

**PARA-KOMPLEKS GEOMETRİDE WARPED ÇARPIM
NOKTASAL SLANT ALTMANİFOLDLAR**

SEDAT AYAZ

NİSAN 2024

DİYARBAKIR

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**PARA-KOMPLEKS GEOMETRİDE WARPED ÇARPIM
NOKTASAL SLANT ALTMANİFOLDLAR**

SEDAT AYAZ

DİCLE ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM-ÖĞRETİM VE SINAV
YÖNETMELİĞİNİN BİR PARÇASI OLARAK
MATEMATİK ANA BİLİM DALINDA
DOKTORA TEZİ
OLARAK HAZIRLANMIŞTIR

NİSAN 2024

DİYARBAKIR

**PARA-KOMPLEKS GEOMETRİDE WARPED ÇARPIM
NOKTASAL SLANT ALTMANİFOLDLAR**

Sedat AYAZ tarafından Dicle Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin bir parçası olarak hazırlanan bu çalışma, aşağıda bilgileri yazılı jüri üyeleri tarafından değerlendirilerek **Matematik Ana Bilim Dalı'nda Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Neslihan DALKILIÇ
Müdür, **Fen Bilimleri Enstitüsü**

Prof. Dr. Yılmaz GÜNDÜZALP
Danışman, **Matematik Bölümü,**
Dicle Üniversitesi

Sınav Jürisi:

Prof. Dr. Mehmet GÜLBAHAR (*)
Matematik Bölümü, Harran Üniversitesi

Prof. Dr. Yılmaz GÜNDÜZALP (**)
Matematik Bölümü, Dicle Üniversitesi

Prof. Dr. Muhittin Evren AYDIN
Matematik Bölümü, Fırat Üniversitesi

Doç. Dr. Mehmet Akif AKYOL
Matematik Bölümü, Bingöl Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Murat POLAT
Matematik Bölümü, Dicle Üniversitesi

ONAY

Savunma Tarihi: 18 / 04 / 2024

(*) Jüri Başkanı.

(**) Tez Danışmanı.

Anneme...



Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tez çalışmasında yer alan tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu beyan ederim. Ayrıca, bahse konu bu kural ve ilkelerin gerektirdiği üzere, bu çalışmada özgün olmayan tüm bilimsel içerikleri kurallara uygun biçimde alıntılıyıp kaynak gösterdiğimi beyan ederim. Beyanımınla çelişen herhangi bir delil bulunduğu takdirde tüm sorumluluğu üstleneceğimi kabul ederim.

Ad, Soyad: Sedat AYAZ

İmza:

TEŞEKKÜR

Öncelikle danışmanım Prof. Dr. Yılmaz GÜNDÜZALP hocama çalışmamın fikir aşamasından, teoremler, örnekler, sonuçlar konusunda ve tez taslağındaki düzeltmelere kadar bütün konularda bana gösterdiği destek ve sabırdan dolayı teşekkür ederim. Doktora tez savunma sınavımda jüri üyeliğı yapan değerli hocalarıma da bu tezin daha nitelikli bir hale gelmesi için yaptıkları eleştiri ve önerileri için teşekkür ederim.

Doktora tezi çalışma sürecimde ve tez izleme komitesi toplantılarında bana bilgileriyle ve tecrübeleriyle destek sunan Doç. Dr. Mehmet Akif AKYOL'a ve Dr. Öğretim Üyesi Murat POLAT'a yardımları için teşekkürlerimi sunarım.

En önemlisi, beni araştırma hevesiyle coşturdukları için ve çok yorulduğum zamanlarda dahi her türlü desteğı sunan ayrıca bu konuda bana güvenen ve inanan anneme ve eşime teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	iv
İÇİNDEKİLER	v
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	vii
ÖZET	viii
ABSTRACT	ix
1. GİRİŞ	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	4
3. MALZEME VE YÖNTEM	6
3.1 Yarı-Riemann Manifoldlar	6
3.2 Distribüsyonlar	9
3.3 Para-Kompleks Manifoldlar	10
3.4 Bir Hemen Hemen Para-Hermityen Manifoldun Altmanifoldları	13
3.5 Warped Çarpım Manifoldlar	16
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	18
4.1 Para-Kaehler Geometride Noktasal Slant Altmanifoldlar	18
4.1.1 Para-Kaehler geometride noktasal yarı-slant altmanifoldlar	21
4.1.2 Para-Kaehler geometride noktasal bi-slant altmanifoldlar	29
4.1.3 Nearly para-Kaehler geometride noktasal anti-slant altmanifoldlar	32
4.2 Para-Kaehler Geometride Warped Çarpım Noktasal Slant Altmanifoldlar	37
4.2.1 Para-Kaehler geometride non-trivial warped çarpım noktasal yarı-slant altmanifoldlar	37
4.2.2 Para-Kaehler geometride non-trivial doubly warped çarpım noktasal bi-slant altmanifoldlar	46
4.2.3 Nearly para-Kaehler geometride non-trivial warped çarpım noktasal anti-slant altmanifoldlar	53

4.3	Eşitsizlikler.....	61
4.3.1	Para-Kaehler geometride non-trivial warped çarpım noktasal yarı-slant altmanifoldlar ile ilgili eşitsizlikler.....	61
4.3.2	Para-Kaehler geometride non-trivial doubly warped çarpım noktasal bi-slant altmanifoldlar ile ilgili eşitsizlikler.....	64
4.3.3	Nearly para-Kaehler geometride non-trivial warped çarpım noktasal anti-slant altmanifoldlar ile ilgili eşitsizlikler.....	69
5.	SONUÇLAR VE ÖNERİLER	74
5.1	Sonuçlar	74
5.2	Öneriler	74
	KAYNAKLAR.....	75
	ÖZGEÇMİŞ	78

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

Simge

Açıklama

 P

Para-Kompleks Yapı

 g_1

Yarı-Riemann Metriği

 ∇

Laplace Operatörü

 A

Şekil Operatörü

 h_1

İkinci Temel Form

 g_K

Metrik Tensör

 H

Ortalama Eğrilik Vektörü

 $\nabla^\perp$

Normal Konneksiyon

 θ

Slant Açısı

 k

Warping Fonksiyonu

 $\| \cdot \|$

Norm

 D

Distribüsyon

 $\oplus$

Direkt Toplam

 $[,]$

Lie Parantez Operatörü

 Φ

Temel 2-Form

Kısaltma

Açıklama

Grad

Gradiyenti

Boyut

Boyut

ÖZET

PARA-KOMPLEKS GEOMETRİDE WARPED ÇARPIM NOKTASAL SLANT ALTMANİFOLDLAR

AYAZ, Sedat

Doktora, Matematik Bölümü

Danışman: Prof. Dr. Yılmaz GÜNDÜZALP

Nisan 2024, 90 sayfa

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde, bu çalışmanın temelini oluşturacak daha önce yapılmış çalışmalarla ilgili bilgiler verilmektedir ve bu çalışmanın içeriği açıklanmaktadır. Önceki çalışmalar bölümünde, bu çalışmanın tarihsel gelişimi ile ilgili genel bilgiler verilmektedir. Malzeme ve yöntem bölümünde, gelecek bölümlerde kullanabilmek için temel tanımlar, kavramlar ve örnekler verilmektedir. Bulgular ve tartışma kısmında ise çalışmamızın orijinal bölümüne yer verilmektedir. Bu kısımda öncelikle para-Kaehler geometride noktasal yarı-slant ve bi-slant altmanifoldlarla ilgili tanımlar, kavramlar ve örnekler elde edilmektedir. Ayrıca, nearly para-Kaehler geometride noktasal anti-slant altmanifoldlarla ilgili tanımlar, kavramlar ve örnekler verilmektedir. Bu bölümde noktasal altmanifoldlar araştırıldığından sabit olmayan açılar elde edilmektedir. Çünkü değişkene bağımlı açılar oluşmaktadır. Para-Kaehler geometride ve nearly para-Kaehler geometride bu açılar aldıkları değerin aralığına göre altmanifoldların tip-1 ve tip-2 durumları incelenmektedir. Ayrıca distribüsyonların integrallenebilirliği ve tamamen jeodezik olma durumları tip-1 ve tip-2 durumlarına göre ele alınmaktadır. İkinci kısımda, para-Kaehler geometride non-trivial warped çarpım noktasal yarı-slant altmanifoldlar incelenmektedir ve para-Kaehler geometride non-trivial doubly warped çarpım noktasal bi-slant altmanifoldlara da çalışılmaktadır. Ayrıca nearly para-Kaehler geometride non-trivial warped çarpım noktasal anti-slant altmanifoldlar da incelenmektedir. Bunlarla ilgili tanımlar, teoremler ve örnekler verilmektedir. Bu bölümün üçüncü kısmında ise bu çalışmalarla ilgili eşitsizlikler oluşturulmaktadır. İlk olarak, para-Kaehler geometride non-trivial warped çarpım noktasal yarı-slant altmanifoldlar ile ilgili eşitsizlikler ve bunlarla ilgili sonuçlar incelenmektedir. İkinci olarak, para-Kaehler geometride non-trivial doubly warped çarpım noktasal bi-slant altmanifoldlar ile ilgili eşitsizlikler ve bunlarla ilgili sonuçlar elde edilmektedir. Bu bölümün sonunda ise nearly para-Kaehler geometride non-trivial warped çarpım noktasal anti-slant altmanifoldlar ile ilgili eşitsizlikler ve bunlarla ilgili sonuçlar incelenmektedir. Son olarak sonuç ve öneriler bölümünde tezin genel bir değerlendirilmesi yapıldıktan sonra ileride yapılacak olan çalışmalara katkıda bulunmak için öneriler verilmektedir.

Anahtar Kelimeler: Para-Kaehler manifold, Warped çarpım altmanifoldlar, Doubly warped çarpım altmanifoldlar, Noktasal slant altmanifoldlar, Eşitsizlikler.

ABSTRACT

WARPED PRODUCT POINTWISE SLANT SUBMANIFOLDS IN PARA-COMPLEX GEOMETRY

AYAZ, Sedat

Doctorate of Science in Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Yılmaz GÜNDÜZALP

April 2024, 90 pages

The thesis consists of five sections. In the introduction section, informations are given about previous studies that will form the basis of this study and the content of this study is explained. In the previous studies section, the historical developments of this study are given. In the material and method section, basic concepts, theorems and examples are obtained for use them in next chapters. In the findings and discussion section, the original section of our thesis is given. In this part, firstly concepts, theorems and examples with related to pointwise semi-slant and bi-slant submanifold in para Kaehler geometry are obtained. Also, concepts, theorems and examples with related to pointwise hemi-slant submanifolds in nearly para-Kaehler geometry are given. In this section, since pointwise slant submanifolds are researched, non-constant angles are obtained. Because angles that depend on the variable are formed. According to the range of values of these angles, Type-1 and Type-2 cases of submanifolds in para-Kaehler geometry and nearly para-Kaehler geometry are examined. In addition, the integrability of the distributions and their totally geodesicness status are explained according to type-1 and type-2 cases. Secondly, non-trivial warped product pointwise semi-slant submanifolds in para-Kaehler geometry are investigated and non-trivial doubly warped product pointwise bi-slant submanifold in para Kaehler geometry are studied. Also, non-trivial warped product pointwise hemi-slant submanifolds in nearly para Kaehler geometry are investigated. Definitions, theorems and examples related to these are given. In the third part of this section, the inequalities related to these studies are created. Firstly, the inequalities and results regarding the non-trivial warped product pointwise semi-slant submanifolds in para-Kaehler geometry are investigated. Secondly, the inequalities and results regarding the non-trivial doubly warped product pointwise bi-slant submanifolds in para-Kaehler geometry are obtained. At the end of this section, the inequalities and results regarding the non-trivial warped product pointwise hemi-slant submanifolds in nearly para-Kaehler geometry are examined. In the conclusion and suggestions section, a general evaluation of the thesis is made and suggestions are given to contribute to the next studies.

Keywords: Para-Kaehler manifold, Warped product submanifolds, Doubly warped product submanifolds, Pointwise slant submanifolds, Inequalities.

1. GİRİŞ

P. K. Rashevskij 1948 yılında Para-Kaehler manifoldun özelliklerine çalıştı [34]. B. A. Rozenfeld 1949 yılında Para-Kaehler manifoldları tanımladı [35] ve B. A. Rozenfeld bu çalışmasını Rashevskij'in tanımladığı kompleks durumdaki Kaehlerin tanımıyla kıyasladı. Kaehler ile para-Kaehler arasında benzerlik buldu. Daha sonra S. Tachibana 1959 yılında nearly Kaehler manifoldlara çalıştı. Bu manifoldlar için örnek verilecek ise S^6 (6 boyutlu küre) örneği en bilinen örnektir. Bu örnek, Kaehler manifold olmayan nearly Kaehler manifoldlara bir örnektir [43]. Her nearly para-Kaehler manifold bir para Kaehler manifold değildir. Ama her para Kaehler manifold bir nearly para Kaehler manifolddur. Bu genelleme doğrudur.

1969'dan önce warped çarpım kavramı matematiksel ve fiziksel konularda ortaya çıktı. Örneğin, Kruchkovich tarafından 1957 yılında semi-reducible uzayında kullanıldı [30]. Bu kavram, izafiyet teorisi, sicim teorisi ve kara delikler gibi konularda da kullanıldı. Warped çarpım manifoldlar, R. L. Bishop ve B. O'Neill tarafından tanımlandı ve çalışıldı [9]. Daha sonra, warped çarpımlar, diferansiyel geometri de önemli bir çalışma alanı haline geldi [5,13,44,45].

B. Y. Chen, 1990 yılında Hermityen manifoldlarda invaryant ve anti-invaryant altmanifoldların bir genel hali olarak slant altmanifoldları ifade etti [11]. B.-Y. Chen ve O. J. Garay, Hermityen manifoldlar da noktasal slant altmanifoldların kavramını tanımladı [14]. Daha sonra B.-Y. Chen noktasal slant altmanifoldları tanımladı ve Öklid uzayında bazı altmanifoldlar da önemli sonuçlar ve örnekler elde etti [11,12]. F. Etayo, quasi-slant altmanifoldları adı altında bazı altmanifoldlara çalıştı. Bu altmanifoldu, Kaehler manifoldun tamamen jeodezik quasi-slant altmanifoldu olduğunu gösterdi [19]. Daha sonra, P. Alegra ve A. Carriazo, para-Hermityen manifoldlarda slant altmanifoldlarda çalıştı ve yarı-Riemann altmanifoldların bazı çeşitlerinin tanımlamalarını yaptı [3,4]. Bazı geometriciler tarafından Riemann ve yarı-Riemann manifoldlarda farklı yapıların slant altmanifoldlarına çalışıldı [1,2,7,25,33].

B. Şahin, noktasal slant altmanifoldların tanımını kullanarak Kaehler manifoldlarda noktasal yarı-slant altmanifoldları tanımladı. Ayrıca, bu kavramları kullanarak

Kaehler manifoldlarda ikinci form olan $K^T x_k K^\theta$ non-trivial warped çarpım altmanifoldun varlığını ispatladı. Sonra, teoremler, ilginç sonuçlar, eşitsizlikler ve örnekler elde etti. Burada, K^T holomorfik altmanifoldları ve K^θ noktasal slant altmanifoldları ifade etmektedir [39]. Daha sonra, A. Sharma para-Kaehler manifoldlarda warped çarpım yarı-slant altmanifoldların var olmadığını ispatladı [41]. Bu çalışmada, para-Kaehler manifoldlarda non-trivial warped çarpım yarı-slant altmanifoldların $K^T x_k K^\theta$ ikinci formunun varlığı örnekler verilerek ispatlandı. Daha sonra teoremler, sonuçlar ve bunlarla ilgili eşitsizlikler elde edildi.

B. Y. Chen ve S. Uddin, Kaehler manifoldlarda warped çarpım noktasal bi-slant altmanifoldlar üzerinde çalıştı [15]. Ayrıca, B. Ünal tarafından, doubly warped çarpımlar, warped çarpımların bir genel hali olduğu belirtildi [47,48]. S. Sular, C. Özgür [42] ve A. Olteanu [31], Riemann yapılarında doubly warped çarpım altmanifoldlar ve geometrik eşitsizlikler üzerine çalıştılar. Bu tezde para Kaehler geometride noktasal bi slant altmanifoldlar tanımlandı. Örnekler verilerek para Kaehler geometride doubly warped çarpım noktasal bi-slant altmanifoldların varlığı ispatlandı. Örnekler verildi ve bunlarla ilgili eşitsizlikler elde edildi.

B. Şahin. Kaehler geometride warped çarpım anti-slant altmanifoldlara çalıştı [36]. Kaehler manifoldlarda non-trivial warped çarpım anti-slant altmanifoldların ikinci formu olan $K^\theta x_k K^\perp$ altmanifoldların varlığını ispatladı [40]. Sonra, teoremler, ilginç sonuçlar, eşitsizlikler ve örnekler elde etti. Burada, $K^\perp$ anti-invaryant altmanifoldları ve K^θ noktasal slant altmanifoldları ifade etmektedir. Daha sonra, 2022 yılında Y. Gündüzalp para Kaehler geometride warped çarpım noktasal anti-slant altmanifoldlara çalıştı [24]. Warped çarpım anti-slant altmanifoldlar ile ilgili kavramlar, teoremler ve örnekler elde etti. Bu kavramları kullanarak eşitsizlikler ve sonuçlar elde etti. Bu tezde ise nearly para-Kaehler geometride warped çarpım noktasal anti-slant altmanifoldlar üzerine çalışmalar yapıldı. Bu manifold üzerine yapılan çalışmada verilen örnekler, yukarıda belirttiğimiz genellemeden dolayı hem para Kaehler hem de nearly para Kaehler manifoldlar olan örneklerdir.

Bu tezin 2. bölümünde, önceki çalışmalar başlığı altında daha önce yapılmış konumuzla ilgili önemli çalışmalar hakkında tarihsel bilgiler verildi. 3. Bölümün olan

Malzeme ve Yöntemler kısmında, ileriki bölümlerde kullanabileceğimiz bazı temel tanımlar, kavramlar ve örnekler verildi. 4. Bölüm olan Bulgular ve Tartışma kısmında, ilk olarak para-Kaehler geometride noktasal slant altmanifoldlar elde edildi. Bu ilk kısım üç alt bölüm şeklinde çalışıldı. İlk alt bölümde para-Kaehler geometride noktasal yarı-slant altmanifoldlar elde edildi. Daha sonra noktasal bi-slant altmanifoldlar ile ilgili bazı sonuçlar elde edildi. Son olarak ise nearly para Kaehler geometride noktasal anti-slant altmanifoldlar ifade edildi ve bu belirttiğimiz manifoldlarla ilgili tanımlar, sonuçlar ve örnekler verildi. 4. bölümün İkinci kısmında, ilk olarak para Kaehler geometride warped çarpım noktasal yarı-slant altmanifoldlar elde edildi. Daha sonra doubly warped çarpım noktasal bi-slant altmanifoldlar araştırıldı. Son olarak nearly para Kaehler geometride warped çarpım noktasal anti-slant altmanifoldlar verildi. Bu belirttiğimiz manifoldlarla ilgili teoremler, sonuçlar ve örnekler araştırıldı. 4. bölümün 3. Kısımındaki eşitsizliklerde ise yukarıda belirttiğim warped çarpım altmanifoldlarla ilgili ikinci temel formun normunun karesi ile ilgili eşitsizlikler elde edildi ve bunlarla ilgili sonuçlar bulundu. Bu tezin 5. bölümü olan sonuç ve öneriler bölümünde ise yaptığımız çalışmalar sonucunda elde ettiğimiz sonuçlar ifade edildi. Ayrıca öneriler kısmında yapılan bu çalışmayı farklı manifoldlar ve altmanifoldlar üzerinde kullanarak orijinal çalışmalar ve sonuçlar elde edileceği ifade edildi.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Para-Kaehler manifoldlar üzerine P. K. Rashevski 1948 yılında çalışmalara başladı. Hemen ardından B. A. Rozenfeld, 1949 yılında para-Kaehler manifoldları tanımladı. Ayrıca Rashevskij'in tanımındaki kompleks durumdaki Kaehler tanımını kıyasladı ve Kaehler ile para-Kaehler arasındaki benzerlikleri buldu. Daha sonra, S. Tachibana 1959 yılında nearly Kaehler manifoldlara çalıştı. Bu manifoldlara verilmiş en bilinen örnek S^6 (6 boyutlu küre) olarak bilinmektedir. Bu örnek Kaehler manifold olmayan nearly Kaehler manifoldlara bir örnektir. Birçok geometrici bu manifoldlardan yararlanarak Riemann ve yarı-Riemann altmanifoldlar üzerine önemli çalışmalar gerçekleştirdiler.

Warped çarpım kavramı ilk olarak 1969'dan önce Matematik ve Fizik konularında ortaya çıktı. Örneğin, Kruchkovich, 1957 yılında warped çarpımları yarı-reducible yapılarla kullandı. Özellikle bu kavram Fizik konuları olan genel izafiyet teorisi, sicim teorisi ve kara delik konularında çokça kullanıldı. Matematikte ise özellikle diferansiyel geometride çok önemli bir konu haline geldi ve bu konu üzerine önemli çalışmalar yapıldı. Dolayısıyla, matematikçilerin ve fizikçilerin warped çarpım manifoldlar ile ilgili bilime katkı sundukları çalışmaları ortaya çıktı.

R. L. Bishop ve B. O'Neill tarafından warped çarpım manifoldlara 1969 yılında çalışıldı ve tanımlamalar yapıldı. Bu tanımlama da warped çarpım manifoldları $K = M \times_k N$ şeklinde ifade edildi. Bu manifold, $g = g_1 + k^2 g_2$ Riemann metrik tensörü tarafından ve k warping fonksiyonu tarafından donatılmış bir $M \times N$ çarpım manifoldudur.

B.-Y. Chen 1990 yılında slant altmanifoldların geometrisi üzerine çalışmalar yaptı. Burada Hermityen manifoldlarda hem invaryant manifoldların hemde anti-invaryant altmanifoldların genel bir hali olarak slant altmanifoldları açıkladı. Daha sonra, B.-Y. Chen ve O. J. Garay, hemen hemen Hermityen manifoldlarda noktasal slant altmanifold kavramını tanımladılar.

B. Şahin 2006 yılında Kaehler manifoldlarda noktasal yarı-slant altmanifoldlara çalıştı ve bu kavramı kullanarak warped çarpımlar üzerine de çalışmalar yaptı. P. Alegra ve A. Carriazo, 2017 yılında para-Hermityen manifoldlarda slant altmanifoldlara çalıştılar ve detaylı tanımlamalar yaptılar. Daha sonra birçok geometrici tarafından slant manifoldların genel bir hali olan bazı noktasal slant altmanifoldlar üzerine çalışmalar yapıldı.

Bu yüzyılın başlarında B.-Y. Chen tarafından Kaehler manifoldlarda warped çarpım CR-altmanifoldlara çalışılmaya başlandı. Daha sonra bu konu, geometride çok önemli bir konu haline geldi ve birçok geometrici tarafından önemli çalışmalar gerçekleştirildi. B. Şahin, Kaehler manifoldlar üzerinde warped çarpımlarda birçok noktasal slant altmanifoldlar üzerine çalışmalar yaptı. Farklı manifoldlar üzerine yapılabilecek önemli çalışmalara yollar açmış oldu. Daha sonra Y. Gündüzalp, 2022 yılında para-Kaehler geometride warped çarpım noktasal anti-slant altmanifoldlar üzerine çalışmalar yaptı. Bunun sonucunda önemli sonuçlar ve bazı özel eşitsizlikler elde etti. S. Uddin ve B. Y. Chen ise Kaehler manifoldlarda warped çarpım noktasal bi-slant altmanifoldlar üzerine çalışmalar gerçekleştirdiler. Bunlar gibi birçok geometrici farklı manifoldlarda warped çarpımlar üzerine önemli çalışmalar gerçekleştirdiler.

Bu çalışmada belirtmiş olduğumuz geçmişteki önemli kaynaklardan ve çalışmalardan da yararlanarak bu tezimize ve matematik literatürüne katkılar sunacak çalışmalar yapıldı.

3. MALZEME VE YÖNTEM

Bu bölümde öncelikle çalışmamızda kullanacağımız bazı temel kavramlar verilmektedir ve bu bölüm beş alt bölümden oluşmaktadır. İlk olarak yarı-Riemann manifoldlar, ikinci olarak distribüsyonlar, üçüncü olarak para-Kompleks manifoldlar, dördüncü olarak bir hemen hemen para-Hermityen manifoldların altmanifoldları ve son olarak da warped çarpım manifoldlar ile ilgili kavramlar verilmektedir.

3.1 Yarı-Riemann Manifoldlar

Tanım 3.1.1 V , n boyutlu bir reel vektör uzayı olsun. $g: V \times V \rightarrow R$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyor ise bu dönüşüme **skaler çarpım** denir. $\forall a, b, c \in V$ için ve $\forall x, y \in R$ için

(i) simetriktir; $g(a, b) = g(b, a)$,

(ii) bi-lineerdir;

$$g(xa + yb, c) = xg(a, c) + yg(b, c),$$

$$g(a, xb + yc) = xg(a, b) + yg(a, c),$$

(iii) non-dejeneredir; $\forall b \in V$ için $g(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ dır [18].

Tanım 3.1.2 V reel vektör uzayı üzerinde g bilinear form olsun.

(i) $\forall m \in V$ için $g(m, m) < 0$ ise g bilinear forma **negatif tanımlı**,

(ii) $\forall m \in V$ için $g(m, m) > 0$ ise g bilinear forma **pozitif tanımlıdır** denir [32].

Tanım 3.1.3 V reel vektör uzayı ve g , V üzerinde simetrik bilinear form olsun.

$g_{in}: N \times N \rightarrow R$ negatif tanımlı olan en büyük boyutlu N altuzayının boyutuna g simetrik bilinear formun **indeksi** denir [32].

Tanım 3.1.4 K , bir C^∞ manifold olsun. $x \in K$ noktasındaki tanjant uzayı $T_x K$ olmak

üzere, $A_x, B_x \in T_x K$ için

$$g: T_x K \times T_x K \rightarrow R$$

$$(A_x, B_x) \rightarrow g(A_x, B_x)$$

ile tanımlanan sabit indeksli g skaler çarpımına K üzerinde bir **metrik tensör** denir [29].

Tanım 3.1.5 K , bir C^∞ manifold olsun ve g , K üzerinde bir metrik tensör olsun. Buna göre (K, g) ikilisine **yarı-Riemann manifold** denir [32].

Tanım 3.1.6 K yarı-Riemann manifoldu üzerinde tanımlı g metrik tensörünün indeksine **yarı-Riemann manifoldunun indeksi** denir. Yarı-Riemann manifoldunun indeksini i olarak tanımlarsak $0 \leq i \leq \text{boy}K$ dır. Burada, $i=0$ ise $\forall x \in K$ için $g_x, T_x K$ üzerinde pozitif tanımlı bir metrik tensör olduğundan K bir **Riemann manifoldu** olur. Eğer $i=1$ ve $\text{boy}K \geq 2$ olursa, bu durumda K bir **Lorentz manifoldu** olur [32].

Tanım 3.1.7 (K, g) bir yarı-Riemann manifoldu ve $a: K \rightarrow \bar{K}$ bir immersiyon olsun. Bu durumda a^*g , K üzerinde bir metrik tensör ise K ya **yarı-Riemann altmanifold** denir. Fakat, a^*g , K üzerinde bir metrik tensör değil ise K ya **dejenere altmanifold** denir [32].

Tanım 3.1.8 K bir yarı-Riemann manifold ve g , K üzerinde bir metrik tensör olsun. $\forall x \in K$ için ve $N_x \in T_x K$ için

$$g: T_x K \times T_x K \rightarrow \mathbb{R}$$

olacak şekilde

- (i) $g(N_x, N_x) > 0$ ya da $N_x = 0$ ise N_x vektörüne **space-like**,
- (ii) $g(N_x, N_x) < 0$ ise N_x vektörüne **time-like**,
- (iii) $g(N_x, N_x) = 0$, $N_x \neq 0$ ise vektörüne **null (light-like)** denir [18].

Tanım 3.1.9 K bir manifold ve ∇ , K üzerinde tanımlanmış konneksiyon olsun. Bu durumda

$$T: \Gamma(TK) \times \Gamma(TK) \rightarrow \Gamma(TK)$$

$$(X, Y) \rightarrow T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

şeklinde tanımlanan vektör değerli tensöre K üzerinde tanımlı ∇ konneksiyonun **torsiyon tensörü** denir [17].

Tanım 3.1.10 K , bir manifold olsun ve ∇ , K üzerinde tanımlanan bir konneksiyon olsun. Eğer $T = 0$ ise ∇ konneksiyonuna **simetrik veya sıfır torsiyonludur** denir [17].

Tanım 3.1.11 K bir manifold ve K üzerinde tanımladığımız vektör alanlarının uzayı $\Gamma(TK)$ olsun.

$$\nabla : \Gamma(TK) \times \Gamma(TK) \rightarrow \Gamma(TK)$$

$$(X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$$

$\forall X, Y, Z \in \Gamma(TK)$ ve $\forall f, g \in C^\infty(K)$ için

$$(i) \quad \nabla_{fX+gY} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z,$$

$$(ii) \quad \nabla_X (fY + gZ) = f \nabla_X Y + g \nabla_X Z + (Xf)Y + (Xg)Z,$$

şartlarını sağlıyor ise ∇ , K manifoldu üzerinde tanımlanmış **lineer konneksiyon** olur. Dahası, ∇ lineer konneksiyonu

$$(iii) \quad [X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X,$$

$$(iv) \quad Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

şartlarını da sağlıyor ise ∇ ya K manifoldu üzerinde tanımlanmış **Riemann konneksiyonu, metrik konneksiyonu veya Levi-Civita konneksiyonu** denir [8].

Tanım 3.1.12 $N : K \rightarrow \bar{K}$ bir dönüşüm olsun ve $\bar{K}$ üzerinde bir konneksiyon $\tilde{\nabla}$ olsun. N boyunca $\bar{K}$ üzerindeki $\tilde{\nabla}^N$ konneksiyonuna N boyunca $\tilde{\nabla}$ konneksiyonunun **pull back konneksiyonunu** denir [49].

Tanım 3.1.13 $N : K \rightarrow \bar{K}$ bir dönüşüm ise N boyunca $\tilde{\nabla}$ konneksiyonunun pull back konneksiyonu $\tilde{\nabla}^N$ ve $\forall X, Y \in \Gamma(TK)$ olacak şekilde

$$\nabla N_* : x(K) \times x(K) \rightarrow x(\bar{K})$$

$$\nabla N_*(Y, Z) : \tilde{\nabla}_Y^N N_* Z - N_*(\hat{\nabla}_Y Z)$$

ile tanımlanan ∇N_* dönüşümüne N dönüşümünün **ikinci temel formu** denir [49].

3.2 Distribüsyonlar

Tanım 3.2.1 K , n -boyutlu bir manifold olsun. K üzerinde

$$M : K \rightarrow T_y K$$

$$y \rightarrow M_y \subset T_y K$$

ile tanımlanan M dönüşümüne bir **distribüsyon** denir. $X \in \Gamma(TK)$ için $y \in K$ olacak şekilde $X_y \in M_y$ oluyorsa X vektör alanı M ye aittir denir. Eğer her y noktası için M ye ait m tane diferansiyellenebilir lineer bağımsız vektör alanı mevcut ise M ye **diferansiyellenebilir** denir [8].

Tanım 3.2.2 K^m , $\bar{K}^n$ Riemann manifoldları olsunlar. $f : K \rightarrow \bar{K}$ dönüşümü için $\text{boy}(f_*(T_p M)) = m$ ise f nin $p \in M$ noktasındaki rankı m olup $\text{rank}(f) = m$ ile gösterilir. Eğer $\text{boy}(m) = \text{rank}(f)$ ise f ye **immersiyon** denir. Bu durumda K yada $\bar{K}$ nın **immersed altmanifoldu** denir. Eğer f immersiyonu birebir (1-1) ise f ye **imbedding (gömme)** denir. K yada $\bar{K}$ nın **gömülen altmanifoldu** denir [36].

Tanım 3.2.3 K bir C^∞ manifold, M , K manifoldu üzerinde m -boyutlu bir C^∞ distribüsyon ve Z , K nın altmanifoldu olsun. M_x , x noktasında Z ye teğet olan uzaya eşit ise Z ye M nin **integral manifoldu** denir. Yani

$$F : Z \rightarrow K$$

bir imbedding olacak şekilde $\forall x \in Z$ için

$$F_*(T_x Z) = M_x$$

olur. Burada, M nin Z yi kapsayan başka bir integral manifoldu yoksa Z ye M nin bir **maksimal integral manifoldu (lif)** denir [36].

Tanım 3.2.4 K bir C^∞ manifold olsun ve Z , K nın altmanifoldu olsun. M , K manifoldu üzerinde bir distribüsyon olacak şekilde, eğer $\forall x \in Z$ için M nin x i kapsayan bir lifi varsa M ye **integrallenebilirdir** denir [36].

3.3 Para-Kompleks Manifoldlar

Tanım 3.3.1 V , $2n$ -boyutlu bir reel vektör uzayı olsun. $P^2 = I$ için P 'nin $+I$ ve $-I$ öz değerlerine sırasıyla karşılık gelen V^+ , V^- öz uzayları aynı n -boyutuna sahip ve $V = V^+ \oplus V^-$ ise $P: V \rightarrow V$ endomorfizmasına bir **hemen hemen para-kompleks yapı** denir [27]. Burada I birim özdeşlik olarak verilmektedir.

Tanım 3.3.2 $\bar{K}$, $2n$ -boyutlu bir differensiyellenebilir manifold ve P , $\bar{K}$ manifoldu üzerinde $(1,1)$ mertebeli bir tensör alanı olsun. Eğer $P^2 = I$ ise P tensör alanına **hemen hemen çarpım yapısı** denir. P nin $+I$ ve $-I$ öz değerleri ile birleşen $T^+\bar{K}$ ve $T^-\bar{K}$ öz demetleri aynı ranka sahip olduğunda $(\bar{K}, P)$ hemen hemen çarpım manifolduna **hemen hemen para-kompleks manifold** denir [27].

Tanım 3.3.3 $\bar{K}$, $2n$ -boyutlu bir manifold olsun. $X, Y \in \bar{K}$ üzerinde vektör alanları için

$$P^2X = X \text{ ve } g_1(PX, PY) = -g_1(X, Y) \quad (3.1)$$

şartını sağlayan bir P hemen hemen para-kompleks yapı ve g_1 yarı-Riemann metriği var ise $(\bar{K}, g_1, P)$ yapısına bir **hemen hemen para-Hermityen manifold** denir. Burada g_1 metriği için **neutraldir** denir. Yani, g_1 metriğinin işareti (n, n) olur.

$E_i = g_1(E_i, E_i) = \pm 1$ ($E_i = 1, i = 1, \dots, n, E_j = -1, j = n+1, \dots, 2n$) olarak alındığında bir ortonormal baz $(E_1, \dots, E_n, E_{n+1} = PE_1, \dots, E_{2n} = PE_n)$ şeklinde ifade edilir [27].

Tanım 3.3.4 $(\bar{K}, g_1, P)$ bir hemen hemen para-Hermityen manifold olsun. $X, Y \in \bar{K}$ üzerinde vektör alanları için,

$$\Phi(X, Y) = g_1(X, PY)$$

şartını sağlayan tensöre **temel 2-form** denir [27].

Tanım 3.3.5 $(\bar{K}, g_1, P)$ bir hemen hemen para-Hermityen manifold olsun. $\bar{K}$ manifoldunun temel 2-formu kapalı ise $(d\Phi = 0)$, $(\bar{K}, g_1, P)$ yapısına **para-Kaehler manifold** denir [27].

Teorem 3.3.6 $(\bar{K}, g_1, P)$ bir hemen hemen para-Hermityen manifold olsun. Bu durumda $\bar{K}$ 'nın bir para-Kaehler manifold olması için gerek ve yeter şart $\bar{\nabla}P=0$ olmasıdır [27]. Buna göre, $X, Y \in \bar{K}$ üzerinde vektör alanları için

$$(\bar{\nabla}_X P)Y = 0 \text{ yani } P\bar{\nabla}_X Y = \bar{\nabla}_X PY \quad (3.2)$$

olur [27].

Tanım 3.3.7 $K, (\bar{K}, P, g_1)$ manifoldunun bir altmanifoldu olsun. $\forall X, Y \in \Gamma(TK)$ ve $\forall V \in \Gamma(TK^\perp)$ için sırasıyla **Gauss ve Weingarten denklemleri**

$$\nabla_X Y = \bar{\nabla}_X Y + h_1(X, Y) \quad (3.3)$$

$$\bar{\nabla}_X V = -A_V X + \nabla_X^\perp V \quad (3.4)$$

olarak ifade edilir. h_1 , K 'nın **ikinci temel formunu**, A_V , V ile ilişkili **Weingarten endomorfizminin** ve $\nabla^\perp$ ise **normal konneksiyonunu** ifade eder. A_V ve h_1 ile ilişkili denklem

$$g_1(A_V X, Y) = g_1(h_1(X, Y), V) \quad (3.5)$$

ile verilir ve g_1 , K üzerinde **yarı-Riemann metriğini** ifade eder.

Her X teğet vektör alanı için

$$PX = RX + SX \quad (3.6)$$

olur. Burada RX ve SX , PX 'nın sırasıyla teğet ve normal vektör alanlarıdır.

Her V normal vektör alanı için

$$PV = rV + sV \quad (3.7)$$

olur. Burada rV ve sV , PV 'nin sırasıyla teğet ve normal vektör alanlarıdır.

Tanım 3.3.8 $\bar{K}$ bir yarı-Riemann manifoldu ve $K, \bar{K}$ manifoldunun altmanifoldu olsun. $\{e_1, \dots, e_n\}$ altmanifoldun ortonormal çatısı olsun. Buna göre **ortalama eğrilik vektörü**

$$H = \frac{1}{n} \text{tr} h_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_1(e_i, e_i) \quad (3.8)$$

olarak ifade edilir.

Tanım 3.3.9 $\bar{K}$ hemen hemen para-Hermityen manifold olsun ve P para-kompleks yapı olsun. Eğer $\forall X \in \Gamma(T\bar{K})$ için

$$(\bar{\nabla}_X P)X = 0 \quad (3.9)$$

ise hemen hemen para-Hermityen manifold **nearly para-Kaehler manifold** olarak tanımlanır [20].

Teorem 3.3.10 $\bar{K}$ hemen hemen para-Hermityen manifoldunun nearly para-Kaehler manifold olması için gerek ve yeter şart $\forall X, Y \in \Gamma(T\bar{K})$ için

$$(\bar{\nabla}_X P)Y + (\bar{\nabla}_Y P)X = 0 \quad (3.10)$$

olmasıdır [8].

Teorem 3.3.11 K , $\bar{K}$ nearly para-Kaehler manifoldunun bir yarı-Riemann altmanifoldu olsun $\forall X, Y \in \Gamma(TK)$ için $(\bar{\nabla}_X P)Y$ nin teğet ve normal kısımları $G_X Y$ ve $U_X Y$ olsun. Buna göre

$$(\bar{\nabla}_X P)Y = G_X Y + U_X Y \quad (3.11)$$

olur [8]. Ayrıca, $\forall X, Y, W \in \Gamma(TK)$ ve $\forall V \in \Gamma(TK^\perp)$ için [28] kaynağı referans alınarak daha sonra kullanmak için G ve U nun özellikleri olarak aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$(m_1) \quad (a) \quad G_{X+Y}W = G_X W + G_Y W$$

$$(b) \quad U_{X+Y}W = U_X W + U_Y W$$

$$(m_2) \quad (a) \quad G_X(Y+W) = G_X Y + G_X W$$

$$(b) \quad U_X(Y+W) = U_X Y + U_X W$$

$$(m_3) \quad (a) \quad g_1(G_X Y, W) = -g_1(Y, G_X W)$$

$$(b) \quad g_1(U_X Y, V) = -g_1(Y, U_X V)$$

$$(m_4) \quad G_X P Y + U_X P Y = -P(G_X Y + U_X Y)$$

Teorem 3.3.12 K , $\bar{K}$ nearly para-Kaehler manifoldunun bir yarı-Riemann altmanifoldu olsun ve $\forall X, Y \in \Gamma(TK)$ için (3.9), (3.10) ve (3.11) denklemleri kullanılarak aşağıdaki denklemler elde edilir [28].

$$(a) \quad G_X Y + G_Y X = 0 \quad \text{ve} \quad (b) \quad U_X Y + U_Y X = 0 \quad (3.12)$$

3.4 Bir Hemen Hemen Para-Hermityen Manifoldun Altmanifoldları

Tanım 3.4.1 K , $(\bar{K}, P, g_1)$ hemen hemen para-Hermityen manifoldunun bir altmanifoldu olsun. Eğer, her X timelike ya da spacelike vektör alanı için $g_1(RX, RX)/g_1(PX, PX)$ değeri sabit ise K bir **slant altmanifold** olarak isimlendirilir. Fakat bu değer her bir $p \in K$ noktası için $\theta(X)$ açısı sıfırdan farklı $X \in T_p K$ 'nin seçimine bağımlı ise K bir **noktasal slant altmanifold** olarak isimlendirilir. Bu durumda $\theta(X)$ Wirtinger açısı, slant fonksiyonun ya da noktasal slant altmanifoldun Wirtinger fonksiyonu olarak isimlendirilen $\theta: T_p K - \{0\} \rightarrow R$ bir reel değerli fonksiyonu oluşturur. K , $\bar{K}$ para-Hermityen manifoldunun bir noktasal slant altmanifoldu olur [6,11,38]. **Wirtinger açısı**, $T_p K$ ve PX arasındaki açı olarak ifade edilmektedir. Denklemden oluşan değer wirtinger açısına eşittir.

Tanım 3.4.2 K , $(\bar{K}, P, g_1)$ hemen hemen para-Hermityen manifoldunun bir altmanifoldu olsun. Yukarıdaki Tanım 3.4.1. deki denkleme göre; eğer $R \equiv P$ ise K manifoldu bir **para-holomorfik altmanifold** veya **invariant altmanifold** olur ve denklemin sonucu 1'e eşit olur. Dolayısıyla, $PX = RX$ olur. Eğer $R \equiv 0$ ise K manifoldu bir **totally reel (anti-invariant) altmanifold** olur ve denklemin sonucu 0'a eşit olur. Dolayısıyla, $PX = SX$ olur. Invariant altmanifoldlar ile anti-invariant altmanifoldlar slant altmanifoldların özel durumlarıdır. Hem invariant hem de anti-invariant altmanifold olmayanlar **proper (has) slant altmanifold** olarak adlandırılır [3]. Eğer $\theta \neq 0, \frac{\pi}{2}$ ise slant altmanifold proper (has) slant altmanifold olur [24].

Tanım 3.4.3 K , $(\bar{K}, P, g_1)$ hemen hemen para-Hermityen manifoldunun bir slant altmanifoldu olsun.

Eğer, X space-like ya da time-like vektör alanı için RX time-like ya da space-like olur ve ayrıca $\frac{\|RX\|}{\|PX\|} > 1$ olur ise altmanifold tip-1 olarak isimlendirilir.

Eğer, X space-like ya da time-like vektör alanı için RX time-like ya da space-like olur ve ayrıca $\frac{\|RX\|}{\|PX\|} < 1$ olur ise altmanifold tip-2 olarak isimlendirilir [3,23].

Teorem 3.4.4 $K, (\bar{K}, P, g_1)$ hemen hemen para-Hermitian manifoldunun bir slant altmanifoldu olsun.

a) K , tip-1 slant altmanifold olsun. Bunun için gerek ve yeter şart her X space-like (time-like) vektör alanı için, RX time-like (space-like) vektör alanı olmasıdır. Ayrıca bir $\mu \in (1, \infty)$ fonksiyonu ortaya çıkar. Bundan dolayı

$$R^2 = \mu Id \text{ ve } \mu = \cosh^2 \theta \quad (3.13)$$

olur ve burada θ , K 'nin slant açısını ifade eder.

b) K , tip-2 slant altmanifold olsun. Bunun için gerek ve yeter şart her X space-like (time-like) vektör alanı için RX_a time-like (space-like) olmasıdır. Ayrıca bir $\mu \in (1, \infty)$ fonksiyonu ortaya çıkar. Bundan dolayı

$$R^2 = \mu Id \text{ ve } \mu = \cos^2 \theta \quad (3.14)$$

olur ve burada θ , K 'nin slant açısını ifade eder [3].

İspat. İlk olarak, eğer K slant tip-1 altmanifold ise X space-like vektör alanı için RX time-like vektör alanı olur ve (3.1) denklemi kullanılarak PX inde time-like olduğu görülür. Ayrıca bu $RX/PX > 1$ ifadesini sağlar. Bu yüzden θ açısı mevcuttur ki

$$\cosh \theta = \frac{\|RX\|}{\|PX\|} = \frac{\sqrt{-g_1(RX, RX)}}{\sqrt{-g_1(PX, PX)}} \quad (3.15)$$

bulunur. (3.1) ve (3.15) denklemleri kullanılarak

$$g_1(R^2 X, X) = \cosh^2 \theta g_1(X, X)$$

elde edilir. Buradan da $R^2X = \mu X$ olduğu görülür. (3.15) denklemi de kullanılarak, $\mu = \cosh^2 \theta$ elde edilir.

Aynı metod ile çalıştığımızda Z time-like vektör alanı için RZ ve PZ space-like olur. Bundan dolayı (3.15) denkleminin yerine

$$\cosh \theta = \frac{\|RZ\|}{\|PZ\|} = \frac{\sqrt{g_1(RZ, RZ)}}{\sqrt{g_1(PZ, PZ)}}$$

elde edilir. $R^2Z = \mu Z$ olduğundan dolayı her Z space-like ve time-like vektör alanları için $R^2 = \mu I_d$ olur. Dolayısıyla **a)** ispatlanır.

Benzer bir yol kullanılarak **b)** ninde ispatı yapılır. Ayrıca Teorem 3.4.4. ve (3.1), (3.5) ve (3.6) denklemleri kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 3.4.5 K , θ slant fonksiyonlu $(\bar{K}, P, g_1)$ hemen hemen para-Hermityen manifoldunun bir slant altmanifoldu olsun. Her non-null $X, Y \in \Gamma(TK)$ vektör alanları için

a) eğer K , tip-1 altmanifold ise

$$g_1(RX, RY) = -\cosh^2 \theta g_1(X, Y), \quad g_1(SX, SY) = \sinh^2 \theta g_1(X, Y) \quad (3.16)$$

elde edilir.

b) eğer K , tip-2 altmanifold ise

$$g_1(RX, RY) = -\cos^2 \theta g_1(X, Y), \quad g_1(SX, SY) = -\sin^2 \theta g_1(X, Y) \quad (3.17)$$

elde edilir [3,24].

Sonuç 3.4.6 K , θ slant fonksiyonlu $(\bar{K}, P, g_1)$ hemen hemen para-Hermityen manifoldunun bir slant altmanifoldu olsun. $\forall X \in \Gamma(TK)$ vektör alanı için

a) K , tip-1 altmanifold olması için gerek ve yeter şart

$$rSX = -\sinh^2 \theta X \quad \text{ve} \quad sSX = -RSX \quad (3.18)$$

eşitliklerinin sağlamasıdır.

b) K nın tip-2 altmanifold olması için gerek ve yeter şart

$$rSX = \sin^2 \theta X \quad \text{ve} \quad sSX = -RSX \quad (3.19)$$

olmasıdır [3,24].

Tanım 3.4.7 $\bar{K}$ a-boyutlu bir manifold ve K da $\bar{K}$ nün b-boyutlu altmanifoldu olsun. h_1 ikinci temel form ve $\forall X, Y \in \Gamma(TK)$ ve $\forall V \in \Gamma(TK)^\perp$ olmak üzere

$$\nabla^\perp X^V = 0$$

ise V ye **paraleldir** denir ve

$$\nabla_X h_1 = 0$$

ise **ikinci temel form paraleldir** denir [49].

Tanım 3.4.8 $(\bar{K}, P, g_1)$ bir yarı-Riemann manifoldu ve K , $\bar{K}$ manifoldunun altmanifoldu olsun. Eğer h_1 ikinci temel form sıfır ise altmanifoldta **tamamen jeodeziktir** denir [49].

Tanım 3.4.9 $V \in \Gamma(K)^\perp$ ve $\lambda \in C^\infty(K, \mathbb{R})$ olmak üzere $A_V = \lambda$ ise K altmanifoldu V vektör alanına göre **umbiliktir** denir. Eğer K altmanifoldu her normal vektör alanına göre umbilik ise K altmanifolduna **tamamen umbilik altmanifold** denir [49].

Teorem 3.4.10 $\bar{K}$ bir yarı-Riemann manifoldu ve K , $\bar{K}$ manifoldunun altmanifoldu olsun. Bu durumda H altmanifoldun ortalama eğrilik vektör alanı olmak üzere K altmanifoldunun tamamen umbilik olması için gerek ve yeter şart $X, Y \in \Gamma(K)$ için

$$h_1(X, Y) = g_1(X, Y)H$$

olmasıdır. Teoremden de anlaşılmaktadır ki bir K altmanifoldunun tamamen umbilik olması için gerek ve yeter şart $X \in \Gamma(K)$ ve $V \in \Gamma(K)^\perp$ için

$$A_V X = g_1(H, V)X$$

olmasıdır [49].

Tanım 3.4.11 Bir yarı-Riemann manifoldun altmanifoldunun ortalama eğrilik vektör alanı sıfır ise altmanifoldta **minimaldir** denir [49].

3.5 Warped Çarpım Manifoldlar

Tanım 3.5.1 (L, g_1) ve (N, g_2) iki tane yarı-Riemann altmanifold olsun. $K = L \times_k N$ warped çarpımı, $L \times N$ e bağlı yarı-Riemann yapısıdır. $k : L \rightarrow (0, \infty)$

olarak tanımlansın ve her $(t, p) \in L \times N$ için $q(t, p) = t$, $a(t, p) = p$ kullanılarak $q : L \times N \rightarrow L$, $a : L \times N \rightarrow N$ projeksiyonları verilsin. Öyleki; her $X, Y \in K$ için

$$g(X, Y) = g_1(q_*X, q_*Y) + (koq)^2 g_2(a_*X, a_*Y)$$

olur. Burada $*$ tanjant yapıyı tanımlar [9]. k fonksiyonu, **warping fonksiyon** olarak isimlendirilir. Eğer warping fonksiyonu sabit ise K manifoldu, **trivial** olarak adlandırılır. Eğer warping fonksiyonu sabit değilse K manifoldu, **non-trivial** olarak adlandırılır. $K = L \times_k N$ manifoldunda **warped çarpım manifoldu** olarak ifade edilir.

K manifoldunda L manifolduna **tamamen jeodezik altmanifold**, N manifolduna da **tamamen umbilik altmanifold** denir [47].

Tanım 3.5.2 (L, g_1) ve (N, g_2) yarı-Riemann altmanifoldlar olsun. $K =_{k_2} L \times_{k_1} N$ warped çarpımı, $L \times N$ e bağlı bir yarı-Riemann yapı olarak tanımlansın. $k_1 : L \rightarrow (0, \infty)$ ve $k_2 : N \rightarrow (0, \infty)$ olarak tanımlansın ve her $(t, p) \in L \times N$ için $q(t, p) = t$, $a(t, p) = p$ kullanılarak $q : L \times N \rightarrow L$, $a : L \times N \rightarrow N$ projeksiyonları verilsin.

Öyleki; her $X, Y \in K$ için

$$g_1(X, Y) = (k_2 o a)^2 g_1(z_*X, z_*Y) + (k_1 o q)^2 g_2(z_*X, z_*Y)$$

olur. Burada z_* yapısı türev dönüşümü olarak tanımlanır [9]. k_1, k_2 fonksiyonları warping fonksiyon olarak isimlendirilir. Eğer warping fonksiyonlar sabit ise K manifoldu **trivial** olarak adlandırılır. Eğer warping fonksiyonu sabit değilse $K =_{k_2} L \times_{k_1} N$ manifoldu **non-trivial doubly warped çarpım** olarak adlandırılır [27].

Tanım 3.5.3 $K =_{k_2} L \times_{k_1} N$ warped çarpımı, $L \times N$ e bağlı bir yarı-Riemann yapı olarak tanımlansın. Eğer

- a) hem $k_1 = 1$ hem de $k_2 = 1$ ise $K = L \times N$ manifolduna **çarpım manifold** denir.
- b) ya $k_1 = 1$ ya da $k_2 = 1$ ise $K = L \times_k N$ manifolduna **warped çarpım manifold** denir.
- c) k_1, k_2 warping fonksiyonları sabit değerler almayıp bir fonksiyon belirtiyor ise $K =_{k_2} L \times_{k_1} N$ manifolduna **non-trivial doubly warped çarpım manifold** denir [9].

Lemma 3.5.4 $K = L \times_k N$ warped çarpım manifoldu, $L \times N$ e bağlı bir yarı-Riemann yapı olarak tanımlansın. $\forall X, Y \in L$ ve $\forall V, W \in N$ vektör alanları verilsin. [9] da verilen Lemma 7.3 kullanılarak

$$\nabla_X V = \nabla_V X = (X \ln k) V$$

elde edilir.

Teorem 3.5.5 ∇ , K manifoldunun bir Levi-Civita konneksiyonu olarak ifade edilir. Ayrıca, K manifoldu üzerinde $(e_1, \dots, e_s)$ ortonormal çatıları için

$$\|grad(k)\|^2 = \sum_{v=1}^s (e_v(k))^2$$

elde edilir. Burada $grad(k)$, $g_1(grad(k), X) = X(k)$ olarak tanımlanan k nın gradiyentidir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölüm üç kısımdan oluşmaktadır. İlk bölümde para-Kaehler geometride noktasal slant altmanifoldlar üzerine çalışmalar yapıldı. İkinci bölümde para-Kaehler geometride warped çarpım noktasal slant altmanifoldlar üzerine çalışmalar yapıldı. Son bölümde ise bu altmanifoldlarla ilgili ikinci temel formun normunun karesi ile ilgili eşitsizlikler üzerine çalışmalar yapıldı.

4.1 Para-Kaehler Geometride Noktasal Slant Altmanifoldlar

Bu bölümde ilk önce para-Kaehler geometride has noktasal slant altmanifoldlar ile ilgili bazı tanımlar teoremler ve örnekler verildi. Daha sonra üç alt bölüm şeklinde bazı noktasal slant altmanifoldlar araştırıldı. İlk olarak para-Kaehler geometride noktasal yarı-slant altmanifoldlar İkinci olarak noktasal bi-slant altmanifoldlar çalışıldı ve son olarakta nearly para-Kaehler geometride noktasal anti-slant altmanifoldlar elde edildi.

Tanım 4.1.1 K , $(\bar{K}, P, g_1)$ para-Kaehler manifoldunun bir has noktasal slant altmanifoldu olsun.

Eğer, X space-like ya da time-like vektör alanı için RX time-like ya da space-like olur ve ayrıca $\frac{\|RX\|}{\|PX\|} > 1$ olur ise altmanifold tip-1 olarak isimlendirilir.

Eğer, X space-like ya da time-like vektör alanı için RX time-like ya da space-like olur ve ayrıca $\frac{\|RX\|}{\|PX\|} < 1$ olur ise altmanifold tip-2 olarak isimlendirilir [23].

Teorem 4.1.2 K , $(\bar{K}, P, g_1)$ para-Kaehler manifoldunun bir has noktasal slant altmanifoldu olsun.

a) K , tip-1 noktasal slant altmanifold olsun. Bunun için gerek ve yeter şart her X space-like (time-like) vektör alanı için, RX time-like (space-like) vektör alanı olmasıdır. Ayrıca bir $\mu \in (1, \infty)$ fonksiyonu ortaya çıkar. Böylece

$$R^2 = \mu Id \text{ ve } \mu = \cosh^2 \theta \quad (4.1)$$

olur ve burada θ , K 'nin slant fonksiyonunu ifade eder.

b) K , tip-2 noktasal slant altmanifold olsun. Bunun için gerek ve yeter şart her X space-like (time-like) vektör alanı için RX_a time-like (space-like) olmasıdır. Ayrıca bir $\mu \in (1, \infty)$ fonksiyonu ortaya çıkar. Bundan dolayı

$$R^2 = \mu Id \text{ ve } \mu = \cos^2 \theta \quad (4.2)$$

olur ve burada θ , K 'nin slant fonksiyonunu ifade eder.

İspat. İlk olarak, eğer K bir noktasal slant tip-1 altmanifold ise X space-like vektör alanı için RX time-like vektör alanı olur ve (3.1) denklemi kullanılarak PX inde time-like olduğu görülür. Ayrıca bu $RX/PX > 1$ ifadesini sağlar. Bu yüzden θ fonksiyonu mevcuttur ki

$$\cosh \theta = \frac{\|RX\|}{\|PX\|} = \frac{\sqrt{-g_1(RX, RX)}}{\sqrt{-g_1(PX, PX)}} \quad (4.3)$$

bulunur. (3.1) ve (3.15) denklemleri kullanılarak

$$g_1(R^2X, X) = \cosh^2 \theta g_1(X, X)$$

elde edilir. Buradan da $R^2X = \mu X$ olduğu görülür. (3.15) denklemi de kullanılarak, $\mu = \cosh^2 \theta$ elde edilir.

Aynı metod ile çalıştığımızda Z time-like vektör alanı için RZ ve PZ space-like olur. Bundan dolayı (3.15) denkleminin yerine

$$\cosh \theta = \frac{\|RZ\|}{\|PZ\|} = \frac{\sqrt{g_1(RZ, RZ)}}{\sqrt{g_1(PZ, PZ)}}$$

elde edilir. $R^2Z = \mu Z$ olduğundan dolayı her Z space-like ve time-like vektör alanları için $R^2 = \mu I_a$ olur. Dolayısıyla a) ispatlanır.

Benzer bir yol kullanılarak b) ninde ispatı yapılır. Ayrıca Teorem 4.1.2. ve (3.1), (3.5) ve (3.6) denklemleri kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.1.3 K , θ slant fonksiyonlu $(\bar{K}, P, g_1)$ para-Kaehler manifoldunun bir has noktasal slant altmanifoldu olsun. Her non-null $X, Y \in \Gamma(TK)$ vektör alanları için

a) eğer K , tip-1 altmanifold ise

$$g_1(RX, RY) = -\cosh^2 \theta g_1(X, Y), \quad g_1(SX, SY) = \sinh^2 \theta g_1(X, Y) \quad (4.4)$$

olur.

b) eğer K , tip-2 altmanifold ise

$$g_1(RX, RY) = -\cos^2 \theta g_1(X, Y), \quad g_1(SX, SY) = -\sin^2 \theta g_1(X, Y) \quad (4.5)$$

elde edilir [24].

Sonuç 4.1.4 K , θ slant fonksiyonlu $(\bar{K}, P, g_1)$ para-Kaehler manifoldunun has noktasal slant altmanifoldu olsun. $\forall X \in \Gamma(TK)$ vektör alanı için

a) K , tip-1 altmanifold olması için gerek ve yeter şart

$$rSX = -\sinh^2 \theta X \quad \text{ve} \quad sSX = -RSX \quad (4.6)$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

b) K nın tip-2 altmanifold olması için gerek ve yeter şart

$$rSX = \sin^2 \theta X \quad \text{ve} \quad sSX = -RSX \quad (4.7)$$

eşitliklerinin var olmasıdır [3].

Uyarı 4.1.5 Has noktasal slant altmanifoldlar slant altmanifoldların genelleştirilmiş bir halidir.

Şimdi para-kompleks yapıyı, yarı-Riemann metriği ve Kartezyen koordinatları belirttikten sonra bu yapıya göre noktasal slant altmanifoldlar ile ilgili örnekler verelim.

R_k^{2k} üzerinde bir para-kompleks yapı

$$P\left(\frac{\partial}{\partial_{x_{2f}}}\right) = \frac{\partial}{\partial_{x_{2f-1}}}, \quad P\left(\frac{\partial}{\partial_{x_{2f-1}}}\right) = \frac{\partial}{\partial_{x_{2f}}}, \quad g_1 = (dx^1)^2 - (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - \dots - (dx^{2k})^2 \text{ şeklinde}$$

tanımlansın. Burada $f \in \{1, \dots, k\}$ ve $(x_1, x_2, \dots, x_{2k})$, R_k^{2k} üzerindeki Kartezyen koordinatları ifade etmektedir. Aşağıdaki örnekler için $\bar{R}_2^4$ para-Kompleks yapının

üzerinde bir K yarı-Riemann altmanifoldu tanımlayalım. İmmersiyonu $\psi : K \rightarrow \bar{R}_2^4$ olarak verilsin. Buna göre,

Örnek 4.1.6 $1 < n \in R$ için

$$\psi(m, n) = (m, \sinh n, \cosh n, n)$$

slant açısı $R^2 = \frac{\cosh^2 n}{2} I$ olan bir noktasal slant tip-2 altmanifoldu ifade eder.

Örnek 4.1.7 $n \neq 0$ ve $n \neq \pm 1$ için

$$\psi(m, n) = (m \sin \theta, mn \sin \theta, m \cos \theta, mn \cos \theta)$$

slant açısı $R^2 = \frac{1}{1-n^2} I$ olan bir noktasal slant altmanifoldu ifade eder.

- i) Eğer $0 < 1 - n^2 < 1$ ise tip-1 altmanifold olur.
- ii) Eğer $1 - n^2 > 1$ ise tip-2 altmanifold olur.

4.1.1 Para-Kaehler geometride noktasal yarı-slant altmanifoldlar

Bu bölümde, para-Kaehler manifoldlarda noktasal yarı-slant altmanifoldlar tanımlandıktan sonra bunlar üzerine çalışmalar yapılmaktadır ve örnekler verilmektedir.

Tanım 4.1.1.1 $K, (\bar{K}, P, g_1)$ para-Kaehler manifoldunun yarı-Riemann altmanifoldu olsun. Eğer $q \in K$ noktasında K manifoldunun aşağıdaki şartları sağlayan D^T ve D^θ gibi iki distribüsyonu ortaya çıkarsa K manifoldu, noktasal yarı-slant altmanifold olur [16]. Burada

- i) $TK = D^T \oplus D^\theta$ olur.
- ii) D^T , bir invaryant (para-holomorfik) distribüsyondur. Yani; $PD^T = D^T$ olur.
- iii) D^θ , θ slant fonksiyonlu bir noktasal slant distribüsyondur.

Burada θ slant açısı sabit değildir. Bir fonksiyondur.

D^T ve D^θ nın boyutunu m_1 ve m_2 olarak alalım.

- a) Eğer $m_2 = 0$ ise, K bir para-holomorfik altmanifolddur.
- b) Eğer $m_1 = 0$ ise, K bir noktasal slant altmanifolddur.

c) Eğer θ açısı sabit ise, K bir has yarı-slant altmanifolddur.

Sonucu elde edilir. Ayrıca, eğer $m_1 \neq 0$ ve θ açısı sabit değilse, K bir has noktasal yarı-slant altmanifold olur.

Tanım 4.1.1.2 K , $(\bar{K}, P, g_1)$ para-Kaehler manifoldunun bir noktasal yarı-slant altmanifoldu olsun.

***Tip-1 için:** X vektörü spacelike (timelike) ise PX vektörü timelike (spacelike) olur ve $\frac{\|RX\|}{\|PX\|} > 1$ ise K manifolduna $\bar{K}$ nin has noktasal slant tip-1 altmanifoldu denir [23].

$$\lambda = \cosh^2 \theta \text{ olur. } \lambda \in (1, \infty) \text{ ve } (\theta > 0) \text{ 'dır.} \quad (4.1.1)$$

***Tip-2 için:** X vektörü spacelike (timelike) ise PX vektörü timelike (spacelike) olur ve $\frac{\|RX\|}{\|PX\|} < 1$ ise K manifolduna $\bar{K}$ nin has noktasal slant tip-2 altmanifoldu denir [23].

$$\lambda = \cos^2 \theta \text{ olur. } \lambda \in (0, 1) \text{ ve } (0 < \theta < 2\pi) \text{ 'dır.} \quad (4.1.2)$$

K , $\bar{K}$ para-Kaehler manifoldunun bir has noktasal yarı-slant tip-1 ve tip-2 altmanifoldu olsun. Biz sırasıyla D^T ve D^θ distribüsyonları üzerinde P_1 ve P_2 projeksiyonları tanımlayalım. $X \in \Gamma(TK)$ için

$$X = P_1 X + P_2 X \quad (4.1.3)$$

denklemine P uygularsak

$$PX = PP_1 X + PP_2 X$$

bulunur. Yukarıdaki denklemde (3.5) denklemini kullanırsak

$$PX = PP_1 X + RP_2 X + SP_2 X \quad (4.1.4)$$

elde edilir. Ayrıca invaryant için $PX = RX$ ve slant için $PX = RX + SX$ bilgilerini kullanırsak

$$PP_1 X \in \Gamma(D^T) \text{ ve } SP_1 X = 0 \quad (4.1.5)$$

$$RP_2 X \in \Gamma(D^\theta) \text{ ve } SP_2 X \in \Gamma(TK^\perp) \quad (4.1.6)$$

$$RX = PP_1 X + RP_2 X \quad (4.1.7)$$

elde edilir.

Teorem 4.1.1.3 $K, (\bar{K}, P, g_1)$ hemen hemen para-kompleks manifoldunun bir has noktasal yarı-slant altmanifoldu olsun.

a) K noktasal yarı-slant tip-1 altmanifold olsun. Bunun için gerek ve yeter şart her X spacelike-(timelike) vektör alanı için RX timelike-(spacelike) vektör alanı olmasıdır. Ayrıca bir $\lambda \in (1, \infty)$ fonksiyonu ortaya çıkar. Bundan dolayı

$$\text{Tip-1 için; } R^2 = \lambda I, \lambda = \cosh^2 \theta$$

olur ve burada θ , K 'nin slant fonksiyonunu ifade eder.

b) K noktasal yarı-slant tip-2 altmanifold olsun. Bunun için gerek ve yeter şart her X spacelike-(timelike) vektör alanı için RX timelike-(spacelike) vektör alanı olmasıdır. Ayrıca bir $\lambda \in (0, 1)$ fonksiyonu ortaya çıkar. Bundan dolayı

$$\text{Tip-2 için; } R^2 = \lambda I, \lambda = \cos^2 \theta$$

olur ve burada θ , K 'nin slant fonksiyonunu ifade eder.

İspat. (3.1), (3.6) kullanılarak. Teorem 3.4.4. deki (3.13) ve (3.14) denklemlerinin ispatlarından yararlanarak benzer bir şekilde a) ve b) nin ispatını elde ederiz.

$$\cosh \theta = \frac{g_1(PX, RX)}{\|PX\| \|RX\|} = \frac{g_1(RX + SX, RX)}{\sqrt{g_1(PX, PX)} \|RX\|} = \frac{g_1(RX, RX)}{\|X\| \|RX\|} = \frac{g_1(X, R^2 X)}{\|X\| \|RX\|}$$

$$\text{denkleminde } \cosh \theta = \frac{|RX|}{|PX|} \text{ ifadesini kullanarak}$$

$$\cosh \theta = \frac{g_1(X, R^2 X)}{\|X\| \cosh \theta \|PX\|}$$

elde edilir ve PX yerine X ifadesini kullanırsak

$$\cosh \theta = \frac{g_1(X, R^2 X)}{\|X\|^2 \cosh \theta}$$

$$\cosh^2 \theta g_1(X, X) = g_1(X, R^2 X)$$

$$g_1(X, \cosh^2 \theta X) = g_1(X, R^2 X)$$

$$R^2 X = \cosh^2 \theta X_a \text{ ise } R^2 = \cosh^2 \theta I \text{ olur. Buradan}$$

$$\text{Tip-1 için; } R^2 = \lambda I \text{ ise } \lambda = \cosh^2 \theta \quad (4.1.8)$$

bulunur. Benzer işlemler yapılarak,

Tip-2 içinde; $R^2 = \lambda I$ ise $\lambda = \cos^2 \theta$ (4.1.9)

bulunur. Bunlardan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.1.4 $K, \bar{K}$ para-Kaehler manifoldunun bir has noktasal yarı-slant tip-1 ve tip-2 altmanifoldu olsun. $X, Y \in D^\theta$ için

Tip-1 için;

$$g_1(RX, RY) = -\cosh^2 \theta g_1(X, Y) \quad (4.1.10)$$

$$g_1(SX, SY) = \sinh^2 \theta g_1(X, Y) \quad (4.1.11)$$

dır.

Tip-2 için;

$$g_1(RX, RY) = -\cos^2 \theta g_1(X, Y) \quad (4.1.12)$$

$$g_1(SX, SY) = -\sin^2 \theta g_1(X, Y) \quad (4.1.13)$$

dır.

İspat: (Tip-1 için) $\forall X, Y \in D^\theta$ için ve (3.1) ve (3.5) denklemleri kullanılarak

$$g_1(PX, Y) = -g_1(X, PY)$$

$$g_1(RX + SX, Y) = -g_1(X, RY + SY)$$

$$g_1(RX, Y) = -g_1(X, RY)$$

elde edilir. Denklemden Y yerine RY alırsak

$$g_1(RX, RY) = -g_1(X, R^2 Y)$$

olur. Burada denklem (4.1.8) kullanılarak

$$g_1(RX, RY) = -g_1(X, \cosh^2 \theta Y)$$

$$g_1(RX, RY) = -\cosh^2 \theta g_1(X, Y)$$

böylece denklem (4.1.10) elde edilir. Daha sonra

$$g_1(PX, PY) = -g_1(X, Y)$$

$$g_1(RX + SX, RY + SY) = -g_1(X, Y)$$

$$g_1(RX, RY) + g_1(SX, SY) = -g_1(X, Y)$$

olur. Denklem (4.1.10) ve hiperbolik fonksiyonların özelliğinden

$$g_1(SX, SY) = -g_1(X, Y) + \cosh^2 \theta g_1(X, Y)$$

$$g_1(SX, SY) = \sinh^2 \theta g_1(X, Y)$$

olur. Böylece (4.1.11) denklemi elde edilir.

Tip-2 içinde benzer işlemler yapılarak (4.1.12) ve (4.1.13) denklemleri elde edilir.

Teorem 4.1.1.5 $K, \bar{K}$ para-Kaehler manifoldunun has noktasal yarı-slant tip-1 ve tip-2 altmanifoldu olsun. $\forall X, Y \in D^\theta$ ve $\forall V \in D^T$ için

I) D^T distribüsyonu integrallenebilirdir. Bunun için gerek ve yeter şart

$$g_1(h_1(X, PY), SV) = g_1(h_1(PX, Y), SV)$$

olmasıdır.

II) D^θ distribüsyonu integrallenebilirdir. Bunun için gerek ve yeter şart

$$g_1(A_{SRW}Z - A_{SRZ}W, X) = g_1(A_{SW}Z - A_{SZ}W, PX)$$

olmasıdır.

İspat: Tip-1 için;

I) $\forall X, Y \in D^\theta$ ve $\forall V \in D^T$ olsun. (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) ve (3.6) denklemlerini kullanarak

$$\begin{aligned} g_1([X, Y], V) &= g_1(\bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X, V) \\ &= g_1(\bar{\nabla}_X Y, V) - g_1(\bar{\nabla}_Y X, V) \\ &= -g_1(P\bar{\nabla}_X Y, PV) + g_1(P\bar{\nabla}_Y X, PV) \\ &= -g_1(P\bar{\nabla}_X Y, RV + SV) + g_1(P\bar{\nabla}_Y X, RV + SV) \\ &= -g_1(P\bar{\nabla}_X Y, RV) - g_1(P\bar{\nabla}_X Y, SV) + g_1(P\bar{\nabla}_Y X, RV) + g_1(P\bar{\nabla}_Y X, SV) \\ &= g_1(\bar{\nabla}_X Y, PRV) - g_1(\bar{\nabla}_X PY, SV) - g_1(\bar{\nabla}_Y X, PRV) + g_1(\bar{\nabla}_Y PX, SV) \\ &= g_1(\bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X, R^2V + SRV) - g_1(\bar{\nabla}_X PY, SV) + g_1(\bar{\nabla}_Y PX, SV) \\ &= g_1([X, Y], \cosh^2 \theta V) + g_1([X, Y], SRV) \\ &\quad - g_1(h(X, PY), SV) + g_1(h(Y, PX), SV) \end{aligned}$$

elde edilir. Hiperbolik fonksiyonların özelliklerini kullanarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$g_1([X, Y], V) - \cosh^2 \theta g_1([X, Y], V) = -g_1(h_1(X, PY), SV) + g_1(h_1(Y, PX), SV)$$

$$\sinh^2 \theta g_1([X, Y], V) = -g_1(h_1(X, PY), SV) + g_1(h_1(Y, PX), SV)$$

h_1 simetrik olduğundan ve **I** denklemini elde edebilmek için $\sinh^2 \theta \neq 0$ ve $V \neq 0$ olduğundan $[X, Y] = 0$ olur. Buda D^T distribüsyonunun integrallenebilir olduğunu gösterir.

II) $\forall Z, W \in D^\theta$ ve $\forall X \in D^T$ olsun. (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) ve (3.6) denklemlerini kullanarak

$$\begin{aligned} g_1([Z, W], X) &= -g_1(P[Z, W], PX) \\ &= -g_1(P\bar{\nabla}_Z W, PX) + g_1(P\bar{\nabla}_W Z, PX) \\ &= -g_1(\bar{\nabla}_Z PW, PX) + g_1(\bar{\nabla}_W PZ, PX) \\ &= -g_1(\bar{\nabla}_Z(RW + SW), PX) + g_1(\bar{\nabla}_W(RZ + SZ), PX) \\ &= -g_1(\bar{\nabla}_Z RW, PX) - g_1(\bar{\nabla}_Z SW, PX) \\ &\quad + g_1(\bar{\nabla}_W RZ, PX) + g_1(\bar{\nabla}_W SZ, PX) \\ &= g_1(\bar{\nabla}_Z PRW, X) - g_1(\bar{\nabla}_Z SW, PX) \\ &\quad - g_1(\bar{\nabla}_W PRZ, X) + g_1(\bar{\nabla}_W SZ, PX) \\ &= g_1(\bar{\nabla}_Z R^2 W, X) + g_1(\bar{\nabla}_Z SRW, X) - g_1(\bar{\nabla}_Z SW, PX) \\ &\quad - g_1(\bar{\nabla}_W R^2 Z, X) - g_1(\bar{\nabla}_W SRZ, X) + g_1(\bar{\nabla}_W SZ, PX) \\ &= \cosh^2 \theta g_1(\bar{\nabla}_Z W, X) - g_1(A_{SRW} Z, X) + g_1(A_{SW} Z, PX) \\ &\quad - \cosh^2 \theta g_1(\bar{\nabla}_W Z, X) + g_1(A_{SRZ} W, X) - g_1(A_{SZ} W, PX) \end{aligned}$$

elde edilir. Hiperbolik fonksiyonların özelliklerini kullanarak, aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$g_1([Z, W], X) - \cosh^2 \theta g_1([Z, W], X) = g_1(A_{SRZ} W - A_{SRW} Z, X) - g_1(A_{SZ} W - A_{SW} Z, PX)$$

$$-\sinh^2 \theta g_1([Z, W], X) = -g_1(A_{SRW}Z - A_{SRZ}W, X) + g_1(A_{SW}Z - A_{SZ}W, PX)$$

II) denklemini elde edebilmek için $-\sin h^2 \theta \neq 0$ ve $X \neq 0$ olduğundan $[Z, W] = 0$ olur. Buda D^θ distribüsyonunun integrallenebilir olduğunu gösterir.

Tip-2 içinde benzer yöntem kullanılarak istenen elde edilir.

Teorem 4.1.1.6 $K, \bar{K}$ para-Kaehler manifoldunun bir has noktasal yarı-slant tip-1 ve tip-2 altmanifoldu olsun.

I) Para-holomorfik D^T distribüsyonunun tamamen jeodezik foliasyon olarak tanımlanması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} &\forall X, Y \in \Gamma(D^T) \text{ ve } \forall V \in \Gamma(D^\theta) \text{ için} \\ &g_1(h_1(X, Y), SRV) = g_1(h_1(X, PY), SV) \end{aligned}$$

olmasıdır.

II) D^θ slant distribüsyonunun tamamen jeodezik foliasyon olarak tanımlanması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} &\forall X \in \Gamma(D^T) \text{ ve } \forall U, V \in \Gamma(D^\theta) \text{ için} \\ &g_1(h_1(U, X), SRV) = g_1(h_1(U, PX), SV) \end{aligned}$$

olmasıdır.

İspat: Tip-1 için;

$$\begin{aligned} &\forall X, Y \in \Gamma(D^T) \text{ ve } \forall V \in \Gamma(D^\theta) \text{ için} \\ &g_1(\bar{\nabla}_X Y, V) = -g_1(\bar{\nabla}_X PY, PV) \\ &g_1(\bar{\nabla}_X Y, V) = -g_1(\bar{\nabla}_X PY, RV + SV) \\ &= -g_1(\bar{\nabla}_X PY, RV) - g_1(\bar{\nabla}_X PY, SV) \\ &= g_1(\bar{\nabla}_X Y, PRV) - g_1(\bar{\nabla}_X PY, SV) \\ &= g_1(\bar{\nabla}_X Y, R^2V + SRV) - g_1(\bar{\nabla}_X PY, SV) \\ &= g_1(\bar{\nabla}_X Y, R^2V) + g_1(\bar{\nabla}_X Y, SRV) - g_1(\bar{\nabla}_X PY, SV) \end{aligned}$$

elde edilir. Hiperbolik fonksiyonların özelliği ile (3.3) denklemi kullanılarak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$(1 - \cosh^2 \theta) g_1(\bar{\nabla}_X Y, V) = g_1(h_1(X, Y), SRV) - g_1(h_1(X, PY), SV)$$

$$-\sinh^2 \theta g_1(\bar{\nabla}_X Y, V) = g_1(h_1(X, Y), SRV) - g_1(h_1(X, PY), SV)$$

I) denklemini elde edebilmek için $-\sin h^2 \theta \neq 0$ ve $V \neq 0$ olduğundan $\bar{\nabla}_X Y = 0$ olur.

Buda D^T distribüsyonun tamamen jeodezik foliasyon olduğunu gösterir. Her $X \in \Gamma(D^T)$ ve her $U, V \in \Gamma(D^\theta)$ için

$$g_1(\bar{\nabla}_U X, V) = -g_1(\bar{\nabla}_U PX, PV)$$

$$g_1(\bar{\nabla}_U X, V) = -g_1(\bar{\nabla}_U PX, RV + SV)$$

$$= -g_1(\bar{\nabla}_U PX, RV) - g_1(\bar{\nabla}_U PX, SV)$$

$$= g_1(\bar{\nabla}_U X, PRV) - g_1(\bar{\nabla}_U PU, SV)$$

$$= g_1(\bar{\nabla}_U X, R^2V + SRV) - g_1(\bar{\nabla}_U PX, SV)$$

$$= g_1(\bar{\nabla}_U X, R^2V) + g_1(\bar{\nabla}_U X, SRV) - g_1(\bar{\nabla}_U PX, SV)$$

olur. Hiperbolik fonksiyonların özelliği ile (3.3) denklemi kullanılarak aşağıdaki ifade elde edilir:

$$(1 - \cosh^2 \theta) g_1(\bar{\nabla}_U X, V) = g_1(h_1(U, X), SRV) - g_1(h_1(U, PX), SV)$$

$$-\sinh^2 \theta g_1(\bar{\nabla}_U X, V) = g_1(h_1(U, X), SRV) - g_1(h_1(U, PX), SV)$$

II) denklemini elde edebilmek için $-\sin h^2 \theta \neq 0$ ve $V \neq 0$ olduğundan $\bar{\nabla}_U X = 0$

olur. Buda D^θ distribüsyonun tamamen jeodezik foliasyon olduğunu belirtir.

Tip-2 içinde yukarıdaki yola benzer işlemler yapılarak benzer sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.1.1.7 $K, \bar{K}$ para-Kaehler manifoldunun bir has noktasal yarı-slant tip-1 ve tip-2 altmanifoldu olsun. O zaman $K, K = K^\top x_k K^\theta$ yarı-Riemann warped çarpım manifoldu olur. Bunun için gerek ve yeter şart;

$$A_{SRV} X = A_{SV} PX$$

olmasıdır. $\forall X \in \Gamma(D^T)$ ve $\forall V \in \Gamma(D^\theta)$ için K^T bir para-holomorfik altmanifold ve K^θ ise bir noktasal slant altmanifold olur.

4.1.2 Para-Kaehler geometride noktasal bi-slant altmanifoldlar

Bu bölümde, para-Kaehler manifoldlarda noktasal bi-slant altmanifoldlar tanımlandıktan sonra bunlar üzerine sonuçlar elde edilmektedir.

Tanım 4.1.2.1 $K, (\bar{K}, P, g_1)$ para-Kaehler manifoldunun yarı-Riemann altmanifoldu olsun. Eğer $q \in K$ noktasında K manifoldunun D^{θ_1} ve D^{θ_2} gibi aşağıdaki şartları sağlayan iki farklı slant açılı distribüsyonu ortaya çıkarsa K manifoldu, noktasal bi-slant altmanifold olur. Burada

- i) $TK = D^{\theta_1} \oplus D^{\theta_2}$ olur.
- ii) $PD^{\theta_1} \perp D^{\theta_2}$ ve $PD^{\theta_2} \perp D^{\theta_1}$ olur.
- iii) $D^{\theta_1}, D^{\theta_2}$ distribüsyonları, θ_1^a ve θ_2^b slant fonksiyonlu noktasal slant distribüsyonlardır.

Burada θ_1^a ve θ_2^b slant açıları fonksiyon ise ve $\theta_1^a, \theta_2^b \neq 0, \frac{\pi}{2}$ ise K manifoldu, proper (has) noktasal bi-slant altmanifold olur.

$K, \bar{K}$ para-Kaehler manifoldunun noktasal bi-slant altmanifoldu olsun. Yukarıdaki tanımdan

$$T(D_i) \subset D_i \quad (i=1,2)$$

elde edilir. R_m ve R_n , K manifoldu üzerinde projeksiyonlar olsun. $\forall X \in \Gamma(TK)$ için

$$X = R_m X + R_n X \quad (4.1.2.1)$$

elde edilir. Bu denkleme P uygularsak ve ardından (3.6) denklemini kullanırsak

$$PX = PR_m X + PR_n X$$

$$PX = RR_m X + SR_m X + RR_n X + SR_n X$$

$$PX = RR_m X + RR_n X + S(R_m X + R_n X)$$

$$R_1 = RR_m, R_2 = RR_n \text{ ve } X = R_m X + R_n X \text{ için}$$

$$PX = R_1X + R_2X + SX \quad (4.1.2.2)$$

elde edilir.

Noktasal yarı-slant altmanifoldlardaki (4.1.8), (4.1.9) denklemleri kullanılarak ve bu denklemlerin ispatında kullandığımız yöntemlerden de yararlanarak aşağıdaki denklemler elde edilir. $X \in \Gamma(TK)$ için

***Tip-1 için;**

$$R_i^2X = \cosh^2 \theta_i X \quad (i = 1, 2) \quad (4.1.2.3)$$

***Tip-2 için;**

$$R_i^2X = \cos^2 \theta_i X \quad (i = 1, 2) \quad (4.1.2.4)$$

elde edilir. Daha sonra kullanmak için aşağıdaki lemma ve sonuçları verelim.

Lemma 4.1.2.2 K , θ_1^a ve θ_2^b farklı slant fonksiyonlu D^{θ_1} ve D^{θ_2} noktasal slant distribüsyonlu $\bar{K}$ para-Kaehler manifoldunun bir has noktasal bi-slant tip-1 ve tip-2 altmanifoldu olsun.

Tip-1 için;

$$\begin{aligned} \text{I) } (\sinh^2 \theta_2^b + \sinh^2 \theta_1^a) g_1(\nabla_{X_a} Y_b, Z_d) &= g_1(A_{SR_1Y} Z - A_{SY} R_2 Z, X) \\ &\quad + g_1(A_{SR_2Z} Y - A_{SZ} R_1 Y, X) \end{aligned} \quad (4.1.2.5)$$

$$\begin{aligned} \text{II) } (\sinh^2 \theta_2^b + \sinh^2 \theta_1^a) g_1(\nabla_Z W, X) &= g_1(A_{SR_1X} W - A_{SX} R_2 W, Z) \\ &\quad + g_1(A_{SR_2W} X - A_{SW} R_1 X, Z) \end{aligned} \quad (4.1.2.6)$$

dır.

İspat: Tip-1 için;

$$\text{I) } \forall X, Y \in \Gamma(D^{\theta_1}) \text{ ve } \forall Z, W \in \Gamma(D^{\theta_2}) \text{ için}$$

$$g_1(\nabla_X Y, Z) = -g_1(\bar{\nabla}_X PY, PZ)$$

olur. (3.6) denklemini kullanılarak

$$\begin{aligned} g_1(\nabla_X Y, Z) &= -g_1(\bar{\nabla}_X R_1 Y, PZ) - g_1(\bar{\nabla}_X SY, PZ) \\ &= -g_1(\bar{\nabla}_X R_1 Y, PZ) - g_1(\bar{\nabla}_X SY, R_2 Z) - g_1(\bar{\nabla}_X SY, SZ) \\ &= g_1(\bar{\nabla}_X PR_1 Y, Z) - g_1(\bar{\nabla}_X SY, R_2 Z) - g_1(\bar{\nabla}_X SY, SZ) \end{aligned}$$

elde edilir ve (3.1), (3.2), (3.4), (3.6) ve (3.1.2.3) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
g_1(\nabla_X Y, Z) &= -g_1(\bar{\nabla}_X R_1^2 Y, Z) + g_1(\bar{\nabla}_X S R_1 Y, Z) + g_1(A_{SY} X, R_2 Z) \\
&\quad + g_1(\bar{\nabla}_X S Z, S Y) + \cosh^2 \theta g_1(\bar{\nabla}_X Y, Z) \\
&\quad + 2 \sinh 2\theta_1 X g_1(X, Y) - g_1(A_{SR_1 Y} X, Z) \\
&\quad + g_1(A_{SY} X, R_2 Z) + g_1(\bar{\nabla}_X S Z, P Y) - g_1(\bar{\nabla}_X S Z, R_1 Y)
\end{aligned}$$

bulunur. (3.1), (3.4), (3.18) denklemleri ile şekil operatörünün simetrikliği ve distribüsyonların ortogonalitesi kullanılarak

$$\begin{aligned}
(\sinh^2 \theta_1) g_1(\nabla_X Y, Z) &= g_1(A_{SR_1 Y} Z - A_{SY} R_2 Z, X) - g_1(\bar{\nabla}_X R_1^2 Y, Z) + g_1(\bar{\nabla}_X S Z, Y) \\
&\quad + g_1(\bar{\nabla}_X S Z, Y) - g_1(A_{SZ} X, R_1 Y)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.4), (3.18) ve (3.19) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
(\sinh^2 \theta_1 + \sinh^2 \theta_2) g_1(\nabla_X Y, Z) &= g_1(A_{SR_1 Y} Z - A_{SY} R_2 Z, X) \\
&\quad + g_1(A_{SR_2 Z} Y, X) - g_1(A_{SZ} R_1 Y, X)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece (4.1.2.5) denkleminin ispatı tamamlanmış olur. Benzer şekilde bir yol takip edilerek (4.1.2.6) denkleminin de ispatı elde edilir.

Yukarıdaki lemma kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.1.2.3 K , θ_1^a ve θ_2^b farklı slant fonksiyonlu D^{θ_1} ve D^{θ_2} noktasal slant distribüsyonlu $\bar{K}$ para-Kaehler manifoldunun bir has noktasal bi-slant tip-1 ve tip-2 altmanifoldu olsun. O zaman D^{θ_1} distribüsyonu tamamen jeodezik foliasyondur. Bunun için gerek ve yeter şart $\forall X, Y \in \Gamma(D^{\theta_1})$ ve $\forall Z \in \Gamma(D^{\theta_2})$ için

$$g_1(A_{SR_1 Y} Z + A_{SR_2 Z} Y - A_{SY} R_2 Z - A_{SZ} R_1 Y, X) = 0$$

olmasıdır.

İspat: (4.1.2.5) denkleminde kolaylıkla elde edilir.

Sonuç 4.1.2.4 K , θ_1^a ve θ_2^b farklı slant fonksiyonlu D^{θ_1} ve D^{θ_2} noktasal slant distribüsyonlu $\bar{K}$ para-Kaehler manifoldunun bir has noktasal bi-slant tip-1 ve tip-2 altmanifoldu olsun. O zaman D^{θ_2} distribüsyonu tamamen jeodezik foliasyondur. Bunun için gerek ve yeter şart $\forall X \in \Gamma(D^{\theta_1})$ ve $\forall Z, W \in \Gamma(D^{\theta_2})$ için

$$g_1(A_{SR_1X}W + A_{SR_2W}X - A_{SX}R_2W - A_{SW}R_1X, Z) = 0$$

olmasıdır.

İspat: (4.1.2.6) denkleminde kolayca elde edilir.

4.1.3 Nearly para-Kaehler geometride noktasal anti-slant altmanifoldlar

Bu bölümde, nearly para-Kaehler manifoldlarda noktasal anti-slant altmanifoldları tanımladıktan sonra bunlar üzerine çalışmalar yapılmaktadır ve örnekler verilmektedir.

Tanım 4.1.3.1 $K, (\bar{K}, P, g_1)$ nearly para-Kaehler manifoldunun yarı-Riemann altmanifoldu olsun. Eğer K manifoldunun aşağıdaki şartları sağlayan $D^\perp$ ve D^θ distribüsyonları mevcut ise K manifolduna noktasal anti-slant altmanifold denir. Burada

- i) $TK = D^\perp \oplus D^\theta$ dır.
- ii) $D^\perp$, bir anti-invaryant distribüsyondur. Yani; $PD^\perp \subset T^\perp K$ dır.
- iii) D^θ , θ slant fonksiyonlu bir noktasal slant distribüsyondur.

Burada θ slant açısı bir fonksiyondur. Ayrıca, $\theta \neq 0, \frac{\pi}{2}$ olursa, K proper (has) noktasal anti-slant altmanifoldu olur.

Tanım 4.1.3.2 $K, (\bar{K}, P, g_1)$ nearly para-Kaehler manifoldun bir has noktasal anti-slant altmanifoldu olsun.

***Tip-1 için:** X vektörü spacelike –(timelike) ise PX vektörü timelike –(spacelike) olur

ve $\frac{\|RX\|}{\|PX\|} > 1$ olur ise K manifolduna $\bar{K}$ ’nın has slant tip-1 altmanifoldu denir.

$$\lambda = \cosh^2 \theta \text{ olur. } \lambda \in (1, \infty) \text{ ve } (\theta > 0) \text{ 'dır.} \quad (4.1.3.1)$$

***Tip-2 için:** X vektörü spacelike –(timelike) ise PX vektörü timelike –(spacelike) olur

ve $\frac{\|RX\|}{\|PX\|} < 1$ olur ise K manifolduna $\bar{K}$ ’nın has slant tip-2 altmanifoldu denir [3,24].

$$\lambda = \cos^2 \theta \text{ olur. } \lambda \in (0, 1) \text{ ve } (0 < \theta < 2\pi) \text{ 'dır.} \quad (4.1.3.2)$$

Teorem 4.1.3.3 $K, (\bar{K}, P, g_1)$ nearly para-Kaehler manifoldunun bir has noktasal anti-slant altmanifoldu olsun.

a) D^θ , tip-1 noktasal anti-slant distribüsyon olsun. Bunun için gerek ve yeter şart her X_a spacelike-timelike vektör alanı için her RX_a timelike-spacelike vektör alanının olmasıdır. Ayrıca bir $\mu \in (1, \infty)$ fonksiyonu ortaya çıkar. Bundan dolayı

$$R^2 = \mu Id \text{ ve } \mu = \cosh^2 \theta \quad (4.1.3.3)$$

olur ve burada θ , K 'nin slant fonksiyonunu ifade eder.

b) D^θ , tip-2 noktasal anti-slant distribüsyon olsun. Bunun için gerek ve yeter şart her X_a spacelike -timelike vektör alanı için her RX_a timelike -spacelike vektör alanının olmasıdır. Ayrıca bir $\mu \in (0, 1)$ fonksiyonu ortaya çıkar. Bundan dolayı

$$R^2 = \mu Id \text{ ve } \mu = \cos^2 \theta \quad (4.1.3.4)$$

olur ve burada θ , K 'nin slant fonksiyonunu ifade eder.

İspat. (3.1), (3.6), (4.1.3.3) ve (4.1.3.4) kullanılarak. Teorem 3.4.4.'deki (3.13) ve (3.14) denklemlerinin ispatlarından yararlanarak benzer bir şekilde a) ve b) nin ispatları elde edilir.

Bunlardan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.3.4 $K, \bar{K}$ nearly para-Kaehler manifoldunun bir has noktasal anti-slant tip-1 ve tip-2 altmanifoldu olsun.

Tip-1 için;

$$g_1(RX, RY) = -\cosh^2 \theta g_1(X, Y) \quad (4.1.3.5)$$

$$g_1(SX, SY) = \sinh^2 \theta g_1(X, Y) \quad (4.1.3.6)$$

olur.

Tip-2 için;

$$g_1(RX, RY) = -\cos^2 \theta g_1(X, Y) \quad (4.1.3.7)$$

$$g_1(SX, SY) = -\sin^2 \theta g_1(X, Y) \quad (4.1.3.8)$$

dır.

İspat: (Tip-1 için;) $\forall X, Y \in D^\theta$ için ve (3.1), (3.5), (4.1.3.3) ve (4.1.3.4) denklemleri kullanılarak,

$$g_1(PX, Y) = -g_1(X, PY)$$

$$g_1(RX + SX, Y) = -g_1(X, RY + SY)$$

elde edilir. Daha sonra

$$g_1(RX, Y) = -g_1(X, RY)$$

denkleminde Y yerine RY alırsak

$$g_1(RX, RY) = -g_1(X, R^2Y)$$

olur. (4.1.3.3) denkleminde

$$g_1(RX, RY) = -g_1(X, \cosh^2 \theta Y)$$

$$g_1(RX, RY) = -\cosh^2 \theta g_1(X, Y)$$

elde edilir. Böylece denklem (4.1.3.5) bulunur.

$$g_1(PX, PY) = -g_1(X, Y)$$

$$g_1(RX + SX, RY + SY) = -g_1(X, Y)$$

$$g_1(RX, RY) + g_1(SX, SY) = -g_1(X, Y)$$

elde edilir. Denklem (4.1.3.5) ve hiperbolik fonksiyonların özelliğinden

$$g_1(SX, SY) = -g_1(X, Y) + \cosh^2 \theta g_1(X, Y)$$

$$g_1(SX, SY) = \sinh^2 \theta g_1(X, Y)$$

olur. Böylece (4.1.3.6) denklemini elde edilir.

Tip-2 içinde benzer işlemler yapılarak (4.1.3.7) ve (4.1.3.8) denklemleri elde edilir.

Lemma 4.1.3.5 $K, \bar{K}$ nearly para-Kaehler manifoldunun bir has noktasal anti-slant tip-1 ve tip-2 altmanifoldu olsun. Buna göre, her $X, Y \in \Gamma(D^\theta)$ ve her $Z \in \Gamma(D^\perp)$ için

I) (Tip-1 için)

$$\begin{aligned} g_1(\nabla_X Y, Z) &= \operatorname{sech}^2 \theta (g_1(A_{SRY} X, Z) - g_1(A_{PZ} X, RY) + g_1(U_X Z, SY) \\ &\quad + g_1(U_X Y, PZ)) \end{aligned} \quad (4.1.3.9)$$

II) (Tip-2 için)

$$g_1(\nabla_{X_a} Y_b, Z_d) = \sec^2 \theta (g_1(A_{SRY_b} X_a, Z_d) - g_1(A_{PZ_d} X_a, RY_b) + g_1(U_{X_a} Z_d, SY_b))$$

$$+g_1(U_x Y, PZ) \quad (4.1.3.10)$$

olur.

İspat:

I) Tip-1 için;

(3.1), (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.6), (3.7), (3.11) ve (4.1.3.5) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} g_1(\nabla_x Y, Z) &= g_1(\bar{\nabla}_x Y, Z) \\ &= -g_1(P\bar{\nabla}_x Y, PZ) \\ &= -g_1(\bar{\nabla}_x PY, PZ) + g_1((\bar{\nabla}_x P)Y, PZ) \\ &= -g_1(\bar{\nabla}_x RY, PZ) - g_1(\bar{\nabla}_x SY, PZ) + g_1(U_x Y, PZ) \\ &= -g_1(h_1(X, RY), PZ) + g_1(P\bar{\nabla}_x SY, Z) + g_1(U_x Y, PZ) \\ &= -g_1(h_1(X, RY), PZ) + g_1(\bar{\nabla}_x PSY, Z) \\ &\quad - g_1((\bar{\nabla}_x P)SY, Z) + g_1(U_x Y, PZ) \\ &= -g_1(h_1(X, RY), PZ) + g_1(\bar{\nabla}_x rSY, Z) \\ &\quad + g_1(\bar{\nabla}_x sSY, Z) - g_1(G_x SY, Z) + g_1(U_x Y, PZ) \\ &= -g_1(h_1(X, RY), PZ) - 2\sinh \theta \cosh \theta X(\theta)g_1(Y, Z) \\ &\quad - \sinh^2 \theta g_1(\bar{\nabla}_x Y, Z) - g_1(\bar{\nabla}_x SRY, Z) \\ &\quad + g_1(U_x Z, SY) + g_1(U_x Y, PZ) \\ &= -g_1(h_1(X, RY), PZ) - \sinh^2 \theta g_1(\bar{\nabla}_x Y, Z) \\ &\quad + g_1(A_{SRY} X, Z) - g_1(\nabla_x^\perp SRY, Z) \\ &\quad + g_1(U_x Z, SY) + g_1(U_x Y, PZ) \end{aligned}$$

elde edilir. (3.3) ve (3.5) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} g_1(\nabla_x Y, Z) &= g_1(A_{SRY} X, Z) - g_1(A_{PZ} X, RY) \\ &\quad + g_1(U_x Z, SY) + g_1(U_x Y, PZ) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece **I)** ispatlanmış olur. Benzer bir şekilde **II)** de ispatlanır.

Yukarıdaki lemma kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.3.6 K , $\bar{K}$ nearly para-Kaehler manifoldunun bir has noktasal anti-slant tip-1 ve tip-2 altmanifoldu olsun. Bu durumda D^θ noktasal slant distribüsyonu, bir

tamamen jeodezik foliasyon olarak tanımlanır. Dolayısıyla, $\forall Z \in \Gamma(D^T)$ ve $\forall X, Y \in \Gamma(D^\theta)$ ve $\forall H \in \Gamma(TK)$ için gerek ve yeter şart

$$A_{SRX}Z - A_{PZ}RX \in \Gamma(D^\perp) \quad U_X H \in \Gamma(\mu) \quad (4.1.3.11)$$

olmasıdır.

Şimdi hemen hemen para-kompleks yapıyı, yarı-Riemann metriği ve Kartezyen koordinatları belirttikten sonra bu tanımlamalara göre nearly para-Kaehler geometride noktasal anti-slant tip-1 ve tip-2 altmanifoldlar ile ilgili örnekler verelim.

$\bar{R}_3^6$ üzerinde bir nearly para-Kaehler yapı tanımlayalım;

$$P\left(\frac{\partial}{\partial_{x_i}}\right) = \frac{\partial}{\partial_{y_i}} \quad \text{ve} \quad P\left(\frac{\partial}{\partial_{y_i}}\right) = \frac{\partial}{\partial_{x_i}}$$

olsun. Yarı-Riemann metriğinin işaretleri $g_1 = (+, -, +, -, +, -)$ olsun. Ayrıca Kartezyen koordinatlar $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$ olsun ve $(\bar{R}_3^6, P, g_1)$ nearly para-Kaehler manifold olarak tanımlansın. $K, \psi : K \rightarrow \bar{R}_3^6$ olarak tanımlanan $\bar{R}_3^6$ nın bir yarı-Riemann altmanifoldu olsun.

Örnek 4.1.3.7 $K, (\bar{R}_3^6, P, g_1)$ nearly para-Kaehler manifoldunun bir yarı-Riemann altmanifoldu olsun.

$$\psi(m, n, k) = (\sinh m, \sinh n, \cosh n, \cosh m, \sinh k, \pi)$$

olsun. Buna göre anti-invariant distribüsyonu $D^\perp = \text{span}\{\cosh k \frac{\partial}{\partial_{x_3}}\}$ ve noktasal

$$\text{slant distribüsyonu } D^\theta = \text{span}\{\cosh m \frac{\partial}{\partial_{x_1}} + \sinh m \frac{\partial}{\partial_{y_2}}, \cosh n \frac{\partial}{\partial_{y_1}} + \sinh n \frac{\partial}{\partial_{x_2}}\}$$

olur. Buradan $R^2 = \cosh^2(m+n)I$

olur. Dolayısıyla $m+n > 0$ için K manifoldu, bir noktasal anti-slant tip-1 altmanifold olur.

Örnek 4.1.3.8 $K, (\bar{R}_3^6, P, g_1)$ nearly para-Kaehler manifoldunun bir yarı-Riemann altmanifoldu olsun.

$$\psi(m, n, k) = (\sin m, \sin n, \cos m, \cos n, \sinh k, \pi)$$

olsun. Buna göre anti invaryant distribüsyonu $D^\perp = \text{span}\{\cosh k \frac{\partial}{\partial x_3}\}$ ve noktasal slant

distribüsyonu $D^\theta = \text{span}\{\cos m \frac{\partial}{\partial x_1} - \sin m \frac{\partial}{\partial x_2}, \cos n \frac{\partial}{\partial y_1} - \sin n \frac{\partial}{\partial y_2}\}$

olur. Buradan $R^2 = \cosh^2(m-n)I$

olur. Dolayısıyla $m-n \in (0, \frac{\pi}{2})$ için K manifoldu, bir noktasal anti-slant tip-2 altmanifold olur.

4.2. Para-Kaehler Geometride Warped Çarpım Noktasal Slant Altmanifoldlar

Bu bölüm üç kısımdan oluşmaktadır. İlk olarak para-Kaehler manifoldlarda non-trivial warped çarpım noktasal yarı-slant altmanifoldlar ikinci olarak non-trivial doubly warped çarpım noktasal bi-slant altmanifoldlar ve son olarak da nearly para-Kaehler manifoldlarda non-trivial warped çarpım noktasal anti-slant altmanifoldlar üzerine çalışmalar yapılmaktadır.

4.2.1. Para-Kaehler geometride non-trivial warped çarpım noktasal yarı-slant altmanifoldlar

Tanım 4.2.1 $K = L \times_k N$ altmanifoldu $\bar{K}$ para-Kaehler manifoldunun warped çarpım noktasal yarı-slant altmanifoldu olsun. (L, g_1) ve (N, g_2) iki tane yarı-Riemann altmanifold olsun. $k : L \rightarrow (0, \infty)$ olarak tanımlansın ve her $(t, p) \in L \times N$ için $q(t, p) = t$, $a(t, p) = p$ olsun ve bu kullanılarak $q : L \times N \rightarrow L$, $a : L \times N \rightarrow N$ projeksiyonları verilsin. $K = L \times_k N$ warped çarpımı, $L \times N$ ye bağlı yarı-Riemann yapı olarak verilsin. L invaryant altmanifold, N ise slant altmanifold olsun. Öyleki; $\forall X, Y \in K$ için

$$g(X, Y) = g_1(q_*X, q_*Y) + (k \circ q)^2 g_2(a_*X, a_*Y) \text{ olur.}$$

Burada $*$ tanjant yapıyı tanımlar [9]. k fonksiyonu, warping fonksiyon olarak isimlendirilir. Eğer warping fonksiyonu sabit ise K manifoldu **trivial** olarak adlandırılır. Eğer warping fonksiyonu sabit değilse K manifoldu **non-trivial warped çarpım noktasal yarı-slant altmanifoldu** olarak adlandırılır.

Lemma 4.2.2 Yukarıdaki tanım gereğince, $\forall X, Y \in L$ ve $\forall V, W \in N$ vektör alanları verilsin. Daha sonra [9] kaynağında verilen Lemma 7.3 kullanılarak;

$$\nabla_X V = \nabla_V X = (X \ln k)V \quad (4.2.1)$$

elde edilir. ∇ , K manifoldunun bir Levi-Civita konneksiyonu olarak ifade edilir.

Şimdi, $\bar{K}$ para-Kaehler manifoldunun $K = K^\theta \times_k K^T$ formundaki noktasal yarı-slant non-trivial warped çarpım tip1-2 altmanifoldunun var olmadığının ispatı bir teorem ile verilecektir.

Teorem 4.2.3 $\bar{K}$ bir para-Kaehler manifoldu olsun. O zaman $\bar{K}$ para-Kaehler manifoldunun $K = K^\theta \times_k K^T$ formunun has noktasal yarı-slant non-trivial warped çarpım tip1-2 altmanifoldunun var olmadığıdır. Burada K^T , para-holomorfik altmanifoldu ve K^θ ise noktasal slant altmanifoldu ifade eder.

İspat: (Tip-1 için) (4.1.1), (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), (3.5) ve (3.6) denklemleri kullanılarak ve $\forall X, Y \in \Gamma(D^\theta)$ ve $\forall V \in \Gamma(D^T)$ için

$$\begin{aligned} V(\ln k)g_1(X, Y) &= g_1(\nabla_X V, Y) = g_1(\bar{\nabla}_X V, Y) \\ &= -g_1(\bar{\nabla}_X PV, PY) \\ &= g_1(\bar{\nabla}_X R^2V + SRV, Y) + g_1(A_{SV}X, PY) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Denklem (4.1.8) kullanılarak

$$\begin{aligned} V(\ln k)g_1(X, Y) &= g_1(\nabla_X \cosh^2 \theta V, Y) + g_1(\bar{\nabla}_X SRV, Y) + g_1(A_{SV}X, PY) \\ &= \sinh 2\theta X(\theta)g_1(V, Y) + \cosh^2 \theta g_1(\bar{\nabla}_X V, Y) \\ &\quad - g_1(h_1(X, Y), SRV) + g_1(h_1(X, PY), SV) \end{aligned}$$

ulaşılır. Y, V ortogonal olduğundan ve (4.2.1) denklemi kullanılarak

$$-\sinh^2 \theta V(\ln k)g_1(X, Y) = -g_1(h_1(X, Y), SRV) + g_1(h_1(X, PY), SV) \quad (*)$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemde X ve Y yi yer değiştirirsek

$$-\sinh^2 \theta V(\ln k)g_1(Y, X) = -g_1(h_1(Y, X), SRV) + g_1(h_1(Y, PX), SV) \quad (**)$$

elde edilir. Eğer yukarıdaki (*) ve (**) deklemlerini birbirinden çıkartırsak

$$g_1(h_1(X, PY), SV) = g_1(h_1(Y, PX), SV) \quad (4.2.2)$$

elde edilir. (3.5) ve (3.4) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} g_1(h_1(X, PY), SV) &= g_1(\bar{\nabla}_X PY, SV) \\ &= g_1(P\bar{\nabla}_X Y, PV) - g_1(P\bar{\nabla}_X Y, RV) \\ &= -g_1(\bar{\nabla}_X Y, V) + g_1(\bar{\nabla}_X RV, PY) \end{aligned}$$

elde edilir. (4.1.1) denklemi kullanılarak

$$g_1(h_1(X, PY), SV) = V(\ln k)g_1(X, Y) + RV(\ln k)g_1(X, PY) \quad (4.2.3)$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemin sağ tarafının ilk terimi (4.2.2) denkleminin sağına eşit olduğundan

$$0 = RV(\ln k)g_1(X, PY)$$

olur. (4.1.8) denklemi kullanılarak ve $V=RV$ ile $X = PX$ alırsak

$$\begin{aligned} 0 &= R^2V(\ln k)g_1(PX, PY) \\ &= -\cosh^2 \theta V(\ln k)g_1(X, Y) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $V(\ln k) = 0$ olur. Buradan da $\ln k$ nın sabit olduğu sonucu ortaya çıkar. İspat tamamlanmış olur.

Benzer şekilde çalışılarak tip-2 içinde sonuç elde edilir.

(Tip-2 için) (4.2.1), (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), (3.5) ve (3.6) denklemleri kullanılarak

$\forall X, Y \in \Gamma(D^\theta)$ ve $V \in \Gamma(D^T)$ için

$$\begin{aligned} V(\ln k)g_1(X, Y) &= g_1(\nabla_X V, Y) = g_1(\bar{\nabla}_X V, Y) \\ &= -g_1(\bar{\nabla}_X PV, PY) \\ &= g_1(\bar{\nabla}_X R^2V + SRV, Y) + g_1(A_{SV}X, PY) \end{aligned}$$

bulunur. Denklem (4.1.8) kullanılarak

$$\begin{aligned} V(\ln k)g_1(X, Y) &= g_1(\nabla_X \cos^2 \theta V, Y) + g_1(\bar{\nabla}_X SRV, Y) + g_1(A_{SV}X, PY) \\ &= \sin^2 \theta X(\theta)g_1(V, Y) + \cos^2 \theta g_1(\bar{\nabla}_X V, Y) \\ &\quad - g_1(h_1(X, Y), SRV) + g_1(h_1(X, PY), SV) \end{aligned}$$

elde edilir. Y, V ortogonal olduğundan ve (4.1.1) denklemi kullanılarak

$$\sin^2 \theta V(\ln k)g_1(X, Y) = -g_1(h_1(X, Y), SRV) + g_1(h_1(X, PY), SV) \quad (*)$$

bulunur. Yukarıdaki denklemde X ve Y yer değiştirirsek

$$\sin^2 \theta V(\ln k)g_1(Y, X) = -g_1(h_1(Y, X), SRV) + g_1(h_1(Y, PX), SV) \quad (**)$$

elde edilir. Eğer yukarıdaki (*) ve (**) denklemlerini birbirinden çıkartırsak

$$\begin{aligned} g_1(h_1(X, PY), SV) &= g_1(h_1(Y, PX), SV) \quad (4.2.2) \text{ denklemi bulunur.} \\ g_1(h_1(X, PY), SV) &= g_1(\bar{\nabla}_X PY, SV) \\ &= g_1(P\bar{\nabla}_X Y, PV) - g_1(P\bar{\nabla}_X Y, RV) \\ &= -g_1(\bar{\nabla}_X Y, V) + g_1(\bar{\nabla}_X RV, PY) \end{aligned}$$

elde edilir. (4.2.1) denklemi kullanılarak

$$g_1(h_1(X, PY), SV) = V(\ln k)g_1(X, Y) + RV(\ln k)g_1(X, PY) \quad (4.2.3) \text{ denkleme}$$

ulaşılır. Yukarıdaki denklemin sağ tarafının ilk terimi (4.2.2) denkleminin sağına eşit olduğundan

$$0 = RV(\ln k)g_1(X, PY)$$

olur. (4.1.8) denklemleri kullanılarak ve $V = RV$ ile $X = PX$ alırsak

$$\begin{aligned} 0 &= R^2V(\ln k)g_1(PX, PY) \\ &= -\cos^2 \theta V(\ln k)g_1(X, Y) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $V(\ln k) = 0$ olur. Buradan da $\ln k$ nın sabit olduğu sonucu ortaya çıkar. İspat tamamlanmış olur. Tip-2 içinde benzer şekilde işlemler yapılarak sonuç bulunur.

Uyarı 4.2.4 Teorem 4.2.3, [35] in genelleştirilmiş bir hali olarak ifade edilebilir.

Yukarıdaki teoremde $\bar{K}$ para-Kaehler manifoldunun $K = K^\theta \times_k K^T$ birinci form noktasal yarı-slant non-trivial warped çarpım tip1-2 altmanifoldunun var olmadığı ispatlandı. Fakat, $\bar{K}$ para-Kaehler manifoldunun $K = K^T \times_k K^\theta$ ikinci form noktasal yarı-slant non-trivial warped çarpım tip1-2 altmanifoldunun var olduğu da örnek verilerek ispatlanacaktır.

Şimdi para-kompleks yapıyı, yarı-Riemann metriği ve Kartezyen koordinatları belirttikten sonra bu tanımlamalara göre $\bar{K}$ para-Kaehler manifoldunun, $K = K^T \times_k K^\theta$ ikinci formunun noktasal yarı-slant non-trivial warped çarpım tip1-2 altmanifoldları ile ilgili örnekler verelim.

K , $\bar{R}_{10}^{20}$ 'nin bir yarı-Riemann altmanifoldu olarak verelim. Burada immersiyonu $\psi : K \rightarrow \bar{R}_{10}^{20}$ olan, Kartezyen koordinatları $(x_1, \dots, x_{20})$ olan ve hemen hemen para-kompleks yapısı; $P\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_{i+2}}$ $i = (1, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 14, 17, 18)$ ve $P\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_{j-2}}$ $j = (3, 4, 7, 8, 11, 12, 15, 16, 19, 20)$ olarak verilsin. Ayrıca

$\bar{R}_{10}^{20}$ yarı-Riemann manifoldunun yarı-Riemann metriğinin işaretleri $(+, +, -, -, +, +, -, -, +, +, -, -, +, +, -, -, +, +, -, -, +, +)$ olsun ve Kanonik bazları $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{20}}\right)$ olarak verilsin.

Örnek 4.2.5 $\bar{R}_{10}^{20}$ para-Kaehler manifold olsun. İmmersiyonu $\psi : K \rightarrow \bar{R}_{10}^{20}$ verilsin ve immersiyonu

$$\psi(m, n, c, t) = (msinc, mcosc, nsinc, ncosc, msint, mcost, nsint, ncost, x, 2m, y, 2n, \sqrt{2}t, \sqrt{2}c, c, t, \sqrt{3}c, \sqrt{3}t, x, y)$$

biçiminde verilsin.

$$\begin{aligned}\psi_m &= sinc \frac{\partial}{\partial x_1} + cosc \frac{\partial}{\partial x_2} + sint \frac{\partial}{\partial x_5} + cost \frac{\partial}{\partial x_6} + 2 \frac{\partial}{\partial x_{10}} \\ \psi_n &= sinc \frac{\partial}{\partial x_3} + cosc \frac{\partial}{\partial x_4} + sint \frac{\partial}{\partial x_7} + cost \frac{\partial}{\partial x_8} + 2 \frac{\partial}{\partial x_{12}} \\ \psi_c &= mcosc \frac{\partial}{\partial x_1} - m \sin c \frac{\partial}{\partial x_2} + ncosc \frac{\partial}{\partial x_3} - n \sin c \frac{\partial}{\partial x_4} + \sqrt{2} \frac{\partial}{\partial x_{14}} + \frac{\partial}{\partial x_{15}} + \sqrt{3} \frac{\partial}{\partial x_{17}} \\ \psi_t &= mcost \frac{\partial}{\partial x_5} - m \sin t \frac{\partial}{\partial x_6} + ncost \frac{\partial}{\partial x_7} - n \sin t \frac{\partial}{\partial x_8} + \sqrt{2} \frac{\partial}{\partial x_{13}} + \frac{\partial}{\partial x_{16}} + \sqrt{3} \frac{\partial}{\partial x_{18}}\end{aligned}$$

$$\mu = R^2 = \frac{8}{(m^2 - n^2)(n^2 - m^2 + 6)} \text{ olarak elde edilen } (\bar{R}_{10}^{20}, P, g_1) \text{ para-kompleks}$$

manifoldu bir noktasal yarı-slant tip1-2 altmanifoldu ifade eder. Burada $D^\theta = span\{\psi_c, \psi_t\}$ noktasal slant distribüsyonu ve $D^\perp = span\{\psi_m, \psi_n\}$ invaryant distribüsyonu ifade eder. $K = K^\perp \times_k K^\theta$ üzerinde verilen metrik tensör g_K olarak verilsin. Burada $g_K = 6(dm^2 - dn^2) + (m^2 - n^2)(dc^2 + dt^2)$ olarak bulunur. Warping fonksiyonunda $\sqrt{m^2 - n^2}$ olur. Dolayısıyla

*) eğer $0 < (m^2 - n^2) < 2$ ya da $6 > (m^2 - n^2) > 4$ ise warping fonksiyonu $\sqrt{m^2 - n^2}$ olan $\bar{R}_{10}^{20}$ para-Kaehler manifoldunun non-trivial warped çarpım noktasal yarı-slant tip-1 altmanifoldu olur.

**) eğer $2 < (m^2 - n^2) < 4$ ise warping fonksiyonu $\sqrt{m^2 - n^2}$ olan $\bar{R}_{10}^{20}$ para-Kaehler manifoldunun non-trivial warped çarpım noktasal yarı-slant tip-2 altmanifoldu olur.

Şimdide daha sonra kullanmak için bazı lemmalar verelim.

Lema 4.2.6 $\bar{K}$ bir para-Kaehler manifoldu olsun. Ayrıca $K = K^T \times_k K^\theta$ manifoldu, $\bar{K}$ para-Kaehler manifoldunun noktasal has yarı-slant non-trivial warped çarpım tip1-2 altmanifoldu olsun. O zaman, $\forall X \in \Gamma(D^T)$ ve $\forall V, W \in \Gamma(D^\theta)$ için

$$g_1(A_{SV}W, X) = g_1(A_{SW}V, X) \quad (4.2.4)$$

dır.

İspat: (3.1), (3.3), (3.4), (3.5) ve (3.6) denklemlerini kullanarak,

$$\begin{aligned} g_1(A_{SV}W, X) &= -g_1(A_{SV}X, W) \\ &= -g_1(\bar{\nabla}_X SV, W) \\ &= -g_1(\bar{\nabla}_X PV - SV, W) \\ &= -g_1(\bar{\nabla}_X PV, W) + g_1(\bar{\nabla}_X SV, W) \\ &= g_1(\bar{\nabla}_X V, PW) + g_1(\bar{\nabla}_X SV, W) \\ &= g_1(\bar{\nabla}_X V, RW) + g_1(\bar{\nabla}_X V, SW) + g_1(\bar{\nabla}_X SV, W) \\ &= X(\ln k)g_1(V, RW) + g_1(\bar{\nabla}_X V, SW) + X(\ln k)g_1(SV, W) \\ &= g_1(\bar{\nabla}_X V, SW) \\ &= g_1(h_1(X, V), SW) \\ &= g_1(A_{SW}V, X) \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 4.2.7 $\bar{K}$ bir para-Kaehler manifoldu olsun. Ayrıca $K = K^T \times_k K^\theta$ manifoldu, $\bar{K}$ para-Kaehler manifoldunun noktasal has yarı-slant non-trivial warped çarpım tip1-2 altmanifoldu olsun. O zaman, her $X \in \Gamma D^T$ ve $V, W \in \Gamma D^\theta$ için

*) Tip-1 için

$$g_1(A_{SRW}V, X) = -PX(\ln k)g_1(RW, V) - X(\ln k)\cosh^2 \theta g_1(V, W) \quad (4.2.5)$$

*) Tip-2 için

$$g_1(A_{SRW}V, X) = -PX(\ln k)g_1(RW_d, V_c) + X(\ln k)\cos^2 \theta g_1(V, W) \quad (4.2.6)$$

ve

**) Tip-1 ve Tip-2 için

$$g_1(A_{SRW}V, PX) = X(\ln k)g_1(W, V) + PX(\ln k)g_1(V, RW) \quad (4.2.7)$$

dır.

İspat:

*) Tip-1 için; (4.2.4) denkleminde yararlanarak

$$g_1(A_{SRW}V, X) = g_1(A_{SV}RW, X)$$

denklemini elde edilir. Daha sonra (3.1), (3.3), (3.4), (3.5) ve (3.6) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
g_1(A_{SRW}V, X) &= g_1(A_{SV}RW, X) \\
&= g_1(-\nabla_{RW}SV - \nabla_{RW}^\perp SV, X) \\
&= g_1(-\nabla_{RW}SV, X) \\
&= g_1(-\nabla_{RW}(PV - RV), X) \\
&= -g_1(\nabla_{RW}PV, X) + g_1(\nabla_{RW}RV, X) \\
&= g_1(\nabla_{RW}V, PX) + g_1(\nabla_{RW}RV, X) \\
&= PX(\ln k)g_1(RW, V) + X(\ln k)g_1(RW, RV)
\end{aligned}$$

olur. Daha sonra (4.1.10) denklemi kullanılarak

$$g_1(A_{SRW}V, X) = PX(\ln k)g_1(RW, V) - X(\ln k)\cosh^2 \theta g_1(V, W)$$

(4.2.5) denklemi elde edilir.

*) Tip-2 için; (4.2.4) denkleminde yararlanarak

$$g_1(A_{SRW}V, X) = g_1(A_{SV}RW, X)$$

denklemi elde edilir. Daha sonra (3.1), (3.3), (3.4), (3.5) ve (3.6) denklemleri kullanılarak,

$$\begin{aligned}
g_1(A_{SRW}V, X) &= g_1(A_{SV}RW, X) \\
&= g_1(-\bar{\nabla}_{RW}SV - \bar{\nabla}_{RW}^\perp SV, X) \\
&= g_1(-\bar{\nabla}_{RW}SV, X) \\
&= g_1(-\bar{\nabla}_{RW}(PV - RV), X) \\
&= -g_1(\bar{\nabla}_{RW}PV, X) + g_1(\bar{\nabla}_{RW}RV, X) \\
&= g_1(\bar{\nabla}_{RW}V, PX) + g_1(\bar{\nabla}_{RW}RV, X) \\
&= PX(\ln k)g_1(RW, V) + X(\ln k)g_1(RW, RV)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.1.12) denklemi kullanılarak,

$$g_1(A_{SRW}V, X) = PX(\ln k)g_1(RW, V) + X(\ln k)\cos^2 \theta g_1(V, W)$$

olur. Böylece (4.2.6) denklemi elde edilir.

**) Daha sonra (4.2.7) denklemi için tekrardan (4.2.4) denkleminde yararlanarak (3.3), (3.4) ve (3.5) denklemleri kullanılarak

$$g_1(A_{SV}W, X) = g_1(A_{SW}V, X)$$

denklemi bulunur ve bu denklemde $V = W$ alırsak

$$g_1(A_{SW}V, X) = g_1(A_{SV}W, X)$$

olur ve denklemde $X = PX$ alırsak

$$g_1(A_{SW}V, PX) = g_1(A_{SV}W, PX)$$

elde edilir. Daha sonra (3.1), (3.3), (3.4), (3.5) ve (3.6) denklemlerini kullanarak

$$\begin{aligned}
g_1(A_{SW}V, PX) &= g_1(-\bar{\nabla}_W SV - \bar{\nabla}_W^\perp SV, PX) \\
&= g_1(-\bar{\nabla}_W SV, PX) \\
&= g_1(-\bar{\nabla}_W(PV - RV), PX) \\
&= g_1(-\bar{\nabla}_W PV, PX) + g_1(\bar{\nabla}_W RV, PX) \\
&= g_1(\bar{\nabla}_W V, X) + g_1(\bar{\nabla}_W RV, PX) \\
&= X(\ln k)g_1(W, V) + PX(\ln k)g_1(W, RV)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece (4.2.7) denklemi de elde edilmiş olur.

Hieppo'nun Teoremi: K manifoldu üzerinde D_a ve D_b ortogonal distribüsyonları verilsin. Kabul edelim ki D_a ve D_b distribüsyonları involütif olsun. Öyle ki; D_a bir tamamen jeodezik foliasyondur ve D_b bir küresel foliasyodur. Dahası K manifoldu, $K^a \times_k K^b$ manifoldu üzerinde bir lokal izometriktir. Burada K^a ve K^b , D_a ve D_b nin integrallenebilir manifoldlarıdır [26].

Teorem 4.2.8 K , $\bar{K}$ para-Kaehler manifoldunun noktasal yarı-slant tip1-2 altmanifoldu olsun. Öyle ki K manifoldu, bir $K = K^T \times_k K^\theta$ lokal non-trivial warped çarpım altmanifoldu olur. Burada K^T bir para-holomorfik altmanifoldu ve K^θ ise bir noktasal slant altmanifoldu ifade eder. Eğer aşağıdaki durum sağlanırsa

*) Tip-1 için

$$A_{SRW}X - A_{SW}PX = (-1 + \cosh^2 \theta)X(\gamma)W \quad (4.2.8)$$

*) Tip-2 için

$$A_{SRW}X - A_{SW}PX = (-1 + \cos^2 \theta)X(\gamma)W \quad (4.2.9)$$

$\forall X \in \Gamma(D^T)$, $\forall W \in \Gamma(D^\theta)$ için $W(\gamma) = 0$ olur. Burada γ , K üzerinde bir fonksiyondur.

İspat: $\bar{K}$ bir para-Kaehler manifoldu olsun. Ayrıca $K = K^T \times_k K^\theta$ manifoldu, $\bar{K}$ para-Kaehler manifoldunun noktasal has yarı-slant non-trivial warped çarpım tip1-2 altmanifoldu olsun.

***) Tip-1 için**

$\forall X, Y \in \Gamma(D^T)$ ve $\forall V, W \in \Gamma(D^\theta)$ için (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), (3.5) ve (3.6) denklemleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} g_1(A_{SV}X, Y) &= g_1(-\bar{\nabla}_X SV + \bar{\nabla}_X^\perp SV, Y) \\ &= g_1(-\bar{\nabla}_X SV, Y) + g_1(\bar{\nabla}_X^\perp SV, Y) \\ &= -g_1(\bar{\nabla}_X PV, Y) + g_1(\bar{\nabla}_X RV, Y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $g_1(A_{SV}X, Y) = 0$ bulunur.

Tersi olarak, varsayalım ki; K , $\bar{K}$ para-Kaehler manifoldunun bir noktasal yarı-slant altmanifoldu olsun.

$$A_{SRW}X - A_{SW}PX = (-1 + \cosh^2 \theta)X(\gamma)W$$

denkleminde, Teorem 4.1.1.5 II) (integrallenebilirlik) kullanılarak

$$\begin{aligned} g_1(A_{SRV}X - A_{SV}PX, W) &= g_1(A_{SRV}X, W) - g_1(A_{SV}PX, W) \\ &= g_1(-\bar{\nabla}_X SRV - \bar{\nabla}_X^\perp SRV, W) - g_1(\bar{\nabla}_{PX} SV - \bar{\nabla}_{PX}^\perp SV, W) \\ &= -g_1(\bar{\nabla}_X SRV, W) - g_1(\bar{\nabla}_{PX} SV, W) \\ &= g_1(X, \bar{\nabla}_W SRV) + g_1(PX, \bar{\nabla}_W SV) \\ &= g_1(PX, \bar{\nabla}_W (PV - RV)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -g_1(X, \bar{\nabla}_w P^2 V) + g_1(X, \bar{\nabla}_w PRV) \\
&= -g_1(X, \bar{\nabla}_w V) + g_1(X, \bar{\nabla}_w (R^2 V + SRV)) \\
&= -g_1(X, \bar{\nabla}_w V) + g_1(X, \bar{\nabla}_w \cosh^2 \theta V) \\
&= -g_1(X, \bar{\nabla}_w V) + 2 \cosh \theta \sinh \theta W(\theta) g_1(X, V) \\
&\quad + \cosh^2 \theta g_1(X, \bar{\nabla}_w V) \\
&= (-1 + \cosh^2 \theta) g_1(X, \bar{\nabla}_w V) \\
&= (-1 + \cosh^2 \theta) g_1(X, h_\theta(V, W)) \\
&= \sinh^2 \theta g_1(X, h_\theta(V, W))
\end{aligned} \tag{4.2.10}$$

bulunur. (4.2.8) ve (4.2.10) denklemleri kullanılarak

$$h_\theta(V, W) = (-\cosh^2 \theta + \sinh^2 \theta) \nabla_\gamma g_1(V, W)$$

elde edilir. Görülür ki; K^θ , $(-\cosh^2 \theta + \sinh^2 \theta) \nabla_\gamma$ vektör alan eğrilikli K da bir tamamen umbilik altmanifoldudur. ∇_γ , γ 'nın gradiyentidir. Daha sonra direk hesaplama yaparsak

$$\begin{aligned}
g_1(\nabla_V \nabla_\gamma, X) &= [V g_1(\nabla_\gamma, X) - g_1(\nabla_\gamma, \nabla_V X)] \\
&= [V(X, \gamma) - [V, X] \gamma - g_1(\nabla_\gamma, \nabla_X V)] \\
&= [[V, X] \gamma + X(V(\gamma)) - [V, X] \gamma - g_1(\nabla_\gamma, \nabla_{X_a} V)] \\
&= [X(V(\gamma)) - g_1(\nabla_\gamma, \nabla_X V)]
\end{aligned}$$

denkleme ulaşılır. Dolayısıyla $V(\gamma) = 0$ olur. Buradan

$$g_1(\nabla_V \nabla_\gamma, X) = g_1(\nabla_\gamma, \nabla_X V)$$

olur. Diğer taraftan

$\nabla_\gamma \in \Gamma(TK^T)$ ve K^T , K 'da bir tamamen jeodezik olduğundan $\nabla_X V \in \Gamma(TK^\theta)$ olur.

$\forall X \in \Gamma(D^T)$ ve $\forall V \in \Gamma(D^\theta)$ için $g_1(\nabla_V \nabla_\gamma, X) = 0$ elde edilir.

***) Tip-2 için**

$\forall X, Y \in \Gamma(D^T)$ ve $\forall V, W \in \Gamma(D^\theta)$ için (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), (3.5) ve (3.6) denklemlerini kullanarak

$$\begin{aligned}
g_1(A_{SV} X, Y) &= g_1(-\bar{\nabla}_X SV + \bar{\nabla}_X^\perp SV, Y) \\
&= g_1(-\bar{\nabla}_X SV, Y) + g_1(\bar{\nabla}_X^\perp SV, Y) \\
&= -g_1(\bar{\nabla}_X PV, Y) + g_1(\bar{\nabla}_X RV, Y) \\
&= 0
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla $g_1(A_{SV} X, Y) = 0$ bulunur.

Tersi olarak, varsayalım ki; K , $\bar{K}$ para-Kaehler manifoldunun bir noktasal yarı-slant altmanifoldu olsun. Öyle ki;

$$A_{SRW} X - A_{SW} PX = (-1 + \cos^2 \theta) X(\gamma) W$$

olur. Denkleminde, Teorem 4.1.1.5 II) (integrallenebilirlik) kullanılarak;

$$\begin{aligned}
g_1(A_{SRV} X - A_{SV} PX, W) &= g_1(A_{SRV} X, W) - g_1(A_{SV} PX, W) \\
&= g_1(-\bar{\nabla}_X SRV - \bar{\nabla}_X^\perp SRV, W) - g_1(\bar{\nabla}_{PX} SV - \bar{\nabla}_{PX}^\perp SV, W) \\
&= -g_1(\bar{\nabla}_X SRV, W) - g_1(\bar{\nabla}_{PX} SV, W)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= g_1(X, \bar{\nabla}_w SRV) + g_1(PX, \bar{\nabla}_w SV) \\
&= g_1(PX, \bar{\nabla}_w (PV - RV)) \\
&= -g_1(X, \bar{\nabla}_w P^2V) + g_1(X, \bar{\nabla}_w PRV) \\
&= -g_1(X, \bar{\nabla}_w V) + g_1(X, \bar{\nabla}_w (R^2V + SRV)) \\
&= -g_1(X, \bar{\nabla}_w V) + g_1(X, \bar{\nabla}_w \cos^2 \theta V) \\
&= -g_1(X, \bar{\nabla}_w V) + 2 \cos \theta \sin \theta W(\theta) g_1(X, V) \\
&\quad + \cos^2 \theta g_1(X, \bar{\nabla}_w V) \\
&= (-1 + \cos^2 \theta) g_1(X, \bar{\nabla}_w V) \\
&= -\sin^2 \theta g_1(X, h_\theta(V, W))
\end{aligned} \tag{4.2.11}$$

denklemini elde edilir ve

$$g_1(A_{SRV} X - A_{SV} PX, W) = (-1 + \cos^2 \theta) g_1(X, h_\theta(V, W))$$

sonucuna ulaşılır. (4.2.9) ve (4.2.11) denklemleri kullanılarak

$$h_\theta(V, W) = (\csc^2 \theta - \cot^2 \theta) \nabla_\gamma g_1(V, W)$$

olur. Görülür ki K^θ , $(\csc^2 \theta - \cot^2 \theta) \nabla_\gamma$ vektör alan eğrilikli K da bir tamamen umbilik altmanifoldudur. ∇_γ , γ 'nın gradiyentidir. Daha sonra direk hesaplama yaparsak

$$\begin{aligned}
g_1(\nabla_V \nabla_\gamma, X) &= [V g_1(\nabla_\gamma, X) - g_1(\nabla_\gamma, \nabla_V X)] \\
&= [V(X, \gamma) - [V, X] \gamma - g_1(\nabla_\gamma, \nabla_X V)] \\
&= [[V, X] \gamma + X(V(\gamma)) - [V, X] \gamma - g_1(\nabla_\gamma, \nabla_X V)] \\
&= [X(V(\gamma)) - g_1(\nabla_\gamma, \nabla_X V)]
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $V(\gamma) = 0$ olur. Buradan $g_1(\nabla_V \nabla_\gamma, X) = g_1(\nabla_\gamma, \nabla_X V)$

olur. Diğer taraftan

$\nabla_\gamma \in \Gamma(TK^T)$ ve K^T , K da bir tamamen jeodezik olduğundan $\nabla_X V \in \Gamma(TK^\theta)$ olur.

$\forall X \in \Gamma(D^T)$ ve $\forall V \in \Gamma(D^\theta)$ için $g_1(\nabla_V \nabla_\gamma, X) = 0$

sonucuna ulaşılır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 4.2.9 $K = K^T \times_k K^\theta$, $\bar{K}$ para-Kaehler manifoldunun non-trivial warped çarpım noktasal yarı-slant tip1-2 altmanifoldu olsun. O zaman Her $X, Y \in \Gamma(D^T)$ ve $V, W \in \Gamma(D^\theta)$ için

$$g_1(h_1(X, Y), SV) = 0 \tag{4.2.12}$$

$$g_1(h_1(X, V), SW) = -PX(\ln k) g_1(V, W) - X(\ln k) g_1(V, RW) \tag{4.2.13}$$

olur.

İspat: (Tip 1-2 için)

$$\begin{aligned}
g_1(h_1(X, Y), SV) &= g_1(\bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, SV) \\
&= g_1(\bar{\nabla}_X Y, SV) - g_1(\nabla_X Y, SV) \\
&= -g_1(\nabla_X Y, PV) + g_1(\nabla_X Y, RV) \\
&= g_1(\nabla_X PY, V) + g_1(\nabla_X Y, RV)
\end{aligned}$$

$$= X(\ln k)g_1(PY, V) + X(\ln k)g_1(Y, RV)$$

D^θ ve D^T ortogonal olduğundan sonuç 0 olur. Yani

$$g_1(h_1(X, Y), SV) = 0$$

olur. (4.2.12) denklemi elde edilir. Daha sonra

$$\begin{aligned} g_1(h_1(X, V), SW) &= g_1(\bar{\nabla}_X V - \nabla_X Y, SW) \\ &= g_1(\bar{\nabla}_X V, SW) - g_1(\nabla_X Y, SW) \\ &= g_1(\bar{\nabla}_X V, SW) \\ &= g_1(\bar{\nabla}_X V, PW) - g_1(\bar{\nabla}_X V, RW) \\ &= -g_1(\bar{\nabla}_X PV, W) - g_1(\bar{\nabla}_X V, RW) \\ &= -g_1(P\bar{\nabla}_X V, W) - g_1(\bar{\nabla}_X V, RW) \\ &= PX(\ln k)g_1(V, W) + X(\ln k)g_1(V, RW) \end{aligned}$$

olur. Böylece (4.2.13) denklemi elde edilir ve ispat tamamlanır.

4.2.2 Para-Kaehler geometride non-trivial doubly warped çarpım noktasal bi-slant altmanifoldlar

Tanım 4.2.2.1 $K =_{k_2} L \times_{k_1} N$ altmanifoldu $\bar{K}$ para-Kaehler manifoldunun warped çarpım noktasal bi-slant altmanifoldu olsun. (L, g_1) ve (N, g_2) yarı-Riemann altmanifoldlar olsun. $k_1 : L \rightarrow (0, \infty)$ ve $k_2 : N \rightarrow (0, \infty)$ olarak tanımlansın ve her $(t, p) \in L \times N$ için $q(t, p) = t$, $a(t, p) = p$ olsun ve bu kullanılarak $q : L \times N \rightarrow L$, $a : L \times N \rightarrow N$ projeksiyonları verilsin. $K =_{k_2} L \times_{k_1} N$ warped çarpımı $L \times N$ ye bağlı yarı-Riemann yapı olarak tanımlansın. L ve N farklı slant fonksiyon açılı slant altmanifoldlar olsun.

Öyleki; $\forall X, Y \in K$ için

$$g_1(X, Y) = (k_2 o a)^2 g_1(z_* X, z_* Y) + (k_1 o q)^2 g_2(z_* X, z_* Y)$$

olur. Burada z_* yapısı türev dönüşümü olarak tanımlanır [9]. k_1, k_2 fonksiyonları warping fonksiyon olarak isimlendirilir. Eğer warping fonksiyonlar sabit ise K manifoldu **trivial** olarak adlandırılır. Eğer warping fonksiyonu sabit değilse K manifoldu, **non-trivial doubly warped çarpım noktasal bi slant alt manifold** olarak adlandırılır. $L \times \{p_2\}$ ve $\{p_1\} \times N$ manifoldları $(_{k_2} L \times_{k_1} N, g_1)$ de tamamen umbilik altmanifoldlardır. Burada $p_1 \in L$ ve $p_2 \in N$ olur [27].

Lemma 4.2.2.2 Yukarıdaki tanım gereğince, $\forall X \in L$ ve $\forall V \in N$ vektör alanları verilsin. Daha sonra [21,48] kaynaklarından yararlanarak ve doubly warped çarpım manifoldlar için kovaryant türev formülü kullanılarak aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\nabla_X V = \nabla_V X = X(\ln k_1)V + V(\ln k_2)X \quad (4.2.2.1)$$

∇ , K manifoldunun bir Levi-Civita konneksiyonunu ifade eder.

Şimdi, para-kompleks yapıyı, yarı-Riemann metriği ve Kartezyen koordinatları belirttikten sonra bu tanımlamalara göre $\bar{K}$ para-Kaehler manifoldunun non-trivial doubly warped çarpım noktasal bi-slant tip1-2 altmanifoldları ile ilgili örnekler verilecektir.

K $\bar{R}_{12}^{24}$ ün bir yarı-Riemann altmanifoldu olsun. Burada immersiyonu $\psi : K \rightarrow \bar{R}_{12}^{24}$ olsun. Kartezyen koordinatları $(x_1, \dots, x_{24})$ olarak verilsin ve hemen hemen para-kompleks yapısı; $P\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_{i+2}}$ $i = (1, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 14, 17, 18, 21, 22)$ ve $P\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_{j-2}}$ $j = (3, 4, 7, 8, 11, 12, 15, 16, 19, 20, 23, 24)$ olarak tanımlansın. $\bar{R}_{12}^{24}$ yarı-Riemann manifoldunun, yarı-Riemann metriğinin işaretleri $(+, +, -, -, +, +, -, -, +, +, -, -, +, +, -, -, +, +, -, -, +, +, -, -, +, +)$ olsun ve Kanonik bazları $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{24}}\right)$ olarak verilsin.

Örnek 4.2.2.3 $\bar{R}_{12}^{24}$ bir para-Kaehler manifold olsun. İmmersiyonu

$$\psi(m, n, c, t) = (msinc, mcosc, nsinc, ncosc, msint, mcost, nsint, ncost, x, 2m, y, 2n, \sqrt{2}t, \sqrt{2}c, c, t, \sqrt{3}c, \sqrt{3}t, x, y, mc, nc, nt, mt)$$

olarak verilsin.

$$\begin{aligned}\psi_m &= sinc \frac{\partial}{\partial x_1} + cosc \frac{\partial}{\partial x_2} + sint \frac{\partial}{\partial x_5} + cost \frac{\partial}{\partial x_6} + 2 \frac{\partial}{\partial x_{10}} + c \frac{\partial}{\partial x_{21}} + t \frac{\partial}{\partial x_{24}} \\ \psi_n &= sinc \frac{\partial}{\partial x_3} + cosc \frac{\partial}{\partial x_4} + sint \frac{\partial}{\partial x_7} + cost \frac{\partial}{\partial x_8} + 2 \frac{\partial}{\partial x_{12}} + c \frac{\partial}{\partial x_{22}} + t \frac{\partial}{\partial x_{23}} \\ \psi_c &= mcosc \frac{\partial}{\partial x_1} - m \sin c \frac{\partial}{\partial x_2} + ncosc \frac{\partial}{\partial x_3} - n \sin c \frac{\partial}{\partial x_4} + \sqrt{2} \frac{\partial}{\partial x_{14}} + \frac{\partial}{\partial x_{15}} + \sqrt{3} \frac{\partial}{\partial x_{17}} \\ &\quad + m \frac{\partial}{\partial x_{21}} + n \frac{\partial}{\partial x_{22}} \\ \psi_t &= mcost \frac{\partial}{\partial x_5} - m \sin t \frac{\partial}{\partial x_6} + ncost \frac{\partial}{\partial x_7} - n \sin t \frac{\partial}{\partial x_8} + \sqrt{2} \frac{\partial}{\partial x_{13}} + \frac{\partial}{\partial x_{16}} + \sqrt{3} \frac{\partial}{\partial x_{18}} \\ &\quad + n \frac{\partial}{\partial x_{23}} + m \frac{\partial}{\partial x_{24}}\end{aligned}$$

$$\mu_1 = R_1^2 = \left(\frac{6+2tc}{6+t^2+c^2} \right)^2, \quad \mu_2 = R_2^2 = \frac{2}{(m^2-n^2)(n^2-m^2+3)} \text{ ve } (m \neq n) \text{ için olarak}$$

elde edilen $(\bar{R}_{12}^{24}, P, g_1)$ para-kompleks manifoldu bir noktasal bi-slant tip1-2 altmanifoldunu ifade eder. Burada $D^{\theta_2} = span\{\psi_c, \psi_t\}$, θ_2 slant fonksiyonlu noktasal bi-slant distribüsyonu ve $D^{\theta_1} = span\{\psi_m, \psi_n\}$ ise θ_1 slant fonksiyonlu noktasal bi-slant distribüsyonunu ifade eder. $K =_{k_2} K^{\theta_1} \times_{k_1} K^{\theta_2}$ üzerinde verilen metrik tensör g_K olarak verilsin. Burada

$g_K = (6+t^2+c^2)(dm^2-dn^2) + (2m^2-2n^2)(dc^2+dt^2)$ olarak bulunur. Warping fonksiyonlarında $k_2 = \sqrt{(6+t^2+c^2)}$ ve $k_1 = \sqrt{(2m^2-2n^2)}$ olur. Dolayısıyla;

*) μ_1 için, eğer $2tc > t^2 + c^2$ ise ve μ_2 için, eğer $0 < (m^2 - n^2) < 1$ ya da $3 > (m^2 - n^2) > 2$ ise $K, \bar{R}_{12}^{24}$ para-Kaehler manifoldunun non-trivial doubly warped çarpım noktasal bi-slant tip-1 altmanifoldu olur.

**) μ_1 için, eğer $-6 < 2tc < t^2 + c^2$ ise ve μ_2 için, eğer $1 < (m^2 - n^2) < 2$ ise $K, \bar{R}_{12}^{24}$ para-Kaehler manifoldunun non-trivial doubly warped çarpım noktasal bi-slant tip-2 altmanifoldu olur.

Şimdide daha sonra kullanmak için bazı lemmalar verelim.

Lemma 4.2.2.4 $K =_{k_2} K^{\theta_1} \times_{k_1} K^{\theta_2}$ manifoldu, θ_1^a ve θ_2^b farklı slant fonksiyonlu $\bar{K}$ para-Kaehler manifoldunun doubly warped çarpım noktasal bi-slant tip-1-2 altmanifoldu olsun. O zaman her $X \in \Gamma(K^{\theta_1})$ ve $V, Z \in \Gamma(K^{\theta_2})$ için

(Tip-1 için)

$$g_1(h_1(X, V), SR_2Z) + g_1(h_1(X, R_2Z), SV) = -\sinh 2\theta_2^b X(\theta_2^b)g_1(Z, V) \quad (4.2.2.2)$$

$$g_1(h_1(X, Z), SV) + g_1(h_1(X, V), SZ) = -2 \tan h 2\theta_2^b X(\theta_2^b)g_1(R_2Z, V) \quad (4.2.2.3)$$

olur.

İspat: (Tip-1 için) (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) ve (4.2.2.1) denklemleri kullanılarak

$$g_1(\bar{\nabla}_X Z, V) = g_1(\nabla_X Z, V) = (X(\ln k_1) + (\ln k_2)X)g_1(Z, V) \quad (4.2.2.4)$$

elde edilir. Daha sonra,

$$\begin{aligned} g_1(\bar{\nabla}_X Z, V) &= -g_1(P\bar{\nabla}_X Z, PV) \\ &= -g_1(\bar{\nabla}_X PZ, PV) \\ &= -g_1(\bar{\nabla}_X R_2Z, R_2V) - g_1(\bar{\nabla}_X R_2Z, SV) - g_1(\bar{\nabla}_X SZ, PV) \\ &= -g_1(\bar{\nabla}_X R_2Z, R_2V) - g_1(\bar{\nabla}_X R_2Z, SV) + g_1(\bar{\nabla}_X PSZ, V) \\ &= -g_1(\bar{\nabla}_X R_2Z, R_2V) - g_1(\bar{\nabla}_X R_2Z, SV) + g_1(\bar{\nabla}_X rSZ, V) \\ &\quad + g_1(\bar{\nabla}_X sSZ, V) - g_1(\bar{\nabla}_X SR_2Z, V) \end{aligned}$$

bulunur. (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.6), (3.18), (4.1.2.3) ve (4.2.2.1) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} g_1(\bar{\nabla}_X Z, V) &= -g_1(\bar{\nabla}_X R_2Z, R_2V) - g_1(h(X, R_2Z), SV) + \sinh^2 \theta_2^b g_1(\bar{\nabla}_X Z, V) \\ &\quad + \sinh 2\theta_2^b X(\theta_2^b)g_1(Z, V) + g_1(h(X, V), SR_2Z) \end{aligned} \quad (4.2.2.5)$$

denklemini bulunur. (4.2.2.4) denklemini ile (4.2.2.5) denklemini kullanılarak

$$\begin{aligned} (X(\ln k_1) + (\ln k_2)X)g_1(Z, V) &= -\cosh^2 \theta (X(\ln k_1) + (\ln k_2)X)g_1(Z, V) \\ &\quad - g_1(h(X, R_2Z), SV) \\ &\quad + \sinh^2 \theta (X(\ln k_1) + (\ln k_2)X)g_1(Z, V) \\ &\quad + \sinh 2\theta_2^b X(\theta_2^b)g_1(Z, V) + g_1(h(X, V), SR_2Z) \end{aligned}$$

(4.2.2.2) denklemini elde edilir.

Z yerine R_2Z alırsak (4.2.2.3) elde edilir.

Tip-2 içinde benzer yol izlenerek istenilen sonuçlar elde edilir.

Lemma 4.2.2.5 $K =_{k_2} K^{\theta_1} \times_{k_1} K^{\theta_2}$ manifoldu, θ_1^a ve θ_2^b farklı slant fonksiyonlu $\bar{K}$ para-Kaehler manifoldunun doubly warped çarpım noktasal bi-slant tip-1-2 altmanifoldu olsun. O zaman her $X \in \Gamma(K^{\theta_1})$ ve $V, Z \in \Gamma(K^{\theta_2})$ için

(Tip-1 için)

$$g_1(h_1(X, R_2Z), SV) - g_1(h_1(X, V), SR_2Z) = 2 \cosh^2 \theta_2^b X(\theta_2^b) g_1(Z, V) \\ (X(\ln k_1) + (\ln k_2)X) \quad (4.2.2.6)$$

dır.

İspat: (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) denklemleri kullanılarak

$$g_1(h_1(X, Z), SV) = g_1(\bar{\nabla}_Z X, SV) \\ = g_1(\bar{\nabla}_Z X, PV) - g_1(\bar{\nabla}_Z X, R_2V) \\ = -g_1(\bar{\nabla}_Z PX, V) - g_1(\bar{\nabla}_X Z, R_2V) \\ = -g_1(\bar{\nabla}_Z R_1X, V) - g_1(\bar{\nabla}_Z SX, V) - g_1(\bar{\nabla}_X Z, R_2V)$$

elde edilir. (4.2.2.1) denklemi kullanılarak,

$$g_1(h_1(X, Z), SV) = -(R_1X(\ln k_1) + (\ln k_2)R_1X)g_1(Z, V) + g_1(h_1(Z, V), SX) \\ -(X(\ln k_1) + (\ln k_2)X)g_1(Z, R_2V) \quad (4.2.2.7)$$

bulunur. Polarizasyon kullanılarak,

$$g_1(h_1(X, V), SZ) = -(R_1X(\ln k_1) + (\ln k_2)R_1X)g_1(Z, V) + g_1(h_1(Z, V), SX) \\ -(X(\ln k_1) + (\ln k_2)X)g_1(Z, R_2V) \quad (4.2.2.8)$$

elde edilir. (4.2.2.7) denkleminde (4.2.2.8) denklemini çıkartırsak,

$$g_1(h_1(X, Z), SV) - g_1(h_1(X, V), SZ) = -2g_1(Z, R_2V)(X(\ln k_1) + (\ln k_2)X) \quad (4.2.2.9)$$

sonucuna ulaşılır. Bu son denklemde Z yerine R_2Z alırsak, (4.2.2.6) denklemi elde edilir. İspat tamamlanmış olur.

Tip-2 içinde benzer yol kullanılarak, istenilen sonuçlar elde edilir.

Teorem 4.2.2.6 $K =_{k_2} K^{\theta_1} \times_{k_1} K^{\theta_2}$ manifoldu, θ_1^a ve θ_2^b farklı slant fonksiyonlu $\bar{K}$ para-Kaehler manifoldunun has doubly warped çarpım noktasal bi-slant tip-1-2 altmanifoldu olsun. Bunun için gerek ve yeter şart $\forall X \in \Gamma(K^{\theta_1})$ ve $\forall V, Z \in \Gamma(K^{\theta_2})$ için

$$\tanh \theta_2^b X(\theta_2^b) \neq 0$$

olmasıdır.

İspat: (4.2.2.2) ve (4.2.2.6) denklemleri kullanılarak

$$2 \cosh^2 \theta_2^b X(\theta_2^b) g_1(Z, V)(X(\ln k_1) + (\ln k_2)X) = -\sinh 2\theta_2^b X(\theta_2^b) g_1(Z, V) \quad (4.2.2.10)$$

denklemine ulaşılır. $\theta_2^b \neq \frac{\pi}{2}$ olduğundan K manifoldu bir has manifold olur.

(4.2.2.10) denkleminde,

$$[(X(\ln k_1) + (\ln k_2)X) - \tanh \theta_2^b X(\theta_2^b)]g_1(Z, V) = 0$$

olur. Buradan $Z \in \Gamma(K^{\theta_2})$

sonucu elde edilir. Dolayısıyla, ispat tamamlanmış olur.

Her $h_1(X, Z) = 0$ durumunda, $\forall X \in \Gamma(K^{\theta_1})$ ve $\forall Z \in \Gamma(K^{\theta_2})$ için $h_1(X, Z) = 0$ olduğundan dolayı, $\bar{K}$ para-Kaehler manifoldunun $K =_{k_2} K^{\theta_1} \times_{k_1} K^{\theta_2}$ doubly warped çarpım noktasal bi-slant tip-1-2 altmanifoldu mixed tamamen jeodezik olur.

Teorem 4.2.2.7 $K =_{k_2} K^{\theta_1} \times_{k_1} K^{\theta_2}$ manifoldu, θ_1^a ve θ_2^b farklı slant fonksiyonlu $\bar{K}$ para-Kaehler manifoldunun has doubly warped çarpım noktasal bi-slant tip-1-2 altmanifoldu olsun. K mixed tamamen jeodezik doubly warped çarpım noktasal altmanifold olsun. O zaman aşağıdaki iki durumdan biri ortaya çıkar:

- I) $\theta_2^b = \frac{\pi}{2}$ ise K manifoldu $_{k_2} K^{\theta_1} \times_{k_1} K^{\perp}$ manifoldun doubly warped çarpım noktasal altmanifoldu olur. Burada $K^{\perp}$ anti-invariant altmanifolddur.
 II) $(X(\ln k_1) + (\ln k_2)X) = 0$ ise k_1, k_2 fonksiyonları sabittir.

Sonuç 4.2.2.8 $K =_{k_2} K^{\theta_1} \times_{k_1} K^{\theta_2}$ manifoldu, $\bar{K}$ para-Kaehler manifoldunun has doubly warped çarpım noktasal mixed jeodezik bi-slant tip-1-2 altmanifoldu olsun. O zaman $\forall X \in \Gamma(K^{\theta_1})$ ve $\forall V, Z \in \Gamma(K^{\theta_2})$ için $(X(\ln k_1) + (\ln k_2)X) = 0$ dır. Dolayısıyla k_1, k_2 fonksiyonları sabittir.

İspat: Eğer K mixed tamamen jeodezik ise (4.2.2.10) denkleminde yararlanarak $2 \cosh^2 \theta_2^b X(\theta_2^b) g_1(Z, V)(X(\ln k_1) + (\ln k_2)X) = 0$

elde edilir. Buradan da ya $\cosh^2 \theta_2^b = 0$ ($\theta_2^b = \frac{\pi}{2}$) ya da $(X(\ln k_1) + (\ln k_2)X) = 0$ olur. Buda ispatımızı tamamlar.

Lemma 4.2.2.9 $K =_{k_2} K^{\theta_1} \times_{k_1} K^{\theta_2}$ manifoldu, $\bar{K}$ para-Kaehler manifoldunun θ_1^a ve θ_2^b farklı slant fonksiyonlu has doubly warped çarpım noktasal bi-slant tip-1-2 altmanifoldu olsun. O zaman, $\forall X, Y \in \Gamma(K^{\theta_1})$ ve $\forall V, Z \in \Gamma(K^{\theta_2})$ için

(Tip-1 için)

$$g_1(h_1(X, Y), SZ) = g_1(h_1(X, Z), SY) \quad (4.2.2.11)$$

$$g_1(h_1(Z, V), SX) - g_1(h_1(X, Z), SV) = -(R_1 X(\ln k_1) + (\ln k_2)R_1 X)g_1(Z, V) + (X(\ln k_1) + (\ln k_2)X)g_1(Z, R_2 V) \quad (4.2.2.12)$$

$$g_1(h_1(Z, V), SR_1 X) - g_1(h_1(R_1 X, Z), SV) = -(\cosh^2 \theta_1^a X(\ln k_1) + (\ln k_2)\cosh^2 \theta_1^a X)g_1(Z, V) + (R_1 X(\ln k_1) + (\ln k_2)R_1 X)g_1(Z, R_2 V) \quad (4.2.2.13)$$

$$g_1(h_1(Z, R_2 V), SX) - g_1(h_1(X, Z), SR_2 V) = -(R_1 \theta_1^a X(\ln k_1) + (\ln k_2)R_1 X)g_1(Z, V) + \cosh^2 \theta_2^b (X(\ln k_1) + (\ln k_2)X)g_1(Z, V) \quad (4.2.2.14)$$

$$g_1(h_1(Z, V), SR_1X) - g_1(h_1(R_1X, Z), SV) - g_1(h_1(X, Z), SR_2V) + g_1(h_1(Z, R_2V), SX) \\ = (\cosh^2 \theta_2^b - \cosh^2 \theta_1^a)(X(\ln k_1) + (\ln k_2)X)g_1(Z, V) \quad (4.2.2.15)$$

denklemleri elde edilir.

İspat: (Tip-1 için)

$\forall X, Y \in \Gamma(K^{\theta_1})$ ve $\forall V, Z \in \Gamma(K^{\theta_2})$ için (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), (3.5) ve (3.6) denklemleri kullanılarak

$$g_1(h_1(X, Y), SZ) = g_1(\bar{\nabla}_X Y, SZ) \\ = g_1(\bar{\nabla}_X Y, PZ) - g_1(\bar{\nabla}_X Y, R_2Z) \\ = -g_1(\bar{\nabla}_X PY, Z) - g_1(\bar{\nabla}_X Y, R_2Z)$$

elde edilir. (3.1.2.2) denklemi kullanılarak,

$$g_1(h_1(X, Y), SZ) = -g_1(\bar{\nabla}_X R_1Y, Z) - g_1(\bar{\nabla}_X SY, Z) + g_1(\bar{\nabla}_X R_2Z, Y) \\ = -g_1(\bar{\nabla}_X R_1Y, Z) - g_1(h(X, Z), SY) + g_1(\bar{\nabla}_X R_2Z, Y)$$

elde edilir. (4.2.2.1) denklemi kullanılarak,

$$g_1(h_1(X, Y), SZ) = -(X(\ln k_1) + (\ln k_2)X)g_1(R_1Y, Z) - g_1(h_1(X, Z), SY) \\ + (X(\ln k_1) + (\ln k_2)X)g_1(R_2Z, Y) \quad (4.2.2.16)$$

elde edilir. Ortogonalite özelliği kullanılarak, (4.2.2.11) denklemi elde edilir. Daha sonra

$$g_1(h_1(Z, V), SX) = -g_1(\bar{\nabla}_Z V, PX) + g_1(\bar{\nabla}_Z V, R_1X) \\ = g_1(\bar{\nabla}_Z PV, X) - g_1(\bar{\nabla}_Z R_1X, V)$$

olur. (4.1.2.2) ve (3.1) denklemleri kullanılarak

$$g_1(h_1(Z, V), SX) = g_1(\bar{\nabla}_Z R_2V, X) + g_1(\bar{\nabla}_Z SV, X) - g_1(\bar{\nabla}_Z R_1X, V) \quad (4.2.2.17)$$

denklemi elde edilir. (4.2.2.17) denkleminde (3.4) ve (4.2.2.1) denklemlerini kullanarak (4.2.2.12) denklemi elde edilir.

(4.2.2.12) denkleminde, X yerine R_1X getirilirse (4.2.2.13) elde edilir.

(4.2.2.12) denkleminde, V yerine R_2V getirilirse (4.2.2.14) denklemi türetilir.

(4.2.2.13) ile (4.2.2.14) denklemlerini toplarsak (4.2.2.15) denklemi elde edilir.

Şimdi (4.2.2.13) denkleminde V yerine R_2V getirilirse,

$$g_1(h(Z, R_2V), SR_1X) - g_1(h_1(R_1X, Z), SR_2V) = -\cosh^2 \theta_1^a (X(\ln k_1) + (\ln k_2)X) \\ g_1(Z, R_2V) + \cosh^2 \theta_2^b (R_1X(\ln k_1) + (\ln k_2)R_1X)g_1(Z, V) \quad (4.2.2.18)$$

elde edilir. Eğer (4.2.2.14) ve (4.2.2.15) denklemlerinde Z yerine R_2Z getirilirse,

$$g_1(h_1(R_2Z, V), SX) - g_1(h_1(X, R_2Z), SV) = -(R_1X(\ln k_1) + (\ln k_2)R_1X) \\ g_1(R_2Z, V) + \cosh^2 \theta_2^b (X(\ln k_1) + (\ln k_2)X)g_1(Z, V) \quad (4.2.2.19)$$

denklemi bulunur ve

$$g_1(h_1(R_2Z, V), SR_1X) - g_1(h_1(R_1X, R_2Z), SV) = -\cosh^2 \theta_1^a (X(\ln k_1) + (\ln k_2)X) \\ g_1(R_2Z, V) + \cosh^2 \theta_2^b (R_1X(\ln k_1) + (\ln k_2)R_1X)g_1(Z, V) \quad (4.2.2.20)$$

denklemi elde edilir. Eğer (4.2.2.19) ve (4.2.2.20) denklemlerinde V yerine R_2V getirilirse,

$$g_1(h_1(R_2Z, V), SX) - g_1(h_1(X, R_2Z), SV) = -\cosh^2 \theta_2^b (R_1X(\ln k_1) + (\ln k_2)R_1X) \\ g_1(Z, V) + \cosh^2 \theta_2^b (X(\ln k_1) + (\ln k_2)X)g_1(Z, R_2V) \quad (4.2.2.21)$$

bulunur ve

$$g_1(h_1(R_2Z, R_2V), SR_1X) - g_1(h_1(R_1X, R_2Z), SR_2V) = -\cosh^2 \theta_1^a \cosh^2 \theta_2^b (X(\ln k_1) + (\ln k_2)X)g_1(Z, V) + \cosh^2 \theta_2^b (R_1X(\ln k_1) + (\ln k_2)R_1X)g_1(Z, R_2V) \quad (4.2.2.22)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. Benzer yollar kullanılarak Tip-2 içinde benzer denklemler elde edilir.

Hiepkö'nün Teoremi: K manifoldu üzerinde D_a ve D_b ortogonal distribüsyonları verilsin. Kabul edelim ki D_a ve D_b distribüsyonları involütif olsun. Öyleki D_a bir tamamen jeodezik foliasyondur ve D_b bir küresel foliasyodur. Dahası K manifoldu, ${}_{k_2}K^a \times_{k_1} K^b$ doubly non-trivial warped çarpım manifoldu üzerinde bir lokal izometriktir. Burada K^a ve K^b , D_a ve D_b 'nin integrallenebilir manifoldlarıdır [26].

Şimdi de para-Kaehler manifoldlarda doubly warped çarpım noktasal bi-slant tip 1-2 altmanifoldlarla ilgili bir karakterizasyon verelim.

Teorem 4.2.2.10 $K = {}_{k_2}K^{\theta_1} \times_{k_1} K^{\theta_2}$ manifoldu, $\bar{K}$ para-Kaehler manifoldunun D^{θ_1} ve D^{θ_2} noktasal slant distribüsyonlu has noktasal bi-slant tip-1-2 altmanifoldu olsun. Dahası, K , bir doubly warped çarpım tip 1-2 altmanifolddur. Burada K^{θ_1} ve K^{θ_2} manifoldları, θ_1^a ve θ_2^b farklı slant fonksiyonlu noktasal slant altmanifoldlardır. K nın şekil operatörünün aşağıdaki durumunu sağlaması için her $X, Y \in \Gamma(K^{\theta_1})$ ve her $V, Z \in \Gamma(K^{\theta_2})$ için

Tip-1 için;

$$A_{SR_1X}Z + A_{SZ}R_1X - A_{SR_2Z}X - A_{SX}R_2Z = (\cosh^2 \theta_2^b - \cosh^2 \theta_1^a)(X\gamma)Z \quad (4.2.2.23)$$

olması gerekir. Bunun için gerek ve yeter koşul $V(\gamma) = 0$ olmasıdır. Burada γ , K manifoldu üzerinde bir fonksiyondur.

İspat: $K = {}_{k_2}K^{\theta_1} \times_{k_1} K^{\theta_2}$ manifoldu, $\bar{K}$ para-Kaehler manifoldunun bir doubly warped çarpım noktasal bi-slant tip 1-2 altmanifoldu olsun. (3.5) ve (4.2.2.11) denklemlerini kullanarak

$$g_1(h_1(X, Y), SZ) + g_1(h_1(X, Y), SZ) = 0$$

$$g_1(A_{SY}Z + A_{SZ}Y, X) = 0 \quad (4.2.2.24)$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemde Y yerine R_1Y getirilirse,

$$g_1(A_{SR_1Y}Z + A_{SZ}R_1Y, X) = 0 \quad (4.2.2.25)$$

denklemini bulunur. (4.2.2.24) denkleminde Z yerine R_2Z getirilirse,

$$g_1(A_{SY}R_2Z + A_{SR_2Z}Y, X) = 0 \quad (4.2.2.26)$$

elde edilir. Daha sonra (4.2.2.25) denkleminde (4.2.2.26) denklemini çıkartırsak,

$$g_1(A_{SR_1Y}Z + A_{SZ}R_1Y - A_{SR_2Z}Y - A_{SY}R_2Z, X) = 0 \quad (4.2.2.27)$$

bulunur. (4.2.2.27) ve (4.2.2.15) denklemleri kullanılarak, (4.2.2.23) denklemi elde edilir.

Tersi olarak ifade edecek olursak; K manifoldu, $\bar{K}$ para-Kaehler manifoldunun has noktasal bi-slant tip-1 altmanifoldu olsun. Her $X_a, Y_b \in \Gamma(D^{\theta_1})$ ve $V_c \in \Gamma(D^{\theta_2})$ için, (4.2.2.15) ve (4.1.2.5) denklemlerinden,

$$(\sinh^2 \theta_1^a - \sinh^2 \theta_2^b) g_1(\bar{\nabla}_X Y, Z) - (\cosh^2 \theta_2^b - \cosh^2 \theta_1^a)(X\gamma) g_1(X, Z) = 0 \quad (4.2.2.28)$$

sonucuna ulaşılır. $\theta_1^a \neq \theta_2^b$ olduğundan dolayı, D^{θ_1} distribüsyonu K da tamamen jeodeziktir. Ayrıca, Her $X \in \Gamma(D^{\theta_1})$ ve $V, Z \in \Gamma(D^{\theta_2})$ için, (4.2.2.15) ve (4.1.2.6) denklemlerinden yararlanarak,

$$(\sinh^2 \theta_2^b - \sinh^2 \theta_1^a) g_1(\bar{\nabla}_Z V, X) = (\cosh^2 \theta_2^b - \cosh^2 \theta_1^a)(X\gamma) g_1(Z, V) \quad (4.2.2.29)$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemde trigonometrik bilgiler kullanılarak

$$g_1(\bar{\nabla}_Z V, X) = -(X\gamma) g_1(Z, V) \quad (4.2.2.30)$$

bulunur. Polarizasyon kullanılarak

$$g_1(\bar{\nabla}_V Z, X) = -(X\gamma) g_1(Z, V) \quad (4.2.2.31)$$

elde edilir. (4.2.2.29) ve (4.2.2.30) denklemlerinden $g_1([Z, V], X) = 0$

elde edilir. Dolayısıyla, D^{θ_2} distribüsyonu integrellenebilirdir. D^{θ_2} 'nin K^{θ_2} lifi olduğunu ve h_2 yi K manifoldunda K^{θ_2} 'nin ikinci temel formu olarak düşünelim. Daha sonra (4.2.2.30) denklemi kullanılarak,

$$g_1(h_2(Z, V), X) = g_1(\bar{\nabla}_Z V, X) = -(X\gamma) g_1(Z, V) \quad (4.2.2.32)$$

bulunur.. Buradan $h_2(Z, V) = -\bar{\nabla}_\gamma g_1(Z, V)$

elde edilir. $\bar{\nabla}_\gamma$, γ 'nın gradiyentidir. K^{θ_2} lifi, K manifoldunda $H_2 = -\bar{\nabla}_\gamma$ tamamen umbiliktir.

$\forall V \in \Gamma(D^{\theta_2})$ için $V(\gamma) = 0$ olduğundan dolayı, kolayca görülür ki; H_2 , K manifoldunda K^{θ_2} 'nin D^{θ_2} normal konneksiyonuna karşılık gelen bir paraleldir. Bundan dolayı, K^{θ_2} manifoldu K manifoldunda extrinsik küredir. Hiepko'nun [26] teoreminden K manifoldunun lokal doubly warped çarpım altmanifold olduğu ifade edilir. İspat tamamlanmış olur.

4.2.3 Nearly para-Kaehler geometride non-trivial warped çarpım noktasal anti-slant altmanifoldlar

Tanım 4.2.3.1 $K = L \times_k N$ altmanifoldu $\bar{K}$ nearly para-Kaehler manifoldunun warped çarpım noktasal anti-slant altmanifoldu olsun. (L, g_1) ve (N, g_2) iki tane yarı-Riemann altmanifold olsun. $k: L \rightarrow (0, \infty)$ olarak tanımlansın ve her $(t, p) \in L \times N$ için $q(t, p) = t$, $a(t, p) = p$ olsun ve bu kullanılarak $q: L \times N \rightarrow L$, $a: L \times N \rightarrow N$ projeksiyonları verilsin. $K = L \times_k N$ warped çarpımı, $L \times N$ ye bağlı yarı-Riemann yapı olsun. L anti-invaryant altmanifold ve N slant altmanifold olsun. Öyle ki; her $X, Y \in K$ için

$$g(X, Y) = g_1(q_* X, q_* Y) + (k \circ q)^2 g_2(a_* X, a_* Y)$$

olur. Burada $*$ yapısı türev dönüşümü olarak tanımlar [9]. k fonksiyonu, warping fonksiyon olarak isimlendirilir. Eğer warping fonksiyonu sabit ise K manifoldu, **trivial** olarak adlandırılır. Eğer warping fonksiyonu sabit değilse K manifoldu, **non-trivial warped çarpım noktasal anti-slant altmanifold** olarak adlandırılır. K manifoldunda L tamamen jeodezik, N tamamen umbiliktir [47].

Lemma 4.2.3.2 Yukarıdaki tanım gereğince, $\forall X, Y \in L$ ve $\forall V, W \in N$ vektör alanları verilsin. Daha sonra [9] kaynağında verilen Lemma 7.3 kullanılarak

$$\nabla_X V = \nabla_V X = (X \ln k)V \quad (4.2.3.1)$$

elde edilir. ∇ , K manifoldunun bir Levi-Civita konneksiyonu olarak ifade edilir.

Teorem 4.2.3.3 $\bar{K}$ manifoldu üzerinde $(e_1, \dots, e_s)$ ortonormal çatıları için

$$\|grad(k)\|^2 = \sum_{v=1}^s (e_v(k))^2 \quad (4.2.3.2)$$

elde edilir. Burada $grad(k)$, $g_1(grad(k), X) = X(k)$ olarak tanımlanan k nın gradiyentidir.

S. Uddin ve diğerleri, nearly Kaehler manifoldlarda $K = K^\perp \times_k K^\theta$ warped çarpım anti-slant altmanifoldların var olmadığını gösterdi [46]. Benzer bir yol kullanılarak nearly para-Kaehler manifoldlarda $K = K^\perp \times_k K^\theta$ formunun non-trivial warped çarpım noktasal anti-slant tip1-2 altmanifoldlarının var olmadığı aşağıdaki teoremden gösterilecektir.

Teorem 4.2.3.4 $\bar{K}$ bir nearly para-Kaehler manifoldu olsun. $\bar{K}$ nearly para-Kaehler manifoldunun $K = K^\perp \times_k K^\theta$ formunun noktasal anti-slant non-trivial warped çarpım tip1-2 altmanifoldu bulunmamaktadır. Burada $K^\perp$ anti-invaryant altmanifoldu ve K^θ ise bir noktasal slant altmanifoldu ifade eder.

İspat: (Tip-1-2 için)

B. Şahin, Kaehler manifoldlarda $K = K^\perp \times_k K^\theta$ non-trivial warped çarpım noktasal anti-slant altmanifoldların var olmadığını kaynak [40] ın Teorem 4.2'sinde göstermiştir. Benzer bir yol kullanılarak nearly para-Kaehler manifoldlarda ispat elde edilir.

$K = K^\perp \times_k K^\theta$ için $K^\perp$ anti-invaryant altmanifoldu ve K^θ ise bir noktasal slant altmanifoldu ifade eder. Bu durumda (3.3) denkleminde, Her $X, Y \in \Gamma(K^\theta)$ ve $Z \in \Gamma(K^\perp)$ için

$$\nabla_X Y = \bar{\nabla}_X Y$$

olur. (4.1.3.1) kullanılarak

$$Z(\ln k)g_1(X, X) = g_1(\bar{\nabla}_X Z, X)$$

elde edilir. X ve Z ortogonal olduğundan

$$Z_d(\ln k)g_1(X, X) = -g_1(Z, \bar{\nabla}_X X)$$

elde edilir. (3.1), (3.2), (3.3) ve (3.9) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} Z(\ln k)g_1(X, X) &= g_1(PZ, P\bar{\nabla}_X X) \\ &= g_1(PZ, \bar{\nabla}_X PX - (\bar{\nabla}_X P)X) \\ &= g_1(PZ, \bar{\nabla}_X PX) \end{aligned}$$

$$= g_1(PZ, h(X, PX))$$

sonucuna ulaşılır. (3.5) denklemi kullanılarak

$$g_1(A_{PZ}X, PX) = -g_1(PZ, \bar{\nabla}_X PX)$$

bulunur. $\bar{\nabla}$ torsiyon sıfır olduğundan ($[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X = 0$) bu kural kullanılarak

$$g_1(A_{PZ}X, PX) = -g_1(PZ, [X, PX] + \bar{\nabla}_{PX} X)$$

denklemi elde edilir. $[X, PX] \in \Gamma(TK^\theta)$ ve $PZ \in \Gamma(TK^\perp)$ olduğundan dolayı

$$g_1(A_{PZ}X, PX) = -g_1(PZ, \bar{\nabla}_{PX} X)$$

bulunur. (3.1) denklemi kullanılarak

$$g_1(A_{PZ}X, PX) = -g_1(PZ, \bar{\nabla}_{PX} P^2 X)$$

denklemine ulaşılır. (3.2), (3.9) ve (3.1) denklemleri kullanılarak

$$g_1(A_{PZ}X, PX) = -g_1(PZ, (\bar{\nabla}_{PX} P)PX + P\bar{\nabla}_{PX} PX)$$

$$\begin{aligned} g_1(A_{PZ}X, PX) &= -g_1(PZ, P\bar{\nabla}_{PX} PX) \\ &= g_1(Z, \bar{\nabla}_{PX} PX) \end{aligned}$$

elde edilir. PX ve Z ortogonal olduğundan

$$g_1(A_{PZ}X, PX) = -g_1(\bar{\nabla}_{PX} Z, PX)$$

olur. (3.1) ve (4.2.3.1) denklemleri kullanılarak

$$g_1(h_1(X, PX), PZ) = -Z(\ln k)g_1(PX, PX)$$

elde edilir. (3.1) ve (3.3) kullanılarak

$$\begin{aligned} g_1(h_1(X, PX), PZ) &= Z(\ln k)g_1(X, X) \\ g_1(\bar{\nabla}_X PX - \nabla_X PX, PZ) &= Z(\ln k)g_1(X, X) \\ -g_1(\nabla_X PX, PZ) &= Z(\ln k)g_1(X, X) \\ -g_1(P\nabla_X X, PZ) &= Z(\ln k)g_1(X, X) \\ g_1(\nabla_X X, Z) &= Z(\ln k)g_1(X, X) \end{aligned}$$

elde edilir. X ve Z ortogonal olduğundan ve (4.2.3.1) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned} -g_1(\nabla_X Z, X) &= Z(\ln k)g_1(X, X) \\ -Z(\ln k)g_1(X, X) &= Z(\ln k)g_1(X, X) \end{aligned}$$

sonucuna varılır. Burada, $2Z(\ln k)g_1(X, X) = 0$ olduğundan k sabit olur. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Yukarıdaki teoremden, $\bar{K}$ nearly para-Kaehler manifoldunun, $K = K^\perp \times_k K^\theta$ birinci formunun noktasal anti-slant non-trivial warped çarpım tip1-2 altmanifoldunun var olmadığı ispatlandı.

Şimdide, para-kompleks yapıyı, yarı-Riemann metriği ve Kartezyen koordinatları belirttikten sonra bu tanımlamalara göre $\bar{K}$ nearly para-Kaehler manifoldunun, $K = K^T \times_k K^\theta$ ikinci formunun noktasal anti-slant non-trivial warped çarpım tip1-2 altmanifoldlarının var olduğu örnekler verilerek ispatlanacaktır.

K , $\bar{R}_3^6$ 'nin bir yarı-Riemann altmanifoldu olarak verelim. Burada immersiyonu $\psi : K \rightarrow \bar{R}_3^6$ olan, Kartezyen koordinatları $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$ olan ve hemen hemen para-kompleks yapısı; $P\left(\frac{\partial}{\partial_{x_i}}\right) = \frac{\partial}{\partial_{y_i}}$ ve $P\left(\frac{\partial}{\partial_{y_i}}\right) = \frac{\partial}{\partial_{x_i}}$ $i = (1, 2, 3)$ olsun. Ayrıca

$\bar{R}_3^6$ yarı-Riemann manifoldunun yarı-Riemann metriğinin işaretleri $(+, -, +, -, +, -)$ olsun. Buna göre

Örnek 4.2.3.5 $\bar{R}_3^6$ bir nearly para-Kaehler manifoldu olsun. $m+n > 0$ ve $m+n \in \mathbb{R}$ için ve İmmersiyonu

$$\psi(m, n, c) = (\cosh m, \cosh n, \sinh n, \sinh m, c^3, \alpha)$$

olarak verilsin.

$$\begin{aligned} \psi_m &= \sinh m \frac{\partial}{\partial_{x_1}} + \cosh m \frac{\partial}{\partial_{y_2}} \quad \text{ise} \quad P\psi_m = \sinh m \frac{\partial}{\partial_{y_1}} + \cosh m \frac{\partial}{\partial_{x_2}} \\ \psi_n &= \sinh n \frac{\partial}{\partial_{y_1}} + \cosh n \frac{\partial}{\partial_{x_2}} \quad \text{ise} \quad P\psi_n = \sinh n \frac{\partial}{\partial_{x_1}} + \cosh n \frac{\partial}{\partial_{y_2}} \\ \psi_c &= +3c^2 \frac{\partial}{\partial_{x_3}} \quad \text{ise} \quad P\psi_c = 3c^2 \frac{\partial}{\partial_{y_3}} \end{aligned}$$

olur.

$\mu = R^2 = \cosh^2(m+n)$ olarak elde edilir. K , $(\bar{R}_3^6, P, g_1)$ nearly para-Kaehler manifoldunun bir noktasal anti-slant tip-1 altmanifoldunu ifade eder. Burada $D^\theta = \text{span}\{\psi_m, \psi_n\}$ noktasal slant distribüsyonu ve $D^\perp = \text{span}\{\psi_c\}$ anti-invariant distribüsyonu ifade eder. Burada, $D^\theta, D^\perp$ distribüsyonları integrallenebilir. $K = K^\theta \times_k K^\perp$ üzerinde verilen metrik tensör g_K olarak verilsin. Burada $g_K = -dm^2 + dn^2 + (9c^4)dc^2$ olarak bulunur.

Warping fonksiyonu da $k = 3c^2$ olur. Dolayısıyla; K , warping fonksiyonu $k = 3c^2$ olan $\bar{R}_3^6$ nearly para-Kaehler manifoldunun non-trivial warped çarpım noktasal anti-slant tip-1 altmanifoldu olur.

Örnek 4.2.3.6 $\bar{R}_3^6$ bir nearly para-Kaehler manifoldu olsun. $m-n \in (0, \frac{\pi}{2})$ için ve İmmersiyonu

$$\psi(m, n, c) = (\cos m, \cos n, \sin m, \sin n, \sin c, \pi)$$

olarak verilsin.

$$\begin{aligned} \psi_m &= -\sin m \frac{\partial}{\partial_{x_1}} + \cos m \frac{\partial}{\partial_{x_2}} \quad \text{ise} \quad P\psi_m = -\sin m \frac{\partial}{\partial_{y_1}} + \cos m \frac{\partial}{\partial_{y_2}} \\ \psi_n &= -\sin n \frac{\partial}{\partial_{y_1}} + \cos n \frac{\partial}{\partial_{y_2}} \quad \text{ise} \quad P\psi_n = -\sin n \frac{\partial}{\partial_{x_1}} + \cos n \frac{\partial}{\partial_{x_2}} \\ \psi_c &= \cos c \frac{\partial}{\partial_{x_3}} \quad \text{ise} \quad P\psi_c = \cos c \frac{\partial}{\partial_{y_3}} \end{aligned}$$

olur. $\mu = R^2 = \cos^2(m-n)$ olarak elde edilir. K , $(\bar{R}_3^6, P, g_1)$ nearly para-Kaehler manifoldunun bir noktasal anti-slant tip-2 altmanifoldunu ifade eder. Burada $D^\theta = \text{span}\{\psi_m, \psi_n\}$ noktasal slant distribüsyonu ve $D^\perp = \text{span}\{\psi_c\}$ anti-invariant distribüsyonu ifade eder. Burada, $P\psi_c \perp TK = \text{span}\{\psi_m, \psi_n\}$ olur ve $D^\theta, D^\perp$ distribüsyonları integrallenebilir. $K = K^\theta \times_k K^\perp$ üzerinde verilen metrik tensör g_K olarak verilsin. Burada $g_K = dm^2 - dn^2 + (\cos^2 c)dc^2$ olarak bulunur. Warping fonksiyonu da $k = \cos c$ olur. Dolayısıyla; K , warping fonksiyonu $k = \cos c$ olan $\bar{R}_3^6$ nearly para-Kaehler manifoldunun non-trivial warped çarpım noktasal anti-slant tip-2 altmanifoldu olur.

Şimdide daha sonra kullanmak için bazı lemmalar verelim.

Lemma 4.2.3.7 $\bar{K}$ bir nearly para-Kaehler manifoldu olsun. $\bar{K}$ nearly para-Kaehler manifoldunun $K = K^\theta \times_k K^\perp$ formunun has noktasal anti-slant non-trivial warped çarpım tip1-2 altmanifoldu olsun. Burada $K^\perp$ anti-invariant (totally real) altmanifoldu ve K^θ ise bir noktasal slant altmanifoldu ifade eder. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma(K^\theta)$ ve $\forall Z \in \Gamma(K^\perp)$ için

$$-2g_1(h_1(X, Y), PZ) = g_1(h_1(X, Z), SY) + g_1(h_1(Y, Z), SX) \quad (4.2.3.3)$$

olur.

İspat: (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) ve (3.9) denklemleri kullanılarak

$$g_1(h_1(X, Z), SY) = g_1(\bar{\nabla}_X Z, PY) - g_1(\bar{\nabla}_X Z, RY)$$

denklemi elde edilir. (3.9), (3.5) ve (4.2.3.1) denklemleri kullanılarak

$$g_1(h_1(X, Z), SY) = -g_1((\bar{\nabla}_X P)Z, Y) + g_1(\bar{\nabla}_X PZ, Y) - (Z \ln k)g_1(X, RY)$$

sonucuna varılır. (3.11) denklemi ve G 'nin (m_3) . özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned} g_1(h_1(X, Z), SY) &= -g_1(G_X Z, Y) - g_1(A_{PZ} X, Y) - (Z \ln k)g_1(X, RY) \\ g_1(h_1(X, Z), SY) &= -g_1(h_1(X, Y), PZ) - g_1(G_X Z, Y) - (Z \ln k)g_1(X, RY) \end{aligned} \quad (4.2.3.4)$$

elde edilir. Yukarıdaki (4.2.3.4) denkleminde X ve Y yer değiştirirse

$$\begin{aligned} g_1(h_1(Y, Z), SX) &= -g_1(h_1(X, Y), PZ) - g_1(G_Y Z, X) \\ &\quad + (Z \ln k)g_1(X, RY) \end{aligned} \quad (4.2.3.5)$$

denklemine ulaşılır. (4.2.3.4) ve (4.2.3.5) denklemleri kullanılarak (4.2.3.3) denklemi elde edilir.

Lemma 4.2.3.8 $K = K^\theta \times_k K^\perp$ formundaki altmanifold, $\bar{K}$ nearly para-Kaehler manifoldunun noktasal anti-slant non-trivial warped çarpım tip1-2 altmanifoldu olsun. Bu durumda $\forall X \in \Gamma(K^\theta)$ ve $\forall Z, W \in \Gamma(K^\perp)$ için

1) Tip-1-2 için;

$$\begin{aligned} 2g_1(h_1(Z, W), SX) &= -g_1(h_1(X, Z), PW) - g_1(h_1(X, W), PZ) \\ &\quad + 2(RX \ln k)g_1(Z, W) \end{aligned} \quad (4.2.3.6)$$

olur.

2) a) Tip-1 için;

$$2g_1(h_1(Z, W), SRX) = -g_1(h_1(RX, Z), PW) - g_1(h_1(RX, W,), PZ) - 2 \cosh^2 \theta (X \ln k) g_1(Z, W) \quad (4.2.3.7)$$

b) Tip-2 için;

$$2g_1(h_1(Z, W), SRX) = -g_1(h_1(RX, Z), PW) - g_1(h_1(RX, W,), PZ) - 2 \cos^2 \theta (X \ln k) g_1(Z, W) \quad (4.2.3.8)$$

dır.

İspat: (3.6) ve (3.3) denklemleri kullanılarak

$$g_1(h_1(Z, W), SX) = g_1(\bar{\nabla}_Z W, PX) - g_1(\bar{\nabla}_Z W, RX) - g_1(P\bar{\nabla}_Z W, X) - g_1(\bar{\nabla}_Z W, RX)$$

elde edilir. (3.1), (3.5), (3.9), (3.11) ve (4.2.3.1) denklemleri kullanılarak ve W ile RX ortogonal olduğundan

$$\begin{aligned} g_1(h_1(Z, W), SX) &= -g_1((\bar{\nabla}_Z P)W, X) + g_1(\bar{\nabla}_{Z_d} PW, X) + g_1(W, \bar{\nabla}_Z RX) \\ &= -g_1(G_Z W, X) - g_1(A_{PW} Z, X) + (RX \ln k) g_1(Z, W) \\ &= -g_1(G_Z W, X) - g_1(h_1(X, Z), PW) + (RX \ln k) g_1(Z, W) \end{aligned} \quad (4.2.3.9)$$

elde edilir. Yukarıdaki (4.2.3.9) denkleminde Z ve W yer değiştirirse

$$\begin{aligned} g_1(h_1(Z, W), SX) &= -g_1(G_W Z, X) - g_1(h_1(X, W), PZ) \\ &\quad + (RX \ln k) g_1(Z, W) \end{aligned} \quad (4.2.3.10)$$

elde edilir. (4.2.3.9) ve (4.2.3.10) denklemleri kullanarak **1)** durumdaki (4.2.3.6) denklemi elde edilir. Eğer bu (4.2.3.6) denkleminde X_a ve RX_a yer değiştirirse **2) a)** durumundaki (4.2.3.7) denklemini elde edilir. Benzer şekilde tip-2 içinde işlemler yapılarak **2) b)** durumundaki (4.2.3.8) denklemi elde edilir.

Teorem 4.2.3.9 $\bar{K}$, $K = K^\theta \times_k K^\perp$ formundaki nearly para-Kaehler manifoldunun noktasal anti-slant non-trivial warped çarpım tip1-2 altmanifoldu olsun. Öyle ki; her $Z, W \in \Gamma(D^\perp)$ için, $G_Z W \in \Gamma(D^\perp)$ olur ve her $L, V \in \Gamma(TK)$ için $U_L V \in \Gamma(\mu)$ olur. Burada $D^\perp$, K 'da totally real (anti-invariant) distribüsyonu ve μ ise invariant normal altçatıyı belirtmektedir. O zaman K , $K = K^\theta \times_k K^\perp$ formunda lokal mixed jeodezik warped çarpım noktasal altmanifolddur. Bunun için gerek ve yeter koşul

1) Tip-1 için;

$$A_{PZ} X = 0 \text{ ve } A_{SRX} Z = \cosh^2 \theta X(\varphi)Z \quad (4.2.3.11)$$

olmasıdır.

2) Tip-2 için;

$$A_{PZ} X = 0 \text{ ve } A_{SRX} Z = -\cos^2 \theta X(\varphi)Z \quad (4.2.3.12)$$

olmasıdır. Burada $\forall X \in \Gamma(D^\theta)$, $\forall Z \in \Gamma(D^\perp)$ ve φ , K üzerinde bir fonksiyondur. Öyle ki; her $W' \in \Gamma(D^\perp)$ için $W'(\varphi) = 0$ olur.

İspat: $\bar{K}$ nearly para-Kaehler manifoldunun $K = K^\theta \times_k K^\perp$ formunun noktasal anti-slant non-trivial warped çarpım tip1-2 altmanifoldu olsun. Burada $K^\perp$ anti-invariant (totally real) altmanifoldu ve K^θ ise bir noktasal slant altmanifoldu ifade eder.

Bu durumda (4.1.3.9), (4.1.3.10) ve (4.1.3.11) denklemlerini kullanarak, (4.2.3.11) ve (4.2.3.12) denklemleri elde edilir.

Tersi olarak; eğer $\bar{K}$ nearly para-Kaehler manifoldunun $K = K^\theta \times_k K^\perp$ formunun noktasal anti-slant non-trivial warped çarpım tip1-2 altmanifoldu ise Her $Z, W \in \Gamma(D^\perp)$ için, $G_Z W \in \Gamma(D^\perp)$ olur ve her $L, V \in \Gamma(TK)$ için $U_L V \in \Gamma(\mu)$ olur. Daha sonra, (4.2.3.11) ve (4.2.3.12) denklemlerin arasındaki ilişkiden ve (4.2.3.1) denkleminde yararlanarak, $g_1(\nabla_X Y, Z) = 0$ elde edilir. Burada D^θ 'nın parçaları K altmanifoldunda tamamen jeodeziktir.

Her $X \in \Gamma(D^\theta)$ için ve her $Z, W \in \Gamma(D^\perp)$ için

$$\begin{aligned} g_1([Z, W], X) &= g_1(\bar{\nabla}_Z W, X) - g_1(\bar{\nabla}_W Z, X) \\ &= -g_1(P\bar{\nabla}_Z W, PX) + g_1(P\bar{\nabla}_W Z, PX) \\ &= -g_1(\bar{\nabla}_Z PW, PX) + g_1((\bar{\nabla}_Z P)W, PX) \\ &\quad + g_1(\bar{\nabla}_W PZ, PX) - g_1((\bar{\nabla}_W P)Z, PX) \\ &= g_1(PW, \bar{\nabla}_Z PX) + g_1(G_Z W, RX) + g_1(U_Z W, SX) \\ &\quad - g_1(PZ, \bar{\nabla}_W PX) - g_1(G_W Z, RX) - g_1(U_W Z, SX) \end{aligned}$$

elde edilir. Her $Z, W \in \Gamma(D^\perp)$ için, $G_Z W \in \Gamma(D^\perp)$ olur ve her $L, V \in \Gamma(TK)$ için $U_L V \in \Gamma(\mu)$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} g_1([Z, W], X) &= g_1(PW, \bar{\nabla}_Z RX) + g_1(PW, \bar{\nabla}_Z SX) \\ &\quad - g_1(PZ, \bar{\nabla}_W RX) - g_1(PZ, \bar{\nabla}_W SX) \\ &= -g_1(\bar{\nabla}_Z PSX, W) + g_1((\bar{\nabla}_Z P)SX, W) \\ &\quad + g_1(h(Z, RX), PW) + g_1(\bar{\nabla}_Z PSX, W) \\ &\quad - g_1((\bar{\nabla}_Z P)SX, W) - g_1(h(W, RX), PZ) \end{aligned}$$

elde edilir. (3.6), (3.7) ve (3.11) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} g_1([Z, W], X) &= -g_1(\bar{\nabla}_Z rSX, W) - g_1(\bar{\nabla}_Z sSX, W) \\ &\quad + g_1(G_Z SX, W) + g_1(A_{PW}RX, Z) \\ &\quad - g_1(\bar{\nabla}_W rSX, Z) - g_1(\bar{\nabla}_W sSX, Z) \\ &\quad + g_1(G_W SX, Z) + g_1(A_{PZ}RX, W) \end{aligned}$$

elde edilir. (3.18) denklemi, G ve U 'nun $m_3(b)$ özelliği ve (4.2.3.11) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned} g_1([Z, W], X) &= \sinh^2 \theta g_1(\bar{\nabla}_Z X, W) + 2 \sinh \theta \cosh \theta Z(\theta) g_1(X, W) \\ &\quad + g_1(\bar{\nabla}_Z SRX, W) - g_1(U_{ZW}, SX) \\ &\quad - \sinh^2 \theta g_1(\bar{\nabla}_W X, Z) - 2 \sinh \theta \cosh \theta W(\theta) g_1(X, Z) \\ &\quad - g_1(\bar{\nabla}_Z SRX, W) + g_1(U_W Z, SX) \end{aligned}$$

elde edilir. Her $Z, W \in \Gamma(D^\perp)$ için, $G_Z W \in \Gamma(D^\perp)$ olur ve her $L, V \in \Gamma(TK)$ için $U_L V \in \Gamma(\mu)$ olduğundan ve (3.9) ile (3.10) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} g_1([Z, W], X) &= -\sinh^2 \theta g_1([Z, W], X) \\ &\quad - g_1(A_{SRX}Z, W) + g_1(A_{SRX}W, Z) \end{aligned}$$

bulunur. A_{SRX_a} simetrik olduğundan ve $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ olduğundan, $D^\perp$ integrallenebilir. Eğer

K manifoldunda $D^\perp$ nın bir parçası $K^\perp$ ise $h^\perp$, K manifoldunda $K^\perp$ nın ikinci temel formu olur. O zaman, $g_1(h^\perp(Z, W), X) = g_1(\nabla_Z W, X) = g_1(\bar{\nabla}_Z W, X)$

olur. (3.1) ve (3.11) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} g_1(h^\perp(Z, W), X) &= g_1(\bar{\nabla}_Z W, X) \\ &= g_1(P\bar{\nabla}_Z W, PX) \\ &= -g_1(\bar{\nabla}_Z PW, PX) + g_1((\bar{\nabla}_Z P)W, PX) \\ &= g_1(PW, \bar{\nabla}_Z PX) + g_1(G_Z W, RX) + g_1(U_Z W, SX) \end{aligned}$$

elde edilir. Her $Z, W \in \Gamma(D^\perp)$ için, $G_Z W \in \Gamma(D^\perp)$ olur ve her $L, V \in \Gamma(TK)$ için $U_L V \in \Gamma(\mu)$ olduğundan ve (3.3), (3.5), (3.7), (3.11) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} g_1(h^\perp(Z, W), X) &= g_1(\bar{\nabla}_Z RX, PW) - g_1(\bar{\nabla}_Z PSX, W) \\ &\quad + g_1((\bar{\nabla}_Z P)SX, W) \\ &= g_1(h_1(Z, RX), PW) - g_1(\bar{\nabla}_Z rSX, W) \\ &\quad - g_1(\bar{\nabla}_Z sSX, W) + g_1(G_Z SX, W) \end{aligned}$$

bulunur. G ve U 'nun $m_3(b)$ özelliği kullanılarak ve (3.3), (3.4), (3.10) ve (3.18) denklemlerinden yararlanarak,

$$\begin{aligned} g_1(h^\perp(Z, W), X) &= -g_1(A_{PW}RX, Z) - \sinh^2 \theta g_1(\bar{\nabla}_Z W, X) \\ &\quad + g_1(A_{SRX}Z, W) - g_1(U_Z W, SX) \end{aligned}$$

elde edilir. Teoremin hipotezinden yararlanarak

$$\cosh^2 \theta g_1(h^\perp(Z, W), X) = \cosh^2 \theta X(\varphi) g_1(Z, W)$$

elde edilir. Gradyentin tanımından yararlanarak

$$g_1(h^\perp(Z, W), X) = g_1(Z, W) g_1(grad \varphi, X)$$

Öyle ki; $\forall Z, W \in D^\perp$ için $h^\perp(Z, W) = g_1(Z, W) g_1(grad \varphi, X)$ olur.

Ortalama eğrilik vektörü $H = grad \varphi$ ve $K^\perp$, K nın tamamen umbilikidir.

Şimdi, $grad \varphi$ 'nin K manifoldunda $K^\perp$ manifoldunun $D^\perp$ normal konneksiyonuna bağlı paralel olduğunu açıklayalım. Her $X \in \Gamma(D^\theta)$ için ve her $W \in \Gamma(D^\perp)$ için

$$\begin{aligned} g_1(D_W grad \varphi, X) &= g_1(\nabla_W grad \varphi, X) \\ &= W g_1(grad \varphi, X) - g_1(grad \varphi, \nabla_W X) \\ &= W(X(\varphi)) - g_1(grad \varphi, [W, X]) - g_1(grad \varphi, \nabla_X W) \\ &= X(W\varphi) + g_1(\nabla_X grad \varphi, W) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $\forall W \in D^\perp$ için ve $\nabla_X grad \varphi \in D^\theta$ için $W\varphi = 0$ olur. Bundan dolayı D^θ , tamamen jeodeziktir. $K^\perp$ nın paralel olduğu sonucuna ulaşılır. Öyle ki; $D^\perp$, $H = grad \varphi$ paralel ortalama eğrilik vektörlü tamamen umbilikidir. Bundan dolayı, $K^\perp$ extrinsic küredir. Hiepko'nun [26] hesaplamalarından da yararlanarak, K nın warped çarpım noktasal anti-slant tip-1 altmanifold olduğu görülür. Tip-1 için ispat tamamlanmış olur.

Tip-2 içinde benzer yol kullanılarak ispat elde edilir.

Uyarı 4.2.3.10 Non-trivial warped çarpımlar ve non-trivial doubly warped çarpımlar warped çarpımların genel halidir ([48]).

4.3 Eşitsizlikler

Bu bölümde ilk olarak para-Kaehler manifoldlarda non-trivial warped çarpım noktasal yarı-slant tip 1-2 altmanifoldların ikinci olarak mixed totally jeodezik non-trivial doubly warped çarpım noktasal bi-slant tip 1-2 altmanifoldların ve son olarak da nearly para-Kaehler manifoldlarda mixed totally jeodezik non-trivial warped çarpım noktasal anti-slant tip 1-2 altmanifoldların ikinci temel formunun normunun karesi ile ilgili eşitsizlikler ve bazı sonuçlar elde edilecektir.

4.3.1 Para-Kaehler geometride non-trivial warped çarpım noktasal yarı-slant altmanifoldlar ile ilgili eşitsizlikler

Bu bölümde ilk olarak para-Kaehler manifoldlarda non-trivial warped çarpım noktasal yarı-slant tip 1-2 altmanifoldların ikinci temel formunun normunun karesi ile ilgili eşitsizlikler ve bazı sonuçlar elde edilecektir.

K , $\bar{K}^{m+2n}$ para-Kaehler manifoldunun $(m+n)$ boyutlu noktasal yarı-slant altmanifold olsun. $\bar{K}$, $(m+2n)$ boyutludur ve Biz, $\bar{K}$ 'nin tip-1-2 için ortonormal çatılarını verelim. Öncelikle tip-1 için ortonormal çatısını $\{E_1, \dots, E_m, \bar{E}_1, \dots, \bar{E}_n, E_1^*, \dots, E_n^*\}$ olarak seçelim. $\{E_1, \dots, E_m, \bar{E}_1, \dots, \bar{E}_n\}$ K 'da teğet demetidir. O zaman $\{E_1, \dots, E_m, \bar{E}_1, \dots, \bar{E}_n\}$ formu bir ortonormal çatıdır.

Öyle ki; $\{E_1, \dots, E_m\}$ 'yi D^T 'nin ortonormal çatısı ve $\{\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_n\}$ 'yi de D^θ 'nin ortonormal çatısı olarak alalım. $\text{boy}(D^T) = m$ ve $\text{boy}(D^\theta) = n$ olur. Ayrıca $\{E_1^*, \dots, E_n^*\}$ 'yi de SD^θ 'nin ortonormal çatısı olarak alalım. Bilinir ki; noktasal slant altmanifoldlar her zaman boyutsaldır. Bu yüzden $n = 2p$ olur. O zaman $\{\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_{2p}\}$ yi D^θ 'nin ortonormal çatısı ve $\{E_1^*, \dots, E_n^*\}$ SD^θ 'nin ortonormal çatısı olsun. Öyle ki; (tip-1 için)

$$\bar{E}_2 = \text{sech } \theta R \bar{E}_1, \dots, \bar{E}_{2p} = \text{sech } \theta R \bar{E}_{2p-1}$$

$$E_1^* = \text{csch } \theta S \bar{E}_1, \dots, \bar{E}_{2p} = \text{csch } \theta S \bar{E}_{2p}$$

olsun. θ slant fonksiyondur. Bu ortonormal çatılar slant altmanifoldlar için adapte edilmiş çatılar olarak ifade edilir [10]. Varsayalım ki;

*) D^T üzerinde: Ortonormal bazlar $\{E_v\} (v=1, \dots, m)$ olsun. $\text{boy}(D^T) = m$ 'dir. Ayrıca $g_1(E_v, E_v) = 1$ olsun.

*) D^θ üzerinde: Ortonormal bazlar $\{\bar{E}_w\} (w=1, \dots, n=2p)$ olsun. $\text{boy}(D^\theta) = n = 2p$ 'dir. Ayrıca $g_1(\hat{E}_w, \hat{E}_w) = \pm 1$ olsun.

*) PD^T üzerinde: Ortonormal bazlar $\{E_v\} (v=1, \dots, m)$ olsun. $\text{boy}(PD^T) = m$ 'dir. Ayrıca $g_1(PE_v, PE_v) = -1$ olsun.

) SD^θ üzerinde: Ortonormal bazlar $\{E_w^\} (w=1, \dots, 2p)$ olsun. $\text{boy}(SD^\theta) = 2p$ 'dir. Ayrıca $g_1(E_w^*, E_w^*) = \pm 1$ olsun [24].

Teorem 4.3.1.1 $K = K^T \times_k K^\theta$ formundaki altmanifold, $\bar{K}^{m+2n}$ para-Kaehler manifoldunun $(m+n)$ boyutlu warped çarpım noktasal yarı-slant tip-1 altmanifoldu olsun. K^T , bir para-holomorfik (invariant) altmanifolddur ve K^θ ise bir noktasal slant altmanifolddur. Eğer K^θ altmanifoldu spacelike ise

1) K 'nın ikinci temel formunun normunun karesini aldığımızda (tip-1 için)

$$\|h_1\|^2 \leq 2n(\text{csch}^2 \theta + \coth^2 \theta) \|\nabla(\ln k)\|^2 \quad (\text{boy}(K^\theta) = n) \quad (4.3.1.1)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\nabla(\ln k)$ $\ln k$ 'nın gradiyentidir.

2) Yukarıdaki (4.3.1.1) denkleminin eşitliğinin var olması sonucunda K^T , $\bar{K}$ manifoldunun tamamen jeodezik altmanifoldu olduğunu ve K^θ ise $\bar{K}$ manifoldunun bir tamamen umbilik altmanifoldu olduğunu ifade eder. Dahası, K manifoldu $\bar{K}$ manifoldunun bir minimal altmanifoldudur.

İspat: $\|h_1\|^2 = \|h_1(D^\theta, D^\theta)\|^2 + \|h_1(D^T, D^T)\|^2 + 2\|h_1(D^\theta, D^T)\|^2$ ikinci temel formunun normunun karesinin tanımından,

$$\begin{aligned} \|h_1\|^2 &= \sum_{k=1}^{m+2p} \sum_{i,j=1}^m g_1(h_1(E_i, E_j), E_k^*)^2 + \sum_{k=1}^{m+2p} \sum_{r,s=1}^{2p} g_1(h_1(\bar{E}_r, \bar{E}_s), E_k^*)^2 \\ &\quad + 2 \sum_{k=1}^{m+2p} \sum_{r=1}^{2p} \sum_{i=1}^m g_1(h_1(E_i, \bar{E}_r), E_k^*)^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\{\bar{E}_k\}$, $TK^\perp$ 'in bir ortonormal bazıdır. Şimdi adapte edilmiş çatıları hesaplayalım. Yukarıdaki denklem aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$\begin{aligned}\|h_1\|^2 &= \sum_{a=1}^{2p} \sum_{i,j=1}^m g_1(h_1(E_i, E_j), \text{csch } \theta S\bar{E}_a)^2 + \sum_{a,r,s=1}^{2p} g_1(h_1(\bar{E}_r, \bar{E}_s), \text{csch } \theta S\bar{E}_a)^2 \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^m \sum_{a,r=1}^{2p} g_1(h_1(E_i, \bar{E}_r), \text{csch } \theta S\bar{E}_a)^2\end{aligned}$$

Daha sonra (4.2.13) ile (4.2.12) denklemlerini kullanırsak

$$\begin{aligned}\|h_1\|^2 &= \sum_{a,r,s=1}^{2p} g_1(h_1(\bar{E}_r, \bar{E}_s), \text{csch } \theta S\bar{E}_a)^2 + 2 \sum_{i=1}^m \sum_{a,r=1}^{2p} (\text{csch } \theta)^2 [(PE_i(\ln k) g_1(h_1(\bar{E}_r, \bar{E}_a)))^2 \\ &\quad + 2PE_i(\ln k) g_1(\bar{E}_r, \bar{E}_a) E_i(\ln k) g_1(\bar{E}_r, R\bar{E}_a) + (E_i(\ln k) g_1(\bar{E}_r, R\bar{E}_a))^2]\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^m \sum_{a,r=1}^{2p} PE_i(\ln k) g_1(\bar{E}_r, \bar{E}_a) E_i(\ln k) g_1(\bar{E}_r, R\bar{E}_a) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{a,r=1}^{2p} g_1(\nabla(\ln k), PE_i) g_1(\nabla(\ln k), E_i) g_1(\bar{E}_r, \bar{E}_a) g_1(\bar{E}_r, R\bar{E}_a) \\ &= - \sum_{a,r=1}^{2p} \left[\sum_{i=1}^m g_1(g_1(\nabla(\ln k), E_i) E_i, P\nabla(\ln k)) \right] g_1(\bar{E}_r, \bar{E}_a) g_1(\bar{E}_r, R\bar{E}_a) = 0\end{aligned}$$

elde edilir. Denklem (4.1.10) kullanılarak

$$\|h_1\|^2 = \sum_{a,r,s=1}^{2p} g_1(h_1(\bar{E}_r, \bar{E}_s), \text{csch } \theta S\bar{E}_a)^2 + 2n \|\nabla(\ln k)\|^2 [\text{csch}^2 \theta + \coth^2 \theta]$$

olur. Buradan (4.3.1.1) denklemi elde edilir ve bu denklem eşitliği sağlamanın sonucu olarak aşağıdaki denklem de elde edilir;

$$\sum_{a=1}^{2p} \sum_{r,s=1}^{2p} g_1(h_1(\bar{E}_r, \bar{E}_s), \text{csch } \theta S\bar{E}_a)^2 = 0. \quad (4.3.1.2)$$

Buradan K^T , K manifoldunun tamamen jeodezik altmanifoldu olduğu görülür. (4.2.12) denklemi bunu ifade eder. Ayrıca (4.3.1.2) denklemi D^θ üzerinde h ın yok olduğunu belirtir. Dolayısıyla D^θ , K manifoldu üzerinde bir küresel distribüsyondur. Bu da gösterir ki; K^θ , $\bar{K}$ manifoldunun tamamen umbilik altmanifoldudur. Ayrıca (4.2.12) ve (4.3.1.2) denklemlerini kullanarak K manifoldunun $\bar{K}$ manifoldunun minimali olduğu sonucuna varılır.

Uyarı 4.3.1.2 Yukarıdaki teoremden K^θ manifoldu timelike ise bu durumda (4.3.1.1) eşitsizliğinin yönü değişir.

$$\|h_1\|^2 \geq 2n(\operatorname{csch}^2 \theta + \coth^2 \theta) \|\nabla(\ln k)\|^2 \quad (\operatorname{boy}(K^\theta) = n) \quad (4.3.1.3)$$

şeklinde olur.

Teorem 4.3.1.3 $K, \bar{K}^{m+2n}$ para-Kaehler manifoldunun $K = K^T \times_k K^\theta$ formunda $(m+n)$ boyutlu warped çarpım noktasal yarı-slant tip-2 altmanifoldu olsun.

Varsayalım ki; K^θ sırasıyla spacelike ve timelike olsun. Bu durumda (tip-2 için)

$$\|h_1\|^2 \leq 2n(\csc^2 \theta + \cot^2 \theta) \|\nabla(\ln k)\|^2 \quad (K^\theta \text{ spacelike için}) \quad (4.3.1.4)$$

$$\|h_1\|^2 \geq 2n(\csc^2 \theta + \cot^2 \theta) \|\nabla(\ln k)\|^2 \quad (K^\theta \text{ timelike için}) \quad (4.3.1.5)$$

elde edilir. Burada $\nabla(\ln k)$, $\ln k$ 'nin gradiyentidir.

4.3.2 Para-Kaehler geometride non-trivial doubly warped çarpım noktasal bi-slant altmanifoldlar ile ilgili eşitsizlikler

Bu bölümde ilk olarak para-Kaehler manifoldlarda mixed tamamen jeodezik non-trivial doubly warped çarpım noktasal bi-slant tip 1-2 altmanifoldların ikinci temel formunun normunun karesi ile ilgili eşitsizlikler ve bazı sonuçlar elde edilecektir.

$K =_{k_2} K^{\theta_1} \times_{k_1} K^{\theta_2}$ manifoldu, $(2m)$ boyutlu $\bar{K}$ para-Kaehler manifoldunun $(s = 2p + 2q)$ boyutlu doubly warped çarpım noktasal bi-slant altmanifoldu olsun. K^{θ_1}

$(d_1 = 2p)$ boyutludur ve K^{θ_2} $(d_2 = 2q)$ boyutludur ve Biz, $\bar{K}$ 'nin tip-1-2 için

ortonormal çatılarını verelim. Öncelikle D^{θ_1} ve D^{θ_2} 'nin tip-1 için sırasıyla lokal ortonormal çatılarını verelim.

$\{E_1, \dots, E_p, E_{p+1} = \operatorname{sech} \theta_1^a R_1 E_1, \dots, E_{2p} = \operatorname{sech} \theta_1^a R_1 E_p\}$ burada θ_1^a sabit değildir.

$\{E_{2p+1} = E_1^*, \dots, E_{2p+q} = E_q^*, E_{2p+q+1} = E_{q+1}^* = \operatorname{sech} \theta_2^b R_2 E_1^*, \dots, E_{2p+q} = E_{2q}^* = \operatorname{sech} \theta_2^b R_2 E_q^*\}$

burada θ_2^b sabit değildir.

Şimdide, SD^{θ_1} ve SD^{θ_2} 'nin sırasıyla lokal ortonormal çatılarını verelim.

$\{E_{s+1} = \hat{E}_1 = \operatorname{csch} \theta_1^a S E_1, \dots, E_{n+p} = \hat{E}_p = \operatorname{csch} \theta_1^a S E_p, E_{n+p+1} = \hat{E}_{p+1} = \operatorname{csch} \theta_1^a \operatorname{sech} \theta_1^a S R_1 E_1,$

$\dots, E_{n+2p} = \hat{E}_{n+2p} = \operatorname{csch} \theta_1^a \operatorname{sech} \theta_1^a S R_1 E_p\}$ ve

$$\{E_{s+2p+1} = \bar{E}_1 = \text{csch } \theta_2^b SE_1^*, \dots, E_{s+2p+q} = \bar{E}_q = \text{csch } \theta_2^b SE_q^*, E_{s+2p+q+1} = \bar{E}_{q+1} = \text{csch } \theta_2^b SR_2 E_1^*, \dots, E_{2s} = \bar{E}_{2q} = \text{csch } \theta_2^b \text{sech } \theta_2^b SR_2 E_1^*\}$$

olur. Varsayalım ki;

*) D^{θ_1} üzerinde: Ortonormal bazlar $\{E_v\} (v=1, \dots, p)$ olsun. $\text{boy}(D^{\theta_1}) = p$ dir. Ayrıca $g_1(E_v, E_v) = 1$ olsun.

) D^{θ_2} üzerinde: Ortonormal bazlar $\{E_w^\} (w=1, \dots, q)$ olsun. $\text{boy}(D^{\theta_2}) = q$ dir. Ayrıca $g_1(\hat{E}_w, \hat{E}_w) = \pm 1$ olsun.

*) SD^{θ_1} üzerinde: Ortonormal bazlar $\{SE_v\} (v=1, \dots, p)$ olsun. $\text{boy}(SD^{\theta_1}) = p$ dir. Ayrıca $g_1(SE_v, SE_v) = -1$ olsun.

) SD^{θ_2} üzerinde: Ortonormal bazlar $\{E_w^\} (w=1, \dots, q)$ olsun. $\text{boy}(SD^{\theta_2}) = q$ dir. Ayrıca $g_1(\bar{E}_w, \bar{E}_w) = \pm 1$ olsun [24].

Teorem 4.3.2.1 $K =_{k_2} K^{\theta_1} \times_{k_1} K^{\theta_2}$ manifoldu, $(2m)$ boyutlu $\bar{K}$ para-Kaehler manifoldunun (s) boyutlu mixed tamamen jeodezik doubly warped çarpım noktasal bi-slant tip-1 altmanifoldu olsun. K^{θ_1} ve K^{θ_2} manifoldları θ_1^a ve θ_2^b farklı slant fonksiyonlu noktasal slant altmanifoldlarıdır. Varsayalım ki; noktasal slant altmanifoldlar space-like olsun. O zaman (Tip-1 için)

1) K 'nın ikinci temel formunun normunun karesini aldığımızda

$$\|h_1\|^2 \leq 2q \text{csch}^2 \theta_1^a (\cosh^2 \theta_1^a + \cosh^2 \theta_2^b) \{\|\nabla(\ln k_1 + \ln k_2)\| - \sum_{r=1}^p ((e_r \ln k_1)^2 + (e_r \ln k_2)^2)\} \quad (4.3.2.1)$$

elde edilir. Burada $\nabla(\ln k_1 + \ln k_2)$, $(\ln k_1 + \ln k_2)$ nin gradyentidir. θ_1^a ve θ_2^b slant açıları K^{θ_1} ve K^{θ_2} nin farklı noktasal slant açılarıdır.

2) Yukarıdaki (4.3.2.1) denkleminin eşitliğinin var olması sonucunda K^{θ_1} , $\bar{K}$ manifoldunun tamamen jeodezik altmanifoldunu ve K^{θ_2} ise $\bar{K}$ manifoldunun bir tamamen umbilik altmanifoldunu ifade eder.

İspat: $\|h_1\|^2 = \|h_1(D^{\theta_1}, D^{\theta_1})\|^2 + 2\|h_1(D^{\theta_1}, D^{\theta_2})\|^2 + \|h_1(D^{\theta_2}, D^{\theta_2})\|^2$ ikinci temel formunun normunun karesinin tanımından elde edilir. K mixed tamamen jeodezik olduğundan sağ tarafın orta kısmı yok olur. Bu durumda

$$\|h_1\|^2 = \sum_{v,w=1}^s g_1(h_1(E_v, E_w), (h_1(E_v, E_w))) = \sum_{r=s+1}^{2m} \sum_{v,w=1}^{2p+2q} g_1(h_1(E_v, E_w), E_r)^2$$

olur. Şimdi biz yukarıdaki denklemde D^{θ_1} ve D^{θ_2} 'in çatılarını kullanalım.

$$\begin{aligned} \|h_1\|^2 &= \sum_{r=s+1}^{2m} \sum_{v,w=1}^{2p} g_1(h_1(E_v, E_w), E_r)^2 + \sum_{r=s+1}^{2m} \sum_{v=1}^{2p} \sum_{w=1}^{2q} g_1(h_1(E_v, E_w), E_r)^2 \\ &\quad + \sum_{r=s+1}^{2m} \sum_{v,w=1}^{2q} g_1(h_1(E_v^*, E_w^*), E_r)^2 \end{aligned} \quad (4.3.2.2)$$

K mixed tamamen jeodezik olduğundan (4.3.2.2) denkleminin sağ tarafın ikinci kısmı yok olur. Bu denklemde D^{θ_1} ve D^{θ_2} nin çatılarının bileşenlerini kullanalım.

$$\begin{aligned} \|h_1\|^2 &= \sum_{r=s+1}^{n+2q} \sum_{v,w=1}^{2p} g_1(h_1(E_v, E_w), E_r)^2 + \sum_{r=s+2q+1}^{2m} \sum_{v,w=1}^{2p} g_1(h_1(E_v, E_w), E_r)^2 \\ &\quad + \sum_{r=s+1}^{s+2p} \sum_{v,w=1}^{2q} g_1(h_1(E_v^*, E_w^*), E_r)^2 + \sum_{r=s+2p+1}^{2m} \sum_{v,w=1}^{2q} g_1(h_1(E_v^*, E_w^*), E_r)^2 \end{aligned} \quad (4.3.2.3)$$

elde edilir. (4.3.2.3) denkleminde SD^{θ_1} ve SD^{θ_2} 'in çatılarının bileşenlerini kullanarak

$$\begin{aligned} \|h_1\|^2 &= \sum_{r=1}^{2q} \sum_{v,w=1}^{2p} g_1(h_1(E_v, E_w), \bar{E}_r)^2 + \sum_{r=1}^{2p} \sum_{v,w=1}^{2p} g_1(h_1(E_v, E_w), \hat{E}_r)^2 \\ &\quad + \sum_{r=1}^{2p} \sum_{v,w=1}^{2q} g_1(h_1(E_v^*, E_w^*), \bar{E}_r)^2 + \sum_{r=1}^{2p} \sum_{v,w=1}^{2q} g_1(h_1(E_v^*, E_w^*), \hat{E}_r)^2 \end{aligned} \quad (4.3.2.4)$$

elde edilir. Her $v, w, r = 1, 2, \dots, 2p$ için $g_1(h_1(E_v, E_w), \hat{E}_r)$ ile $v, w, r = 1, 2, \dots, 2q$ için $g_1(h_1(E_v^*, E_w^*), \bar{E}_r)$ arasında ilişki bulunmadığından ikinci ve dördüncü terimler ayrılır. Bu yüzden

$$\|h_1\|^2 \geq \sum_{r=1}^{2q} \sum_{v,w=1}^{2p} g_1(h_1(E_v, E_w), \bar{E}_r)^2 + \sum_{r=1}^{2p} \sum_{v,w=1}^{2q} g_1(h_1(E_v^*, E_w^*), \hat{E}_r)^2 \quad (4.3.2.5)$$

elde edilir. (4.2.2.11) ve (4.3.2.5) denklemlerinden yararlanarak

$$\|h_1\|^2 \geq \sum_{r=1}^{2q} \sum_{v,w=1}^{2p} g_1(h_1(E_v, E_w^*), \bar{E}_r)^2 + \sum_{r=1}^{2p} \sum_{v,w=1}^{2q} g_1(h_1(E_v^*, E_w^*), \hat{E}_r)^2 \quad (4.3.2.6)$$

elde edilir. K mixed tamamen jeodezik olduğundan

$$g_1(h_1(E_v, E_w^*), \bar{E}_r) = 0 \quad (4.3.2.7)$$

olur. Her $v, w = 1, 2, \dots, 2p$ için ve her $r = s+1, \dots, 2q$ için elde edilir. (4.2.2.6) denklemi kullanılarak

$$\|h_1\|^2 \geq \sum_{r=1}^{2p} \sum_{v,w=1}^{2q} g_1(h_1(E_v^*, E_w^*), \hat{E}_r)^2 \quad (4.3.2.8)$$

elde edilir ve SD^{θ_1} ve SD^{θ_2} ortonormal çatılarının bileşenlerini kullanarak

$$\begin{aligned}
\|h_1\|^2 &\geq \text{csch}^2 \theta_1^a \sum_{r=1}^p \sum_{v,w=1}^q g_1(h_1(E_v^*, E_w^*), SE_r)^2 \\
&+ \text{csch}^2 \theta_1^a \text{sech}^2 \theta_2^b \sum_{r=1}^p \sum_{v,w=1}^q g_1(h_1(R_2 E_v^*, E_w^*), SE_r)^2 \\
&+ \text{csch}^2 \theta_1^a \text{sech}^2 \theta_2^b \sum_{r=1}^p \sum_{v,w=1}^q g_1(h_1(E_v^*, R_2 E_w^*), SE_r)^2 \\
&+ \text{csch}^2 \theta_1^a \text{sech}^4 \theta_2^b \sum_{r=1}^p \sum_{v,w=1}^q g_1(h_1(R_2 E_v^*, R_2 E_w^*), SE_r)^2 \\
&+ \text{csch}^2 \theta_1^a \text{sech}^2 \theta_1^a \sum_{r=1}^p \sum_{v,w=1}^q g_1(h_1(E_v^*, E_w^*), SR_1 E_r)^2 \\
&+ \text{csch}^2 \theta_1^a \text{sech}^2 \theta_1^a \text{sech}^2 \theta_2^b \sum_{r=1}^p \sum_{v,w=1}^q g_1(h_1(R_2 E_v^*, E_w^*), SR_1 E_r)^2 \\
&+ \text{csch}^2 \theta_1^a \text{sech}^2 \theta_1^a \text{sech}^2 \theta_2^b \sum_{r=1}^p \sum_{v,w=1}^q g_1(h_1(E_v^*, R_2 E_w^*), SR_1 E_r)^2 \\
&+ \text{csch}^2 \theta_1^a \text{sech}^2 \theta_1^a \text{sech}^4 \theta_2^b \sum_{r=1}^p \sum_{v,w=1}^q g_1(h_1(R_2 E_v^*, R_2 E_w^*), SR_1 E_r)^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemde (4.2.2.12) -(4.2.2.14), (4.2.2.18) -(4.2.2.22) ve (4.3.2.7) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
\|h_1\|^2 &\geq \text{csch}^2 \theta_1^a \sum_{r=1}^p \sum_{v,w=1}^q (R_1 E_r (\ln k_1) + (\ln k_2) R_1 E_r)^2 g_1(E_v^*, E_w^*)^2 \\
&+ \text{csch}^2 \theta_1^a \sum_{r=1}^p \sum_{v,w=1}^q (R_1 E_r (\ln k_1) + (\ln k_2) R_1 E_r)^2 g_1(E_v^*, E_w^*)^2 \\
&+ \text{csch}^2 \theta_1^a \text{sech}^2 \theta_1^a \text{csch}^2 \theta_2^b \sum_{r=1}^p \sum_{v,w=1}^q (R_1 E_r (\ln k_1) + (\ln k_2) R_1 E_r)^2 g_1(E_v^*, E_w^*)^2 \\
&+ \text{csch}^2 \theta_1^a \text{sech}^2 \theta_1^a \text{csch}^2 \theta_2^b \sum_{r=1}^p \sum_{v,w=1}^q (R_1 E_r (\ln k_1) + (\ln k_2) R_1 E_r)^2 g_1(E_v^*, E_w^*)^2 \\
&= 2q \text{csch}^2 \theta_1^a [1 + \text{sech}^2 \theta_1^a \text{csch}^2 \theta_2^b] \sum_{r=1}^p (R_1 E_r (\ln k_1) + (\ln k_2) R_1 E_r)^2 \quad (4.3.2.9)
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdide

$$\begin{aligned}
\|\nabla(\ln k_1 + \ln k_2)\|^2 &= \sum_{r=1}^{2p} (E_r \ln k_1)^2 \sum_{r=1}^{2p} (E_r \ln k_2)^2 \\
&= \sum_{r=1}^p (E_r \ln k_1)^2 + \sum_{r=1}^p (\text{sech}^2 \theta_1^a R_1 E_r \ln k_1)^2 + \sum_{r=1}^p (E_r \ln k_2)^2 + \sum_{r=1}^p (\text{sech}^2 \theta_1^a R_1 E_r \ln k_2)^2 \\
&= \sum_{r=1}^p (E_r \ln k_1)^2 + (E_r \ln k_2)^2 + \text{sech}^2 \theta_1^a \sum_{r=1}^p (R_1 E_r \ln k_1)^2 + (R_1 E_r \ln k_2)^2
\end{aligned}$$

yukarıdaki denklemden

$$\sum_{r=1}^p (R_1 E_r \ln k_1 + R_1 E_r \ln k_2)^2 = \text{csch}^2 \theta_1^a \|\nabla(\ln k_1 + \ln k_2)\|^2$$

$$-\sum_{r=1}^p (E_r \ln k_1)^2 + (E_r \ln k_2)^2) \quad (4.3.2.10)$$

elde edilir. (4.3.2.9) denkleminde (4.3.2.10) denklemi kullanılarak (4.3.2.1) denklemi elde edilir.

$$h_1(D^{\theta_1}, D^{\theta_1}) \subset SD^{\theta_1} \oplus SD^{\theta_2} \quad (4.3.2.11)$$

olur. (4.3.2.4) denklemindeki ikinci terimin ayrılmasından $g_1(h_1(D^{\theta_1}, D^{\theta_1}), SD^{\theta_1}) = 0$ elde edilir. Buda $h_1(D^{\theta_1}, D^{\theta_1}) \perp SD^{\theta_1}$ olduğunu belirtir.

$$h_1(D^{\theta_1}, D^{\theta_1}) \subset SD^{\theta_2} \quad (4.3.2.12)$$

olur. (4.2.2.11) ve (4.3.2.7) denklemlerinden $h_1(D^{\theta_1}, D^{\theta_1}) \perp SD^{\theta_2}$ elde edilir.

$$h_1(D^{\theta_1}, D^{\theta_1}) \subset SD^{\theta_1} \quad (4.3.2.13)$$

Olduğu görülür. (4.3.2.11) - (4.3.2.13) denklemlerinden

$$h_1(D^{\theta_1}, D^{\theta_1}) = 0 \quad (4.3.2.14)$$

elde edilir. K^{θ_1} , K 'da tamamen jeodezik olduğundan [9] ve (4.3.2.14) denkleminde K^{θ_1} tamamen jeodezik olur.

$$h_1(D^{\theta_2}, D^{\theta_2}) \subset SD^{\theta_2} \quad (4.3.2.15)$$

olduğu görülür. (4.3.2.4) denkleminde dördüncü terimin yok olmasından dolayı $g_1(h_1(D^{\theta_2}, D^{\theta_2}), SD^{\theta_2}) = 0$

olur. Buda $h_1(D^{\theta_2}, D^{\theta_2}) \perp SD^{\theta_1} = 0$

olduğunu gösterir.

$$h_1(D^{\theta_2}, D^{\theta_2}) \subset SD^{\theta_1} \quad (4.3.2.16)$$

elde edilir. Dahası, (4.3.2.14) denkleminde (4.3.2.7) denklemi kullanılarak, her $X \in \Gamma(TK^{\theta_1})$ ve her $Z, V \in \Gamma(TK^{\theta_2})$ için

$$\begin{aligned} g_1(h_1(Z, V), SX) &= (R_1 X (\ln k_1) + (\ln k_2) R_1 X) g_1(Z, V) \\ &\quad + (X (\ln k_1) + (\ln k_2) X) g_1(Z, R_2 V) \end{aligned} \quad (4.3.2.17)$$

elde edilir. Bu denklemde polarizasyon kullandığımızda

$$\begin{aligned} g_1(h_1(Z, V), SX) &= (R_1 X (\ln k_1) + (\ln k_2) R_1 X) g_1(Z, V) \\ &\quad + (X (\ln k_1) + (\ln k_2) X) g_1(V, R_2 Z) \end{aligned} \quad (4.3.2.18)$$

bulunur. (4.3.2.17) denkleminde (4.3.2.18) denklemini çıkartırsak

$$g_1(h_1(Z, V), SX) = (R_1 X (\ln k_1) + (\ln k_2) R_1 X) g_1(Z, V) \quad (4.3.2.19)$$

denklemi bulunur. (4.3.2.19) ve (4.3.2.16) denklemlerinden ve K^{θ_2} , K da tamamen umbilik olduğundan [9], K^{θ_2} nın tamamen umbilik altmanifol olduğu bulunur. İspat tamamlanır.

Uyarı 4.3.2.2 $K =_{k_2} K^{\theta_1} \times_{k_1} K^{\theta_2}$ manifoldu, (2m) boyutlu $\bar{K}$ para-Kaehler manifoldunun (s) boyutlu mixed tamamen jeodezik doubly warped çarpım noktasal bi-slant tip-1 altmanifoldu olsun. K^{θ_1} ve K^{θ_2} manifoldları θ_1^a ve θ_2^b farklı slant fonksiyonlu açılara sahip noktasal slant altmanifoldlarıdır. Eğer $K =_{k_2} K^{\theta_1} \times_{k_1} K^{\theta_2}$

manifoldunun noktasal slant altmanifoldları time-like olur ise (4.3.2.1) eşitsizliğinin yönü değişir. (Tip-1 için) K 'nın ikinci temel formunun normunun karesini aldığımızda

$$\begin{aligned} \|h_1\|^2 &\geq 2q \cosh^2 \theta_1^a (\cosh^2 \theta_1^a + \cosh^2 \theta_2^b) \{\|\nabla(\ln k_1 + \ln k_2)\| \\ &\quad - \sum_{r=1}^p ((e_r \ln k_1)^2 + (e_r \ln k_2)^2)\} \end{aligned} \quad (4.3.2.20)$$

şeklinde olur.

Teorem 4.3.2.3 $K =_{k_2} K^{\theta_1} \times_{k_1} K^{\theta_2}$ manifoldu, $(2m)$ boyutlu $\bar{K}$ para-Kaehler manifoldunun (s) boyutlu mixed tamamen jeodezik doubly warped çarpım noktasal bi-slant tip-2 altmanifoldu olsun. K^{θ_1} ve K^{θ_2} manifoldları θ_1^a ve θ_2^b farklı slant fonksiyonlu noktasal slant altmanifoldlarıdır. Varsayalım ki noktasal slant altmanifoldlar sırasıyla space-like ve time-like olsun. K 'nın ikinci temel formunun normunun karesini aldığımızda sırasıyla (Tip-2 için)

*) (space-like için)

$$\begin{aligned} \|h_1\|^2 &\leq 2q \csc^2 \theta_1^a (\cos^2 \theta_1^a + \cos^2 \theta_2^b) \{\|\nabla(\ln k_1 + \ln k_2)\| \\ &\quad - \sum_{r=1}^p ((e_r \ln k_1)^2 + (e_r \ln k_2)^2)\} \end{aligned} \quad (4.3.2.21)$$

*) (time-like için)

$$\begin{aligned} \|h_1\|^2 &\geq 2q \csc^2 \theta_1^a (\cos^2 \theta_1^a + \cos^2 \theta_2^b) \{\|\nabla(\ln k_1 + \ln k_2)\| \\ &\quad - \sum_{r=1}^p ((e_r \ln k_1)^2 + (e_r \ln k_2)^2)\} \end{aligned} \quad (4.3.2.22)$$

denklemleri elde edilir.

4.3.3 Nearly Para-Kaehler Geometride Non-Trivial Warped Çarpım Noktasal Anti-Slant Altmanifoldlar ile İlgili Eşitsizlikler

Bu bölümde ilk olarak nearly para-Kaehler manifoldlarda mixed tamamen jeodezik non-trivial warped çarpım noktasal anti-slant tip1-2 altmanifoldların ikinci temel formunun normunun karesi ile ilgili eşitsizlikler ve bazı sonuçlar elde edilecektir.

$K = K^{\theta} \times_k K^{\perp}$ manifoldu, $(2m)$ boyutlu $\bar{K}$ nearly para-Kaehler manifoldunun s boyutlu warped çarpım noktasal anti-slant altmanifoldu olsun. $K^{\perp}$, (d_1) boyutludur ve K^{θ} , $(d_2 = 2p)$ boyutludur ve $\bar{K}$ 'nin tip-1-2 için ortonormal çatılarını verelim.

Öncelikle D^θ ve $D^\perp$ nın tip-1 için sırasıyla lokal ortonormal çatılarını verelim.

$$\{E_1, \dots, E_p, E_{p+1} = \operatorname{sech} \theta RE_1, \dots, E_{2p} = \operatorname{sech} \theta RE_p\}, \theta \text{ sabit değildir.}$$

$$\{E_{2p+1} = E_1^*, \dots, E_s = E_{2p+1} = E_{d_1}^*\}.$$

Şimdide, SD^θ , $PD^\perp$ ve μ nün sırasıyla lokal ortonormal çatılarını verelim.

$$\{E_{s+1} = \bar{E}_{d_1+1} = \operatorname{csch} \theta SE_1^*, E_{s+d_1+2} = \bar{E}_1 = \operatorname{csch} \theta SE_1, \dots, E_{s+p} = \bar{E}_p = \operatorname{csch} \theta SE_p,$$

$$E_{s+p+1} = \bar{E}_{p+1} = \operatorname{csch} \theta \operatorname{sech} \theta SRE_1, \dots, E_{s+2p} = \bar{E}_{2p} = \operatorname{csch} \theta \operatorname{sech} \theta SRE_p\}$$

$$\{E_{s+2p+1} = PE_1^*, \dots, E_{2s} = PE_{d_1}^*\}$$

$$\{E_{2s+1}, \dots, E_{2m}\}$$

olur. SD^θ , $PD^\perp$ ve μ nin sırasıyla boyutları $(2p)$, (d_1) ve $(2m-2s)$ dir. Varsayalım ki;

*) $D^\perp$ üzerinde: Ortonormal bazlar $\{E_v\} (v=1, \dots, d_1)$ olsun. $\operatorname{boy}(D^\perp) = d_1$ dir. Ayrıca $g_1(E_v, E_v) = 1$ olsun.

) D^θ üzerinde: Ortonormal bazlar $\{E_w^\} (w=1, \dots, 2p)$ olsun. $\operatorname{boy}(D^\theta) = 2p$ dir. Ayrıca $g_1(\hat{E}_w, \hat{E}_w) = \pm 1$ olsun.

*) $PD^\perp$ üzerinde: Ortonormal bazlar $\{E_v\} (v=1, \dots, d_1)$ olsun. $\operatorname{boy}(PD^\perp) = d_1$ dir. Ayrıca $g_1(PE_v, PE_v) = -1$ olsun.

) SD^θ üzerinde: Ortonormal bazlar $\{E_w^\} (w=1, \dots, 2p)$ olsun. $\operatorname{boy}(SD^\theta) = 2p$ dir. Ayrıca $g_1(E_w^*, E_w^*) = \pm 1$ olsun [24].

Teorem 4.3.3.1 $K = K^\theta \times_k K^\perp$ manifoldu, $(2m)$ boyutlu $\bar{K}$ nearly para-Kaehler manifoldunun (s) boyutlu mixed tamamen jeodezik warped çarpım noktasal anti-slant tip-1 altmanifoldu olsun. K^θ noktasal slant altmanifold ve $K^\perp$ anti-invaryant altmanifold olur. Varsayalım ki; $K^\perp$ space-like olsun. O zaman (Tip-1 için)

1) K 'nın ikinci temel formunun normunun karesini aldığımızda

$$\|h_1\|^2 \leq d_1 \coth^2 \theta \|grad(\ln k)\|^2 \quad (4.3.3.1)$$

elde edilir. Burada $grad(\ln k)$, $\ln k$ nın gradiyentidir.

2) Yukarıdaki (4.3.3.1) denkleminin eşitliğinin sonucu olarak K^θ , $\bar{K}$ manifoldunun tamamen jeodezik altmanifoldu ve $K^\perp$ ise $\bar{K}$ manifoldunun bir tamamen umbilik altmanifoldu olduğu ifade edilir.

İspat: $\|h_1\|^2 = \|h_1(D^\theta, D^\theta)\|^2 + 2\|h_1(D^\theta, D^\perp)\|^2 + \|h_1(D^\perp, D^\perp)\|^2$ ikinci temel formunun normunun karesinin tanımından elde edilir. K mixed tamamen jeodezik olduğundan sağ tarafın orta kısmı yok olur. Bu durumda

$$\|h_1\|^2 = \sum_{r=1}^{2m} \sum_{v,w=1}^{2p} g_1(h_1(E_v, E_w), E_r)^2 + \sum_{r=s+1}^{2m} \sum_{v,w=1}^{d_1} g_1(h_1(E_v^*, E_w^*), E_r)^2$$

olur. Şimdi biz yukarıdaki denklemde $PD^\perp$, SD^θ ve μ nün çatılarını kullanalım.

$$\begin{aligned} \|h_1\|^2 &= \sum_{r=1}^{2p} \sum_{v,w=1}^{2p} g_1(h_1(E_v, E_w), \bar{E}_r)^2 + \sum_{r=1}^{d_1} \sum_{v,w=1}^{2p} g_1(h_1(E_v, E_w), PE_r^*)^2 \\ &+ \sum_{r=2s+1}^{2m} \sum_{v,w=1}^{2p} g_1(h_1(E_v, E_w), E_r)^2 + \sum_{r=1}^{2p} \sum_{v,w=1}^{d_1} g_1(h_1(E_v^*, E_w^*), \bar{E}_r)^2 \\ &+ \sum_{r=1}^{d_1} \sum_{v,w=1}^{d_1} g_1(h_1(E_v^*, E_w^*), PE_r^*)^2 + \sum_{r=2s+1}^{2m} \sum_{v,w=1}^{d_1} g_1(h_1(E_v^*, E_w^*), E_r)^2 \end{aligned} \quad (4.3.3.2)$$

elde edilir. (4.2.3.3) denklemi kullanılarak ve son denklemde sağ tarafın ikinci terimi mixed jeodezik olduğundan sıfır olur. Ayrıca, son denklemde sağ tarafın birinci, üçüncü, beşinci ve altıncı terimleri için warping fonksiyonu ile ilgili ilişki olmadığından dolayı bu terimler ayrılır ve sadece dördüncü terim değerlendirilir.

$$\|h_1\|^2 \geq \sum_{r=1}^p \sum_{v,w=1}^{d_1} g_1(h_1(E_v^*, E_w^*), \text{csch } \theta SE_r)^2 + \sum_{r=1}^p \sum_{v,w=1}^{d_1} g_1(h_1(E_v^*, E_w^*), \text{csch } \theta \text{sech } \theta SRE_r)^2$$

olur. (4.2.3.2), (4.2.3.3) ve (4.2.3.6) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \|h_1\|^2 &\geq \text{csch}^2 \theta \sum_{r=1}^p \sum_{v,w=1}^{d_1} (RE_w \ln k)^2 g_1(E_v^*, E_w^*)^2 \\ &+ \coth^2 \theta \sum_{r=1}^p \sum_{v,w=1}^{d_1} (E_r \ln k)^2 g_1(E_v^*, E_w^*)^2 \\ &= d_1 \text{csch}^2 \theta \sum_{r=1}^{2p} (RE_r \ln k)^2 - d_1 \text{csch}^2 \theta \sum_{r=p+1}^{2p} (RE_r \ln k)^2 \\ &+ d_1 \coth^2 \theta \sum_{r=1}^p (E_r \ln k)^2 \\ &= d_1 \text{csch}^2 \theta \|Rgrad(\ln k)\|^2 - d_1 \text{csch}^2 \theta \sum_{r=1}^p g_1(E_{r+p}, Rgrad(\ln k))^2 \\ &+ d_1 \coth^2 \theta \sum_{r=1}^p (E_r \ln k)^2 \end{aligned}$$

$$= d_1 \coth^2 \theta \|grad(\ln k)\|^2 - d_1 \operatorname{csch}^2 \theta \operatorname{sech}^2 \theta \sum_{r=1}^p g_1(RE_r, Rgrad(\ln k))^2 \\ + d_1 \coth^2 \theta \sum_{r=1}^p (E_r \ln k)^2$$

elde edilir. (3.16) denklemi kullanılarak $\|h_1\|^2 \leq d_1 \coth^2 \theta \|grad \ln k\|^2$

olduğu görülür ve (4.3.3.1) denklemi elde edilir. Böylece (4.3.3.1) denkleminin eşitliğinin sonucu olarak, (4.3.3.2) denklemden birinci ve üçüncü terimler ayrılır. Bundan dolayı

$$g_1(h_1(D^\theta, D^\theta), SD^\theta) = 0 \Rightarrow h_1(D^\theta, D^\theta) \subset PD^\perp \oplus \mu \quad (4.3.3.3)$$

ve

$$g_1(h_1(D^\theta, D^\theta), \mu) = 0 \Rightarrow h_1(D^\theta, D^\theta) \subset PD^\perp \oplus SD^\theta \quad (4.3.3.4)$$

elde edilir. (4.3.3.3) ve (4.3.3.4) denklemlerinden yararlanarak

$$h_1(D^\theta, D^\theta) \subset PD^\perp \quad (4.3.3.5)$$

elde edilir. (4.2.3.6) denklemden yararlanarak ve mixed jeodezik tanımından yararlanarak,

$$h_1(D^\theta, D^\theta) \perp PD^\perp \quad (4.3.3.6)$$

elde edilir. (4.3.3.5) ve (4.3.3.6) denklemleri kullanılarak,

$$h_1(D^\theta, D^\theta) = 0 \quad (4.3.3.7)$$

bulunur. $K = K^\theta \times_k K^\perp$ manifoldunda K^θ tamamen jeodeziktir [9]. (4.3.3.7)

denklemi de K^θ nın $\bar{K}$ da tamamen jeodezik olduğunu gösterir.

Beşinci ve altıncı terimlerinin ayrılmasından aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$g_1(h_1(D^\perp, D^\perp), PD^\perp) = 0 \Rightarrow h_1(D^\perp, D^\perp) \subset SD^\theta \oplus \mu \quad (4.3.3.8)$$

ve

$$g_1(h_1(D^\perp, D^\perp), \mu) = 0 \Rightarrow h_1(D^\perp, D^\perp) \subset PD^\perp \oplus SD^\theta \quad (4.3.3.9)$$

elde edilir. (4.3.3.8) ve (4.3.3.9) denklemlerinden yararlanarak

$$h_1(D^\perp, D^\perp) \subset SD^\theta \quad (4.3.3.10)$$

olduğu görülür. (4.2.3.7) denklemden yararlanarak ve mixed jeodezik tanımından yararlanarak her $X \in \Gamma(TK^\theta)$ ve her $Z, W \in \Gamma(TK^\perp)$ için

$$g_1(h_1(Z, W), SRX) = -\cosh^2 \theta (X \ln k) g_1(Z, W) \quad (4.3.3.11)$$

bulunur. (4.3.3.10) ve (4.3.3.11) denklemlerinden dolayı $K^\perp$ tamamen umbiliktir [9].

Buradan $K^\perp$ nın $\bar{K}$ da tamamen umbilik altmanifold olduğu elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Uyarı 4.3.3.2 Eğer Teorem 4.3.3.1'deki $K^\perp$ altmanifoldu time-like olur ise (4.3.3.1) eşitsizliğinin yönü değişir. (Tip-1 için)

K nın ikinci temel formunun normunun karesini aldığımızda

$$\|h_1\|^2 \geq d_1 \coth^2 \theta \|grad(\ln k)\|^2 \quad (4.3.3.12)$$

şeklinde olur. Burada $grad(\ln k)$, $\ln k$ nın gradiyentidir.

Teorem 4.3.3.3 $K = K^\theta \times_k K^\perp$ manifoldu, $(2m)$ boyutlu $\bar{K}$ nearly para-Kaehler manifoldunun (s) boyutlu mixed tamamen jeodezik warped çarpım noktasal anti-slant tip-2 altmanifoldu olsun. K^θ noktasal slant altmanifold ve $K^\perp$ anti-invaryant altmanifold olsun. Eğer $K^\perp$ altmanifoldu sırasıyla space-like ve time-like olursa K nın ikinci temel formunun normunun karesini aldığımızda (Tip-2 için)

*) (space-like için)

$$\|h_1\|^2 \leq d_1 \cot^2 \theta \|grad(\ln k)\|^2 \quad (4.3.3.13)$$

*) (time-like için)

$$\|h_1\|^2 \geq d_1 \cot^2 \theta \|grad(\ln k)\|^2 \quad (4.3.3.14)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Burada $grad(\ln k)$ $\ln k$ nın gradiyentidir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Bu tez çalışmasında öncelikle para Kaehler geometride noktasal yarı-slant, noktasal bi-slant altmanifoldlar ve nearly para-Kaehler geometride noktasal anti-slant altmanifoldlar tanımlandı, bunlarla ilgili teorem ve örnekler verildi. Daha sonra, para Kaehler geometride warped çarpım noktasal yarı-slant altmanifoldlar ve doubly warped çarpım noktasal bi-slant altmanifoldlar ve nearly para-Kaehler geometride noktasal anti-slant altmanifoldlar tanımlandı. Bunlarla ilgili teoremler, karakterizasyonlar ve örnekler elde edildi. Son olarak da bu belirttiğimiz warped çarpım altmanifoldların ikinci temel formunun normunun karesiyle ilgili eşitsizlikler elde edildi. Bunlarla ilgili teoremlere ve sonuçlara ulaşıldı.

5.2 Öneriler

Bu tez çalışmasında yapılan bütün çalışmalar, farklı manifoldlar üzerinde çalışılıp incelemeler yapılabilir. Geometri literatürüne katkılar sunacak sonuçlar elde edilecektir. Örneğin, bu çalışmalar para-kontakt geometri üzerinde incelenebilir. Bunun gibi farklı altmanifoldlar üzerinde de çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] M.A. Akyol ve Y. Gündüzalp, “Hemi-Slant Submersions From Almost Product Riemannian Manifolds.” *Gulf Journal of Mathematics*, vol. 4, pp. 15-27, Ocak 2016.
- [2] M.A. Akyol, S. Beyendi, T. Fatima and A. Ali “On Pointwise Quasi Bi-Slant Submanifolds.” *Filomat*, vol. 36, pp. 6687-6697, Ocak 2022.
- [3] P. Alegre ve A. Carriazo, “Slant Submanifolds of Para Hermitian Manifolds.” *Mediterranean Journal of Mathematics*, vol. 7, pp. 618-625, Temmuz 2019.
- [4] P. Alegre ve A. Carriazo, “Bi-Slant Submanifolds of Para Hermitian Manifolds.” *Mathematics*, vol. 14, pp. 201-214, Ocak 2017.
- [5] A.H. Alkhaldi, A. Ali and M.A. Akyol, “Some Remarks on a Family of Warped Product Pointwise Semi-Slant Submanifolds of Kaehler Manifold.” *Hacettepe University Journal of Mathematics and Statistics*, vol. 50, pp. 215-224, Ocak 2010
- [6] M. Atçeken, “Slant Submanifolds of a Riemannian Product Manifold.” *Acta Mathematica Scientia* , vol. 30B, pp. 215-224, Ağustos 2010.
- [7] M.E. Aydın, A. Mihai ve I. Mihai, “Some inequalities on submanifolds in statistical manifolds of constant curvature”, *Filomat*, vol. 29, pp. 465-477, Ocak 2015
- [8] A. Bejancu, ve H.R. Farran, “Foliations and geometric structures,” *Springer Science & Business Media*, vol. 580, 2006.
- [9] R.L. Bishop ve B. O’Neill, “Manifolds of Negative Curvature.” *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 145, pp. 1-49, Ocak 1969.
- [10] J.L. Cabrerizo, A. Carriazo, L.M. Fernandez and M. Fernandez “Slant Submanifolds in Sasakian Manifolds.” *Glasgow Mathematical Journal*, vol. 42, pp. 125-138, Temmuz 2000.
- [11] B.Y. Chen, “*Geometry of Slant Submanifolds.*” Leuven Belgium, Katholieke Universiteit Leuven Press, 1990 pp. 1-125.
- [12] B.Y. Chen, “Slant Immersions.” *Australia Mathematical Society*, vol. 41, pp. 135-147, Temmuz 1990.
- [13] B.Y. Chen, “*Differential Geometry of Warped Product Manifolds and Submanifolds.*” Hackensack, World Scientific Publishing, 2017, pp. 135-147.
- [14] B.Y. Chen ve O.J. Garay, “Pointwise Slant Submanifolds in Almost Hermitian Manifolds.” *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 36, pp. 630-640, Ocak 2012.
- [15] B.Y. Chen and S. Uddin, “Warped Product Pointwise Bi-Slant Submanifolds of Kaehler Manifolds.” *Publicationes Mathematicae Debrecen*, vol. 92, pp. 183-199, Ocak 2018.
- [16] N.C. Chiriac, “Semi-İnvariant Submanifolds of (g,F)-Manifolds.” *Surveys in Mathematics and its Applications*, vol. 5, pp. 201-213, Eylül 2010.
- [17] M. P. Do Carmo, Riemannian Geometry, *Boston: Birkhäuser*, vol. 6, 1992.
- [18] K. L. Duggal ve A. Bejancu, “Lightlike submanifolds of semi-Riemannian

Manifolds,” *Springer Netherlands*, pp. 139-189, 1996.

[19] F. Etayo, “On Quasi Slant Submanifolds of an Almost Hermitian Manifolds.” *Publicationes Mathematicae Debrecen*, vol. 53, pp. 217-223, Ocak 1998.

[20] A. Gray, “Nearly Kaehler Manifolds.” *Journal Differential Geometry*, vol. 4, pp. 283-309, Ocak 1970.

[21] M. Gutierrez ve B. Olea, “Semi Riemannian Manifolds With a Doubly Warped Structure.” *Revista Matematica Iberoamericana*, vol. 28, pp. 1-24, Ocak 2012.

[22] M. Gulbahar, E. Kılıç ve S.S. Celik, “Special Proper Pointwise Slant Surfaces of a Locally Product Riemannian Manifold.” *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 39, pp. 884-899, Ocak 2015.

[23] Y. Gündüzalp, “Neutral Slant Submersions in Paracomplex Geometry.” *Afrika Matematika*, vol. 32, pp. 1095-1110, 2021.

[24] Y. Gündüzalp, “Warped Product Submanifolds of Para-Kaehler Manifolds With a Pointwise Slant Factor.” *Filomat*, vol. 36, pp. 1-14, Ocak 2022.

[25] Y. Gündüzalp ve M.A. Akyol, “Pointwise Slant Riemannian Maps From Kaehler Manifolds.” *Journal of Geometry and Physics*, vol. 179, pp. 15-27, Ocak 2022.

[26] S. Hiepko, “Einne Inner Kennzeichnung der Verzerzten Produkte.” *Mathematische Annalen*, vol. 241, pp. 209-215, Ocak 1979.

[27] S. Ivanov ve S. Zamkovoy, “Para Hermitian and Para Quaternionic Manifolds.” *Differential Geometry and Its Applications*, vol. 23, pp. 205-234, Ocak 2005.

[28] K.A. Khan, V.A. Khan ve S.I. Husain, “Totally Umbilical CR-Submanifolds of Nearly Kaehler Manifolds.” *Geometriae Dedicata*, vol. 50, pp. 47-51, Ocak 1994.

[29] S. Kobayashi ve K. Nomizu, “Foundations of differential geometry,” *New York, London*, vol. 1, no. 2, 1963.

[30] G.I. Kruchkovich, “On Motions In Semi-Reducible Riemannian Space.” *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, vol. 12, pp. 149-156, Ocak 1957.

[31] A. Olteanu, “A General Inequality for Doubly Warped Product Submanifolds.” *Mathematical Journal of Okayama University*, vol. 52, pp. 133-142, Ocak 2010.

[32] B. O'Neill, “Semi-Riemannian geometry with applications to relativity,” *Academic press*, 1983.

[33] K.S. Park, “Pointwise Slant and Pointwise Semi-Slant Submanifolds in Almost Contact Metric Manifolds.” *Mathematics*, vol. 8, pp. 985-1007, Haziran 2020.

[34] P.K. Rashevskij, “The Scalar Field in a Stratified Space.” *Trudy Sem Vektor Tenzor Anal*, vol. 6, pp. 225-248, Ocak 1948.

[35] B.A. Rozenfeld, “On Unitary and Stratified Spaces.” *Trudy Sem Vektor Tenzor Anal*, vol. 7, pp. 260-275, Ocak 1949.

[36] B. Şahin, “CR-Altmanifoldların Geometrisi,” *Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı, İnönü Üniversitesi, Malatya*, 1996.

- [37] B. Sahin, "Non-Existence of Warped Product Semi-Slant Submanifolds of Kaehler Manifolds." *Geometria Dedicata*, vol. 117, pp. 195-202, Ocak 2006.
- [38] B. Sahin, "Slant Submanifolds of an Almost Product Riemannian Manifolds," *Journal of Korean Mathematical Society*, vol. 22, pp. 123-135, Ocak 2007.
- [39] B. Sahin, "Warped Product Pointwise Semi-Slant Submanifolds of Kaehler Manifolds." *Portugaliae Mathematica*, vol. 70, pp. 251-268, Ocak 2013.
- [40] B. Sahin, "Warped Product Submanifolds Kaehler Manifolds With a Slant Factor." *Annales Polonici Mathematici*, vol. 95, pp. 207-226, Ocak 2009.
- [41] A. Sharma, "Non-Existence of PR-Semi-Slant Submanifolds Warped Product Submanifolds in a Para Kaehler Manifolds." *Kyungpook Mathematical Journal*, vol. 60, pp. 197-210, Ocak 2020.
- [42] S. Sular and C. Özgür, "Doubly Warped Product Submanifolds (κ, μ) -Contact Metric Manifolds." *Annales Polonici Mathematici*, vol. 100, pp. 223-236, Ocak 2011.
- [43] S. Tachibana, "On Almost Analytic Vectors İn Certain Almost Hermitian Manifolds." *Tohoku Mathematical Journal*, vol. 11, pp. 351-363, Ocak 1959.
- [44] S. Uddin, F. Alghamdi ve F.R. Al-Solamy, "Geometry of Warped Product Pointwise Semi-Slant Submanifolds of a Locally Product Riemannian Manifolds." *Journal of Geometry and Physics*, vol. 152, pp. 15-27, Haziran 2020.
- [45] S. Uddin, V.A. Khan ve K.A. Khan, "Warped Product Submanifolds of Kenmotsu Manifold." *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 36, pp. 319-330, Ocak 2012.
- [46] S. Uddin ve A.Y.M. Chi, "Warped Product Pseudo-Slant Submanifolds of Nearly Kaehler Manifolds." *Analele Stiintifice Ale Universitatii Ovidius Constanta Seria Mathematica*, vol. 19, pp. 195-204, Ocak 2011.
- [47] B. Ünal "Multiply Warped Products." *Journal of Geometry and Physics*, vol. 34, pp. 287-301, Ocak 2000.
- [48] B. Ünal "Doubly Warped Products." *Differential Geometry and Its Applications*, vol. 15, pp. 253-263, Ocak 2001.
- [49] K. Yano ve M. Kon "Structures on Manifolds." *World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.*, 1984.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyad, Ad

AYAZ, Sedat

Web sayfası
(Research Gate, Academia, vs.)

<https://www.researchgate.net>

Eğitim Bilgileri

Derece	Kurum	Mezuniyet Yılı
Yüksek Lisans	Bitlis Eren ve Muş Alparslan Üniversitesi (Ortak) Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik	2019
Lisans	Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Orta Öğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Matematik Öğretmenliği	2008
Lise	Bitlis Anadolu Öğretmen Lisesi	2001

İş Deneyimi

Dönem (Yıl)	Şirket, Kurum	Görev
2006-2011	Diyarbakır PTT Baş Müdürlüğü	Memur
2011-Devam ediyor	Millî Eğitim Bakanlığı	Öğretmen

Yabancı Dil

İngilizce (ÜDS: 61.25)

Yayınlar

1. Ayaz S. and Gündüzalp Y. (2024). Warped product pointwise hemi-slant submanifolds whose ambient spaces are nearly para-Kaehler manifolds. *Turkish Journal of Mathematics*. <https://doi.org/10.55730/1300-0098>.
2. Ayaz S., Kuşak Samancı H. and Kocayiğit H. (2023). Some new characterizations of a space curve due to a modified frame $\{N, C, W\}$ in Euclidean 3-space. *International Journal*

of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation. <https://dx.doi.org/10.1515/ijnsns-2020-0260>

3. Kuşak Samancı H., Ayaz S., and Kocayiğit H. (2021). Some new characterizations of the harmonic and harmonic 1-type curves in Euclidean 3-space. *Foundations of Computing and Decision Sciences*. <https://dx.doi.org/10.2478/fcds-2021-0016>

4. Kuşak Samancı H., Kocayiğit H., and Ayaz S. On some characterizations of the harmonic and harmonic 1-type curves in Euclidean 3-space. *17. International Geometry Symposium* June 22-06, 2019.

5. Ayaz S. and Gündüzalp Y. Non-trivial warped product pointwise pseudo-slant submanifolds in para-contact geometry. *Mersin Üniversitesi Yaz Okulu ve Matematik Öğrenci Kongresi* August 30-08, 2023.

Özel İlgiler

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ BENZERLİK BİLDİRİMİ FORMU

Öğrencinin Adı, Soyadı	Sedat AYZ		
Öğrenci No	19804601		
Ana Bilim Dalı	MATEMATİK		
Program Türü	Proje ☐	Yüksek Lisans ☐	Doktora ☒
Tez Danışmanı (Ünvanı, Adı, Soyadı)	Prof. Dr. Yılmaz GÜNDÜZALP		
(Varsa) II. Tez Danışmanı (Ünvanı, Adı, Soyadı)	-		
Tez Başlığı	Para-Kompleks Geometride Warped Çarpım Noktasal Slant Altmanifoldlar		
RAPOR BİLGİLERİ			
Raporlama Aşaması	Tez Savunma Sınavı Sonrası		
Sayfa Sayısı	90		
Raporlama Tarihi	25.04.2024		
Benzerlik Oranı (%)	14		

Yukarıda bilgileri verilen tez çalışmamın toplam 90 sayfalık kısmına ilişkin 25/04/2024 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından Turnitin isimli intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı %14 olarak tespit edilmiştir.

Uygulanan filtrelemeler:

- ☐ Başlangıç Bölümleri (Kabul ve Onay sayfası, Teşekkür sayfası, Özet/Abstract) hariç
☐ Kaynaklar hariç
☐ Alıntılar dâhil
☒ Diğer (Her şey dahil)

Tezimin benzerlik oranı, Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İntihal Raporu Uygulama Esaslarında belirtilen üst sınır benzerlik oranını aşmamaktadır. Benzerlik oranım üst sınır benzerlik oranının altında olsa dahi aksinin tespit edilmesi durumunda her türlü yasal sorumluluğu kabul ettiğimi ve hukuki sonuçlarına razı olduğumu bildirir, gereğini arz ederim.

Öğrencinin Adı, Soyadı: Sedat AYZ

Tarih:

İmza:

Danışman Adı, Soyadı: Prof. Dr. Yılmaz GÜNDÜZALP

İmza:

Tarih:

Ana Bilim Dalı Başkanı Adı, Soyadı: Prof. Dr. Hatun Özlem GÜNEY

İmza:

Tarih: