

**PARA-KOMPLEKS GEOMETRİDE BAZI SLANT
YARI-RIEMANN SUBMERSİYONLAR**

ESRA BAŞARIR NOYAN

**TEMMUZ 2023
DİYARBAKIR**

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**PARA-KOMPLEKS GEOMETRİDE BAZI SLANT
YARI-RIEMANN SUBMERSİYONLAR**

ESRA BAŞARIR NOYAN

DİCLE ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM-ÖĞRETİM VE SINAV
YÖNETMELİĞİNİN BİR PARÇASI OLARAK
MATEMATİK ANA BİLİM DALINDA
DOKTORA TEZİ
OLARAK HAZIRLANMIŞTIR

TEMMUZ 2023
DİYARBAKIR

**PARA-KOMPLEKS GEOMETRİDE BAZI SLANT
YARI-RIEMANN SUBMERSİYONLAR**

Esra BAŞARIR NOYAN tarafından Dicle Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin bir parçası olarak hazırlanan bu çalışma, aşağıda bilgileri yazılı jüri üyeleri tarafından değerlendirilerek **Matematik Ana Bilim Dalı**'nda **Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Neslihan DALKILIÇ
Müdür, **Fen Bilimleri Enstitüsü**

Prof. Dr. Yılmaz GÜNDÜZALP
Danışman, **Matematik Bölümü,**
Dicle Üniversitesi

Sınav Jürisi:

Doç. Dr. Mehmet Akif AKYOL (*)
Matematik Bölümü, Bingöl Üniversitesi

Prof. Dr. Yılmaz GÜNDÜZALP (**)
Matematik Bölümü, Dicle Üniversitesi

Doç. Dr. Muhittin Evren AYDIN
Matematik Bölümü, Fırat Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Yasin KAYA
Matematik Bölümü, Dicle Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Murat POLAT
Matematik Bölümü, Dicle Üniversitesi

ONAY

Savunma Tarihi: 05 / 07 / 2023

(*) Sınav Jürisi kısmının birinci satırına Jüri Başkanının bilgilerini yazınız.

(**) Sınav Jürisi kısmının ikinci satırına Tez Danışmanının bilgilerini yazınız.

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tez çalışmasında yer alan tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu beyan ederim. Ayrıca, bahse konu bu kural ve ilkelerin gerektirdiği üzere, bu çalışmada özgün olmayan tüm bilimsel içerikleri kurallara uygun biçimde alıntılıyıp kaynak gösterdiğimi beyan ederim. Beyanımınla çelişen herhangi bir delil bulunduğu takdirde tüm sorumluluğu üstleneceğimi kabul ederim.

Ad, Soyad: Esra BAŞARIR NOYAN

İmza:

TEŞEKKÜR

Öncelikle, yüksek lisans ve doktora eğitimim boyunca her türlü desteğini esirgemeyen, tecrübe ve rehberlikleriyle bu tez çalışmasının her anında yanımda olan çok değerli danışmanım Prof. Dr. Yılmaz GÜNDÜZALP hocama sonsuz saygılarımı ve şükranlarımı sunarım.

Özellikle, bugünlere gelmemde en çok emeği geçen, her zaman yanımda olan kıymetli aileme sonsuz sevgilerimi, şükranlarımı sunarım. Ayrıca oğlum Zeynel Aryen'e sevgilerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	v
İÇİNDEKİLER	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	vii
ÖZET.....	viii
ABSTRACT.....	ix
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	7
2.1 Yarı-Riemann Manifoldlar.....	7
2.2 Distribüsyonlar.....	12
2.3 Para-Kompleks Manifoldlar.....	12
2.4 Yarı-Riemann Submersiyonlar.....	14
2.5 Neutral Slant Submersiyonlar	22
3. SEMI-SLANT YARI-RIEMANN SUBMERSİYONLAR	26
3.1 Semi-Slant Yarı-Riemann Submersiyonlarda Total Umbilik Lifler	37
3.2 Para-Kompleks Uzay Formundan Yarı-Riemann Manifolduna Semi-Slant Yarı-Riemann Submersiyonlar.....	38
4. HEMI-SLANT YARI-RIEMANN SUBMERSİYONLAR	45
4.1 Hemi-Slant Yarı-Riemann Submersiyonlarda Total Umbilik Lifler	59
4.2 Para-Kompleks Uzay Formundan Yarı-Riemann Manifolduna Semi-Slant Yarı-Riemann Submersiyonlar.....	60
5. BI-SLANT YARI-RIEMANN SUBMERSİYONLAR	67
5.1 Bi-Slant Yarı-Riemann Submersiyonlarda Eğrilik İlişkileri.....	77
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	80
KAYNAKLAR	81
ÖZGEÇMİŞ	84

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

Simge	Açıklama
$B, \tilde{B}$	Yarı-Riemann manifold
$g, \tilde{g}$	Yarı-Riemann metrik
$T_p B$	B manifoldunun p noktasındaki tanjant uzayı
$\chi(B)$ veya $\mathbb{T}(TB)$	Manifoldun vektör alanları uzayı
F_*	Türev dönüşümü
∇	Lineer konneksiyon
P	Hemen hemen para-kompleks yapı
D	Distribüsyon
$\text{çek}F_*$	Dikey distribüsyon
$(\text{çek}F_*)^\perp$	Yatay distribüsyon
Φ	Temel 2-form
$\oplus$	Direkt toplam
R	Riemann eğrilik tensörü
S	Ricci tensör alanı
K	Kesit eğriliği
$\tilde{\sigma}$	Skaler eğrilik
$[,]$	Lie parantez operatörü
$\ \cdot \ $	Norm
$(B(v), g)$	Para-Kaehler uzay formu

ÖZET

PARA-KOMPLEKS GEOMETRİDE BAZI SLANT YARI-RIEMANN SUBMERSİYONLAR

Başarır Noyan, Esra

Doktora, Matematik Bölümü

Danışman: Prof. Dr. Yılmaz Gündüzalp

Temmuz 2023, 95 sayfa

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, konunun tarihsel gelişimi ele alınmaktadır. İkinci bölümde, devamında gelecek olan bölümlerdeki konulara öncülük edecek temel kavramlar tanıtılmaktadır. Üçüncü bölümde, hemen hemen para-Hermityen manifoldlardan yarı-Riemann manifoldlara semi-slant yarı-Riemann submersiyonlar tanımlanarak bu submersiyonlarda üç tip açı için de bazı geometrik özellikler elde edilmiştir. Elde edilen bu özellikler aşık olmaya örnekler üzerinde de incelenmiştir. Ayrıca, hemen hemen para-Hermityen manifoldlardan yarı-Riemann manifoldlara tanımlı semi-slant yarı-Riemann submersiyonların harmonik ve tamamen geodezik olma durumu incelenerek liflerin total geodezikliği için de gerek ve yeter şartlar elde edildi. Daha sonra para-kompleks uzay formlarını kullanarak para-kesit, Ricci ve skalar eğrilikler hesaplanmıştır. Dördüncü bölümde, hemen hemen para-Hermityen manifoldlardan yarı-Riemann manifoldlara hemi-slant yarı-Riemann submersiyonlar tanımlanarak bu submersiyonlarda üç tip açı için de bazı geometrik özellikler elde edilmiştir. Elde edilen bu özellikler aşık olmaya örnekler üzerinde de incelenmiştir. Ayrıca, hemen hemen para-Hermityen manifoldlardan yarı-Riemann manifoldlara tanımlı hemi-slant yarı-Riemann submersiyonların harmonik ve tamamen geodezik olma durumu incelenerek liflerin total geodezikliği için de gerek ve yeter şartlar elde edildi. Daha sonra para-kompleks uzay formlarını kullanarak para-kesit, Ricci ve skalar eğrilikler hesaplanmıştır. Beşinci bölümde, hemen hemen para-Hermityen manifoldlardan yarı-Riemann manifoldlara bi-slant yarı-Riemann submersiyonlar tanımlanarak bu submersiyonlarda üç tip açı için de bazı geometrik özellikler elde edilmiştir. Elde edilen bu özellikler aşık olmaya örnekler üzerinde de incelenmiştir. Ayrıca, hemen hemen para-Hermityen manifoldlardan yarı-Riemann manifoldlara tanımlı bi-slant yarı-Riemann submersiyonların harmonik ve tamamen geodezik olma durumu incelenerek liflerin total geodezikliği için de gerek ve yeter şartlar elde edildi. Daha sonra bi-slant yarı-Riemann submersiyonlarda eğrilik ilişkileri arasında bağıntılar elde edildi.

Anahtar Kelimeler: Yarı-Riemann submersiyon, Hemen hemen para-Hermityen manifold, Para-Kaehler manifold, Semi-slant yarı-Riemann submersiyon, Hemi-slant yarı-Riemann submersiyon, Bi-slant yarı-Riemann submersiyon.

ABSTRACT

SOME SLANT PSEUDO-RIEMANNIAN SUBMERSIONS IN PARA-COMPLEX GEOMETRY

Başarır Noyan, Esra

Doctorate of Science in Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Yılmaz Gündüzalp

July 2023, 95 pages

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, the historical development of the subject is discussed. In the second chapter, the basic definitions regarding to the subjects in the next chapters are introduced. In the third chapter, semi-slant pseudo-Riemannian submersions from almost para-Hermitian manifolds to pseudo-Riemannian manifolds are defined and some geometric properties are obtained for all three types of angles in these submersions. These properties were also examined on the non-trivial examples. Also, the harmonicity and being totally geodesic of semi-slant pseudo-Riemannian submersions from almost para-Hermitian manifolds to pseudo-Riemannian manifolds are investigated. Then necessary and sufficient conditions for the maps to have totally geodesic fibers are obtained. Also, curvature properties for semi-slant pseudo-Riemannian submersions from para-Kaehler space forms are given. In the fourth chapter, hemi-slant pseudo-Riemannian submersions from almost para-Hermitian manifolds to pseudo-Riemannian manifolds are defined and some geometric properties are obtained for all three types of angles in these submersions. These properties were also examined on the non-trivial examples. Also, the harmonicity and being totally geodesic of hemi-slant pseudo-Riemannian submersions from almost para-Hermitian manifolds to pseudo-Riemannian manifolds are investigated. Then necessary and sufficient conditions for the maps to have totally geodesic fibers are obtained. Also, curvature properties for hemi-slant pseudo-Riemannian submersions from para-Kaehler space forms are given. In the fifth chapter, bi-slant pseudo-Riemannian submersions from almost para-Hermitian manifolds to pseudo-Riemannian manifolds are defined and some geometric properties are obtained for all three types of angles in these submersions. These properties were also examined on the non-trivial examples. Also, the harmonicity and being totally geodesic of bi-slant pseudo-Riemannian submersions from almost para-Hermitian manifolds to pseudo-Riemannian manifolds are investigated. Then necessary and sufficient conditions for the maps to have totally geodesic fibers are obtained. Also, the curvature relations between the total manifold and the base manifold for such submersions are given.

Keywords: Pseudo-Riemannian submersion, Almost para-Hermitian manifold, Para-Kaehler manifold, Semi-slant pseudo- Riemannian submersion, Hemi-slant pseudo-Riemannian submersion, Bi-slant pseudo-Riemannian submersion.

1. GİRİŞ

Eski uygarlıklardan günümüze kadar olan dönemde, her alanda geometri biliminin izi vardır. Zaman içerisinde bilim ve tekniğin ilerlemesi ile oluşan ihtiyaçlara göre geometri çeşitli alanlara ayrılmıştır. Bu alanlardan birisi de diferensiyel geometridir. Modern matematiğin çalışma alanlarına baktığımızda diferensiyel geometrinin en aktif çalışma alanlarından biri olduğu görülmektedir.

19. yüzyıldan sonra diferensiyel geometri daha çok diferensiyellenebilir manifoldlar üzerinde oluşan geometrik yapılar ile ilgilenmiştir. Bir manifoldun geometrisi üzerine yapılan çalışmalarda kullanılan metotlardan biri, diğer bir manifold için uygun bir dönüşüm tanımlamaktır. Bu metotta, dönüşümün ve diğer manifoldun özelliklerinden yararlanarak ele alınan manifoldun geometrisi incelenir. Araştırmaya değer olan bu dönüşümlerden submersiyon dönüşümü önemli bir yer tutar. İzometrik immersiyonların submersiyonlardaki karşılığı olan Riemann submersiyonlar, manifoldlar teorisi ve matematiksel fizikte önemli rol oynar. Bu dönüşümler Kaluza Klein (Bourguignon ve Lawson, 1989; Ianus ve Visinescu, 1987) ve Yang Mills (Bourguignon ve Lawson, 1981) teorilerinde pek çok uygulama alanına sahiptir.

Riemann submersiyonlar ilk defa (O'Neill, 1966) tarafından tanımlandı. O'Neill makalesinde, immersiyondaki ikinci temel form ve şekil operatörüne karşılık, Riemann submersiyonları için iki tane tensör alanı tanımladı ve bunların temel özelliklerini inceledi. O'Neill tensörleri olarak adlandırılan bu tensörler Riemann submersiyonları için önemli araçlar olarak görülmektedir. Bu makalede ayrıca iki manifold arasındaki submersiyon dönüşümünden faydalanılarak, manifoldların eğrilikleri karşılaştırıldı. Daha sonra Falcitelli, Ianus ve Pastore tarafından bazı derlemeler yapıldı (Falcitelli vd., 2004). B ve $\tilde{B}$ yarı-Riemann manifoldlarını alalım. Bu durumda, O'Neill tarafından (O'Neill, 1966) de verilen Riemann submersiyon kavramı tanımlanamaz. Bu yüzden O'Neill (O'Neill, 1983) iki yarı-Riemann manifoldu arasında yarı-Riemann submersiyon kavramını tanımlandı. Buna göre, B ve $\tilde{B}$ iki yarı-Riemann manifold olmak üzere $\mathcal{F} : B \rightarrow \tilde{B}$ bir yarı-Riemann submersiyon olsun. Eğer $\mathcal{F}$ in lifleri non-dejenere altmanifoldlar ve $\mathcal{F}$,

yatay vektörlerin skaler çarpımlarını koruyorsa $\mathcal{F}$ e bir yarı-Riemann submersiyon denir.

Watson, 1976 yılında hemen hemen Hermityen manifoldlar arasında hemen hemen Hermityen submersiyonları tanımladı ve baz manifoldun ve her bir lifin çoğu durumunda aynı çeşit yapıya sahip olacağını gösterdi (Watson, 1976). Hemen hemen Hermityen submersiyonlar (Chinea, 1985) aracılığı ile tanımlanan hemen hemen Kontakt manifoldları, (Marrero and Rocha, 1994) tarafından çalışılan lokal konformal Kaehler manifoldları ve kuaterniyon Kaehler manifoldları içermektedir (Ianus vd., 2008). Şahin, hemen hemen Hermityen manifoldlarından Riemann manifoldlarına anti-invaryant (Şahin, 2010) ve semi-invaryant submersiyonları (Şahin, 2013a) ilk çalışanlardandır. Ayrıca bu dönüşümlerin geometrik yapılarını da inceledi. Daha sonra birçok yazar tarafından bu submersiyonların geometrisi çalışıldı. (Şahin, 2011) hemen hemen Hermityen manifoldlarından Riemann manifoldlarına slant submersiyonları aşağıdaki gibi tanımladı: (B, g, J) hemen hemen Hermityen manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, J) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

bir Riemann submersiyon olsun. Eğer sıfırdan farklı herhangi bir vektör alanı $W \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ için $p \in B$ ($\forall p \in B$ ve herhangi bir sıfırdan farklı vektör alanı $W \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ seçiminden bağımsız) noktasında JW ve $(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ arasındaki $\varphi(W)$ açısı sabit ise $\mathcal{F}$ slant submersiyon olarak adlandırılır. Burada oluşan φ açısı da slant submersiyonun slant açısı olarak ifade edilir. Slant submersiyonlar üzerine birçok çalışma yapıldı ve günümüzde de çalışmalar devam etmektedir (Erken ve Murathan, 2016; Sepet ve Ergüt, 2016).

Slant submersiyon kavramının bir genelleştirilmesi olarak (Park ve Prasad, 2013) semi-slant submersiyon kavramına giriş yaptı. Burada, (B, g, P) bir hemen hemen Hermityen manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir Riemann manifold ve $\mathcal{F} : B \rightarrow \tilde{B}$ bir Riemann submersiyonunun

- (i) $\text{çek}\mathcal{F}_* = D_1 \oplus D_2$,
- (ii) D_1 distribüsyonu P altında invaryanttır yani $P(D_1) = D_1$,

(iii) D_2 distribüsyonu $\varphi \neq 0$ açısı ile slant distribüsyondur, şartları sağlanacak şekilde $\text{çek}\mathcal{F}_*$ da iki ortogonal D_1 ve D_2 distribüsyonları varsa $\mathcal{F}$ e semi-slant Riemann submersiyon denir. Bu durumda φ açısına da semi-slant açı denir. Daha sonra, (Gündüzalp, 2016) hemen hemen çarpım Riemann manifoldlardan Riemann manifoldlara tanımlanan semi-slant submersiyonları ve (Noyan ve Gündüzalp, 2022a) para-Kaehler geometride proper semi-slant yarı-Riemann submersiyonları çalışmıştır.

Anti-invariant submersiyonlar, semi-invariant submersiyonlar ve slant submersiyonların genelleştirilmesi olan hemi-slant submersiyonları (Taştan vd., 2016) çalışmıştır. Bu tür submersiyonların zengin geometrik özelliklere sahip olduğunu ve total uzayın geometrisini araştırmak için faydalı olduklarını gösterdiler. Burada, (B, g, P) bir hemen hemen Hermityen manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir Riemann manifold ve $\mathcal{F} : B \rightarrow \tilde{B}$ bir Riemann submersiyonunun

- (i) $\text{çek}\mathcal{F}_* = D^\perp \oplus D^\varphi$,
- (ii) $D^\perp$ distribüsyonu anti-invarianttır,
- (iii) D^φ distribüsyonu slant distribüsyondur,

şartları sağlanacak şekilde $\text{çek}\mathcal{F}_*$ da iki ortogonal $D^\perp$ ve D^φ distribüsyon varsa $\mathcal{F}$ e hemi-slant Riemann submersiyon denir. Bu durumda φ açısına da hemi-slant açı denir. Daha sonra (Akyol ve Gündüzalp, 2016) hemen hemen çarpım Riemann manifoldlarından hemi-slant submersiyon kavramını ve (Sari ve Akyol, 2020) Sasakian manifoldlardan Riemann manifoldlara hemi-slant $\xi^\perp$ -Riemann submersiyonları tanımlamıştır.

İnvariant, anti-invariant, semi-invariant, slant, semi-slant ve hemi-slant Riemann submersiyonların genelleştirilmesi olan bi-slant submersiyonları (Sayar vd., 2020) çalışmıştır. Burada, (B, g, P) bir Kaehler manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir Riemann manifold ve $\mathcal{F} : B \rightarrow \tilde{B}$ bir Riemann submersiyonu

- (i) $\text{çek}\mathcal{F}_* = D^{\varphi_1} \oplus D^{\varphi_2}$,
 - (ii) $D^{\varphi_1} \in (\text{çek}\mathcal{F}_*)$ ve $D^{\varphi_2} \in (\text{çek}\mathcal{F}_*)$ olacak şekilde slant distribüsyonlar vardır,
 - (iii) D^{φ_1} ve D^{φ_2} distribüsyonlarının slant açıları sırasıyla φ_1 ve φ_2 dir,
- şartları sağlanacak şekilde $\text{çek}\mathcal{F}_*$ da iki ortogonal D^{φ_1} ve D^{φ_2} distribüsyonları

varsa $\mathcal{F}$ e bi-slant Riemann submersiyon denir. (Noyan ve Gündüzalp, 2022b) para-Kaehler geometride proper bi-slant yarı-Riemann submersiyonları çalışmıştır.

Hemen hemen para-Hermityen manifoldlarından yarı-Riemann manifoldlarına anti-invariant yarı-Riemann submersiyonlar (Gündüzalp, 2013) tarafından ve hemen hemen para-kontakt manifoldlarından yarı-Riemann manifoldlarına slant submersiyonlar (Gündüzalp, 2020) tarafından çalışıldı. Daha sonra, hemen hemen para-Hermityen manifoldlarından yarı-Riemann manifoldlarına yarı-Riemann submersiyonlar (Gündüzalp, 2021) tarafından şöyle tanımlandı: (B, g, P) hemen hemen para-Hermityen manifold $(\tilde{B}, \tilde{g})$ yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

bir yarı-Riemann submersiyon olsun. $\forall W \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ için

$$PW = \phi W + \varpi W$$

dır. Burada, ϕW ve ϖW sırasıyla PW nın dikey ve yatay bileşenleridir. Ayrıca, $\forall \zeta \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)^\perp$ için

$$P\zeta = B\zeta + C\zeta$$

dır. Burada, $B\zeta$ ve $C\zeta$ sırasıyla $P\zeta$ nın dikey ve yatay bileşenleridir.

Eğer her space-like veya time-like vektör alanı $W \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ için $p \in B$ ($\forall p \in B$ ve her space-like veya time-like vektör alanı $W \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ seçiminden bağımsız) noktasında $\frac{g(\phi W, \phi W)}{g(PW, PW)}$ oranı sabit ise $\mathcal{F}$ slant submersiyon olarak adlandırılır. Burada oluşan φ sabit açısını da slant submersiyonun slant açısı olarak ifade ederiz. Ayrıca, $\varphi \neq 0$ ve $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ şartları sağlanıyor ise $\mathcal{F}$ e has slant submersiyon denir. Gündüzalp, bu çalışmada has slant submersiyonların üç tipi için bazı geometrik özellikleri de incelemiştir: (B, g, P) hemen hemen para-Hermityen manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

bir yarı-Riemann submersiyon olsun.

- (i) Tip-1: Her space-like (time-like) vektör alanı $W \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ için, ϕW time-like (space-like) olur ve $\frac{\|\phi W\|}{\|PW\|} > 1$ dir,
- (ii) Tip-2: Her space-like (time-like) vektör alanı $W \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ için, ϕW time-like (space-like) olur ve $\frac{\|\phi W\|}{\|PW\|} < 1$ dir,
- (iii) Tip-3: Her space-like (time-like) vektör alanı $W \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ için, ϕW space-like (time-like) olur.

(B, g, P) hemen hemen para-Hermityen manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

bir yarı-Riemann submersiyon olsun.

- (i) Her space-like (time-like) vektör alanı $W \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ için, ϕW time-like (space-like) olduğunda ve sabit bir $\gamma \in (1, \infty)$ aralığında $\mathcal{F}$, tip-1 slant submersiyon olur. Yani,

$$\phi^2 W = \gamma W$$

dır. Eğer $\mathcal{F}$, tip-1 has slant submersiyon ise $\varphi > 0$ için $\gamma = \cosh^2 \varphi$ dir.

- (ii) Her space-like (time-like) vektör alanı $W \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ için, ϕW time-like (space-like) olduğunda ve sabit bir $\gamma \in (0, 1)$ aralığında $\mathcal{F}$, tip-2 slant submersiyon olur. Yani,

$$\phi^2 W = \gamma W$$

dır. Eğer $\mathcal{F}$, tip-2 has slant submersiyon ise $0 < \varphi < 2\pi$ için $\gamma = \cos^2 \varphi$ dir.

- (iii) Her space-like (time-like) vektör alanı $W \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ için, ϕW space-like (time-like) olduğunda ve sabit bir $\gamma \in (-\infty, 0)$ aralığında $\mathcal{F}$, tip-3 slant submersiyon olur. Yani,

$$\phi^2 W = \gamma W$$

dır. Eğer $\mathcal{F}$, tip-3 has slant submersiyon ise $\varphi > 0$ için $\gamma = -\sinh^2 \varphi$ dir.

Bütün bu çalışmalardan ilham alarak, bu tezde hemen hemen para-Hermityen manifoldlardan yarı-Riemann manifoldlara semi-slant, hemi-slant ve bi-slant yarı-Riemann submersiyonlar tanımlanarak bu submersiyonlarda üç tip için de bazı

geometrik özellikler elde edilmiştir. Ayrıca, tanımlanan bu yarı-Riemann submersiyon türlerinde üç tip açı için aşikar olmayan örnekler inşa edilmiştir. Harmonik ve tamamen geodezik olma durumu incelenerek liferin total geodezikliğı için gerek ve yeter şartlar araştırılmıştır. Daha sonra para-kompleks uzay formlarını kullanarak para-kesit, Ricci ve skalar eğrilikler üzerinde de çalışılmıştır.



2. KURAMSAL TEMELLER

Beş altbölümden oluşan bu bölümde sırasıyla; yarı-Riemann manifoldlar, distribüsyonlar, para-kompleks manifoldlar, yarı-Riemann submersiyonlar ve son olarak da Neutral slant submersiyonlar incelenmektedir.

2.1 Yarı-Riemann Manifoldlar

Tanım 2.1.1 n -boyutlu bir reel vektör uzayı W olsun. $g : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyor ise bu dönüşüme skaler çarpım denir. $\forall \alpha, \beta, \gamma \in W$ ve $p, r \in \mathbb{R}$ için;

- (i) Simetriktir; $g(\alpha, \beta) = g(\beta, \alpha)$,
- (ii) Bi-lineerdir;

$$\begin{aligned} g(p\alpha + r\beta, \gamma) &= pg(\alpha, \gamma) + rg(\beta, \gamma) \\ g(\alpha, p\beta + r\gamma) &= pg(\alpha, \beta) + rg(\alpha, \gamma) \end{aligned}$$

- (iii) Non-dejeneredir; $\forall \beta \in W$ için $g(\alpha, \beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ dır (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 2.1.2 W reel vektör uzayı üzerinde bilineer form g olsun.

- (i) $\forall u \in W$ için $g(u, u) > 0$ ise g bilineer forma pozitif tanımlı,
- (ii) $\forall u \in W$ için $g(u, u) < 0$ ise g bilineer forma negatif tanımlıdır denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.3 W bir reel vektör uzayı ve g , W üzerinde simetrik bilineer form olsun. $g_U : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ negatif tanımlı olan en büyük boyutlu U altuzayının boyutuna g simetrik bilineer formun indeksi denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.4 B bir C^∞ manifold olsun. $p \in B$ noktasındaki tanjant uzayı $T_p B$ olmak üzere, $U_p, V_p \in T_p B$ için

$$g : T_p B \times T_p B \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(U_p, V_p) \rightarrow g(U_p, V_p)$$

ile tanımlanan sabit indeksli, g skaler çarpıma B üzerinde bir metrik tensör denir (Kobayashi ve Nomizu, 1963).

Tanım 2.1.5 B bir C^∞ manifold ve g , B üzerinde bir metrik tensör olsun. Buna göre (B, g) ikilisine yarı-Riemann manifold denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.6 B yarı-Riemann manifoldu üzerinde g metrik tensörünün indeksine yarı-Riemann manifoldunun indeksi denir. Yarı-Riemann manifoldunun indeksini v olarak tanımlarsak $0 \leq v \leq \text{boy}B$ dir. Özel olarak, $v = 0$ ise $\forall p \in B$ için $g_p, T_p B$ üzerinde pozitif tanımlı bir metrik tensör olduğundan, B bir Riemann manifoldu olur. $v = 1$ ve $\text{boy}B \geq 2$ olması durumunda ise B ye Lorentz manifoldu denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.7 (B, g) bir yarı-Riemann manifoldu ve $i : B \rightarrow \tilde{B}$ bir immersiyon olsun. Bu durumda i^*g , B üzerinde bir metrik tensör ise B ye yarı-Riemann altmanifold denir. Aksi durumda i^*g , B üzerinde bir metrik tensör değil ise B ye dejenere altmanifold denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.8 B bir yarı-Riemann manifold ve g , B üzerinde bir metrik tensör olsun. $\forall p \in B$ ve $w_p \in T_p B$ için

$$g : T_p B \times T_p B \rightarrow \mathbb{R}$$

olacak şekilde

- (i) $g(w_p, w_p) > 0$ ya da $w_p = 0$ ise w_p vektörüne space-like,
- (ii) $g(w_p, w_p) < 0$ ise w_p vektörüne time-like,
- (iii) $g(w_p, w_p) = 0$, $w_p \neq 0$ ise w_p vektörüne light-like(null) denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 2.1.9 B bir manifold ve B üzerinde tanımladığımız konneksiyon ∇ olsun. Böylece

$$T : \chi(B) \times \chi(B) \rightarrow \chi(B)$$

$$(\zeta_1, \zeta_2) \rightarrow T(\zeta_1, \zeta_2) = \nabla_{\zeta_1} \zeta_2 - \nabla_{\zeta_2} \zeta_1 - [\zeta_1, \zeta_2] \quad (2.1.1)$$

olarak tanımlanan vektör değerli tensöre B üzerinde tanımlı ∇ konneksiyonun torsiyon tensörü denir (Do Carmo, 1992; Hacısalihoğlu, 2003).

Tanım 2.1.10 B bir manifold ve B üzerinde tanımladığımız konneksiyon ∇ olsun. Eğer $T = 0$ ise ∇ konneksiyonuna simetriktir veya sıfır torsiyonludur denir (Do Carmo, 1992).

Tanım 2.1.11 B bir manifold ve B üzerinde tanımladığımız vektör alanlarının uzayı $\Gamma(TB)$ olsun.

$$\nabla : \Gamma(TB) \times \Gamma(TB) \rightarrow \Gamma(TB)$$

$$(\zeta_1, \zeta_2) \rightarrow \nabla_{\zeta_1} \zeta_2$$

$\forall \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \in \Gamma(TB)$ ve $\forall f, g \in C^\infty(B)$ için

$$(i) \nabla_{f\zeta_1+g\zeta_2} \zeta_3 = f\nabla_{\zeta_1} \zeta_3 + g\nabla_{\zeta_2} \zeta_3,$$

$$(ii) \nabla_{\zeta_1} (f\zeta_2+g\zeta_3) = f\nabla_{\zeta_1} \zeta_2 + g\nabla_{\zeta_1} \zeta_3 + (\zeta_1 f)\zeta_2 + (\zeta_1 g)\zeta_3$$

şartlarını sağlıyor ise ∇ ya B manifoldu üzerinde bir lineer konneksiyon denir.

Ayrıca, ∇ lineer konneksiyonu

$$(iii) [\zeta_1, \zeta_2] = \nabla_{\zeta_1} \zeta_2 - \nabla_{\zeta_2} \zeta_1,$$

$$(iv) \zeta_1 g(\zeta_2, \zeta_3) = g(\nabla_{\zeta_1} \zeta_2, \zeta_3) + g(\zeta_2, \nabla_{\zeta_1} \zeta_3)$$

şartlarını sağlıyor ise ∇ konneksiyonuna B manifoldu üzerinde Riemann konneksiyonu, Levi-Civita konneksiyonu veya metrik konneksiyon denir. B üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu;

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{\zeta_1} \zeta_2, \zeta_3) &= \zeta_1(g(\zeta_2, \zeta_3)) + \zeta_2(g(\zeta_3, \zeta_1)) \\ &\quad - \zeta_3(g(\zeta_1, \zeta_2)) - g(\zeta_1, [\zeta_2, \zeta_3]) \\ &\quad + g(\zeta_2, [\zeta_3, \zeta_1]) + g(\zeta_3, [\zeta_1, \zeta_2]) \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Kozsul eşitliği ile görülür (Bejancu ve Farran, 2006; Bootby, 1986).

Tanım 2.1.12 B bir Riemann manifoldu, g de B nin Riemann metriği ve ∇, B üzerinde bir Riemann konneksiyon olsun. $\forall \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \in \chi(B)$ için

$$R: \chi(B) \times \chi(B) \times \chi(B) \rightarrow \chi(B)$$

$$(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \rightarrow R(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = R(\zeta_1, \zeta_2) \zeta_3$$

$$R(\zeta_1, \zeta_2) \zeta_3 = \nabla_{\zeta_1} \nabla_{\zeta_2} \zeta_3 - \nabla_{\zeta_2} \nabla_{\zeta_1} \zeta_3 - \nabla_{[\zeta_1, \zeta_2]} \zeta_3 \quad (2.1.3)$$

olarak tanımlanan R tensör alanına ∇ konneksiyonunun eğrilik tensörü denir (Yano ve Kon, 1984; Bootby, 1986).

Tanım 2.1.13 (B, g) bir yarı-Riemann manifoldu olsun. Bu durumda

$$K : \chi(B) \times \chi(B) \times \chi(B) \times \chi(B) \rightarrow C^\infty(B)$$

$$(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) \rightarrow K(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) = g(R(\zeta_1, \zeta_2)\zeta_3, \zeta_4)$$

olarak tanımlanan 4.mertebeden kovaryant tensöre B üzerinde Riemann Christoffel eğrilik tensörü denir (Hacısalıhoğlu, 2003).

Tanım 2.1.14 $\mathcal{F} : B \rightarrow \tilde{B}$ bir dönüşüm ve $\tilde{B}$ üzerinde bir konneksiyon $\overset{2}{\nabla}$ olsun. $\mathcal{F}$ boyunca $\tilde{B}$ üzerindeki $\overset{2}{\nabla}^{\mathcal{F}}$ konneksiyonuna $\mathcal{F}$ boyunca $\overset{2}{\nabla}$ konneksiyonun pull-back konneksiyonu denir (Şahin, 2012).

Tanım 2.1.15 $\mathcal{F} : B \rightarrow \tilde{B}$ bir dönüşüm ise $\mathcal{F}$ boyunca $\overset{2}{\nabla}$ konneksiyonun pull-back konneksiyonu $\overset{2}{\nabla}^{\mathcal{F}}$ ve $\forall \zeta, Z \in \Gamma(TB)$ olacak şekilde

$$\begin{aligned} \nabla \mathcal{F}_* : \chi(B) \times \chi(B) &\rightarrow \chi(\tilde{B}) \\ \nabla \mathcal{F}_*(\zeta, Z) &= \overset{2}{\nabla}_{\zeta}^{\mathcal{F}} \mathcal{F}_* Z - \mathcal{F}_*(\overset{1}{\nabla}_{\zeta} Z) \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

ile tanımlanan $\nabla \mathcal{F}_*$ dönüşümüne $\mathcal{F}$ dönüşümünün ikinci temel formu denir (Şahin, 2012).

Tanım 2.1.16 (B, g) , n -boyutlu bir yarı-Riemann manifoldu olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} r : \chi(B) &\rightarrow \chi(B) \\ r(U) &= \sum_{i=1}^n \epsilon_i R(U, e_i) e_i \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

şeklinde tanımlanan operatöre (B, g) nin Ricci operatörü denir (Küpeli, 1987).

Tanım 2.1.17 (B, g) , n -boyutlu bir yarı-Riemann manifoldu olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} S : \chi(B) \times \chi(B) &\rightarrow C^\infty(B) \\ S(U, W) &= \sum \epsilon_i g(R(U, e_i) e_i, W) \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

şeklinde tanımlanan tensör alanına (B, g) nin Ricci tensör alanı denir ve S ile gösterilir. Burada $\{e_i\}$, $i = 1, \dots, n$, (B, g) de ortonormal bir çatıdır (Küpeli, 1987).

Tanım 2.1.18 (B, g) , n -boyutlu bir yarı-Riemann manifoldu olsun. $\tilde{\sigma} \in C^\infty(B)$ ve $\forall p \in B$ için $T_p B$ nin 2 -boyutlu altuzaylarına göre kesit eğriliklerinin toplamına skaler eğrilik denir ve

$$\tilde{\sigma} = \sum_{j=1}^n \epsilon_j S(e_j, e_j) = \sum_{i,j=1}^n \epsilon_i g(R(e_i, e_j) e_j, e_i) \quad (2.1.7)$$

olarak ifade edilir. Burada $\{e_i, e_j\}$, (B, g) de ortonormal bir çatıdır (Küpeli, 1987).

Tanım 2.1.19 (B, g) , n -boyutlu bir yarı-Riemann manifoldu olsun. $\forall \zeta, Z \in \chi(B)$ için

$$S(\zeta, Z) = \lambda g(\zeta, Z) \quad (2.1.8)$$

olacak şekilde B üzerinde bir λ fonksiyonu varsa, yani B nin Ricci tensörü S , metrik tensör g nin bir katı ise B ye Einstein manifoldu adı verilir (Ishihara, 1979).

Tanım 2.1.20 (B, g) bir yarı-Riemann manifoldu ve bir $y \in B$ noktasındaki tanjant uzayının iki boyutlu non-dejenere bir altuzayı Y olsun. Y nin bir bazı $\{W_1, W_2\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} K(Y) &= \frac{g(R(W_1, W_2) W_2, W_1)}{\|W_1\|^2 \|W_2\|^2 - g(W_1, W_2)^2} \\ &= \frac{K(W_1, W_2, W_1, W_2)}{\|W_1\|^2 \|W_2\|^2 - g(W_1, W_2)^2} \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

olarak ifade edilen $K(Y)$ reel sayısına Y nin kesit eğriliği denir (O'Neill, 1983).

2.2 Distribüsyonlar

Tanım 2.2.1 B , n -boyutlu bir manifold olsun. B üzerinde

$$\begin{aligned} W: B &\rightarrow T_y B \\ y &\rightarrow W_y \subset T_y B \end{aligned}$$

ile tanımlanan W dönüşümüne bir distribüsyon denir. $X \in \chi(B)$ için $y \in B$ olacak şekilde $X_y \in W_y$ oluyorsa X vektör alanı W ya aittir denir. Eğer her y noktası için W ye ait q tane diferansiyellenebilir lineer bağımsız vektör alanı mevcut ise W ya diferansiyellenebilirdir denir (Bejancu ve Farran, 2006).

Tanım 2.2.2 B bir C^∞ manifold, W , B manifoldu üzerinde q - boyutlu bir C^∞ distribüsyon ve N , B nin altmanifoldu olsun. W_x , x noktasında N ye teğet olan uzaya eşit ise N ye W nin integral manifoldu denir. Yani

$$\mathcal{F}: N \rightarrow B$$

bir imbedding olacak şekilde $\forall x \in N$ için

$$\mathcal{F}_*(T_x N) = W_x$$

dir. Eğer W nin N yi kapsayan başka bir integral manifoldu yoksa N ye W nin bir maksimal integral manifoldu (leaf) denir (Şahin, 1996).

Tanım 2.2.3 B bir C^∞ manifold ve N , B nin altmanifoldu olsun. W , B manifoldu üzerinde bir distribüsyon olacak şekilde, eğer $\forall x \in N$ için W nin x i kapsayan bir maksimal integral manifoldu varsa W ya integrallenebilirdir denir (Şahin, 1996).

2.3 Para-Kompleks Manifoldlar

Tanım 2.3.1 V , $2n$ -boyutlu bir reel vektör uzayı olsun. Eğer

$$P^2 = I \tag{2.3.1}$$

için P 'nin sırasıyla $+I$ ve $-I$ öz değerlerine karşılık gelen V^+ , V^- öz uzayları aynı n -boyuta sahip ve $V = V^+ \oplus V^-$ ise $P : V \rightarrow V$ endomorfizmasına bir hemen hemen para-kompleks yapı denir (Ivanov ve Zamkovoy, 2005).

Tanım 2.3.2 B , $2n$ -boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold ve P , B manifoldu üzerinde $(1, 1)$ mertebeli bir tensör alanı olsun. Eğer $P^2 = I$ ise P tensör alanına hemen hemen çarpım yapısı denir. Bu durumda (B, P) çiftine hemen hemen çarpım manifoldu denir. P 'nin $+I$ ve $-I$ öz değerleri ile birleşen T^+B ve T^-B öz demetleri aynı ranka sahip olduğunda (B, P) hemen hemen çarpım manifolduna hemen hemen para-kompleks manifold denir (Ivanov ve Zamkovoy, 2005).

Tanım 2.3.3 B , $2n$ -boyutlu bir manifold olsun. $\forall W_1, W_2 \in \chi(B)$ için

$$g(PW_1, PW_2) = -g(W_1, W_2) \quad (2.3.2)$$

şartını sağlayan bir P hemen hemen para-kompleks yapı ve g yarı-Riemann metriği var ise (B, g, P) üçlüsüne bir hemen hemen para-Hermityen manifold adı verilir. Burada g metriği için neutraldir denir. Yani, g metriğinin işareti (n, n) olur ve $T^\pm B$ öz demetleri g metriğine göre total izotropiktir.

$\epsilon_i = g(\epsilon_i, \epsilon_i) = \pm 1$ ($\epsilon_i = 1, i = 1, \dots, n, \epsilon_j = -1, j = n + 1, \dots, 2n$) olarak alındığında bir ortonormal baz $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1} = Pe_1, \dots, e_{2n} = Pe_n\}$ olarak tanımlanır (Ivanov ve Zamkovoy, 2005).

Tanım 2.3.4 (B, g, P) bir hemen hemen para-Hermityen manifold olsun. $\forall W_1, W_2 \in \chi(B)$ için

$$\Phi(W_1, W_2) = g(W_1, PW_2) \quad (2.3.3)$$

şartını sağlayan tensöre temel 2-form denir (Ivanov ve Zamkovoy, 2005).

Tanım 2.3.5 (B, g, P) bir hemen hemen para-Hermityen manifold olsun. B manifoldunun temel 2-formu kapalı ise $(d\Phi = 0)$, (B, g, P) üçlüsüne ise para-Kaehler manifoldu denir. (B, g, P) hemen hemen para-Hermityen manifoldunun bir para-Kaehler manifold olması için gerek ve yeter şart

$$\nabla P = 0 \quad (2.3.4)$$

olmasıdır. $\forall W_1, W_2 \in \chi(B)$ için

$$\begin{aligned} (\nabla_{W_1} P)W_2 &= 0 \Rightarrow \nabla_{W_1} PW_2 - P\nabla_{W_1} W_2 = 0 \\ \Rightarrow \nabla_{W_1} PW_2 &= P\nabla_{W_1} W_2 \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

dır. Ayrıca hatırlayalım ki (B, g, P) para-Kaehler manifold ve $\forall W, Z \in \Gamma(TB)$ için (2.3.2) den aşağıdaki eşitlik elde edilebilir.

$$g(PW, Z) + g(W, PZ) = 0$$

Dahası $g(PW, W) = 0$ olduğu görülür. Eğer $\{PW, W\}$ dejenere olmayan bir düzlem kesitini gerer ise, $\{PW, W\}$ tarafından gerilen kesit eğriliği $H_B(W) = K_B(W \wedge PW)$ bir para-kesit eğriliği olarak adlandırılır. Bir para-Kaehler uzay formu, tanımı gereği bir para-Kaehler manifoldudur. v sabit para-holomorfik kesit eğriliği olacak şekilde $B_n^{2n}(v)$ para-Kaehler uzay formunun Riemann Christoffel eğrilik tensörü $\forall Y_1, Y_2, \zeta, Z \in \Gamma(TB)$ için

$$\begin{aligned} R_B(Y_1, Y_2, \zeta, Z) &= \frac{v}{4} \{g(Y_1, \zeta)g(Y_2, Z) - g(Y_1, Z)g(Y_2, \zeta) \\ &- g(Y_1, P\zeta)g(Y_2, PZ) + g(Y_1, PZ)g(Y_2, P\zeta) \\ &- 2g(Y_1, PY_2)g(\zeta, PZ)\} \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

dir (Chen, 2011).

2.4 Yarı-Riemann Submersiyonlar

Tanım 2.4.1 (B, g) ve $(\tilde{B}, \tilde{g})$ sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldları olacak şekilde

$$\mathcal{F} : (B, g) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

C^∞ örten dönüşümü için

$$\text{rank}\mathcal{F}_{*y} = \text{boy}\tilde{B}$$

sağlanıyor ise $\mathcal{F}$ dönüşümüne $y \in B$ noktasında bir submersiyon denir.

(B, g) manifoldunun $\alpha \in \tilde{B}$ noktasında $\pi_\alpha = \mathcal{F}^{-1}(\alpha)$ üzerindeki lif, bu manifoldun $q = (m - n)$ boyutlu bir altmanifoldudur. $\mathcal{F}^{-1}(\alpha)$ altmanifoldlarına submersiyonun lifleri denir (Falcitelli vd., 2004).

(B, g) manifoldunun herhangi bir $\rho \in B$ için $\mathcal{V}$ integrallenebilir distribüsyonu

$$\mathcal{V}_\rho = \text{çek}\mathcal{F}_{*\rho}$$

şeklinde tanımlanır ve $\mathcal{V}_\rho$ submersiyonun dikey distribüsyonu olarak ifade edilir.

$$\mathcal{H}_p = (\mathcal{V}_\rho)^\perp$$

olarak tanımlanan distribüsyon da submersiyonun yatay distribüsyonu olarak ifade edilir.

Tanım 2.4.2 (B, g) ve $(\tilde{B}, \tilde{g})$ Riemann manifoldları ve

$$\mathcal{F} : (B, g) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

C^∞ dönüşümünde $\rho \in B$ için

$$\mathcal{V}_\rho = \mathcal{V}_\rho(\mathcal{F}) = \text{çek}\mathcal{F}_{*\rho} = \{\zeta \in T_\rho B \mid \mathcal{F}_{*\rho}(\zeta) = 0\} \subset T_\rho B$$

ve

$$\mathcal{H}_p = \mathcal{H}_p(\mathcal{F}) = \mathcal{V}_\rho^\perp \subset T_\rho B$$

şeklinde ifade edebiliriz. $\mathcal{V}_\rho$ uzayını dikey uzay, B deki g metriğine göre $\mathcal{V}_\rho$ dikey uzayının dik tümleyeni olan $\mathcal{H}_p$ uzayını ise yatay uzay olarak ifade edebiliriz. Buradan B Riemann manifoldu $\rho \in B$ noktasında

$$T_\rho B = \mathcal{V}_\rho \oplus \mathcal{H}_p = \mathcal{V}_\rho \oplus \mathcal{V}_\rho^\perp$$

ortogonal ayrışımına sahiptir (Baird ve Wood, 2003).

Tanım 2.4.3 (B, g) ve $(\tilde{B}, \tilde{g})$ Riemann manifoldları ve

$$\mathcal{F} : (B, g) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

bir C^∞ - submersiyonu aşağıdaki özelliklere sahip ise $\mathcal{F}$ e bir Riemann submersiyon denir.

- (i) $\mathcal{F}$ dönüşümü maksimal ranka sahiptir.
- (ii) Her $p \in B$ noktasında $\mathcal{F}_{*p}$ dönüşümü yatay vektörlerinin uzunluğunu korur.

Yani

$$g_p(v, w) = \tilde{g}_{\mathcal{F}(p)}(\mathcal{F}_{*p}v, \mathcal{F}_{*p}w), \quad v, w \in \mathcal{H}, \quad p \in B$$

dır. Bu da bir $p \in B$ noktasında $\mathcal{F}_*$ türev dönüşümünün $\mathcal{H}_p$ yatay uzayından $T_{\mathcal{F}(p)}\tilde{B}$ üzerine bir lineer izometri olduğunu gösterir (Falcitelli vd., 2004).

Yukarıda verilen tanımda kaynak ve hedef manifoldlar yarı-Riemann manifold olarak seçildiğinde aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

Tanım 2.4.4 (B_q^m, g) ve $(\tilde{B}_q^n, \tilde{g})$ yarı-Riemann manifoldları olsun ($0 \leq q \leq m, 0 \leq \tilde{q} \leq n$).

$$\mathcal{F} : (B, g) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

örten dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahip ise $\mathcal{F}$ ye bir yarı-Riemann submersiyon denir.

- (i) $\forall p \in B$ noktasında $\mathcal{F}_{*p}$ örten,
- (ii) $\forall \alpha \in B$ için $\mathcal{F}^{-1}(\alpha)$ lifleri B nin yarı-Riemann altmanifoldlarıdır,
- (iii) $\mathcal{F}_*$ yatay vektörlerin skaler çarpımlarını korur (O'Neill, 1983; Gündüzalp, 2011).

Önerme 2.4.5 (B, g) ve $(\tilde{B}, \tilde{g})$ yarı-Riemann manifoldları ve

$$\mathcal{F} : (B, g) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

bir yarı-Riemann submersiyonu ∇ ve ∇' sırasıyla B ve $\tilde{B}$ nin Levi-Civita konneksiyonları olduğunu varsayalım. B üzerindeki W_1 ve W_2 temel vektör alanları W'_1, W'_2 vektör alanlarına $\mathcal{F}$ -bağlı olsun. Buna göre

- (i) $g(W_1, W_2) = \tilde{g}(W'_1, W'_2) \circ \mathcal{F}$
- (ii) $h[W_1, W_2]$ temel vektör alanı, $[W'_1, W'_2]$ vektör alanına $\mathcal{F}$ -bağlıdır.
- (iii) $h(\nabla_{W_1} W_2)$ temel vektör alanı ve $\nabla'_{W'_1} W'_2$ $\mathcal{F}$ -bağlıdır.
- (iv) Herhangi bir $W_3 \in \chi^v(M_1)$ için $[W_1, W_3]$ dikey vektör alanıdır (Falcitelli vd., 2004).

Tanım 2.4.6 (B, g) ve $(\tilde{B}, \tilde{g})$ yarı-Riemann manifoldları ve

$$\mathcal{F} : (B, g) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

bir yarı-Riemann submersiyon olsun. Buradan $E, F \in \chi(B)$ için $(1, 2)$ mertebeli T temel tensör alanı

$$T(E, F) = T_E F = h \nabla_{vE} vF + v \nabla_{vE} hF \quad (2.4.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada, T dikey tensör alanı simetriktir. Yani $U, W \in \Gamma(\mathcal{V})$ için

$$T_U W = T_W U$$

dır (O'Neill, 1966).

Tanım 2.4.7 (B, g) ve $(\tilde{B}, \tilde{g})$ yarı-Riemann manifoldları ve

$$\mathcal{F} : (B, g) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

bir yarı-Riemann submersiyon olsun. Buradan $E, F \in \chi(B)$ için $(1, 2)$ mertebeli A temel tensör alanı

$$A(E, F) = A_E F = v \nabla_{hE} hF + h \nabla_{hE} vF \quad (2.4.2)$$

şeklinde tanımlanır. Burada, A yatay tensör alanı alterneleyendir. Yani $Y, Z \in \Gamma(\mathcal{H})$ için

$$A_Y Z = -A_Z Y$$

dir (O’neill, 1966).

Önerme 2.4.8 (B, g) ve $(\tilde{B}, \tilde{g})$ yarı-Riemann manifoldları ve

$$\mathcal{F} : (B, g) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

bir yarı-Riemann submersiyon olsun. T_E ve A_E anti-simetrik operatörler olsun. Buradan $X, Y, Z \in \Gamma(TB)$ için

$$g(T_X Y, Z) = -g(T_X Z, Y) \quad (2.4.3)$$

$$g(A_X Y, Z) = -g(A_X Z, Y) \quad (2.4.4)$$

dır (Gündüzalp, 2007).

Tanım 2.4.9 (B, g) ve $(\tilde{B}, \tilde{g})$ yarı-Riemann manifoldları ve

$$\mathcal{F} : (B, g) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

bir yarı-Riemann submersiyon olsun. Burada T temel tensör alanının sıfıra eşit olması durumunda $\mathcal{F}$ in herhangi bir lifine B nin total geodezik altmanifoldu denir (Falcitelli vd., 2004).

Bir yarı-Riemann submersiyon için dikey distribüsyonun her zaman integralenebilir olduğunu söyleyebiliriz. Yatay distribüsyon için ise aşağıdaki ifade geçerlidir.

Teorem 2.4.10 (B, g) ve $(\tilde{B}, \tilde{g})$ yarı-Riemann manifoldları ve

$$\mathcal{F} : (B, g) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

bir yarı-Riemann submersiyon olsun. (B, g) üzerindeki yatay distribüsyonu $\mathcal{H}$ olarak ifade edebiliriz. Burada $\mathcal{H}$ yatay distribüsyonun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $A = 0$ olmasıdır (O’neill, 1966).

Önerme 2.4.11 (B, g) ve $(\tilde{B}, \tilde{g})$ yarı-Riemann manifoldları ve

$$\mathcal{F} : (B, g) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

bir yarı-Riemann submersiyon olacak şekilde $\zeta, \eta \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)^\perp$ ve $Y, W \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ için;

$$(i) \nabla_Y W = T_Y W + \hat{\nabla}_Y W, \quad (\mathcal{V}\nabla_Y W = \hat{\nabla}_Y W)$$

$$(ii) \nabla_Y \zeta = T_Y \zeta + \mathcal{H}\nabla_Y \zeta,$$

$$(iii) \nabla_\zeta Y = A_\zeta Y + \mathcal{V}\nabla_\zeta Y,$$

$$(iv) \nabla_\zeta \eta = A_\zeta \eta + \mathcal{H}\nabla_\zeta \eta$$

dır. Buna ek olarak, ζ temel vektör alanı iken $[\zeta, Y]$ dikey vektör alanı olduğundan

$$\mathcal{H}\nabla_Y \zeta = \mathcal{H}\nabla_\zeta Y = A_\zeta Y \quad (2.4.5)$$

dır (O'Neill, 1966).

Tanım 2.4.12 $\{W_j\}_{1 \leq j \leq n}$, $\Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ uzayının bir yerel ortonormal çatısı olmak üzere herhangi bir lifin ortalama eğrilik vektör alanı

$$H = \frac{1}{n} \dot{I}_z(T) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n T_{W_j} W_j \quad (2.4.6)$$

şeklinde ifade edilir. Eğer $H = 0$ ise submersiyona minimal liflere sahip yarı-Riemann submersiyon denir (Şahin, 2012).

Tanım 2.4.13 (B, g) ve $(\tilde{B}, \tilde{g})$ yarı-Riemann manifoldları ve

$$\mathcal{F} : (B, g) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

bir yarı-Riemann submersiyon olsun. $\forall Z, \zeta \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ ve H liflerin ortalama eğrilik vektör alanı olmak üzere

$$T_Z \zeta = g(Z, \zeta) H \quad (2.4.7)$$

ile birlikte yarı-Riemann submersiyonda total umbilik lifler olarak adlandırılır (Şahin, 2013a).

Tanım 2.4.14 (B, g) ve $(\tilde{B}, \tilde{g})$ yarı-Riemann manifoldları ve

$$\mathcal{F} : (B, g) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

bir yarı-Riemann submersiyon olsun.

$$\acute{I}z \nabla \mathcal{F}_* = 0 \quad (2.4.8)$$

ise $\mathcal{F}$ e harmoniktir denir (Baird ve Wood, 2003).

Tanım 2.4.15 (B, g) ve $(\tilde{B}, \tilde{g})$ yarı-Riemann manifoldları ve

$$\mathcal{F} : (B, g) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

bir yarı-Riemann submersiyon olsun. $\forall \zeta, Z \in \Gamma(TB)$ için

$$(\nabla \mathcal{F}_*)(\zeta, Z) = 0 \quad (2.4.9)$$

ise $\mathcal{F}$ e total geodezik dönüşüm denir (Baird ve Wood, 2003).

Tanım 2.4.16 (B, g) ve $(\tilde{B}, \tilde{g})$ yarı-Riemann manifoldları ve

$$\mathcal{F} : (B, g) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

bir yarı-Riemann submersiyon olsun. (B, g) manifoldunun yatay distribüsyonu $\mathcal{H}$ ve $\chi^h(B)$ üzerinde $(1, 3)$ -mertebeli eğrilik tensör alanını R^* olarak kabul edelim. $\forall \zeta, Z, W \in \Gamma(\mathcal{H})$ ve $p \in B$ için

$$\acute{R}_{\mathcal{F}(p)}(\mathcal{F}_{*p}\zeta_p, \mathcal{F}_{*p}Z_p, \mathcal{F}_{*p}W_p)$$

tensörünün yatay lifti $R^*(\zeta, Z, W)$ olarak ifade edilir. $(\tilde{B}, \tilde{g})$ manifoldunun $\acute{R}$ yarı-Riemann eğriliği

$$\mathcal{F}_*(R^*(\zeta, Z, W)) = \acute{R}(\mathcal{F}_*\zeta, \mathcal{F}_*Z, \mathcal{F}_*W)$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca $\forall \zeta, Z, W, \acute{W} \in \Gamma(\mathcal{H})$ için

$$R^*(\zeta, Z, W, \acute{W}) = \acute{R}(\mathcal{F}_*\zeta, \mathcal{F}_*Z, \mathcal{F}_*W, \mathcal{F}_*\acute{W}) \circ \mathcal{F}$$

dır (Falcitelli vd., 2004).

Teorem 2.4.17 (B, g) ve $(\tilde{B}, \tilde{g})$ yarı-Riemann manifoldları ve

$$\mathcal{F} : (B, g) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

bir yarı-Riemann submersiyon olsun. R , $\hat{R}$ ve $\tilde{R}$ sırasıyla B , $\tilde{B}$ ve $(\mathcal{F}^{-1}(x), \hat{g}_x)$ lifinin Riemann eğrilik tensörleri olduğunu varsayalım. Bu durumda herhangi bir $\zeta, Z, W, \dot{W} \in \chi^v(B)$ ve $X, \xi, Y, \eta \in \chi^h(B)$ için

$$\begin{aligned} R(\zeta, Z, W, \dot{W}) &= \tilde{R}(\zeta, Z, W, \dot{W}) - g(T_\zeta W, T_Z \dot{W}) \\ &\quad + g(T_Z W, T_\zeta \dot{W}) \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

$$\begin{aligned} R(X, \xi, Y, \eta) &= R^*(X, \xi, Y, \eta) - 2g(A_X \xi, A_Y \eta) \\ &\quad + g(A_\xi Y, A_X \eta) - g(A_X Y, A_\xi \eta) \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

$$\begin{aligned} R(X, \zeta, \xi, Z) &= g((\nabla_X T)_\zeta Z, \xi) + g((\nabla_\zeta A)_X \xi, Z) \\ &\quad - g(T_\zeta X, T_Z \xi) + g(A_X \zeta, A_\xi Z) \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

dır (Gray, 1967; Baditoiu ve Ianuş, 2002).

Teorem 2.4.18 (B, g) ve $(\tilde{B}, \tilde{g})$ yarı-Riemann manifoldları ve

$$\mathcal{F} : (B, g) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

bir yarı-Riemann submersiyon olsun. K , K' ve $\hat{K}$ sırasıyla B , $\tilde{B}$ ve $(\mathcal{F}^{-1}(x), \hat{g}_x)$ lifinin kesit eğrilikleri olduğunu varsayalım. $\zeta, Z \in \chi^v(B)$ ve $Y, \eta \in \chi^h(B)$ ortogonal vektörler için

$$K(\zeta, Z) = \tilde{K}(\zeta, Z) + \|T_\zeta Z\|^2 - g(T_\zeta \zeta, T_Z Z) \quad (2.4.13)$$

$$K(Y, \zeta) = g((\nabla_Y T)_\zeta \zeta, Y) + \|A_Y \zeta\|^2 - \|T_\zeta Y\|^2 \quad (2.4.14)$$

$$K(Y, \eta) = K^*(Y, \eta) - 3\|A_Y \eta\|^2 \quad (2.4.15)$$

dır (Gray, 1967).

2.5 Neutral Slant Submersiyonlar

Tanım 2.5.1 (B, g, P) hemen hemen para-Hermityen manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

bir yarı-Riemann submersiyon olsun. $\forall W \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ için

$$PW = \phi W + \varpi W$$

dır. Burada, ϕW ve ϖW sırasıyla PW nın dikey ve yatay bileşenleridir. Ayrıca, $\forall \zeta \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)^\perp$ için

$$P\zeta = B\zeta + C\zeta$$

dır. Burada, $B\zeta$ ve $C\zeta$ sırasıyla $P\zeta$ nın dikey ve yatay bileşenleridir.

Eğer her space-like veya time-like vektör alanı $W \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ için $p \in B$ ($\forall p \in B$ ve her space-like veya time-like vektör alanı $W \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ seçiminden bağımsız) noktasında $\frac{g(\phi W, \phi W)}{g(PW, PW)}$ oranı sabit ise $\mathcal{F}$ slant submersiyon olarak adlandırılır. Burada oluşan φ sabit açısını da slant submersiyonun slant açısı olarak ifade ederiz. Ayrıca, $\varphi \neq 0$ ve $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ şartları sağlanıyor ise $\mathcal{F}$ e has slant submersiyon denir (Gündüzalp, 2021).

Tanım 2.5.2 (B, g, P) hemen hemen para-Hermityen manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

bir yarı-Riemann submersiyon olsun.

- (i) Tip-1: Her space-like (time-like) vektör alanı $W \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ için, ϕW time-like (space-like) olur ve $\frac{\|\phi W\|}{\|PW\|} > 1$ dir,
- (ii) Tip-2: Her space-like (time-like) vektör alanı $W \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ için, ϕW time-like (space-like) olur ve $\frac{\|\phi W\|}{\|PW\|} < 1$ dir,
- (iii) Tip-3: Her space-like (time-like) vektör alanı $W \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ için, ϕW space-like (time-like) olur (Gündüzalp, 2021).

Teorem 2.5.3 (B, g, P) hemen hemen para-Hermityen manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

bir yarı-Riemann submersiyon olsun.

(i) Her space-like (time-like) vektör alanı $W \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ için, ϕW time-like (space-like) olduğunda ve sabit bir $\gamma \in (1, \infty)$ aralığında $\mathcal{F}$, tip-1 slant submersiyon olur. Yani,

$$\phi^2 W = \gamma W$$

dır. Eğer $\mathcal{F}$, tip-1 has slant submersiyon ise $\varphi > 0$ için $\gamma = \cosh^2 \varphi$ dır.

(ii) Her space-like (time-like) vektör alanı $W \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ için, ϕW time-like (space-like) olduğunda ve sabit bir $\gamma \in (0, 1)$ aralığında $\mathcal{F}$, tip-2 slant submersiyon olur. Yani,

$$\phi^2 W = \gamma W$$

dır. Eğer $\mathcal{F}$, tip-2 has slant submersiyon ise $0 < \varphi < 2\pi$ için $\gamma = \cos^2 \varphi$ dır.

(iii) Her space-like (time-like) vektör alanı $W \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ için, ϕW space-like (time-like) olduğunda ve sabit bir $\gamma \in (-\infty, 0)$ aralığında $\mathcal{F}$, tip-3 slant submersiyon olur. Yani,

$$\phi^2 W = \gamma W$$

dır. Eğer $\mathcal{F}$, tip-3 has slant submersiyon ise $\varphi > 0$ için $\gamma = -\sinh^2 \varphi$ dır (Gündüzalp, 2021).

Teorem 2.5.4 (B, g, P) hemen hemen para-Hermityen manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

bir yarı-Riemann submersiyon olsun.

(i) Her space-like (time-like) vektör alanı $U, W \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ ve $\mathcal{F}$, tip-1 has slant submersiyon ise

$$g(\phi U, \phi W) = -\cosh^2 \varphi g(U, W) \quad (2.5.1)$$

$$g(\varpi U, \varpi W) = \sinh^2 \varphi g(U, W) \quad (2.5.2)$$

dır.

(ii) Her space-like (time-like) vektör alanı $U, W \in \Gamma(\zeta\mathcal{F}_*)$ ve $\mathcal{F}$, tip-2 has slant submersiyon ise

$$g(\phi U, \phi W) = -\cos^2 \varphi g(U, W) \quad (2.5.3)$$

$$g(\varpi U, \varpi W) = -\sin^2 \varphi g(U, W) \quad (2.5.4)$$

dır.

(iii) Her space-like (time-like) vektör alanı $U, W \in \Gamma(\zeta\mathcal{F}_*)$ ve $\mathcal{F}$, tip-3 has slant submersiyon ise

$$g(\phi U, \phi W) = \sinh^2 \varphi g(U, W) \quad (2.5.5)$$

$$g(\varpi U, \varpi W) = -\cosh^2 \varphi g(U, W) \quad (2.5.6)$$

dır (Gündüzalp, 2021).

Önerme 2.5.5 (B, g, P) hemen hemen para-Hermityen manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

bir yarı-Riemann submersiyon olsun. $\forall U, W \in \Gamma(\zeta\mathcal{F}_*)$ ve $X, Y \in \Gamma(\zeta\mathcal{F}_*)^\perp$ için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\hat{\nabla}_U \phi W + T_U \varpi W = \phi \hat{\nabla}_U W + B T_U W \quad (2.5.7)$$

$$T_U \phi W + \mathcal{H} \nabla_U \varpi W = \varpi \hat{\nabla}_U W + C T_U W \quad (2.5.8)$$

$$\mathcal{V} \nabla_X Y + A_X C Y = \phi A_X Y + B \mathcal{H} \nabla_X Y \quad (2.5.9)$$

$$A_X B Y + \mathcal{H} \nabla_X C Y = \varpi A_X Y + C \mathcal{H} \nabla_X Y \quad (2.5.10)$$

$$\hat{\nabla}_U B X + T_U C X = \phi T_U X + B \mathcal{H} \nabla_U X \quad (2.5.11)$$

$$T_U B X + \mathcal{H} \nabla_U C X = \varpi T_U X + C \mathcal{H} \nabla_U X \quad (2.5.12)$$

ayrıca gösterebiliriz ki

$$(\nabla_U \phi) W = \hat{\nabla}_U \phi W - \phi \hat{\nabla}_U W \quad (2.5.13)$$

$$(\nabla_U \varpi) W = \mathcal{H} \nabla_U \varpi W - \varpi \hat{\nabla}_U W \quad (2.5.14)$$

dir. $\forall U, W \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ için

$$\nabla\phi \equiv 0 \iff \mathcal{T}_U\varpi W = \mathcal{B}\mathcal{T}_U W \quad (2.5.15)$$

ve

$$\nabla\varpi \equiv 0 \iff \mathcal{T}_U\phi W = \mathcal{C}\mathcal{T}_U W \quad (2.5.16)$$

dir (Gündüzalp, 2021).



3. SEMI-SLANT YARI-RIEMANN SUBMERSİYONLAR

Bu bölümde hemen hemen para-Hermityen manifoldlardan yarı-Riemann manifoldlara semi-slant yarı-Riemann submersiyonlar tanıtılmakta ve tanımlanan bu semi-slant yarı-Riemann submersiyonlarda üç tip açı için aşikar olmayan örnekler inşa edilmektedir. Ardından iki altbölümden oluşan bu bölümde ilk olarak semi-slant yarı-Riemann submersiyonlarda total umbilik lifler incelenmektedir. İkinci altbölümde ise para-Kaehler uzay formundan yarı-Riemann manifoldlarına tanımlı olan semi-slant yarı-Riemann submersiyonların total uzay, baz uzay ve liflerin para-kesit eğriligi, Ricci eğriligi ve skaler eğriligi araştırılmaktadır.

Tanım 3.1 (B, g, P) bir hemen hemen para-Hermityen manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve $\mathcal{F} : B \rightarrow \tilde{B}$ bir yarı-Riemann submersiyon olsun. Eğer dikey distribüsyon P ye göre invaryant ise $\mathcal{F}$ e invaryant yarı-Riemann submersiyon denir:

$$P(\text{çek}\mathcal{F}_*) = \text{çek}\mathcal{F}_*.$$

Tanım 3.2 (B, g, P) bir hemen hemen para-Hermityen manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve $\mathcal{F} : B \rightarrow \tilde{B}$ bir yarı-Riemann submersiyonu

(i) $\text{çek}\mathcal{F}_* = D_1 \oplus D_2$,

(ii) D_1 distribüsyonu P altında invaryanttır yani $P(D_1) = D_1$,

(iii) D_2 distribüsyonu $\varphi \neq 0$ açısı ile slant distribüsyondur,

şartları sağlanacak şekilde $\text{çek}\mathcal{F}_*$ da iki ortogonal D_1 ve D_2 distribüsyonları varsa $\mathcal{F}$ e semi-slant yarı-Riemann submersiyon denir. Bu durumda φ açısına da semi-slant açı denir.

Şimdi $\mathbb{R}_n^{2n}$ de bir para-kompleks yapı tanımlandıktan sonra Teorem 2.5.3 ten faydalanarak has semi-slant yarı-Riemann submersiyonlar için örnekler verilecektir. $\mathbb{R}_n^{2n}$ de kartezyen koordinatları $(y_1, y_2, \dots, y_{2n})$, $i \in \{1, \dots, n\}$ olacak şekilde para-

kompleks yapı

$$P\left(\frac{\partial}{\partial y_{2i}}\right) = \frac{\partial}{\partial y_{2i-1}}, \quad P\left(\frac{\partial}{\partial y_{2i-1}}\right) = \frac{\partial}{\partial y_{2i}}$$

tanımlanır.

Örnek 3.3 $\mathcal{F} : \mathbb{R}_4^8 \rightarrow \mathbb{R}_2^4$

$$\mathcal{F}(y_1, \dots, y_8) = (y_4, y_2 \sinh \beta - y_3 \cosh \beta, y_7, y_8)$$

$\beta \neq 0$ olacak şekilde dönüşümü verilsin. $(\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_8})$ kanonik bazlarına bağlı $\mathbb{R}_4^8$ yarı-öklidyen uzayının işaretini $(-, +, -, +, -, +, -, +)$ ve $(\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_4})$ kanonik bazlarına bağlı $\mathbb{R}_2^4$ yarı-öklidyen uzayının işaretini $(+, -, -, +)$ şeklinde alalım. $\mathcal{F}_*$ türev dönüşümünün matrisi

$$\mathcal{F}_* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \beta & -\cosh \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned} \text{çek}\mathcal{F}_* &= Sp \left\{ \begin{array}{l} U_1 = \frac{\partial}{\partial y_1}, U_2 = \cosh \beta \frac{\partial}{\partial y_2} + \sinh \beta \frac{\partial}{\partial y_3}, \\ U_3 = \frac{\partial}{\partial y_5}, U_4 = \frac{\partial}{\partial y_6} \end{array} \right\} \\ (\text{çek}\mathcal{F}_*)^\perp &= Sp \left\{ \begin{array}{l} W_1 = \frac{\partial}{\partial y_4}, W_2 = \sinh \beta \frac{\partial}{\partial y_2} + \cosh \beta \frac{\partial}{\partial y_3}, \\ W_3 = \frac{\partial}{\partial y_7}, W_4 = \frac{\partial}{\partial y_8} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca not edelim ki U_1, U_3 time-like ve U_2, U_4 space-like vektör alanlarıdır. Dahası, $\text{rank}\mathcal{F}_*=4$ ve

$$\begin{aligned} g_{R_2^4}(\mathcal{F}_*W_1, \mathcal{F}_*W_1) &= g_{R_4^8}(W_1, W_1) = 1 \\ g_{R_2^4}(\mathcal{F}_*W_2, \mathcal{F}_*W_2) &= g_{R_4^8}(W_2, W_2) = -1 \\ g_{R_2^4}(\mathcal{F}_*W_3, \mathcal{F}_*W_3) &= g_{R_4^8}(W_3, W_3) = -1 \\ g_{R_2^4}(\mathcal{F}_*W_4, \mathcal{F}_*W_4) &= g_{R_4^8}(W_4, W_4) = 1 \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından $\mathcal{F}$ bir yarı-Riemann submersiyondur. Ayrıca D_1 invariant ve D_2 slant distribüsyonlarını geren vektörler

$$D_1 = \langle U_3, U_4 \rangle \quad \text{ve} \quad D_2 = \langle U_1, U_2 \rangle$$

dir.

$$PU_3 = P\left(\frac{\partial}{\partial y_5}\right) = \frac{\partial}{\partial y_6} = U_4$$

$$\cosh \varphi = \frac{g(PU_1, U_2)}{\|PU_1\| \|U_2\|} \quad \text{ve} \quad \cosh \varphi = \frac{g(PU_2, U_1)}{\|PU_2\| \|U_1\|}$$

doğrudan işlemler ile $\cosh \varphi = \cosh \beta$ olduğundan φ semi-slant açısı ile $\mathcal{F}$ bir has semi-slant yarı-Riemann submersiyondur.

Örnek 3.4 $\mathcal{F} : \mathbb{R}_4^8 \rightarrow \mathbb{R}_2^4$

$$\mathcal{F}(y_1, \dots, y_8) = (y_1 \sin \omega + y_3 \cos \omega, y_2 \sin \theta + y_4 \cos \theta, y_5, y_6)$$

$\omega \neq \theta \neq 0$ olacak şekilde dönüşümü verilsin. $(\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_8})$ kanonik bazlarına bağlı $\mathbb{R}_4^8$ yarı-öklidyen uzayının işaretini $(+, -, +, -, +, -, +, -)$ ve $(\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_4})$ kanonik bazlarına bağlı $\mathbb{R}_2^4$ yarı-öklidyen uzayının işaretini $(+, -, +, -)$ şeklinde alalım. $\mathcal{F}_*$ türev dönüşümünün matrisi

$$\mathcal{F}_* = \begin{bmatrix} \sin \omega & 0 & \cos \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dır. Buradan

$$\zeta \text{ek} \mathcal{F}_* = Sp \left\{ \begin{array}{l} U_1 = \cos \omega \frac{\partial}{\partial y_1} - \sin \omega \frac{\partial}{\partial y_3}, U_2 = -\cos \theta \frac{\partial}{\partial y_2} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y_4}, \\ U_3 = \frac{\partial}{\partial y_7}, U_4 = \frac{\partial}{\partial y_8} \end{array} \right\}$$

$$(\zeta \text{ek} \mathcal{F}_*)^\perp = Sp \left\{ \begin{array}{l} W_1 = \sin \omega \frac{\partial}{\partial y_1} + \cos \omega \frac{\partial}{\partial y_3}, W_2 = \sin \theta \frac{\partial}{\partial y_2} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial y_4}, \\ W_3 = \frac{\partial}{\partial y_5}, W_4 = \frac{\partial}{\partial y_6} \end{array} \right\}$$

elde edilir. Ayrıca not edelim ki U_1, U_3 space-like ve U_2, U_4 time-like vektör alanlarıdır. Dahası, $\text{rank} \mathcal{F}_* = 4$ ve

$$\begin{aligned} g_{R_2^4}(\mathcal{F}_* W_1, \mathcal{F}_* W_1) &= g_{R_4^8}(W_1, W_1) = 1 \\ g_{R_2^4}(\mathcal{F}_* W_2, \mathcal{F}_* W_2) &= g_{R_4^8}(W_2, W_2) = -1 \\ g_{R_2^4}(\mathcal{F}_* W_3, \mathcal{F}_* W_3) &= g_{R_4^8}(W_3, W_3) = 1 \\ g_{R_2^4}(\mathcal{F}_* W_4, \mathcal{F}_* W_4) &= g_{R_4^8}(W_4, W_4) = -1 \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından $\mathcal{F}$ bir yarı-Riemann submersiyondur. Ayrıca D_1 invariant ve D_2 slant distribüsyonlarını geren vektörler

$$D_1 = \langle U_3, U_4 \rangle \text{ ve } D_2 = \langle U_1, U_2 \rangle$$

dir.

$$PU_3 = P\left(\frac{\partial}{\partial y_7}\right) = \frac{\partial}{\partial y_8} = U_4$$

$$\cos \varphi = \frac{g(PU_1, U_2)}{\|PU_1\| \|U_2\|} \text{ ve } \cos \varphi = \frac{g(PU_2, U_1)}{\|PU_2\| \|U_1\|}$$

doğrudan işlemler ile $\varphi = (\omega - \theta)$ olduğundan φ semi-slant açısı ile $\mathcal{F}$ bir has semi-slant yarı-Riemann submersiyondur.

Örnek 3.5 $\mathcal{F} : \mathbb{R}_4^8 \rightarrow \mathbb{R}_3^4$

$$\mathcal{F}(y_1, \dots, y_8) = (y_2 \cosh \theta - y_3 \sinh \theta, y_4, y_5, y_6)$$

$\theta \neq 0$ olacak şekilde dönüşümü verilsin. $(\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_8})$ kanonik bazlarına bağlı $\mathbb{R}_4^8$ yarı-ökliden uzayının işaretini $(+, -, +, -, +, -, +, -)$ ve $(\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_4})$ kanonik bazlarına bağlı $\mathbb{R}_3^4$ yarı-ökliden uzayının işaretini $(-, -, +, -)$ şeklinde alalım. $\mathcal{F}_*$ türev dönüşümünün matrisi

$$\mathcal{F}_* = \begin{bmatrix} 0 & \cosh \theta & -\sinh \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dır. Buradan

$$\text{çek}\mathcal{F}_* = Sp \left\{ \begin{array}{l} U_1 = \sinh \theta \frac{\partial}{\partial y_2} + \cosh \theta \frac{\partial}{\partial y_3}, U_2 = \frac{\partial}{\partial y_1}, \\ U_3 = \frac{\partial}{\partial y_7}, U_4 = \frac{\partial}{\partial y_8} \end{array} \right\}$$

$$(\text{çek}\mathcal{F}_*)^\perp = Sp \left\{ \begin{array}{l} W_1 = \cosh \theta \frac{\partial}{\partial y_2} + \sinh \theta \frac{\partial}{\partial y_3}, W_2 = \frac{\partial}{\partial y_4}, \\ W_3 = \frac{\partial}{\partial y_5}, W_4 = \frac{\partial}{\partial y_6} \end{array} \right\}$$

elde edilir. Ayrıca not edelim ki U_1, U_3 space-like ve U_2, U_4 time-like vektör alanlarıdır. Dahası, $rank \mathcal{F}_* = 4$ ve

$$\begin{aligned} g_{R_3^4}(\mathcal{F}_* W_1, \mathcal{F}_* W_1) &= g_{R_4^8}(W_1, W_1) = -1 \\ g_{R_3^4}(\mathcal{F}_* W_2, \mathcal{F}_* W_2) &= g_{R_4^8}(W_2, W_2) = -1 \\ g_{R_3^4}(\mathcal{F}_* W_3, \mathcal{F}_* W_3) &= g_{R_4^8}(W_3, W_3) = 1 \\ g_{R_3^4}(\mathcal{F}_* W_4, \mathcal{F}_* W_4) &= g_{R_4^8}(W_4, W_4) = -1 \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından $\mathcal{F}$ bir yarı-Riemann submersiyondur. Ayrıca D_1 invaryant ve D_2 slant distribüsyonlarını geren vektörler

$$D_1 = \langle U_3, U_4 \rangle \text{ ve } D_2 = \langle U_1, U_2 \rangle$$

dır.

$$\begin{aligned} PU_3 &= P\left(\frac{\partial}{\partial y_7}\right) = \frac{\partial}{\partial y_8} = U_4 \\ \sinh \varphi &= \frac{g(PU_1, U_2)}{\|PU_1\| \|U_2\|} \text{ ve } \sinh \varphi = \frac{g(PU_2, U_1)}{\|PU_2\| \|U_1\|} \end{aligned}$$

doğrudan işlemler yapılarak Teorem 2.5.3 (iii) eşitliği kullanılırsa $\phi^2 = -\sinh^2 \theta I$ bulunur. Buradan φ semi-slant açısı ile $\mathcal{F}$ bir has semi-slant yarı-Riemann submersiyondur.

(B, g, P) bir hemen hemen para-Hermityen manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

bir has semi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. Her null olmayan vektör alanı $W \in \Gamma(\text{çek} \mathcal{F}_*)$ için

$$W = QW + \Psi W \tag{3.1}$$

dir. Burada, $QW \in \Gamma(D_1)$ ve $\Psi W \in \Gamma(D_2)$ dir.

$$PW = \phi W + \varpi W \tag{3.2}$$

için ϕW ve ϖW sırasıyla PW nın dikey ve yatay bileşenleridir. Ayrıca, her null olmayan vektör alanı $\zeta \in \Gamma(\text{çek} \mathcal{F}_*)^\perp$ için

$$P\zeta = B\zeta + C\zeta \tag{3.3}$$

dır. Burada, $B\zeta$ ve $C\zeta$ sırasıyla $P\zeta$ nın dikey ve yatay bileşenleridir. Bunlara ek olarak

$$(\zeta\mathcal{F}_*)^\perp = \varpi D_2 \oplus \mu \quad (3.4)$$

şeklinde yazılabilir. Burada μ , P ye göre $(\zeta\mathcal{F}_*)^\perp$ in invaryant distribüsyonudur.

(3.2), (3.3) ve (3.4) eşitlikleri kullanılarak aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 3.6 (B, g, P) bir hemen hemen para-Hermityen manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

bir has semi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. Buna göre aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

- (i) $\phi D_1 = D_1$ (iii) $\phi D_2 \subset D_2$
- (ii) $\varpi D_1 = 0$ (iv) $B((\zeta\mathcal{F}_*)^\perp) = D_2$.

(2.3.1), (3.2) ve (3.3) eşitlikleri kullanılarak aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 3.7 (B, g, P) bir hemen hemen para-Hermityen manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

bir has semi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. Buna göre aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

- (i) $\phi^2 + B\varpi = I$ (iii) $\phi B + BC = \{0\}$
- (ii) $C^2 + \varpi B = I$ (iv) $\varpi\phi + C\varpi = \{0\}$.

Şimdi, has semi-slant yarı-Riemann submersiyonda distribüsyonların integral-lenebilirliği incelenilecektir.

Teorem 3.8 (B, g, P) bir hemen hemen para-Hermityen manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

tip-1 veya tip-2 için bir has semi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. Her null olmayan vektör alanları $U, Z \in \Gamma(D_1)$ için D_1 distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart

$$\varpi(\hat{\nabla}_U Z - \hat{\nabla}_Z U) = C(T_Z U - T_U Z)$$

dır.

İspat. Her null olmayan vektör alanları $U, Z \in \Gamma(D_1)$, $\zeta \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)^\perp$ ve $[U, Z] \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ için Teorem 2.1.11 (iii), Önerme 2.4.11 (i), (3.2) ve (3.3) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} g(P[U, Z], \zeta) &= g(P(\nabla_U Z - \nabla_Z U), \zeta) \\ &= g(\phi \hat{\nabla}_U Z + \varpi \hat{\nabla}_U Z + BT_U Z + CT_U Z \\ &\quad - \phi \hat{\nabla}_Z U - \varpi \hat{\nabla}_Z U - BT_Z U - CT_Z U, \zeta) \\ &= g(\varpi \hat{\nabla}_U Z + CT_U Z - \varpi \hat{\nabla}_Z U - CT_Z U, \zeta) \end{aligned}$$

ispat tamamlanır.

Teorem 3.9 (B, g, P) bir hemen hemen para-Hermityen manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

tip-1 veya tip-2 için bir has semi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. Her null olmayan vektör alanları $U, Z \in \Gamma(D_2)$ için D_2 distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart

$$Q(\phi(\hat{\nabla}_U Z - \hat{\nabla}_Z U)) + B(\mathcal{T}_U Z - \mathcal{T}_Z U) = 0$$

dır.

İspat. Bu teoremin ispatı Teorem 3.7 nin ispatı ile benzer şekilde elde edilir.

Teorem 3.10 (B, g, P) bir para-Kaehler manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

tip-1 veya tip-2 için bir has semi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. Her null olmayan vektör alanları $U, Z \in \Gamma(D_2)$ için semi-slant D_2 distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart

$$P(\hat{\nabla}_U \phi Z - \hat{\nabla}_Z \phi U + T_U \varpi Z - T_Z \varpi U) = 0$$

dır.

İspat. Her null olmayan vektör alanları $U, Z \in \Gamma(D_2)$, $\zeta \in \Gamma(D_1)$ ve $[U, Z] \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ için Teorem 2.1.11 (iii), Önerme 2.4.11 (i), (ii), (3.2) ve (3.3) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} g(P[U, Z], \zeta) &= g(\nabla_U PZ - \nabla_Z PU, \zeta) \\ &= g(\hat{\nabla}_U \phi Z + T_U \phi Z + T_U \varpi Z + \mathcal{H} \nabla_U \varpi Z - \hat{\nabla}_Z \phi U \\ &\quad - T_Z \phi U - T_Z \varpi U - \mathcal{H} \nabla_Z \varpi U, \zeta) \\ &= g(\hat{\nabla}_U \phi Z + T_U \varpi Z - \hat{\nabla}_Z \phi U - T_Z \varpi U, \zeta) \end{aligned}$$

ispat tamamlanır.

Şimdi, has semi-slant yarı-Riemann submersiyonda dikey ve yatay distribüsyonların total geodezik olma durumları incelenilecektir.

Teorem 3.11 (B, g, P) bir para-Kaehler manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

tip-1 veya tip-2 için bir semi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. Her null olmayan vektör alanları $U, Z \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ için B de tanımlı dikey distribüsyonun total geodezik olması için gerek ve yeter şart

$$\varpi(\hat{\nabla}_U \phi Z + T_U \varpi Z) + C(T_U \phi Z + \mathcal{H} \nabla_U \varpi Z) = 0$$

dır.

İspat. Her null olmayan vektör alanları $U, Z \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ için (2.4.9), (2.3.1), Önerme 2.4.11 (i), (ii), (3.2) ve (3.3) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \nabla_U Z &= P \nabla_U P Z \\ &= P(\hat{\nabla}_U \phi Z + T_U \phi Z + T_U \varpi Z + \mathcal{H} \nabla_U \varpi Z) \\ &= \phi \hat{\nabla}_U \phi Z + \varpi \hat{\nabla}_U \phi Z + B T_U \phi Z + C T_U \phi Z + \phi T_U \varpi Z \\ &\quad + \varpi T_U \varpi Z + B \mathcal{H} \nabla_U \varpi Z + C \mathcal{H} \nabla_U \varpi Z \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\nabla_U Z \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*) \iff \varpi(\hat{\nabla}_U \phi Z + T_U \varpi Z) + C(T_U \phi Z + \mathcal{H} \nabla_U \varpi Z) = 0$$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 3.12 (B, g, P) bir para-Kaehler manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

tip-1 veya tip-2 için bir has semi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. Her null olmayan vektör alanları $U, Z \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)^\perp$ için B de tanımlı yatay distribüsyonun total geodezik olması için gerek ve yeter şart

$$\phi(\mathcal{V} \nabla_U B Z + A_U C Z) + B(A_U B Z + \mathcal{H} \nabla_U C Z) = 0$$

dır.

İspat. Bu teoremin ispatı Teorem 3.10 nun ispatı ile benzer şekilde elde edilir.

Teorem 3.13 (B, g, P) bir para-Kaehler manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

tip-1 veya tip-2 için bir has semi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. Her null olmayan vektör alanları $U, Z \in \Gamma(D_1)$ için D_1 distribüsyonun total geodezik olması için gerek ve yeter şart

$$\nabla_U Z \in \Gamma(D_1) \iff \Psi(\phi \hat{\nabla}_U \phi Z + BT_U \phi Z) = 0$$

ve

$$\varpi \hat{\nabla}_U \phi Z + CT_U \phi Z = 0$$

dır.

İspat. Her null olmayan vektör alanları $U, Z \in \Gamma(D_1)$ için (2.4.9), (2.3.1), Önerme 2.4.11 (i), (3.2) ve (3.3) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \nabla_U Z &= P \nabla_U PZ \\ &= P(\hat{\nabla}_U \phi Z + T_U \phi Z) \\ &= \phi \hat{\nabla}_U \phi Z + \varpi \hat{\nabla}_U \phi Z + BT_U \phi Z + CT_U \phi Z \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\nabla_U Z \in \Gamma(D_1) \iff \Psi(\phi \hat{\nabla}_U \phi Z + BT_U \phi Z) = 0$$

ve

$$\varpi \hat{\nabla}_U \phi Z + CT_U \phi Z = 0$$

şartları sağlandığından ispat tamamlanır.

Teorem 3.14 (B, g, P) bir para-Kaehler manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

tip-1 veya tip-2 için bir has semi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. Her null olmayan vektör alanları $U, Z \in \Gamma(D_2)$ için D_2 distribüsyonunun total geodezik olması için gerek ve yeter şart

$$Q(\phi(\hat{\nabla}_U \phi Z + T_U \varpi Z) + B(T_U \phi Z + \mathcal{H} \nabla_U \varpi Z)) = 0$$

ve

$$\varpi(\hat{\nabla}_U \phi Z + T_U \varpi Z) + C(T_U \phi Z + \mathcal{H} \nabla_U \varpi Z) = 0$$

dır.

İspat. Bu teoremin ispatı Teorem 3.12 nin ispatı ile benzer şekilde elde edilir.

Teorem 3.15 (B, g, P) bir para-Kaehler manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

tip-1 veya tip-2 için bir has semi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. Her null olmayan vektör alanları $U, Z \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ ve $\zeta \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)^\perp$ için $\mathcal{F}$ dönüşümünün total geodezik olması için gerek ve yeter şart

$$\varpi(\hat{\nabla}_U \phi Z + T_U \varpi Z) + C(T_U \phi Z + \mathcal{H} \nabla_U \varpi Z) = 0$$

ve

$$\varpi(\hat{\nabla}_U B\zeta + T_U C\zeta) + C(T_U B\zeta + \mathcal{H} \nabla_U C\zeta) = 0$$

dır.

İspat. Her null olmayan vektör alanları $Y, \zeta \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)^\perp$ için $\mathcal{F}$ bir yarı-Riemann submersiyon olduğundan (2.1.4) eşitliği kullanılarak

$$(\nabla \mathcal{F}_*)(Y, \zeta) = 0$$

dır. Her null olmayan vektör alanları $U, Z \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ için (2.1.4), (2.3.4) ve (3.2) eşitlikleri kullanılarak

$$(\nabla \mathcal{F}_*)(U, Z) = -\mathcal{F}_*(\nabla_U Z) = -\mathcal{F}_*(P \nabla_U (\phi Z + \varpi Z))$$

elde edilir. Ardından Önerme 2.4.11 (i), (ii), (3.2) ve (3.3) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} (\nabla \mathcal{F}_*)(U, Z) &= -\mathcal{F}_*(\phi \hat{\nabla}_U \phi Z + \varpi \hat{\nabla}_U \phi Z + BT_U \phi Z + CT_U \phi Z \\ &\quad + \phi T_U \varpi Z + \varpi T_U \varpi Z + B\mathcal{H}\nabla_U \varpi Z + C\mathcal{H}\nabla_U \varpi Z) \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan aşağıdaki koşul elde edilir.

$$(\nabla \mathcal{F}_*)(U, Z) = 0 \iff \varpi(\hat{\nabla}_U \phi Z + T_U \varpi Z) + C(T_U \phi Z + \mathcal{H}\nabla_U \varpi Z) = 0.$$

Her null olmayan vektör alanları $U \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ ve $\zeta \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)^\perp$ için tekrar (2.1.4), (2.3.4) ve (3.2) eşitlikleri kullanılarak

$$(\nabla \mathcal{F}_*)(U, \zeta) = -\mathcal{F}_*(\nabla_U \zeta) = -\mathcal{F}_*(P\nabla_U (B\zeta + C\zeta))$$

elde edilir. Ardından Önerme 2.4.11 (i), (ii), (3.2) ve (3.3) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} (\nabla \mathcal{F}_*)(U, \zeta) &= -\mathcal{F}_*(\phi \hat{\nabla}_U B\zeta + \varpi \hat{\nabla}_U B\zeta + BT_U B\zeta + CT_U B\zeta \\ &\quad + \phi T_U C\zeta + \varpi T_U C\zeta + B\mathcal{H}\nabla_U C\zeta + C\mathcal{H}\nabla_U C\zeta) \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan da aşağıdaki koşul elde edilir.

$$(\nabla \mathcal{F}_*)(U, \zeta) = 0 \iff \varpi(\hat{\nabla}_U B\zeta + T_U C\zeta) + C(T_U B\zeta + \mathcal{H}\nabla_U C\zeta) = 0.$$

Böylece ispat tamamlanır.

3.1 Semi-Slant Yarı-Riemann Submersiyonlarda Total Umbilik Lifler

Önerme 3.1.1 (B, g, P) para-Kaehler manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

dönüşümü total umbilik liflere sahip bir has semi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. O zaman

$$H \in \Gamma(\varpi D_2)$$

dır.

İspat. $\forall Z, \zeta \in \Gamma(D_1)$ ve $W \in \Gamma(\mu)$ için (2.3.5), Önerme (2.4.11) (i), (3.2) ve (3.3) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} P\nabla_Z \zeta &= \nabla_Z P\zeta = T_Z P\zeta + h\nabla_Z P\zeta \\ &= \phi \hat{\nabla}_Z \zeta + \varpi \hat{\nabla}_Z \zeta + BT_Z \zeta + CT_Z \zeta \end{aligned}$$

elde edilir. (2.5.16) eşitliği kullanılırsa

$$g(T_Z P\zeta, W) = g(CT_Z \zeta, W)$$

elde edilir. Daha sonra (2.4.7) eşitliğinden

$$g(Z, P\zeta)g(H, W) = g(Z, \zeta)g(H, PW)$$

bulunur. Buradan Z ve ζ nin rolleri değiştirildiğinde

$$g(\zeta, PZ)g(H, W) = g(\zeta, Z)g(H, PW)$$

olur. Şimdi bu eşitlikleri taraf tarafa toplarsak

$$g(\zeta, Z)g(H, PW) = 0$$

bulunur. $g(\zeta, Z) \neq 0$ olacağından $g(H, PW) = 0$ olur. Buradan $H \in \Gamma(\varpi D_2)$ olmalıdır.

3.2 Para-Kompleks Uzay Formundan Yarı-Riemann Manifolduna Semi-Slant Yarı-Riemann Submersiyonlar

Bu alt bölümde para-Kaehler uzay formundan yarı-Riemann manifoldlarına tanımlı olan semi-slant yarı-Riemann submersiyonun total uzay, baz uzay ve liflerin para-kesit eğriligi, Ricci eğriligi ve skaler eğriligi incelenilecektir. (B, g, P) bir para-Kaehler manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve $\mathcal{F} : B \rightarrow \tilde{B}$ bir semi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. $\forall q \in B$ için $T_q B$ uzayında invaryant bir M düzlemi alalım. Ayrıca M nin bir ortonormal bazı $\{U, PU\}$ olsun. $B, \tilde{B}$ ve $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(q))$ lifinin para-kesit eğriliklerini sırasıyla $K(M)$, $K_*(M)$ ve $\hat{K}(M)$ ile ifade edebiliriz. Buradan aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.1 (B, g, P) bir para-Kaehler manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

bir has semi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. Burada $\epsilon_U = g(U, U) \in \{-1, +1\}$, $\epsilon_{PU} = g(PU, PU) \in \{-1, +1\}$ dır.

(i) $M \subset (D_1)_q$ olması durumunda

$$K(M) = \hat{K}(M) + \epsilon_U \epsilon_{PU} \{-||T_{PU}U||^2 + ||T_UU||^2 + g(P[PU, U], T_UU)\}$$

ve

(ii) $M \subset (\mu)_q$ olması durumunda

$$K(M) = K_*(M) + 3||A_U PU||^2$$

dır.

İspat. (i) Her null olmayan vektör alanı $U \in \Gamma(D_1)$ için (2.1.9) ve (2.4.13) eşitliklerinden

$$K(U \wedge PU) = \hat{K}(U \wedge PU) - ||T_{PU}U||^2 + g(T_UU, T_{PU}PU)$$

bulunur. Daha sonra g yarı-Riemann metriği simetrik olup Önerme (2.4.11) (i), (2.3.5) ve Teorem 2.1.11 (i) eşitliklerinden

$$K(U \wedge PU) = \hat{K}(U \wedge PU) - ||T_{PU}U||^2 + g(P[PU, U] + P\nabla_U PU, T_UU)$$

bulunur. Ardından g yarı-Riemann metriğinin bilineerlik özelliği ve Önerme (2.4.11) (i) eşitliği kullanılırsa

$$K(M) = \hat{K}(M) + \epsilon_U \epsilon_{PU} \{-||T_{PU}U||^2 + ||T_UU||^2 + g(P[PU, U], T_UU)\}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

(ii) $U \in \mu$ için (2.1.9) ve (2.4.11) eşitliklerini kullanarak

$$\begin{aligned} K(U \wedge PU) &= K_*(U \wedge PU) - 2g(A_U PU, A_{PU}U) + g(A_{PU}PU, A_UU) \\ &\quad - g(A_U PU, A_{PU}U) \end{aligned}$$

elde edilir. A tensör alanı alterneleyen olduğundan $A_U U = -A_U U$ dan $2A_U U = 0$ olup son denklemde yazılırsa

$$K(M) = K_*(M) + 3||A_U P U||^2$$

elde edilir.

Teorem 3.2.2 $(B(v), g)$ bir para-Kaehler uzay formu, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B(v), g) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

tip-1 veya tip-2 için bir has semi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. Her null olmayan vektör alanları $W, Z, \zeta, Y \in \Gamma(D_1)$ için

$$\begin{aligned} \tilde{R}(W, Z, \zeta, Y) &= \frac{v}{4} \{g(W, \zeta)g(Z, Y) - g(W, Y)g(Z, \zeta) \\ &- g(W, P\zeta)g(Z, PY) + g(W, PY)g(Z, P\zeta) \\ &- 2g(W, PZ)g(\zeta, PY)\} \\ &+ g(T_W \zeta, T_Z Y) - g(T_Z \zeta, T_W Y) \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

ve

$$\begin{aligned} \tilde{K}(W, Z) &= \frac{v}{4} \{||W||^2 ||Z||^2 - g^2(W, Z) - 3g^2(W, PZ)\} \\ &+ g(T_W W, T_Z Z) + ||T_W Z||^2 \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

dir.

İspat. Her null olmayan vektör alanları $W, Z, \zeta, Y \in \Gamma(D_1)$ için (2.3.6) ve (2.4.10) eşitliklerini kullanarak

$$\begin{aligned} \tilde{R}(W, Z, \zeta, Y) &= \frac{v}{4} \{g(W, \zeta)g(Z, Y) - g(W, Y)g(Z, \zeta) \\ &- g(W, P\zeta)g(Z, PY) + g(W, PY)g(Z, P\zeta) \\ &- 2g(W, PZ)g(\zeta, PY)\} \\ &+ g(T_W \zeta, T_Z Y) - g(T_Z \zeta, T_W Y) \end{aligned}$$

(3.2.1) eşitliği elde edilir. Şimdi $\zeta = W$ ve $Y = Z$ kabul edilir ve (3.2.1) denkleminde yazılırsa

$$\begin{aligned}\tilde{K}(W, Z) &= \frac{v}{4}\{g(W, W)g(Z, Z) - g(W, Z)g(Z, W) \\ &\quad - g(W, PW)g(Z, PZ) + g(W, PZ)g(Z, PW) \\ &\quad - 2g(W, PZ)g(W, PZ)\} \\ &\quad + g(T_W W, T_Z Z) - g(T_Z W, T_W Z)\end{aligned}$$

bulunur. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}\tilde{K}(W, Z) &= \frac{v}{4}\{||W||^2||Z||^2 - g^2(W, Z) - 3g^2(W, PZ)\} \\ &\quad + g(T_W W, T_Z Z) + ||T_W Z||^2\end{aligned}$$

(3.2.2) eşitliği de elde edilir.

Teorem 3.2.3 $(B(v), g)$ bir para-Kaehler uzay formu, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B(v), g) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

tip-1 veya tip-2 için bir has semi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. $\mathcal{D}_1$ in total geodezik olması için $boy(D_1) = p$ olacak şekilde liflerin skaler eğriliği

$$\tilde{\sigma}_{D_1} = -\frac{v}{4}(p+2)p \quad (3.2.3)$$

dir.

İspat. Her null olmayan vektör alanları $W, Z \in \Gamma(D_1)$ ve $\{E_1, \dots, E_p\}, \Gamma(D_1)$ üzerinde time-like(space-like) ortonormal bazlar için (2.1.6) eşitliği kullanılarak

$$\tilde{S}_{D_1}(W, Z) = \sum_{i=1}^p \epsilon_i \tilde{R}(E_i, W, Z, E_i)$$

yazılır. Ardından (2.3.6) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{D_1}(W, Z) &= \sum_{i=1}^p \frac{v}{4}\{g(E_i, Z)g(W, E_i) - g(E_i, E_i)g(W, Z) \\ &\quad - g(E_i, PZ)g(W, PE_i) + g(E_i, PE_i)g(W, PZ) \\ &\quad - 2g(E_i, PW)g(Z, PE_i)\}\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli işlemleri yaptıktan sonra (2.3.1) eşitliği kullanılarak

$$\tilde{S}_{D_1}(W, Z) = -\frac{v}{4}(p+2)g(W, Z) \quad (3.2.4)$$

bulunur. Buradan (2.1.7) eşitliğinden

$$\tilde{\sigma}_{D_1} = -\frac{v}{4}(p+2)p$$

(3.2.3) elde edilir.

Sonuç 3.2.4 $(B(v), g)$ bir para-Kaehler uzay formu, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B(v), g) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

tip-1 veya tip-2 için bir has semi-slant açı olan φ ile birlikte bir has semi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. O halde total geodezik olma şartını sağlayan $\mathcal{D}_1$ distribüsyonu aynı zamanda Einstein manifoldudur.

İspat. (3.2.4) eşitliği kullanılarak

$$\tilde{S}_{D_1}(W, Z) = -\frac{v}{4}(p+2)g(W, Z)$$

dır. Burada Einstein manifoldu tanımı hatırlanırsa yani (2.1.8) eşitliğinden $\mathcal{D}_1$ total geodezik olduğunda $\mathcal{D}_1$ e Einstein manifoldu denir.

Teorem 3.2.5 $(B(v), g)$ bir para-Kaehler uzay formu, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B(v), g) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

tip-1 için bir has semi-slant açı olan φ ile birlikte bir has semi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. $\mathcal{D}_2$ nin total geodezik olması için $\text{boy}(D_2) = 2q$ olacak şekilde

$$\tilde{\sigma}_{D_2} = \frac{v}{2}(-1 - 2q + 3 \tanh^2 \varphi \sinh^2 \varphi) \quad (3.2.5)$$

dir.

İspat. $\{E_1, \dots, E_q\}$ space-like ve $E_{q+1} = \sec h\varphi \varpi E_1, E_{q+2} = \sec h\varphi \varpi E_2, \dots, E_{2q} = \sec h\varphi \varpi E_q$ time-like ortonormal bazları $\Gamma(D_2)$ üzerinde seçildiğinde ve her null olmayan vektör alanları $W, Z \in \Gamma(D_2)$ için

$$\tilde{S}_{D_2}(W, Z) = \sum_{i=1}^q \tilde{R}(E_i, W, Z, E_i) + \sum_{j=q+1}^{2q} \tilde{R}(\sec h\varphi \varpi E_j, W, Z, \sec h\varphi \varpi E_j)$$

yazılabilir. Buradan ilk toplam (3.2.4) eşitliğinden bulunur. Yani

$$\tilde{S}_{D_2}(W, Z) = -\frac{v}{4}(p+2)g(W, Z) + \sum_{j=q+1}^{2q} \tilde{R}(\sec h\varphi \varpi E_j, W, Z, \sec h\varphi \varpi E_j)$$

yazılabilir. Şimdi ikinci toplamda (2.3.6) eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{D_2}(W, Z) = & \sum_{i=1}^p \frac{v}{4} \{ g(\sec h\varphi \varpi E_j, Z)g(W, \sec h\varphi \varpi E_j) \\ & - g(\sec h\varphi \varpi E_j, \sec h\varphi \varpi E_j)g(W, Z) \\ & - g(\sec h\varphi \varpi E_j, PZ)g(W, P \sec h\varphi \varpi E_j) \\ & + g(\sec h\varphi \varpi E_j, P \sec h\varphi \varpi E_j)g(W, PZ) \\ & - 2g(\sec h\varphi \varpi E_j, PW)g(Z, P \sec h\varphi \varpi E_j) \} \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli işlemleri yapıldıktan sonra (3.2) ve (2.5.2) eşitlikleri kullanılırsa

$$\tilde{S}_{D_2}(W, Z) = \frac{v}{4}(-1 - 2q + 3 \tanh^2 \varphi \sinh^2 \varphi)g(W, Z) \quad (3.2.6)$$

bulunur. Buradan (2.1.7) eşitliğinden

$$\tilde{\sigma}_{D_2} = \frac{v}{2}(-1 - 2q + 3 \tanh^2 \varphi \sinh^2 \varphi)$$

(3.2.5) elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.2.6 $(B(v), g)$ bir para-Kaehler uzay formu, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B(v), g) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

tip-1 için bir has semi-slant açı olan φ ile birlikte bir has semi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. O halde total geodezik olma şartını sağlayan $\mathcal{D}_2$ distribüsyonu aynı zamanda Einstein manifoldudur.

İspat. (3.2.6) eşitliği kullanılsa

$$\tilde{S}_{D_2}(W, Z) = \frac{v}{4}(-1 - 2q + 3 \tanh^2 \varphi \sinh^2 \varphi)g(W, Z)$$

dır. Burada Einstein manifoldu tanımı hatırlanırsa yani (2.1.8) eşitliğinden $\mathcal{D}_2$ total geodezik olduğunda $\mathcal{D}_2$ ye Einstein manifoldu denir.



4. HEMI-SLANT YARI-RIEMANN SUBMERSİYONLAR

Bu bölümde hemen hemen para-Hermityen manifoldlardan yarı-Riemann manifoldlara hemi-slant yarı-Riemann submersiyonlar tanıtılmakta ve tanımlanan bu hemi-slant yarı-Riemann submersiyonlarda üç tip açı için aşikar olmayan örnekler inşa edilmektedir. Ardından iki altbölümden oluşan bu bölümde ilk olarak hemi-slant yarı-Riemann submersiyonlarda total umbilik lifler incelenmektedir. İkinci altbölümde ise para-Kaehler uzay formundan yarı-Riemann manifoldlarına tanımlı olan hemi-slant yarı-Riemann submersiyonların total uzay, baz uzay ve liflerin para-kesit eğriligi, Ricci eğriligi ve skaler eğriligi araştırılmaktadır.

Tanım 4.1 (B, g, P) bir hemen hemen para-Hermityen manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

yarı-Riemann submersiyonu $P(\text{çek}\mathcal{F}_*) \subseteq (\text{çek}\mathcal{F}_*)^\perp$ şartını sağlıyor ise bu dönüşüme anti-invariant yarı-Riemann submersiyon denir (Gündüzalp, 2013).

Tanım 4.2 (B, g, P) bir hemen hemen para-Hermityen manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve $\mathcal{F} : B \rightarrow \tilde{B}$ bir yarı-Riemann submersiyonu

- (i) $\text{çek}\mathcal{F}_* = D^\perp \oplus D^\varphi$,
- (ii) $D^\perp$ distribüsyonu anti-invarianttır,
- (iii) D^φ distribüsyonu slant distribüsyondur,

şartları sağlanacak şekilde $\text{çek}\mathcal{F}_*$ da iki ortogonal $D^\perp$ ve D^φ distribüsyon varsa $\mathcal{F}$ e hemi-slant yarı-Riemann submersiyon denir. Bu durumda φ açısına da hemi-slant açı denir. Ayrıca $D^\perp$ ve D^φ distribüsyonlarının boyutu sırasıyla m ve n ile gösterilirse bu durumda

- (i) $n = 0$ ise B bir anti-invariant yarı-Riemann submersiyondur.
- (ii) $m = 0$ ve $\varphi = 0$ ise B bir invariant yarı-Riemann submersiyondur.
- (iii) $m = 0$ ve $\varphi \neq 0, \frac{\pi}{2}$ ise B bir has slant yarı-Riemann submersiyondur.

Şimdi $\mathbb{R}_n^{2n}$ de bir para-kompleks yapı tanımlandıktan sonra Teorem 2.5.3 ten faydalanarak has hemi-slant yarı-Riemann submersiyonlar için örnekler verilecektir.

$\mathbb{R}_n^{2n}$ de kartezyen koordinatları $(y_1, y_2, \dots, y_{2n})$, $i \in \{1, \dots, n\}$ olacak şekilde para-kompleks yapı

$$P\left(\frac{\partial}{\partial y_{2i}}\right) = \frac{\partial}{\partial y_{2i-1}}, \quad P\left(\frac{\partial}{\partial y_{2i-1}}\right) = \frac{\partial}{\partial y_{2i}}$$

tanımlanır.

Örnek 4.3 $\mathcal{F} : \mathbb{R}_3^6 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$

$$\mathcal{F}(y_1, \dots, y_6) = (y_2 \sinh t - y_3 \cosh t, y_1 \sinh s - y_4 \cosh s, y_5), \quad t, s \in \mathbb{R}$$

dönüşümü verilsin. $(\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_6})$ kanonik bazlarına bağlı $\mathbb{R}_3^6$ yarı-öklidyen uzayının işaretini $(+, -, +, -, +, -)$ ve $(\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_3})$ kanonik bazlarına bağlı $\mathbb{R}_1^3$ yarı-öklidyen uzayının işaretini $(+, -, +)$ şeklinde alalım. $\mathcal{F}_*$ türev dönüşümünün matrisi

$$\mathcal{F}_* = \begin{bmatrix} 0 & \sinh t & -\cosh t & 0 & 0 & 0 \\ \sinh s & 0 & 0 & -\cosh s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned} \text{çek}\mathcal{F}_* &= Sp \left\{ \begin{aligned} U_1 &= \cosh t \frac{\partial}{\partial y_2} + \sinh t \frac{\partial}{\partial y_3}, U_2 = \cosh s \frac{\partial}{\partial y_1} + \sinh s \frac{\partial}{\partial y_4}, \\ U_3 &= \frac{\partial}{\partial y_5} \end{aligned} \right\} \\ (\text{çek}\mathcal{F}_*)^\perp &= Sp \left\{ \begin{aligned} W_1 &= \sinh t \frac{\partial}{\partial y_2} + \cosh t \frac{\partial}{\partial y_3}, W_2 = \sinh s \frac{\partial}{\partial y_1} + \cosh s \frac{\partial}{\partial y_4}, \\ W_3 &= \frac{\partial}{\partial y_5} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca not edelim ki U_1, U_3 time-like vektör alanları ve U_2 space-like vektör alanıdır. Dahası, $\text{rank}\mathcal{F}_* = 3$ ve

$$\begin{aligned} g_{R_1^3}(\mathcal{F}_*W_1, \mathcal{F}_*W_1) &= g_{R_4^8}(W_1, W_1) = 1 \\ g_{R_1^3}(\mathcal{F}_*W_2, \mathcal{F}_*W_2) &= g_{R_4^8}(W_2, W_2) = -1 \\ g_{R_1^3}(\mathcal{F}_*W_3, \mathcal{F}_*W_3) &= g_{R_4^8}(W_3, W_3) = 1 \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından $\mathcal{F}$ bir yarı-Riemann submersiyondur. Ayrıca $D^\perp$ anti-invariant ve D^φ slant distribüsyonları geren vektörler

$$D^\varphi = \langle U_1, U_2 \rangle \quad \text{ve} \quad D^\perp = \langle U_3 \rangle$$

dır.

$$PU_3 = P\left(\frac{\partial}{\partial y_6}\right) = \frac{\partial}{\partial y_5} = W_3$$

$$\cosh \varphi = \frac{g(PU_1, U_2)}{\|PU_1\| \|U_2\|} \quad \text{ve} \quad \cosh \varphi = \frac{g(PU_2, U_1)}{\|PU_2\| \|U_1\|}$$

doğrudan işlemler ve Teorem (2.5.3) (i) den $\phi^2 = \cosh^2(t-s)I$ olup φ hemi-slant açısı ile $\mathcal{F}$ bir has hemi-slant yarı-Riemann submersiyondur.

Örnek 4.4 $\mathcal{F} : \mathbb{R}_3^6 \rightarrow \mathbb{R}_2^3$

$$\mathcal{F}(y_1, \dots, y_6) = (y_1 \sin \alpha + y_3 \cos \alpha, y_2 \sin \beta + y_4 \cos \beta, y_6)$$

α ve β sabit olacak şekilde dönüşümü verilsin. $(\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_6})$ kanonik bazlarına bağlı $\mathbb{R}_3^6$ yarı-öklidyen uzayının işaretini $(+, -, +, -, +, -)$ ve $(\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_3})$ kanonik bazlarına bağlı $\mathbb{R}_2^3$ yarı-öklidyen uzayının işaretini $(+, -, -)$ şeklinde alalım. $\mathcal{F}_*$ türev dönüşümünün matrisi

$$\mathcal{F}_* = \begin{bmatrix} \sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \beta & 0 & \cos \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dir. Buradan

$$\text{çek}\mathcal{F}_* = Sp \left\{ \begin{array}{l} U_1 = \cos \alpha \frac{\partial}{\partial y_1} - \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y_3}, U_2 = \cos \beta \frac{\partial}{\partial y_2} - \sin \beta \frac{\partial}{\partial y_4}, \\ U_3 = \frac{\partial}{\partial y_5} \end{array} \right\}$$

$$(\text{çek}\mathcal{F}_*)^\perp = Sp \left\{ \begin{array}{l} W_1 = \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y_1} + \cos \alpha \frac{\partial}{\partial y_3}, W_2 = \sin \beta \frac{\partial}{\partial y_2} + \cos \beta \frac{\partial}{\partial y_4}, \\ W_3 = \frac{\partial}{\partial y_6} \end{array} \right\}$$

elde edilir. Ayrıca not edelim ki U_1, U_3 space-like vektör alanları ve U_2 time-like vektör alanıdır. Dahası, $\text{rank}\mathcal{F}_* = 3$ ve

$$\begin{aligned} g_{R_2^3}(\mathcal{F}_*W_1, \mathcal{F}_*W_1) &= g_{R_4^8}(W_1, W_1) = 1 \\ g_{R_2^3}(\mathcal{F}_*W_2, \mathcal{F}_*W_2) &= g_{R_4^8}(W_2, W_2) = -1 \\ g_{R_2^3}(\mathcal{F}_*W_3, \mathcal{F}_*W_3) &= g_{R_4^8}(W_3, W_3) = -1 \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından $\mathcal{F}$ bir yarı-Riemann submersiyondur. Ayrıca $D^\perp$ anti-invariant ve D^φ slant distribüsyonları geren vektörler

$$D^\varphi = \langle U_1, U_2 \rangle \quad \text{ve} \quad D^\perp = \langle U_3 \rangle$$

dır.

$$PU_3 = P\left(\frac{\partial}{\partial y_5}\right) = \frac{\partial}{\partial y_6} = W_3$$

$$\cos \varphi = \frac{g(PU_1, U_2)}{\|PU_1\| \|U_2\|} \text{ ve } \cos \varphi = \frac{g(PU_2, U_1)}{\|PU_2\| \|U_1\|}$$

doğrudan işlemler ve Teorem (2.5.3) (ii) den $\phi^2 = \cos^2(\alpha - \beta)I$ olup φ hemi-slant açısı ile $\mathcal{F}$ bir has hemi-slant yarı-Riemann submersiyondur.

Örnek 4.5 $\mathcal{F} : \mathbb{R}_3^6 \rightarrow \mathbb{R}_3^3$

$$\mathcal{F}(y_1, \dots, y_6) = (y_2 \cosh t - y_3 \sinh t, y_4, y_6)$$

$0 \neq t \in \mathbb{R}$ olacak şekilde dönüşümü verilsin. $(\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_6})$ kanonik bazlarına bağlı $\mathbb{R}_3^6$ yarı-öklidyen uzayının işaretini $(+, -, +, -, +, -)$ ve $(\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_3})$ kanonik bazlarına bağlı $\mathbb{R}_3^3$ yarı-öklidyen uzayının işaretini $(-, -, -)$ şeklinde alalım. $\mathcal{F}_*$ dönüşüm matrisi

$$\mathcal{F}_* = \begin{bmatrix} 0 & \cosh t & -\sinh t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dır. Buradan

$$\text{çek}\mathcal{F}_* = Sp \left\{ U_1 = \sinh t \frac{\partial}{\partial y_2} + \cosh t \frac{\partial}{\partial y_3}, U_2 = \frac{\partial}{\partial y_1}, U_3 = \frac{\partial}{\partial y_5} \right\}$$

$$(\text{çek}\mathcal{F}_*)^\perp = Sp \left\{ W_1 = \cosh t \frac{\partial}{\partial y_2} + \sinh t \frac{\partial}{\partial y_3}, W_2 = \frac{\partial}{\partial y_4}, W_3 = \frac{\partial}{\partial y_6} \right\}$$

elde edilir. Ayrıca not edelim ki U_1, U_2 space-like vektör alanları ve U_3 time-like vektör alanıdır. Dahası, $\text{rank}\mathcal{F}_* = 3$ ve

$$g_{R_3^3}(\mathcal{F}_*W_1, \mathcal{F}_*W_1) = g_{R_4^8}(W_1, W_1) = -1$$

$$g_{R_3^3}(\mathcal{F}_*W_2, \mathcal{F}_*W_2) = g_{R_4^8}(W_2, W_2) = -1$$

$$g_{R_3^3}(\mathcal{F}_*W_3, \mathcal{F}_*W_3) = g_{R_4^8}(W_3, W_3) = -1$$

eşitlikleri sağlandığından $\mathcal{F}$ bir yarı-Riemann submersiyondur. Ayrıca $D^\perp$ anti-invariant ve D^φ slant distribüsyonları geren vektörler

$$D^\varphi = \langle U_1, U_2 \rangle \text{ ve } D^\perp = \langle U_3 \rangle$$

$$PU_3 = P\left(\frac{\partial}{\partial y_5}\right) = \frac{\partial}{\partial y_6} = W_3$$

$$\sinh \varphi = \frac{g(PU_1, U_2)}{\|PU_1\| \|U_2\|} \quad \text{ve} \quad \sinh \varphi = \frac{g(PU_2, U_1)}{\|PU_2\| \|U_1\|}$$

doğrudan işlemler ve Teorem (2.5.3) (iii) den $\phi^2 = -\sinh^2 tI$ olup φ hemi-slant açısı ile $\mathcal{F}$ bir has hemi-slant yarı-Riemann submersiyondur.

(B, g, P) bir hemen hemen para-Hermityen manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

bir hemi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. Her null olmayan vektör alanı $W \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ için

$$W = QW + \Psi W \quad (4.1)$$

yazılabilir. Burada, $QW \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ ve $\Psi W \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)^\perp$ dir.

$$PW = \phi W + \varpi W \quad (4.2)$$

için ϕW ve ϖW sırasıyla PW nın dikey ve yatay bileşenleridir. Ayrıca, her null olmayan vektör alanı $\zeta \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)^\perp$ için

$$P\zeta = B\zeta + C\zeta \quad (4.3)$$

dır. Burada, $B\zeta$ ve $C\zeta$ sırasıyla $P\zeta$ nın dikey ve yatay bileşenleridir. Buna ek olarak $(\text{çek}\mathcal{F}_*)^\perp$

$$(\text{çek}\mathcal{F}_*)^\perp = \varpi D^\varphi \oplus PD^\perp \oplus \mu \quad (4.4)$$

şeklinde bir ayrışımaya sahiptir. Burada μ , P ye göre $(\text{çek}\mathcal{F}_*)^\perp$ in invaryant distribüsyonudur.

(4.2), (4.3) ve (4.4) eşitlikleri kullanılarak aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 4.6 (B, g, P) bir hemen hemen para-Hermityen manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

bir hemi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. Buna göre aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \phi D^\varphi &= W \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*) & \text{(iii)} \quad \phi D^\perp &= \{0\} \\ \text{(ii)} \quad B\varpi D^\varphi &= D^\varphi & \text{(iv)} \quad BPD^\perp &= D^\perp. \end{aligned}$$

(2.3.1), (3.2) ve (3.3) eşitlikleri kullanılarak aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 4.7 (B, g, P) bir hemen hemen para-Hermityen manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

bir hemi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. Buna göre aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \phi^2 + B\varpi &= I & \text{(iii)} \quad \phi B + BC &= \{0\} \\ \text{(ii)} \quad C^2 + \varpi B &= I & \text{(iv)} \quad \varpi\phi + C\varpi &= 0. \end{aligned}$$

Şimdi, has hemi-slant yarı-Riemann submersiyonda distribüsyonların integralenebilirliği incelenilecektir.

Teorem 4.8 (B, g, P) bir para-Kaehler manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

tip-1 için bir has hemi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. Her null olmayan vektör alanları $U, Z \in \Gamma(D^\varphi)$ ve $\zeta \in \Gamma(D^\perp)$ için D^φ slant distribüsyonun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart

$$g(\mathcal{H}\nabla_U \varpi Z - \mathcal{H}\nabla_Z \varpi U, P\zeta) = -g(T_U \varpi\phi Z - T_Z \varpi\phi U, \zeta)$$

dır.

İspat. Her null olmayan vektör alanları $U, Z \in \Gamma(D^\varphi)$ ve $\zeta \in \Gamma(D^\perp)$ için Teorem 2.1.12 (i), (2.3.2) ve (4.2) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} g([U, Z], \zeta) &= -g(\nabla_U \varpi Z, P\zeta) + g(\nabla_U P\phi Z, \zeta) \\ &\quad + g(\nabla_Z \varpi U, P\zeta) - g(\nabla_Z P\phi U, \zeta) \end{aligned}$$

bulunur. Daha sonra Önerme 2.4.15 (ii) ve Teorem 2.5.3 (i) kullanılarak

$$\begin{aligned} g([U, Z], \zeta) &= g(-\mathcal{H}\nabla_U \varpi Z + \mathcal{H}\nabla_Z \varpi U, P\zeta) \\ &\quad + \cosh^2 \varphi g([U, Z], \zeta) + g(T_U \varpi \phi Z - T_Z \varpi \phi U, \zeta) \end{aligned}$$

bulunur ve eşitlik düzenlenirse

$$\begin{aligned} \sinh^2 \varphi g([U, Z], \zeta) &= g(\mathcal{H}\nabla_U \varpi Z - \mathcal{H}\nabla_Z \varpi U, P\zeta) \\ &\quad - g(T_U \varpi \phi Z - T_Z \varpi \phi U, \zeta) \end{aligned}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.8 kullanılarak slant distribüsyonun integrallenebilir olması için aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.9 (B, g, P) bir para-Kaehler manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

tip-1 için bir has hemi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. Her null olmayan vektör alanları $U, Z \in \Gamma(D^\varphi)$ için has hemi-slant D^φ distribüsyonu

$$\mathcal{H}\nabla_U \varpi Z - \mathcal{H}\nabla_Z \varpi U \in \Gamma(\varpi D^\varphi \oplus \mu)$$

ve

$$T_U \varpi \phi Z - T_Z \varpi \phi U \in \Gamma(D^\varphi)$$

olduğu için integrallenebilirdir.

Teorem 4.10 (B, g, P) bir para-Kaehler manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

tip-1, 2, 3 için bir has hemi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. Bu durumda $D^\perp$ anti-invaryant distribüsyonu integrallenebilirdir.

İspat. Hatırlayalım ki B bir para-Kaehler manifold ise her null olmayan vektör alanları $U, Z \in \Gamma(TB)$; $\Phi(U, Z) = g(U, PZ)$ ile tanımlanan temel 2-form ve d dış türevi için $d\Phi = 0$ dır. Her null olmayan vektör alanları $U, Z \in \Gamma(D^\perp)$ ve $\zeta \in (\text{çek}\mathcal{F}_*)$ için

$$\begin{aligned} 0 &= 3d\Phi(\zeta, U, Z) = \zeta\Phi(U, Z) + U\Phi(Z, \zeta) + Z\Phi(\zeta, U) \\ &\quad - \Phi([\zeta, U], Z) - \Phi([U, Z], \zeta) - \Phi([Z, \zeta], U) \\ &= g(\phi[U, Z], \zeta). \end{aligned}$$

g bir yarı-Riemann metrik olduğundan $\phi[U, Z] = 0$ dır. Önerme 4.6(iii) den $[U, Z] \in D^\perp$ elde edilir ki bu $D^\perp$ dağılımının integrallenebilir olduğu anlamına gelir.

Sonuç 4.11 (B, g, P) bir hemen hemen para-Hermityen manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

tip-1, 2, 3 için bir has hemi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. Her null olmayan vektör alanları $Z, \zeta \in \Gamma(D^\perp)$ için

$$T_Z P\zeta = T_\zeta PZ \tag{4.5}$$

dir.

İspat. (2.5.7) denkleminde Önerme 4.6 (iii) uygulanırsa

$$T_Z \varpi \zeta = \phi(\hat{\nabla}_Z \zeta) + B T_\zeta Z \tag{4.6}$$

bulunur. Şimdi (4.6) denkleminde $Z = \zeta$ alınırsa

$$T_\zeta \varpi Z = \phi(\hat{\nabla}_\zeta Z) + BT_Z \zeta \quad (4.7)$$

olur. (4.6) ve (4.7) denklemleri birbirinden çıkarılırsa

$$T_Z \varpi \zeta - T_\zeta \varpi Z = \phi[Z, \zeta]$$

elde edilir. Teorem 4.10 ve Önerme 4.6(iii) kullanılırsa $\phi[Z, \zeta] = 0$ olduğu görülür. Buradan $Z \in \Gamma(D^\perp)$ için $\varpi Z = PZ$ olduğundan (4.5) ispatlanmış olur.

Şimdi, has hemi-slant yarı-Riemann submersiyonda dikey ve yatay distribüsyonların total geodezik olma durumları incelenilecektir.

Teorem 4.12 (B, g, P) bir para-Kaehler manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

tip-1 için bir has hemi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. Her null olmayan vektör alanları $Z, \zeta \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)^\perp$ ve $U \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ için B de tanımlı yatay distribüsyonun total geodezik olması için gerek ve yeter şart

$$g(A_Z \zeta, QU) = -\frac{1}{\cosh^2 \varphi} \{g(\mathcal{H} \nabla_Z \zeta, \varpi \phi QU) - g(\mathcal{A}_Z \mathcal{B} \zeta + \mathcal{H} \nabla_Z \mathcal{C} \zeta, \varpi U)\}$$

dır.

İspat. Her null olmayan vektör alanları $Z, \zeta \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)^\perp$ ve $U \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ için (4.1) eşitliğinden

$$g(\nabla_Z \zeta, U) = g(\nabla_Z \zeta, QU) + g(\nabla_Z \zeta, \Psi U)$$

elde edilir. (2.3.2) eşitliği kullanılırsa

$$g(\nabla_Z \zeta, U) = -g(\nabla_Z P \zeta, PQU) - g(\nabla_Z P \zeta, P \Psi U)$$

bulunur. (4.2) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_Z \zeta, U) &= -g(\nabla_Z P \zeta, \phi QU) - g(\nabla_Z P \zeta, \varpi QU) \\ &\quad - g(\nabla_Z P \zeta, P \Psi U) \end{aligned}$$

bulunur. Tekrar (4.2) ve (2.3.2) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_Z \zeta, U) &= g(\nabla_Z \zeta, \phi^2 QU) + g(\nabla_Z \zeta, \varpi \phi QU) \\ &\quad - g(\nabla_Z P\zeta, \varpi QU) - g(\nabla_Z P\zeta, P\Psi U) \end{aligned}$$

bulunur. Daha sonra Teorem 2.5.3 (i), Önerme 2.4.15 (iii), (iv) ve (4.3) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_Z \zeta, U) &= \cosh^2 \varphi g(A_Z \zeta, QU) + g(\mathcal{H} \nabla_Z \zeta, \varpi \phi QU) \\ &\quad - g(A_Z B\zeta, \varpi QU) - g(\mathcal{H} \nabla_Z C\zeta, \varpi QU) \\ &\quad - g(A_Z B\zeta, P\Psi U) - g(\mathcal{H} \nabla_Z C\zeta, P\Psi U) \end{aligned}$$

elde edilir. $\varpi U = \varpi QU + P\Psi U$ olduğundan

$$\begin{aligned} g(\nabla_Z \zeta, U) &= \cosh^2 \varphi g(A_Z \zeta, QU) + g(\mathcal{H} \nabla_Z \zeta, \varpi \phi QU) \\ &\quad - g(A_Z B\zeta, \varpi U) - g(\mathcal{H} \nabla_Z C\zeta, \varpi U) \end{aligned}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.13 (B, g, P) bir para-Kaehler manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

tip-1 için bir has hemi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. Her null olmayan vektör alanları $Z, \zeta \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ ve $\xi \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)^\perp$ için B de tanımlı dikey distribüsyonun total geodezik olması için gerek ve yeter şart

$$g(T_Z \zeta, \xi) = -\frac{1}{\cosh^2 \varphi} \{g(\mathcal{H} \nabla_Z \varpi \phi \zeta, \xi) - g(T_Z \varpi \zeta, B\xi) - g(\mathcal{H} \nabla_Z \varpi \zeta, C\xi)\}$$

dır.

İspat. Her null olmayan vektör alanları $Z, \zeta \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ ve $\xi \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)^\perp$ için (2.3.2) eşitliği kullanılırsa

$$g(\nabla_Z \zeta, \xi) = -g(\nabla_Z P\zeta, P\xi)$$

elde edilir. (4.2) eşitliği kullanılırsa

$$g(\nabla_Z \zeta, \xi) = -g(\nabla_Z \phi \zeta, P\xi) - g(\nabla_Z \varpi \zeta, P\xi)$$

bulunur. Tekrar (2.3.2), (4.2) ve (4.3) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_Z \zeta, \xi) &= g(\nabla_Z \phi^2 \zeta, \xi) + g(\nabla_Z \varpi \phi \zeta, \xi) \\ &\quad - g(\nabla_Z \varpi \zeta, B\xi) - g(\nabla_Z \varpi \zeta, C\xi) \end{aligned}$$

bulunur. Daha sonra Teorem 2.5.3 (i) ve Önerme 2.4.15 (ii) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_Z \zeta, \xi) &= \cosh^2 \varphi g(T_Z \zeta, \xi) + g(\mathcal{H} \nabla_Z \varpi \phi \zeta, \xi) + g(T_Z \varpi \phi \zeta, \xi) \\ &\quad - g(T_Z \varpi \zeta, B\xi) - g(\mathcal{H} \nabla_Z \varpi \zeta, B\xi) + g(T_Z \varpi \zeta, C\xi) \\ &\quad + g(\mathcal{H} \nabla_Z \varpi \zeta, C\xi) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan gerekli düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_Z \zeta, \xi) &= \cosh^2 \varphi g(T_Z \zeta, \xi) - g(\mathcal{H} \nabla_Z \varpi \phi \zeta, \xi) + g(T_Z \varpi \zeta, B\xi) \\ &\quad + g(\mathcal{H} \nabla_Z \varpi \zeta, C\xi) \end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi, has hemi-slant yarı-Riemann submersiyonda anti-invariant ve slant distribüsyonların total geodezik olma durumları incelenilecektir.

Teorem 4.14 (B, g, P) bir para-Kaehler manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

tip-1 için bir has hemi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. Her null olmayan vektör alanları $Z, \zeta \in \Gamma(D^\perp)$, $Y \in \Gamma(D^\varphi)$ ve $\xi \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)^\perp$ için $D^\perp$ anti-invariant distribüsyonun total geodezik olması için gerek ve yeter şart

$$g(\mathcal{H} \nabla_Z \varpi \zeta, \varpi Y) = g(T_Z \zeta, \varpi \phi Y) \quad (4.8)$$

ve

$$g(\varpi T_Z P \zeta, \xi) = g(\mathcal{H} \nabla_Z P \zeta, C\xi) \quad (4.9)$$

dır.

İspat. Anti-invariant distribüsyonun total geodezik olması için (2.4.10) eşitliğinin gösterilmesi yeterlidir. Her null olmayan vektör alanları $Z, \zeta \in \Gamma(D^\perp), Y \in \Gamma(D^\varphi)$ için (2.3.2) ve (4.2) eşitlikleri kullanılırsa

$$g(\nabla_Z \zeta, Y) = -g(\nabla_Z P\zeta, \phi Y) - g(\nabla_Z P\zeta, \varpi Y)$$

bulunur. Daha sonra Teorem 2.5.3 (i) ve Önerme 2.4.15 (ii) eşitlikleri kullanılırsa ve gerekli düzenlemeler ile

$$\begin{aligned} g(\nabla_Z \zeta, Y) &= \cosh^2 \varphi g(\nabla_Z \zeta, Y) + g(T_Z \zeta, \varpi \phi Y) - g(\mathcal{H} \nabla_Z \varpi \zeta, \varpi Y) \\ - \sinh^2 \varphi g(\nabla_Z \zeta, Y) &= -g(\mathcal{H} \nabla_Z \varpi \zeta, \varpi Y) + g(T_Z \zeta, \varpi \phi Y) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan (4.8) ispatlanmış olur.

Benzer şekilde her null olmayan vektör alanları $Z, \zeta \in \Gamma(D^\perp), \xi \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)^\perp$ için (2.3.2) ve (4.2) eşitlikleri kullanılırsa

$$g(\nabla_Z \zeta, \xi) = -g(\nabla_Z P\zeta, P\xi)$$

bulunur. Daha sonra Önerme 2.4.15(ii) ve (4.3) eşitlikleri kullanılırsa

$$g(\nabla_Z \zeta, \xi) = -g(T_Z P\zeta, B\xi) - g(\mathcal{H} \nabla_Z P\zeta, C\xi)$$

elde edilir. Buradan da (4.9) ispatlanmış olur.

Teorem 4.15 (B, g, P) bir para-Kaehler manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

tip-1 için bir has hemi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. Her null olmayan vektör alanları $Z, \zeta \in \Gamma(D^\varphi), Y \in \Gamma(D^\perp)$ ve $\xi \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)^\perp$ için D^φ has hemi-slant distribüsyonun total geodezik olması için gerek ve yeter şart

$$g(\mathcal{H} \nabla_Z \varpi \zeta, \varpi Y) = g(T_Z \varpi \phi \zeta, Y) \quad (4.10)$$

ve

$$g(\mathcal{H}\nabla_Z\varpi\phi\zeta, \xi) = g(T_Z\varpi\zeta, B\xi) + g(\mathcal{H}\nabla_Z\varpi\zeta, C\xi) \quad (4.11)$$

dır.

İspat. Has hemi-slant distribüsyonun total geodezik olması için (2.4.10) eşitliğinin gösterilmesi yeterlidir. Her null olmayan vektör alanları $Z, \zeta \in \Gamma(D^\varphi)$, $Y \in \Gamma(D^\perp)$ için (2.3.2) ve (4.2) den

$$g(\nabla_Z\zeta, Y) = -g(\nabla_Z\phi\zeta, PY) - g(\nabla_Z\varpi\zeta, PY)$$

bulunur. Daha sonra (2.3.2), Önerme 2.4.15 (ii) den

$$g(\nabla_Z\zeta, Y) = g(\nabla_ZP\phi\zeta, Y) - g(T_Z\varpi\zeta + \mathcal{H}\nabla_Z\varpi\zeta, PY)$$

bulunur. Daha sonra Teorem 2.5.3 (i) ve (4.2) den

$$-\sinh^2 \varphi g(\nabla_Z\zeta, Y) = g(T_Z\varpi\phi\zeta, PY) - g(\mathcal{H}\nabla_Z\varpi\zeta, PY)$$

elde edilir. Buradan (4.10) ispatlanmış olur. Benzer işlemler her null olmayan vektör alanları $Z, \zeta \in \Gamma(D^\varphi)$ ve $\xi \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)^\perp$ için yapılırsa

$$\begin{aligned} -\sinh^2 \varphi g(\nabla_Z\zeta, \xi) &= -g(T_Z\varpi\zeta, B\xi) - g(\mathcal{H}\nabla_Z\varpi\zeta, C\xi) \\ &\quad + g(\mathcal{H}\nabla_Z\varpi\phi\zeta, \xi) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da (4.11) ispatlanmış olur.

Son olarak bu bölümde has hemi-slant yarı-Riemann submersiyonun total geodezik olma durumu incelenilecektir.

Teorem 4.16 (B, g, P) bir para-Kaehler manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

tip-1 için bir has hemi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. Her null olmayan vektör alanları $Z, \zeta \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ ve $\xi, \eta \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)^\perp$ için $\mathcal{F}$ in total geodezik

olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} g(\mathcal{H}\nabla_Z\varpi\phi Q\zeta + \cosh^2\varphi T_ZQ\zeta, \xi) &= g(T_Z\varpi Q\zeta + P\Psi\xi, B\xi) \\ &+ g(\mathcal{H}\nabla_ZQ\zeta + \mathcal{H}\nabla_ZP\Psi\xi, C\xi) \end{aligned} \quad (4.12)$$

ve

$$\begin{aligned} g(\mathcal{H}\nabla_\eta\varpi\phi\zeta + \cosh^2\varphi A_\eta Q\zeta, \xi) &= g(A_\eta\varpi Q\zeta + A_\eta P\Psi\zeta, B\xi) \\ &+ g(\mathcal{H}\nabla_\eta\varpi Q\zeta + \mathcal{H}\nabla_\eta P\phi\zeta, C\xi) \end{aligned} \quad (4.13)$$

dır.

İspat. $\mathcal{F}$ in total geodezik olması için (2.4.10) eşitliğinin gösterilmesi yeterlidir. Her null olmayan vektör alanları $Z, \zeta \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ ve $\xi \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)^\perp$ için (2.3.2), (4.1) ve (4.2) eşitlikleri kullanılırsa

$$g(\nabla_Z\zeta, Y) = -g(\nabla_Z\phi Q\zeta, P\xi) - g(\nabla_Z\varpi Q\zeta, P\xi) - g(\nabla_ZP\Psi\zeta, P\xi)$$

bulunur. Daha sonra (2.3.2), Önerme 2.4.15 (ii) ve (4.3) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_Z\zeta, Y) &= g(\nabla_ZP\phi Q\zeta, \xi) - g(T_Z\varpi Q\zeta + \mathcal{H}\nabla_Z\varpi Q\zeta, B\xi + C\xi) \\ &- g(T_ZP\Psi\zeta + \mathcal{H}\nabla_ZP\Psi\zeta, P\xi) \end{aligned}$$

bulunur. Daha sonra Teorem 2.5.3 (i) ve (4.2) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_Z\zeta, Y) &= \cosh^2\varphi g(\nabla_ZQ\zeta, \xi) + g(\nabla_Z\varpi\phi Q\zeta, \xi) \\ &- g(T_Z\varpi Q\zeta + P\Psi\zeta, B\xi) - g(\mathcal{H}\nabla_Z\varpi Q\zeta + \mathcal{H}\nabla_ZP\Psi\zeta, C\xi) \end{aligned}$$

olur. Daha sonra Önerme 2.4.15 (i) ve Önerme 2.4.15(ii) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_Z\zeta, Y) &= g(\mathcal{H}\nabla_Z\varpi\phi Q\zeta + \cosh^2\varphi T_ZQ\zeta, \xi) \\ &- g(T_Z\varpi Q\zeta + P\Psi\zeta, B\xi) - g(\mathcal{H}\nabla_Z\varpi Q\zeta + \mathcal{H}\nabla_ZP\Psi\zeta, C\xi) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan (4.12) ispatlanmış olur. Her null olmayan vektör alanları $\zeta \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ ve $\xi, \eta \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)^\perp$ için benzer işlemler ile (4.13) de ispatlanır.

4.1 Hemi-Slant Yarı-Riemann Submersiyonlarda Total Umbilik Lifler

Teorem 4.1.1 (B, g, P) para-Kaehler manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

dönüşümü bir has hemi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. O zaman ya anti-invariant distribüsyon için $boy(D^\perp) = 1$ olmalı ya da $\forall \bar{q} \in B, \mathcal{F}^{-1}(\bar{q})$ için herhangi bir lifin ortalama eğrilik vektör alanı olan H ile $PD^\perp$ birbirine dik olmalıdır. Ayrıca ϕ nin paralel olması durumunda $H \in \mu$, ϖ nin paralel olması durumunda ise $T \equiv 0$ olur.

İspat. $\mathcal{F}$ dönüşümünün has hemi-slant yarı-Riemann submersiyon olması için ya $boy(D^\perp) = 1$ olmalı ya da $boy(D^\perp) > 1$ olmalıdır. $boy(D^\perp) = 1$ olması durumu aşıkardır. $\{Z, \zeta\}$ ortonormal olacak şekilde $\forall Z, \zeta \in \Gamma(D^\perp)$ için $boy(D^\perp) > 1$ olması durumunu inceleyelim. Buradan (2.3.4), Önerme (2.4.15) (i), (3.2) ve (3.3) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} P\nabla_Z \zeta &= \nabla_Z P\zeta = T_Z P\zeta + \mathcal{H}\nabla_Z P\zeta \\ &= \phi \hat{\nabla}_Z \zeta + \varpi \hat{\nabla}_Z \zeta + BT_Z \zeta + CT_Z \zeta \end{aligned}$$

olur ve eşitlik düzenlenirse

$$g(T_Z P\zeta, Z) = g(\phi \hat{\nabla}_Z \zeta, Z) + g(BT_Z \zeta, Z)$$

elde edilir. Daha sonra (2.3.2) eşitliğinden

$$g(T_Z P\zeta, Z) = -g(T_Z \zeta, PZ) \quad (4.1.1)$$

bulunur. (2.4.8) ve (4.1.1) den

$$\begin{aligned} g(H, P\zeta) &= g(T_Z Z, P\zeta) = -g(T_Z P\zeta, Z) = g(T_Z \zeta, PZ) \\ &= g(Z, \zeta)g(H, PZ) = 0 \end{aligned}$$

bulunur. $g(Z, \zeta) = 0$ olup, buradan

$$H \perp PD^\perp \quad (4.1.2)$$

olduğu görülür. Diğer bir yandan $\forall W_1 \in \Gamma(D^\varphi)$ için ϕ nin paralel olması durumunda (2.5.15) ve (2.3.2) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(H, \varpi W_1) &= g(T_Z Z, \varpi W_1) = -g(T_Z \varpi W_1, Z) = -g(\mathcal{B}T_Z \varpi W_1, Z) \\ &= -g(PT_Z \varpi W_1, Z) = g(T_Z \varpi W_1, PZ) = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$H \perp \varpi D^\varphi \quad (4.1.3)$$

olduğu görülür. (4.4) eşitliği göz önüne alınırsa (4.1.2) ve (4.1.3) eşitliklerinden $H \in \Gamma(\mu)$ olduğu kolayca görülür. Son olarak ϖ nın paralel olması durumunda $\forall Z \in \Gamma(D^\perp)$ ve $\xi \in \Gamma(\mu)$ için (2.5.16) ve (2.3.2) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(H, \xi) &= g(T_Z Z, \xi) = -g(PT_Z Z, P\xi) = -g(CT_Z Z, P\xi) \\ &= g(T_Z \phi Z, P\xi) = 0 \end{aligned}$$

bulunur. $\phi Z = 0$ olduğundan $H = 0$ olduğu ve minimal liflere sahip olduğu sonucu bulunur. Dahası lifler total umbilik olduğundan (2.4.8) eşitliğinden $T \equiv 0$ olduğu ifade edilir.

4.2 Para-Kompleks Uzay Formundan Yarı-Riemann Manifolduna Hemi-Slant Yarı-Riemann Submersiyonlar

Bu alt bölümde para-Kaehler uzay formundan yarı-Riemann manifoldlarına tanımlı olan has hemi-slant yarı-Riemann submersiyonun total uzay, baz uzay ve liflerin para-kesit eğriliği, Ricci eğriliği ve skaler eğriliği incelenilecektir.

Teorem 4.2.1 $(B(v), g)$ bir para-Kaehler uzay formu, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B(v), g) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

tip-1 veya tip-2 için bir has hemi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. Her space-like vektör alanları $W, Z, \zeta, Y \in \Gamma(D^\perp)$ için

$$\begin{aligned} \tilde{R}(W, Z, \zeta, Y) &= \frac{v}{4} \{g(W, \zeta)g(Z, Y) - g(W, Y)g(Z, \zeta)\} \\ &\quad + g(T_W \zeta, T_Z Y) - g(T_Z \zeta, T_W Y) \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

ve

$$\begin{aligned}\tilde{K}(W, Z) &= \frac{v}{4}\{\|W\|^2\|Z\|^2 - g^2(W, Z)\} \\ &- g(T_W W, T_Z Z) + \|T_W Z\|^2\end{aligned}\quad (4.2.2)$$

dır.

İspat. Her space-like vektör alanları $W, Z, \zeta, Y \in \Gamma(D^\perp)$ için (2.3.6) ve (2.4.11) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\tilde{R}(W, Z, \zeta, Y) &= \frac{v}{4}\{g(W, \zeta)g(Z, Y) - g(W, Y)g(Z, \zeta) \\ &- g(W, P\zeta)g(Z, PY) + g(W, PY)g(Z, P\zeta) \\ &- 2g(W, PZ)g(\zeta, PY)\} \\ &+ g(T_W \zeta, T_Z Y) - g(T_Z \zeta, T_W Y)\end{aligned}$$

elde edilir. $W \in \Gamma(D^\perp)$ için $PW \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)^\perp$ olup gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}\tilde{R}(W, Z, \zeta, Y) &= \frac{v}{4}\{g(W, \zeta)g(Z, Y) - g(W, Y)g(Z, \zeta)\} \\ &+ g(T_W \zeta, T_Z Y) - g(T_Z \zeta, T_W Y)\end{aligned}$$

(4.2.1) eşitliği elde edilir. Şimdi $\zeta = W$ ve $Y = Z$ alınır ve (4.2.1) eşitliğinde yazılırsa

$$\begin{aligned}\tilde{K}(W, Z) &= \frac{v}{4}\{g(W, W)g(Z, Z) - g(W, Z)g(Z, W) \\ &- g(W, PW)g(Z, PZ) + g(W, PZ)g(Z, PW) \\ &- 2g(W, PZ)g(W, PZ)\} \\ &+ g(T_W W, T_Z Z) - g(T_Z W, T_W Z)\end{aligned}$$

bulunur. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}\tilde{K}(W, Z) &= \frac{v}{4}\{\|W\|^2\|Z\|^2 - g^2(W, Z)\} \\ &- g(T_W W, T_Z Z) + \|T_W Z\|^2\end{aligned}$$

(4.2.2) eşitliği elde edilir.

Sonuç 4.2.2 $(B(v), g)$ bir para-Kaehler uzay formu, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B(v), g) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

tip-1 veya tip-2 için bir has hemi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. Eğer space-like vektör alanları $W, Z \in \Gamma(D^\perp)$ için $\{W, Z\}$ space-like ortonormal baz ise

$$\tilde{K}(W, Z) = -\frac{v}{4} - g(T_W W, T_Z Z) + \|T_W Z\|^2 \quad (4.2.3)$$

dır.

Sonuç 4.2.3 $(B(v), g)$ bir para-Kaehler uzay formu, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B(v), g) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

tip-1 veya tip-2 için $boy(B) > 2$ olacak şekilde bir has hemi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. O halde sabit kesit eğriliği $v = 0$ olmak üzere, eğer anti-invariant distribüsyon $D^\perp$ total geodezik ise B flattır.

Teorem 4.2.4 $(B(v), g)$ bir para-Kaehler uzay formu, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B(v), g) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

tip-1 veya tip-2 için bir has hemi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. Eğer $D^\perp$ total geodezik ise liflerin skaler eğriliği

$$\tilde{\sigma}^\perp = \frac{v}{4}(1-p)p \quad (4.2.4)$$

dır.

İspat. $\forall W, Z \in \Gamma(D^\perp)$ ve $\{E_1, \dots, E_p\}$, $\Gamma(D^\perp)$ üzerinde space-like ortonormal baz için (2.1.6) eşitliğini kullanarak

$$\tilde{S}^\perp(W, Z) = \sum_{i=1}^p \epsilon_i \tilde{R}(E_i, W, Z, E_i)$$

bulunur. Ardından (4.2.1) eşitliğini kullanarak

$$\tilde{S}^\perp(W, Z) = \sum_{i=1}^p \frac{v}{4} \{g(E_i, Z)g(W, E_i) - g(E_i, E_i)g(W, Z)\}$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapıldıktan sonra

$$\tilde{S}^\perp(W, Z) = \frac{v}{4}(1-p)g(W, Z) \quad (4.2.5)$$

bulunur. Buradan $i = 1, \dots, p$ olacak şekilde $W = Z = E_i$ alınıp ve (4.2.5) denkleminde uygulanır. Ardından (2.1.7) eşitliği kullanılırsa

$$\tilde{\sigma}^\perp = \frac{v}{4}(1-p)p$$

elde edilir.

Sonuç 4.2.5 $(B(v), g)$ bir para-Kaehler uzay formu, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B(v), g) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

tip-1 veya tip-2 için bir has hemi-slant açısı olan φ ile birlikte bir has hemi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. O halde total geodezik olma şartını sağlayan $\mathcal{D}^\perp$ distribüsyonu aynı zamanda Einstein manifoldudur.

İspat. (4.2.5) eşitliği kullanılırsa

$$\tilde{S}^\perp(W, Z) = \frac{v}{4}(1-p)g(W, Z)$$

dır. Burada Einstein manifoldu tanımı hatırlanırsa yani (2.1.8) eşitliği kullanılırsa $\mathcal{D}^\perp$ total geodezik olduğunda $\mathcal{D}^\perp$ e Einstein manifoldu denir.

Teorem 4.2.6 $(B(v), g)$ bir para-Kaehler uzay formu, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B(v), g) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

tip-1 için bir has hemi-slant açısı olan φ ile birlikte bir has hemi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. Her null olmayan vektör alanları $W, Z, \zeta, Y \in \Gamma(D^\varphi)$ için

$$\begin{aligned}\tilde{R}(W, Z, \zeta, Y) &= \frac{v}{4}\{g(W, \zeta)g(Z, Y) - g(W, Y)g(Z, \zeta) \\ &- g(W, P\zeta)g(Z, PY) + g(W, PY)g(Z, P\zeta) \\ &- 2g(W, PZ)g(\zeta, PY)\} \\ &+ g(T_W\zeta, T_ZY) - g(T_Z\zeta, T_WY)\end{aligned}\quad (4.2.6)$$

ve

$$\begin{aligned}\tilde{K}(W, Z) &= \frac{v}{4}\{||W||^2||Z||^2 - g^2(W, Z) + 3g^2(W, PZ)\} \\ &- g(T_WW, T_ZZ) + ||T_WZ||^2\end{aligned}\quad (4.2.7)$$

dır.

İspat. Her null olmayan vektör alanları $W, Z, \zeta, Y \in \Gamma(D^\perp)$ için (2.3.6) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\tilde{R}(W, Z, \zeta, Y) &= \frac{v}{4}\{g(W, \zeta)g(Z, Y) - g(W, Y)g(Z, \zeta) \\ &- g(W, P\zeta)g(Z, PY) + g(W, PY)g(Z, P\zeta) \\ &- 2g(W, PZ)g(\zeta, PY)\} \\ &+ g(T_W\zeta, T_ZY) - g(T_Z\zeta, T_WY)\end{aligned}$$

(4.2.6) eşitliği elde edilir. Şimdi $\zeta = W$ ve $Y = Z$ olsun. Ardından (4.2.6) eşitliğinde yazıldıktan sonra gerekli işlemlerle (4.2.7) eşitliği elde edilir.

Teorem 4.2.7 $(B(v), g)$ bir para-Kaehler uzay formu, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B(v), g) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

tip-1 için bir has hemi-slant açısı olan φ ile birlikte bir has hemi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. $\mathcal{D}^\varphi$ nin total geodezik olması için

$$\tilde{\sigma}^\varphi = \frac{v}{2}(-q - 2 + 3 \cosh^2 \varphi) \quad (4.2.8)$$

dır.

İspat. $\{E_1, \dots, E_q\}$ space-like ve $E_{q+1} = \sec h\varphi \varpi E_1, E_{q+2} = \sec h\varphi \varpi E_2, \dots, E_{2q} = \sec h\varphi \varpi E_q$ time-like ortonormal bazları $\Gamma(D^\varphi)$ üzerinde seçilir ve her null olmayan vektör alanları $W, Z \in \Gamma(D^\varphi)$ için

$$\tilde{S}^\varphi(W, Z) = \sum_{i=1}^q \tilde{R}(E_i, W, Z, E_i) + \sum_{j=q+1}^{2q} \tilde{R}(\sec h\varphi \varpi E_j, W, Z, \sec h\varphi \varpi E_j)$$

yazılır. Buradan ilk toplam (4.2.4) eşitliğinden bulunur. Yani

$$\tilde{S}^\varphi(W, Z) = \frac{v}{4}(1-p)g(W, Z) + \sum_{j=q+1}^{2q} \tilde{R}(\sec h\varphi \varpi E_j, W, Z, \sec h\varphi \varpi E_j)$$

yazılır. Şimdi ikinci toplamda (2.3.6) eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned} \tilde{S}^\varphi(W, Z) &= \sum_{i=1}^p \frac{v}{4} \{ g(\sec h\varphi \varpi E_j, Z)g(W, \sec h\varphi \varpi E_j) \\ &\quad - g(\sec h\varphi \varpi E_j, \sec h\varphi \varpi E_j)g(W, Z) \\ &\quad - g(\sec h\varphi \varpi E_j, PZ)g(W, P \sec h\varphi \varpi E_j) \\ &\quad + g(\sec h\varphi \varpi E_j, P \sec h\varphi \varpi E_j)g(W, PZ) \\ &\quad - 2g(\sec h\varphi \varpi E_j, PW)g(Z, P \sec h\varphi \varpi E_j) \} \end{aligned}$$

bulunur. Gerekli işlemleri yaptıktan sonra

$$\tilde{S}^\varphi(W, Z) = \frac{v}{4}(-q-2+3\cosh^2 \varphi)g(W, Z) \quad (4.2.9)$$

bulunur. Buradan (2.1.7) eşitliğinden

$$\tilde{\sigma}^\varphi = \frac{v}{2}(-q-2+3\cosh^2 \varphi)$$

(4.2.8) elde edilir.

Sonuç 4.2.8 $(B(v), g)$ bir para-Kaehler uzay formu, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B(v), g) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

tip-1 için bir has hemi-slant açısı olan φ ile birlikte bir has hemi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. O halde total geodezik olma şartını sağlayan D^φ distribüsyonu aynı zamanda Einstein manifoldudur.

İspat. (4.2.9) eşitliği kullanılırsa

$$\tilde{S}^\varphi(W, Z) = \frac{v}{4}(-q - 2 + 3 \cosh^2 \varphi)g(W, Z)$$

dır. Burada Einstein manifoldu tanımı hatırlanırsa yani (2.1.8) eşitliği kullanılırsa D^φ total geodezik olduğunda D^φ ye Einstein manifoldu denir.



5. BI-SLANT YARI-RIEMANN SUBMERSİYONLAR

Bu bölümde hemen hemen para-Hermityen manifoldlardan yarı-Riemann manifoldlara bi-slant yarı-Riemann submersiyonlar tanıtılmakta ve tanımlanan bu bi-slant yarı-Riemann submersiyonlarda üç tip açı için aşikar olmayan örnekler inşa edilmektedir. Ardından iki altbölümden oluşan bu bölümde ilk olarak bi-slant yarı-Riemann submersiyonlarda total umbilik lifler incelenmektedir. İkinci altbölümde ise bi-slant yarı-Riemann submersiyonlarda eğrilik ilişkileri araştırılmaktadır.

Tanım 5.1 (B, g, P) bir para-Kaehler manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve $\mathcal{F} : B \rightarrow \tilde{B}$ bir yarı-Riemann submersiyonu

- (i) $\text{çek}\mathcal{F}_* = D^{\varphi_1} \oplus D^{\varphi_2}$,
 - (ii) $D^{\varphi_1} \in (\text{çek}\mathcal{F}_*)$ ve $D^{\varphi_2} \in (\text{çek}\mathcal{F}_*)$ olacak şekilde slant distribüsyonlar vardır,
 - (iii) D^{φ_1} ve D^{φ_2} distribüsyonlarının slant açıları sırasıyla φ_1 ve φ_2 dir,
- şartları sağlanacak şekilde $\text{çek}\mathcal{F}_*$ da iki ortogonal D^{φ_1} ve D^{φ_2} distribüsyonları varsa $\mathcal{F}$ e bi-slant yarı-Riemann submersiyon denir.

Şimdi $\mathbb{R}_n^{2n}$ de bir para-kompleks yapı tanımlandıktan sonra Teorem 2.5.3 ten faydalanarak has bi-slant yarı-Riemann submersiyonlar için örnekler verilecektir. $\mathbb{R}_n^{2n}$ de kartezyen koordinatları $(y_1, y_2, \dots, y_{2n})$, $i \in \{1, \dots, n\}$ olacak şekilde para-kompleks yapı

$$P\left(\frac{\partial}{\partial y_{2i}}\right) = \frac{\partial}{\partial y_{2i-1}}, \quad P\left(\frac{\partial}{\partial y_{2i-1}}\right) = \frac{\partial}{\partial y_{2i}}$$

tanımlanır.

Örnek 5.2 $\mathcal{F} : \mathbb{R}_4^8 \rightarrow \mathbb{R}_2^4$

$$\mathcal{F}(y_1, \dots, y_8) = (y_2 \sinh \theta_1 - y_3 \cosh \theta_1, y_7, y_4 \cosh \theta_2 - y_5 \sinh \theta_2, y_8)$$

olacak şekilde dönüşümü verilsin. $(\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_8})$ kanonik bazlarına bağlı $\mathbb{R}_4^8$ yarı-öklidyen uzayının işaretini $(+, -, +, -, +, -, +, -)$ ve $(\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_4})$ kanonik bazlarına bağlı $\mathbb{R}_2^4$ yarı-öklidyen uzayının işaretlerini $(+, +, -, -)$ şeklinde alalım.

$\mathcal{F}_*$ türev dönüşümünün matrisi

$$\mathcal{F}_* = \begin{bmatrix} 0 & \sinh \theta_1 & -\cosh \theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cosh \theta_2 & -\sinh \theta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned} \text{çek}\mathcal{F}_* &= Sp \left\{ \begin{array}{l} U_1 = \cosh \theta_1 \frac{\partial}{\partial y_2} + \sinh \theta_1 \frac{\partial}{\partial y_3}, U_2 = \frac{\partial}{\partial y_1}, \\ U_3 = \sinh \theta_2 \frac{\partial}{\partial y_4} + \cosh \theta_2 \frac{\partial}{\partial y_5}, U_4 = \frac{\partial}{\partial y_6} \end{array} \right\} \\ (\text{çek}\mathcal{F}_*)^\perp &= Sp \left\{ \begin{array}{l} W_1 = \sinh \theta_1 \frac{\partial}{\partial y_2} + \cosh \theta_1 \frac{\partial}{\partial y_3}, W_2 = \frac{\partial}{\partial y_7}, \\ W_3 = \cosh \theta_2 \frac{\partial}{\partial y_4} + \sinh \theta_2 \frac{\partial}{\partial y_5}, W_4 = \frac{\partial}{\partial y_8} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca not edelim ki U_1, U_4 time-like vektör alanları ve U_2, U_3 space-like vektör alanlarıdır. Dahası, $\text{rank}\mathcal{F}_* = 4$ ve

$$\begin{aligned} g_{R_2^4}(\mathcal{F}_*W_1, \mathcal{F}_*W_1) &= g_{R_4^8}(W_1, W_1) = 1 \\ g_{R_2^4}(\mathcal{F}_*W_2, \mathcal{F}_*W_2) &= g_{R_4^8}(W_2, W_2) = 1 \\ g_{R_2^4}(\mathcal{F}_*W_3, \mathcal{F}_*W_3) &= g_{R_4^8}(W_3, W_3) = -1 \\ g_{R_2^4}(\mathcal{F}_*W_4, \mathcal{F}_*W_4) &= g_{R_4^8}(W_4, W_4) = -1 \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından $\mathcal{F}$ bir yarı-Riemann submersiyondur. Ayrıca D^{φ_1} ve D^{φ_2} slant distribüsyonlarını geren vektörler

$$D^{\varphi_1} = \langle U_1, U_2 \rangle \quad \text{ve} \quad D^{\varphi_2} = \langle U_3, U_4 \rangle$$

dır.

$$\cosh \varphi_1 = \frac{g(PU_1, U_2)}{\|PU_1\| \|U_2\|} \quad \text{ve} \quad \cosh \varphi_2 = \frac{g(PU_3, U_4)}{\|PU_3\| \|U_4\|}$$

doğrudan işlemler ile $\cosh \varphi_1 = \cosh \theta_1$ ve $\cosh \varphi_2 = \cosh \theta_2$ olduğundan θ_1 ve θ_2 bi-slant açıları ile $\mathcal{F}$ bir has bi-slant yarı-Riemann submersiyondur.

Örnek 5.3 $\mathcal{F} : \mathbb{R}_4^8 \rightarrow \mathbb{R}_2^4$

$$\mathcal{F}(y_1, \dots, y_8) = \left(\frac{y_1 - y_3}{\sqrt{2}}, y_4, \frac{\sqrt{3}y_5 - y_7}{2}, y_8 \right)$$

olacak şekilde dönüşümü verilsin. $(\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_8})$ kanonik bazlarına bağlı $\mathbb{R}_4^8$ yarı-öklidyen uzayının işaretini $(+, -, +, -, +, -, +, -)$ ve $(\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_4})$ kanonik bazlarına bağlı $\mathbb{R}_2^4$ yarı-öklidyen uzayının işaretlerini $(+, -, +, -)$ şeklinde alalım.

$\mathcal{F}_*$ türev dönüşümünün matrisi

$$\mathcal{F}_* = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned} \zeta \text{ek} \mathcal{F}_* &= Sp \left\{ \begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_3} \right), U_2 = \frac{\partial}{\partial y_2}, \\ U_3 &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} \frac{\partial}{\partial y_5} + \frac{\partial}{\partial y_7} \right), U_4 = \frac{\partial}{\partial y_6} \end{aligned} \right\} \\ (\zeta \text{ek} \mathcal{F}_*)^\perp &= Sp \left\{ \begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{\partial}{\partial y_3} \right), W_2 = \frac{\partial}{\partial y_4}, \\ W_3 &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} \frac{\partial}{\partial y_5} - \frac{\partial}{\partial y_7} \right), W_4 = \frac{\partial}{\partial y_8} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca not edelim ki U_1, U_3 space-like vektör alanları ve U_2, U_4 time-like vektör alanlarıdır. Dahası, $\text{rank} \mathcal{F}_* = 4$ ve

$$\begin{aligned} g_{R_2^4}(\mathcal{F}_* W_1, \mathcal{F}_* W_1) &= g_{R_4^8}(W_1, W_1) = 1 \\ g_{R_2^4}(\mathcal{F}_* W_2, \mathcal{F}_* W_2) &= g_{R_4^8}(W_2, W_2) = -1 \\ g_{R_2^4}(\mathcal{F}_* W_3, \mathcal{F}_* W_3) &= g_{R_4^8}(W_3, W_3) = 1 \\ g_{R_2^4}(\mathcal{F}_* W_4, \mathcal{F}_* W_4) &= g_{R_4^8}(W_4, W_4) = -1 \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından $\mathcal{F}$ bir yarı-Riemann submersiyondur. Ayrıca D^{φ_1} ve D^{φ_2} slant distribüsyonlarını veren vektörler

$$D^{\varphi_1} = \langle U_1, U_2 \rangle \text{ ve } D^{\varphi_2} = \langle U_3, U_4 \rangle$$

dır.

$$\cos \varphi_1 = \frac{g(PU_1, U_2)}{\|PU_1\| \|U_2\|} \text{ ve } \cos \varphi_2 = \frac{g(PU_3, U_4)}{\|PU_3\| \|U_4\|}$$

doğrudan işlemler ile $\cos \varphi_1 = \cos \left(\frac{\pi}{4} \right)$ ve $\cos \varphi_2 = \cos \left(\frac{\pi}{3} \right)$ olduğundan $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ ve $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$ bi-slant açıları ile $\mathcal{F}$ bir has bi-slant yarı-Riemann submersiyondur.

Örnek 5.4 $\mathcal{F} : \mathbb{R}_4^8 \rightarrow \mathbb{R}_2^4$

$$\mathcal{F}(y_1, \dots, y_8) = (y_2 \cosh \gamma_1 - y_3 \sinh \gamma_1, y_4, y_5 \cosh \gamma_2 - y_8 \sinh \gamma_2, y_7)$$

olacak şekilde dönüşümü verilsin. $(\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_8})$ kanonik bazlarına bağlı $\mathbb{R}_4^8$ yarı-öklidyen uzayının işaretini $(+, -, +, -, +, -, +, -)$ ve $(\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_4})$ kanonik bazlarına bağlı $\mathbb{R}_2^4$ yarı-öklidyen uzayının işaretlerini $(-, -, +, +)$ şeklinde alalım.

$\mathcal{F}_*$ dönüşüm matrisi

$$\mathcal{F}_* = \begin{bmatrix} 0 & \cosh \gamma_1 & -\sinh \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cosh \gamma_2 & 0 & 0 & -\sinh \gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} \text{çek}\mathcal{F}_* &= Sp \left\{ \begin{aligned} U_1 &= \sinh \gamma_1 \frac{\partial}{\partial y_2} + \cosh \gamma_1 \frac{\partial}{\partial y_3}, U_2 = \frac{\partial}{\partial y_1}, \\ U_3 &= \sinh \gamma_2 \frac{\partial}{\partial y_5} + \cosh \gamma_2 \frac{\partial}{\partial y_8}, U_4 = \frac{\partial}{\partial y_6} \end{aligned} \right\} \\ (\text{çek}\mathcal{F}_*)^\perp &= Sp \left\{ \begin{aligned} W_1 &= \cosh \gamma_1 \frac{\partial}{\partial y_2} + \sinh \gamma_1 \frac{\partial}{\partial y_3}, W_2 = \frac{\partial}{\partial y_4}, \\ W_3 &= \cosh \gamma_2 \frac{\partial}{\partial y_5} + \sinh \gamma_2 \frac{\partial}{\partial y_8}, W_4 = \frac{\partial}{\partial y_7} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca not edelim ki U_3, U_4 time-like ve U_1, U_2 space-like vektör alanlarıdır. Dahası, $\text{rank}\mathcal{F}_* = 4$ ve

$$\begin{aligned} g_{R_2^4}(\mathcal{F}_*W_1, \mathcal{F}_*W_1) &= g_{R_4^8}(W_1, W_1) = -1 \\ g_{R_2^4}(\mathcal{F}_*W_2, \mathcal{F}_*W_2) &= g_{R_4^8}(W_2, W_2) = -1 \\ g_{R_2^4}(\mathcal{F}_*W_3, \mathcal{F}_*W_3) &= g_{R_4^8}(W_3, W_3) = 1 \\ g_{R_2^4}(\mathcal{F}_*W_4, \mathcal{F}_*W_4) &= g_{R_4^8}(W_4, W_4) = 1 \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından $\mathcal{F}$ bir yarı-Riemann submersiyondur. Ayrıca D^{φ_1} ve D^{φ_2} slant distribüsyonlarını geren vektörler

$$D^{\varphi_1} = \langle U_1, U_2 \rangle \quad \text{ve} \quad D^{\varphi_2} = \langle U_3, U_4 \rangle$$

dır.

$$\sinh \varphi_1 = \frac{g(PU_1, U_2)}{\|PU_1\| \|U_2\|} \quad \text{ve} \quad \sinh \varphi_2 = \frac{g(PU_3, U_4)}{\|PU_3\| \|U_4\|}$$

doğrudan işlemler ile $\sinh \varphi_1 = \sinh \gamma_1$ ve $\sinh \varphi_2 = \sinh \gamma_2$ olduğundan γ_1 ve γ_2 bi-slant açıları ile $\mathcal{F}$ bir has bi-slant yarı-Riemann submersiyondur.

(B, g, P) bir hemen hemen para-Hermityen manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

bir has bi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. Her null olmayan vektör alanı $W \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ için

$$PW = \phi W + \varpi W \quad (5.1)$$

dır. Burada, ϕW ve ϖW sırasıyla PW nın dikey ve yatay bileşenleridir. Ayrıca, her null olmayan vektör alanı $\zeta \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)^\perp$ için

$$P\zeta = B\zeta + C\zeta \quad (5.2)$$

dır. Burada, $B\zeta$ ve $C\zeta$ sırasıyla $P\zeta$ nın dikey ve yatay bileşenleridir. Bunlara ek olarak

$$(\text{çek}\mathcal{F}_*)^\perp = \varpi D^{\varphi_1} \oplus \varpi D^{\varphi_2} \oplus \mu \quad (5.3)$$

şeklinde yazılabilir. Burada μ , P ye göre $(\text{çek}\mathcal{F}_*)^\perp$ in invaryant distribüsyonudur.

(5.1) ve (5.2) eşitlikleri kullanılarak aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 5.5 (B, g, P) bir hemen hemen para-Hermityen manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

bir has bi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. Buna göre aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

- (i) $\phi D^{\varphi_1} \subset D^{\varphi_1}$ (iii) $\phi D^{\varphi_2} \subset D^{\varphi_2}$
- (ii) $B\mu = \{0\}$ (iv) $C\mu = \mu$.

(2.3.1), (5.1) ve (5.2) eşitlikleri kullanılarak aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 5.6 (B, g, P) bir hemen hemen para-Hermityen manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

bir has bi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. Buna göre $Z \in D^{\varphi_1}$ ve $\zeta \in D^{\varphi_2}$ vektör alanları için aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \phi^2 Z + B\varpi Z &= Z & \text{(iii)} \quad \phi B + BC &= \{0\} \\ \text{(ii)} \quad C^2 \zeta + \varpi B \zeta &= \zeta & \text{(iv)} \quad \varpi \phi + C\varpi &= \{0\}. \end{aligned}$$

Şimdi, aşağıda elde edilen eşitlikler has bi-slant yarı-Riemann submersiyonlarda distribüsyonların integrallenebilirliği ve total geodezik olma durumlarını incelemek için kolaylık sağlayacaktır.

Lemma 5.7 (B, g, P) bir hemen hemen para-Hermityen manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

bir has bi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun.

Eğer $\mathcal{F}$, tip-1 bir has bi-slant yarı-Riemann submersiyon ise her null olmayan $U, W \in D^{\varphi_1}$ ve $Z, \zeta \in D^{\varphi_2}$ için

$$g(\nabla_U W, Z) = \csc h^2 \varphi_1 g(T_Z \varpi \phi W - T_{\phi Z} \varpi W - A_{\varpi Z} \varpi W, U) \quad (5.4)$$

$$g(\nabla_Z \zeta, U) = \csc h^2 \varphi_2 g(T_U \varpi \phi \zeta - T_{\phi U} \varpi \zeta - A_{\varpi U} \varpi \zeta, Z) \quad (5.5)$$

dır. Eğer $\mathcal{F}$, tip-2 bir has bi-slant yarı-Riemann submersiyon ise her null olmayan $U, W \in D^{\varphi_1}$ ve $Z, \zeta \in D^{\varphi_2}$ için

$$g(\nabla_U W, Z) = \csc^2 \varphi_1 g(T_Z \varpi \phi W - T_{\phi Z} \varpi W - A_{\varpi Z} \varpi W, U) \quad (5.6)$$

$$g(\nabla_Z \zeta, U) = \csc^2 \varphi_2 g(T_U \varpi \phi \zeta - T_{\phi U} \varpi \zeta - A_{\varpi U} \varpi \zeta, Z) \quad (5.7)$$

dır. Eğer $\mathcal{F}$, tip-3 bir has bi-slant yarı-Riemann submersiyon ise her null olmayan $U, W \in D^{\varphi_1}$ ve $Z, \zeta \in D^{\varphi_2}$ için

$$g(\nabla_U W, Z) = \sec h^2 \varphi_1 g(T_Z \varpi \phi W - T_{\phi Z} \varpi W - A_{\varpi Z} \varpi W, U) \quad (5.8)$$

$$g(\nabla_Z \zeta, U) = \sec h^2 \varphi_2 g(T_U \varpi \phi \zeta - T_{\phi U} \varpi \zeta - A_{\varpi U} \varpi \zeta, Z) \quad (5.9)$$

dır.

İspat. Her null olmayan $U, W \in D^{\varphi_1}$ ve $Z, \zeta \in D^{\varphi_2}$ için (2.3.2) ve (5.1) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_U W, Z) &= -g(\nabla_U P W, P Z) \\ &= -g(\nabla_U \phi W, P Z) - g(\nabla_U \varpi W, P Z) \end{aligned}$$

elde edilir. Tekrar (2.3.2) ve (5.1) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_U W, Z) &= g(\nabla_U \phi^2 W, Z) + g(\nabla_U \varpi \phi W, Z) \\ &\quad - g(\nabla_U \varpi W, \phi Z) - g(\nabla_U \varpi W, \varpi Z) \end{aligned}$$

bulunur. Daha sonra Teorem 2.5.3 (i) ve Önerme 2.4.11 (i), (ii) eşitlikleri kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_U W, Z) &= \cosh^2 \varphi g(\nabla_U W, Z) + g(T_U \varpi \phi W, Z) \\ &\quad - g(T_U \varpi W, \phi Z) - g(A_U \varpi W, \varpi Z) \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak (2.4.3) ve (2.4.4) eşitlikleri kullanılırsa

$$g(\nabla_U W, Z) = \csc h^2 \varphi_1 g(T_{\phi Z} \varpi W - T_Z \varpi \phi W + A_{\varpi Z} \varpi W, U)$$

(5.4) bulunur. Benzer şekilde (5.5) de elde edilir. Ayrıca tip-2 ve tip-3 için ifade edilen eşitlikler de benzer işlemler ile elde edilebilir.

Teorem 5.8 (B, g, P) bir para-Kaehler manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

tip-1 için bir has bi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. Her null olmayan vektör alanları $U, W \in (D^{\varphi_1})$ ve $Z \in \Gamma(D^{\varphi_2})$ için has bi-slant D^{φ_1} distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart

$$g(T_Z \varpi \phi W - T_{\phi Z} \varpi W - A_{\varpi Z} \varpi W, U) = g(T_Z \varpi \phi U - T_{\phi Z} \varpi U - A_{\varpi Z} \varpi U, W)$$

dır.

İspat. Her null olmayan vektör alanları $U, W \in (D^{\varphi_1})$ ve $Z \in \Gamma(D^{\varphi_2})$ için (5.4) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} g([U, W], Z) &= g(\nabla_U W, Z) - g(\nabla_W U, Z) \\ &= \csc h^2 \varphi_1 \left\{ \begin{aligned} &g(T_Z \varpi \phi W - T_{\phi Z} \varpi W - A_{\varpi Z} \varpi W, U) \\ &-g(T_Z \varpi \phi U - T_{\phi Z} \varpi U - A_{\varpi Z} \varpi U, W) \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

ispat elde edilir.

Teorem 5.9 (B, g, P) bir para-Kaehler manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

tip-1 için bir has bi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. Her null olmayan vektör alanları $U \in D^{\varphi_1}$ ve $Z, \zeta \in D^{\varphi_2}$ için has bi-slant D^{φ_2} distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart

$$g(T_U \varpi \phi \zeta - T_{\phi U} \varpi \zeta - A_{\varpi U} \varpi \zeta, Z) = g(T_U \varpi \phi Z - T_{\phi U} \varpi Z - A_{\varpi U} \varpi Z, \zeta)$$

dır.

İspat. Bu teoremin ispatı Teorem 5.8 in ispatı ile benzer şekilde elde edilir.

Teorem 5.10 (B, g, P) bir para-Kaehler manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

tip-1 için bir has bi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. Her null olmayan vektör alanları $U, W \in (D^{\varphi_1})$ ve $Z \in \Gamma(D^{\varphi_2})$ için has bi-slant D^{φ_1} distribüsyonunun total geodezik olması için gerek ve yeter şart

$$g(T_Z \varpi \phi W - T_{\phi Z} \varpi W - A_{\varpi Z} \varpi W, U) = 0 \quad (5.10)$$

dır.

İspat. Her null olmayan $U, W \in D^{\varphi_1}$ ve $Z \in D^{\varphi_2}$ için Önerme 2.4.11 (i) ve (5.4) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\hat{\nabla}_U W, Z) &= g(\nabla_U W, Z) \\ &= \csc h^2 \varphi_1 g(T_Z \varpi \phi W - T_{\phi Z} \varpi W - A_{\varpi Z} \varpi W, U) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan slant D^{φ_1} distribüsyonunun total geodezik olması için gerek ve yeter şart $\hat{\nabla}_U W \in D^{\varphi_1}$ olmasıdır.

Teorem 5.11 (B, g, P) bir para-Kaehler manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

tip-1 için bir has bi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. Her null olmayan vektör alanları $U \in (D^{\varphi_1})$ ve $Z, \zeta \in \Gamma(D^{\varphi_2})$ için has bi-slant D^{φ_2} distribüsyonunun total geodezik olması için gerek ve yeter şart

$$g(T_U \varpi \phi \zeta - T_{\phi U} \varpi \zeta - A_{\varpi U} \varpi \zeta, Z) = 0 \quad (5.11)$$

dır.

İspat. Bu teoremin ispatı Teorem 5.10 un ispatı ile benzer şekilde elde edilir.

Sonuç 5.12 (B, g, P) bir para-Kaehler manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve $\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$ dönüşümünün tip-1, 2 veya 3 için bir has bi-slant

yarı-Riemann submersiyon olsun. $B_{D^{\varphi_1}} \times B_{D^{\varphi_2}}$, $\text{çek}\mathcal{F}_*$ da bir yerel çarpım olması için gerek ve yeter şart D^{φ_1} ve D^{φ_2} distribüsyonlarının sırasıyla $B_{D^{\varphi_1}}$ ve $B_{D^{\varphi_2}}$ integral manifoldlarının (5.10) ve (5.11) denklemlerinde geçerli olmasıdır.

Teorem 5.13 (B, g, P) bir para-Kaehler manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

tip-1, 2 veya 3 için bir has bi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. Her null olmayan vektör alanları $Z, \zeta \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ için $(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ in total geodezik olması için gerek ve yeter şart

$$Cg(T_Z\phi\zeta + \mathcal{H}\nabla_Z\varpi\zeta) + \varpi g(\hat{\nabla}_Z\phi\zeta + T_Z\varpi\zeta) = 0 \quad (5.12)$$

dır.

İspat. Her null olmayan vektör alanları $Z, \zeta \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ için (2.3.1), Önerme 2.4.11 (i), (ii), (5.1) ve (5.2) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \nabla_Z\zeta &= P\nabla_ZP\zeta = P(\nabla_Z\phi\zeta + \nabla_Z\varpi\zeta) \\ &= P(T_Z\phi\zeta + \hat{\nabla}_Z\phi\zeta + T_Z\varpi\zeta + \mathcal{H}\nabla_Z\varpi\zeta) \\ &= BT_Z\phi\zeta + CT_Z\phi\zeta + \phi\hat{\nabla}_Z\phi\zeta + \varpi\hat{\nabla}_Z\phi\zeta \\ &\quad + \phi T_Z\varpi\zeta + \varpi T_Z\varpi\zeta + B\mathcal{H}\nabla_Z\varpi\zeta + C\mathcal{H}\nabla_Z\varpi\zeta \end{aligned}$$

bulunur. Burada $\text{çek}\mathcal{F}_*$ a ait kısımlar ayrılırsa (5.12) elde edilir.

Teorem 5.14 (B, g, P) bir para-Kaehler manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

tip-1, 2 veya 3 için bir has bi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. Her null olmayan vektör alanları $U, W \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)^\perp$ için $(\text{çek}\mathcal{F}_*)^\perp$ in total geodezik olması için gerek ve yeter şart

$$Bg(A_UBW + \mathcal{H}\nabla_UCW) + \phi g(\mathcal{A}_UCW + \mathcal{V}\nabla_UBW) = 0 \quad (5.13)$$

dır.

İspat. Bu teoremin ispatı Teorem 5.13 ün ispatı ile benzer şekilde elde edilir.

Sonuç 5.12 (B, g, P) bir para-Kaehler manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve $\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$ dönüşümünün tip-1, 2 veya 3 için bir has bi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. $B_{\text{çek}\mathcal{F}_*} \times B_{\text{çek}\mathcal{F}_*}^\perp$, $\text{çek}\mathcal{F}_*$ da bir yerel çarpım olması için gerek ve yeter şart $(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ ve $(\text{çek}\mathcal{F}_*)^\perp$ distribüsyonlarının sırasıyla $B_{\text{çek}\mathcal{F}_*}$ ve $B_{\text{çek}\mathcal{F}_*}$ integral maifoldlarının (5.12) ve (5.13) denklemlerinde geçerli olmasıdır.

5.1 Bi-Slant Yarı-Riemann Submersiyonlarda Eğrilik İlişkileri

Bu alt bölümde bir (B, g, P) para-Kaehler manifoldundan bir $(\tilde{B}, \tilde{g})$ yarı-Riemann manifolduna tanımlı olan bi-slant yarı-Riemann submersiyonun total uzay, baz uzay ve liflerin para-kesit eğriligi incelenilecektir. $B, \tilde{B}$ ve $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(x))$ lifinin para-kesit eğriliklerini sırasıyla $K(M)$, $K^*(M)$ ve $\tilde{K}(M)$ ile ifade edebiliriz.

Teorem 5.1.1 (B, g, P) bir para-Kaehler manifold, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve

$$\mathcal{F} : (B, g, P) \rightarrow (\tilde{B}, \tilde{g})$$

tip-1 veya tip-2 için bir has bi-slant yarı-Riemann submersiyon olsun. Her null olmayan vektör alanları $Z_1, Z_2 \in (\text{çek}\mathcal{F}_*)$ ve $\zeta_1, \zeta_2 \in (\text{çek}\mathcal{F}_*)^\perp$ için

$$K(Z_1, Z_2) = \epsilon_{Z_1} \epsilon_{Z_2} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{K}(\phi Z_1, \phi Z_2) \|\phi Z_1\|^{-2} \|\phi Z_2\|^{-2} \\ + K^*(\varpi Z_1, \varpi Z_2) \|\varpi Z_1\|^{-2} \|\varpi Z_2\|^{-2} \\ - g(T_{\phi Z_1} \phi Z_1, T_{\phi Z_2} \phi Z_2) + \|T_{\phi Z_1} \phi Z_2\|^2 \\ - 3 \|A_{\varpi Z_1} \varpi Z_2\|^2 + g((\nabla_{\varpi Z_2} T)_{\phi Z_1} \phi Z_1, \varpi Z_2) \\ + \|A_{\varpi Z_2} \phi Z_1\|^2 - \|T_{\phi Z_1} \varpi Z_2\|^2 \\ + g((\nabla_{\varpi Z_1} T)_{\phi Z_2} \phi Z_2, \varpi Z_1) + \|A_{\varpi Z_1} \phi Z_2\|^2 \\ - \|T_{\phi Z_2} \varpi Z_1\|^2 \end{array} \right\} \quad (5.1.1)$$

$$K(Z_1, \zeta_1) = \epsilon_{Z_1} \epsilon_{\zeta_1} \left\{ \begin{aligned} & \tilde{K}(\phi Z_1, B\zeta_1) \|\phi Z_1\|^{-2} \|B\zeta_1\|^{-2} \\ & + K^*(\varpi Z_1, C\zeta_1) \|\varpi Z_1\|^{-2} \|C\zeta_1\|^{-2} \\ & - g(T_{\phi Z_1} \phi Z_1, T_{B\zeta_1} B\zeta_1) + \|T_{\phi Z_1} B\zeta_1\|^2 \\ & - 3 \|A_{\varpi Z_1} C\zeta_1\|^2 + g((\nabla_{C\zeta_1} T)_{\phi Z_1} \phi Z_1, C\zeta_1) \\ & + \|A_{C\zeta_1} \phi Z_1\|^2 - \|T_{\phi Z_1} C\zeta_1\|^2 \\ & + g((\nabla_{\varpi Z_1} T)_{B\zeta_1} B\zeta_1, \varpi Z_1) + \|A_{\varpi Z_1} B\zeta_1\|^2 \\ & - \|T_{B\zeta_1} \varpi Z_1\|^2 \end{aligned} \right\} \quad (5.1.2)$$

$$K(\zeta_1, \zeta_2) = \epsilon_{\zeta_1} \epsilon_{\zeta_2} \left\{ \begin{aligned} & \tilde{K}(B\zeta_1, B\zeta_2) \|B\zeta_1\|^{-2} \|B\zeta_2\|^{-2} \\ & + K^*(C\zeta_1, C\zeta_2) \|C\zeta_1\|^{-2} \|C\zeta_2\|^{-2} \\ & - g(T_{B\zeta_1} B\zeta_1, T_{B\zeta_2} B\zeta_2) + \|T_{B\zeta_1} B\zeta_2\|^2 \\ & - 3 \|A_{C\zeta_1} C\zeta_2\|^2 + g((\nabla_{C\zeta_2} T)_{B\zeta_1} B\zeta_1, C\zeta_2) \\ & + \|A_{C\zeta_2} B\zeta_1\|^2 - \|T_{B\zeta_1} C\zeta_2\|^2 \\ & + g((\nabla_{C\zeta_1} T)_{B\zeta_2} B\zeta_2, C\zeta_1) + \|A_{C\zeta_1} B\zeta_2\|^2 \\ & - \|T_{B\zeta_2} C\zeta_1\|^2 \end{aligned} \right\} \quad (5.1.3)$$

dır. Burada $\epsilon_{Z_1} = g(Z_1, Z_1) \in \{\pm 1\}$, $\epsilon_{Z_2} = g(Z_2, Z_2) \in \{\pm 1\}$, $\epsilon_{\zeta_1} = g(\zeta_1, \zeta_1) \in \{\pm 1\}$, $\epsilon_{\zeta_2} = g(\zeta_2, \zeta_2) \in \{\pm 1\}$ dir.

İspat. Her null olmayan ortonormal vektör alanları $Z_1, Z_2 \in (\text{çek}\mathcal{F}_*)$ ve $\zeta_1, \zeta_2 \in (\text{çek}\mathcal{F}_*)^\perp$ için $K(Z_1, Z_2) = K(PZ_1, PZ_2)$ eşitliği için (5.1) ve (5.2) kullanılırsa

$$\begin{aligned} K(Z_1, Z_2) &= K(PZ_1, PZ_2) = K(\phi Z_1, \phi Z_2) + K(\phi Z_1, \varpi Z_2) \\ &\quad + K(\varpi Z_1, \phi Z_2) + K(\varpi Z_1, \varpi Z_2) \end{aligned}$$

bulunur. Kesit eğriliğinin tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} K(Z_1, Z_2) &= R(\phi Z_1, \phi Z_2, \phi Z_2, \phi Z_1) + R(\phi Z_1, \varpi Z_2, \varpi Z_2, \phi Z_1) \\ &\quad + R(\varpi Z_1, \phi Z_2, \phi Z_2, \varpi Z_1) + R(\varpi Z_1, \varpi Z_2, \varpi Z_2, \varpi Z_1) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada (2.4.10), (2.4.11) ve (2.4.12) eşitlikleri kullanılırsa

$$K(Z_1, Z_2) = \epsilon_{Z_1} \epsilon_{Z_2} \left\{ \begin{aligned} & \tilde{R}(\phi Z_1, \phi Z_2, \phi Z_2, \phi Z_1) - g(T_{\phi Z_1} \phi Z_1, T_{\phi Z_2} \phi Z_2) \\ & + \|T_{\phi Z_1} \phi Z_2\|^2 + g((\nabla_{\varpi Z_2} T)_{\phi Z_1} \phi Z_1, \varpi Z_2) \\ & + \|A_{\varpi Z_2} \phi Z_1\|^2 - \|T_{\phi Z_1} \varpi Z_2\|^2 \\ & + g((\nabla_{\varpi Z_1} T)_{\phi Z_2} \phi Z_2, \varpi Z_1) + \|A_{\varpi Z_1} \phi Z_2\|^2 \\ & - \|T_{\phi Z_2} \varpi Z_1\|^2 + R^*(\varpi Z_1, \varpi Z_2, \varpi Z_2, \varpi Z_1) \\ & - 3 \|A_{\varpi Z_1} \varpi Z_2\|^2 \end{aligned} \right\}$$

bulunur. Şimdi

$$\tilde{R}(\phi Z_1, \phi Z_2, \phi Z_2, \phi Z_1) = \tilde{K}(\phi Z_1, \phi Z_2) \|\phi Z_1\|^{-2} \|\phi Z_2\|^{-2}$$

ve

$$R^*(\varpi Z_1, \varpi Z_2, \varpi Z_2, \varpi Z_1) = K^*(\varpi Z_1, \varpi Z_2) \|\varpi Z_1\|^{-2} \|\varpi Z_2\|^{-2}$$

eşitliklerini son denklemde yazılırsa (5.1.1) elde edilir. Benzer işlemler ile (5.1.2) ve (5.1.3) eşitlikleri elde edilir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasına yarı-Riemann manifoldlar, distribüsyonlar, para-kompleks manifoldlar, yarı-Riemann submersiyonlar ve son olarak da Neutral slant submersiyonların tanımları verilerek başlandı. Ardından hemen hemen para-Hermityen manifoldlardan yarı-Riemann manifoldlara semi-slant, hemi-slant ve bi-slant yarı-Riemann submersiyonlar tanımlanarak bu submersiyonlarda da üç tip içinde özgün geometrik sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca tanımlanan bu yarı-Riemann submersiyon türlerinde üç tip açı için de aşıkâr olmayan örnekler inşa edilmiştir. Daha sonra para-kompleks uzay formlarını kullanarak para-kesit, Ricci ve skalar eğrilikler için karakterizasyonlar elde edilmiştir.

Bu tez çalışmasında yarı-Riemann submersiyondaki benzer problemler farklı manifold çeşitleri için incelenebilir. Dolayısıyla bu tez çalışması yeni çalışmalara ışık tutacak niteliktedir.

KAYNAKLAR

- Akyol, M. A., and Gündüzalp, Y. (2016). Hemi-slant submersions from almost product Riemannian manifolds. *Gulf Journal of Mathematics*, 4(3).
- Baditoiu, G., and Ianuş, S. (2002). Semi-Riemannian submersions from real and complex pseudo-hyperbolic spaces. *Differential Geometry and its Applications*, 16(1), 79-94.
- Baird, P., and Wood, J. C. (2003). Harmonic morphisms between Riemannian manifolds (No. 29). Oxford University Press.
- Noyan, E. B., and Gündüzalp, Y. (2022a). Proper Semi-Slant Pseudo-Riemannian Submersions in Para-Kaehler Geometry. *International Electronic Journal of Geometry*, 15(2), 254–266.
- Noyan, E. B., and Gündüzalp, Y. (2022b). Proper bi-slant pseudo-Riemannian submersions whose total manifolds are para-Kaehler manifolds. *Honam Math. J.*, 44(3), 370-383.
- Bejancu, A., and Farran, H. R. (2006). Foliations and geometric structures (Vol. 580). Springer Science & Business Media.
- Bootby, W. M. (1986). An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry., by Academic Pres.
- Bourguignon, J. P., and Lawson, H. B. (1981). Stability and isolation phenomena for Yang-Mills fields. *Communications in Mathematical Physics*, 79, 189-230.
- Bourguignon, J. P., and Lawson, H. B. (1989). A mathematician's visit to Kaluza-Klein theory. *Rend. Semin. Mat. Torino Fasc. Spec*, 143-163.
- Chen, B. Y. (2011). Classification of flat Lagrangian H-umbilical submanifolds in para-Kähler n-plane. *International Electronic Journal of Geometry*, 4(1), 1-14
- Chinea, D. (1985). Almost contact metric submersions. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 34, 89-104.
- Do Carmo, M. P. (1992). Riemannian Geometry (Vol. 6). Boston: Birkhäuser.
- Duggal, K. L. and Bejancu, A. (1996). Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds (pp. 139-189). Springer Netherlands.
- Erken, İ. K., and Murathan, C. (2016). Slant Riemannian submersions from Sasakian manifolds. *Arab Journal of Mathematical Sciences*, 22(2), 250-264.
- Falcitelli, M., Pastore, A. M., Ianus, S. (2004). Riemannian Submersions and Related Topics. World Scientific.
- Gündüzalp, Y. (2007). Riemann submersiyonlarının geometrisi üzerine. (Yükseklisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı, İnönü Üniversitesi, Malatya).

- Gündüzalp, Y. (2011). Çarpım submersiyonlarının geometrisi üzerine. (Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı, İnönü Üniversitesi, Malatya).
- Gündüzalp, Y. (2013). Anti Invariant Semi Riemannian Submersions from Almost Para Hermitian Manifolds. *Journal of Function Spaces and Applications*, 2013, 1–7.
- Gündüzalp, Y. (2016). Semi slant submersions from almost product Riemannian manifolds. *Demonstratio Mathematica*, 49(3), 345–356.
- Gündüzalp, Y. (2020). Slant submersions in paracontact geometry. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 49(2), 822-834.
- Gündüzalp, Y. (2021). Neutral slant submersions in paracomplex geometry. *Afrika Matematika*, 32, 1095-1110.
- Gray, A. (1967). Pseudo-Riemannian almost product manifolds and submersions. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 16(7), 715-737.
- Hacısalıhoğlu, H. H. (2003). Diferensiyel Geometri, Cilt:1,2,3, Ankara Üniversitesi. Fen Fakültesi.
- Ianus, S., and Visinescu, M. (1987). Kaluza-Klein theory with scalar fields and generalised Hopf manifolds. *Classical and Quantum Gravity*, 4(5), 1317-1325.
- Ianus, S., Mazzocco, R., Vîlcu, G. E. (2008). Riemannian submersions from quaternionic manifolds. *Acta Applicandae Mathematicae*, 104(1), 83-89.
- Ishihara, I. (1979). Anti-invariant submanifolds of a Sasakian space form. *Kodai Mathematical Journal*, 2(2), 171-186.
- Ivanov, S., and Zamkovoy, S. (2005). Parahermitian and paraquaternionic manifolds. *Differential Geometry and its Applications*, 23(2), 205-234.
- Kobayashi, S., and Nomizu, K. (1963). Foundations of differential geometry (Vol. 1, No. 2). New York, London.
- Küpelı, D. N. (1987). On null submanifolds in spacetimes. *Geometriae Dedicata*, 23, 33-51.
- Marrero, J. C., and Rocha, J. (1994). Locally conformal Kähler submersions. *Geometriae Dedicata*, 52, 271-289.
- O'Neill, B. (1966). The fundamental equations of a submersion. *Michigan Mathematical Journal*, 13(4), 459-469.
- O'Neill, B. (1983). Semi-Riemannian geometry with applications to relativity. Academic press.
- Park, K. S., and Prasad, R. (2013). Semi-slant submersions. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 50(3), 951-962.

- Sayar, C., Akyol, M. A., Prasad, R. (2020). Bi-slant submersions in complex geometry. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 17(04), 2050055.
- Sari, R., and Akyol, M. A. (2020). Hemi-slant $\xi^\perp$ -Riemannian submersions in contact geometry. *Filomat*, 34(11), 3747-3758.
- Sepet, S. A., and Ergüt, M. (2016). Pointwise slant submersions from cosymplectic manifolds. *Turkish Journal of Mathematics*, 40(3), 582-593.
- Şahin, B. (1996). CR-Altmanifoldların Geometrisi. (Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı, İnönü Üniversitesi, Malatya).
- Şahin, B. (2010). Anti-invariant Riemannian submersions from almost Hermitian manifolds. *Open Mathematics*, 8(3), 437-447.
- Şahin, B. (2011). Slant submersions from almost Hermitian manifolds. *Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie*, 54(102), No. 1, 93-105.
- Şahin, B. (2012). Manifoldların Diferansiyel Geometrisi. Ankara: Nobel Yayınevi.
- Şahin, B. (2013a). Semi-invariant submersions from almost Hermitian manifolds. *Canadian Mathematical Bulletin*, 56(1), 173-183.
- Şahin, B. (2013b). Riemannian submersions from almost Hermitian manifolds. *Taiwanese journal of Mathematics*, 17(2), 629-659.
- Şahin, B. (2017). Riemannian submersions, Riemannian maps in Hermitian geometry, and their applications. Academic Press.
- Taştan, H. M., Şahin, B., Yanan, Ş. (2016). Hemi-slant submersions. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 13, 2171-2184.
- Vîlcu, G. E. (2021). Almost product structures on statistical manifolds and para-Kähler-like statistical submersions. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 171, 1-21.
- Watson, B. (1976). Almost Hermitian submersions. *Journal of Differential Geometry*, 11(1), 147-165.
- Yano, K., and Kon, M. (1984). Structures on manifolds, World Sci. Publishing, Singapore.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyad, Ad

Başarır Noyan, Esra

Web sayfası

(Research Gate, Academia, vs.)

<https://www.researchgate.net>

Eğitim Bilgileri

Derece	Kurum	Mezuniyet Yılı
Yüksek Lisans	Dicle Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik	2019
Lisans	Dicle Üniversitesi, Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği	2014
Lise	Bismil Anadolu Lisesi	2008

İş Deneyimi

Dönem (Yıl)	Şirket, Kurum	Görev
2014- Devam ediyor	Milli Eğitim Bakanlığı	İlköğretim Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Noyan, E. B., and Gündüzalp, Y. (2022). Proper Semi-Slant Pseudo-Riemannian Submersions in Para-Kaehler Geometry. *International Electronic Journal of Geometry*, 15(2), 254–266.
2. Noyan, E. B., and Gündüzalp, Y. (2022). Proper bi-slant pseudo-Riemannian submersions whose total manifolds are para-Kaehler manifolds. *Honam Math. J.*, 44(3), 370-383.
3. Noyan, E. B., and Gündüzalp, Y. (2023). Anti-invariant and Clairaut anti-invariant pseudo- Riemannian submersions in para-Kenmotsu geometry. *Filomat*, 37(24).
4. Noyan, E. B., and Gündüzalp, Y. Quasi bi-slant pseudo-Riemannian submersions in para-complex geometry. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática (BSPM)* (Kabul edildi).
5. Noyan, E. B., and Gündüzalp, Y. A note on quasi bi-slant pseudo-Riemannian submersions on para-cosymplectic manifolds. 9th International Mardin Artuklu Scientific Researches Conference January 20-22, 2023.
6. Noyan, E. B., and Gündüzalp, Y. Some properties of quasi bi-slant pseudo-Riemannian submersions on para-cosymplectic manifolds. 9th International Mardin Artuklu Scientific Researches Conference January 20-22, 2023.

7. Noyan, E. B. Semi-slant pseudo-Riemannian submersions from para- cosymplectic manifolds. 3. International Hasankeyf scientific research and innovation congress 17-18 December 2022.

8. Noyan, E. B. Semi-slant pseudo-Riemannian submersions in para- cosymplectic space forms. 3. International Hasankeyf scientific research and innovation congress 17-18 December 2022.

Özel İlgiler



DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ BENZERLİK BİLDİRİMİ FORMU

Öğrencinin Adı, Soyadı	Esra Başarır Noyan		
Öğrenci No	19804504		
Ana Bilim Dalı	Matematik		
Program Türü	Proje ☐	Yüksek Lisans ☐	Doktora ☒
Tez Danışmanı (Ünvanı, Adı, Soyadı)	Prof. Dr. Yılmaz Gündüzalp		
(Varsa) II. Tez Danışmanı (Ünvanı, Adı, Soyadı)			
Tez Başlığı	Para-kompleks Geometride Bazı Slant Yarı-Riemann Submersiyonlar		
RAPOR BİLGİLERİ			
Raporlama Aşaması	Tez Savunma Sınavı Sonrası		
Sayfa Sayısı	95		
Raporlama Tarihi	17/07/2023		
Benzerlik Oranı(%)	%24		

Yukarıda bilgileri verilen tez çalışmamın toplam 95 sayfalık kısmına ilişkin, 17/07/2023 tarihinde şahsım/tezdanışmanım tarafından *Turnitin* isimli intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 24 olarak tespit edilmiştir.

Uygulanan filtrelemeler:

- ☐ Başlangıç Bölümleri (Kabul ve Onay sayfası, Teşekkür sayfası, Özet/Abstract) hariç
☐ Kaynaklar hariç
☒ Alıntılar hariç/dâhil
☐ Diğer (Açıklayınız)

Tezimin benzerlik oranı, Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İntihal Raporu Uygulama Esaslarında belirtilen üst sınır benzerlik oranını aşmamaktadır. Benzerlik oranım üst sınır benzerlik oranının altında olsa dahi aksinin tespit edilmesi durumunda her türlü yasal sorumluluğu kabul ettiğimi ve hukuki sonuçlarına razı olduğumu bildirir, gereğini arz ederim.

Öğrencinin Adı, Soyadı: Esra Başarır Noyan

Tarih: 18/07/2023

İmza:

Danışman Adı, Soyadı:

Prof. Dr. Yılmaz Gündüzalp

Tarih: 18/07/2023

İmza:

Ana Bilim Dalı Başkanı Adı, Soyadı:

Prof. Dr. H. Özlem Güney

Tarih: 18/07/2023

İmza: