşitlik başlangıç koşulları için yerine yazılıp elde edilen denklem sisteminden $c_1, c_2, \dots, c_k$ bilinmeyenleri bulunur. Böylece elde edilen karakteristik polinomunun kökleri ve u_n arasındaki eşitliğe rekürans bağıntısının çözümü denir (Everest vd., 2003).

Tanım 2.17: (s_n) dizisinin terimleri kullanılarak tanımlanan

$$G(x) = s_0x^0 + s_1x^1 + s_2x^2 + s_3x^3 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} s_ix^i$$

serisine (s_n) dizisinin üreteç fonksiyonu denir (Everest vd., 2003).

Şimdi çalışmamızın temelini oluşturan ikinci ve üçüncü mertebeden rekürans diziler sunulacaktır.

Horadam tarafından ikinci mertebeden rekürans dizi, $p, q, n \geq 2$ tam sayılar ve $W_0 = a, W_1 = b$ keyfi reel sayılar olmak üzere

$$W_n = pW_{n-1} + qW_{n-2} \quad (2.2)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlamıştır. Daha sonra yapılan çalışmalarda ise $W_n = W_n(a, b; p, q)$ sayısına Horadam sayısı ve bu sayıların oluşturduğu diziye de Horadam sayı dizisi $\{W_n(a, b; p, q)\}_{n=0}^{\infty}$ adı verilmiştir (Horadam, 1965).

(2.2) rekürans bağıntısında $W_n = x^n$ yineleme bağıntısı kullanılırsa

$$x^n - px^{n-1} - qx^{n-2} = 0$$

Horadam sayı dizilerinin karakteristik denklemi elde edilir. Karakteristik denklemde özel olarak $n = 2$ alınırsa

$$x^2 - px - q = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denkleminin kökleri α ve β olmak üzere

$$\alpha = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}, \quad \beta = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

dir. $A = b - a\beta, B = b - a\alpha$ ve $\alpha - \beta = \sqrt{p^2 + 4q}$ olmak üzere Horadam sayıları için Binet formülü

$$W_n = \frac{A\alpha^n - B\beta^n}{\alpha - \beta} \quad (2.3)$$

şeklindedir. Ayrıca $\{W_n(a, b; p, q)\}_{n=0}^{\infty}$ dizileri için üreteç ve üstel üreteç fonksiyonları sırasıyla

$$g(t) = \frac{a + (b - pa)t}{1 - pt - qt^2}$$

$$W_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n^k t^n.$$

şeklindedir.

İkinci mertebeden rekürans diziler özel olarak Fibonacci ve Lucas tipli sayı dizileri olarak da adlandırılmaktadır. $\{W_n(a, b; p, q)\}_{n=0}^{\infty}$ dizilerinde $W_n(0,1; 1,1) = F_n$ için Fibonacci sayı dizisi ve $W_n(2,1; 1,1) = L_n$ için Lucas sayı dizisi şöyle tanımlanır.

Tanım 2.18: $n \geq 2$ olmak üzere $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ başlangıç şartları için Fibonacci sayı dizisi ve $L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ başlangıç şartları için Lucas sayı dizisi sırasıyla

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$$

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2},$$

rekürans bağıntıları ile tanımlanır. F_n ile Fibonacci sayı dizinin n -inci terimi ve L_n ile Lucas sayı dizinin n -inci terimi gösterilir.

$n \geq 2$ olmak üzere $\{W_n(a, b; p, q)\}_{n=0}^{\infty}$ dizilerinin özel durumları olarak Fibonacci ve Lucas tipli sayı dizilerinden Pell $\{P_n\}$, Pell-Lucas $\{Q_n\}$, Jacobsthal $\{J_n\}$ ve Jacobsthal-Lucas $\{j_n\}$ sayı dizileri sırasıyla

- $W_n(0,1; 2,1) = P_n$ için $P_0 = 0, P_1 = 1$ ile $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$,
- $W_n(2,2; 2,1) = Q_n$ için $Q_0 = 2, Q_1 = 2$ ile $Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$,
- $W_n(0,1; 1,2) = J_n$ için $J_0 = 0, J_1 = 1$ ile $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$,
- $W_n(2,1; 1,2) = j_n$ için $j_0 = 2, j_1 = 1$ ile $j_n = j_{n-1} + 2j_{n-2}$,

rekürans bağıntılarıyla tanımlanır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde çalışmamız için temel teşkil eden literatürde üçüncü mertebeden rekürans dizilerden olan Padovan, Pell-Padovan ve Perrin sayı dizilerinin tanımları ve özellikleri sunulmuştur. Genel formüller olarak bilinen ve n -inci Padovan, n -inci Pell-Padovan ve n -inci Perrin sayı dizilerini elde etmek için kullanılan Binet formülleri verilmiştir. Ayrıca bu diziler için üreteç fonksiyonları, toplam formülleri ve özellikleri incelenmiştir. Daha sonra hiper kompleks sayıların tanımları ve özellikleri detaylı bir şekilde sunulmuştur. Son olarak hiper kompleks sayılardan olan oktonyonlar ve sedenyonlar ile özel sayı dizileri kullanılarak oluşturulmuş oktonyonların ve sedenyonların tanımları ve özellikleri sunulmuştur. Bu oktonyonların ve sedenyonların oluşturduğu dizilerin n -inci terimini veren Binet formülleri, üreteç fonksiyonları, toplam formülleri ve özellikleri verilmiştir.

3.1. Padovan, Pell-Padovan ve Perrin Sayı Dizileri

Bu bölümde üçüncü mertebeden rekürans diziler olan Padovan, Pell-Padovan ve Perrin sayı dizileri detaylı bir şekilde verilmiştir. Üçüncü mertebeden rekürans diziler özel olarak Tribonacci ve Tribonacci-Lucas tipli sayı dizileri olarak da adlandırılmaktadır.

Tanım 3.1: Genelleştirilmiş Tribonacci sayı dizisi $\{V_n(a, b, c; r, s, t)\}_{n \geq 0}$, r, s, t reel sayılar ve $V_0 = a$, $V_1 = b$, $V_2 = c$ keyfi kompleks sayılar olmak üzere

$$V_n = rV_{n-1} + sV_{n-2} + tV_{n-3} \quad (3.1)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanmıştır.

Genelleştirilmiş Tribonacci sayı dizisi, $\{V_n(a, b, c; r, s, t)\}_{n \geq 0}$ kısaca $\{V_n\}_{n \geq 0}$ ile gösterilebilir. $\{V_n\}_{n \geq 0}$ dizisinin tanımı kullanılarak $n = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere genelleştirilmiş Tribonacci sayı dizisinin terimleri

$$V_{-n} = -\frac{s}{t}V_{-(n-1)} - \frac{r}{t}V_{-(n-2)} + \frac{1}{t}V_{-(n-3)}, \quad t \neq 0$$

rekürans bağıntısı ile negatif alt indislere genişletilebilir. Sonuç olarak (3.1) rekürans bağıntısı tüm n tamsayıları için geçerlidir.

(3.1) rekürans bağıntısının $x^3 - rx^2 - sx - t = 0$ kübik denkleminin kökleri α, β, γ

$$A = \left(\frac{r^3}{27} + \frac{rs}{6} + \frac{t}{2} + \sqrt{\Delta} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$B = \left(\frac{r^3}{27} + \frac{rs}{6} + \frac{t}{2} - \sqrt{\Delta} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Delta = \frac{r^3t}{27} - \frac{r^2s^2}{108} + \frac{rst}{6} - \frac{s^3}{27} + \frac{t^2}{4},$$

$$\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \exp(2\pi i/3)$$

olmak üzere

$$\alpha = \frac{r}{3} + A + B$$

$$\beta = \frac{r}{3} + \varepsilon A + \varepsilon^2 B$$

$$\gamma = \frac{r}{3} + \varepsilon^2 A + \varepsilon B$$

şeklindedir. Diğer taraftan

$$P = V_2 - (\beta + \gamma)V_1 + \beta\gamma V_0$$

$$Q = V_2 - (\alpha + \gamma)V_1 + \alpha\gamma V_0$$

$$R = V_2 - (\alpha + \beta)V_1 + \alpha\beta V_0$$

olmak üzere Genelleştirilmiş Tribonacci sayı dizisinin Binet formülü

$$V_n = \frac{P\alpha^n}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{Q\beta^n}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} + \frac{R\gamma^n}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}$$

şeklindedir.

Genelleştirilmiş Tribonacci sayı dizisi, Tribonacci ve Tribonacci-Lucas, Padovan, Pell-Padovan, Perrin, Padovan-Perrin, Narayana, üçüncü dereceden Jacobsthal ve üçüncü dereceden Jacobsthal-Lucas gibi iyi bilinen sayı dizilerin de genelleştirilmesidir.

$\{\mathcal{W}_n(a, b, c; r, s, t)\}_{n \geq 0}$ dizilerinde $W_n(1, 1, 1; 0, 1, 1) = P_n$ için Padovan sayı dizisi, $W_n(1, 1, 1; 0, 2, 1) = R_n$ için Pell-Padovan sayı dizisi ve $W_n(3, 0, 2; 0, 1, 1) = \tilde{P}_n$ için Perrin sayı dizisi elde edilir. Padovan, Pell-Padovan ve Perrin sayıları bilim dünyasının oldukça ilgisini çekmiş ve birçok çalışma ile bu sayı ve sayıların oluşturduğu dizilerin tanımları, özellikleri ve Binet formülü, üreteç fonksiyonları gibi önemli formülleri ve eşitlikleri sunulmuştur (Shannon, vd., 2006; Kritsana., 2013).

Literatürde $\{\mathcal{W}_n(a, b, c; r, s, t)\}_{n \geq 0}$ dizilerinde r, s, t ve başlangıç değerlerinin özel durumu için bazı üçüncü mertebeden sayı dizileri Tablo 3.1 de verilen isimler ve gösterimler ile kullanılır.

Tablo 3.1. Bazı üçüncü mertebeden sayı dizileri

Sayı Dizileri	$\{\mathcal{W}_n(a, b, c; r, s, t)\}_{n \geq 0}$ Gösterimi
Tribonacci	$\{W_n(0, 1, 1; 1, 1, 1)\} = \{T_n\}$
Tribonacci-Lucas	$\{W_n(3, 1, 3; 1, 1, 1)\} = \{K_n\}$
Üçüncü Mertebeden Pell	$\{W_n(0, 1, 2; 2, 1, 1)\} = \{P_n^3\}$
Üçüncü Mertebeden Pell-Lucas	$\{W_n(3, 2, 6; 2, 1, 1)\} = \{Q_n^3\}$
Üçüncü Mertebeden Modifiye Pell	$\{W_n(0, 1, 1; 2, 1, 1)\} = \{E_n^3\}$
Padovan (Cordonnier)	$\{W_n(1, 1, 1; 0, 1, 1)\} = \{P_n\}$
Perrin (Padovan-Lucas)	$\{W_n(3, 0, 2; 0, 1, 1)\} = \{E_n\}$
Padovan-Perrin	$\{W_n(0, 0, 1; 0, 1, 1)\} = \{S_n\}$
Pell-Padovan	$\{W_n(1, 1, 1; 0, 2, 1)\} = \{R_n\}$
Pell-Perrin	$\{W_n(3, 0, 2; 0, 2, 1)\} = \{C_n\}$
Jacobsthal-Padovan	$\{W_n(1, 1, 1; 0, 1, 2)\} = \{Q_n\}$
Jacobsthal-Perrin (-Lucas)	$\{W_n(3, 0, 2; 0, 1, 2)\} = \{D_n\}$
Narayana	$\{W_n(0, 1, 1; 1, 0, 1)\} = \{N_n\}$
Üçüncü Mertebeden Jacobsthal	$\{W_n(0, 1, 1; 1, 1, 2)\} = \{J_n^3\}$
Üçüncü Mertebeden Jacobsthal-Lucas	$\{W_n(2, 1, 5; 1, 1, 2)\} = \{J_n^3\}$

3.1.1. Padovan sayı dizileri

Cordonnier sayıları olarak da bilinen Padovan sayıları Richard Padovan (1935-) onuruna Stewart (1996) tarafından tanımlanmıştır.

Tanım 3.2: $P_0 = P_1 = P_2 = 1$ başlangıç şartları olmak üzere P_n , n -inci Padovan sayısı

$$P_n = P_{n-2} + P_{n-3}, \quad n \geq 3$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Bu sayıların oluşturduğu diziye de Padovan sayı dizisi denir ve $\{P_n\}_{n \geq 0}$ ile gösterilir.

Padovan sayılarının negatif indisli terimleri

$$P_n = P_{n+3} - P_{n+1}, \quad n < 0$$

eşitliği ile bulunur. Bazı pozitif ve negatif indisli Padovan sayıları Tablo 3.2 de verilmiştir.

Tablo 3.2. Bazı pozitif ve negatif indisli Padovan sayıları

n		-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
P_n	...	0	1	-1	1	0	0	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	...

Şimdi Padovan sayı dizilerinin özellikleri verilecektir.

- Binet Formülü: Tanım 3.2 deki Padovan sayı dizisinin

$$P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$$

rekürans bağıntısında $P_n = x^n$ yineleme bağıntısı kullanılırsa

$$x^n - x^{n-2} - x^{n-3} = 0$$

Padovan sayı dizilerinin karakteristik denklemi elde edilir. Bu karakteristik denklemde özel olarak $n = 3$ alınırsa

$$x^3 - x - 1 = 0$$

denklemi elde edilir.

Bu denkleminin kökleri

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}}$$

$$\beta = -\sqrt[3]{\frac{1}{16} + \frac{1}{48}\sqrt{\frac{23}{3}}} - \sqrt[3]{\frac{1}{16} - \frac{1}{48}\sqrt{\frac{23}{3}}} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}}\right)$$

$$\gamma = -\sqrt[3]{\frac{1}{16} + \frac{1}{48}\sqrt{\frac{23}{3}}} - \sqrt[3]{\frac{1}{16} - \frac{1}{48}\sqrt{\frac{23}{3}}} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}}\right)$$

olup

$$a = \frac{(\beta - 1)(\gamma - 1)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}, \quad b = \frac{(\alpha - 1)(\gamma - 1)}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)}, \quad c = \frac{(\alpha - 1)(\beta - 1)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}$$

olmak üzere Padovan sayı dizisinin Binet Formülü

$$P_n = a\alpha^n + b\beta^n + c\gamma^n$$

şeklindedir.

- Üreteç Fonksiyonu: Padovan sayı dizisinin üreteç fonksiyonu

$$r(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n t^n = P_0 + P_1 t + P_2 t^2 + \dots + P_n t^n + \dots$$

olsun. Bu denklemin her iki yanı t^2 ve t^3 ile çarpılırsa

$$t^2 r(t) = P_0 t^2 + P_1 t^3 + P_2 t^4 + \dots + P_{n-2} t^n + \dots$$

$$t^3 r(t) = P_0 t^3 + P_1 t^4 + P_2 t^5 + \dots + P_{n-3} t^n + \dots$$

elde edilir.

Buradan

$$(1 - t^2 - t^3)r(t) = P_0 + P_1t + (P_2 - P_0)t^2 + (P_3 - P_1 - P_0)t^3 + \dots$$

$$+ (P_n - P_{n-2} - P_{n-3})t^n + \dots$$

yazılabilir. Diğer taraftan $P_0 = P_1 = P_2 = 1$ başlangıç şartları için Padovan sayı dizisinin

$$P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$$

rekürans bağıntısı kullanılırsa Padovan sayı dizisinin üreteç fonksiyonu

$$r(t) = \frac{1+t}{1-t^2-t^3}$$

olarak elde edilir.

- Padovan sayılarının bazı sonlu toplam formülleri

- $\sum_{i=0}^n P_i = P_{n+5} - 2$
- $\sum_{i=0}^n P_{2i} = P_{2n+3} - 1$
- $\sum_{i=0}^n P_{3i} = P_{3n+2}$
- $\sum_{i=0}^n P_i^2 = P_{n+2}^2 - P_{n-1}^2 - P_{n-3}^2$

şeklindedir.

3.1.2. Pell-Padovan sayı dizileri

Tanım 3.3: $R_0 = R_1 = R_2 = 1$ başlangıç şartları olmak üzere R_n , n -inci Pell-Padovan sayısı

$$R_n = 2R_{n-2} + R_{n-3}, \quad n \geq 3$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Bu sayıların oluşturduğu diziye de Pell-Padovan sayı dizisi denir ve $\{R_n\}_{n \geq 0}$ ile gösterilir.

Pell-Padovan sayılarının negatif indisli terimleri

$$R_n = R_{n+3} - 2R_{n+1}, \quad n < 0$$

eşitliği ile bulunur. Bazı pozitif ve negatif indisli Pell-Padovan sayıları Tablo 3.3 te verilmiştir.

Tablo 3.3. Bazı pozitif ve negatif indisli Pell-Padovan sayıları

n		-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
R_n	...	67	-41	25	-15	9	-5	3	-1	1	1	1	3	3	7	9	17	25	...

Şimdi Pell-Padovan sayı dizilerinin özellikleri verilecektir.

- Binet Formülü: Tanım 3.3 teki Pell-Padovan sayı dizisinin

$$R_n = 2R_{n-2} + R_{n-3}$$

rekürans bağıntısında $R_n = x^n$ yineleme bağıntısı kullanılırsa

$$x^n - 2x^{n-2} - x^{n-3} = 0$$

Pell-Padovan sayı dizisinin karakteristik denklemi elde edilir. Karakteristik denklemde özel olarak $n = 3$ alınırsa

$$x^3 - 2x - 1 = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denkleminin kökleri α , β ve γ olmak üzere Pell-Padovan sayı dizilerinin Binet Formülü

$$R_n = 2 \left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \right) - 2 \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right) + \gamma^{n+1}$$

şeklindedir.

- Üreteç Fonksiyonu: Pell-Padovan sayı dizisinin üreteç fonksiyonu

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n t^n = R_0 + R_1 t + R_2 t^2 + \dots + R_n t^n + \dots$$

olsun. Bu denklemin her iki yanını $2t^2$ ve t^3 ile çarpılırsa

$$2t^2 s(t) = 2R_0 t^2 + 2R_1 t^3 + 2R_2 t^4 + \dots + 2R_{n-2} t^n + \dots$$

$$t^3 s(t) = R_0 t^3 + R_1 t^4 + R_2 t^5 + \dots + R_{n-3} t^n + \dots$$

elde edilir. Buradan

$$(1 - 2t^2 - t^3)s(t) = R_0 + R_1 t + (R_2 - 2R_0)t^2 + (R_3 - 2R_1 - R_0)t^3 + \dots + (R_n - 2R_{n-2} - R_{n-3})t^n + \dots$$

yazılabilir. Diğer taraftan $R_0 = R_1 = R_2 = 1$ başlangıç şartları için Pell-Padovan sayı dizisinin

$$R_n = 2R_{n-2} + R_{n-3}$$

rekürans bağıntısı kullanılırsa Pell-Padovan sayı dizisinin üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_n t^{n-1} = \frac{1-t}{1-2t^2-t^3}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

3.1.3. Perrin sayı dizileri

Perrin sayı dizisi ilk olarak 1876'da Edouard Lucas tarafından çalışılmıştır. Ancak dizi daha sonraları 1899'da bu diziyi çalışan Raoul Perrin'in adı ile anılmaktadır.

Tanım 3.4: $\tilde{P}_0 = 3, \tilde{P}_1 = 0, \tilde{P}_2 = 2$ başlangıç şartları olmak üzere $\tilde{P}_n$, n -inci Perrin sayısı

$$\tilde{P}_n = \tilde{P}_{n-2} + \tilde{P}_{n-3}, \quad n \geq 3$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Bu sayıların oluşturduğu diziye de Perrin sayı dizisi denir ve $\{\tilde{P}_n\}_{n \geq 0}$ ile gösterilir.

Perrin sayılarının negatif indisli terimleri

$$\tilde{P}_n = \tilde{P}_{n+3} - \tilde{P}_{n+1}, \quad n < 0$$

eşitliği ile bulunur. Bazı pozitif ve negatif indisli Perrin sayıları Tablo 3.4 te verilmiştir.

Tablo 3.4. Bazı pozitif ve negatif indisli Perrin sayıları

n		-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
$\tilde{P}_n$	...	5	-1	-2	4	-3	2	1	-1	3	0	2	3	2	5	5	7	10	...

Şimdi Perrin sayı dizilerinin özellikleri verilecektir.

- Binet Formülü: Tanım 3.4 teki Perrin sayı dizisinin

$$\tilde{P}_n = \tilde{P}_{n-2} + \tilde{P}_{n-3}$$

rekürans bağıntısında $\tilde{P}_n = x^n$ yineleme bağıntısı kullanılırsa

$$x^n - x^{n-2} - x^{n-3} = 0$$

Perrin sayı dizisinin karakteristik denklemi elde edilir. Bu karakteristik denklemde özel olarak $n = 3$ alınırsa

$$x^3 - x - 1 = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denkleminin kökleri

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}}$$

$$\beta = -\sqrt[3]{\frac{1}{16} + \frac{1}{48}\sqrt{\frac{23}{3}}} - \sqrt[3]{\frac{1}{16} - \frac{1}{48}\sqrt{\frac{23}{3}}} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}}\right)$$

$$\gamma = -\sqrt[3]{\frac{1}{16} + \frac{1}{48}\sqrt{\frac{23}{3}}} - \sqrt[3]{\frac{1}{16} - \frac{1}{48}\sqrt{\frac{23}{3}}} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}}\right)$$

olup

$$a = \frac{(\beta - 1)(\gamma - 1)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}, \quad b = \frac{(\alpha - 1)(\gamma - 1)}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)}, \quad c = \frac{(\alpha - 1)(\beta - 1)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}$$

olmak üzere Perrin sayı dizisinin Binet Formülü

$$\tilde{P}_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n$$

şeklindedir.

- Üreteç Fonksiyonu: Perrin sayı dizisinin üreteç fonksiyonu

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{P}_n t^n = \tilde{P}_0 + \tilde{P}_1 t + \tilde{P}_2 t^2 + \dots + \tilde{P}_n t^n + \dots$$

olsun. Bu denklemin her iki yanı t^2 ve t^3 ile çarpılırsa

$$t^2 f(t) = \tilde{P}_0 t^2 + \tilde{P}_1 t^3 + \tilde{P}_2 t^4 + \dots + \tilde{P}_{n-2} t^n + \dots$$

$$t^3 f(t) = \tilde{P}_0 t^3 + \tilde{P}_1 t^4 + \tilde{P}_2 t^5 + \dots + \tilde{P}_{n-3} t^n + \dots$$

elde edilir. Buradan

$$(1 - t^2 - t^3)f(t) = \mathcal{O}\tilde{P}_0 + \mathcal{O}\tilde{P}_1 t + (\mathcal{O}\tilde{P}_2 - \mathcal{O}\tilde{P}_0)t^2 + (\mathcal{O}\tilde{P}_3 - \mathcal{O}\tilde{P}_1 - \mathcal{O}\tilde{P}_0)t^3 + \dots$$

$$+ (\mathcal{O}\tilde{P}_n - \mathcal{O}\tilde{P}_{n-2} - \mathcal{O}\tilde{P}_{n-3})t^n + \dots$$

yazılabilir. Diğer taraftan $\tilde{P}_0 = 3, \tilde{P}_1 = 0, \tilde{P}_2 = 2$ başlangıç şartları için Perrin sayı dizisinin $\tilde{P}_n = \tilde{P}_{n-2} + \tilde{P}_{n-3}$ rekürans bağıntısı kullanılırsa Perrin sayı dizilerinin üreteç fonksiyonu ise

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{P}_n t^{n-1} = \frac{3 - t^2}{1 - t^2 - t^3}$$

elde edilir.

- Perrin sayılarının bazı sonlu toplam formülleri

$$\sum_{i=0}^{n-1} \tilde{P}_i = \tilde{P}_{n+4} - 2$$

$$\sum_{i=0}^n \tilde{P}_i^2 = \tilde{P}_{n+2}^2 - \tilde{P}_{n-1}^2 - \tilde{P}_{n-3}^2 + 1$$

şeklindedir.

3.2. Bazı Hiper Kompleks Sayılar

Bu bölümde hiper kompleks sayılar tanımları ve özellikleri detaylı bir şekilde sunulmuştur.

Reel sayılar 1 boyutlu olan hiper kompleks sayılardır ve adi toplam ve çarpım altında cisim olan bir cebirsel yapıdır. “İkiye katlama inşası” olarak bilinen ve hiper kompleks sayıları inşa etmek için kullanılan Cayley-Dickson yöntemi ise 1 boyutlu reel sayılara uygulandığında 2 boyutlu kompleks sayıları, kompleks sayılara uygulandığında 4 boyutlu kuaterniyonları, kuaterniyonlara uygulandığında 8 boyutlu oktonyonları, oktonyonlara uygulandığında 16 boyutlu sedenyonları elde etme işlemidir. Cayley-Dickson yöntemi bu hiper kompleks sayıları oluşturmak için en fazla kullanılan yöntemdir (Carmody, 1988; Culbert, 2007).

Tanım 3.5: $i^2 = -1$ ve a, b reel sayılar olmak üzere $a + ib$ şeklindeki sayılara kompleks ya da karmaşık sayılar denir. Kompleks sayıların oluşturduğu küme $\mathbb{C}$ ile gösterilir ve

$$\mathbb{C} = H = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R} \text{ ve } i^2 = -1\}$$

olarak tanımlanır (Yaglom, 1968).

$z_1 = a_1 + ib_1$ ve $z_2 = a_2 + ib_2$ birer kompleks sayı ve λ bir reel sayı olmak üzere

- İki kompleks sayının toplamı:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

- İki kompleks sayının farkı

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$$

- İki kompleks sayının çarpımı

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

- Bir reel sayı ile bir kompleks sayının çarpımı

$$\lambda z_1 = (\lambda a_1) + i(\lambda b_1)$$

- Bir kompleks sayının eşleniği

$$\bar{z}_1 = a_1 - ib_1$$

- Bir kompleks sayının normu, kendisi ile eşleniğinin çarpımı olup

$$z_1 \bar{z}_1 = (a_1 + ib_1)(a_1 - ib_1) = a_1^2 + b_1^2 = |z_1|^2 = \|z_1\|^2$$

şeklindedir.

Yukardaki tanımı ve eşitlikleri sağlayan tüm kompleks sayılar kümesi $\mathbb{C}$, 2 boyutlu, değişmeli, birleşmeli cebir yapısındadır.

Kompleks sayıların 4 boyutlu uzaya taşınması ile kuaterniyonlar sunulmuştur. Yani bir kuaterniyon kompleks sayıların bir çifti olarak düşünülebilir. Kuaterniyonlar 4 boyutlu toplama işlemine göre birleşmeli, değişmeli, çarpma işlemine göre birleşmeli fakat değişmeli olmayan cebir yapısındadır (Hamilton, 1843).

Tanım 3.6: $e_0 = 1, e_1, e_2, e_3$ taban elemanları ve a, b, c, d reel sayılar olmak üzere $ae_0 + be_1 + ce_2 + de_3$ şeklindeki sayılara reel kuaterniyonlar denir. Kuaterniyonların oluşturduğu küme $\mathbb{H}$ ile gösterilir ve

$$\mathbb{H} = \{ae_0 + be_1 + ce_2 + de_3 : e_0^2 = 1, e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1 \text{ ve } a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

olarak tanımlanır (Hamilton, 1843).

$\mathbb{H}$ kümesinin taban elemanlarının çarpma tablosu Tablo 3.5 te gösterilmiştir.

Tablo 3.5. $\mathbb{H}$ kümesinin taban elemanlarının çarpma tablosu

	1	e_1	e_2	e_3
1	-1	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_1$
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1

$q_1 = a_1e_0 + b_1e_1 + c_1e_2 + d_1e_3$ ve $q_2 = a_2e_0 + b_2e_1 + c_2e_2 + d_2e_3$ birer kuaterniyon ve λ bir reel sayı olmak üzere

- İki kuaterniyonun toplamı

$$q_1 + q_2 = (a_1 + a_2)e_0 + (b_1 + b_2)e_1 + (c_1 + c_2)e_2 + (d_1 + d_2)e_3$$

- İki kuaterniyonun farkı

$$q_1 - q_2 = (a_1 - a_2)e_0 + (b_1 - b_2)e_1 + (c_1 - c_2)e_2 + (d_1 - d_2)e_3$$

- İki kuaterniyonun çarpımı

$$q_1q_2 = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2)e_0 + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)e_1 \\ + (a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)e_2 + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)e_3$$

- Bir reel sayı ile bir kuaterniyonun çarpımı

$$\lambda q_1 = (\lambda a_1)e_0 + (\lambda b_1)e_1 + (\lambda c_1)e_2 + (\lambda d_1)e_3$$

- Bir kuaterniyonun eşleniği

$$\bar{q}_1 = a_1e_0 - b_1e_1 - c_1e_2 - d_1e_3$$

- Bir kuaterniyonun normu kendisi ile eşleniğinin çarpımı olup

$$q_1\bar{q}_1 = (a_1e_0 + b_1e_1 + c_1e_2 + d_1e_3)(a_1e_0 - b_1e_1 - c_1e_2 - d_1e_3) \\ = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 = |q_1|^2 = \|q_1\|$$

şeklindedir.

Yukardaki tanımı ve eşitlikleri sağlayan tüm kuaterniyonların kümesi 4 boyutlu toplama işlemine göre birleşmeli, değişmeli, çarpma işlemine göre birleşmeli fakat değişmeli olmayan cebir yapısındandır.

Hamilton tarafından sunulan kuaterniyonlardan sonra Cayley-Dickson yönteminin kuaterniyonlara uygulanması ile 8 boyutlu değişmeli ve birleşmeli olmayan oktonyonlar cebir yapısı ortaya çıkmıştır (Baez, 2002; Conway ve Smith, 2005).

Tanım 3.7: $e_0 = 1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$ taban elemanları ve $a_0, a_1, a_2, \dots, a_7$ reel sayılar olmak üzere $\sum_{i=0}^7 a_i e_i$ şeklindeki sayılara reel oktonyonlar denir. Oktonyonların oluşturduğu küme $\mathbb{O}$ ile gösterilir ve

$$\mathbb{O} = \left\{ \sum_{i=0}^7 a_i e_i = a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_7 e_7 : a_0, a_1, a_2, \dots, a_7 \in \mathbb{R} \right\}$$

olarak tanımlanır. $i = 0, 1, \dots, 7$ olmak üzere $i \equiv e_i$ alınarak oktonyonlar için çarpım için Tablo 3.6 verilmiştir (Conway ve Smith, 2005).

Bir p reel oktonyonu

$$p = \sum_{i=0}^7 a_i e_i = a_0 + \sum_{i=1}^7 a_i e_i = \mathbf{Re}(p) + \mathbf{Im}(p)$$

olmak üzere $\mathbf{Re}(p) = a_0$ a p reel oktonyonunun reel kısmı ve $\mathbf{Im}(p) = \sum_{i=1}^7 a_i e_i$ ye ise p reel oktonyonunun sanal kısmı denir. $\mathbb{O}$ kümesinin taban elemanlarının çarpma tablosu Tablo 3.6 da verilmiştir.

Tablo 3.6. $\mathbb{O}$ kümesinin taban elemanlarının çarpma tablosu

$\cdot$	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	-1	e_1	e_2	e_3
e_5	e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	-1	$-e_3$	e_2
e_6	e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	-1	$-e_1$
e_7	e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	-1

$p_1 = \sum_{i=0}^7 a_i e_i$, $p_2 = \sum_{i=0}^7 b_i e_i$ ve $p_3 = \sum_{j=0}^7 c_j e_j$ birer oktonyon ve λ bir reel sayı olmak üzere

- İki oktonyonun toplamı

$$p_1 + p_2 = \sum_{i=0}^7 (a_i + b_i) e_i$$

- İki oktonyonun farkı

$$p_1 - p_2 = \sum_{i=0}^7 (a_i - b_i) e_i$$

- İki oktonyonun çarpımı

$$p_1 p_3 = \sum_{i,j=0}^7 a_i c_j (e_i e_j)$$

- Bir reel sayı ile bir oktonyonun çarpımı

$$\lambda p_1 = \sum_{i=0}^7 (\lambda a_i) e_i$$

- Bir oktonyonun eşleniği

$$\bar{p}_1 = a_0 - \sum_{i=1}^7 a_i e_i$$

- Bir oktonyonun normu, kendisi ile eşleniğinin çarpımı olup

$$p_1 \bar{p}_1 = \left(a_0 + \sum_{i=1}^7 a_i e_i \right) \left(a_0 - \sum_{i=1}^7 a_i e_i \right) = \sum_{i=0}^7 a_i^2 = |a_i|^2 = \|p_1\|$$

şeklindedir.

Yukardaki tanımı ve eşitlikleri sağlayan tüm oktonyonlar kümesi 8 boyutlu toplama işlemine göre birleşmeli, değişmeli, çarpma işlemine göre hem birleşmeli hem de değişmeli olmayan cebir yapısındandır.

Cayley-Dickson yöntemi oktonyonlara uygulandığında 16 boyutlu değişmeli ve birleşmeli olmayan sedenyonlar yapısı ortaya çıkar. Sedenyonlar ile elektromanyetik teori, doğrusal yerçekimi ve kuantum mekaniği alanı olmak üzere bilimin bir çok alanında karşılaşılmaktadır (Imaeda ve Imaeda 2000; Cawagas, 2004; Cariow ve Cariowa, 2013; Mironov ve Mironov, 2015).

Tanım 3.8: $e_0 = 1, e_1, e_2, \dots, e_{15}$ taban elemanları, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{15}$ reel sayılar ve $i, j, k = 1, 2, \dots, 15$ için

$$e_0 e_i = e_i e_0 = e_i, e_i^2 = -e_0,$$

$$e_i e_j = -e_j e_i, i \neq j$$

$$e_i (e_j e_k) = -(e_i e_j) e_k, i \neq j, e_i e_j \neq \pm e_k$$

olmak üzere $\sum_{i=0}^{15} a_i e_i$ şeklindeki sayılara reel sedenyonlar denir. Sedenyonların oluşturduğu küme $\mathbb{S}$ ile gösterilir ve

$$\mathbb{S} = \left\{ \sum_{i=0}^{15} a_i e_i = a_0 e_0 + a_1 e_1 + \dots + a_{15} e_{15} : a_0, a_1, a_2, \dots, a_{15} \in \mathbb{R} \right\}$$

olarak tanımlanır (Imaeda ve Imaeda, 2000).

Bir s reel sedenyonu

$$s = \sum_{i=0}^{15} a_i e_i = a_0 + \sum_{i=1}^{15} a_i e_i = \mathbf{Re}(s) + \mathbf{Im}(s)$$

olmak üzere $\mathbf{Re}(s) = a_0$ a s reel sedenyonunun reel kısmı ve $\mathbf{Im}(s) = \sum_{i=1}^{15} a_i e_i$ ye ise s reel sedenyonunun sanal kısmı denir.

$\mathbb{S}$ kümesinin $i = 0, 1, \dots, 15$ olmak üzere $i \equiv e_i$ taban elemanlarının çarpma tablosu Tablo 3.7 de verilmiştir.

Tablo 3.7. $\mathbb{S}$ kümesinin taban elemanlarının çarpma tablosu

.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	-0	3	-2	5	-4	-7	6	9	-8	-11	10	-13	12	15	-14
2	2	-3	-0	1	6	7	-4	-5	10	11	-8	-9	-14	-15	12	13
3	3	2	-1	-0	7	-6	5	-4	11	-10	9	-8	-15	14	-13	12
4	4	-5	-6	-7	-0	1	2	3	12	13	14	15	-8	-9	-10	-11
5	5	4	-7	6	-1	-0	-3	2	13	-12	15	-14	9	-8	11	-10
6	6	7	4	-5	-2	3	-0	-1	14	-15	-12	13	10	-11	-8	9
7	7	-6	5	4	-3	-2	1	-0	15	14	-13	-12	11	10	-9	-8
8	8	-9	-10	-11	-12	-13	-14	-15	-0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	8	-11	-10	-13	12	15	-14	-1	-0	-3	2	-5	4	7	-6
10	10	11	8	-9	-14	-15	12	13	-2	3	-0	-1	-6	-7	4	5
11	11	-10	9	8	-15	14	-13	12	-3	-2	1	-0	-7	6	-5	4
12	12	13	14	15	8	-9	-10	-11	-4	5	6	7	-0	-1	-2	-3
13	13	-12	15	-14	9	8	11	-10	-5	-4	7	-6	1	-0	3	-2
14	14	-15	-12	13	10	-11	8	9	-6	-7	-4	5	2	-3	-0	1
15	15	14	-13	-12	11	10	-9	8	-7	6	-5	-4	3	2	-1	-0

$s_1 = \sum_{i=0}^{15} a_i e_i$, $s_2 = \sum_{i=0}^{15} b_i e_i$ ve $s_3 = \sum_{j=0}^{15} c_j e_j$ birer sedenyon ve λ bir reel sayı olmak üzere

- İki sedenyonun toplamı

$$s_1 + s_2 = \sum_{i=0}^{15} (a_i + b_i) e_i$$

- İki sedenyonun farkı

$$s_1 - s_2 = \sum_{i=0}^{15} (a_i - b_i) e_i$$

- İki sedenyonun çarpımı

$$s_1 s_3 = \sum_{i,j=0}^{15} a_i c_j (e_i e_j)$$

- Bir reel sayı ile bir sedenyonun çarpımı

$$\lambda s_1 = \sum_{i=0}^{15} (\lambda a_i) e_i$$

- Bir sedenyonun eşleniği

$$\bar{s}_1 = a_0 - \sum_{i=1}^{15} a_i e_i$$

- Bir sedenyonun normu, kendisi ile eşleniğinin çarpımı olup

$$s_1 \bar{s}_1 = \left(a_0 + \sum_{i=1}^{15} a_i e_i \right) \left(a_0 - \sum_{i=1}^{15} a_i e_i \right) = \sum_{i=0}^{15} a_i^2 = |a_i|^2 = \|s_1\|$$

şeklindedir.

Yukardaki tanımı ve eşitlikleri sağlayan tüm sedenyonlar kümesi 16 boyutlu toplama işlemine göre birleşmeli, değişmeli fakat çarpma işlemine göre hem birleşmeli hem de değişmeli olmayan cebir yapısındanadır. Ayrıca sıfır bölene sahiptir.

3.3. Sayı Dizileri ile Oktonyonlar ve Sedenyonlar

Bu bölümde Horadam oktonyonları ve sedenyonları ile özel durumları olan Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas oktonyonlarının ve sedenyonlarının tanımları ve özellikleri sunulmuştur. Bu oktonyonların ve sedenyonların oluşturduğu dizilerin n -inci terimini veren Binet formülleri, üreteç fonksiyonları, toplam formülleri ve özellikleri verilmiştir.

3.3.1. İkinci mertebeden sayı dizilerinin oktonyonları ve sedenyonları

Bu bölümde ikinci mertebeden sayı dizileri ya da Fibonacci ve Lucas tipli sayı dizileri olarak adlandırılan Horadam sayı dizileri kullanılarak Horadam, Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas oktonyonları ve sedenyonları ile özellikleri verilmiştir.

$p, q, n \geq 2$ tam sayılar ve $W_0 = a, W_1 = b$ keyfi reel sayılar olmak üzere (2.2) rekürans bağıntısı

$$W_n = pW_{n-1} + qW_{n-2}$$

ile tanımlanmış ve $W_n = W_n(a, b; p, q)$ ile n -inci Horadam sayısı gösterilmiştir. İlk olarak n -inci Horadam sayısı ve oktonyonların tanımı kullanılarak sunulan Horadam oktonyonlar daha sonra Horadam sedenyonları verilmiştir.

Tanım 3.9: $n \geq 0$ için W_n , n -inci Horadam sayısı ve $(e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7)$ standart oktonyon bazı olmak üzere n -inci Horadam oktonyonu, $\mathbb{O}W_n$

$$\mathbb{O}W_n = W_n e_0 + W_{n+1} e_1 + \cdots + W_{n+7} e_7 = \sum_{i=0}^7 W_{n+i} e_i$$

şeklinde tanımlanır (Karataş ve Halıcı, 2017).

$n \geq 2$ olmak üzere Tanım 3.9 da verilen $\mathbb{O}W_n$ sayısının özel durumları olarak

- $W_n(0,1; 1,1) = F_n$ için (Keçilioğlu ve Akkuş, 2014) çalışmasında n -inci Fibonacci oktonyonu, $\mathbb{O}F_n$

$$\mathbb{O}F_n = \sum_{i=0}^7 F_{n+i} e_i$$

- $W_n(2,1; 1,1) = L_n$ için (Keçilioğlu ve Akkuş, 2014) çalışmasında n -inci Lucas oktonyonu, $\mathbb{O}L_n$

$$\mathbb{O}L_n = \sum_{i=0}^7 L_{n+i} e_i$$

- $W_n(0,1; 2,1) = P_n$ için (Szynal-Liana ve Wloch, 2015) çalışmasında n -inci Pell oktonyonu, $\mathbb{O}P_n$

$$\mathbb{O}P_n = \sum_{i=0}^7 P_{n+i} e_i$$

- $W_n(2,2; 2,1) = Q_n$ için (Szynal-Liana ve Wloch, 2015) çalışmasında n -inci Pell-Lucas oktonyonu, $\mathbb{O}Q_n$

$$\mathbb{O}Q_n = \sum_{i=0}^7 Q_{n+i} e_i$$

- $W_n(0,1; 1,2) = J_n$ için (Bolat Çimen ve İpek, 2017) çalışmasında n -inci Jacobsthal oktonyonu, $\mathbb{O}J_n$

$$\mathbb{O}J_n = \sum_{i=0}^7 J_{n+i} e_i$$

- $W_n(2,1; 1,2) = j_n$ için Bolat Çimen ve İpek, 2017) çalışmasında n -inci Jacobsthal-Lucas oktonyonu, $\mathbb{O}j_n$

$$\mathbb{O}j_n = \sum_{i=0}^7 j_{n+i} e_i$$

olarak tanımlanır.

Teorem 3.10: $\mathbb{O}W_n$ n -inci Horadam oktonyonu olmak üzere $\mathbb{O}W_0 = \sum_{i=0}^7 W_i e_i$, $\mathbb{O}W_1 = \sum_{i=0}^7 W_{1+i} e_i$ başlangıç şartları ile Hoardam oktonyonlarının dizisi, $\{\mathbb{O}W_n\}_{n \geq 0}$

$$\mathbb{O}W_n = p\mathbb{O}W_{n-1} + q\mathbb{O}W_{n-2} \quad (3.2)$$

rekürans bağıntısını sağlar (Karataş ve Halıcı, 2017).

$n \geq 2$ olmak üzere (3.2) eşitliğinin özel durumları olarak

- $W_n(0,1; 1,1) = F_n$ için (Keçilioğlu ve Akkuş, 2014) çalışmasında Fibonacci oktonyonunun rekürans bağıntısı

$$\mathbb{O}F_{n+2} = \mathbb{O}F_{n+1} + \mathbb{O}F_n,$$

- $W_n(2,1; 1,1) = L_n$ için (Keçilioğlu ve Akkuş, 2014) çalışmasında Lucas oktonyonunun rekürans bağıntısı

$$\mathbb{O}L_{n+2} = \mathbb{O}L_{n+1} + \mathbb{O}L_n,$$

- $W_n(0,1; 2,1) = P_n$ için (Szynal-Liana ve Wloch, 2015) çalışmasında Pell oktonyonunun rekürans bağıntısı

$$2\mathbb{O}P_{n-1} + \mathbb{O}P_{n-2},$$

- $W_n(2,2; 2,1) = Q_n$ için (Szynal-Liana ve Wloch, 2015) çalışmasında Pell-Lucas oktonyonunun rekürans bağıntısı

$$2\mathbb{O}Q_{n-1} + \mathbb{O}Q_{n-2},$$

- $W_n(0,1; 1,2) = J_n$ için (Bolat Çimen ve İpek, 2017) çalışmasında Jacobsthal oktonyonunun rekürans bağıntısı

$$\mathbb{O}J_{n+1} = \mathbb{O}J_n + 2\mathbb{O}J_{n-1},$$

- $W_n(2,1; 1,2) = j_n$ için Bolat Çimen ve İpek, 2017) çalışmasında Jacobsthal-Lucas oktonyonunun rekürans bağıntısı

$$\mathbb{O}j_{n+1} = \mathbb{O}j_n + 2\mathbb{O}j_{n-1}$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi Horadam oktonyonları ile özel durumları olan Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas oktonyonlarının Binet formülleri, üreteç fonksiyonları, toplam formülleri, normları ve bazı özel eşitliklerini verilecektir.

Teorem 3.11: $\underline{\alpha} = 1e_0 + \alpha e_1 + \alpha^2 e_2 + \dots + \alpha^7 e_7$ ve $\underline{\beta} = 1e_0 + \beta e_1 + \beta^2 e_2 + \dots + \beta^7 e_7$ olmak üzere Horadam oktonyonları için Binet formülü

$$\mathbb{O}W_n = \frac{A\underline{\alpha}\alpha^n - B\underline{\beta}\beta^n}{\alpha - \beta} \quad (3.3)$$

şeklindedir (Karataş ve Halıcı, 2017).

İspat: İspat için Horadam sayı dizisinin Binet formülü kullanılabilir. Horadam oktonyonlarının rekürans bağıntısı olan (3.2) eşitliğinde $t^n = \mathbb{O}W_n$ yineleme bağıntısı kullanılırsa

$$t^n - pt^{n-1} - qt^{n-2} = 0$$

karakteristik denklemi elde edilir. Bu denklemde özel olarak $n = 2$ alınarak elde edilen $t^2 - pt - q = 0$ denkleminin kökleri

$$\alpha = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}, \quad \beta = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

dir. Horadam sayı dizisinin

$$W_n = \frac{A\alpha^n - B\beta^n}{\alpha - \beta}$$

Binet formülü Tanım 3.9 da kullanılırsa

$$\mathbb{O}W_n = W_n e_0 + W_{n+1} e_1 + W_{n+2} e_2 + W_{n+3} e_3 + W_{n+4} e_4 + W_{n+5} e_5 + W_{n+6} e_6 + W_{n+7} e_7$$

$$= \sum_{i=0}^7 \left[\frac{A\alpha^{n+i} + B\beta^{n+i}}{\alpha - \beta} \right] e_i$$

elde edilir.

Buradan $\underline{\alpha} = 1e_0 + \alpha e_1 + \alpha^2 e_2 + \cdots + \alpha^7 e_7$ ve $\underline{\beta} = 1e_0 + \beta e_1 + \beta^2 e_2 + \cdots + \beta^7 e_7$ olarak alınırsa Horadam oktonyonları için Binet formülü

$$\mathbb{O}W_n = \frac{A\underline{\alpha}\alpha^n - B\underline{\beta}\beta^n}{\alpha - \beta}$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

$n \geq 2$ olmak üzere (3.3) eşitliğinin özel durumları olarak

- $W_n(0,1; 1,1) = F_n$ için (Keçilioğlu ve Akkuş, 2014) çalışmasında n -inci Fibonacci oktonyonunu veren Binet formülü

$$Q_n = \frac{\alpha^* \alpha^n - \beta^* \beta^n}{\alpha - \beta}$$

- $W_n(2,1; 1,1) = L_n$ için (Keçilioğlu ve Akkuş, 2014) çalışmasında n -inci Lucas oktonyonunu veren Binet formülü

$$L_n = \frac{\alpha^* \alpha^n - \beta^* \beta^n}{\alpha - \beta}$$

- $W_n(0,1; 1,2) = J_n$ için (Bolat Çimen ve İpek,2017) çalışmasında n -inci Jacobsthal oktonyonunu veren Binet formülü

$$J_n = \frac{1}{3}(\alpha^* \alpha^n - \beta^* \beta^n)$$

- $W_n(2,1; 1,2) = j_n$ için (Bolat Çimen ve İpek,2017) çalışmasında n -inci Jacobsthal oktonyonunun Binet formülü

$$j_n = (\alpha^* \alpha^n + \beta^* \beta^n)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.12: Horadam oktonyonları için üreteç fonksiyonu

$$\frac{\mathbb{O}W_0 + (\mathbb{O}W_1 - p\mathbb{O}W_0)t}{1 - pt - qt^2}$$

şeklindedir (Karataş ve Halıcı, 2017).

İspat: Horadam oktonyonlarının üreteç fonksiyonu

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{O}W_n t^n = \mathbb{O}W_0 t^0 + \mathbb{O}W_1 t^1 + \mathbb{O}W_2 t^2 + \dots + \mathbb{O}W_n t^n + \dots$$

olsun. Bu denklemin her iki yanı pt ve qt^2 ile çarpılırsa

$$ptg(t) = p\mathbb{O}W_0 t^1 + p\mathbb{O}W_1 t^2 + p\mathbb{O}W_2 t^3 + \dots + p\mathbb{O}W_n t^{n+1} + \dots$$

$$qt^2 g(t) = q\mathbb{O}W_0 t^2 + q\mathbb{O}W_1 t^3 + q\mathbb{O}W_2 t^4 + \dots + q\mathbb{O}W_n t^{n+2} + \dots$$

elde edilir. Buradan

$$(1 - pt - qt^2)g(t) = \mathcal{O}P_0 + \mathcal{O}P_1 t + (\mathcal{O}P_2 - \mathcal{O}P_0)t^2 + (\mathcal{O}P_3 - \mathcal{O}P_1 - \mathcal{O}P_0)t^3 + \dots \\ + (\mathcal{O}P_n - \mathcal{O}P_{n-2} - \mathcal{O}P_{n-3})t^n + \dots$$

olup eşitlik (3.2) deki $\mathbb{O}W_n = p\mathbb{O}W_{n-1} + q\mathbb{O}W_{n-2}$ rekürans bağıntısı kullanılırsa

$$(1 - pt - qt^2)g(t) = \mathbb{O}W_0 + (\mathbb{O}W_1 - p\mathbb{O}W_0)t$$

olur. Buradan Horadam oktonyonlarının için üreteç fonksiyonu

$$g(t) = \frac{\mathbb{O}W_0 + (\mathbb{O}W_1 - p\mathbb{O}W_0)t}{1 - pt - qt^2}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem (Cassini Eşitlikleri) 3.13: Horadam oktonyonları için Cassini eşitlikleri

$$\text{i.} \quad \mathbb{O}W_{n-1}\mathbb{O}W_{n+1} - \mathbb{O}W_n^2 = \frac{AB(\alpha\beta)^{n-1}(\beta\alpha\beta - \alpha\beta\alpha)}{\alpha - \beta}$$

$$\text{ii.} \quad \mathbb{O}W_{n+1}\mathbb{O}W_{n-1} - \mathbb{O}W_n^2 = \frac{AB(\alpha\beta)^{n-1}(\beta\beta\alpha - \alpha\alpha\beta)}{\alpha - \beta}$$

şeklindedir (Karataş ve Halıcı, 2017).

İspat: i. İspat için Horadam oktonyonlarının (3.3) eşitliği ile verilen Binet formülü kullanılabilir. Buradan

$$\mathbb{O}W_{n-1}\mathbb{O}W_{n+1} - \mathbb{O}W_n^2 = \left(\frac{A\underline{\alpha}\alpha^{n+1} - B\underline{\beta}\beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{A\underline{\alpha}\alpha^{n-1} - B\underline{\beta}\beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \right) - \left(\frac{A\underline{\alpha}\alpha^n - B\underline{\beta}\beta^n}{\alpha - \beta} \right)^2$$

olup temel hesaplamalar yapılırsa

$$\mathbb{O}W_{n-1}\mathbb{O}W_{n+1} - \mathbb{O}W_n^2 = \frac{AB(\alpha\beta)^{n-1}(\underline{\beta}\underline{\beta}\underline{\alpha} - \underline{\alpha}\underline{\alpha}\underline{\beta})}{\alpha - \beta}$$

elde edilir. Benzer düşünce ile ii. şıktaki eşitlik de ispatlanabilir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi Fibonacci ve Lucas tipli sayı dizileri olarak da anılan Horadam sayıları kullanarak Horadam sedenyonları ile özel durumları olan Fibonacci ve Lucas sedenyonları sunulacaktır.

n -inci Horadam sayısı ve sedenyonların tanımı kullanarak sunulan Horadam sedenyonlar aşağıda verilmiştir.

Tanım 3.14: $n \geq 0$ için W_n , n -inci Horadam sayısı ve $(e_0, e_1, e_2, \dots, e_{15})$ standart sedenyon bazı olmak üzere n -inci Horadam sedenyonu

$$\mathbb{S}W_n = W_n e_0 + W_{n+1} e_1 + \dots + W_{n+15} e_{15} = \sum_{i=0}^{15} W_{n+i} e_i$$

şeklinde tanımlanır (Çimen vd., 2019).

$n \geq 2$ olmak üzere Tanım 3.14 de verilen $\mathbb{S}W_n$ sayısının özel durumları, (Bilgici vd., 2017) çalışmasında

- $W_n(0,1; 1,1) = F_n$ için n -inci Fibonacci sedenyonu, $\mathbb{S}F_n$

$$\mathbb{S}F_n = \sum_{i=0}^{15} F_{n+i} e_i$$

- $W_n(2,1; 1,1) = L_n$ için n -inci Lucas sedenyonu, SL_n

$$SL_n = \sum_{i=0}^{15} L_{n+i} e_i$$

olarak tanımlanır.

Teorem 3.15: SW_n n -inci Horadam sedenyonu olmak üzere $SW_0 = \sum_{i=0}^{15} W_i e_i$, $SW_1 = \sum_{i=0}^{15} W_{1+i} e_i$ başlangıç şartları ile Horadam sedenyonlarının dizisi, $\{SW_n\}_{n \geq 0}$

$$W_n = pSW_{n-1} + qSW_{n-2} \quad (3.4)$$

rekürans bağıntısını sağlar (Çimen vd., 2019).

$n \geq 2$ olmak üzere (3.4) eşitliğinin özel durumları olarak (Bilgici vd., 2017) çalışmasında

- $W_n(0,1; 1,1) = F_n$ için Fibonacci sedenyonlarının rekürans bağıntısı

$$SF_{n+2} = SF_{n+1} + SF_n$$

- $W_n(2,1; 1,1) = L_n$ için Lucas oktonyonlarının rekürans bağıntısı

$$SL_{n+2} = SL_{n+1} + SL_n$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi Horadam sedenyonları ile özel durumları olan Fibonacci ve Lucas sedenyonlarının Binet formülleri, üreteç fonksiyonları, toplam formülleri ve bazı özel eşitliklerini verilecektir.

Teorem 3.16: $\underline{\alpha} = \sum_{i=0}^{15} \alpha^i e_i$ ve $\underline{\beta} = \sum_{i=0}^{15} \beta^i e_i$ ile $A = b - a\beta$, $B = b - a\alpha$ olmak üzere Horadam sedenyonları için Binet formülü

$$SW_n = \frac{A\underline{\alpha}\alpha^n - B\underline{\beta}\beta^n}{\alpha - \beta} \quad (3.5)$$

şeklindedir (Çimen vd., 2019).

İspat: İspat için Horadam sayı dizisinin Binet formülü kullanılabilir. Horadam sedenyonlarının rekürans bağıntısı olan (3.4) eşitliğinde $t^n = \mathbb{S}W_n$ yineleme bağıntısı kullanılırsa

$$t^n - pt^{n-1} - qt^{n-2} = 0$$

karakteristik denklemi elde edilir. Özel olarak $n = 2$ alınarak elde edilen $t^2 - pt - q = 0$ denkleminin kökleri

$$\alpha = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}, \quad \beta = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

dir. Horadam sayı dizisinin

$$W_n = \frac{A\alpha^n - B\beta^n}{\alpha - \beta}$$

Binet formülü Tanım 3.14 te kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mathbb{S}W_n &= \sum_{i=0}^{15} W_{n+i} e_i \\ &= \sum_{i=0}^{15} \frac{A\alpha^{n+i} - B\beta^{n+i}}{\alpha - \beta} e_i \\ &= \frac{A\alpha^n}{\alpha - \beta} \sum_{i=0}^{15} \alpha^i e_i - \frac{B\beta^n}{\alpha - \beta} \sum_{i=0}^{15} \beta^i e_i \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\underline{\alpha} = \sum_{i=0}^{15} \alpha^i e_i$ ve $\underline{\beta} = \sum_{i=0}^{15} \beta^i e_i$ olarak alınırsa Horadam sedenyonları için Binet formülü

$$\mathbb{S}W_n = \frac{A\underline{\alpha}\alpha^n - B\underline{\beta}\beta^n}{\alpha - \beta}$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

$n \geq 2$ olmak üzere (3.5) eşitliğinin özel durumları olarak (Bilgici vd., 2017) çalışmasında

- $W_n(0,1; 1,1) = F_n$ için n -inci Fibonacci sedenyonunu veren Binet formülü

$$F_n = \frac{\alpha^* \alpha^n - \beta^* \beta^n}{\alpha - \beta}$$

- $W_n(2,1; 1,1) = L_n$ için n -inci Lucas sedenyonunu veren Binet formülü

$$L_n = \alpha^* \alpha^n + \beta^* \beta^n$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.17: Horadam sedenyonları için üreteç fonksiyonu

$$\frac{\mathbb{S}W_0 + (\mathbb{S}W_1 - p\mathbb{S}W_0)t}{1 - pt - qt^2}$$

şeklindedir (Çimen vd., 2019).

İspat: Horadam sedenyonlarının üreteç fonksiyonu

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{S}W_n t^n = \mathbb{S}W_0 t^0 + \mathbb{S}W_1 t^1 + \mathbb{S}W_2 t^2 + \dots + \mathbb{S}W_n t^n + \dots$$

olsun. Bu denklemin her iki yanı pt ve qt^2 ile çarpılırsa

$$ptg(t) = p\mathbb{S}W_0 t^1 + p\mathbb{S}W_1 t^2 + p\mathbb{S}W_2 t^3 + \dots + p\mathbb{S}W_n t^{n+1} + \dots$$

$$qt^2 g(t) = q\mathbb{S}W_0 t^2 + q\mathbb{S}W_1 t^3 + q\mathbb{S}W_2 t^4 + \dots + q\mathbb{S}W_n t^{n+2} + \dots$$

elde edilir. Buradan

$$(1 - pt - qt^2)g(t) = \mathbb{S}W_0 + \mathbb{S}W_1 t + (\mathbb{S}W_2 - \mathbb{S}W_0)t^2$$

$$+ (\mathbb{S}W_3 - \mathbb{S}W_1 - \mathbb{S}W_0)t^3 + \dots + (\mathbb{S}W_n - \mathbb{S}W_{n-2} - \mathbb{S}W_{n-3})t^n + \dots$$

olup eşitlik (3.4) deki $\mathbb{S}W_n = p\mathbb{S}W_{n-1} + q\mathbb{S}W_{n-2}$ rekürans bağıntısı kullanılırsa

$$(1 - pt - qt^2)g(t) = \mathbb{S}W_0 + (\mathbb{S}W_1 - p\mathbb{S}W_0)t$$

olur.

Buradan Horadam sedenyonlarının için üreteç fonksiyonu

$$g(t) = \frac{SW_0 + (SW_1 - pSW_0)t}{1 - pt - qt^2} \quad (3.6)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

$n \geq 2$ olmak üzere (3.6) eşitliğinin özel durumları olarak (Bilgici vd., 2017) çalışmasında

- $W_n(0,1; 1,1) = F_n$ için Fibonacci sedenyonunun üreteç fonksiyonu

$$\sum_{i=0}^{\infty} F_i t^i = \frac{F_0 + F_{-1}t}{1 - t - t^2}$$

- $W_n(2,1; 1,1) = L_n$ için Lucas sedenyonunun üreteç fonksiyonu

$$\sum_{i=0}^{\infty} L_i t^i = \frac{L_0 + L_{-1}t}{1 - t - t^2}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.18: Horadam sedenyonları için Cassini eşitlikleri

$$\text{iii.} \quad SW_{n+1}SW_{n-1} - SW_n^2 = (-q)^{n-1}AB \left[\frac{\beta\beta\alpha - \alpha\alpha\beta}{(\alpha - \beta)} \right]$$

$$\text{iv.} \quad SW_{n+1}SW_{n-1} - SW_n^2 = (-q)^{n-1}AB \left[\frac{\beta\alpha\beta - \alpha\beta\alpha}{(\alpha - \beta)} \right]$$

şeklindedir (Çimen vd., 2019).

İspat: i. İspat için Horadam sedenyonlarının (3.5) eşitliği ile verilen Binet formülünü kullanılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} & SW_{n-1}SW_{n+1} - SW_n^2 \\ &= \left(\frac{A\alpha\alpha^{n+1} - B\beta\beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{A\alpha\alpha^{n-1} - B\beta\beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \right) - \left(\frac{A\alpha\alpha^n - B\beta\beta^n}{\alpha - \beta} \right)^2 \end{aligned}$$

yazılır.

Bu eşitlikte temel hesaplamalar yapılırsa

$$SW_{n+1}SW_{n-1} - SW_n^2 = (-q)^{n-1}AB \left[\frac{\beta\beta\underline{\alpha} - \alpha\underline{\alpha}\beta}{(\alpha - \beta)} \right]$$

elde edilir. Benzer düşünce ile ii. şıktaki eşitlik de ispatlanabilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.19: Horadam sedenyonlarının toplamı

$$M = \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{B\underline{\beta}\beta^{n+1}}{1 - \beta} - \frac{A\underline{\alpha}\alpha^{n+1}}{1 - \alpha} \right)$$

olmak üzere

$$\sum_{i=0}^n SW_i = \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{B\underline{\beta}\beta^{n+1}}{1 - \beta} - \frac{A\underline{\alpha}\alpha^{n+1}}{1 - \alpha} \right) + M$$

şeklindedir (Çimen vd., 2019).

İspat: İspat için Horadam sedenyonlarının (3.5) eşitliği ile verilen Binet formülü kullanılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n SW_i &= \sum_{i=0}^n \frac{A\underline{\alpha}\alpha^i - B\underline{\beta}\beta^i}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{A\underline{\alpha}}{\alpha - \beta} \sum_{i=0}^n \alpha^i - \frac{B\underline{\beta}}{\alpha - \beta} \sum_{i=0}^n \beta^i \end{aligned}$$

elde edilir. Geometrik seriler kullanılarak

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n SW_i &= \frac{A\underline{\alpha}}{\alpha - \beta} \left(\frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} \right) - \frac{B\underline{\beta}}{\alpha - \beta} \left(\frac{1 - \beta^{n+1}}{1 - \beta} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{B\underline{\beta}\beta^{n+1}}{1 - \beta} - \frac{A\underline{\alpha}\alpha^{n+1}}{1 - \alpha} \right) - \frac{A\underline{\alpha}(1 - \beta) - B\underline{\beta}(1 - \alpha)}{(\alpha - \beta)(1 - \alpha)(1 - \beta)} \end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan

$$M = \frac{A\alpha(1-\beta) - B\beta(1-\alpha)}{(\alpha-\beta)(1-\alpha)(1-\beta)}$$

alınırsa Horadam sedenyonlarının toplamı

$$\sum_{i=0}^n SW_i = \frac{1}{\alpha-\beta} \left(\frac{B\beta\beta^{n+1}}{1-\beta} - \frac{A\alpha\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \right) + M$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

3.3.2. Üçüncü mertebeden sayı dizilerinin oktonyonları ve sedenyonları

Bu bölümde üçüncü mertebeden sayı dizileri ya da Tribonacci ve Tribonacci-Lucas tipli sayı dizileri olarak adlandırılan genelleştirilmiş Tribonacci sayı dizileri kullanılarak oluşturulmuş Tribonacci ve Tribonacci-Lucas oktonyonları ile sedenyonları ve özellikleri verilmiştir.

r, s, t reel sayılar ve $V_0 = a, V_1 = b, V_2 = c$ keyfi kompleks sayılar olmak üzere (3.1) rekürans bağıntısı

$$V_n = rV_{n-1} + sV_{n-2} + tV_{n-3}$$

ile tanımlanmış ve $\{V_n(a, b, c; r, s, t)\}_{n \geq 0}$ ile n -inci genelleştirilmiş Tribonacci sayısı gösterilmiştir. İlk olarak genelleştirilmiş Tribonacci oktonyonları daha sonra genelleştirilmiş Tribonacci sedenyonları verilmiştir.

Tanım 3.20: $n \geq 0$ için V_n n -inci genelleştirilmiş Tribonacci sayısı ve $(e_0, e_1, e_2, \dots, e_7)$ standart oktonyon bazı olmak üzere n -inci genelleştirilmiş Tribonacci oktonyonu

$$\mathbb{O}V_n = \sum_{s=0}^7 V_{n+s} e_s = V_n + \sum_{s=0}^{15} V_{n+s} e_s$$

şeklinde tanımlanır (Özkoç Öztürk, 2019).

Genelleştirilmiş Tribonacci oktonyonlarının oluşturduğu dizi $\{\mathbb{O}V_n\}_{n \geq 0}$ ile gösterilir. Bu dizinin rekürans bağıntısı aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 3.21: $\mathbb{O}V_n$, n -inci genelleştirilmiş Tribonacci oktonyonu olmak üzere

$$\mathbb{O}V_0 = \sum_{i=0}^{15} V_i e_i$$

$$\mathbb{O}V_1 = \sum_{i=0}^{15} V_{1+i} e_i$$

$$\mathbb{O}V_2 = \sum_{i=0}^{15} V_{2+i} e_i$$

başlangıç şartları ile genelleştirilmiş Tribonacci oktonyonlarının dizisi, $\{\mathbb{O}V_n\}_{n \geq 0}$

$$\mathbb{O}V_n = r\mathbb{O}V_{n-1} + s\mathbb{O}V_{n-2} + t\mathbb{O}V_{n-3}$$

rekürans bağıntılarını sağlar (Özkoç Öztürk, 2019).

Teorem 3.22: $\hat{\alpha} = \sum_{s=0}^7 \alpha^s e_s$, $\hat{\beta} = \sum_{s=0}^7 \beta^s e_s$, $\hat{\gamma} = \sum_{s=0}^7 \gamma^s e_s$ olmak üzere genelleştirilmiş Tribonacci oktonyonlar için Binet formülü sırasıyla

$$\mathbb{O}V_n = \frac{O\hat{\alpha}\alpha^{n+1}}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{Q\hat{\beta}\beta^{n+1}}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} + \frac{R\hat{\gamma}\gamma^{n+1}}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}$$

şeklindedir (Özkoç Öztürk, 2019).

İspat: $\hat{\alpha} = \sum_{s=0}^7 \alpha^s e_s$, $\hat{\beta} = \sum_{s=0}^7 \beta^s e_s$, $\hat{\gamma} = \sum_{s=0}^7 \gamma^s e_s$ olmak üzere genelleştirilmiş Tribonacci sayı dizisinin Binet formülü genelleştirilmiş Tribonacci oktonyonların tanımında kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mathbb{O}V_n &= \sum_{s=0}^7 V_{n+s} e_s \\ &= \sum_{s=0}^7 \left(\frac{P\alpha^{n+s}}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{Q\beta^{n+s}}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} + \frac{R\gamma^{n+s}}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)} \right) e_s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{P\alpha^{n+s}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{Q\beta^{n+s}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{R\gamma^{n+s}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} \right) e_0 \\
&+ \left(\frac{P\alpha^{n+1}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{Q\beta^{n+1}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{R\gamma^{n+1}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} \right) e_1 + \dots \\
&+ \left(\frac{P\alpha^{n+7}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{Q\beta^{n+7}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{R\gamma^{n+7}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} \right) e_7 \\
&= \frac{O\hat{\alpha}\alpha^{n+1}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{Q\hat{\beta}\beta^{n+1}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{R\hat{\gamma}\gamma^{n+1}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}
\end{aligned}$$

olup istenilen elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.23: Genelleştirilmiş Tribonacci oktonyonları için üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{O}V_n x^n = \frac{\mathbb{O}V_0 + (\mathbb{O}V_1 - r\mathbb{O}V_0)x + (\mathbb{O}V_2 - r\mathbb{O}V_1 - s\mathbb{O}V_0)x^2}{1 - rx - sx^2 - tx^3}$$

dir (Özkoç Öztürk, 2019).

İspat: Genelleştirilmiş Tribonacci oktonyonlar için

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{O}V_n x^n$$

olsun. Buradan

$$g(x) = \mathbb{O}V_0 + \mathbb{O}V_1 x + \mathbb{O}V_2 x^2 + \mathbb{O}V_3 x^3 + \mathbb{O}V_4 x^4 + \mathbb{O}V_5 x^5 + \dots + \mathbb{O}V_n x^n + \dots$$

$$rxg(x) = r\mathbb{O}V_0 x + r\mathbb{O}V_1 x^2 + r\mathbb{O}V_2 x^3 + r\mathbb{O}V_3 x^4 + r\mathbb{O}V_4 x^5 + \dots + r\mathbb{O}V_{n-1} x^n + \dots$$

$$sx^2 g(x) = s\mathbb{O}V_0 x^2 + s\mathbb{O}V_1 x^3 + s\mathbb{O}V_2 x^4 + s\mathbb{O}V_3 x^5 + \dots + s\mathbb{O}V_{n-2} x^n + \dots$$

$$tx^3 g(x) = t\mathbb{O}V_0 x^3 + t\mathbb{O}V_1 x^4 + t\mathbb{O}V_2 x^5 + \dots + t\mathbb{O}V_{n-3} x^n + \dots$$

eşitlikleri yazılabilir.

Bu eşitlikler taraf tarafa toplanıp genelleştirilmiş Tribonacci oktonyonlarının $\mathbb{O}V_n = r\mathbb{O}V_{n-1} + s\mathbb{O}V_{n-2} + t\mathbb{O}V_{n-3}$ rekürans bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(x) - rxg(x) - sx^2g(x) - tx^3g(x) &= \mathbb{O}V_0 + (\mathbb{O}V_1 - r\mathbb{O}V_0)x \\ &\quad + (\mathbb{O}V_2 - r\mathbb{O}V_1 - s\mathbb{O}V_0)x^2 \\ &\quad + (\mathbb{O}V_3 - r\mathbb{O}V_2 - s\mathbb{O}V_1 - t\mathbb{O}V_0)x^3 \\ &\quad + (\mathbb{O}V_4 - r\mathbb{O}V_3 - s\mathbb{O}V_2 - t\mathbb{O}V_1)x^4 + \dots \\ &\quad + (\mathbb{O}V_n - r\mathbb{O}V_{n-1} - s\mathbb{O}V_{n-2} - t\mathbb{O}V_{n-3})x^n + \dots \\ &= \mathbb{O}V_0 + (\mathbb{O}V_1 - r\mathbb{O}V_0)x + (\mathbb{O}V_2 - r\mathbb{O}V_1 - s\mathbb{O}V_0)x^2 \end{aligned}$$

olup

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{O}V_n x^n = \frac{\mathbb{O}V_0 + (\mathbb{O}V_1 - r\mathbb{O}V_0)x + (\mathbb{O}V_2 - r\mathbb{O}V_1 - s\mathbb{O}V_0)x^2}{1 - rx - sx^2 - tx^3}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.24: Genelleştirilmiş Tribonacci oktonyonları için toplama formülleri

$$\sum_{i=0}^n \mathbb{O}V_i = \frac{(r+s-1)\mathbb{O}V_0 + (r-1)\mathbb{O}V_1 - \mathbb{O}V_2 + t\mathbb{O}V_{n-2} + (s+t)\mathbb{O}V_{n-1} + (r+s+t)\mathbb{O}V_2}{r+s+t-1}$$

şeklindedir (Özkoç Öztürk, 2019).

İspat: Teorem 3.21 den

$$\mathbb{O}V_3 = r\mathbb{O}V_2 + s\mathbb{O}V_1 + t\mathbb{O}V_0$$

$$\mathbb{O}V_4 = r\mathbb{O}V_3 + s\mathbb{O}V_2 + t\mathbb{O}V_1$$

$\vdots$

$$\mathbb{O}V_{n-1} = r\mathbb{O}V_{n-2} + s\mathbb{O}V_{n-3} + t\mathbb{O}V_{n-4}$$

$$\mathbb{O}V_n = r\mathbb{O}V_{n-1} + s\mathbb{O}V_{n-2} + t\mathbb{O}V_{n-3}$$

eşitlikleri yazılabilir.

Bu eşitlikler taraf tarafa toplanır

$$\mathbb{O}V_3 + \mathbb{O}V_4 + \cdots + \mathbb{O}V_n = r \sum_{i=2}^n \mathbb{O}V_i + s \sum_{i=1}^n \mathbb{O}V_i + t \sum_{i=0}^n \mathbb{O}V_i$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(r + s - 1) \sum_{i=0}^n \mathbb{O}V_i = (r + s - 1)\mathbb{O}V_0 + (r - 1)\mathbb{O}V_1 - \mathbb{O}V_2 \\ + t\mathbb{O}V_{n-2} + (s + t)\mathbb{O}V_{n-1} + (r + s + t)\mathbb{O}V_2$$

olup

$$\sum_{i=0}^n \mathbb{O}V_i = \frac{(r + s - 1)\mathbb{O}V_0 + (r - 1)\mathbb{O}V_1 - \mathbb{O}V_2 + t\mathbb{O}V_{n-2} + (s + t)\mathbb{O}V_{n-1} + (r + s + t)\mathbb{O}V_2}{r + s + t - 1}$$

istenilen elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi genelleştirilmiş Tribonacci sedenyonları ile özel durumları olan Tribonacci ve Tribonacci-Lucas sedenyonlarının Binet formülleri, üreteç fonksiyonları, toplam formülleri, normları ve bazı özel eşitlikleri verilecektir.

Tanım 3.25: V_n , n -inci genelleştirilmiş Tribonacci sayısı olmak üzere n -inci genelleştirilmiş Tribonacci sedenyonu

$$SV_n = \sum_{s=0}^{15} V_{n+s} e_s = V_n + \sum_{s=1}^{15} V_{n+s} e_s$$

şeklinde tanımlanır (Soykan, vd., 2020).

Teorem 3.26: Negatif olmayan tüm n tamsayıları için genelleştirilmiş Tribonacci sedenyonları

$$SV_n = SV_{n-1} + SV_{n-2} + SV_{n-3}$$

rekürans bağıntılarını sağlar (Soykan, vd., 2020).

Tanım 3.25 ve Teorem 3.26 kullanılarak aşağıdaki özellikler verilebilir.

- $\{\hat{V}_n\}_{n \geq 0}$ dizileri negatif indislere

$$\mathbb{S}V_{-n} = -\frac{s}{t}\mathbb{S}V_{-(n-1)} - \frac{r}{t}\mathbb{S}V_{-(n-2)} + \frac{1}{t}\mathbb{S}V_{-(n-3)}$$

rekürans bağıntısı ile genişletilebilir.

- $\mathbb{S}V_n$ sedenyonun eşleği $\overline{\mathbb{S}V_n}$ olmak üzere

$$\overline{\mathbb{S}V_n} = V_n - \sum_{s=1}^{15} V_{n+s} e_s = V_n - V_{n+1}e_1 - V_{n+2}e_2 - \dots - V_{n+15}e_{15}$$

dir.

- n -inci genelleştirilmiş Tribonacci normu

$$\|\mathbb{S}V_n\|^2 = N^2(\mathbb{S}V_n) = \hat{V}_n \bar{\hat{V}}_n = \bar{\hat{V}}_n \hat{V}_n = T_n^2 + T_{n+1}^2 + \dots + T_{n+15}^2$$

şeklindedir.

Teorem 2.27: $\hat{\alpha} = \sum_{s=0}^{15} \alpha^s e_s$, $\hat{\beta} = \sum_{s=0}^{15} \beta^s e_s$, $\hat{\gamma} = \sum_{s=0}^{15} \alpha^s e_s$ ve

$$P = V_2 - (\beta + \gamma)V_1 + \beta\gamma V_0,$$

$$Q = V_2 - (\alpha + \gamma)V_1 + \alpha\gamma V_0,$$

$$R = V_2 - (\alpha + \beta)V_1 + \alpha\beta V_0$$

olmak üzere genelleştirilmiş Tribonacci sedenyonları için Binet formülü

$$\mathbb{S}V_n = \frac{P\alpha^n}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{Q\beta^n}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} + \frac{R\gamma^n}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}$$

şeklindedir (Soykan, vd., 2020).

İspat: $\hat{\alpha} = \sum_{s=0}^{15} \alpha^s e_s$, $\hat{\beta} = \sum_{s=0}^{15} \beta^s e_s$, $\hat{\gamma} = \sum_{s=0}^{15} \gamma^s e_s$, olmak üzere genelleştirilmiş Tribonacci sayu dizisinin Binet formülü genelleştirilmiş Tribonacci sedenyonunun tanımında kullanılırsa

$$\begin{aligned}
SV_n &= \sum_{s=0}^{15} T_{n+s} e_s \\
&= \sum_{s=0}^{15} \left(\frac{P\alpha^n}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{Q\beta^n}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{R\gamma^n}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} \right) \\
&\quad + \left(\frac{P\alpha^{n+1}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{Q\beta^{n+1}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{R\gamma^{n+1}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} \right) e_1 \\
&\quad + \left(\frac{P\alpha^{n+2}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{Q\beta^{n+2}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{R\gamma^{n+2}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} \right) e_2 \\
&\quad \vdots \\
&\quad + \left(\frac{P\alpha^{n+15}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{Q\beta^{n+15}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{R\gamma^{n+15}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} \right) e_{15} \\
&= \frac{P\hat{\alpha}\alpha^{n+1}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{Q\hat{\beta}\beta^{n+1}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{R\hat{\gamma}\gamma^{n+1}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}
\end{aligned}$$

olup istenilen elde edilir.

Teorem 3.28: n -inci genelleştirilmiş Tribonacci sedenyonları için üreteç fonksiyonları sırasıyla

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} SV_n x^n = \frac{SV_0 + (SV_1 - rSV_0)x + tSV_{-1}x^2}{1 - rx - sx^2 - tx^3}$$

dir (Soykan, vd., 2020).

İspat: $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{S}V_n x^n$ olsun. Buradan

$$g(x) = \mathbb{S}V_0 + \mathbb{S}V_1 x + \mathbb{S}V_2 x^2 + \mathbb{S}V_3 x^3 + \mathbb{S}V_4 x^4 + \mathbb{S}V_5 x^5 + \dots + \mathbb{S}V_n x^n + \dots$$

$$rxg(x) = r\mathbb{S}V_0 x + r\mathbb{S}V_1 x^2 + r\mathbb{S}V_2 x^3 + r\mathbb{S}V_3 x^4 + r\mathbb{S}V_4 x^5 + \dots + r\mathbb{S}V_{n-1} x^n + \dots$$

$$sx^2 g(x) = s\mathbb{S}V_0 x^2 + s\mathbb{S}V_1 x^3 + s\mathbb{S}V_2 x^4 + s\mathbb{S}V_3 x^5 + \dots + s\mathbb{S}V_{n-2} x^n + \dots$$

$$tx^3 g(x) = t\mathbb{S}V_0 x^3 + t\mathbb{S}V_1 x^4 + t\mathbb{S}V_2 x^5 + \dots + t\mathbb{S}V_{n-3} x^n + \dots$$

eşitlikleri yazılabilir.

Bu eşitlikler taraf tarafa toplanıp genelleştirilmiş Tribonacci sedenyonunun $\mathbb{S}V_n = r\mathbb{S}V_{n-1} + s\mathbb{S}V_{n-2} + t\mathbb{S}V_{n-3}$ rekürans bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned} (1 - rx - sx^2 - tx^3)g(x) &= g(x) - rxg(x) - sx^2 g(x) - tx^3 g(x) \\ &= \mathbb{S}V_0 + (\mathbb{S}V_1 - r\mathbb{S}V_0)x + (\mathbb{S}V_2 - r\mathbb{S}V_1 - s\mathbb{S}V_0)x^2 + (\mathbb{S}V_3 - r\mathbb{S}V_2 - s\mathbb{S}V_1 - t\mathbb{S}V_0)x^3 \\ &\quad + (\mathbb{S}V_4 - r\mathbb{S}V_3 - s\mathbb{S}V_2 - t\mathbb{S}V_1)x^4 + \dots + (\mathbb{S}V_n - r\mathbb{S}V_{n-1} - s\mathbb{S}V_{n-2} - t\mathbb{S}V_{n-3})x^n + \dots \\ &= \mathbb{S}V_0 + (\mathbb{S}V_1 - r\mathbb{S}V_0)x + (\mathbb{S}V_2 - r\mathbb{S}V_1 - s\mathbb{S}V_0)x^2 \end{aligned}$$

olup

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{S}V_{n-1} x^n = \frac{\mathbb{S}V_0 + (\mathbb{S}V_1 - r\mathbb{S}V_0)x + (\mathbb{S}V_2 - r\mathbb{S}V_1 - s\mathbb{S}V_0)x^2}{1 - rx - sx^2 - tx^3}$$

elde edilir. $\mathbb{S}V_2 - r\mathbb{S}V_1 - s\mathbb{S}V_0 = t\mathbb{S}V_{-1}$ eşitliği kullanılırsa genelleştirilmiş Tribonacci sedenyonu için üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{S}V_n x^n = \frac{\mathbb{S}V_0 + (\mathbb{S}V_1 - r\mathbb{S}V_0)x + t\mathbb{S}V_{-1}x^2}{1 - rx - sx^2 - tx^3}$$

olarak bulunur.

Teorem 3.29: Genelleştirilmiş Tribonacci sedenyonları için toplam formülleri

$$\varepsilon = \varepsilon_{r,s,t} = r + s + t - 1$$

$$\mu = \mu_{r,s,t} = (r + s - 1)V_0 + (r - 1)V_1 - V_2$$

$$\sigma = \sigma_{r,s,t} = \mu + e_1(\mu - \varepsilon V_0) + e_2(\mu - \varepsilon(V_0 + V_1)) + \dots + e_{15}(\mu - \varepsilon(V_0 + V_1 + \dots + V_{14}))$$

olmak üzere sırayla

$$\sum_{i=0}^n SV_i = \frac{\hat{V}_{n+2} + (1-r)\hat{V}_{n+1} + t\hat{V}_n + \sigma_{r,s,t}}{\varepsilon_{r,s,t}}$$

şeklindedir (Soykan, vd., 2020).

Şimdi genelleştirilmiş Tribonacci sedenyonlarının özel durumları olan Tribonacci ve Tribonacci-Lucas sedenyonlarının Binet formülleri, üreteç fonksiyonları, toplam formülleri, normları ve bazı özel eşitliklerini verilecektir.

r, s, t reel sayılar ve $V_0 = a$, $V_1 = b$, $V_2 = c$ keyfi kompleks sayılar olmak üzere

$$V_n = rV_{n-1} + sV_{n-2} + tV_{n-3}$$

(3.1) rekürans $r = s = t = 1$ ile $V_0 = 0, V_1 = 1, V_2 = 1$ alınırsa $\{V_n\}$ dizisinden iyi bilinen Tribonacci sayı dizisi ve $r = s = t = 1$ ile $V_0 = 3, V_1 = 1, V_2 = 3$ alınırsa $\{V_n\}$ dizisinden iyi bilinen Tribonacci ve Tribonacci-Lucas sayı dizileri elde edilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 3.30: $n \geq 3$ için Tribonacci $\{T_n\}$ ve Tribonacci-Lucas $\{K_n\}$ sayı dizileri sırasıyla,

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3} \quad T_0 = 0, T_1 = 1, T_2 = 1 \quad (3.7)$$

$$K_n = K_{n-1} + K_{n-2} + K_{n-3} \quad K_0 = 3, K_1 = 1, K_2 = 3 \quad (3.8)$$

rekürans bağıntılarıyla tanımlanır (Feinberg, 1963).

(3.7) ve (3.8) rekürans bağıntılarının $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ kübik denkleminin kökleri α, β ve γ ve $w = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)$ için

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}}{3}$$

$$\beta = \frac{1 + w\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + w^2\sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}}{3}$$

$$\gamma = \frac{1 + w^2\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + w\sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}}{3}$$

olmak üzere Tribonacci ve Tribonacci-Lucas sayılarının Binet formülleri sırasıyla

$$T_n = \frac{\alpha^{n+1}}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{\beta^{n+1}}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} + \frac{\gamma^{n+1}}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)} \quad (3.9)$$

ve

$$K_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n \quad (3.10)$$

şeklindedir.

Tanım 3.31: $n \geq 0$ için T_n ve K_n sırasıyla n -inci Tribonacci ve n -inci Tribonacci-Lucas sayısı ve $(e_0, e_1, e_2, \dots, e_{15})$ standart sedenyon bazı olmak üzere n -inci Tribonacci ve Tribonacci-Lucas sedenyonları sırasıyla

$$\mathbb{S}T_n = \sum_{s=0}^{15} T_{n+s} e_s = T_n + \sum_{s=0}^{15} T_{n+s} e_s$$

$$\mathbb{S}K_n = \sum_{s=0}^{15} K_{n+s} e_s = K_n + \sum_{s=0}^{15} K_{n+s} e_s$$

şeklinde tanımlanır (Soykan, 2019).

Tribonacci ve Tribonacci-Lucas sedenyonlarının oluşturduğu diziler sırasıyla $\{\mathbb{S}T_n\}_{n \geq 0}$ ve $\{\mathbb{S}K_n\}_{n \geq 0}$ ile gösterilir. Bu dizilerin rekürans bağıntıları aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 3.32: $\mathbb{S}T_n$ n -inci Tribonacci sedenyonu ve $\mathbb{S}K_n$ n -inci Tribonacci-Lucas sedenyonu olmak üzere $\mathbb{S}T_0 = \sum_{i=0}^{15} T_i e_i$, $\mathbb{S}T_1 = \sum_{i=0}^{15} T_{1+i} e_i$, $\mathbb{S}T_2 = \sum_{i=0}^{15} T_{2+i} e_i$ ve $\mathbb{S}K_0 = \sum_{i=0}^{15} K_i e_i$, $\mathbb{S}K_1 = \sum_{i=0}^{15} K_{1+i} e_i$, $\mathbb{S}K_2 = \sum_{i=0}^{15} K_{2+i} e_i$ başlangıç şartları ile Tribonacci ve Tribonacci-Lucas sedenyonlarının dizisi, $\{\mathbb{S}T_n\}_{n \geq 0}$ ve $\{\mathbb{S}K_n\}_{n \geq 0}$ sırasıyla

$$\mathbb{S}T_n = \mathbb{S}T_{n-1} + \mathbb{S}T_{n-2} + \mathbb{S}T_{n-3}$$

$$\mathbb{S}K_n = \mathbb{S}K_{n-1} + \mathbb{S}K_{n-2} + \mathbb{S}K_{n-3}$$

rekürans bağıntılarını sağlar (Soykan, 2019).

Tanım 3.31 ve Teorem 3.32 kullanılarak aşağıdaki özellikler verilebilir.

- $\{\mathbb{S}T_n\}_{n \geq 0}$ ve $\{\mathbb{S}K_n\}_{n \geq 0}$ dizileri sırasıyla negatif indislerle

$$\mathbb{S}T_{-n} = -\mathbb{S}T_{-(n-1)} - \mathbb{S}T_{-(n-2)} + \mathbb{S}T_{-(n-3)}$$

$$\mathbb{S}K_{-n} = -\mathbb{S}K_{-(n-1)} - \mathbb{S}K_{-(n-2)} + \mathbb{S}K_{-(n-3)}$$

rekürans bağıntıları ile genişletilebilir.

- $\mathbb{S}T_n$ sedenyonun eşleniği $\overline{\mathbb{S}T_n}$ ve $\mathbb{S}K_n$ sedenyonun eşleniği $\overline{\mathbb{S}K_n}$ olmak üzere

$$\overline{\mathbb{S}T_n} = T_n - \sum_{s=0}^{15} T_{n+s} e_s = T_n - T_{n+1} e_1 - T_{n+2} e_2 - \cdots - T_{n+15} e_{15}$$

$$\overline{\mathbb{S}K_n} = K_n - \sum_{s=0}^{15} K_{n+s} e_s = K_n - K_{n+1} e_1 - K_{n+2} e_2 - \cdots - K_{n+15} e_{15}$$

dir.

- n -inci Tribonacci ve n -inci Tribonacci-Lucas sedenyonlarının normu

$$\|\mathbb{S}T_n\|^2 = N^2(\mathbb{S}T_n) = \mathbb{S}T_n \overline{\mathbb{S}T_n} = \overline{\mathbb{S}T_n} \mathbb{S}T_n = T_n^2 + T_{n+1}^2 + \cdots + T_{n+15}^2$$

$$\|\mathbb{S}K_n\|^2 = N^2(\mathbb{S}K_n) = \mathbb{S}K_n \overline{\mathbb{S}K_n} = \overline{\mathbb{S}K_n} \mathbb{S}K_n = K_n^2 + K_{n+1}^2 + \cdots + K_{n+15}^2$$

şeklindedir.

Tribonacci ve Tribonacci-Lucas sedenyonlarının normunun hesabı için aşağıdaki lemma yardımıyla sunulan teorem kullanılabilir.

Lemma 3.33: $n \geq 0$ için T_n ve K_n sırasıyla n -inci Tribonacci ve Tribonacci-Lucas sayısı olmak üzere

$$\sum_{i=1}^n T_i^2 = \frac{1 + 4T_n T_{n+1} - (T_{n+1} - T_{n-1})^2}{4}$$

$$\sum_{i=1}^n K_i^2 = \frac{-K_{n+1}^2 - K_{n-1}^2 + K_{2n+3} - K_{2n-2}}{2} - 2$$

dir (Li, vd., 2014).

Teorem 3.34: n -inci Tribonacci ve n -inci Tribonacci-Lucas sedenyonlarının normları sırasıyla

$$\|ST_n\|^2 = \frac{4(T_{n+15}T_{n+16} - T_{n-1}T_n) + (T_n - T_{n-2})^2 - (T_{n+16} - T_{n+14})^2}{4}$$

$$\|SK_n\|^2 = \frac{-K_{n+16}^2 - K_{n+14}^2 + K_n^2 + K_{n-2}^2 + K_{2n+33} + K_{2n+28} - K_{2n+1} - K_{2n-4}}{2}$$

dir (Soykan, 2019).

İspat: Lemma 3.33 kullanılarak

$$\begin{aligned} \|ST_n\|^2 &= \sum_{i=n}^{n+15} T_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n+15} T_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} T_i^2 \\ &= \frac{1 + 4T_{n+15}T_{n+16} - (T_{n+16} - T_{n+14})^2}{4} - \frac{1 + 4T_{n-1}T_n - (T_n - T_{n-2})^2}{4} \\ &= \frac{4(T_{n+15}T_{n+16} - T_{n-1}T_n) + (T_n - T_{n-2})^2 - (T_{n+16} - T_{n+14})^2}{4} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|SK_n\|^2 &= \sum_{i=n}^{n+15} K_i^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n+15} K_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} K_i^2 \\
&= \left(\frac{-K_{n+16}^2 - K_{n+14}^2 + K_{2n+33} + K_{2n+28}}{2} - 2 \right) \\
&\quad - \left(\frac{-K_n^2 - K_{n-2}^2 + K_{2n+1} + K_{2n-4}}{2} - 2 \right) \\
&= \frac{-K_{n+16}^2 - K_{n+14}^2 - K_{2n+1} - K_{2n-4} + K_{2n+33} + K_n^2 + K_{n-2}^2 + K_{2n+28}}{2}
\end{aligned}$$

olup istenilen elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Aşağıdaki teoremlerle Tribonacci ve Tribonacci-Lucas sedenyonlarının Binet formülleri, üreteç fonksiyonları, toplam formülleri ve normları verilmiştir.

Teorem 3.35: $\hat{\alpha} = \sum_{s=0}^{15} \alpha^s e_s$, $\hat{\beta} = \sum_{s=0}^{15} \beta^s e_s$, $\hat{\gamma} = \sum_{s=0}^{15} \gamma^s e_s$, olmak üzere Tribonacci ve Tribonacci-Lucas sedenyonları için Binet formülü sırasıyla

$$ST_n = \frac{\hat{\alpha}\alpha^{n+1}}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{\hat{\beta}\beta^{n+1}}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} + \frac{\hat{\gamma}\gamma^{n+1}}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}$$

ve

$$SK_n = \hat{\alpha}\alpha^n + \hat{\beta}\beta^n + \hat{\gamma}\gamma^n$$

şeklindedir (Soykan, 2019).

İspat: İspat için $\hat{\alpha} = \sum_{s=0}^{15} \alpha^s e_s$, $\hat{\beta} = \sum_{s=0}^{15} \beta^s e_s$, $\hat{\gamma} = \sum_{s=0}^{15} \gamma^s e_s$, olmak üzere (3.9) eşitliği ile verilen Tribonacci sayı dizisinin Binet formülü Tanım 3.31 de verilen Tribonacci sedenyonunun tanımında kullanılabilir.

Buradan

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}T_n &= \sum_{s=0}^{15} T_{n+s} e_s \\
&= \sum_{s=0}^{15} \left(\frac{\alpha^{n+1+s} e_s}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{\beta^{n+1+s} e_s}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} + \frac{\gamma^{n+1+s} e_s}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)} \right) \\
&= \frac{\hat{\alpha} \alpha^{n+1}}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{\hat{\beta} \beta^{n+1}}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} + \frac{\hat{\gamma} \gamma^{n+1}}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}
\end{aligned}$$

olup istenilen elde edilir. Benzer düşünceyle (3.10) eşitliği ile verilen Tribonacci-Lucas sayı dizisinin Binet formülü Tanım 3.31 de verilen Tribonacci-Lucas sedenyonunun tanımında kullanılırsa Tribonacci-Lucas sedenyonlarının Binet formülü elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.36: Tribonacci ve Tribonacci-Lucas sedenyonları için üreteç fonksiyonları sırasıyla

$$\begin{aligned}
g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{S}T_n x^n = \frac{\mathbb{S}T_0 + (\mathbb{S}T_1 - \mathbb{S}T_0)x + \mathbb{S}T_{-1}x^2}{1 - x - x^2 - x^3} \\
g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{S}K_n x^n = \frac{\mathbb{S}K_0 + (\mathbb{S}K_1 - \mathbb{S}K_0)x + \mathbb{S}K_{-1}x^2}{1 - x - x^2 - x^3}
\end{aligned}$$

dir (Soykan, 2019).

İspat: $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{S}T_n x^n$ olsun. Buradan

$$g(x) = \mathbb{S}T_0 + \mathbb{S}T_1 x + \mathbb{S}T_2 x^2 + \mathbb{S}T_3 x^3 + \mathbb{S}T_4 x^4 + \mathbb{S}T_5 x^5 + \dots + \mathbb{S}T_n x^n + \dots$$

$$xg(x) = \mathbb{S}T_0 x + \mathbb{S}T_1 x^2 + \mathbb{S}T_2 x^3 + \mathbb{S}T_3 x^4 + \mathbb{S}T_4 x^5 + \dots + \mathbb{S}T_{n-1} x^n + \dots$$

$$x^2 g(x) = \mathbb{S}T_0 x^2 + \mathbb{S}T_1 x^3 + \mathbb{S}T_2 x^4 + \mathbb{S}T_3 x^5 + \dots + \mathbb{S}T_{n-2} x^n + \dots$$

$$x^3 g(x) = \mathbb{S}T_0 x^3 + \mathbb{S}T_1 x^4 + \mathbb{S}T_2 x^5 + \dots + \mathbb{S}T_{n-3} x^n + \dots$$

eşitlikleri yazılabilir.

Bu eşitlikler taraf tarafa toplanıp Tribonacci sedenyonunun $ST_n = ST_{n-1} + ST_{n-2} + ST_{n-3}$ rekürans bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g(x) - xg(x) - x^2g(x) - x^3g(x) &= ST_0 + (ST_1 - ST_0)x \\
&+ (ST_2 - ST_1 - ST_0)x^2 \\
&+ (ST_3 - ST_2 - ST_1 - ST_0)x^3 \\
&+ (ST_4 - ST_3 - ST_2 - ST_1 - ST_0)x^4 + \dots \\
&+ (ST_n - ST_{n-1} - ST_{n-2} - ST_{n-3})x^n + \dots \\
&= ST_0 + (ST_1 - ST_0)x + (ST_2 - ST_1 - ST_0)x^2
\end{aligned}$$

olup

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} ST_n x^n = \frac{ST_0 + (ST_1 - ST_0)x + (ST_2 - ST_1 - ST_0)x^2}{1 - x - x^2 - x^3}$$

elde edilir. $ST_2 - ST_1 - ST_0 = ST_{-1}$ eşitliği kullanılırsa Tribonacci sedenyonu için üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} ST_n x^n = \frac{ST_0 + (ST_1 - ST_0)x + ST_{-1}x^2}{1 - x - x^2 - x^3}$$

olarak bulunur. Benzer düşünceyle Tribonacci-Lucas sedenyonu için üreteç fonksiyonu elde edilebilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Teorem 3.37:

$$\begin{aligned}
c_1 &= -1 - e_1 - 3e_2 - 5e_3 - 9e_4 - 17e_5 - 31e_6 - 57e_7 - 105e_8 - 193e_9 - 355e_{10} \\
&- 653e_{11} - 1201e_{12} - 2209e_{13} - 4063e_{14} - 7473e_{15}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
c_2 &= -6e_1 - 8e_2 - 14e_3 - 28e_4 - 50e_5 - 92e_6 - 170e_7 - 312e_8 - 579e_9 \\
&- 1056e_{10} - 1842e_{11} - 3572e_{12} - 6570e_{13} - 12084e_{14} - 22226e_{15}
\end{aligned}$$

olmak üzere Tribonacci ve Tribonacci-Lucas sedenionları için toplam formülleri sırayla

$$\sum_{i=0}^n \mathbb{S}T_i = \frac{1}{2}(\mathbb{S}T_{n+2} + \mathbb{S}T_n + c_1)$$

ve

$$\sum_{i=0}^n \mathbb{S}K_i = \frac{1}{2}(\mathbb{S}K_{n+2} + \mathbb{S}K_n + c_2)$$

şeklindedir (Soykan, 2019).

Tribonacci ve Tribonacci-Lucas sedenyonlarının bazı özellikleri aşağıdaki teoremlerle verilmiştir.

Teorem 3.38: n tamsayısı için

- i. $\mathbb{S}T_{n+6} = 7\mathbb{S}T_{n+3} - 5\mathbb{S}T_n + \mathbb{S}T_{n-3}$
- ii. $\mathbb{S}T_{n+8} = 11\mathbb{S}T_{n+4} + 5\mathbb{S}T_n + \mathbb{S}T_{n-4}$
- iii. $\mathbb{S}T_{n+10} = 21\mathbb{S}T_{n+5} + \mathbb{S}T_n + \mathbb{S}T_{n-5}$
- iv. $\mathbb{S}K_{n+6} = 2\mathbb{S}K_{n+3} + \mathbb{S}K_n + \mathbb{S}K_{n-3}$
- v. $\mathbb{S}K_{n+8} = 4\mathbb{S}K_{n+4} + \mathbb{S}K_{n-4}$
- vi. $\mathbb{S}K_{n+10} = 7\mathbb{S}K_{n+5} - 2\mathbb{S}K_n + \mathbb{S}K_{n-5}$

dir (Soykan, 2019).

Teorem 3.39: $n \geq 0, m \geq 3$ için

- i. $\mathbb{S}T_{m+n} = T_{m-1}\mathbb{S}T_{n+2} + (T_{m-2} + T_{m-3})\mathbb{S}T_{n+1} + T_{m-2}\mathbb{S}T_n$
- ii. $\mathbb{S}T_{m+n} = T_{m+2}\mathbb{S}T_{n-1} + (T_{m+1} + T_m)\mathbb{S}T_{n-2} + T_{m+1}\mathbb{S}T_{n-3}$
- iii. $\mathbb{S}K_{m+n} = K_{n-1}\mathbb{S}T_{m+2} + (\mathbb{S}T_{m+1} + \mathbb{S}T_m)K_{n-2} + K_{m-3}\mathbb{S}T_{m+1}$
- iv. $\mathbb{S}K_{m+n} = K_{m+2}\mathbb{S}T_{n-1} + (K_{m+1} + K_m)\mathbb{S}T_{n-2} + K_{m+1}\mathbb{S}T_{n-3}$

dir (Soykan, 2019).

Teorem 3.40: $n \geq 1$

- i. $\mathbb{S}K_n = 3\mathbb{S}T_{n+1} - 2\mathbb{S}T_n - \mathbb{S}T_{n-1}$
- ii. $\mathbb{S}T_n + \overline{\mathbb{S}T_n} = 2T_n, \mathbb{S}K_n + \overline{\mathbb{S}K_n} = 2K_n$
- iii. $\mathbb{S}T_{n+1} + \mathbb{S}T_n = \frac{\hat{\alpha}(\alpha+1)\alpha^{n+1}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{\hat{\beta}(\beta+1)\beta^{n+1}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{\hat{\gamma}(\gamma+1)\gamma^{n+1}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$
- iv. $\mathbb{S}K_{n+1} + \mathbb{S}K_n = \hat{\alpha}(\alpha+1)\alpha^n + \hat{\beta}(\beta+1)\beta^n + \hat{\gamma}(\gamma+1)\gamma^n$
- v. $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \mathbb{S}T_i = \frac{\hat{\alpha}\alpha(\alpha+1)\alpha^n}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{\hat{\beta}\beta(\beta+1)\beta^n}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{\hat{\gamma}\gamma(\gamma+1)\gamma^n}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$
- vi. $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \mathbb{S}K_i = \hat{\alpha}(\alpha+1) + \hat{\beta}(\beta+1) + \hat{\gamma}(\gamma+1)$

dir (Soykan, 2019).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Padovan, Pell-Padovan, Perrin Oktonyonları ve Sedenyonları

Bu bölümde $n \geq 3$ olmak üzere

$$P_n = P_{n-2} + P_{n-3}, \quad P_0 = P_1 = P_2 = 1$$

$$R_n = 2R_{n-2} + R_{n-3}, \quad R_0 = R_1 = R_2 = 1$$

$$\tilde{P}_n = \tilde{P}_{n-2} + \tilde{P}_{n-3}, \quad \tilde{P}_0 = 3, \tilde{P}_1 = 0, \tilde{P}_2 = 2$$

rekürans bağıntıları ile tanımlanan sırasıyla Padovan, Pell-Padovan, Perrin sayı dizileri ile oktonyonlar ve sedenyonlar kullanarak Padovan, Pell-Padovan, Perrin oktonyonları ve sedenyonları tanımlandı. Bu oktonyon ve sedenyonların dizileri oluşturuldu, Binet formülleri ve üreteç fonksiyonları elde edildi.

Bu çalışmada $(\mathcal{O}P_n)$ ile Padovan oktonyonlarının dizisi; $(\mathcal{O}R_n)$ ile Pell-Padovan oktonyonlarının dizisi; $(\mathcal{O}\tilde{P}_n)$ ile Perrin oktonyonlarının dizisi ve $(S\tilde{P}_n)$ ile Perrin sedenyonlarının dizisi gösterilecektir.

Tanım 4.1: $n \geq 0$ için P_n , n -inci Padovan sayısı ve $(e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7)$ standart oktonyon bazı olmak üzere herhangi bir n -inci Padovan oktonyonu

$$\mathcal{O}P_n = \sum_{i=0}^7 P_{n+i} e_i$$

şeklinde tanımlanır (Taşyurdu ve Akpınar, 2019; 2019a).

Tanım 4.1 kullanılarak ilk birkaç Padovan oktonyonu şöyledir:

$$\mathcal{O}P_0 = e_0 + e_1 + e_2 + 2e_3 + 2e_4 + 3e_5 + 4e_6 + 5e_7$$

$$\mathcal{O}P_1 = e_0 + e_1 + 2e_2 + 2e_3 + 3e_4 + 4e_5 + 5e_6 + 7e_7$$

$$\mathcal{O}P_2 = e_0 + 2e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4 + 5e_5 + 7e_6 + 9e_7$$

$$\mathcal{O}P_3 = 2e_0 + 2e_1 + 3e_2 + 4e_3 + 5e_4 + 7e_5 + 9e_6 + 12e_7$$

$$\mathcal{O}P_4 = 2e_0 + 3e_1 + 4e_2 + 5e_3 + 7e_4 + 9e_5 + 12e_6 + 16e_7$$

$$\mathcal{O}P_5 = 3e_0 + 4e_1 + 5e_2 + 7e_3 + 9e_4 + 12e_5 + 16e_6 + 21e_7$$

Teorem 4.2: $\mathcal{O}P_n$, n -inci Padovan oktonyonu olmak üzere $\mathcal{O}P_0 = \sum_{i=0}^7 P_i e_i$, $\mathcal{O}P_1 = \sum_{i=0}^7 P_{1+i} e_i$, $\mathcal{O}P_2 = \sum_{i=0}^7 P_{2+i} e_i$ başlangıç şartları ile Padovan oktonyonlarının dizisi ($\mathcal{O}P_n$)

$$\mathcal{O}P_n = \mathcal{O}P_{n-2} + \mathcal{O}P_{n-3}$$

rekürans bağıntısını sağlar (Taşyurdu ve Akpınar, 2019; 2019a).

İspat: Tanım 3.2 ve Tanım 4.1 den

$$\begin{aligned} \mathcal{O}P_{n-2} + \mathcal{O}P_{n-3} &= \sum_{i=0}^7 P_{n-2+i} e_i + \sum_{i=0}^7 P_{n-3+i} e_i \\ &= \sum_{i=0}^7 (P_{n-2+i} + P_{n-3+i}) e_i \\ &= \sum_{i=0}^7 P_{n+i} e_i \\ &= \mathcal{O}P_n \end{aligned}$$

olup istenilen elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Padovan oktonyonlarının üreteç fonksiyonu aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 4.3: Padovan oktonyonları için üreteç fonksiyonu

$$g(t) = \frac{\mathcal{O}P_0 + \mathcal{O}P_1 t + (\mathcal{O}P_2 - \mathcal{O}P_0) t^2}{1 - t^2 - t^3}$$

şeklindedir (Taşyurdu ve Akpınar, 2019; 2019a).

İspat: Padovan oktonyonlarının üreteç fonksiyonu

$$r_o(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{O}P_n t^n = \mathcal{O}P_0 + \mathcal{O}P_1 t + \mathcal{O}P_2 t^2 + \dots + \mathcal{O}P_n t^n + \dots$$

olsun.

Bu denklemin her iki yanı t^2 ve t^3 ile çarpılırsa

$$t^2 r_o(t) = \mathcal{O}P_0 t^2 + \mathcal{O}P_1 t^3 + \mathcal{O}P_2 t^4 + \dots + \mathcal{O}P_{n-2} t^n + \dots$$

$$t^3 r_o(t) = \mathcal{O}P_0 t^3 + \mathcal{O}P_1 t^4 + \mathcal{O}P_2 t^5 + \dots + \mathcal{O}P_{n-3} t^n + \dots$$

elde edilir. Buradan

$$(1 - t^2 - t^3) r_o(t) = \mathcal{O}P_0 + \mathcal{O}P_1 t + (\mathcal{O}P_2 - \mathcal{O}P_0) t^2$$

$$+ (\mathcal{O}P_3 - \mathcal{O}P_1 - \mathcal{O}P_0) t^3 + \dots$$

$$+ (\mathcal{O}P_n - \mathcal{O}P_{n-2} - \mathcal{O}P_{n-3}) t^n + \dots$$

yazılabilir. Diğer taraftan $\mathcal{O}P_0 = \sum_{i=0}^7 P_i e_i$, $\mathcal{O}P_1 = \sum_{i=0}^7 P_{1+i} e_i$, $\mathcal{O}P_2 = \sum_{i=0}^7 P_{2+i} e_i$ başlangıç şartları için Padovan oktonyonlarının dizisinin $(\mathcal{O}P_n)$

$$\mathcal{O}P_n = \mathcal{O}P_{n-2} + \mathcal{O}P_{n-3}$$

rekürans bağıntısını kullanılırsa Padovan oktonyonlarının üreteç fonksiyonu

$$r_o(t) = \frac{\mathcal{O}P_0 + \mathcal{O}P_1 t + (\mathcal{O}P_2 - \mathcal{O}P_0) t^2}{1 - t^2 - t^3}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Padovan oktonyonlarının Binet formülü aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 4.4: $n \geq 0$ için r_1, r_2 ve r_3 , $x^3 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri ve

$$\alpha^* = \sum_{i=0}^7 r_1^i e_i, \quad \beta^* = \sum_{i=0}^7 r_2^i e_i, \quad \gamma^* = \sum_{i=0}^7 r_3^i e_i$$

$$\alpha = \frac{(r_2 - r_1)(r_3 - 1)}{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)}, \quad \beta = \frac{(r_1 - 1)(r_3 - 1)}{(r_2 - r_1)(r_2 - r_3)}, \quad \gamma = \frac{(r_1 - 1)(r_2 - 1)}{(r_1 - r_3)(r_2 - r_3)}$$

olmak üzere Padovan oktonyonlarının Binet formülü

$$\mathcal{O}P_n = \alpha^* \alpha r_1^n + \beta^* \beta r_2^n + \gamma^* \gamma r_3^n$$

şeklindedir (Taşyurdu ve Akpınar, 2019; 2019a).

İspat: İspat için Padovan sayı dizisinin Binet formülü kullanılabilir. r_1 , r_2 ve r_3 $x^3 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri ve

$$\alpha = \frac{(r_2 - r_1)(r_3 - 1)}{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)}, \quad \beta = \frac{(r_1 - 1)(r_3 - 1)}{(r_2 - r_1)(r_2 - r_3)}, \quad \gamma = \frac{(r_1 - 1)(r_2 - 1)}{(r_1 - r_3)(r_2 - r_3)}.$$

olmak üzere Padovan sayı dizisinin

$$P_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n + \gamma r_3^n$$

Binet formülü Tanım 4.1 de kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{O}P_n &= \sum_{i=0}^7 P_{n+i} e_i \\ &= P_n + P_{n+1} e_1 + P_{n+2} e_2 + P_{n+3} e_3 + P_{n+4} e_4 + P_{n+5} e_5 + P_{n+6} e_6 + P_{n+7} e_7 \end{aligned}$$

olup $\alpha^* = \sum_{i=0}^7 r_1^i e_i$, $\beta^* = \sum_{i=0}^7 r_2^i e_i$, $\gamma^* = \sum_{i=0}^7 r_3^i e_i$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{O}P_n &= \sum_{i=0}^7 P_{n+i} e_i \\ &= \sum_{i=0}^7 [\alpha r_1^{n+i} + \beta r_2^{n+i} + \gamma r_3^{n+i}] e_i \\ &= \alpha^* \alpha r_1^n + \beta^* \beta r_2^n + \gamma^* \gamma r_3^n \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Tanım 4.5: $n \geq 0$ için P_n , n -inci Pell-Padovan sayısı ve $(e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7)$ standart oktonyon bazı olmak üzere herhangi bir n -inci Pell-Padovan oktonyonu

$$\mathcal{O}R_n = \sum_{i=0}^7 R_{n+i} e_i$$

şeklinde tanımlanır (Taşyurdu ve Akpınar, 2019; 2019a).

Tanım 4.5 kullanılarak ilk birkaç Pell-Padovan oktonyonu şöyledir:

$$\mathcal{OR}_0 = e_0 + e_1 + e_2 + 3e_3 + 3e_4 + 7e_5 + 9e_6 + 17e_7$$

$$\mathcal{OR}_1 = e_0 + e_1 + 3e_2 + 3e_3 + 7e_4 + 9e_5 + 17e_6 + 25e_7$$

$$\mathcal{OR}_2 = e_0 + 3e_1 + 3e_2 + 7e_3 + 9e_4 + 17e_5 + 25e_6 + 43e_7$$

$$\mathcal{OR}_3 = 3e_0 + 3e_1 + 7e_2 + 9e_3 + 17e_4 + 25e_5 + 43e_6 + 67e_7$$

$$\mathcal{OR}_4 = 3e_0 + 7e_1 + 9e_2 + 17e_3 + 25e_4 + 43e_5 + 67e_6 + 111e_7$$

$$\mathcal{OR}_5 = 7e_0 + 9e_1 + 17e_2 + 25e_3 + 43e_4 + 67e_5 + 111e_6 + 177e_7$$

Teorem 4.6: $\mathcal{OR}_n$ n -inci Pell-Padovan oktonyonu olmak üzere $\mathcal{OR}_0 = \sum_{i=0}^7 R_i e_i$, $\mathcal{OR}_1 = \sum_{i=0}^7 R_{1+i} e_i$, $\mathcal{OR}_2 = \sum_{i=0}^7 R_{2+i} e_i$ başlangıç şartları ile Pell-Padovan oktonyonlarının dizisi $(\mathcal{OR}_n)$

$$\mathcal{OR}_n = 2\mathcal{OR}_{n-2} + \mathcal{OR}_{n-3}$$

rekürans bağıntısını sağlar (Taşyurdu ve Akpınar, 2019; 2019a).

İspat: Tanım 3.3 ve Tanım 4.5 den

$$\begin{aligned} 2\mathcal{OR}_{n-2} + \mathcal{OR}_{n-3} &= \sum_{i=0}^7 2R_{n-2+i} e_i + \sum_{i=0}^7 R_{n-3+i} e_i \\ &= \sum_{i=0}^7 (2R_{n-2+i} + R_{n-3+i}) e_i \\ &= \sum_{i=0}^7 R_{n+i} e_i \\ &= \mathcal{OR}_n \end{aligned}$$

olup istenilen elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Pell-Padovan oktonyonlarının üreteç fonksiyonu aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 4.7: Pell-Padovan oktonyonları için üreteç fonksiyonu

$$s_{\mathcal{O}}(t) = \frac{\mathcal{O}R_0 + \mathcal{O}R_1 t + (\mathcal{O}R_2 - 2\mathcal{O}R_0)t^2}{1 - 2t^2 - t^3}$$

şeklindedir (Taşyurdu ve Akpınar, 2019; 2019a).

İspat: Pell-Padovan oktonyonlarının üreteç fonksiyonu

$$s_{\mathcal{O}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{O}R_n t^n = \mathcal{O}R_0 + \mathcal{O}R_1 t + \mathcal{O}R_2 t^2 + \dots + \mathcal{O}R_n t^n + \dots$$

olsun. Bu denklemin her iki yanı $2t^2$ ve t^3 ile çarpılırsa

$$2t^2 s_{\mathcal{O}}(t) = 2\mathcal{O}R_0 t^2 + 2\mathcal{O}R_1 t^3 + 2\mathcal{O}R_2 t^4 + \dots + 2\mathcal{O}R_{n-2} t^n + \dots$$

$$t^3 s_{\mathcal{O}}(t) = \mathcal{O}R_0 t^3 + \mathcal{O}R_1 t^4 + \mathcal{O}R_2 t^5 + \dots + \mathcal{O}R_{n-3} t^n + \dots$$

elde edilir. Buradan

$$(1 - 2t^2 - t^3)s(t) = \mathcal{O}R_0 + \mathcal{O}R_1 t + (\mathcal{O}R_2 - 2\mathcal{O}R_0)t^2 + (\mathcal{O}R_3 - 2\mathcal{O}R_1 - \mathcal{O}R_0)t^3 + \dots + (\mathcal{O}R_n - 2\mathcal{O}R_{n-2} - \mathcal{O}R_{n-3})t^n + \dots$$

yazılabilir. Diğer taraftan $\mathcal{O}R_0 = \sum_{i=0}^7 R_i e_i$, $\mathcal{O}R_1 = \sum_{i=0}^7 R_{1+i} e_i$, $\mathcal{O}R_2 = \sum_{i=0}^7 R_{2+i} e_i$ başlangıç şartları için Pell-Padovan oktonyonlarının dizisinin $(\mathcal{O}R_n)$

$$\mathcal{O}R_n = 2\mathcal{O}R_{n-2} + \mathcal{O}R_{n-3}$$

rekürans bağıntısı kullanılırsa Pell-Padovan oktonyonlarının üreteç fonksiyonu

$$s_{\mathcal{O}}(t) = \frac{\mathcal{O}R_0 + \mathcal{O}R_1 t + (\mathcal{O}R_2 - 2\mathcal{O}R_0)t^2}{1 - 2t^2 - t^3}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Pell-Padovan oktonyonlarının Binet formülü aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 4.8: $n \geq 0$ için r_1, r_2 ve r_3 , $x^3 - 2x - 1 = 0$ denkleminin kökleri ve

$$\alpha^* = \sum_{i=0}^7 r_1^i e_i, \quad \beta^* = \sum_{i=0}^7 r_2^i e_i, \quad \gamma^* = \sum_{i=0}^7 r_3^i e_i$$

olmak üzere Pell-Padovan oktonyonlarının Binet formülü

$$\mathcal{O}R_n = 2 \left(\frac{r_1^{n+1} \alpha^* - r_2^{n+1} \beta^*}{r_1 - r_2} \right) - 2 \left(\frac{r_1^n \alpha^* - r_2^n \beta^*}{r_1 - r_2} \right) + r_3^{n+1} \gamma^*$$

şeklindedir (Taşyurdu ve Akpınar, 2019; 2019a).

İspat: İspat için Pell-Padovan sayı dizisinin Binet formülü kullanılabilir. r_1, r_2 ve r_3 $x^3 - 2x - 1 = 0$ denkleminin kökleri ve Pell-Padovan sayı dizisinin

$$\mathcal{O}R_n = 2 \left(\frac{r_1^{n+1} \alpha^* - r_2^{n+1} \beta^*}{r_1 - r_2} \right) - 2 \left(\frac{r_1^n \alpha^* - r_2^n \beta^*}{r_1 - r_2} \right) + r_3^{n+1} \gamma^*$$

Binet formülü Tanım 4.5 de kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{O}R_n &= \sum_{i=0}^7 R_{n+i} e_i \\ &= \sum_{i=0}^7 \left(2 \left(\frac{r_1^{n+1+i} - r_2^{n+1+i}}{r_1 - r_2} \right) - 2 \left(\frac{r_1^{n+i} - r_2^{n+i}}{r_1 - r_2} \right) + r_3^{n+1+i} \right) e_i \\ &= 2 \left(\frac{r_1^{n+1} \alpha^* - r_2^{n+1} \beta^*}{r_1 - r_2} \right) - 2 \left(\frac{r_1^n \alpha^* - r_2^n \beta^*}{r_1 - r_2} \right) + r_3^{n+1} \gamma^* \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Tanım 4.9: $n \geq 0$ için $\tilde{P}_n$, n -inci Perrin sayısı ve $(e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7)$ standart oktonyon bazı olmak üzere herhangi bir n . Perrin oktonyonu

$$\mathcal{O}\tilde{P}_n = \sum_{i=0}^7 \tilde{P}_{n+i} e_i$$

şeklinde tanımlanır (Taşyurdu ve Akpınar, 2019b; 2020).

Tanım 4.9 kullanılarak ilk birkaç Perrin oktonyonu şöyledir:

$$\mathcal{OP}_0 = 3e_0 + 0e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 2e_4 + 5e_5 + 5e_6 + 7e_7$$

$$\mathcal{OP}_1 = 0e_0 + 2e_1 + 3e_2 + 2e_3 + 5e_4 + 5e_5 + 7e_6 + 10e_7$$

$$\mathcal{OP}_2 = 2e_0 + 3e_1 + 2e_2 + 5e_3 + 5e_4 + 7e_5 + 10e_6 + 12e_7$$

$$\mathcal{OP}_3 = 3e_0 + 2e_1 + 5e_2 + 5e_3 + 7e_4 + 10e_5 + 12e_6 + 17e_7$$

$$\mathcal{OP}_4 = 2e_0 + 5e_1 + 5e_2 + 7e_3 + 10e_4 + 12e_5 + 17e_6 + 22e_7$$

$$\mathcal{OP}_5 = 5e_0 + 5e_1 + 7e_2 + 10e_3 + 12e_4 + 17e_5 + 22e_6 + 29e_7$$

Teorem 4.10: $\mathcal{OP}_n$, n -inci Perrin oktonyonu olmak üzere Perrin oktonyonlarının dizisi $(\mathcal{OP}_n)$

$$\mathcal{OP}_n = \mathcal{OP}_{n-2} + \mathcal{OP}_{n-3}$$

rekürans bağıntısını sağlar (Taşyurdu ve Akpınar, 2019b; 2020).

İspat: Tanım 3.4 ve Tanım 4.9 dan

$$\begin{aligned} \mathcal{OP}_{n-2} + \mathcal{OP}_{n-3} &= \sum_{i=0}^7 \tilde{P}_{n-2+i} e_i + \sum_{i=0}^7 \tilde{P}_{n-3+i} e_i \\ &= \sum_{i=0}^7 (\tilde{P}_{n-2+i} + \tilde{P}_{n-3+i}) e_i \\ &= \sum_{i=0}^7 \tilde{P}_{n+i} e_i \\ &= \mathcal{OP}_n \end{aligned}$$

olup istenilen elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Perrin oktonyonlarının üreteç fonksiyonu aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 4.11: Perrin oktonyonları için üreteç fonksiyonu

$$f_{\mathcal{O}}(x) = \frac{\mathcal{O}\tilde{P}_0 + \mathcal{O}\tilde{P}_1x + (\mathcal{O}\tilde{P}_2 - \mathcal{O}\tilde{P}_0)x^2}{1 - x^2 - x^3}$$

şeklindedir (Taşyurdu ve Akpınar, 2019b; 2020).

İspat: Perrin oktonyonlarının üreteç fonksiyonu

$$f_{\mathcal{O}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{O}\tilde{P}_n x^n = \mathcal{O}\tilde{P}_0 + \mathcal{O}\tilde{P}_1x + \mathcal{O}\tilde{P}_2x^2 + \dots + \mathcal{O}\tilde{P}_n x^n + \dots$$

olsun. Bu denklemin her iki yanı x^2 ve x^3 ile çarpılırsa

$$x^2 f_{\mathcal{O}}(x) = \mathcal{O}\tilde{P}_0x^2 + \mathcal{O}\tilde{P}_1x^3 + \mathcal{O}\tilde{P}_2x^4 + \dots + \mathcal{O}\tilde{P}_{n-2}x^n + \dots$$

$$x^3 f_{\mathcal{O}}(x) = \mathcal{O}\tilde{P}_0x^3 + \mathcal{O}\tilde{P}_1x^4 + \mathcal{O}\tilde{P}_2x^5 + \dots + \mathcal{O}\tilde{P}_{n-3}x^n + \dots$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} (1 - x^2 - x^3)f_{\mathcal{O}}(x) &= \mathcal{O}\tilde{P}_0 + \mathcal{O}\tilde{P}_1x + (\mathcal{O}\tilde{P}_2 - \mathcal{O}\tilde{P}_0)x^2 + (\mathcal{O}\tilde{P}_3 - \mathcal{O}\tilde{P}_1 - \mathcal{O}\tilde{P}_0)x^3 + \dots \\ &\quad + (\mathcal{O}\tilde{P}_n - \mathcal{O}\tilde{P}_{n-2} - \mathcal{O}\tilde{P}_{n-3})x^n + \dots \end{aligned}$$

yazılabilir. Diğer taraftan $\mathcal{O}\tilde{P}_0 = \sum_{i=0}^7 \tilde{P}_i e_i$, $\mathcal{O}\tilde{P}_1 = \sum_{i=0}^7 \tilde{P}_{1+i} e_i$, $\mathcal{O}\tilde{P}_2 = \sum_{i=0}^7 \tilde{P}_{2+i} e_i$ başlangıç şartları için Perrin oktonyonlarının dizisinin $(\mathcal{O}\tilde{P}_n)$

$$\mathcal{O}\tilde{P}_n = \mathcal{O}\tilde{P}_{n-2} + \mathcal{O}\tilde{P}_{n-3}$$

rekürans bağıntısı kullanılırsa Perrin oktonyonları için üreteç fonksiyonu

$$f_{\mathcal{O}}(x) = \frac{\mathcal{O}\tilde{P}_0 + \mathcal{O}\tilde{P}_1x + (\mathcal{O}\tilde{P}_2 - \mathcal{O}\tilde{P}_0)x^2}{1 - x^2 - x^3}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.12: $n \geq 0$ için r_1, r_2 ve $r_3, x^3 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri ve

$$\alpha = \sum_{i=0}^7 r_1^i e_i, \quad \beta = \sum_{i=0}^7 r_2^i e_i, \quad \gamma = \sum_{i=0}^7 r_3^i e_i$$

olmak üzere Perrin oktonyonlarının Binet formülü

$$\mathcal{O}\tilde{P}_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n + \gamma r_3^n$$

şeklindedir (Taşyurdu ve Akpınar, 2019b; 2020).

İspat: İspat için Perrin sayı dizilerinin Binet formülü kullanılabilir. r_1, r_2 ve r_3 $x^3 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri olmak üzere Perrin sayı dizisinin

$$\tilde{P}_n = r_1^n + r_2^n + r_3^n$$

Binet formülü Tanım 4.9 da kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{O}\tilde{P}_n &= \sum_{i=0}^7 \tilde{P}_{n+i} e_i \\ &= \tilde{P}_n + \tilde{P}_{n+1} e_1 + \tilde{P}_{n+2} e_2 + \tilde{P}_{n+3} e_3 + \tilde{P}_{n+4} e_4 + \tilde{P}_{n+5} e_5 + \tilde{P}_{n+6} e_6 + \tilde{P}_{n+7} e_7 \end{aligned}$$

olup $\alpha = \sum_{i=0}^7 r_1^i e_i, \beta = \sum_{i=0}^7 r_2^i e_i, \gamma = \sum_{i=0}^7 r_3^i e_i$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{O}\tilde{P}_n &= \sum_{i=0}^7 \tilde{P}_{n+i} e_i \\ &= \sum_{i=0}^7 [r_1^{n+i} + r_2^{n+i} + r_3^{n+i}] e_i \\ &= \alpha r_1^n + \beta r_2^n + \gamma r_3^n \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Tanım 4.13: $n \geq 0$ için $\tilde{P}_n$, n -inci Perrin sayısı ve $(e_0, e_1, \dots, e_{15})$ standart sedenyon bazı olmak üzere herhangi bir n -inci Perrin sedenyonu

$$S\tilde{P}_n = \sum_{i=0}^{15} \tilde{P}_{n+i} e_i$$

şeklinde tanımlanır (Taşyurdu ve Akpınar, 2019b; 2020).

Tanım 4.13 kullanılarak ilk birkaç Perrin sedenyonu şöyledir:

$$S\tilde{P}_0 = 3e_0 + 0e_1 + 2e_2 + \dots + 39e_{13} + 51e_{14} + 68e_{15}$$

$$S\tilde{P}_1 = 0e_0 + 2e_1 + 3e_2 + \dots + 51e_{13} + 68e_{14} + 90e_{15}$$

$$S\tilde{P}_2 = 2e_0 + 3e_1 + 2e_2 + \dots + 68e_{13} + 90e_{14} + 119e_{15}$$

$$S\tilde{P}_3 = 3e_0 + 2e_1 + 5e_2 + \dots + 90e_{13} + 119e_{14} + 158e_{15}$$

$$S\tilde{P}_4 = 2e_0 + 5e_1 + 5e_2 + \dots + 119e_{13} + 158e_{14} + 209e_{15}$$

$$S\tilde{P}_5 = 5e_0 + 5e_1 + 7e_2 + \dots + 158e_{13} + 209e_{14} + 277e_{15}$$

Teorem 4.14: $S\tilde{P}_n$ Perrin sedenyonu olmak üzere Perrin sedenyonlarının dizisi $(S\tilde{P}_n)$

$$S\tilde{P}_n = S\tilde{P}_{n-2} + S\tilde{P}_{n-3}$$

rekürans bağıntısını sağlar (Taşyurdu ve Akpınar, 2019b; 2020).

İspat: Tanım 3.4 ve Tanım 4.13 ten

$$\begin{aligned} S\tilde{P}_{n-2} + S\tilde{P}_{n-3} &= \sum_{i=0}^{15} \tilde{P}_{n-2+i} e_i + \sum_{i=0}^{15} \tilde{P}_{n-3+i} e_i \\ &= \sum_{i=0}^{15} (\tilde{P}_{n-2+i} + \tilde{P}_{n-3+i}) e_i \\ &= \sum_{i=0}^{15} \tilde{P}_{n+i} e_i \\ &= S\tilde{P}_n \end{aligned}$$

olup istenilen elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.15: Perrin sedenyonları için geren fonksiyonu

$$g_S(x) = \frac{S\tilde{P}_0 + S\tilde{P}_1x + (S\tilde{P}_2 - S\tilde{P}_0)x^2}{1 - x^2 - x^3}$$

şeklindedir (Taşyurdu ve Akpınar, 2019b; 2020).

İspat: Perrin sedenyonlarının üreteç fonksiyonu

$$g_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S\tilde{P}_n x^n = S\tilde{P}_0 + S\tilde{P}_1x + S\tilde{P}_2x^2 + \dots + S\tilde{P}_n x^n + \dots$$

olsun. Bu denklemin her iki yanı x^2 ve x^3 ile çarpılırsa

$$x^2 g_S(x) = S\tilde{P}_0 x^2 + S\tilde{P}_1 x^3 + S\tilde{P}_2 x^4 + \dots + S\tilde{P}_{n-2} x^n + \dots$$

$$x^3 g_S(x) = S\tilde{P}_0 x^3 + S\tilde{P}_1 x^4 + S\tilde{P}_2 x^5 + \dots + S\tilde{P}_{n-3} x^n + \dots$$

elde edilir. Buradan

$$(1 - x^2 - x^3)g_S(x) = S\tilde{P}_0 + S\tilde{P}_1x + (S\tilde{P}_2 - S\tilde{P}_0)x^2 + (S\tilde{P}_3 - S\tilde{P}_1 - S\tilde{P}_0)x^3 + \dots$$

$$+ (S\tilde{P}_n - S\tilde{P}_{n-2} - S\tilde{P}_{n-3})x^n + \dots$$

yazılabilir. Diğer taraftan $S\tilde{P}_0 = \sum_{i=0}^{15} \tilde{P}_i e_i$, $S\tilde{P}_1 = \sum_{i=0}^{15} \tilde{P}_{1+i} e_i$, $S\tilde{P}_2 = \sum_{i=0}^{15} \tilde{P}_{2+i} e_i$ başlangıç şartları için Perrin sedenyonlarının dizisinin $(S\tilde{P}_n)$

$$S\tilde{P}_n = S\tilde{P}_{n-2} + S\tilde{P}_{n-3}$$

rekürans bağıntısı kullanılırsa Perrin sedenyonlarının üreteç fonksiyonu

$$g_S(x) = \frac{S\tilde{P}_0 + S\tilde{P}_1x + (S\tilde{P}_2 - S\tilde{P}_0)x^2}{1 - x^2 - x^3}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.16: $n \geq 0$ için r_1, r_2 ve r_3 , $x^3 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri ve

$$\alpha = \sum_{i=0}^{15} r_1^i e_i, \quad \beta = \sum_{i=0}^{15} r_2^i e_i, \quad \gamma = \sum_{i=0}^{15} r_3^i e_i$$

olmak üzere Perrin sedenyonlarının Binet formülü

$$S\tilde{P}_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n + \gamma r_3^n$$

şeklindedir (Taşyurdu ve Akpınar, 2019b; 2020).

İspat: İspat için Perrin sayı dizisinin Binet formülü kullanılabilir. r_1, r_2 ve r_3 , $x^3 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri olmak üzere Perrin sayı dizisinin

$$\tilde{P}_n = r_1^n + r_2^n + r_3^n$$

Binet formülü Tanım 4.13 kullanılırsa

$$\begin{aligned} S\tilde{P}_n &= \sum_{i=0}^{15} \tilde{P}_{n+i} e_i \\ &= \tilde{P}_n + \tilde{P}_{n+1} e_1 + \tilde{P}_{n+2} e_2 + \tilde{P}_{n+3} e_3 + \cdots + \tilde{P}_{n+15} e_{15} \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned} S\tilde{P}_n &= \sum_{i=0}^{15} \tilde{P}_{n+i} e_i \\ &= \sum_{i=0}^{15} [r_1^{n+i} + r_2^{n+i} + r_3^{n+i}] e_i \\ &= \alpha r_1^n + \beta r_2^n + \gamma r_3^n \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

4.2. Padovan, Pell-Padovan, Perrin Oktonyon ve Sedenyonların Özellikleri

Bu bölümde Padovan, Pell-Padovan, Perrin oktonyon ve sedenyonların toplam formülleri ve matris temsilleri elde edildi.

Teorem 4.17: $\mathcal{OP}_n$, n -inci Padovan oktonyonu olmak üzere

i. $\sum_{m=0}^n \mathcal{OP}_m = \mathcal{OP}_{n+3} + \mathcal{OP}_{n+2} - \mathcal{OP}_4$

ii. $\sum_{m=0}^n \mathcal{OP}_{2m} = \mathcal{OP}_{2n+3} - \mathcal{OP}_1$

iii. $\sum_{m=0}^n \mathcal{OP}_{2m+1} = \mathcal{OP}_{2n+4} - \mathcal{OP}_2$

eşitlikleri sağlanır (Taşyurdu ve Akpınar, 2019; 2019a).

İspat: i. İspatı n üzerinden tümevarım yöntemi kullanılarak yapılabilir. $n = 0$ ve $n = 1$ için

$$\mathcal{OP}_0 = (\mathcal{OP}_1 + \mathcal{OP}_0) + \mathcal{OP}_2 - (\mathcal{OP}_2 + \mathcal{OP}_3) = \mathcal{OP}_0$$

$$\mathcal{OP}_0 + \mathcal{OP}_1 = \mathcal{OP}_4 + \mathcal{OP}_3 - \mathcal{OP}_4 = \mathcal{OP}_3 = \mathcal{OP}_0 + \mathcal{OP}_1.$$

olup iddia doğrudur. Şimdi iddianın $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ için doğru olduğunu kabul edip $n + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. Yani n için

$$\sum_{m=0}^n \mathcal{OP}_m = \mathcal{OP}_{n+3} + \mathcal{OP}_{n+2} - \mathcal{OP}_4$$

olduğunu kabul edip

$$\sum_{m=0}^{n+1} \mathcal{OP}_m = \mathcal{OP}_{n+4} + \mathcal{OP}_{n+3} - \mathcal{OP}_4$$

olduğunu gösterelim.

Teorem 4.2 den

$$\mathcal{O}P_{n+2} + \mathcal{O}P_{n+1} = \mathcal{O}P_{n+4}$$

olup bu eşitlik kabulümüzde kullanılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{n+1} \mathcal{O}P_m &= \sum_{m=0}^n \mathcal{O}P_m + \mathcal{O}P_{n+1} \\ &= \mathcal{O}P_{n+3} + \mathcal{O}P_{n+2} - \mathcal{O}P_4 + \mathcal{O}P_{n+1} \\ &= \mathcal{O}P_{n+4} + \mathcal{O}P_{n+3} - \mathcal{O}P_4 \end{aligned}$$

elde edilir.

ii. ve iii. şıkların ispatı da benzer düşünce ile n üzerinden tümevarım yöntemi kullanılarak yapılabilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Teorem 4.18: $\mathcal{O}R_n$, n -inci Pell-Padovan oktonyonu olmak üzere

$$\sum_{m=0}^n \mathcal{O}R_m = \frac{1}{2}(\mathcal{O}R_{n+2} + \mathcal{O}R_{n+1} + \mathcal{O}R_n - \mathcal{O}R_2 - \mathcal{O}R_1 + \mathcal{O}R_0)$$

eşitliği sağlanır (Taşyurdu ve Akpınar, 2019; 2019a).

İspat: İspatı n üzerinde tümevarım yöntemi kullanılarak yapılabilir. $n = 0$ ve $n = 1$ için

$$\mathcal{O}R_0 = \frac{1}{2}(\mathcal{O}R_2 + \mathcal{O}R_1 + \mathcal{O}R_0 - \mathcal{O}R_2 - \mathcal{O}R_1 + \mathcal{O}R_0) = \mathcal{O}R_0$$

$$\mathcal{O}R_0 + \mathcal{O}R_1 = \frac{1}{2}(\mathcal{O}R_3 + \mathcal{O}R_2 + \mathcal{O}R_1 - \mathcal{O}R_2 - \mathcal{O}R_1 + \mathcal{O}R_0)$$

$$= \frac{1}{2}(2\mathcal{O}R_1 + \mathcal{O}R_0 + \mathcal{O}R_0)$$

$$= \mathcal{O}R_0 + \mathcal{O}R_1$$

olup iddia doğrudur.

Şimdi iddianın $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ için doğru olduğunu kabul edip $n + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. Yani n için

$$\sum_{m=0}^n \mathcal{O}R_m = \frac{1}{2}(\mathcal{O}R_{n+2} + \mathcal{O}R_{n+1} + \mathcal{O}R_n - \mathcal{O}R_2 - \mathcal{O}R_1 + \mathcal{O}R_0)$$

olduğunu kabul edip

$$\sum_{m=0}^{n+1} \mathcal{O}R_m = \sum_{m=0}^n \mathcal{O}R_m + \mathcal{O}R_{n+1}$$

$$\sum_{m=0}^{n+1} \mathcal{O}R_m = \frac{1}{2}(\mathcal{O}R_{n+2} + \mathcal{O}R_{n+1} + \mathcal{O}R_n - \mathcal{O}R_2 - \mathcal{O}R_1 + \mathcal{O}R_0 + 2\mathcal{O}R_{n+1})$$

olduğunu gösterelim. Teorem 4.6 dan

$$2\mathcal{O}R_{n+1} + \mathcal{O}R_n = \mathcal{O}R_{n+3}$$

olup bu eşitlik kabulümüzde kullanılırsa

$$\sum_{m=0}^{n+1} \mathcal{O}R_m = \frac{1}{2}(\mathcal{O}R_{n+3} + \mathcal{O}R_{n+2} + \mathcal{O}R_{n+1} - \mathcal{O}R_2 - \mathcal{O}R_1 + \mathcal{O}R_0)$$

elde edilir.

Teorem 4.19: $\mathcal{O}\tilde{P}_n$, n -inci Perrin oktonyonu olmak üzere

- i. $\sum_{m=0}^n \mathcal{O}\tilde{P}_m = \mathcal{O}\tilde{P}_{n+3} + \mathcal{O}\tilde{P}_{n+2} - \mathcal{O}\tilde{P}_4$
- ii. $\sum_{m=0}^n \mathcal{O}\tilde{P}_{2m} = \mathcal{O}\tilde{P}_{2n+3} - \mathcal{O}\tilde{P}_1$
- iii. $\sum_{m=0}^n \mathcal{O}\tilde{P}_{2m+1} = \mathcal{O}\tilde{P}_{2n+4} - \mathcal{O}\tilde{P}_2$

eşitlikleri sağlanır (Taşyurdu ve Akpınar, 2019b; 2020).

İspat: i. Teorem 4.10 dan

$$\mathcal{O}\tilde{P}_0 = \mathcal{O}\tilde{P}_3 - \mathcal{O}\tilde{P}_1$$

$$\mathcal{O}\tilde{P}_1 = \mathcal{O}\tilde{P}_4 - \mathcal{O}\tilde{P}_2$$

$$\mathcal{O}\tilde{P}_2 = \mathcal{O}\tilde{P}_5 - \mathcal{O}\tilde{P}_3$$

$\vdots$

$$\mathcal{O}\tilde{P}_{n-2} = \mathcal{O}\tilde{P}_{n+1} - \mathcal{O}\tilde{P}_{n-1}$$

$$\mathcal{O}\tilde{P}_{n-1} = \mathcal{O}\tilde{P}_{n+2} - \mathcal{O}\tilde{P}_n$$

$$\mathcal{O}\tilde{P}_n = \mathcal{O}\tilde{P}_{n+3} - \mathcal{O}\tilde{P}_{n+1}$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanır ve tekrar Teorem 4.10 kullanılırsa

$$\mathcal{O}\tilde{P}_1 + \mathcal{O}\tilde{P}_2 + \cdots + \mathcal{O}\tilde{P}_n = \mathcal{O}\tilde{P}_{n+3} + \mathcal{O}\tilde{P}_{n+2} - \mathcal{O}\tilde{P}_2 - \mathcal{O}\tilde{P}_1$$

$$\sum_{m=0}^n \mathcal{O}\tilde{P}_m = \mathcal{O}\tilde{P}_{n+3} + \mathcal{O}\tilde{P}_{n+2} - \mathcal{O}\tilde{P}_4$$

olup istenilen elde edilir.

ii. Teorem 4.10 dan

$$\mathcal{O}\tilde{P}_0 = \mathcal{O}\tilde{P}_3 - \mathcal{O}\tilde{P}_1$$

$$\mathcal{O}\tilde{P}_2 = \mathcal{O}\tilde{P}_5 - \mathcal{O}\tilde{P}_3$$

$$\mathcal{O}\tilde{P}_4 = \mathcal{O}\tilde{P}_7 - \mathcal{O}\tilde{P}_5$$

$\vdots$

$$\mathcal{O}\tilde{P}_{2n-4} = \mathcal{O}\tilde{P}_{2n-1} - \mathcal{O}\tilde{P}_{2n-3}$$

$$\mathcal{O}\tilde{P}_{2n-2} = \mathcal{O}\tilde{P}_{2n+1} - \mathcal{O}\tilde{P}_{2n-1}$$

$$\mathcal{O}\tilde{P}_{2n} = \mathcal{O}\tilde{P}_{2n+3} - \mathcal{O}\tilde{P}_{2n+1}$$

eşitlikleri yazılabilir.

Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\mathcal{O}\tilde{P}_0 + \mathcal{O}\tilde{P}_2 + \cdots + \mathcal{O}\tilde{P}_{2n} = \mathcal{O}\tilde{P}_{2n+3} - \mathcal{O}\tilde{P}_1$$

$$\sum_{m=0}^n \mathcal{O}\tilde{P}_{2m} = \mathcal{O}\tilde{P}_{2n+3} - \mathcal{O}\tilde{P}_1$$

olup istenilen elde edilir.

iii. Teorem 4.10 dan

$$\mathcal{O}\tilde{P}_1 = \mathcal{O}\tilde{P}_4 - \mathcal{O}\tilde{P}_2$$

$$\mathcal{O}\tilde{P}_3 = \mathcal{O}\tilde{P}_6 - \mathcal{O}\tilde{P}_4$$

$$\mathcal{O}\tilde{P}_5 = \mathcal{O}\tilde{P}_8 - \mathcal{O}\tilde{P}_6$$

$\vdots$

$$\mathcal{O}\tilde{P}_{2n-3} = \mathcal{O}\tilde{P}_{2n} - \mathcal{O}\tilde{P}_{2n-2}$$

$$\mathcal{O}\tilde{P}_{2n-1} = \mathcal{O}\tilde{P}_{2n+2} - \mathcal{O}\tilde{P}_{2n}$$

$$\mathcal{O}\tilde{P}_{2n+1} = \mathcal{O}\tilde{P}_{2n+4} - \mathcal{O}\tilde{P}_{2n+2}$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\mathcal{O}\tilde{P}_1 + \mathcal{O}\tilde{P}_3 + \cdots + \mathcal{O}\tilde{P}_{2n+1} = \mathcal{O}\tilde{P}_{2n+4} - \mathcal{O}\tilde{P}_2$$

$$\sum_{m=0}^n \mathcal{O}\tilde{P}_{2m+1} = \mathcal{O}\tilde{P}_{2n+4} - \mathcal{O}\tilde{P}_2$$

olup istenilen elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.20: $S\tilde{P}_n$ n -inci Perrin sedenyonu olmak üzere

$$\text{i.} \quad \sum_{m=0}^n S\tilde{P}_m = S\tilde{P}_{n+3} + S\tilde{P}_{n+2} - S\tilde{P}_4$$

$$\text{ii.} \quad \sum_{m=0}^n S\tilde{P}_{2m} = S\tilde{P}_{2n+3} - S\tilde{P}_1$$

$$\text{iii.} \quad \sum_{m=0}^n S\tilde{P}_{2m+1} = S\tilde{P}_{2n+4} - S\tilde{P}_2$$

eşitlikleri sağlanır (Taşyurdu ve Akpınar, 2019b; 2020).

İspat: İspat için Teorem 4.14, Teorem 4.19 un ispatındaki düşünce ile kullanılarak yapılabilir.

Teorem 4.21: $n \geq 1$ tamsayı, $\mathcal{O}P_n$, n -inci Padovan oktonyonu ve $\mathcal{O}R_n$, n -inci Pell-Padovan oktonyonu olmak üzere

$$\text{i. } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} \mathcal{O}P_2 \\ \mathcal{O}P_1 \\ \mathcal{O}P_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{O}P_{n+2} \\ \mathcal{O}P_{n+1} \\ \mathcal{O}P_n \end{bmatrix}$$

$$\text{ii. } \begin{bmatrix} \mathcal{O}P_{n+2} & \mathcal{O}P_{n+1} & \mathcal{O}P_n \\ \mathcal{O}P_{n+1} & \mathcal{O}P_n & \mathcal{O}P_{n-1} \\ \mathcal{O}P_n & \mathcal{O}P_{n-1} & \mathcal{O}P_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} \mathcal{O}P_2 & \mathcal{O}P_1 & \mathcal{O}P_0 \\ \mathcal{O}P_1 & \mathcal{O}P_0 & \mathcal{O}P_{-1} \\ \mathcal{O}P_0 & \mathcal{O}P_{-1} & \mathcal{O}P_{-2} \end{bmatrix}$$

$$\text{iii. } \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} \mathcal{O}R_2 \\ \mathcal{O}R_1 \\ \mathcal{O}R_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{O}R_{n+2} \\ \mathcal{O}R_{n+1} \\ \mathcal{O}R_n \end{bmatrix}$$

$$\text{iv. } \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} \mathcal{O}R_2 & \mathcal{O}R_1 & \mathcal{O}R_0 \\ \mathcal{O}R_1 & \mathcal{O}R_0 & \mathcal{O}R_{-1} \\ \mathcal{O}R_0 & \mathcal{O}R_{-1} & \mathcal{O}R_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{O}R_{n+2} & \mathcal{O}R_{n+1} & \mathcal{O}R_n \\ \mathcal{O}R_{n+1} & \mathcal{O}R_n & \mathcal{O}R_{n-1} \\ \mathcal{O}R_n & \mathcal{O}R_{n-1} & \mathcal{O}R_{n-2} \end{bmatrix}$$

eşitlikleri sağlanır (Taşyurdu ve Akpınar, 2019; 2019a).

İspat. i. İspatı n üzerinden tümevarım yöntemi kullanılarak yapılabilir. $n = 0$ ve $n = 1$ için iddianın doğru olduğu açıktır. Şimdi iddianın $n \in \mathbb{Z}^+$ için doğru olduğunu kabul edip $n + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. Yani n için

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} \mathcal{O}P_2 \\ \mathcal{O}P_1 \\ \mathcal{O}P_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{O}P_{n+2} \\ \mathcal{O}P_{n+1} \\ \mathcal{O}P_n \end{bmatrix}$$

olduğunu kabul edip

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{n+1} \begin{bmatrix} \mathcal{O}P_2 \\ \mathcal{O}P_1 \\ \mathcal{O}P_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{O}P_{n+3} \\ \mathcal{O}P_{n+2} \\ \mathcal{O}P_{n+1} \end{bmatrix}$$

olduğunu gösterelim.

Teorem 4.2 kabulümüzde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{n+1} \begin{bmatrix} \mathcal{O}P_2 \\ \mathcal{O}P_1 \\ \mathcal{O}P_0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} \mathcal{O}P_2 \\ \mathcal{O}P_1 \\ \mathcal{O}P_0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{O}P_{n+2} \\ \mathcal{O}P_{n+1} \\ \mathcal{O}P_n \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \mathcal{O}P_{n+3} \\ \mathcal{O}P_{n+2} \\ \mathcal{O}P_{n+1} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

olup istenilen elde edilir.

n üzerinden tümevarım yöntemi benzer düşünce ile ii. şıkkın ispatında Teorem 4.2 ve iii. ve iv. şıkların ispatlarında Teorem 4.6 kullanılarak yapılabilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Bu çalışmada öncelikle Padovan, Pell-Padovan ve Perrin sayı dizilerinin rekürans bağıntıları ile oktonyon ve sedenyonların tanımları kullanılarak Padovan, Pell-Padovan, Perrin oktonyonları ve sedenyonları tanımlanmıştır. Bu oktonyon ve sedenyonların dizileri oluşturmuş ve bu dizilerin rekürans bağıntısı tanımlanmıştır. Bu dizilerin herhangi bir terimini elde etmek için kendisinden önceki terimlerin bilinmesine ihtiyaç bırakmayan ve kapalı formül olarak bilinen Binet formülleri elde edilmiştir. Ayrıca bu oktonyon ve sedenyonlar için üreteç fonksiyonları, toplam formülleri ve matris temsilleri elde edilmiştir.

Literatürde ikinci mertebeden rekürans diziler ile oktonyonlar ve sedenyonlar üzerine birçok çalışma vardır. Bu çalışmada sunulan tanımlar ve buna bağlı elde edilen sonuçlar ile literatüre üçüncü mertebeden rekürans diziler ile ilişkili yeni kavramlar ve sonuçlar kazandırılmıştır.

5.2. Öneriler

Çalışmamızda elde ettiğimiz sonuçlar doğrultusunda araştırmacılara önerileri olarak, genel olarak üçüncü mertebeden rekürans diziler için oktonyonlar ve sedenyonlar tanımlanabileceğini, bunların dizlerinin oluşturulabileceğini ve bu çalışmada elde edilen tüm sonuçların araştırılabileceğini ifade edebiliriz.

KAYNAKLAR

- Baez, J. C. (2002) “The octonions. Available”, *Bulletin Of the American Mathematical*.
- Bilgici, G. (2017) “Fibonacci and Lucas sedenion”, *Journal of integer sequences*, vol.20, Article 17.1.8.
- Bolat Çimen, C. and İpek, A. (2017) “On Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas octonions”, *Mediterr. J. Math.*, 10.1007/s00009-017-0873-2.
- Cariow, A. and Cariowa, G. (2013) “An algorithm for fast multiplication of sedenions. Inform.”, *Process. Lett.*, 113, 324-331.
- Carmody, K. (1988) “Circular and Hyperbolic quaternions, octonions and sedenions”, *Appl. Math.Comput.*, 28, 47.72.
- Cawagas, R. E., (2004) “On the structure and zero divisors of the Cayley-Dickson sedenion algebra”, *Discussiones Mathematicae General Algebra and Applications*, 24(2), , 251–265.
- Cerda-Morales, G. (2019) “The Unifying formula for all Tribonacci-type octonions sequences and their properties”, *Konuralp Journal of Mathematics*, 7(2), 292-299.
- Conway, J. H. and Smith, D. A. (2005) “On quaternions and octonions”, *Their Geometry, Arithmetic and Symmetry. Bulletin of the American Mathematical Society*, 42, 229-243.
- Culbert, C. (2007) “Cayley-Dickson algebras and loops”, *Journal of Generalized Lie Theory and Applications*, Vol. 1 no. 1, 1–17.
- Çimen, C. İpek, A. and Çimen, E. (2019) “On Horadam sedenions”, *Journal of Science and Art*, 4(49), 887-898.
- Everest, G., Poorten, A., Shparlinski, I. and Ward, T. (2003) “Recurrence sequences”, *American Mathematical Society*, USA, 323 p.
- Feinberg, M. (1963) “Fibonacci–Tribonacci”, *Fibonacci Quarterly*, 1, 71–74.
- Gültekin, İ. and Taşyurdu, Y. (2013) “On period of the pequence of Fibonacci polynomials podulo m . *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Vol. 2013, 3p.
- Hamilton, W. R. (1843) “On a new species of imaginary quantities connected with a theory of quaternions”, *Proceedings of the Royal Irish Academy*, Vol. 2.
- Horadam, A.F. (1965) “Basic properties of a certain generalized sequence of numbers”, *Fibonacci Quarterly*, 3(3), 161-176.

- Imaeda, K. and Imaeda, M. (2000) “Sedenions: algebra and analysis”, *Applied Mathematics and Computation*, 115 (2-3): 77-88.
- İpek, A. (2016) “On (p, q) -Fibonacci octonions”, *Mathematica Aeterna*, 6, 923-932. *Society*, 39 (2): 145-205.
- Kadioğlu, E. ve Kamali, M. (2003) “Genel Matematik”, *Bakanlar Matbaacılık*, Erzurum, 491 s.
- Karataş, A. and Halıcı, S. (2017) “Horadam Octonions”, *An. Şt. Univ. Ovidius Constanta*, 10.1515/auom-2017-0038.
- Keçilioğlu, O. and Akkuş, I. (2015) “The Fibonacci octonions”, *Advances in Applied Clifford Algebra*, 10.1007/s00006-014-0468-y.
- Kızılateş, C. and Kırlak, S. (2020) “A new generalization of Fibonacci and Lucas type sedenions”, *Preprints*, 8 March.
- Kritsana, Y. (2013) “Matrices formula for Padovan and Perrin Sequences”, *Applied Mathematics Science*, 7 (142), 7093-7096.
- Koshy, T. (2001) “Fibonacci and Lucas Numbers with Applications”, *Wiley-Interscience Publications*, Canada, 641 p.
- Li, J., Jiang, Z., Lu, F. (2014) “Determinants, norms and spread of Circulant matrices with Tribonacci and Generalized Lucas numbers”, *Abstr. Appl. Anal.*, 381829.
- Mironov, V. L. and Mironov, S. V. (2015) “Associative space-time sedenions and their application in relativistic quantum mechanics and field theory”, *Appl. Math.*, 6(1), 46.56.
- Özkoç Öztürk, A. (2019) “On generalized Tribonacci octonions”, *Sakarya University Journal of Science*, 23(5), 731-735.
- Shannon, A. G., Anderson, P. G. and Horadam, A. F. (2006) “ Properties of Cordonnier, Perrin and van der laan numbers”, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 37(7), 825-831.
- Soykan, Y. (2019) “Tribonacci and Tribonacci-Lucas sedenions”, *Mathematics*, 7(74), 19 p, 10.3390/math7010074.
- Soykan, Y., Okumuş, İ. and Taşdemir, E. (2020) “On generalized Tribonacci sedenions”, *Sarajevo Journal Of Mathematics*, 16(29), 1, 103 – 122.
- Szynal-Liana, A. and Wloch, I. (2015) “The Pell guaternions and the Pell octonions”, *Adv. Appl. Clifford Algebras* 26, 10.1007/s00006-015-0570-9
- Taşçı, D. (2010) Soyut Cebir, *Alp Yayınevi*, Ankara, 671 s.
- Taşçı, D. (2011) Lineer Cebir, *Gazi Kitapevi Yayınevi*, Ankara, 585 s.

- Taşçı, D. (2018) Padovan and Pell-Padovan quaternions, *Journal of Science and Arts*, 1(42), 125-132.
- Taşyurdu, Y. and Gültekin, İ. (2016) “The period of Fibonacci sequences over the finite field of order $p^2\mathbb{F}$ ”, *New Trends in Mathematical Sciences*, 4, 248-255
- Taşyurdu, Y. (2018) “Matrix representations of Fibonacci-Like sequences”, *New Trends in Mathematical Sciences*, 6(4), 203-210.
- Taşyurdu, Y. (2019) “On the Sums of Tribonacci and Tribonacci-Lucas numbers”, *Applied Mathematical Sciences*, 13(24), 1201-1208.
- Taşyurdu, Y. and Akpınar, A. (2019) “Padovan and Pell-Padovan octonions”, *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, 11(Special Issue), 114-122.
- Taşyurdu, Y. and Akpınar, A. (2019a) “Padovan and Pell-Padovan octonions”, *International Conference on Mathematics and Mathematics Education*, 11-13 July.
- Taşyurdu, Y. and Akpınar, A. (2019b) “Perrin octonions and sedenions”, *International Conference on Mathematics and Mathematics Education*, 11-13 July.
- Taşyurdu, Y. and Akpınar, A. (2020) “Perrin octonions and Perrin sedenions”, *Konuralp Journal of Mathematics*, 8(2), 384-390.
- Vajda, S., (1989) “Fibonacci & Lucas numbers and golden section”, *Ellis Horwood*, Chichester.
- Vorobyov, N., (1976) “Elementary Numbers Theory”, *Allyn and Bacon inc*, Boston, 285-299.
- Yaglom, I. M. (1968) Complex Numbers in Geometry, *Academic Press*, New York.

EKLER

Ek-1. Tez Çalışması Süresince Yapılan Akademik Çalışmalar

Taşıyurdu, Y. and Akpınar, A. (2019) “Padovan and Pell-Padovan octonions”, ***Turkish Journal of Mathematics and Computer Science***, 11(Special Issue), 114-122.

Taşıyurdu, Y. and Akpınar, A. (2019a) “Padovan and Pell-Padovan octonions”, ***International Conference on Mathematics and Mathematics Education***, 11-13 July.

Taşıyurdu, Y. and Akpınar, A. (2019b) “Perrin octonions and sedenions”, ***International Conference on Mathematics and Mathematics Education***, 11-13 July.

Taşıyurdu, Y. and Akpınar, A. (2020) “Perrin octonions and Perrin sedenions”, ***Konuralp Journal of Mathematics***, 8(2), 384-390.