



**PARA NORDEN MANİFOLDLARINDA
CODAZZI ÇİFTLERİNİN
BAZI ÖZELLİKLERİ**

Sedanur UÇAN

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Sibel TURANLI**

**2021
Her hakkı saklıdır.**



**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**PARA NORDEN MANİFOLDLARINDA CODAZZİ ÇİFTLERİNİN
BAZI ÖZELLİKLERİ**

Sedanur UÇAN

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Sibel TURANLI

Anabilim Dalı: Matematik

Erzurum

2021

Her hakkı saklıdır

T.C.
ERZURUM TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ ONAY FORMU

**PARA NORDEN MANİFOLDLARINDA CODAZZİ ÇİFTLERİNİN
BAZI ÖZELLİKLERİ**

Dr. Öğr. Üyesi Sibel TURANLI danışmanlığında, Sedanur UÇAN tarafından hazırlanan bu çalışma 07 / 01 / 2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Ana Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **Oy birliği ile (3/3)** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Aydın GEZER *İmza* :

Üye : Doç. Dr. Ceren Sultan ELMALI *İmza* :

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Sibel TURANLI *İmza* :

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum

Prof. Dr. Arzu GÖRMEZ
Enstitü Müdürü

*Bu tez çalışması tarafından nolu proje ile desteklenmiştir.

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki tüm bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

07 / 01 / 2021

Sedanur UÇAN

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

PARA NORDEN MANİFOLDLARINDA CODAZZI ÇİFTLERİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ

Sedanur UÇAN

Erzurum Teknik Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Sibel TURANLI

Bu tezde ilk olarak M_{2n} diferensiyellenebilir manifold üzerinde g para Norden metrik, φ hemen hemen para kompleks yapı, G twin para Norden metrik ve ∇ bir lineer konneksiyon olmak üzere φ ' ye, g ' ye ve G ' göre lineer olan ∇^φ , φ –conjugate konneksiyonu, ∇^* , g – conjugate konneksiyonu ve $\nabla^\dagger$, G –conjugate konneksiyonu tanımlanmıştır. Bu konneksiyonların Klein-4 grup özelliklerini sağladığı gösterilmiştir. ∇ , ∇^* ve $\nabla^\dagger$ konneksiyonlarının eğrilikleri sırasıyla R , R^* ve $R^\dagger$ olmak üzere bu eğrilikler arasındaki ilişki bulunmuştur. Daha sonra (M_{2n}, φ, g, G) para Norden manifoldunda (∇, φ) , (∇, g) ve (∇, G) Codazzi çiftleri tanımlanmış ve bunların özellikleri incelenmiştir. (M_{2n}, φ, g, G) manifoldunun para Kahler Norden manifold olması için gerek ve yeter şart araştırılmıştır. Son olarak da φ –invariant lineer konneksiyonların ve istatistiksel manifoldun özellikleri çalışılmıştır.

2021, 78 sayfa

Anahtar Kelimeler: Para Norden manifold, Conjugate konneksiyon, Codazzi çiftleri, Para Kahler Norden Manifold, φ –invariant lineer konneksiyon, İstatistiksel Manifold.

ABSTRACT

MS. Thesis

SOME PROPERTIES OF CODAZZI PAIRS ON PARA NORDEN MANIFOLDS

Sedanur UÇAN

Erzurum Technical University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Maths

Supervisor: Asst. Prof. Sibel TURANLI

In this thesis, firstly, let g be a para Norden metric, φ be a para complex structure, G be a twin para Norden metric and ∇ be a linear connection on M_{2n} differentiable manifold, ∇^φ, ∇^* and $\nabla^\dagger$ are conjugate connections which are linear with respect to φ, g and G are defined. These connections are shown to provide the properties of Klein-4 group. Let the curvature tensors of the connections ∇, ∇^* and $\nabla^\dagger$ be R, R^* and $R^\dagger$, respectively, the relationship between these curvature tensors is found. Later, $(\nabla, \varphi), (\nabla, g)$ and (∇, G) Codazzi pairs are defined on (M_{2n}, φ, g, G) and some properties of these pairs are examined. The necessary and sufficient condition for (M_{2n}, φ, g, G) to be a para Kahler Norden is investigated. Finally, properties of φ –invariant linear connection and statistical manifold are studied.

2021, 78 pages

Anahtar Kelimeler: Para Norden manifold, Conjugate connection, Codazzi pairs, Para Kahler Norden manifold, φ –invariant linear connection, Statistical manifold.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma, Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Yüksek lisans eğitimim boyunca ve bu tez çalışmamı oluşturmamda bana her türlü desteğini esirgemeyen, her zaman arkamda olan çok değerli hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Sibel Turanlı'ya sonsuz teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Tezin hazırlanması sürecinde değerli fikirlerinden yararlandığım ve benden hiçbir desteğini esirgemeyen Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyeleri'ne teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışmalarım esnasında kendilerinden görmüş olduğum destek ve sonsuz güvenden dolayı aileme ve arkadaşım Seda Öztürk'e teşekkür ederim.

Sedanur Uçan

7 / Ocak / 2021

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR	vi
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	3
3. MATERYAL ve YÖNTEM	5
3.1. Diferensiyellenebilir Manifoldlar	5
3.2. Tensör Alanları	7
3.3. Diferensiyellenebilir Manifold Üzerinde Afin (Levi-Civita) Konneksiyonu	11
3.4. Afin Konneksiyonlu Uzaylar	16
3.5. Eğrilik ve Burulma Tensörleri	20
3.6. Konneksiyonların Dönüşümü	22
3.7. Burulması Sıfır Olan Uzaylar.....	24
3.8. Riemannian Manifoldu	29
3.9. Tanjant Demet	29
3.10. Diferensiyel Geometrik Cebirsel Yapılar	30
3.10.1. m –Boyutlu Cebir (Birleşimli, Değişimli, Sonlu Boyutlu Cebir)	30
3.10.2. Cebirsel Yapıların Holomorfluğu	33
3.11. Nijenhuis Tensörü	36
3.12. Skaler Eğrilik	38
3.13. Hemen Hemen Para Kompleks ve Hemen Hemen Kompleks Yapılar.....	40
3.14. Para Norden Metrikler	40
3.15. Para Holomorfik (Hemen Hemen Para Holomorfik) Tensör Alanları	41
3.16. Para Kahler Norden (Para Holomorfik Norden Metrikler)	42
3.17. Twin Para Norden Metrik	43
3.18. Codazzi Tensörler	44
3.19. φ –İnvaryant Lineer Konneksiyonlar	46
3.20. İstatistiksel Manifoldlar	46

3.21. Klein-4 Grup	46
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA.....	48
4.1. Conjugate Konneksiyonlar.....	48
4.2. Codazzi Çiftleri	52
4.3. Eğrilik Özellikleri	63
4.4. Tachibana Operatörü ve Nijenhuis Tensörü	65
4.5. φ –İnvaryant Lineer Konneksiyon	69
4.6. İstatistiksel Manifold.....	71
5. SONUÇ ve ÖNERİLER.....	74
KAYNAKLAR	75
ÖZGEÇMİŞ.....	78

SİMGELER DİZİNİ VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
M_n	n boyutlu manifold
C^∞	Her mertebeden sürekli kısmi türevleri olan fonksiyonların kümesi
L_X	X vektör alanına göre Lie türevi
φ	Hemen hemen para kompleks yapı
∇_X	X vektör alanı yönündeki kovaryant türev
S_{ij}^k	Burulma Tensörü
R_{rsk}^i	Eğrilik Tensörü
Γ_{ij}^k	Cristoffel sembolü
$T_q^p(B_n)$	B_n vektör uzayında (p, q) tipli tensörlerin kümesi
N_φ	φ 'nin Nijenhuis tensörü
g	Pseudo-Riemann metriği
G	Twin Metrik
Φ	Tachibana operatörü
∇^*	∇ konneksiyonunun g conjugate konneksiyonu
$\nabla^\dagger$	∇ konneksiyonunun G conjugate konneksiyonu
∇^φ	∇ konneksiyonunun φ conjugate konneksiyonu
R^*	∇^* konneksiyonunun eğrilik tensörü
R^φ	∇^φ konneksiyonunun eğrilik tensörü
S^{∇^*}	∇^* konneksiyonunun burulma tensörü
$S^{\nabla^\dagger}$	$\nabla^\dagger$ konneksiyonunun burulma tensörü
S^{∇^φ}	∇^φ konneksiyonunun burulma tensörü

1. GİRİŞ

Diferensiyel geometri , geometrik problemler üzerinde diferensiyel metodlar ve integral hesaplamalarıyla çalışan matematiğin bir alt disiplini.

M_{2n} manifoldu üzerinde g pseudo Riemannian metriği ve φ hemen hemen para kompleks yapısı verilmiş olsun. X, Y vektör alanları olmak üzere $g(\varphi X, Y) = g(X, \varphi Y)$ şartını sağlayan g metriğine hemen hemen para Norden metrik denir. Bu metrikler pür metrik, anti-Hermitian metrik veya B-metrik olarak da adlandırılmış ve çeşitli yazarlar (Tachibana 1960; Kruchkovich 1972; Salimov 1983; Ganchev ve Borisov 1986; Etayo ve Santamaria 2000; Vishnevskii 2002) tarafından çalışılmıştır.

Codazzi tensörlerde geometrinin çeşitli alanlarında karşılaşılan önemli bir konudur. Çeşitli tipten tensörlerin Codazzilik şartları ve Codazzi tensörlerin özellikleri birçok yazar (Simon 1975; Derdzinski 1981; Simon 1981; Derdzinski ve Shen 1983; D'atri 1985; Pinkall vd 1995; Gebarowski 1994; Shhwenk-Schellschmidt ve Simon 2009; Simon vd 2010; Slimov ve Turanlı 2013; Salimov vd 2013; Catino vd 2015; Fei ve Zhang 2017; Shandra vd 2019; Gezer ve Cakıcıoğlu) tarafından çalışılmıştır.

Sunulan bu tezde iki çalışma temel kaynak olarak ele alınmıştır.

Bunlarda ilki (Fei ve Zhang 2017) tarafından yapılan çalışmadır. Bu çalışmada M_{2n} manifoldu üzerinde g Hermitian metriği, L hemen hemen kompleks (para kompleks) yapısı ve $\omega(X, Y) = g(LX, Y)$ şeklinde tanımlanan $(0,2)$ tipli anti-simetrik tensörü ele alınmıştır. ∇ bir lineer konneksiyon olmak üzere; ∇^L , L – conjugate konneksiyonu, ∇^* , g –conjugate konneksiyonu ve $\nabla^\dagger$, ω –conjugate konneksiyonları tanımlanmış ve bu konneksiyonların özellikleri incelenmiştir. Ardından (∇, L) , (∇, g) ve (∇, ω) Codazzi çiftlerinin özellikleri araştırılmıştır. Son olarak da Codazzi (para) Kahler manifoldu üzerinde çalışılmıştır.

İkinci çalışma ise (Gezer ve Cakıcıoğlu) tarafından yapılan çalışmadır. Bu çalışma da ise M_{2n} manifoldu üzerinde g Norden metriği, φ hemen hemen kompleks yapısı ve

$G(X, Y) = g(LX, Y)$ şeklinde tanımlanan $(0,2)$ tipli simetrik twin metrik tensörü ele alınmıştır. ∇ bir lineer konneksiyon olmak üzere; ∇^φ , φ –conjugate konneksiyonu, ∇^* , g –conjugate konneksiyonu ve $\nabla^\dagger$, G –conjugate konneksiyonları tanımlanmış ve bu konneksiyonların özellikleri incelenmiştir. Ardından (∇, L) , (∇, g) ve (∇, G) Codazzi çiftlerinin özellikleri araştırılmıştır. ∇ , ∇^* ve $\nabla^\dagger$ konneksiyonlarının eğrilik tensörleri sırasıyla R , R^* ve $R^\dagger$ olmak üzere bu eğrilikler arasındaki ilişki bulunmuştur. g Norden metriğine Φ Tachibana operatörü uygulanmış ve elde edilen sonuçlar verilmiştir. Son olarak da φ – invaryant linner konneksiyonlar ve istatistiksel manifoldlar üzerinde durulmuştur.

Sunulan bu tezde ise para Norden manifoldlarında Codazzi çiftlerinin özellikleri araştırılmıştır. Bu amaçla çalışmanın daha iyi anlaşılabilmesi için ikinci kısımda temel tanımlar ve kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise (M_{2n}, φ, g) hemen hemen para Norden manifoldunun tanımı verilmiştir. Bu manifold üzerinde g ve φ vasıtasıyla $G(X, Y) = g(LX, Y)$ şeklinde tanımlanan twin para Norden metriği alınmıştır. ∇ bir lineer konneksiyon olmak üzere; ∇^φ , φ – conjugate konneksiyonu, ∇^* , g – conjugate konneksiyonu ve $\nabla^\dagger$, G – conjugate konneksiyonları tanımlanmış ve bu konneksiyonların Klein-4 grup özelliklerini sağladığı ispatlanmıştır. Ardından (∇, L) , (∇, g) ve (∇, G) Codazzi çiftleri tanımlanmış ve bu çiftlerin özellikleri verilmiştir. ∇ , ∇^* ve $\nabla^\dagger$ konneksiyonlarının eğrilik tensörleri sırasıyla R , R^* ve $R^\dagger$ olmak üzere bu eğrilikler arasındaki ilişki bulunmuştur. g para Norden metriğine Φ Tachibana operatörü uygulanmış ve elde edilen sonuçlar verilmiştir. Bu sonuçlardan hareketle (M_{2n}, φ, g, G) manifoldunun para Kahler Norden manifold olması için gerek ve yeter şart elde edilmiştir. Son olarak da φ – invaryant linner konneksiyonlar incelenmiş ve çeşitli konneksiyonların φ – invaryant olması şartları araştırılmıştır. Son olarak da istatistiksel manifoldlar üzerinde çalışılmıştır.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

1975 yılında bir çalışmada negatif olmayan kesitsel eğrilikli Riemannian manifoldlarında Codazzi şartlarını sağlayan (0,2) tipli tensörler incelenmiş ve çeşitli uygulamaları verilmiştir (Simon 1975).

1981 yılında bir çalışmada Riemannian manifoldu üzerinde Codazzi tensörlerin bazı genel özellikleri verilmiş, paralel olmayan Codazzi tensörler tanımlanmış ve bunların özellikleri incelenmiştir. (Derdzinski 1981).

1981 yılında bir çalışmada (2,0) tipli simetrik tensörlerin Codazzi şartı verilmiştir. Codazzi tensörden hareketler bazı diferensiyel operatörler tanımlanmış ve integral formülleri verilmiştir. Ayrıca bu formüllerin hiperyüzelere uygulanışı incelenmiştir. (Simon 1981).

1983 yılında bir çalışmada (0,2) tipli Codazzi tensörlere çalışılmıştır. Riemannian manifoldunda non-trivial Codazzi tensörlerinin geometrik ve topolojik sonuçları üzerinde durulmuştur. Ayrıca C^∞ sınıfından her manifoldun non-trivial Codazzi tensöre sahip Riemannian metriğini kapsadığı örneklerle gösterilmiştir. Sabit eğrilikli uzayda Codazzi tensörünün formu ve sabit eğrilikli uzayda herhangi bir hiperyüzeyin 2. esas formunun Codazzi tensör olduğu verilmiştir. Ayrıca Riemannian manifoldunda Ricci tensörünün Codazzilik şartını sağlaması durumunda elde edilen özellikler incelenmiştir. (Derdzinski ve Shen 1983).

1985 yılında bir çalışmada Riemannian manifoldunda (0,2) tipli simetrik tensörün Codazzi şartı ve $\mathbb{R}^n$ de hiperyüzelerde 2. Esas formun Codazzi tensörü olduğu verilmiştir. Ayrıca Riemannian manifoldunun harmonik eğriliğe sahip olması için gerekli ve yeter şartın Ricci tensörünün Codazzi tensör olması gerektiği ifade edilmiştir. Left-invariant Codazzi tensörlere çalışılmıştır (D'atri 1985).

1994 yılında bir çalışmada projektif ve konformal yapılar arasındaki Codazzi ilişkileri incelenmiştir. Projektif flat manifoldlarda Codazzi tensörleri araştırılmıştır.

Codazzi çiftinden hareketle istatistiksel manifold kavramına yer verilmiştir (Pinkall vd 1994).

1994 yılında bir çalışmada Riemannian manifoldlarında Codazzi tensörler ve bazı genel özellikleri çalışılmıştır (Gebarowski 1994).

2009 yılında bir çalışmada afin konneksiyonların Codazzi eşitlikleri araştırılmıştır (Schwenk-Schellschmidt ve Simon 2009).

2010 yılında bir çalışmada Codazzi-equivalent Riemann metrikleri incelenmiştir. Codazzi-equivalent metriklerinin eğriliği üzerinde çalışılmıştır. Codazzi tensorlerin bazı özellikleri incelenmiştir. (Simon vd 2010).

2013 yılında bir çalışmada anti- Kähler Codazzi manifoldları tanımlanmış ve bu manifoldların eğrilik özelliklerine bakılmıştır (Salimov ve Turanli 2013).

2013 yılında bir çalışmada anti- Kähler Codazzi manifoldlarının izotropik özelliklerine bakılmıştır (Salimov vd 2013).

2015 yılında bir çalışmada iki farklı özdeğere sahip Codazzi tensorler üzerinde çalışılmıştır (Catino vd 2015).

2017 yılında bir çalışmada çeşitli tipten tensörler için Codazzi çiftlerine bakılmış ve bu Codazzi çiftlerinin özellikleri araştırılmıştır. Codazzi (para) Kahler yapılar incelenmiştir (Fei ve Zhang 2017).

2019 yılında bir çalışmada tam ve kompakt Riemannian manifoldlarında klasik Codazzi tensörler ve yüksek mertebeden Codazzi tensörler çalışılmıştır (Shandra vd 2019).

Bu çalışmada Codazzi çiftleri ve bunların çeşitli özelliklerine çalışılmıştır (Gezer ve Cakicioglu).

3.MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 3.1.1: X Hausdorff topolojik uzay olsun. Herhangi bir $U \subset X$ açık kümesinin $V \subset \mathbb{R}^n$ bölgesine

$$\varphi: U \rightarrow V$$

homeomorfizmine X de n boyutlu koordinat sistemi, U ya ise φ haritasının koordinat komşuluğu veya koordinat bölgesi denir. Bazen harita (U, φ) şeklinde de gösterilir.

Eğer $x \in U$ ise

$$\varphi(x) = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$$

olur. $x^1, \dots, x^n$ reel sayılarına φ haritasında x noktasının koordinatları denir (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 3.1.2: Eğer X Hausdorff topolojik uzayının n boyutlu φ_α haritalarının U_α bölgeleri bu uzayı örterse, yani

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

A indisler kümesi olmak üzere X 'e n boyutlu topolojik manifold veya sadece n boyutlu manifold denir (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 3.1.3: X topolojik Hausdorff uzay ve k ise $0 \leq k \leq \infty$ şartını sağlayan tam sayı olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, $\alpha \in A, U_\alpha \subset X$ lokal koordinatlar ailesine X üzerinde C^k sınıfından n boyutlu atlas adı verilir (Salimov ve Mağden 2008).

- i. Lokal haritaların U_α bölgesi X i örter, yani X , n boyutlu topolojik manifolddur.
- ii. Keyfi $\alpha, \beta \in A$ için $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ise

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

dönüşümü C^k sınıfındandır. Bu şarta bazen $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) haritalarının C^k uzlaşması şartı da denir.

$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümüne ise koordinatların dönüşümü $(u_\beta^i = u_\beta^i(u_\alpha^j), i, j = 1, \dots, n)$ denir. Burada $u_\beta^i, (U_\beta, \varphi_\beta)$ haritasındaki $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ noktasının koordinatlar, u_β^i ise $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ haritasındaki x noktasının koordinatlarıdır.

$U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ ise bu durumda $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümü tayin edilemez. Bu durumda $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümünün C^k sınıfından olduğu kabul edilecektir. 2. şartı, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümlerinin C^k sınıfından diffeomorfizmler olmasına denktir. Bu ise, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ koordinat dönüşümünün Jakobiyen matrisinin determinantının sıfırdan farklı olması demektir.

Tanım 3.1.4: $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ve $\{(U_\beta, \varphi_\beta)\}$, C^k sınıfından herhangi iki atlas olsun. Bu atlasların keyfi $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) haritaları C^k uzlaşmış ise yani, $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ve $\{(U_\beta, \varphi_\beta)\}$ atlaslarının birleşimi C^k sınıfından atlas ise verilen atlaslara denk atlaslar denir (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 3.1.5: X Hausdorff uzay üzerinde C^k atlaslarının denklik sınıfına C^k –yapı denir. C^k –yapısının tüm C^k atlaslarının birleşimi yine C^k atlas oluşturur. Bu atlasla maksimal C^k atlas adı verilir.

X üzerindeki C^k atlaslarının her bir denklik sınıfı, kendisinin bir elemanı ile ifade edilir. Yani, C^k – yapısı, onun keyfi C^k atlası yardımıyla oluşturulabilir. Buradan X üzerindeki her bir C^k –yapısının bu yapıdan olan bir C^k atlas ile verilebileceği sonucu çıkar.

C^0 –yapıya topolojik yapı, C^k ($1 \leq k \leq \infty$) yapıya ise düzgün (smooth) yapı denir. Bundan sonra yalnız C^∞ sınıfından olan yapılara bakılacaktır.

Tanım 3.1.6: X Hausdorff ve sayılabilir baza sahip topolojik uzay olsun. Eğer, M üzerinde n –boyutlu C^∞ atlaslarının C^∞ yapısı verilmişse M uzayına n boyutlu C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir veya düzgün manifold denir ve M_n ile gösterilir (Salimov ve Mağden 2008).

3.2. Tensör Alanları

Tanım 3.2.1: B_n . n boyutlu vektör uzayı, B_n^* ise onun dual uzayı olsun. $\vec{x}_j \in B_n, j = 1, \dots, q$ vektör değişkenleri ve $\xi^i \in B_n^*, i = 1, \dots, p$ kovektör değişkenlerinin

$$\omega = t(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_q, \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p)$$

reel değerli fonksiyonunu gözönüne alalım. Eğer bu fonksiyon her bir değişkene göre lineerlik şartını sağlarsa, buna multilineer fonksiyon denir.

Örneğin birinci vektör değişkenine göre lineerlik şartı $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \omega &= t(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_q, \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p) \\ &= \lambda t(\vec{x}, \vec{x}_2, \dots, \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p) + \mu t(\vec{y}, \vec{x}_2, \dots, \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p) \end{aligned}$$

biçiminde gösterilebilir. Bu multilineer fonksiyona karşılık gelen

$$t: \underbrace{B_n \times B_n \times \dots \times B_n}_q \times \overbrace{B_n^* \times B_n^* \times \dots \times B_n^*}^p \rightarrow \mathbb{R}$$

operatörüne B_n uzayında p dereceden kontravaryant, q dereceden kovaryant tensör adı verilir ve $T_q^p(B_n)$ ile gösterilir. $p \geq 0, q \geq 0$ olmak üzere $s = p + q$ sayısına ise tensörün valentliği, (p, q) sembolüne ise tensörün tipi denir. $(p, 0)$ tipli tensöre kontravaryant tensörler, $(0, q)$ tipli tensörlere ise kovaryant tensörler denir.

$S_2(B_n), T_2^0(B_n)$ uzayının bütün simetrik tensörlerinin alt uzayı olmak üzere herhangi bir $g \in S_2(B_n)$ tensörünü alalım;

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = 0, \forall \vec{y} \in B_n \quad (3.1)$$

şartından $\vec{x} = \vec{0}$ alınırsa, bu taktirde g tensörüne regüler tensör denir. (3.1) eşitliği koordinatlarla

$$g_{ij}x^i y^j = 0$$

şeklinde yazılır. Bu eşitlik $\forall y^j$ için sağlandığından

$$g_{ij}x^i = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

elde edilir.. Bu denklem sisteminin $x^i = 0$ çözümüne sahip olması için

$$\text{Det}(g_{ij}) \neq 0$$

olması gerekir. Burada (g_{ij}) , g_{ij} tensörüne karşılık gelen matristir.

$g \in S_2(B_n)$ tensörü regüler tensör ise g tensörüne B_n de esas tensör denir. Esas tensöre karşılık gelen (g_{ij}) matrisinin tersi $(\tilde{g}^{ij})$ ile gösterilir ve

$$\tilde{g}^{sj} g_{ij} = \delta_i^s \quad (3.2)$$

yazılır. B_n ve B_n^* uzayları arasında

$$\xi_i = g_{is}x^s, \quad (\eta_i = g_{is}y^s) \quad (3.3)$$

dönüşümüne bakalım. Buradan (3.2) eşitliğine göre

$$x^s = \tilde{g}^{si}\xi_i, \quad (y^s = \tilde{g}^{si}\eta_i) \quad (3.4)$$

olur. $g \in S_2(B_n)$ tensörüne karşılık gelen invariant bilineer formu

$$\omega = g(\vec{x}, \vec{y}) = g_{ij}x^i y^j$$

yazılır. Burada (3.3) ve (3.4) eşitlikleri dikkate alınırsa

$$\omega = g(\vec{x}, \vec{y}) = g_{ij}x^i y^j = x^i \eta_i = \tilde{g}^{ij} \eta_i \xi_j$$

olur. Yani, g_{ij} esas tensörü verildiğinde kovektör değişkenlerinin $\omega = \tilde{g}^{ij} \eta_i \xi_j$ invariant bilineer formu alınır. Burada $\tilde{g}^{ij}$, (2,0) tipli tensörün koordinatlarıdır. Bu tensöre g_{ij} tensörünün ters tensörü denir. Ayrıca

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\eta, \xi) &= \tilde{g}^{ij} \eta_i \xi_j = \eta_i x^i = g_{is} y^s x^i \\ \tilde{g}(\xi, \eta) &= \tilde{g}^{ij} \xi_j \eta_i = \xi_j y^j = g_{js} x^s y^j \\ &= g_{si} x^i y^s = g_{si} y^s x^i = \tilde{g}(\eta, \xi)\end{aligned}$$

olduğundan $\tilde{g}^{ij}$ tensörü de simetriktir.

Böylece B_n de g_{ij} tensörü verildiği zaman $B_n \rightarrow B_n^*$ izomorfizmi bulunur. Bundan hareketle vektör ve kovektörler aynılaştırılır ve aynı $\vec{x}$ sembolü ile gösterilir. Yani,

$$x_s = g_{si} x^i, \quad x^i = \tilde{g}^{is} x_s$$

yazılır. Bu işlemlere indisin indirilmesi ($x^i \rightarrow x_s$) ve yükseltilmesi ($x_s \rightarrow x^i$) işlemleri denir. Buna göre $S(\vec{x}, \vec{y})$ tensörünü göz önüne alırsak;

$$S_{\cdot j}^p = \tilde{g}^{pi} S_{ij}, \quad S_{i \cdot}^p = \tilde{g}^{pj} S_{ij}, \quad S_{\cdot \cdot}^{pq} = \tilde{g}^{pi} \tilde{g}^{qj} S_{ij}$$

verilmiş S_{ij} tensöründen indislerin yükseltilmesi işlemleridir.

$$S_p^{\cdot j} = g_{pi} S^{ij}, \quad S_p^{i \cdot} = g_{pj} S^{ij}, \quad S_{pq}^{\cdot \cdot} = g_{pi} g_{qj} S^{ij}$$

ise verilmiş S^{ij} tensöründen indislerin indirilmesi işlemidir.

Eğer $g(\vec{x}, \vec{y})$, B_n uzayında (0,2) tipli bir tensör ise, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in B_n$ vektörlerinin skaler çarpımı denildiğinde g tensörünün $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleri üzerindeki izi anlaşılır ve $\vec{x}\vec{y}$ veya $(\vec{x}, \vec{y})$ sembollerinden birisi ile gösterilir. Yani,

$$(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{x}, \vec{y}) = g_{ij} x^i y^j = x_j y^j \quad (3.5)$$

şeklindedir.

Eğer $\text{Det}(g_{ij}) \neq 0$ olursa bu taktirde (3.5) de verilen skaler çarpıma regüler çarpım denir.

Tanım 3.2.2: M_n, C^∞ sınıfından bir manifold ve $T_p, \forall p \in M_n$ noktasındaki tanjant uzayı olsun. M_n manifoldunun $\forall p \in M_n$ noktasına T_p uzayından bir X_p vektörü karşılık getiren X vektör değerli fonksiyonuna vektör alanı denir (Salimov ve Mağden 2008).

f, M_n manifoldunda bir fonksiyon ise Xf de M_n manifoldunda bir fonksiyon tanımlar. Bu ise

$$(Xf)(p) = X_p f$$

ile tanımlanır. $U \subset M_n$ koordinat komşuluğunu alalım. Bu komşuluktaki bir vektör alanı

$$X = \xi^i \partial_i$$

olarak yazılır. ξ^i ler U daki lokal koordinatlara bağlıdır. Yani,

$$\xi^i = \xi^i(x^1, \dots, x^n), \quad i = 1, \dots, n$$

olur.

M_n, C^∞ sınıfından bir manifold olmak üzere $\forall m \in M_n$ noktasındaki her bir (p, q) tipli tensör için uygun bir $T_q^p(m)$ tensör uzayı vardır.

Tanım 3.2.3: M_n, C^∞ sınıfından bir manifold ve $T_q^p(m), \forall m \in M_n$ noktasındaki (p, q) tipli tensör tensör uzayı olsun. M_n manifoldunun $\forall m \in M_n$ noktasına $T_q^p(m)$ tensör uzayından bir $t_q^p(m)$ tensörü karşılık getiren T fonksiyonuna (p, q) tipli tensör alanı denir (Bishop and Goldberg 1968).

Eğer $p = 1, q = 0$ ise vektör alanı elde edilir. Yani, $(1,0)$ tipli tensör alanı bir vektör alanıdır.

Eğer $p = q = 0$ ise her $m \in M_n$ noktasına bir skaler değer karşılık gelir. Bu yüzden $(0,0)$ tipli tensör alanı reel değerli bir fonksiyondur.

Eğer $U \subset M_n$ bölgesinde f fonksiyonu C^∞ sınıfından ise $\forall x \in U$ için $df|_x \in T_1^0(x)$ olur. Böylece fonksiyonunun diferensiyeli olan df operatörü ifadesi $(0,1)$ tipli bir tensör alanıdır.

Herhangi bir m noktasındaki T_m tensörü simetrik tensör ise T tensör alanına simetrik tensör alanı denir. Eğer herhangi bir m noktasındaki T_m tensörü antisimetrik tensör ise T tensör alanına antisimetrik tensör alanı denir.

$T, (p, q)$ tipli tensör alanı olsun. $\theta_1, \dots, \theta_p, (1, 0)$ tipli tensör alanları ve $X_1, \dots, X_q$ vektör alanları olmak üzere

$$T(\theta_1, \dots, \theta_p, X_1, \dots, X_q)(m) = T_m(\theta_1(m), \dots, \theta_p(m), X_1(m), \dots, X_q(m))$$

ifadesi reel değerli fonksiyon tanımlar. Özellikle x^i koordinatlarına göre T tensör alanının bileşenleri

$$T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = T(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_p}, \partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_q})$$

biçiminde reel değerli fonksiyonlardır (Bishop and Goldberg 1968).

T tensör alanının bileşenleri C^∞ sınıfından fonksiyonlar ise T tensör alanına C^∞ sınıfındandır denir. C^∞ sınıfından olan $(0,1)$ tipli tensör alanına 1-form denir.

(p, q) tipli T tensör alanının C^∞ sınıfından olması için gerek ve yeter şart her bir $\theta_1, \dots, \theta_p$ 1-formları ve her bir C^∞ sınıfından $X_1, \dots, X_q$ vektör alanları için $T(\theta_1, \dots, \theta_p, X_1, \dots, X_q)$ fonksiyonunun C^∞ sınıfından olmasıdır.

3.3. Diferensiyellenebilir Manifold Üzerinde Afin (Levi-Civita) Konneksiyon

M_n diferensiyellenebilir manifoldunun $\gamma: u^i = u^i(t)$ eğrisi boyunca konneksiyon dahil edilmesi eğrinin noktalarına tatbik edilmiş vektörler arasında uygunluk oluşturma kuralıdır. Eğer γ eğrisinin herhangi bir noktasındaki v^i vektörü t parametresine bağlı olarak değiştikçe verilen konneksiyona göre başlangıçtaki ile uygun

kalırsa, bu durumda bu vektör verilmiş konneksiyona göre γ eğrisi boyunca paralel kaydırılmış olur. Eğer konneksiyon diferensiyellenebilirse, o zaman paralel kaydırmayı ifade eden $v^i = v^i(t)$ fonksiyonları da diferensiyellenebilir fonksiyonlar olur. Eğer vektörlerin paralel kaydırılması halinde lineer bağımlılık korunursa verilen konneksiyona afin veya lineer konneksiyon adı verilir.

Afin konneksiyonun γ eğrisinin çeşitli noktalarına tatbik edilmiş vektörler arasında uygunluğu ifade eden şartı, yani vektörün eğri boyunca verilmiş afin konneksiyona göre paralel kaydırılması şartını bulalım. γ eğrisinin başlangıç noktasında $a_k^i, k = 1, \dots, n$ lokal bazını alalım ve farzedelim ki $a_k^i(t)$ 'nin bağımlılığı baz vektörlerin verilmiş eğri boyunca paralel kaydırılması kuralını ifade etsin. Keyfi $v^i = \lambda^k a_k^i$ vektörünün verilen afin konneksiyona göre γ eğrisi boyunca paralel kaydırılması için gerek ve yeter şart λ^k katsayılarının sabit olmasıdır. Bu nedenden istifade edilerek

$$dv^i = \lambda^k da_k^i \quad (3.6)$$

ifadesi yazılabilir. $v^i = \lambda^k a_k^i$ eşitliğinden

$$\lambda^k = a_i^k v^i \quad (3.7)$$

yazılır. Burada a_k^i baz vektörü olduğundan buna karşılık gelen kobaz vektörü a_i^k ile gösterilir. Buradan $a_k^i a_i^s = \delta_k^s$ yazılır. (3.7) eşitliği (3.6) da kullanılırsa,

$$dv^i + \omega_k^i v^k \quad (3.8)$$

elde edilir.. (3.8) denkleminde

$$\omega_k^i = -a_i^s da_s^k \quad (3.9)$$

biçimindedir. (3.8) şartı v^i vektörünün verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılması şartıdır. (3.9) biçiminde dahil edilen ω_k^i objelerine konneksiyon (bağlantı) formları denir.

Teorem 3.3.1: 1. Konneksiyon formları $a_k^i, k = 1, \dots, n$ bazının seçilişinden bağımsızdır.

2. Konneksiyon formları, eğrisel koordinatların dönüştürülmesi durumunda tensör dönüşüm kuralına göre dönüşmez.

İspat: 1. ω_k^i ve $\bar{\omega}_k^i$ iki baza karşılık gelen konneksiyon formları olsun. Paralel kaydırılan v^i vektörü için aşağıdaki şartlar yazılabilir:

$$dv^i + \omega_k^i v^k \quad (3.10)$$

$$dv^i + \bar{\omega}_k^i v^k \quad (3.11)$$

(3.10) ve (3.11) şartlarından, v^i vektörünün başlangıç değerinin keyfiliği şartından $\omega_k^i = \bar{\omega}_k^i$ bulunur.

2. M_n manifoldunda u^i eğrisel koordinatların değişmesi halinde baz vektörlerinin ve kovektörlerinin dönüşüm kuralını yazalım.

$$a_i^k = A_i^{i'} a_{i'}^k, \quad a_k^i = A_i^{i'} a_{i'}^k \quad (3.12)$$

Burada $A_i^{i'} = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}$, $A_i^{i'} = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i}$ biçimindedir. (3.12) in ikinci şartından

$$da_k^i = dA_i^{i'} a_{i'}^k + A_i^{i'} d a_{i'}^k \quad (3.13)$$

yazılır. (3.9) denkleminde (3.12) nin ilk şartı ve (3.13) eşitliği göz önüne alınırsa,

$$\omega_j^i = -a_j^k da_k^i = A_j^{j'} a_{j'}^k (dA_i^{i'} a_{i'}^k + A_i^{i'} d a_{i'}^k)$$

veya

$$\omega_j^i = A_j^{j'} A_i^{i'} \omega_{j'}^{i'} - A_j^{j'} dA_i^{i'} \quad (3.14)$$

olur. (3.14) eşitliğinden ω_j^i konneksiyon formlarının tensörün koordinatları olmadığı görülür.

Şimdi ise kovektörün γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılması şartını inceleyelim.

Tanım 3.3.2: ω_i kovektörünün γ eğrisi boyunca paralel kaydırılan keyfi v^i vektörü üzerindeki izi bu eğri boyunca sabit kalırsa ω_i kovektörüne γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılmıştır denir. Bu tanıma göre

$$d(v^i \omega_i) = dv^i \omega_i + v^i d\omega_i = 0 \quad (3.15)$$

olur. v^i vektörünün paralel kaydırılması şartından

$$dv^i = -\omega_k^i v^k \quad (3.16)$$

yazılır. (3.16) eşitliği (3.15) de kullanılırsa,

$$(d\omega_i - \omega_k^i \omega_k) v^i = 0$$

bulunur. v^i vektörünün keyfiliğinden dolayı ω_i kovektörün γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılma şartı

$$d\omega_i - \omega_k^i \omega_k = 0 \quad (3.17)$$

biçimindedir. Vektörün ve kovektörün γ eğrisi boyunca paralel kaydırılması şartı kullanılarak, eğrinin çeşitli noktalarına uygulanmış keyfi tipli tensörün paralel kaydırılması verilebilir. γ eğrisi boyunca (p, q) tipli keyfi tensörün izi

$$Z = t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} v_1^{j_1} \dots v_q^{j_q} \omega_{i_1}^1 \dots \omega_{i_p}^p$$

şeklinde olsun. Z fonksiyonunun vektör ve kovektör değişkenlerinin γ eğrisi boyunca paralel kaydırılması şartları dahilinde diferensiyeli

$$\begin{aligned} dZ &= dt_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} v_1^{j_1} \dots v_q^{j_q} \omega_{i_1}^1 \dots \omega_{i_p}^p + t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} dv_1^{j_1} \dots v_q^{j_q} \omega_{i_1}^1 \dots \omega_{i_p}^p \\ &\quad + \dots + t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} v_1^{j_1} \dots v_q^{j_q} d\omega_{i_1}^1 \dots d\omega_{i_p}^p \\ &= \left(dt_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \omega_{j_1}^s t_{sj_2 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \dots - \omega_{j_q}^s t_{j_1 \dots sj_q}^{i_1 \dots i_p} + \omega_{i_1}^s t_{j_1 \dots j_q}^{si_1 \dots i_p} \right) v_1^{j_1} \dots v_q^{j_q} \omega_{i_1}^1 \dots \omega_{i_p}^p \end{aligned} \quad (3.18)$$

olarak yazılır. Bu eşitlikte

$$\delta t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = dt_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \omega_{j_1}^s t_{s j_2 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \dots - \omega_s^{i_1} t_{s j_2 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + \omega_s^{i_p} t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots s} \quad (3.19)$$

olarak alınır

$$dZ = \delta t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} v_1^{j_1} \dots v_q^{j_q} \omega_{i_1}^1 \dots \omega_{i_p}^p \quad (3.20)$$

yazılır. γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılan vektör ve kovektör değişkenlerinin multilineer fonksiyonunun diferensiyeli de değişkenlerin multilineer fonksiyonu olur. O halde dZ multilineer fonksiyonuna belirli tensör karşılık gelecektir. Bu tensörün tipi $t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ tensörünün tipi ile aynı olur. Koordinatları ise (3.19) eşitliği ile verilmiştir. $\delta t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ tensörüne $t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ tensörünün mutlak diferensiyeli denir.

Tensörün mutlak diferensiyeli ile tüm eğri boyunca keyfi noktalarda uygulanmış tensörler arasındaki eşleme (3.20) eşitliği ile verilir.

Tensörün mutlak diferensiyelinin tanımından çıkartılan sonuçlar aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

- i.** Vektörün ve kovektörün paralel kaydırılması şartları

$$\delta v^i = 0, \quad \delta \omega_i = 0$$

şeklinde olur. Dolayısıyla keyfi tipli tensörün paralel kaydırılması şartı

$$\delta t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = 0$$

şeklindedir.

- ii.** Birim tensörün mutlak diferensiyeli sıfıra eşittir, yani

$$\delta(\delta_i^j) = 0$$

dir.

(3.19) eşitliğinden dolayı tensörlerin mutlak diferensiyelleri için aşağıdaki özellikler mevcuttur:

1. $\delta(t_1 \mp t_2) = \delta t_1 \mp \delta t_2$, t_1 ve t_2 aynı tipli tensörlerdir.
2. $\delta(\lambda t) = (d\lambda)t + \lambda(\delta t)$, λ -skalerdir.
3. $\delta(A \otimes B) = (\delta A) \otimes B + A(\delta B)$, A ve B keyfi tipli tensörlerdir, $\otimes$ - tensör çarpımıdır.
4. Tensörlerde simetrikleştirme, alterleneştirme ve kontraksiyon işlemleri mutlak diferensiyelleme işlemi ile yer değiştirebilir.

3.4. Afin Konneksiyonlu Uzaylar

Tanım 3.4.1: X_n diferensiyellenebilir manifoldunun herbir eğrisi boyunca afin konneksiyon verilmiş olsun. Lineerlik şartını sağlayan X_n diferensiyellenebilir manifolduna n - boyutlu afin konneksiyonlu uzay denir.

Lineerlik şartı:

X_n manifoldunun keyfi M noktası ve bu noktanın civarında keyfi vektör alanları verilmiş olsun. Keyfi v^i vektör alanının M noktasından geçen keyfi bir eğri için hesaplanmış mutlak diferensiyeli, bu eğri boyunca elementer yer değişme du^i vektörünün lineer fonksiyonudur. Yani

$$\delta v^i = v_k^i du^k \quad (3.21)$$

olarak yazılır. Burada v_k^i , v^i 'ye ve noktaya bağlı fonksiyondur. Diğer taraftan $dv^i = \partial_k v^i du^k$ olduğundan

$$\delta v^i = dv^i + \omega_k^i v^k = \partial_k v^i du^k + \omega_k^i v^k \quad (3.22)$$

olur. (3.21) ve (3.22) eşitliklerinden

$$\omega_k^i v^k = (v_s^i - \partial_s v^i) du^s \quad (3.23)$$

ifadesi bulunur. $v^k, \partial_s v^i$ ve $v_s^i u^i$ lerin fonksiyonarıdır. ω_k^i forumları v^i vektör alanlarının seçilişine bağlı olmadığından ω_k^i forumları du^k 'nın lineer fonksiyonu olur. Yani

$$\omega_k^i = \Gamma_{sk}^i du^s \quad (3.24)$$

olarak yazılır. Burada Γ_{sk}^i katsayıları afin uzayın noktasının fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonlara afin konneksiyonun katsayıları denir. Katsayıların verilmesi X_n de afin konneksiyonunu tayin eder.

Şimdi Γ_{sk}^i afin konneksiyon katsayılarının dönüşüm kuralını verelim. (3.24) eşitliği kullanılarak

$$\omega_{j'}^{i'} = \Gamma_{k'j'}^{i'} du^{k'} = \Gamma_{k'j'}^{i'} A_k^{k'} du^k$$

yazılır. Ayrıca

$$A_j^{j'} dA_{j'}^i = A_j^{j'} (\partial_k A_{j'}^i) du^k \quad (3.25)$$

olduğundan ve diğer taraftan $A_j^{j'} A_{j'}^i = \delta_j^i$ eşitliğinin ∂_k kısmi diferensiyeli alındığında

$$(\partial_k A_j^{j'}) A_{j'}^i + A_j^{j'} (\partial_k A_{j'}^i) = 0$$

$$A_j^{j'} (\partial_k A_{j'}^i) = -(\partial_k A_j^{j'}) A_{j'}^i$$

elde edilir.. Bu son eşitlik (3.25) de kullanılırsa

$$A_j^{j'} dA_{j'}^i = -A_{j'}^i (\partial_k A_j^{j'}) du^k \quad (3.26)$$

yazılır. (3.26) , (3.24) ve (3.14) eşitlikleri kullanılarak konneksiyon katsayılarının dönüşüm kuralı

$$\Gamma_{kj}^i = A_{i'}^i A_j^{j'} A_k^{k'} \Gamma_{k'j'}^{i'} + A_{i'}^i A_{kj}^{j'} \quad (3.27)$$

olarak bulunur. Burada $A_{kj}^{j'} = \partial_k A_j^{j'}$ biçimindedir.

(3.24) denklemini kullanarak afin konneksiyonlu uzayda verilen keyfi vektör alanı için mutlak diferensiyeli

$$\delta v^i = (\partial_k v^i + \Gamma_{ks}^i v^s) du^k \quad (3.28)$$

biçiminde olur. (3.28) denkleminin sol tarafı bir tensör ve du^k vektör olduğundan parantezin içindeki ifade bir tensörün koordinatlarıdır. Bu tensöre verilen v^i tensörünün kovaryant türevi denir ve bu kovaryant türev

$$\nabla_k v^i = \partial_k v^i + \Gamma_{ks}^i v^s \quad (3.29)$$

olarak gösterilir. Bu türevin sonucu (1,1) tipinde bir tensördür. Benzer şekilde ω_j kovektör alanının kovaryant türevi ise

$$\nabla_k \omega_j = \partial_k \omega_j - \Gamma_{kj}^s \omega_s \quad (3.30)$$

olur ve sonuç (0,2) tipli bir tensördür. (3.24) eşitliğinden, (p, q) tipli $t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ tensörünün mutlak diferensiyeli

$$\delta t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \left(\partial_k t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + \sum_{\lambda=1}^p \Gamma_{kj}^{i_\lambda} t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_{\lambda-1} i_{\lambda+1} \dots i_p} - \sum_{\mu=1}^q \Gamma_{kj_\mu}^s t_{j_1 \dots s \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \right) du^k \quad (3.31)$$

biçiminde olur. (3.31) denkleminin sol tarafı bir tensör ve du^k vektör olduğundan parantezin içindeki ifade bir tensörün koordinatlarıdır. Bu tensöre verilen $t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ tensörünün kovaryant türevi denir ve

$$\nabla_k t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \partial_k t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + \sum_{\lambda=1}^p \Gamma_{kj}^{i_\lambda} t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_{\lambda-1} i_{\lambda+1} \dots i_p} - \sum_{\mu=1}^q \Gamma_{kj_\mu}^s t_{j_1 \dots s \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \quad (3.32)$$

biçiminde gösterilir. Tensörün kovaryant türev tanımından (p, q) tipli tensörünün kovaryant türevinin kovaryantlığı bir artarak $(p, q + 1)$ tipli bir tensör olur.

Kovaryant türevin tanımından yararlanılarak aşağıdaki özellikler yazılır:

$$\mathbf{i.} \nabla_k \left(t_{1j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \mp t_{2j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \right) = \nabla_k t_{1j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \mp \nabla_k t_{2j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$$

$$\text{ii. } \nabla_k \left(\lambda t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \right) = (\partial_k \lambda) t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \mp \lambda \nabla_k t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}, \quad \lambda \in F \text{ (} F \text{ fonksiyonlar kümesi)}$$

$$\text{iii. } \nabla_k \left(t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \otimes g_{j_1 \dots j_q}^{l_1 \dots l_p} \right) = \nabla_k t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \otimes g_{j_1 \dots j_q}^{l_1 \dots l_p} + t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \otimes \nabla_k g_{j_1 \dots j_q}^{l_1 \dots l_p}$$

iv. Tensörlerde simetrikleştirme, alterleneştirme ve kontraksiyon işlemleri mutlak diferensiyelleme işlemi ile yer değiştirebilir.

Tanım 3.4.2: M_n manifoldu üzerinde $\mathcal{T}_0^1(M_n)$ vektör alanlarının modülü olmak üzere

$$\nabla_X Y = \nabla(X, Y): \mathcal{T}_0^1(M_n) \times \mathcal{T}_0^1(M_n) \rightarrow \mathcal{T}_0^1(M_n)$$

dönüşümü

$$\text{i. } \nabla_{fX+gY} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z$$

$$\text{ii. } \nabla_Z (fX + gY) = (Zf)X + f \nabla_Z X + (Zg)Y + g \nabla_Z Y$$

şartlarını sağlıyorsa ∇ 'ya afin konneksiyon denir. Burada

$$\nabla_X Y = \mathcal{T}_0^1(M_n) \rightarrow \mathcal{T}_0^1(M_n)$$

dönüşümüne kovaryant diferensiyellenme denir (Bishop and Goldberg 1968).

Tanım 3.4.3: M_n manifoldu üzerinde L_X , $X \in \mathcal{T}_0^1(M_n)$ diferensiyelleme işlemi aşağıdaki şartları sağlıyorsa buna X vektör alanı yönündeki Lie diferensiyellemesi denir:

$$\text{i. } L_X f = Xf, \quad \forall f \in \mathcal{T}_0^1(M_n),$$

$$\text{ii. } L_X Y = [X, Y].$$

Burada $[X, Y]$ Lie parantezi olup,

$$[X, Y] = XY - YX$$

şeklindedir (Salimov ve Mağden 2008).

3.5. Eğrilik ve Burulma Tensörleri

A_n afin konneksiyonlu uzayında $f = f(u^1, \dots, u^n)$ diferensiyellenebilir fonksiyonu verilmiş olsun. Bu fonksiyonun tam diferensiyeli, yani $df = \partial_k f u^k$ ifadesi, koordinatların dönüşümü halinde invaryant kalır df ve du^i fonksiyonunun vektörünün lineer fonksiyonu olur. Bu lineer fonksiyona karşılık gelen kovektörün koordinatları

$$V_i = \partial_i f \quad (3.33)$$

ile gösterilir. Bu kovektöre f fonksiyonunun gradienti, f fonksiyonuna ise bu kovektör alanın potansiyel fonksiyonu denir. Keyfi V_i kovektörünün herhangi bir skaler alanın gradienti olması için gerek ve yeter şart

$$\partial_{[j} V_{i]} = 0 \quad (3.34)$$

olmasıdır (Yano 1965).

V_i gradient kovektörünün kovaryant türevi

$$\nabla_j V_i = \partial_j V_i - \Gamma_{ji}^k V_k \quad (3.35)$$

biçimindedir. (3.35) ifadesinde j ve i indislerine göre alterneleştirme işlemi yapılır ve (3.34) eşitliği kullanılırsa

$$\nabla_{[j} V_{i]} = S_{ij}^k V_k \quad (3.36)$$

bulunur. Burada

$$S_{ij}^k = \Gamma_{[ij]}^k \quad (3.37)$$

olarak verilmiştir. (3.36) denkleminin sol tarafındaki kovaryant türev ise (0,2) tipli tensör olduğuna göre S_{ij}^k ifadesi alttaki indislerine göre antisimetrik olan (1,2) tipli bir tensör belirtir. (3.37) tensörüne A_n uzayının burulma tensörü denir. A_n manifoldundan alınmış keyfi X, Y vektör alanları için burulma tensörünün invaryant formda yazılışı ise

$$S(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad (3.38)$$

şeklindedir. (Kobayashi and Nomizu 1963). Burada $[X, Y]$, X ve Y vektör alanlarının Lie parentezi olup,

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

yazılır.

Keyfi v^i vektörünün $\nabla_s v^i = \partial_s v^i + \Gamma_{sm}^i v^m$ kovaryant türevi (1,1) tensör belirtir. Bu tensörün kovaryant türevi ise

$$\begin{aligned} \nabla_r \nabla_s v^i &= \partial_r \nabla_s v^i + \Gamma_{rm}^i \nabla_s v^m - \Gamma_{rs}^m \nabla_m v^i \\ &= \partial_r (\partial_s v^i + \Gamma_{sk}^i v^k) + \Gamma_{rm}^i (\partial_s v^m + \Gamma_{sm}^m v^m) - \Gamma_{rs}^m \nabla_m v^i \\ &= \partial_{rs}^2 v^i + \partial_r \Gamma_{sk}^i v^k + \Gamma_{sk}^i \partial_r v^k + \Gamma_{rm}^i \partial_s v^m + \Gamma_{rm}^i \Gamma_{sm}^m v^m - \Gamma_{rs}^m \nabla_m v^i \end{aligned}$$

biçimindedir. Bu eşitlikte r, s indislerine göre alterneleştirme işlemi uygulanırsa,

$$2\nabla_{[r} \nabla_{s]} v^i = R_{rsk}^i v^k - 2S_{rs}^k \nabla_k v^i \quad (3.39)$$

elde edilir. (3.39) denkleminde

$$\begin{aligned} R_{rsk}^i &= \partial_r \Gamma_{sk}^i - \partial_s \Gamma_{rk}^i + \Gamma_{rm}^i \Gamma_{sk}^m - \Gamma_{sm}^i \Gamma_{rk}^m \\ &= 2(\partial_{[r} \Gamma_{s]k}^i + \Gamma_{r|m}^i \Gamma_{s]k}^m) \end{aligned} \quad (3.40)$$

olarak alınmıştır. (3.39) denkleminin sol tarafındaki terim ve sağ tarafındaki ikinci terim tensör ve v^i keyfi vektör olduğundan R_{rsk}^i ifadesi (1,3) tipli tensördür. Bu tensöre A_n uzayının eğrilik tensörü veya Riemannian- Christoffel tensörü denir.

$$2\nabla_{[r} \nabla_{s]} \varphi_i^j = R_{rsm}^j \varphi_i^m - R_{rsi}^m \varphi_m^j - 2S_{rs}^k \nabla_k \varphi_i^j \quad (3.41)$$

(3.41) formülüne φ_i^j afinorunun Ricci özdeşliği denir.

Keyfi $X, Y, Z \in A_n$ vektör alanları için eğrilik tensörünün invariant formda yazılışı ise

$$R(X, Y, Z) = R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (3.42)$$

şeklindedir (Kobayashi and Nomizu 1963).

3.6. Konneksiyonların Dönüşümü

Keyfi iki afin konneksiyonlu uzayların diffeomorfizmine bakalım. Bu durumda, bu uzayların karşılıklı noktalarının koordinatları aynı olacak şekilde uygun eğrisel koordinat sistemi verilebilir. Bu tür karşılık getirme aynı bir X_n differensiyellenebilir manifoldunda iki keyfi afin konneksiyonun verilmesiyle de oluşturulabilir. Bu duruma konneksiyonların birinden diğerine geçmeye konneksiyonların dönüştürülmesi veya paralel kaydırma kuralının dönüştürülmesi olarak bakılabilir. Bu konneksiyonların katsayılarını Γ_{ij}^k ve $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ ile gösterelim. Keyfi v^i vektör alanının bu konneksiyonlara göre kovaryant türevleri

$$\nabla_k v^i = \partial_k v^i + \Gamma_{km}^i v^m, \quad \bar{\nabla}_k v^i = \partial_k v^i + \bar{\Gamma}_{km}^i v^m$$

biçiminde olur. Sonuncu eşitlikten

$$\bar{\nabla}_k v^i - \nabla_k v^i = T_{km}^i v^m \quad (3.43)$$

yazılır. Burada

$$T_{km}^i = \bar{\Gamma}_{km}^i - \Gamma_{km}^i \quad (3.44)$$

biçimindedir. (3.43) eşitliği ile verilen T_{km}^i , (1,2) tipli tensör meydana getirir. Bu tensöre afin deformasyon tensörü denir.

Teorem 3.6.1: (1,2) tipli T_{km}^i tensörü ve Γ_{km}^i ise ∇ afin konneksiyonunun katsayıları olmak üzere (3.44) eşitliği ile verilen $\bar{\Gamma}_{km}^i$ katsayıları da diğer bir afin konneksiyonun katsayıları olur.

İspat: (3.44) eşitliğinden

$$\Gamma_{ij}^k = \bar{\Gamma}_{ij}^k - T_{ij}^k$$

yazılır. Γ_{ij}^k için konneksiyon katsayılarının dönüştürülmesi halinde

$$\bar{\Gamma}_{ij}^k - T_{ij}^k = A_{k'}^k A_i^{i'} A_j^{j'} T_{i'j'}^{k'} \quad (3.45)$$

olur. Burada T_{ij}^k tensör olduğundan,

$$T_{ij}^k = A_{k'}^k A_i^{i'} A_j^{j'} T_{i'j'}^{k'} \quad (3.46)$$

yazılır. (3.46) eşitliği (3.45) eşitliğinde kullanılırsa

$$\bar{\Gamma}_{ij}^k = A_{k'}^k A_i^{i'} A_j^{j'} \bar{\Gamma}_{i'j'}^{k'} + A_{k'}^k A_{ij}^{k'}$$

olduğu bulunur. Yani $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ ler konneksiyon katsayılarının dönüştürülmesi kuralına göre değişir. Dolayısıyla bir afin konneksiyondur.

Bu teoremin bazı sonuçlarını ifade edelim;

Sonuç 1. $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ ve Γ_{ij}^k afin konneksiyon katsayıları olmak üzere her λ skaler için

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{\bar{\Gamma}_{ij}^k + \lambda \Gamma_{ij}^k}{1 + \lambda} \quad (3.47)$$

değeri de bir afin konneksiyonun katsayılarıdır.

İspat: (3.47) eşitliği

$$\Gamma_{ij}^k = \bar{\Gamma}_{ij}^k + \frac{\lambda}{1 + \lambda} (\bar{\Gamma}_{ij}^k - \Gamma_{ij}^k) \quad (3.48)$$

biçiminde yazılır. (3.47) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci terim tensör olduğundan 3.3.1.Teoremine göre Γ_{ij}^k afin konneksiyon olur.

Özel halde $\lambda = 1$ alırsak

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{ij}^k = \frac{\bar{\Gamma}_{ij}^k + \Gamma_{ij}^k}{2} \quad (3.49)$$

buluruz. $\overset{\circ}{\Gamma}_{ij}^k$ konneksiyonuna $\overset{1}{\Gamma}_{ij}^k$ ve $\overset{2}{\Gamma}_{ij}^k$ konneksiyonlarına göre orta konneksiyon denir.

Sonuç 2. Γ_{ij}^k afin konneksiyon verilmiş olsun. Bu taktirde, $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k$ katsayıları da afin konneksiyon tayin eder.

İspat: Burulma tensörünün ifadesi

$$S_{ij}^k = \Gamma_{[ij]}^k = \frac{1}{2}(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k)$$

olduğundan

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + 2S_{ij}^k, \quad \tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k \quad (3.50)$$

yazılır. 3.3.1. Teorem'den dolayı $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ katsayıları bir afin konneksiyon belirtir $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ ve Γ_{ij}^k konneksiyonlarına karşılıklı konneksiyon denir.

3.7. Burulması Sıfır Olan Uzaylar

Burulmasız afin konneksiyonlu uzayların burulma tensörü sıfıra eşit olduğundan bu uzayların konneksiyon katsayıları alt indislerine göre simetriktir, yani

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$$

olur. Burulmasız afin konneksiyonlu uzayın herhangi eğrisel koordinat sistemine göre koordinatları $\overset{\circ}{u}^1, \dots, \overset{\circ}{u}^n$ olan $O(\overset{\circ}{u}^i)$ noktasını alalım ve konneksiyon katsayılarının verilmiş olduğu koordinat sistemine göre bu noktadaki değerlerinin $\overset{\circ}{\Gamma}_{ij}^k$ katsayıları ile verildiğini kabul edelim. $\delta_k^{i'}$ kronecker sembolü olmak üzere

$$u^{i'} = \delta_k^{i'} \{ (u^k - \overset{\circ}{u}^k) + \frac{1}{2} \overset{\circ}{\Gamma}_{pq}^k (u^p - \overset{\circ}{u}^p)(u^q - \overset{\circ}{u}^q) \} \quad (3.51)$$

biçiminde yeni koordinatları tanımlayalım. (3.51) dönüşümü diferensiyellenebilir ve $u^{i'}$ koordinatlarının u^i koordinatlarına göre kısmi türevleri

$$A_i^{i'} = \delta_i^{i'} + \delta_k^{i'} \overset{\circ}{\Gamma}_{ip}^k (u^p - u^p), \quad A_{ij}^{i'} = \delta_k^{i'} \overset{\circ}{\Gamma}_{ij}^k \quad (3.52)$$

biçiminde yazılır. (3.52) eşitliği O noktasında ve civarında $\det(A_i^{i'}) \neq 0$ şartını sağlar. Yani, (3.51) dönüşümü diferensiyellenebilir manifoldun tanımındaki mümkün olan dönüşümler sınıfındandır. (3.52) türev fonksiyonları O noktasında yazılırsa,

$$A_i^{i'} = \delta_i^{i'}, \quad A_{ij}^{i'} = \delta_k^{i'} \overset{\circ}{\Gamma}_{ij}^k \quad (3.53)$$

olur. Şimdi ise konneksiyon katsayılarının yeni koordinat sistemine göre O noktasındaki değerlerini hesaplayalım. Bunun için (3.53) ve (3.27) eşitlikleri kullanılarak

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{jk}^i = \delta_j^{j'} \delta_k^{k'} \delta_{i'}^i \overset{\circ}{\Gamma}_{j'k'}^{i'} + \delta_{i'}^i \delta_l^{i'} \overset{\circ}{\Gamma}_{kj}^l$$

veya

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{j'k'}^{i'} = 0$$

bulunur. Böylece burulmasız afin uzayın herbir noktasında öyle koordinat sistemi verilebilir ki, konneksiyon katsayıları bu sisteme göre bu noktadaki bütün değerleri sıfır olur. (3.51) ile verilen koordinatlara normal koordinat sistemi denir.

Burulmasız afin konneksiyonlu uzaylarda aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

1. $R_{(rs)k}^i = 0$
2. $R_{[rsk]}^i = 0$
3. $\nabla_{[t} R_{rs]k}^i = 0$, (Bianci-Padov eşitliği).

Bu eşitliklerin her üçünün invaryant (tensör) karakter taşıdığını dikkate alırsak, bunların ispatını normal koordinat sisteminde incelemek yeterli ve daha kolaydır.

Burulmasız afin konneksiyonlu uzayda simetrik ve regüler a_{ij} tensörü verilmiş olsun. Bu tensörün tersi $\tilde{a}^{ij}$ olmak üzere a_{ij} tensörünün kovaryant türevi

$$\nabla_k a_{ij} = a_{kij} \quad (3.54)$$

olarak gösterilsin. (3.54) eşitliğinde indislerin yeri dairesel olarak değiştirilerek aşağıdaki eşitlikler yazılır:

$$\partial_i a_{jk} - \Gamma_{ij}^m a_{mk} - \Gamma_{ik}^m a_{jm} = \nabla_i a_{jk} .$$

$$\partial_j a_{ki} - \Gamma_{jk}^m a_{mi} - \Gamma_{ji}^m a_{km} = \nabla_j a_{ki} .$$

$$\partial_k a_{ij} - \Gamma_{ki}^m a_{mj} - \Gamma_{kj}^m a_{mi} = \nabla_k a_{ij} .$$

sonuncu iki eşitlikten birinci eşitlik çıkartılırsa,

$$2\Gamma_{ij}^m a_{mk} = \partial_i a_{jk} + \partial_j a_{ik} - \partial_k a_{ij} - (a_{ijk} + a_{jik} - a_{kij}) \quad (3.55)$$

bulunur. (3.55) eşitliğinin her iki tarafı $\tilde{a}^{rk}$ tensörü ile çarpılırsa

$$\Gamma_{ij}^r = \left\{ \begin{matrix} r \\ ij \end{matrix} \right\} - \frac{1}{2} \tilde{a}^{rk} (a_{ijk} + a_{jik} - a_{kij}) \quad (3.56)$$

olur. Burada

$$\left\{ \begin{matrix} r \\ ij \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \tilde{a}^{rk} (\partial_i a_{jk} + \partial_j a_{ik} - \partial_k a_{ij}) \quad (3.57)$$

biçimindedir. (3.57) ifadesine a_{ij} tensörünün Christoffel sembolü denir. Burulmasız afın konneksiyonlu uzayın konneksiyon katsayıları regüler ve simetrik a_{ij} tensörünün Christoffel sembolü ve kovaryant türevleri yardımıyla ifade edilir.

Tanım 3.7.1: Burulmasız afın konneksiyonlu A_n uzayında $e_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} \mp 1 \\ 0 \end{cases}$, $e = e_{1,2,\dots,n}$

n - vektörü olmak üzere $v_1, v_2, \dots, v_n$ lineer bağımsız vektörleri üzerine kurulan paralelyüzün hacmi

$$V = e_{i_1 i_2 \dots i_n} v_1^{i_1} v_2^{i_2} \dots v_n^{i_n} \quad (3.58)$$

olsun. $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektörlerin paralel taşınması sonucunda V hacmi korunursa burulmasız A_n uzayına eş afın (denk afın) uzay denir. (3.58) denkleminde

$$\delta e_{i_1 i_2 \dots i_n} = 0 \quad \text{veya} \quad \nabla_k e_{i_1 i_2 \dots i_n} = 0 \quad (3.59)$$

olur. Eş afin uzayın konneksiyonu (3.59) denklemiyle belirlenir. (3.59) şartı

$$\partial_k e_{i_1 i_2 \dots i_n} - \Gamma_{ki_1}^s e_{s i_2 \dots i_n} - \dots - \Gamma_{ki_n}^s e_{i_1 i_2 \dots s} = 0 \quad (3.60)$$

biçiminde yazılır. n vektörün antisimetrikliğine göre (3.59) sisteminin bütün denklemleri

$$\partial_k e_{12 \dots n} - \Gamma_{kl}^s e_{s2 \dots n} - \dots - \Gamma_{kn}^s e_{12 \dots s} = 0 \quad (3.61)$$

denklemine denk olur. $e_{12 \dots n} = e$ olarak yazılırsa bu durumda (3.61) eşitliğinden

$$\Gamma_{ks}^s = \partial_k \ln e \quad (3.62)$$

yazılır. (3.62) eşitliği eş afin konneksiyonun katsayıları ile belirlenen Γ_{ks}^s toplamı gradiyentdir. Bu gradiyentin potansiyel fonksiyonu ise $\ln e$ olur.

$$R_{ij} = R_{kij}^k = \partial_k \Gamma_{ij}^k - \partial_i \Gamma_{kj}^k + \Gamma_{kl}^k \Gamma_{ij}^l - \Gamma_{ki}^l \Gamma_{lj}^k \quad (3.63)$$

tensörüne Ricci tensörü denir. Eş afin konneksiyonunun

$$R_{ij} = R_{ji} \quad (3.64)$$

şartı ile de karakterize edilebilir.

Burulmasız afin konneksiyonlu uzaylarda eğrilik tensörünün $R_{[rsk]}^i = R_{(rs)k}^i$ şartlarını sağladığı gözönüne alınırsa

$$R_{rsk}^k = R_{rs} - R_{sr} \quad (3.65)$$

yazılır. (3.64) ve (3.65) eşitlikleri eş afin konneksiyonunun

$$R_{rsk}^k = 0$$

şartı ile karakterize edilebileceğini gösterir.

Tanım 3.7.2: Burulmasız afin konneksiyonlu uzayın her bir noktasındaki tanjant uzayında verilen simetrik (0,2) tipli g_{ij} tensörü tanjant uzayın paralel kaydırılması

durumunda korunuyorsa böyle uzaylara metrik uzay denir. Burada simetrik (0,2) tipli g_{ij} tensörüne metrik tensör de denir.

Tanım 3.7.3: Metrik uzayın g_{ij} metrik tensörü regüler ise yani $\det(g_{ij}) \neq 0$ oluyorsa böyle uzaya Weyl uzayı denir ve W_n ile gösterilir.

Tanım 3.7.4: Eğer Weyl uzayı eş afin uzay olursa bu uzaya Riemannian uzayı denir ve V_n ile gösterilir.

Riemannian uzayı burulmasız konneksiyona sahip olan uzaydır ve bu uzayın Riemannian konneksiyonu

$$\nabla_k g_{ij} = 0 \quad (3.66)$$

şartı ile karakterize edilir. V_n Riemannian uzayının konneksiyon katsayıları

$$\Gamma_{ij}^k = \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{kr} (\partial_i a_{rj} + \partial_j a_{ir} - \partial_r a_{ij}) \quad (3.67)$$

biçimide verilir. Yani, V_n uzayının konneksiyon katsayıları g_{ij} tensörünün Christoffel sembolleriyle çıkarılır. (3.67) katsayılarıyla verilen konneksiyona Riemannian konneksiyonu veya Levi-Civita konneksiyonu denir. Diğer taraftan Riemannian manifoldu üzerinde $\nabla g = 0$ şartını sağlayan ama burulması olan konneksiyonlar da vardır. Bu tür konneksiyonlara ise metrik konneksiyon denir.

Riemannian uzayında $R_{jkm}^s g_{si} = R_{ijkm}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

- i. $R_{(ij)km} = 0$
- ii. $R_{[ijk]m} = 0$
- iii. $\nabla_{[s} R_{ij]km} = 0$
- iv. $R_{ij(km)} = 0$
- v. $R_{ijkm} = R_{kmi j}$

3.8. Riemannian Manifoldu

Herbir $x \in M_n$ noktasında $\forall Y \in T_x(M_n)$ ve $(0,2)$ tipli simetrik g tensörü için $g(X,Y) = 0$ eşitliğinden $X = 0$ oluyorsa g 'ye M_n üzerinde Riemannian metriği denir. Lokal koordinatlarda bu şart $\det(g_{ij}) \neq 0$ şartına denktir. g 'nin bileşenleri g_{ij} olmak üzere g için

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j \quad (3.68)$$

ifadesi de kullanılır (Kobayashi and Nomizu 1963).

Eğer M_n üzerinde Riemannian metriği verilmişse, o zaman (M_n, g) çiftine Riemannian manifoldu denir.

Burulmasız $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kr} (\partial_i a_{rj} + \partial_j a_{ir} - \partial_r a_{ij})$ konneksiyonuna ise Riemannian manifoldunun Riemannian konneksiyonu denir.

Eğer $g(X,X) \geq 0$ ve $g(X,X) = 0$ şartı yalnız ve yalnız $X = 0$ olduğunda sağlanıyor ise g ye pozitif tanımlıdır denir.

Eğer M_n üzerinde g Riemannian metriği pozitif tanımlı değilse g ye pseudo Riemannian metriği denir.

3.9. Tanjant Demet

M_n , C^∞ sınıfından n - boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve M_n manifoldunun p noktasındaki tanjant uzay $T_p(M_n)$ olmak üzere

$$T(M_n) = \bigcup_{p \in M_n} T_p(M_n)$$

şeklinde tanımlanan $T(M_n)$ kümesine tanjant demet denir.

3.10. Diferensiyel Geometrik Cebirsel Yapılar

M_{2n} diferensiyellenebilir manifold olsun. $\varphi \in T_1^1(M_{2n})$, $\varphi^2 = I$ ifadesine parakompleks cebirsel yapı denir.

3.10.1. m-Boyutlu Cebir (Birleşimli, Değişimli Sonlu Boyutlu Cebir)

m –boyutlu A_m cebiri verilsin. Bu cebirin birleşimli ve birimli olduğu kabul edilsin.

$\forall a, b, c \in A_m$ için $(ab)c = a(bc)$ ise A_m cebirine birleşimli cebir, $\forall a \in A_m, \exists e$ için $ea = ae$ ise e elemanına A_m cebirinin birim elemanı, cebire ise birimli cebir denir.

A_m cebir olduğundan aynı zamanda vektör uzayıdır. Dolayısıyla $\vec{e}_\alpha \in A_m, \alpha = 1, \dots, n, \{\vec{e}_\alpha\}$ şeklindeki baza sahiptir ve

$$\vec{e}_\alpha \vec{e}_\beta = C_{\alpha\beta}^\gamma \vec{e}_\gamma \quad (3.69)$$

şeklinde yazılır. $C_{\alpha\beta}^\gamma$ ya cebirin yapı sabitleri denir. Yapı sabitlerinin en önemli özelliği (1,2) tipli tensörün koordinatları olmasıdır.

Şimdi $C_{\alpha\beta}^\gamma$ yapı sabitinin tensör olduğunu gösterelim:

$C_{\alpha\beta}^\gamma$ yapı sabitleri $\{\vec{e}_\alpha\}$ bazında, $C_{\alpha'\beta'}^{\gamma'}$ yapı sabitleri ise $\{\vec{e}_{\alpha'}\}$ bazında verilmiş olsun. $C_{\alpha\beta}^\gamma$ yapı sabitinin tensör olduğunu göstermek için $\vec{e}_{\alpha'} = A_\alpha^\alpha \vec{e}_\alpha$ kuralı verildiğinde $C_{\alpha\beta}^\gamma$ ve $C_{\alpha'\beta'}^{\gamma'}$ yapı sabitleri arasında $C_{\alpha\beta}^\gamma = A_\alpha^\gamma A_\beta^\alpha A_{\beta'}^\beta C_{\alpha'\beta'}^{\gamma'}$ şeklindeki bağıntının olduğunu ispat edilmesi gerekir. A_m cebirinin $\{\vec{e}_{\alpha'}\}$ bazının yardımıyla

$$\vec{e}_{\alpha'} \vec{e}_{\beta'} = C_{\alpha'\beta'}^{\gamma'} \vec{e}_{\gamma'} \quad (3.70)$$

eşitliği yazılır. Kuraldan $\vec{e}_{\alpha'} = A_\alpha^\alpha \vec{e}_\alpha$, $\vec{e}_{\beta'} = A_\beta^\beta \vec{e}_\beta$, $\vec{e}_{\gamma'} = A_\gamma^\gamma \vec{e}_\gamma$ eşitlikleri yazabileceğinden bu eşitlikler (3.70) de yerine yazılır ve (3.69) eşitliği kullanılırsa

$$C_{\alpha'\beta'}^{\gamma'} = A_{\gamma'}^{\alpha} A_{\beta'}^{\beta} C_{\alpha\beta}^{\gamma}$$

elde edilir. Dolayısıyla $C_{\alpha\beta}^{\gamma}$ yapı sabitleri (1,2) tipli tensörün koordinatları olur.

$\forall a, b, c \in A_m$ için $(ab)c = a(bc)$ olduğundan $\{\vec{e}_{\alpha}\}$ bazı için

$$(\vec{e}_{\alpha}\vec{e}_{\beta})\vec{e}_{\gamma} = \vec{e}_{\alpha}(\vec{e}_{\beta}\vec{e}_{\gamma})$$

$$(C_{\alpha\beta}^{\sigma}\vec{e}_{\sigma})\vec{e}_{\gamma} = \vec{e}_{\alpha}(C_{\beta\gamma}^{\sigma}\vec{e}_{\sigma})$$

$$C_{\alpha\beta}^{\sigma}C_{\sigma\gamma}^{\varepsilon}\vec{e}_{\varepsilon} = C_{\beta\gamma}^{\sigma}C_{\alpha\sigma}^{\varepsilon}\vec{e}_{\varepsilon}$$

eşitliği yazılabilir. Baz üzerinde lineer terkibe ayrılma tek olduğundan dolayı son eşitlikteki katsayılar eşittir. Yani

$$C_{\alpha\beta}^{\sigma}C_{\sigma\gamma}^{\varepsilon} = C_{\beta\gamma}^{\sigma}C_{\alpha\sigma}^{\varepsilon}$$

olup birleşimli olma şartını tensör eşitliğiyle ifade edilir. Bu kurala A_m cebirinin birleşimli olma şartı denir.

$\exists e = 1$, elemanı $e.a = a.e = a$, ve $\forall a \in A_m$ için benzer işlemlerle cebirinin A_m nin tensör ile yazılmış birimli olma şartı

$$C_{\alpha\beta}^{\gamma}\varepsilon^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\gamma} \text{ veya } C_{\alpha\beta}^{\gamma}\varepsilon^{\beta} = \delta_{\alpha}^{\gamma}$$

şeklindedir. Burada $1 = \varepsilon^{\alpha}\vec{e}_{\alpha}$ dir.

A_m cebirinin tensör ile yazılmış değişimli olma şartı ise

$$C_{\alpha\beta}^{\gamma} = C_{\beta\alpha}^{\gamma}$$

şeklindedir. Yapı sabitleri aşağı indislere göre simetriktr.

Şimdi parakompleks cebir için yapı sabitlerinin hangi formda olduğuna bakalım.

Parakompleks cebir (iki kat sayılar cebiri) boyutu 2 ve bazı $\{1, e\}$ olan cebir olduğundan, $e^2 = 1$, $1.1 = 1$ ve $1.e = e.1 = 1$ eşitliklerini sağlar.

Parakompleks cebir için $e^2 = 1$ eşitliğinden,

$$C_{22}^1 = 1, \quad C_{22}^2 = 0$$

$1.1 = 1$ eşitliğinden

$$C_{11}^1 = 1, \quad C_{11}^2 = 0$$

$1.e = e.1 = 1$ eşitliğinden ise

$$C_{12}^1 = C_{21}^1 = 0, \quad C_{12}^2 = C_{21}^2 = 1$$

şeklinde sekiz tane yapı sabitine sahip olmuş olur. Parakompleks cebirin birimi ise $\{\varepsilon^\alpha\} = \{1, 0\}$ şeklinde ifade edilir.

Cebirin değişme özelliğinin olmadığını ve birimli olduğunu kabul edilsin. Yapı sabitlerinin matris dilinde yazımı

$$C_\alpha = (C_{\alpha\beta}^\gamma) \text{ ve } \tilde{C}_\beta = (C_{\alpha\beta}^\gamma)$$

şeklinde dir. $Boy A_m = m$, $\gamma = 1, \dots, m$ olmak üzere C_α , $m \times m$ tipinde bir kare matris olur. $m \times m$ tipindeki tüm kare kümesi (genelde) vektör uzayıdır. Kare matrislerde değişme özelliği dışındaki diğer tüm özellikler vardır ve boyutu m^2 dir.

$\vec{a} \in A_m$ olmak üzere,

$$\vec{a} = a^\alpha \vec{e}_\alpha \rightarrow a^\alpha C_\alpha = C(A)$$

$$\vec{a} = a^\alpha \vec{e}_\alpha \rightarrow a^\alpha \tilde{C}'_\alpha = \tilde{C}'(A) \quad , \quad a^\alpha \in \mathbb{R}$$

şeklindeki birebir örten dönüşümleri verilsin. Bu gösterimlerden $C(A)$ ya 1. regüler tasvir veya regüler matris, $\tilde{C}'(A)$ ya ise 2. regüler tasvir veya transpoz regüler matris denir.

Bu aşamadan sonra cebiri $(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta = \vec{e}_\beta \cdot \vec{e}_\alpha)$ şeklinde değişmeli olarak ele alınır. Değişme özelliği yapı sabitleri için,

$$C_{\alpha\beta}^\gamma = C_{\beta\alpha}^\gamma$$

şeklindedir. Son eşitlik matris dilinde, $C_\alpha = \tilde{C}_\alpha$ şeklinde yazılır ve $C_\alpha = \tilde{C}_\alpha$ eşitliğine cebirin değişmeli olma durumu denir.

Parakompleks cebir için regüler ve transpoz regüler matrislere bakalım. C_α matrisi

$$C_\alpha = \begin{pmatrix} C_{\alpha 1}^1 & C_{\alpha 2}^1 \\ C_{\alpha 1}^2 & C_{\alpha 2}^2 \end{pmatrix}$$

şeklinde olduğundan, C_1, C_2 matrisleri de sırasıyla,

$$C_1 = \begin{pmatrix} C_{11}^1 & C_{12}^1 \\ C_{11}^2 & C_{12}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ve

$$C_2 = \begin{pmatrix} C_{21}^1 & C_{22}^1 \\ C_{21}^2 & C_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde olur. Parakompleks cebirin regüler tasviri $\{C_1, C_2\}$, transpoz regüler matrisi de $C_1^T = C_1, C_2^T = C_2$ olduğundan $\{C_1^T, C_2^T\} = \{C_1, C_2\}$ şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla parakompleks cebir için 1. ve 2. regüler tasvirler birbirine denktir (İşcan 2008).

3.10.2. Cebirsel Yapıların Holomorfluğu

Bundan sonra birimli, birleşimli ve değişmeli cebiri ele alınacaktır. 2-boyutlu uzayda holomorfluk analitikliğe denktir. 2 den fazla boyutta analitiklik yerine holomorfluk kullanılır.

A_m , m boyutlu cebir (hiper kompleks cebir) olsun. Bu cebirin bazını $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m\}$ olsun. $\vec{e}_1 = 1$ olsun. Yani $\vec{e}_1$ adi birim ile özdeşlesin. $x = x^\alpha \vec{e}_\alpha, a \in R$ ifadesine cebirsel değişken veya hiper kompleks değişken denir.

$f^\alpha(x^1, x^2, \dots, x^m), x^\alpha \in R, \alpha = 1, 2, \dots, m$ için cebirsel fonksiyon

$$F = f^\alpha \vec{e}_\alpha$$

şeklinde tanımlansın. Bu fonksiyonun $dF = df^\alpha \vec{e}_\alpha$ diferensiyeli $\exists g(x) = F'(x)$ olacak şekilde $dF = F'(x)dx$ şeklinde yazılabiliyorsa, F fonksiyonunun x 'e göre diferensiyellenebilir (holomorf) fonksiyon denir.

Teorem 3.10.2.1: F fonksiyonunun x 'e göre holomorf olması için gerek ve yeter şart

$$C_\alpha D = DC_\alpha \quad (3.71)$$

olmasıdır.

İspat: $F'(x) = \tilde{F}^\alpha \vec{e}_\alpha, dF = df^\alpha \vec{e}_\alpha, dx = dx^\alpha \vec{e}_\alpha$ eşitlikleri

$$dF = F'(x)dx$$

eşitliğinde yazılırsa,

$$dF = \tilde{F}^\alpha \vec{e}_\alpha dx^\beta \vec{e}_\beta = df^\alpha \vec{e}_\alpha \quad (3.72)$$

elde edilir. $df^\alpha = (\partial_\beta f^\alpha) dx^\beta$ olduğundan bu eşitlik (3.72) de yerine yazılırsa ve $\vec{e}_\alpha \vec{e}_\beta = C_{\alpha\beta}^\gamma \vec{e}_\gamma$ eşitliği de dikkate alınır,

$$(\partial_\beta f^\alpha) dx^\beta \vec{e}_\alpha = \tilde{F}^\alpha C_{\alpha\beta}^\gamma \vec{e}_\gamma dx^\beta \quad (3.73)$$

elde edilir. Burada toplam indisi keyfi harfle işaretlenebileceğinden (3.73) eşitliğinin sol tarafındaki β toplama indisi yerine γ yazılarak

$$\partial_\beta f^\gamma = \tilde{F}^\alpha C_{\alpha\beta}^\gamma = \tilde{F}^\alpha C_\alpha^\gamma \quad (3.74)$$

elde edilir. Burada $\partial_\beta f^\gamma$ matrisi C_α 'nın lineer terkibi olarak yazılmıştır. (3.74) yazılımı holomorfluk şartının matematiksel yazılımı olup

$$(\partial_\beta f^\gamma) C_\alpha = C_\alpha (\partial_\beta f^\gamma)$$

$$C_\alpha D = DC_\alpha$$

şeklindedir. Şimdide tersini ispat edelim. (3.71) şartı açık şekilde yazılırsa.

$$C_{\alpha\beta}^{\gamma} \partial_{\beta} f^{\sigma} = \partial_{\gamma} f^{\beta} C_{\alpha\beta}^{\gamma} \quad (3.75)$$

olup, (3.75) eşitliğinin her iki tarafı ε^{γ} ile işleme tabi tutulursa, $\partial_{\beta} f^{\sigma}$ 'yı C_{α} 'nın lineer terkibi olarak

$$\begin{aligned} \partial_{\beta} f^{\sigma} &= \varepsilon^{\gamma} \partial_{\gamma} f^{\beta} C_{\alpha} = \tilde{F}^{\alpha} C_{\sigma} \\ \partial_{\beta} f^{\sigma} &= \tilde{F}^{\alpha} C_{\sigma} \end{aligned} \quad (3.76)$$

yazılır. (3.76) eşitliği holomorfluk şartıdır.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Parakompleks cebir için Cauchy-Riemannian şartını bulalım. $C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ olduğundan, bu ifadeler (3.71) de yerine yazılarak

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikten de $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$ eşitlikleri elde edilir ki, bu şarta para kompleks cebir için para-Cauchy-Riemannian şartı denir.

Şimdi de holomorf bir fonksiyonun keyfi mertebeden türevinin de holomorf bir fonksiyon olduğunu göstermeye çalışalım. $F'(x) = \varepsilon^{\gamma} \partial_{\gamma} f^{\alpha} \vec{e}_{\alpha}$ eşitliği yazılabildiğinden, yani $F'(x)$ 'i $\vec{e}_{\alpha}$ 'nın lineer terkibi olarak yazılabildiğinden, $F'(x)$ de bir fonksiyondur. Bu $F'(x)$ fonksiyonunun türev fonksiyonu var mı? (Yani $F(x)$ fonksiyonunun 2. Türevi var mı?) şartları nelerdir? Onları araştıralım.

$F(x)$ fonksiyonu için $F'(x)$ fonksiyonu var ise $F(x)$ fonksiyonuna holomorf fonksiyon denirdi. Eğer $F'(x)$ fonksiyonu için $F''(x)$ fonksiyonu varsa $F'(x)$ fonksiyonu da holomorf fonksiyon olacaktır. $\varepsilon^\beta \partial_\beta f^\alpha$ nın Jacobian matrisi alınsın. (3.75), yani

$$C_{\alpha\beta}^\gamma \partial_\beta f^\sigma = \partial_\gamma f^\beta C_{\alpha\beta}^\gamma$$

eşitliğinin her iki tarafı $\partial_\theta = \frac{\partial}{\partial x^\theta}$ ile işleme tabi tutulursa,

$$C_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial^2 f^\sigma}{\partial x^\theta \partial x^\gamma} = \frac{\partial^2 f^\gamma}{\partial x^\theta \partial x^\beta} C_{\alpha\gamma}^\sigma$$

eşitliği elde edilir. Burada f ler reel fonksiyonlar, x ler ise reel değişkenler olduğundan, ∂x türevlerinin yerleri değiştirilebilir. Ayrıca, son eşitliğin her iki tarafı ε^θ ile işleme tabi tutulursa,

$$C_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \left(\varepsilon^\theta \frac{\partial f^\sigma}{\partial x^\theta} \right) = \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\varepsilon^\theta \frac{\partial f^\gamma}{\partial x^\theta} \right) C_{\alpha\gamma}^\sigma$$

$$C_{\alpha\beta}^\gamma \partial_\gamma (\varepsilon^\theta \partial_\theta f^\sigma) = \partial_\beta (\varepsilon^\theta \partial_\theta f^\gamma) C_{\alpha\gamma}^\sigma$$

eşitliği, yani $F'(x)$ 'in $\varepsilon^\theta \partial_\theta f^\sigma$ 'nın Jacobian matrisinin C_α ile değişmeli olduğu bulunmuş olur. Dolayısıyla $F'(x)$ fonksiyonu holomorftur. O halde bir fonksiyonun istenilen mertebeden diferensiyelleri (türevleri) vardır. Yani holomorf fonksiyonların keyfi mertebeden türevi de holomorftur.

İki holomorf fonksiyonun toplamı, çarpımı ve çarpımının türevi holomorf fonksiyondur. Holomorf fonksiyonun skaler ile çarpımı da holomorftur. Holomorf fonksiyonların bileşkesinin neticesi de holomorftur (İşcan 2008).

3.11. Nijenhuis Tensörü

Nijenhuis tensörü yapıların integrallenebilme şartlarının incelenmesinde kullanılan bir tensördür. D ve E afinorları verilmiş olsun. $X, Y \in T_0^1(M_n)$ olmak üzere $N_{DE}(X, Y)$ tensörünü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$N_{DE}(X, Y) = [DX, EY] + [EX, DY] + DE[X, Y] + ED[X, Y] - D[X, EY] - D[EX, Y] - E[X, DY] - D[EX, Y] \quad (3.77)$$

$\varphi_j^i X^j = \varphi^i$ ifadesi bir vektör alanı olduğundan, (3.78) eşitliğinin sağ tarafı vektör alanı olup $N_{DE}(X, Y) \in T_2^1(M_n)$ bir tensör alanıdır. (Yano 1965). X ve Y vektör alanlarına göre lineerdir.

Çeşitli kaynaklarda Nijenhuis tensörüne D, E afinorlarının torsionu denir. $D = E$ alınırsa bir tek afinor için Nijenhuis tensörü ifadesi kullanılır (Torsion denilmez). Bir afinor yapı için Nijenhuis tensörü, $D = E = \varphi$ alınırsa

$$\begin{aligned} N_\varphi(X, Y) &= N(X, Y) = [\varphi X, \varphi Y] + [\varphi X, \varphi Y] + \varphi^2[X, Y] + \varphi^2[X, Y] \\ &\quad - \varphi[X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] \\ &= 2([\varphi X, \varphi Y] + \varphi^2[X, Y] - \varphi[X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y]) \end{aligned}$$

şeklindedir. Parantezin içi $N(X, Y)$ olarak alınır.

$$N_\varphi(X, Y) = N(X, Y) = [\varphi X, \varphi Y] + \varphi^2[X, Y] - \varphi[X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] \quad (3.78)$$

(3.78) eşitliğinde, $\varphi^2 = 0$ ise dual yapı denilir. Bu yapılar için $N(X, Y) = 0$ olması ise integrallenebilme şartıdır.

Nijenhuis tensörünü lokal koordinatlarda yazalım:

Bunun için Lie parantezinin

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X \quad (3.79)$$

özelliklerinden faydalanacağız. $X = \partial_i$, $Y = \partial_j$ eşitliklerini (3.78) ve (3.79) eşitliklerinde yerine yazacağız. İlk önce (3.79) eşitliğinde yerine yazarsak,

$$[f\partial_i, g\partial_j] = fg[\partial_i, \partial_j] + f(\partial_i g)\partial_j - g(\partial_j f)\partial_i$$

eşitliği elde edilir. $[\partial_i, \partial_j] = 0$ olduğundan

$$[f\partial_i, g\partial_j] = f(\partial_i g)\partial_j - g(\partial_j f)\partial_i \quad (3.80)$$

eşitliği elde edilir. Şimdi de (3.78) eşitliğinde yerine yazarsak,

$$N_\varphi(\partial_i, \partial_j) = N_{(\varphi)ij}^k \partial_k = N_{ij}^k \partial_k$$

$$N_{ij}^k \partial_k = [\varphi\partial_i, \varphi\partial_j] + \varphi^2[\partial_i, \partial_j] - \varphi[\partial_i, \varphi\partial_j] - \varphi[\varphi\partial_i, \partial_j]$$

$[\partial_i, \partial_j] = 0$ olduğundan,

$$= [\varphi_i^s \partial_s, \varphi_j^l \partial_l] - \varphi[\partial_i, \varphi_j^l \partial_l] - \varphi[\varphi_i^s \partial_s, \partial_j]$$

Lie parantezinin özelliğinden, yani (3.80) eşitliğinden

$$\begin{aligned} N_{ij}^k \partial_k &= \varphi_i^s \varphi_j^l \underbrace{[\partial_s, \partial_l]}_{=0} + \varphi_i^s (\partial_s \varphi_j^l) \partial_l - \varphi_j^l (\partial_l \varphi_i^s) \partial_s \\ &\quad - \varphi \{ \varphi_j^l \underbrace{[\partial_i, \partial_l]}_{=0} + (\partial_i \varphi_j^l) \partial_l - \varphi_j^l \underbrace{(\partial_l, 1)}_{=0} \partial_i \} \\ &\quad - \varphi \{ \varphi_i^s \underbrace{[\partial_s, \partial_j]}_{=0} + \varphi_i^s \underbrace{(\partial_s, 1)}_{=0} \partial_j - (\partial_j \varphi_i^s) \partial_s \} \\ N_{ij}^k \partial_k &= \varphi_i^s \partial_s \varphi_j^l \partial_l - \varphi_j^l \partial_l \varphi_i^s \partial_s - \partial_i \varphi_j^l \varphi_i^k \partial_k + \partial_j \varphi_i^s \varphi_s^k \partial_k \\ &= (\varphi_i^s \partial_s \varphi_j^k - \varphi_j^l \partial_l \varphi_i^k - \partial_i \varphi_j^l \varphi_i^k + \partial_j \varphi_i^s \varphi_s^k) \partial_k \\ N_{ij}^k \partial_k &= (\varphi_i^s \partial_s \varphi_j^k - \varphi_j^l \partial_l \varphi_i^k - \partial_i \varphi_j^l \varphi_i^k + \partial_j \varphi_i^s \varphi_s^k) \partial_k \end{aligned} \quad (3.81)$$

eşitliği elde edilir. (3.81) eşitliği Nijenhuis tensörünün lokal koordinatlarla yazılımıdır.

3.12. Skaler Eğrilik

M_n , n -boyutlu C^∞ sınıfından olan Riemannian manifoldu olsun. g_{ij} metriği simetrik, regüler metrik ve konneksiyon da Levi-Civita konneksiyonu olsun.

Riemannian manifoldunda $R_{ijk}^s = R(X, Y)Z$ eğrilik tensöründeki s indisini indirgersek,

$$R_{ijkt} = g_{st} R_{ijk}^s, \quad R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$$

şeklinde (0,4) tipli tensör elde edilir.

Ricci tensörü $R_{ij} = R_{ijs}^s$ şeklindeydi. Ricci tensörüne öyle bir skaler dahil edelim ki, tam kontraksiyon yapalım

$$R = g^{ij}R_{ij}$$

olsun. Bu R eğriliğine skaler eğrilik denir. Genelde R eğriliği manifoldun noktasına bağlı fonksiyon olmuş olur.

Skaler eğriliğin yüzeyde neye karşılık geldiğine bakalım:

Yüzeyin birinci esas formu (Riemannian metriği) $I = g_{ij}du^i du^j$ ve ikinci esas formu $II = h_{ij}du^i du^j$ şeklinde olmak üzere, κ Gauss (veya tam) eğriliği

$$\kappa = \kappa_1, \kappa_2 = \frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})}$$

$$\kappa = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

şeklinde (Salimov ve Mağden 2008). Yüzeyler için eğrilik tensörü,

$$\kappa = \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

şeklinde bu son eşitlik Gauss eğriliği için önemli bir teoremdir. Skaler eğrilik yüzeyler için ($n = 2$) Gauss eğriliğinin 2 katı olduğunu göstermeye çalışalım. Skaler eğriliği yüzeyde,

$$R = g^{ij}R_{ij} = g^{ij}R_{sij}^s = g^{ij}g^{ts}R_{sijt}$$

$$R = g^{21}g^{21}R_{1212} + g^{11}g^{22}R_{2112} + g^{22}g^{11}R_{1221} + g^{12}g^{12}R_{2121}$$

şeklindeki eşitliğe sahiptir. Burada, Riemannian uzayında R_{ijkl} eğrilik tensörünün özelliğinden, ilk iki indis ve son iki indis aynı olanlar sıfır olur.

$$R = g^{12}g^{12}R_{1212} - g^{11}g^{22}R_{1212} - g^{11}g^{22}R_{1221} + g^{12}g^{12}R_{1212}$$

$$\begin{aligned}
 &= ((g^{12})^2 - g^{11}g^{22} - g^{11}g^{22} + (g^{12})^2)R_{1212} \\
 &= (-2(-(g^{12})^2 + g^{11}g^{22}))R_{1212} \\
 R &= -2(\det(g^{-1}))R_{1212} = -2 \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \\
 R &= 2\kappa
 \end{aligned}$$

bulunmuş olur. Bu son eşitlik, yüzeyler için skaler eğriliğin, Gauss eğriliğinin 2 ile çarpılmış hali olduğunu gösterir. Yüzeyler bilinen 2-boyutlu Riemannian manifoldudur.

3.14. Hemen Hemen Para Kompleks ve Hemen Hemen KompleksYapılar

M_{2n} diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M_{2n} üzerinde (1,1) tipli φ tensör alanı için $\varphi^2 = I$ olan tensör alanına hemen hemen para kompleks yapı denir. (M_{2n}, φ) ise hemen hemen para kompleks manifold olarak adlandırılır.

Eğer (1,1) tipli φ yapısı integrallenebilirse yani $N_\varphi = 0$ ise φ 'ye para kompleks yapı denir. (M_{2n}, φ) de para kompleks manifold denir.

M_{2n} diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M_{2n} üzerinde (1,1) tipli φ tensör alanı için $\varphi^2 = -I$ olan tensör alanına hemen hemen kompleks yapı denir. (M_{2n}, φ) ise hemen hemen kompleks manifold olarak adlandırılır.

Eğer (1,1) tipli φ yapısı integrallenebilirse yani $N_\varphi = 0$ ise φ 'ye kompleks yapı denir. (M_{2n}, φ) de kompleks manifold denir.

3.14. Para Norden Manifoldları

M_{2n} diferensiyellenebilir manifold olsun. M_{2n} üzerinde (1,1) tipli φ tensörü için $\varphi^2 = I$ olan tensör alanına hemen hemen para kompleks yapı denir. M_{2n} üzerindeki her X, Y vektör alanları için

$$g(\varphi X, Y) = g(X, \varphi Y) \quad \text{veya} \quad g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) \quad (3.82)$$

şartını sağlayan g Riemannian metriğine para Norden metrik denir (Norden 1960). Bazen (3.82) şartını sağlayan g metriğine pür metrik, anti-Hermitian metrik veya B metrik de denir.

Eğer (M_{2n}, φ) , g para Norden metriğine sahip bir hemen hemen para kompleks manifold ise (M_{2n}, φ, g) ' ye hemen hemen para Norden manifold denir. Eğer φ integrallenebilirse (M_{2n}, φ, g) ' ye para Norden manifold denir (Salimov vd 2010).

3.15. Para Holomorfik (Hemen Hemen Para Holomorfik) Tensör Alanları

$t^*, X_n(\mathbb{C})$ holomorfik manifoldu üzerinde kompleks tensör alanı olsun. Böyle bir tensör alanının reel modeli φ afinor yapısının etkisine bağlı, vektör veya kovektör argümanlarından bağımsız M_{2n} üzerinde bir tensör alanıdır. Böyle tensör alanlarının φ 'ye göre pür olduğu söylenir. Bu şekildeki yapılar birçok yazar tarafından çalışılmıştır (Tachibana 1960; Yano and Ako 1968 Kruchkovich 1972; Vishnevskii, Shirokov and Shurygin 1985; Salimov 1994; Salimov 1996; Vishnevskii 2002;). Özellikle $(0, q)$ tipli bir ω tensör alanı için pürlük şartı, her $X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{S}_0^1(M_{2n})$ için

$$\omega(\varphi X_1, X_2, \dots, X_q) = \omega(X_1, \varphi X_2, \dots, X_q) = \dots = \omega(X_1, X_2, \dots, \varphi X_q)$$

şartının sağlanmasıdır.

ω pür tensör alanına uygulanan

$$\Phi_\varphi: \mathfrak{S}_q^1(M_{2n}) \rightarrow \mathfrak{S}_{q+1}^1(M_{2n})$$

operatörü, L_Y, Y ye göre Lie türevi olmak üzere;

$$\begin{aligned} (\Phi_\varphi \omega)(X, Y_1, Y_2, \dots, Y_q) &= (\varphi X) \left(\omega(Y_1, Y_2, \dots, Y_q) \right) - X \left(\omega(Y_1, Y_2, \dots, Y_q) \right) \\ &+ \omega \left((L_{Y_1} \varphi) X, Y_2, \dots, Y_q \right) + \dots + \omega \left(Y_1, Y_2, \dots, (L_{Y_q} \varphi) X \right) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

φ , M_{2n} de para kompleks yapı olmak üzere, eğer

$$\Phi_{\varphi}\omega = 0$$

ise $\omega^* \in X_n(\mathbb{C})$ para kompleks tensör alanına para holomorfik tensör alanı denir (Tachibana 1960; Yano ve Ako 1968; Kruchkovich 1972). Bu şekildeki ω^* para holomorfik tensör alanı her $X, Y_1, \dots, Y_q \in \mathfrak{S}_0^1(M_{2n})$ için

$$(\Phi_{\varphi}\omega)(X, Y_1, Y_2, \dots, Y_q) = 0$$

olacak şekilde M_{2n} üzerinde ω pür tensör alanı formundadır. Dolayısı ile M_{2n} üzerinde ω pür tensör alanı da para holomorfik tensör alanı olarak adlandırılır. Eğer φ, M_{2n} üzerinde bir hemen hemen para kompleks yapı ise bu durumda $\Phi_{\varphi}\omega = 0$ şartını sağlayan ω tensör alanına hemen hemen para holomorfiktir denir (Salimov vd 2010).

3.16. Para Kahler Norden (Para Holomorfik Norden) Metrikler

(M_{2n}, φ, g) para Norden manifoldunda, g Norden metriği her $X, Y, Z \in \mathfrak{S}_0^1(M_{2n})$ için

$$(\Phi_{\varphi}g)(X, Y, Z) = 0 \quad (3.83)$$

şartını sağlıyorsa g metriğine para holomorfiktir denir.

(3.83) eşitliğinde $X = \partial_k, Y = \partial_i, Z = \partial_j$ yazılırsa, keyfi $x^1, \dots, x^n$ local koordinat sistemine göre $\Phi_{\varphi}g$ 'nin bileşenleri

$$(\Phi_{\varphi}g)_{kij} = \varphi_k^m \partial_m g_{ij} - \varphi_i^m \partial_k g_{mj} + g_{mj} (\partial_i \varphi_k^m - \partial_k \varphi_i^m) + g_{im} \partial_j \varphi_k^m = 0$$

elde edilir.

g para holomorfik Norden metriğine sahip (M_{2n}, φ, g) para Norden manifolduna para holomorfik Norden manifold denir (Salimov vd 2010).

Teorem 3.16.1: g para Norden metriğine sahip hemen hemen para kompleks manifold için $\Phi_\varphi g = 0$ şartı, $\nabla\varphi = 0$ şartına denktir. Burada ∇, g 'nin Levi-Civita konneksiyonudur (Salimov vd 2010).

g pseudo Riemannian para Norden metrik ve ∇ da g metriğinin Levi-Civita konneksiyonu olsun. φ hemen hemen para kompleks yapısı da $\nabla\varphi = 0$ şartını sağlasın. Bu durumda (M_{2n}, φ, g) ye para Kahler Norden manifold denir. Dolayısıyla para Kahler Norden manifoldları ile holomorfik metriğe sahip para Norden manifoldları arasında bire bir uygunluk vardır. Bu tip manifoldlarda Riemannian eğrilik tensörü pür ve para holomorfiktir. Ayrıca skaler eğrilik de lokal olarak para holomorfiktir (Salimov 1983; Iscan ve Salimov 2009)

φ hemen hemen para kompleks yapısı için $N_\varphi = 0$ ise yapı integrallenebilir. Ayrıca ∇ burulmasız afin konneksiyon olmak üzere $\nabla\varphi = 0$ şartı da φ hemen hemen para kompleks yapısı için integrallenebilme şartıdır. Dolayısıyla g pseudo Riemannian metriğinin Levi- Civita konneksiyonu ∇ , burulmasız bir afin konneksiyon olmak üzere $\Phi_\varphi g = 0$ ise φ integrallenebilir. Bu nedenle $\Phi_\varphi g = 0$ ve $N_\varphi \neq 0$ şartlarına sahip bir hemen hemen para holomorfik Norden manifold yoktur (Salimov vd. 2010).

3.17. Twin Para Norden Metrik

(M_{2n}, φ, g) hemen hemen para Norden manifoldu olsun. X, Y vektör alanları olmak üzere g metriği vasıtasıyla

$$G(X, Y) = (g \circ \varphi)(X, Y) = g(\varphi X, Y) \quad (3.84)$$

şeklinde tanımlanan G ye hemen hemen twin para Norden metrik denir (Salimov vd 2010).

g para Norden metrik olmak üzere;

$$\begin{aligned} G(X, Y) &= (g \circ \varphi)(X, Y) = g(\varphi X, Y) \\ &= g(X, \varphi Y) \end{aligned}$$

$$= G(Y, X)$$

olup, G simetriktir.

φ para kompleks yapı olmak üzere;

$$\begin{aligned} G(\varphi X, Y) &= (g \circ \varphi)(\varphi X, Y) = g(\varphi^2 X, Y) \\ &= g(\varphi X, \varphi Y) = (g \circ \varphi)(\varphi X, \varphi Y) \\ &= G(X, \varphi Y) \end{aligned}$$

olup, G metriği para Norden metriktir.

g para Norden metriğinin Levi-Civita konneksiyonunun kovaryant türevi ∇_g olsun. Bu durumda

$$\nabla_g G = (\nabla_g g) \circ \varphi + g \circ (\nabla_g \varphi) = g \circ (\nabla_g \varphi)$$

yazılır. Teorem 3.16.1. den $\nabla_g G = 0$ elde edilir (Salimov vd. 2010). Dolayısıyla g para Kahler Norden metriğinin Levi-Civita konneksiyonu ile G twin para Norden metriğinin Levi-Civita konneksiyonu çakışır (Tachibana 1960).

3.18. Codazzi Tensörler

Tanım 3.18.1: M_{2n} diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M_{2n} üzerinde (1,1) tipli φ tensör alanı için $\varphi^2 = -I$ hemen hemen kompleks yapı ve $\varphi^2 = I$ hemen hemen para kompleks yapıları verilsin. Bu iki tensör alanı için ortak olarak L sembolü alınsın. ∇ afin konneksiyon ve X, Y vektör alanları olmak üzere,

$$(\nabla_X L)Y = (\nabla_Y L)X \quad (3.85)$$

eşitliğine (1,1) tipli L tensörünün Codazzilik şartı denir.

Tanım 3.18.2: M_{2n} diferensiyellenebilir manifold üzerinde g Norden metriği, G twin metriği ve L yapısı verilsin. X, Y vektör alanları olmak üzere;

$$(\nabla_X G)(Y, Z) = (\nabla_Y G)(X, Z)$$

veya buna eşdeğer olarak

$$(\nabla_X L)Y = (\nabla_Y L)X \quad (3.86)$$

şartı sağlanıyor ise (M_{2n}, g, L) manifolduna anti-Kähler Codazzi manifoldu denir. Bu şart koordinatlarla,

$$\nabla_k L_j^i = \nabla_j L_k^i \quad (3.87)$$

şeklinde yazılır. Bu eşitlik (1,1) tipli L tensörünün Codazzilik şartının koordinatlarla ifadesidir (Salimov and Turanli 2013).

Tanım 3.18.3: M_{2n} diferensiyellenebilir manifoldolsun. g bir pseudo-Riemannian metriği, ∇ afin konneksiyon ve X, Y, Z vektör alanları olmak üzere

$$(\nabla_Z g)(X, Y) = (\nabla_X g)(Z, Y) \quad (3.88)$$

eşitliğine (0,2) tipli g tensörünün Codazzilik şartı denir.

Tanım 3.18.4: M_{2n} diferensiyellenebilir manifold, g Norden metrik ve L (kompleks veya parakompleks) yapısı verilsin. g ve φ vasıtasıyla

$$G(X, Y) = (g \circ L)(X, Y) = g(LX, Y)$$

şeklinde tanımlanan (0,2) tipli G twin metriğinin Codazzilik şartı

$$(\nabla_X G)(Y, Z) = (\nabla_Y G)(X, Z) \quad (3.89)$$

şeklindedir. Burada X, Y, Z vektör alanlarıdır.

Tanım 3.18.5: g pseudo-Riemannian metriği ve L (kompleks veya para kompleks) yapısı verilsin. ω ve g vasıtasıyla

$$\omega(X, Y) = g(LX, Y) \quad (3.90)$$

şeklinde tanımlanan ω ya esas 2-form denir. Bu ω esas 2-form için Codazzilik şartı

$$(\nabla_z \omega)(X, Y) = (\nabla_X \omega)(Z, Y) \quad (3.91)$$

şeklindedir. Burada X, Y, Z vektör alanlarıdır.

3.19. φ – İnvaryant Lineer Kooneksiyonlar

(M_{2n}, φ) para kompleks manifoldu üzerinde ∇ lineer konneksiyonu verilsin. X, Y vektör alanları olmak üzere;

$$\nabla_X \varphi Y = \varphi \nabla_X Y \quad (3.92)$$

şartını sağlayan ∇ ya M_{2n} de φ – invaryant lineer konneksiyon denir.

3.20. İstatistiksel Manifold

M_{2n} manifoldu üzerinde g pseudo-Riemann metriği ve ∇ burulmasız konneksiyonu verilmiş olsun. Eğer (∇, g) Codazzi çifti ise bu manifolda istatistiksel manifold denir (Lauritzen 1987).

3.21. Klein-4 Grup

$K = \{e, a, b, c\}$ kümesi verilsin. Bu küme üzerinde $*$ işlemi aşağıdaki tablodaki gibi tanımlansın

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c

a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Tablodan hareketle;

$$e * a = a * e = a$$

$$e * b = b * e = b$$

$$e * c = c * e = c$$

olup e birim elamandır.

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

olup birleşme özelliği vardır.

$$a * b = c, \quad a * c = b, \quad b * c = a$$

$$e * a = a, \quad e * b = b, \quad e * c = c$$

olup kapalılık özelliği vardır.

Son olarak

$$e * e = e, \quad a * a = a, \quad b * b = b, \quad c * c = c$$

olduğundan her eleman aynı zamanda kendisinin tersidir.

Böylece K kümesi $*$ işlemine göre bir gruptur. Bu şekilde tanımlana gruba Klein-4 grubu denir (Taşcı 2010).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. Conjugate Konneksiyonlar

Tanım 4.1.1: (M_{2n}, φ, g, G) hemen hemen para Norden manifold ve ∇ bu manifold üzerinde tanımlı bir lineer konneksiyon olsun. ∇ nın φ – conjugate konneksiyonu ∇^φ ile gösterilir ve

$$\nabla^\varphi(X, Y) = \nabla_X^\varphi Y = \varphi^{-1}(\nabla_X \varphi Y) \quad (4.1)$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada ∇^φ de bir lineer konneksiyon olup, X ve Y vektör alanlarıdır.

Tanım 4.1.2: (M_{2n}, φ, g, G) hemen hemen para Norden manifold ve ∇ bu manifold üzerinde tanımlı bir lineer konneksiyon olsun. ∇ nın g –conjugate konneksiyonu ∇^* ile gösterilir ve

$$Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z^* Y) \quad (4.2)$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada ∇^* da bir linner lineer konneksiyon olup, X, Y ve Z vektör alanlarıdır.

Tanım 4.1.3: (M_{2n}, φ, g, G) hemen hemen para Norden manifold ve ∇ bu manifold üzerinde tanımlı bir lineer konneksiyon olsun. ∇ nın G –conjugate konneksiyonu $\nabla^\dagger$ ile gösterilir ve

$$ZG(X, Y) = G(\nabla_Z X, Y) + G(X, \nabla_Z^\dagger Y) \quad (4.3)$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada $\nabla^\dagger$ da bir lineer konneksiyon olup, X, Y ve Z vektör alanlarıdır.

Conjugate konneksiyonlar Riemannian teorisinde Levi-Civita konneksiyonlarının genelleştirilmiş halidir ve pek çok yazar tarafından da bu konu ile ilgili çalışmalar yapılmıştır. (Dillen vd. 1990; Nomizu ve Simon 1992; Calın vd. 2009; Blaga ve

Crasmareanu 2012; Blaga 2014; Blaga ve Crasmareanu 2015; Fei ve Zhang 2017; Gezer ve Çakıcıoğlu).

Teorem 4.1.1: (M_{2n}, φ, g, G) hemen hemen para Norden manifold, ∇^* , $\nabla^\dagger$ ve ∇^φ de sırasıyla ∇ lineer konneksiyonunun g – conjugate, G – conjugate ve φ – conjugate konneksiyonları olsun. Bu durumda $(id, *, \dagger, \varphi)$ dörtlüsü lineer konneksiyonlar uzayında Klein 4 grubudur. Yani,

$$\text{i. } (\nabla^*)^* = (\nabla^\dagger)^\dagger = (\nabla^\varphi)^\varphi = \nabla$$

$$\text{ii. } (\nabla^\dagger)^\varphi = (\nabla^\varphi)^\dagger = \nabla^*$$

$$\text{iii. } (\nabla^*)^\varphi = (\nabla^\varphi)^* = \nabla^\dagger$$

$$\text{iv. } (\nabla^*)^\dagger = (\nabla^\dagger)^* = \nabla^\varphi$$

şeklindedir.

İspat:

i. Kovaryant türev ve g – conjugate konneksiyonun tanımından,

$$\begin{aligned} (\nabla_Z g)(X, Y) &= Zg(X, Y) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) \\ &= g(X, \nabla_Z^* Y) - g(X, \nabla_Z Y) \end{aligned}$$

(I)

$$\begin{aligned} (\nabla_Z^* g)(X, Y) &= Zg(X, Y) - g(\nabla_Z^* X, Y) - g(X, \nabla_Z^* Y) \\ &= g(X, (\nabla_Z^*)^* Y) - g(X, \nabla_Z^* Y) \end{aligned}$$

(II)

yazılır. (I) ve (II) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa $(\nabla^*)^* = \nabla$ olduğu görülür.

Benzer şekilde kovaryant türev ve G – conjugate konneksiyonun tanımından,

$$(\nabla_Z G)(X, Y) = ZG(X, Y) - G(\nabla_Z X, Y) - G(X, \nabla_Z Y)$$

$$= G(X, \nabla_Z^\dagger Y) - G(X, \nabla_Z Y)$$

(III)

$$\begin{aligned} (\nabla_Z^\dagger G)(X, Y) &= ZG(X, Y) - G(\nabla_Z^\dagger X, Y) - G(X, \nabla_Z^\dagger Y) \\ &= G(X, (\nabla_Z^\dagger)^\dagger Y) - G(X, \nabla_Z^\dagger Y) \end{aligned}$$

(IV)

yazılır. (III) ve (IV) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa $(\nabla^\dagger)^\dagger = \nabla$ olduğu görülür.

Son olarak φ –conjugate konneksiyon tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned} (\nabla^\varphi)_X^\varphi Y &= \varphi^{-1}(\nabla_X^\varphi \varphi Y) \\ &= \varphi(\varphi^{-1} \nabla_X \varphi^2 Y) \\ &= \nabla_X Y \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $(\nabla^\varphi)^\varphi = \nabla$ olduğu görülür.

$$\begin{aligned} \text{ii. } G((\nabla^\dagger)_Z^\varphi X, Y) &= G(\varphi^{-1} \nabla_Z^\dagger \varphi X, Y) \\ &= G(\nabla_Z^\dagger \varphi X, \varphi Y) = G(\varphi Y, \nabla_Z^\dagger \varphi X) \\ &= ZG(\varphi Y, \varphi X) - G(\nabla_Z \varphi Y, \varphi X) \\ &= Zg(Y, \varphi X) - g(\varphi \nabla_Z \varphi Y, \varphi X) \\ &= Zg(\varphi Y, X) - g(\nabla_Z \varphi Y, X) \\ &= g(\varphi Y, \nabla_Z^* X) \\ &= G(\nabla_Z^* X, Y) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $(\nabla^\dagger)^\varphi = \nabla^*$ olduğu görülür.

Benzer şekilde

$$ZG(X, Y) = G(\nabla_Z^\varphi X, Y) + G(X, (\nabla^\varphi)_Z^\dagger Y)$$

$$Zg(\varphi X, Y) = g(\varphi \nabla_Z^\varphi X, Y) + g(\varphi X, (\nabla^\varphi)_Z^\dagger Y)$$

$$Zg(\varphi X, Y) = g(\varphi \varphi^{-1} \nabla_Z \varphi X, Y) + g(\varphi X, (\nabla^\varphi)_Z^\dagger Y)$$

$$Zg(\varphi X, Y) - g(\nabla_Z \varphi X, Y) = g(\varphi X, (\nabla^\varphi)_Z^\dagger Y)$$

$$g(\varphi X, \nabla_Z^* Y) = g(\varphi X, (\nabla^\varphi)_Z^\dagger Y)$$

elde edilir. Buradan $(\nabla^\varphi)^\dagger = \nabla^*$ olduğu görülür.

$$\begin{aligned} \text{iii.} \quad g(\varphi X, (\nabla^\varphi)_Z^* Y) &= Zg(\varphi X, Y) - g(\nabla_Z^\varphi \varphi X, Y) \\ &= ZG(X, Y) - G(\varphi^{-1} \nabla_Z^\varphi \varphi X, Y) \\ &= ZG(X, Y) - G(\varphi(\varphi^{-1}(\nabla_Z \varphi^2 X)), Y) \\ &= ZG(X, Y) - G(\nabla_Z X, Y) \\ &= G(X, \nabla_Z^\dagger Y) = g(\varphi X, \nabla_Z^\dagger Y) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $(\nabla^\varphi)^* = \nabla^\dagger$ olduğu görülür.

Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} g((\nabla^*)^\varphi_Z X, Y) &= g(\varphi^{-1} \nabla_Z^* \varphi X, Y) = g(\varphi Y, \nabla_Z^* \varphi X) \\ &= Zg(\varphi Y, \varphi X) - g(\nabla_Z \varphi Y, \varphi X) \\ &= Zg(\varphi Y, \varphi X) - g(\varphi \nabla_Z \varphi Y, X) \\ &= ZG(Y, \varphi X) - G(\nabla_Z \varphi Y, X) \\ &= ZG(\varphi Y, X) - G(\nabla_Z \varphi Y, X) \\ &= G(\varphi Y, \nabla_Z^\dagger X) = g(Y, \nabla_Z^\dagger X) \\ &= g(\nabla_Z^\dagger X, Y) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da $(\nabla^*)^\varphi = \nabla^\dagger$ olduğu görülür.

$$\begin{aligned} \text{iv.} \quad g(\varphi X, (\nabla^\dagger)_Z^* Y) &= Zg(\varphi X, Y) - g(\nabla_Z^\dagger \varphi X, Y) \\ &= Zg(Y, \varphi X) - g(Y, \nabla_Z^\dagger \varphi X) \\ &= ZG(\varphi^{-1} Y, \varphi X) - G(\varphi^{-1} Y, \nabla_Z^\dagger \varphi X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= ZG(\varphi Y, \varphi X) - G(\varphi Y, \nabla_Z^\dagger \varphi X) \\
 &= G(\nabla_Z \varphi Y, \varphi X) = G(\varphi \nabla_Z \varphi Y, X) = G(\varphi^{-1} \nabla_Z \varphi Y, X) \\
 &= G(\nabla_Z^\varphi Y, X) \\
 &= g(\varphi X, \nabla_Z^\varphi Y)
 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $(\nabla^\dagger)^* = \nabla^\varphi$ olduğu görülür.

Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
 ZG(X, Y) &= G(\nabla_Z^* X, Y) + G(X, (\nabla^*)_Z^\dagger Y) \\
 Zg(\varphi X, Y) &= g(\varphi \nabla_Z^* X, Y) + g(\varphi X, (\nabla^*)_Z^\dagger Y) \\
 Zg(\varphi Y, X) - g(\varphi Y, \nabla_Z^* X) &= g(\varphi X, (\nabla^*)_Z^\dagger Y) \\
 g(\nabla_Z \varphi Y, X) &= g(\varphi X, (\nabla^*)_Z^\dagger Y) \\
 g(\varphi \nabla_Z \varphi Y, \varphi X) &= g(\varphi X, (\nabla^*)_Z^\dagger Y) \\
 g(\varphi^{-1} \nabla_Z \varphi Y, \varphi X) &= g(\varphi X, (\nabla^*)_Z^\dagger Y) \\
 g(\nabla_Z^\varphi Y, \varphi X) &= g(\varphi X, (\nabla^*)_Z^\dagger Y) \\
 g(\varphi X, \nabla_Z^\varphi Y) &= g(\varphi X, (\nabla^*)_Z^\dagger Y)
 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $(\nabla^*)^\dagger = \nabla^\varphi$ olduğu görülür.

Böylece ispat tamamlanır.

4.2. Codazzi Çiftleri

Tanım 4.2.1: M_{2n} diferensiyellenebilir manifold üzerinde φ para kompleks yapısı ve ∇ lineer konneksiyonu verilsin. X ve Y vektör alanları olmak üzere;

$$(\nabla_X \varphi)Y = (\nabla_Y \varphi)X \quad (4.4)$$

şartı φ nin Codazzilik şartı olup bu şartı sağlayan (∇, φ) ye Codazzi çifti denir.

Teorem 4.2.1: ∇ lineer konneksiyon ve φ para kompleks yapı olmak üzere (∇, φ) Codazzi çifti olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

- i. ∇ ve ∇^φ nin burulmaları aynıdır.
- ii. $(\nabla^\varphi, \varphi^{-1})$ Codazzi çiftidir.

İspat: i. (∇, φ) Codazzi çifti olsun.

∇^φ konneksiyonun burulması

$$S^{\nabla^\varphi}(X, Y) = \nabla_X^\varphi Y - \nabla_Y^\varphi X - [X, Y]$$

şeklindedir. Buradan hareketle;

$$\begin{aligned} S^{\nabla^\varphi}(X, Y) - S^\nabla(X, Y) &= \nabla_X^\varphi Y - \nabla_X Y - \nabla_Y^\varphi X + \nabla_Y X \\ &= \varphi^{-1}(\nabla_X \varphi Y) - \nabla_X Y - \varphi^{-1}(\nabla_Y \varphi X) + \nabla_Y X \\ &= \varphi[(\nabla_X \varphi)Y + \varphi(\nabla_X Y)] - \nabla_X Y \\ &\quad - \varphi[(\nabla_Y \varphi)X + \varphi(\nabla_Y X)] + \nabla_Y X \\ &= \varphi[(\nabla_X \varphi)Y - (\nabla_Y \varphi)X] \\ &= 0 \end{aligned}$$

olup $S^\nabla = S^{\nabla^\varphi}$ dir.

- ii. (∇, φ) Codazzi çifti ise $(\nabla^\varphi, \varphi^{-1})$ nin de Codazzi çifti olduğunu göstermek için

$(\nabla_X^\varphi \varphi^{-1})Y - (\nabla_Y^\varphi \varphi^{-1})X = 0$ olduğunu göstermek gerekir.

$$\begin{aligned} (\nabla_X^\varphi \varphi^{-1})Y - (\nabla_Y^\varphi \varphi^{-1})X &= (\nabla_X^\varphi \varphi)Y - (\nabla_Y^\varphi \varphi)X \\ &= \nabla_X^\varphi(\varphi Y) - \varphi(\nabla_X^\varphi Y) - \nabla_Y^\varphi(\varphi X) + \varphi(\nabla_Y^\varphi X) \\ &= \varphi^{-1}(\nabla_X Y) - \varphi(\varphi^{-1} \nabla_X \varphi Y) \\ &\quad - \varphi^{-1}(\nabla_Y X) + \varphi(\varphi^{-1} \nabla_Y \varphi X) \\ &= \varphi(\nabla_X Y) - [(\nabla_X \varphi)Y + \varphi(\nabla_X Y)] \\ &\quad - \varphi(\nabla_Y X) + [(\nabla_Y \varphi)X + \varphi(\nabla_Y X)] \\ &= -(\nabla_X \varphi)Y + (\nabla_Y \varphi)X \end{aligned}$$

$$= 0$$

elde edilir. Tersine $(\nabla^\varphi, \varphi^{-1})$ Codazzi çifti ise (∇, φ) de Codazzi çiftidir.

Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.2: M_{2n} diferensiyellenebilir manifold üzerinde ∇ lineer konneksiyon ve φ para kompleks yapı olsun. $(\nabla^\varphi, \varphi)$ nin Codazzi çifti olması için gerekli ve yeter şart (∇, φ) nin Codazzi çifti olmasıdır.

İspat: (∇, φ) nin Codazzi çifti olsun. $(\nabla^\varphi, \varphi)$ nin Codazzi çifti olması için

$(\nabla_X^\varphi \varphi)Y - (\nabla_Y^\varphi \varphi)X = 0$ olduğunu göstermek gerekir.

$$\begin{aligned} (\nabla_X^\varphi \varphi)Y - (\nabla_Y^\varphi \varphi)X &= (\nabla_X^\varphi \varphi Y) - \varphi(\nabla_X^\varphi Y) - (\nabla_Y^\varphi \varphi X) + \varphi(\nabla_Y^\varphi X) \\ &= \varphi^{-1}(\nabla_X Y) - \varphi(\varphi^{-1}\nabla_X \varphi Y) - \varphi^{-1}(\nabla_Y X) + \varphi(\varphi^{-1}\nabla_Y \varphi X) \\ &= \varphi(\nabla_X Y) - [(\nabla_X \varphi)Y + \varphi\nabla_X Y] - \varphi(\nabla_Y X) + [(\nabla_Y \varphi)X + \varphi\nabla_Y X] \\ &= -(\nabla_X \varphi)Y + (\nabla_Y \varphi)X \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısı ile $(\nabla^\varphi, \varphi)$ nin Codazzi çifti olduğu görülür. Tersine $(\nabla^\varphi, \varphi)$ Codazzi çifti ise (∇, φ) de Codazzi çiftidir.

Böylece ispat tamamlanır.

Tanım 4.2.2: M_{2n} diferensiyellenebilir manifold üzerinde g para Norden metriği ve ∇ lineer konneksiyonu verilmiş olsun. X, Y ve Z vektör alanları olmak üzere;

$$(\nabla_Z g)(X, Y) = (\nabla_X g)(Z, Y) \quad (4.5)$$

şartı g para Norden metriğinin Codazzilik şartı olup (∇, g) ye Codazzi çifti denir.

M_{2n} diferensiyellenebilir manifold üzerinde (∇, g) Codazzi çifti verilmiş olsun. $(0,3)$ tipli $\mathcal{C}$ tensörü

$$\mathcal{C}(X, Y, Z) = (\nabla_Z g)(X, Y) = Zg(X, Y) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) \quad (4.6)$$

şeklinde tanımlanır. Bu tensöre (∇, g) Codazzi çiftinin cubic formu denir. g simetrik olduğundan $\mathcal{C}$ tensöründe simetriktir. Yani

$$\mathcal{C}(X, Y, Z) = \mathcal{C}(Y, X, Z)$$

şeklindedir. Ayrıca g nin ∇ ya göre paralel olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{C} \equiv 0$ olmasıdır.

(4.2) eşitliği (4.6) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(X, Y, Z) &= (\nabla_Z g)(X, Y) = Zg(X, Y) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) \\ &= g(X, (\nabla^* - \nabla)_Z Y) \end{aligned}$$

elde edilir.

Ayrıca

$$\mathcal{C}^*(X, Y, Z) = (\nabla_Z^* g)(X, Y)$$

şeklinde tanımlanır ve

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^*(X, Y, Z) &= (\nabla_Z^* g)(X, Y) = Zg(X, Y) - g(\nabla_Z^* X, Y) - g(X, \nabla_Z^* Y) \\ &= -g(X, (\nabla^* - \nabla)_Z Y) \\ &= -\mathcal{C}(X, Y, Z) \end{aligned}$$

elde edilir.

Eğer (∇, g) Codazzi çifti ise (4.5) eşitliğinden

$$\mathcal{C}(X, Y, Z) = \mathcal{C}(Z, Y, X)$$

yazılır.

Teorem 4.2.3: : (M_{2n}, g) para Norden manifold, ∇ lineer konneksiyon ve ∇^* da g –conjugate konneksiyonu olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- i. (∇, g) Codazzi çiftidir.

- ii. (∇^*, g) Codazzi çiftidir.
- iii. $\mathcal{C}(X, Y, Z) = (\nabla_Z g)(X, Y)$ totally simetriktir.
- iv. $S^\nabla = S^{\nabla^*}$ dir.

İspat: i. $\Rightarrow$ ii. (∇, g) Codazzi çifti olsun.

$$\begin{aligned}
 & (\nabla^*_Z g)(X, Y) - (\nabla^*_X g)(Z, Y) \\
 &= Zg(X, Y) - g(\nabla^*_Z X, Y) - g(X, \nabla^*_Z Y) - Xg(Z, Y) + g(\nabla^*_X Z, Y) + g(Z, \nabla^*_X Y) \\
 &= -g(X, (\nabla^* - \nabla)_Z Y) + g(Z, (\nabla^* - \nabla)_X Y) \\
 &= -\mathcal{C}(X, Y, Z) + \mathcal{C}(Z, Y, X) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

olup (∇^*, g) Codazzi çiftidir.

ii. $\Rightarrow$ iii. (∇^*, g) Codazzi çifti ise $\mathcal{C}^*(X, Y, Z) = \mathcal{C}^*(Z, Y, X)$ olduğundan,
 $\mathcal{C}(X, Y, Z) = \mathcal{C}(Z, Y, X)$ dir.

Yani $\mathcal{C}$ tensörü X ve Z ye göre simetriktir.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}^*(X, Y, Z) &= -\mathcal{C}(X, Y, Z) & (g \text{ nin simetrikliğinden}) \\
 &= -\mathcal{C}(Y, X, Z)
 \end{aligned}$$

dir.

Yani $\mathcal{C}$ tensörü X ve Y ye göre simetriktir.

Son olarak $\mathcal{C}^*(X, Y, Z) = -\mathcal{C}(X, Y, Z)$
 $= -\mathcal{C}(X, Z, Y)$ (g nin simetrikliğinden ve (∇^*, g) nin
 Codazziliğinden)
 yazılır.

Yani $\mathcal{C}$ tensörü Y ve Z ye göre simetriktir.

Dolayısı ile $\mathcal{C}$ totally simetriktir.

iii. $\Rightarrow$ iv. $\mathcal{C}$ totally simetrik ise,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}(X, Y, Z) - \mathcal{C}(X, Z, Y) &= (\nabla_Z g)(X, Y) - (\nabla_Y g)(X, Z) \\
 &= Zg(X, Y) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) \\
 &\quad - Yg(X, Z) - g(\nabla_Y X, Z) - g(X, \nabla_Y Z) \\
 &\Rightarrow g(X, (\nabla^* - \nabla)_Z Y - (\nabla^* - \nabla)_Y Z) = 0 \\
 &\Rightarrow g(X, S^{\nabla^*}(Z, Y) - S^{\nabla}(Z, Y)) = 0 \\
 &\Rightarrow S^{\nabla} = S^{\nabla^*} \text{ dir.}
 \end{aligned}$$

Burada $S^{\nabla^*}(Z, Y) = \nabla_Z^* Y - \nabla_Y^* Z - [Z, Y]$ şeklindedir.

Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.1: (M_{2n}, g) para Norden manifold, ∇ lineer konneksiyon ve ∇^* da g –conjugate konneksiyonu olsun. $\mathcal{C}^*$ nın totally simetrik olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{C}$ nin totally simetrik olmasıdır.

Tanım 4.2.3: M_{2n} diferensiyellenebilir manifold üzerinde G twin metrik ve ∇ lineer konneksiyon verilmiş olsun. X, Y ve Z vektör alanları olmak üzere

$$(\nabla_Z G)(X, Y) = (\nabla_X G)(Z, Y) \quad (4.7)$$

şartı G twin metriğinin Codazzilik şartı olup (∇, G) ye Codazzi çifti denir.

M_{2n} diferensiyellenebilir manifold üzerinde (∇, G) Codazzi çifti verilmiş olsun.

(0.3) tipli $\mathcal{F}$ tensörü

$$\mathcal{F}(X, Y, Z) = (\nabla_Z G)(X, Y) = ZG(X, Y) - G(\nabla_Z X, Y) - G(X, \nabla_Z Y) \quad (4.8)$$

şeklinde tanımlanır. G simetrik olduğundan $\mathcal{F}$ tensöründe simetriktir. Yani

$$\mathcal{F}(X, Y, Z) = \mathcal{F}(Y, X, Z)$$

şeklindedir.

(4.3) eşitiliği (4.8) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(X, Y, Z) &= (\nabla_Z G)(X, Y) = ZG(X, Y) - G(\nabla_Z X, Y) - G(X, \nabla_Z Y) \\ &= G(X, (\nabla^\dagger - \nabla)_Z Y)\end{aligned}$$

elde edilir.

Ayrıca

$$\mathcal{F}^\dagger(X, Y, Z) = (\nabla_Z^\dagger G)(X, Y)$$

şeklinde tanımlanır ve

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^\dagger(X, Y, Z) &= (\nabla_Z^\dagger G)(X, Y) = ZG(X, Y) - G(\nabla_Z^\dagger X, Y) - G(X, \nabla_Z^\dagger Y) \\ &= -G(X, (\nabla^\dagger - \nabla)_Z Y) \\ &= -\mathcal{F}(X, Y, Z)\end{aligned}$$

elde edilir.

Eğer (∇, G) Codazzi çifti ise (4.7) eşitliğinden

$$\mathcal{F}(X, Y, Z) = \mathcal{F}(Z, Y, X)$$

yazılır.

Teorem 4.2.4: $\nabla, (M_{2n}, \varphi, g)$ para Norden manifoldu üzerinde ∇ bir lineer konneksiyon ve G de twin metrik olsun. Eğer (∇, G) Codazzi çifti ise aşağıdaki ifadeler sağlanır:

- i. $(\nabla_{\varphi Z}^* G)(X, Y) = (\nabla_{\varphi X}^* G)(Z, Y)$ dir.
- ii. $S^\nabla = S^{\nabla^*}$ olması için gerek ve yeter şart (∇^*, φ) nin Codazzi çifti olmasıdır.
- iii. $S^\nabla = S^{(\nabla^*)^\varphi}$ dir.

İspat: i. (∇, G) Codazzi çifti ise $(\nabla_Z G)(X, Y) = (\nabla_X G)(Z, Y)$ dir.

Buradan

$$\begin{aligned}
ZG(X, Y) - G(\nabla_Z X, Y) - G(X, \nabla_Z Y) &= XG(Z, Y) - G(\nabla_X Z, Y) - G(Z, \nabla_X Y) \\
Zg(\varphi X, Y) - g(\varphi \nabla_Z X, Y) - g(\varphi X, \nabla_Z Y) &= Xg(\varphi Z, Y) - g(\varphi \nabla_X Z, Y) - g(\varphi Z, \nabla_X Y) \\
Zg(Y, \varphi X) - g(\varphi \nabla_Z X, Y) - g(\nabla_Z Y, \varphi X) &= Xg(Y, \varphi Z) - g(\varphi \nabla_X Z, Y) - g(\nabla_X Y, \varphi Z) \\
g(Y, \nabla_Z^*(\varphi X)) - g(\nabla_Z X, \varphi Y) &= g(Y, \nabla_X^*(\varphi Z)) - g(\nabla_X Z, \varphi Y) \\
-Zg(X, \varphi Y) + g(X, \nabla_Z^*(\varphi Y)) + g(Y, \nabla_Z^*(\varphi X)) \\
&= -Xg(Z, \varphi Y) + g(Z, \nabla_X^*(\varphi Y)) + g(Y, \nabla_X^*(\varphi Z))
\end{aligned}$$

yazılır.

Burada $X = \varphi X$, $Y = \varphi Y$ ve $Z = \varphi Z$ yazılırsa;

$$\begin{aligned}
&- \varphi Zg(\varphi X, Y) + g(\varphi X, \nabla_{\varphi Z}^* Y) + g(\varphi Y, \nabla_{\varphi Z}^* X) \\
&= - \varphi Xg(\varphi Z, Y) + g(\varphi Z, \nabla_{\varphi X}^* Y) + g(\varphi Y, \nabla_{\varphi X}^* Z) \\
&- \varphi ZG(X, Y) + G(X, \nabla_{\varphi Z}^* Y) + G(Y, \nabla_{\varphi Z}^* X) \\
&= - \varphi XG(Z, Y) + G(Z, \nabla_{\varphi X}^* Y) + G(Y, \nabla_{\varphi X}^* Z) \\
&- \varphi ZG(X, Y) + G(\nabla_{\varphi Z}^* X, Y) + G(X, \nabla_{\varphi Z}^* Y) \\
&= - \varphi XG(Z, Y) + G(\nabla_{\varphi X}^* Z, Y) + G(Z, \nabla_{\varphi X}^* Y) \\
&(\nabla_{\varphi Z} G)(X, Y) = (\nabla_{\varphi X} G)(Z, Y)
\end{aligned}$$

elde edilir.

ii. (∇, G) Codazzi çifti ise $(\nabla_Z G)(X, Y) = (\nabla_X G)(Z, Y)$ dir.

Buradan

$$\begin{aligned}
ZG(X, Y) - G(\nabla_Z X, Y) - G(X, \nabla_Z Y) &= XG(Z, Y) - G(\nabla_X Z, Y) - G(Z, \nabla_X Y) \\
Zg(\varphi X, Y) - g(\varphi \nabla_Z X, Y) - g(\varphi X, \nabla_Z Y) &= Xg(\varphi Z, Y) - g(\varphi \nabla_X Z, Y) - g(\varphi Z, \nabla_X Y) \\
Zg(Y, \varphi X) - g(\nabla_Z Y, \varphi X) - g(\varphi \nabla_Z X, Y) &= Xg(Y, \varphi Z) - g(\nabla_X Y, \varphi Z) - g(\varphi \nabla_X Z, Y) \\
g(Y, \nabla_Z^*(\varphi X)) - g(\varphi \nabla_Z X, Y) &= g(Y, \nabla_X^*(\varphi Z)) - g(\varphi \nabla_X Z, Y) \\
g(\nabla_Z^*(\varphi X), Y) - g(\varphi \nabla_Z X, Y) &= g(\nabla_X^*(\varphi Z), Y) - g(\varphi \nabla_X Z, Y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G(\varphi \nabla_Z^*(\varphi X), Y) - G(\nabla_Z X, Y) &= G(\varphi \nabla_X^*(\varphi Z), Y) - G(\nabla_X Z, Y) \\
 G(\varphi \{\nabla_Z^*(\varphi X) - \nabla_X^*(\varphi Z)\}, Y) &= G(\nabla_Z X - \nabla_X Z, Y) \quad (*) \\
 \varphi \{\nabla_Z^*(\varphi X) - \nabla_X^*(\varphi Z)\} &= \nabla_Z X - \nabla_X Z \\
 \varphi \{(\nabla_Z^* \varphi)X + \varphi \nabla_Z^* X - (\nabla_X^* \varphi)Z - \varphi \nabla_X^* Z\} &= \nabla_Z X - \nabla_X Z \\
 \varphi \{(\nabla_Z^* \varphi)X - (\nabla_X^* \varphi)Z\} + (\nabla_Z^* X - \nabla_X^* Z - [Z, X]) &= \nabla_Z X - \nabla_X Z - [Z, X] \\
 \varphi \{(\nabla_Z^* \varphi)X - (\nabla_X^* \varphi)Z\} + S^{\nabla^*}(Z, X) &= S^{\nabla}(Z, X)
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Bu son eşitlikten $S^{\nabla^*} = S^{\nabla}$ olması için gerek ve yeter şartın $(\nabla_Z^* \varphi)X = (\nabla_X^* \varphi)Z$ olması gerektiği yani (∇^*, φ) nin Codazzi çifti olması gerektiği görülür.

iii. (*) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
 G((\nabla^*)^{\varphi}_Z X - (\nabla^*)^{\varphi}_X Z) &= G(\nabla_Z X - \nabla_X Z, Y) \\
 G((\nabla^*)^{\varphi}_Z X - (\nabla^*)^{\varphi}_X Z - [Z, X]) &= G(\nabla_Z X - \nabla_X Z, Y - [Z, X], Y) \\
 G(S^{(\nabla^*)^{\varphi}}(Z, X)) &= G(S^{\nabla}(Z, X), Y)
 \end{aligned}$$

olup $S^{(\nabla^*)^{\varphi}} = S^{\nabla}$ olduğu görülür.

Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.5: $\nabla, (M_{2n}, \varphi, g)$ para Norden manifoldu üzerinde ∇ bir lineer konneksiyon ve G de twin metrik olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- i. (∇, G) Codazzi çiftidir.
- ii. $(\nabla^{\dagger}, G)$ Codazzi çiftidir.
- iii. $\mathcal{F}(X, Y, Z) = (\nabla_Z G)(X, Y)$ totally simetriktir.
- iv. $S^{\nabla} = S^{\nabla^{\dagger}}$ dir.

İspat: i. $\Rightarrow$ ii. (∇, G) Codazzi çifti olsun.

$$\begin{aligned}
 & (\nabla_Z^\dagger G)(X, Y) - (\nabla_X^\dagger G)(Z, Y) \\
 &= ZG(X, Y) - G(\nabla_Z^\dagger X, Y) - G(X, \nabla_Z^\dagger Y) - XG(Z, Y) + G(\nabla_X^\dagger Z, Y) + G(Z, \nabla_X^\dagger Y) \\
 &= -G(X, (\nabla^\dagger - \nabla)_Z Y) + G(Z, (\nabla^\dagger - \nabla)_X Y) \\
 &= -\mathcal{F}(X, Y, Z) + \mathcal{F}(Z, Y, X) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

olup $(\nabla^\dagger, G)$ Codazzi çiftidir.

ii. $\Rightarrow$ iii. $(\nabla^\dagger, G)$ Codazzi çifti ise $\mathcal{F}^\dagger(X, Y, Z) = \mathcal{F}^\dagger(Z, Y, X)$ olduğundan,

$\mathcal{F}(X, Y, Z) = \mathcal{F}(Z, Y, X)$ dir.

Yani $\mathcal{F}$ tensörü X ve Z ye göre simetriktr.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}^\dagger(X, Y, Z) &= -\mathcal{F}(X, Y, Z) & (G \text{ simetrik olduğundan}) \\
 &= -\mathcal{F}(Y, X, Z)
 \end{aligned}$$

dir.

Yani $\mathcal{F}$ tensörü X ve Y ye göre simetriktr.

Son olarak $\mathcal{F}^\dagger(X, Y, Z) = -\mathcal{F}(X, Y, Z)$

$= -\mathcal{F}(X, Z, Y)$ (G nin simetrikliğinden ve $(\nabla^\dagger, G)$ nin Codazziliğinden)

yazılır.

Yani $\mathcal{F}$ tensörü Y ve Z ye göre simetriktr.

Dolayısı ile $\mathcal{F}$ totally simetriktr.

iii. $\Rightarrow$ iv. $\mathcal{F}$ totally simetrik ise,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(X, Y, Z) - \mathcal{F}(X, Z, Y) &= (\nabla_Z G)(X, Y) - (\nabla_Y G)(X, Z) \\
 &= ZG(X, Y) - G(\nabla_Z X, Y) - G(X, \nabla_Z Y) \\
 &\quad - YG(X, Z) - G(\nabla_Y X, Z) - G(X, \nabla_Y Z)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow G(X, (\nabla^\dagger - \nabla)_Z Y - (\nabla^\dagger - \nabla)_Y Z) = 0$$

$$\Rightarrow G(X, S^{\nabla^\dagger}(Z, Y) - S^\nabla(Z, Y)) = 0$$

$$\Rightarrow S^\nabla = S^{\nabla^\dagger} \text{ dir.}$$

Burada $S^{\nabla^\dagger}(Z, Y) = \nabla_Z^\dagger Y - \nabla_Y^\dagger Z - [Z, Y]$ şeklindedir.

Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.2: (M_{2n}, g) para Norden manifold, ∇ lineer konneksiyon ve $\nabla^\dagger$ da G –conjugate konneksiyonu olsun. $\mathcal{F}^\dagger$ nin totally simetrik olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{F}$ nin totally simetrik olmasıdır.

Teorem 4.2.6: $\nabla, (M_{2n}, \varphi, g)$ para Norden manifoldu üzerinde ∇ bir lineer konneksiyon, G twin metrik, $\nabla^\dagger$, G –conjugate konneksiyon ve (∇, G) Codazzi çifti olsun. Bu durumda $(\nabla^\dagger, \varphi)$ nin Codazzi çifti olması için gerek ve yeter şart (∇, g) nin de Codazzi çifti olmasıdır.

İspat:

$$\begin{aligned} G((\nabla_Z^\dagger \varphi)X - (\nabla_X^\dagger \varphi)Z, Y) &= G(\nabla_Z^\dagger(\varphi X) - \varphi \nabla_Z^\dagger X, Y) - G(\nabla_X^\dagger(\varphi Z) - \varphi \nabla_X^\dagger Z, Y) \\ &= G(Y, \nabla_Z^\dagger(\varphi X)) - G(\varphi \nabla_Z^\dagger X, Y) - G(Y, \nabla_X^\dagger(\varphi Z)) + G(\varphi \nabla_X^\dagger Z, Y) \\ &= ZG(Y, \varphi X) - G(\nabla_Z Y, \varphi X) - G(\varphi \nabla_Z^\dagger X, Y) \\ &\quad - XG(Y, \varphi Z) + G(\nabla_X Y, \varphi Z) + G(\varphi \nabla_X^\dagger Z, Y) \\ &= ZG(\varphi X, Y) - G(\varphi X, \nabla_Z Y) - XG(\varphi Z, Y) + G(\varphi Z, \nabla_X Y) \\ &\quad + G(\varphi(\nabla_X^\dagger Z - \nabla_Z^\dagger X - [X, Z]) + \varphi[X, Z], Y) \\ &= ZG(\varphi X, Y) - G(\varphi X, \nabla_Z Y) - XG(\varphi Z, Y) + G(\varphi Z, \nabla_X Y) \\ &\quad + G(\varphi(\nabla_X Z - \nabla_Z X - [X, Z]) + \varphi[X, Z], Y) \\ &= Zg(X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) - Xg(Z, Y) + g(Z, \nabla_X Y) + g(\nabla_X Z, Y) - g(\nabla_Z X, Y) \\ &= (\nabla_Z g)(X, Y) - (\nabla_X g)(Z, Y) \end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece ispat tamamlanır.

4.3. Eğrilik Özellikleri

(M_{2n}, g) pseudo-Riemannian manifoldu verilmiş olsun. Bu manifoldda ∇ lineer konneksiyonun R eğrilik tensörü X, Y, Z vektör alanları olmak üzere

$$R(X, Y, Z, T) = g(R(X, Y)Z, T)$$

şeklinde $(0,4)$ tipli tensör alanı şeklinde de verilebilir.

∇, ∇^* ve ∇^φ konneksiyonlarının eğrilik tensörleri sırası ile R, R^* ve R^φ olmak üzere bu eğrilikler arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 4.3.1: (M_{2n}, φ, g, G) hemen hemen para Norden manifold olsun. ∇^* ve ∇^φ sırasıyla g –conjugate ve φ –conjugate konneksiyonlar olsun. R, R^* ve R^φ sırası ile ∇, ∇^* ve ∇^φ konneksiyonlarının eğrilik tensörleri olmak üzere, bu eğrilikler arasında

$$R(X, Y, \varphi Z, T) = -R^*(X, Y, T, \varphi Z) = R^\varphi(X, Y, Z, \varphi T)$$

bağıntısı vardır. Burada X, Y, Z vektör alanlarıdır.

İspat: $X, Y, Z \in \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{2n}} \right\}$ olmak üzere Lie parantezi kullanılarak

$$[X, Y] = [Y, T] = [T, Z] = 0$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned} XYG(Z, T) &= X(YG(Z, T)) = X(Yg(\varphi Z, T)) \\ &= X(g(\nabla_Y \varphi Z, T)) + X(g(\varphi Z, \nabla_Y^* T)) \\ &= g(\nabla_X \nabla_Y \varphi Z, T) + g(\nabla_Y \varphi Z, \nabla_X^* T) \\ &\quad + g(\nabla_X \varphi Z, \nabla_Y^* T) + g(\varphi Z, \nabla_X^* \nabla_Y^* T) \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
 YXG(Z, T) &= Y(XG(Z, T)) = Y(Xg(\varphi Z, T)) \\
 &= Y(g(\nabla_X \varphi Z, T)) + Y(g(\varphi Z, \nabla_X^* T)) \\
 &= g(\nabla_Y \nabla_X \varphi Z, T) + g(\nabla_X \varphi Z, \nabla_Y^* T) \\
 &\quad + g(\nabla_Y \varphi Z, \nabla_X^* T) + g(\varphi Z, \nabla_Y^* \nabla_X^* T)
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

eşitlikleri elde edilir. (4.9) ve (4.10) eşitlikleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$\begin{aligned}
 [X, Y]G(Z, T) &= XYG(Z, T) - YXG(Z, T) = 0 \\
 &\Rightarrow g(\nabla_X \nabla_Y \varphi Z - \nabla_Y \nabla_X \varphi Z, T) + g(\varphi Z, \nabla_X^* \nabla_Y^* T - \nabla_Y^* \nabla_X^* T) = 0 \\
 &\Rightarrow g(R(X, Y)\varphi Z, T) + g(R^*(X, Y)T, \varphi Z) = 0 \\
 &\Rightarrow R(X, Y, \varphi Z, T) + R^*(X, Y, T, \varphi Z) = 0
 \end{aligned}$$

olup

$$R(X, Y, \varphi Z, T) = -R^*(X, Y, T, \varphi Z) \tag{4.11}$$

elde edilir.

$$\text{Benzer olarak } [X, Y]G(Z, T) = XYG(Z, T) - YXG(Z, T) = 0$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow g(\nabla_X \nabla_Y \varphi Z - \nabla_Y \nabla_X \varphi Z, T) + g(\varphi Z, \nabla_X^* \nabla_Y^* T - \nabla_Y^* \nabla_X^* T) = 0 \\
 &\Rightarrow G(\varphi^{-1} \nabla_X \nabla_Y \varphi Z - \varphi^{-1} \nabla_Y \nabla_X \varphi Z, T) + G(Z, \nabla_X^* \nabla_Y^* T - \nabla_Y^* \nabla_X^* T) = 0 \\
 &\Rightarrow G(\varphi^{-1} \nabla_X \varphi(\varphi^{-1} \nabla_Y \varphi Z) - \varphi^{-1} \nabla_Y \varphi(\varphi^{-1} \nabla_X \varphi Z), T) + G(Z, \nabla_X^* \nabla_Y^* T - \nabla_Y^* \nabla_X^* T) = 0 \\
 &\Rightarrow G(\varphi^{-1} \nabla_X \varphi(\nabla_Y^\varphi Z) - \varphi^{-1} \nabla_Y \varphi(\nabla_X^\varphi Z), T) + G(Z, \nabla_X^* \nabla_Y^* T - \nabla_Y^* \nabla_X^* T) = 0 \\
 &\Rightarrow G(\nabla_X^\varphi \nabla_Y^\varphi Z - \nabla_Y^\varphi \nabla_X^\varphi Z, T) + G(Z, \nabla_X^* \nabla_Y^* T - \nabla_Y^* \nabla_X^* T) = 0 \\
 &\Rightarrow g(\varphi(\nabla_X^\varphi \nabla_Y^\varphi Z - \nabla_Y^\varphi \nabla_X^\varphi Z), T) + g(\varphi Z, \nabla_X^* \nabla_Y^* T - \nabla_Y^* \nabla_X^* T) = 0 \\
 &\Rightarrow g((\nabla_X^\varphi \nabla_Y^\varphi Z - \nabla_Y^\varphi \nabla_X^\varphi Z), \varphi T) + g(\nabla_X^* \nabla_Y^* T - \nabla_Y^* \nabla_X^* T, \varphi Z) = 0 \\
 &\Rightarrow g(R^\varphi(X, Y)Z, \varphi T) + g(R^*(X, Y)T, \varphi Z) = 0 \\
 &\Rightarrow R^\varphi(X, Y, Z, \varphi T) + R^*(X, Y, T, \varphi Z) = 0
 \end{aligned}$$

olup

$$R^\varphi(X, Y, Z, \varphi T) = -R^*(X, Y, T, \varphi Z) \quad (4.12)$$

eşitliği elde edilir.

(4.11) ve (4.12) eşitliklerinden

$$R(X, Y, \varphi Z, T) = -R^*(X, Y, T, \varphi Z) = R^\varphi(X, Y, Z, \varphi T)$$

elde edilir.

Böylece ispat tamamlanır.

4.4. Tachibana Operatörü ve Nijenhuis Tensörü

(M_{2n}, g) hemen hemen para Norden manifoldu verilmiş olsun. Pür tensörlere uygulanan Φ Tachibana operatörü (Φ –operatör) g para Norden metriğine uygulanırsa

$$(\Phi_\varphi g)(X, Y, Z) = (L_{\varphi X} g - L_X(g \circ \varphi))(Y, Z) \quad (4.13)$$

yazılır (Tachibana 1960). Burada L , Lie türevi ve X, Y, Z vektör alanlarıdır.

(M_{2n}, g) hemen hemen para Norden manifoldu üzerinde tanımlanan G twin metriği de Norden metrik olup, bu metriğe Φ Tachibana operatörü uygulanırsa, L , Lie türevi ve X, Y, Z vektör alanları olmak üzere;

$$\begin{aligned} (\Phi_\varphi G)(X, Y, Z) &= (L_{\varphi X} G - L_X(G \circ \varphi))(Y, Z) \\ &= (\Phi_\varphi g)(X, \varphi Y, Z) + g(N_\varphi(X, Y), Z) \end{aligned}$$

(4.14)

yazılır (Salimov 2010).

Buradan aşağıdaki teorem yazılır.

Teorem 4.4.1: (M_{2n}, φ, g) hemen hemen para Norden manifoldu üzerinde ∇ burulmasız bir lineer konneksiyon ve G twin metrik olsun. Eğer (∇, φ) Codazzi çifti ise bu durumda

$$(\Phi_\varphi G)(X, Y, Z) = (\Phi_\varphi g)(X, \varphi Y, Z) = (\nabla_{\varphi X} G)(Y, Z) - (\nabla_X g)(\varphi Y, \varphi Z)$$

dir.

İspat: ∇ burulmasız bir lineer konneksiyon ise $\nabla_X Z - \nabla_Z X = [X, Z]$ dir. (4.13) eşitliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} (\Phi_\varphi g)(X, \varphi Y, Z) &= (L_{\varphi X} g - L_X(g \circ \varphi))(\varphi Y, Z) \\ &= (L_{\varphi X} g)(\varphi Y, Z) - (L_X g \circ \varphi)(\varphi Y, Z) \\ &= \varphi X g(\varphi Y, Z) - g(L_{\varphi X} \varphi Y, Z) - g(\varphi Y, L_{\varphi X} Z) - X g \circ \varphi(\varphi Y, Z) \\ &\quad + g \circ \varphi(L_{\varphi X} \varphi Y, Z) + g \circ \varphi(\varphi Y, L_X Z) \\ &= \varphi X g(\varphi Y, Z) - g([\varphi X, \varphi Y], Z) - g(\varphi Y, [\varphi X, Z]) - X g \circ \varphi(\varphi Y, Z) \\ &\quad + g \circ \varphi([X, \varphi Y], Z) + g \circ \varphi(\varphi Y, [X, Z]) \\ &= \varphi X g(\varphi Y, Z) - g(\nabla_{\varphi X} \varphi Y - \nabla_{\varphi Y} \varphi X, Z) - g(\varphi Y, \nabla_{\varphi X} Z - \nabla_Z \varphi X) \\ &\quad - X g \circ \varphi(\varphi Y, Z) + g \circ \varphi(\nabla_X \varphi Y - \nabla_{\varphi Y} X, Z) \\ &\quad + g \circ \varphi(\varphi Y, \nabla_X Z - \nabla_Z X) \\ &= \varphi X g(\varphi Y, Z) - g((\nabla_{\varphi X} \varphi)Y + \varphi \nabla_{\varphi X} Y - (\nabla_{\varphi Y} \varphi)X - \varphi \nabla_{\varphi Y} X, Z) \\ &\quad - g(\varphi Y, \nabla_{\varphi X} Z - (\nabla_Z \varphi)X - \varphi \nabla_Z X) - X g \circ \varphi(\varphi Y, Z) \\ &\quad + g \circ \varphi((\nabla_X \varphi)Y + \varphi \nabla_X Y - \nabla_{\varphi Y} X, Z) + g \circ \varphi(\varphi Y, \nabla_X Z - \nabla_Z X) \\ &= \varphi X g(\varphi Y, Z) - g((\nabla_{\varphi X} \varphi)Y + \varphi \nabla_{\varphi X} Y - (\nabla_{\varphi Y} \varphi)X - \varphi \nabla_{\varphi Y} X, Z) \\ &\quad - g(\varphi Y, \nabla_{\varphi X} Z - (\nabla_Z \varphi)X - \varphi \nabla_Z X) - X g(\varphi Y, \varphi Z) \\ &\quad + g((\nabla_X \varphi)Y + \varphi \nabla_X Y - \nabla_{\varphi Y} X, \varphi Z) + g(\varphi Y, \varphi(\nabla_X Z - \nabla_Z X)) \\ &= \varphi X g(\varphi Y, Z) - g((\nabla_{\varphi X} \varphi)Y, Z) - g(\varphi \nabla_{\varphi X} Y, Z) \\ &\quad + g((\nabla_{\varphi Y} \varphi)X, Z) + g(\varphi \nabla_{\varphi Y} X, Z) - g(\varphi Y, \nabla_{\varphi X} Z) \\ &\quad - X g(\varphi Y, \varphi Z) + g(\varphi Y, (\nabla_Z \varphi)X) + g(\varphi Y, \varphi \nabla_Z X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +g((\nabla_X \varphi)Y, \varphi Z) + g(\varphi \nabla_X Y, \varphi Z) - g(\nabla_{\varphi Y} X, \varphi Z) \\
& +g(\varphi Y, \varphi \nabla_X Z) - g(\varphi Y, \varphi \nabla_Z X) \\
& = \varphi X g(\varphi Y, Z) - g((\nabla_{\varphi X} \varphi)Y, Z) - g(\varphi \nabla_{\varphi X} Y, Z) \\
& +g((\nabla_{\varphi Y} \varphi)X, Z) + g(\varphi \nabla_{\varphi Y} X, Z) - g(\varphi Y, \nabla_{\varphi X} Z) \\
& +g(\varphi Y, (\nabla_Z \varphi)X) + g(\varphi Y, \varphi \nabla_Z X) - Xg(\varphi Y, \varphi Z) \\
& -g(\varphi \nabla_{\varphi Y} X, Z) + g((\nabla_X \varphi)Y, \varphi Z) + g(\varphi \nabla_X Y, \varphi Z) \\
& +g(\varphi Y, \varphi \nabla_X Z) - g(\varphi Y, \varphi \nabla_Z X)
\end{aligned}$$

yazılır. Son eşitlikte g nin pürlüğü ve (∇, φ) nin Codazziliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& = \varphi X g(\varphi Y, Z) - g(\varphi \nabla_{\varphi X} Y, Z) - g(\varphi Y, \nabla_{\varphi X} Z) + g(\varphi Y, (\nabla_Z \varphi)X) \\
& -Xg(\varphi Y, \varphi Z) + g((\nabla_X \varphi)Y, \varphi Z) + g(\varphi \nabla_X Y, \varphi Z) + g(\varphi Y, \varphi \nabla_X Z) \\
& = \varphi X g(\varphi Y, Z) - g(\varphi \nabla_{\varphi X} Y, Z) - g(\varphi Y, \nabla_{\varphi X} Z) + g(\varphi Y, (\nabla_X \varphi)Z) \\
& -Xg(\varphi Y, \varphi Z) + g((\nabla_X \varphi)Y, \varphi Z) + g(\varphi \nabla_X Y, \varphi Z) + g(\varphi Y, \varphi \nabla_X Z) \\
& = \varphi X G(Y, Z) - G(\nabla_{\varphi X} Y, Z) - G(Y, \nabla_{\varphi X} Z) \\
& -Xg(\varphi Y, \varphi Z) + g(\nabla_X \varphi Y, \varphi Z) + g(\varphi Y, \nabla_X \varphi Z) \\
& = (\nabla_{\varphi X} G)(Y, Z) - (\nabla_X g)(\varphi Y, \varphi Z)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

elde edilir.

(M_{2n}, φ, g) hemen hemen para Norden manifoldu üzerinde ∇ burulmasız lineer konneksiyonu olmak üzere Nijenhuis tensörü;

$$\begin{aligned}
N_\varphi(X, Y) & = [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] + \varphi^2[X, Y] \\
& = \nabla_{\varphi X} \varphi Y - \nabla_{\varphi Y} \varphi X - \varphi(\nabla_X \varphi Y - \nabla_{\varphi Y} X) - \varphi(\nabla_{\varphi X} Y - \nabla_Y \varphi X) + (\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\
& = (\nabla_{\varphi X} \varphi)Y + \varphi \nabla_{\varphi X} Y - (\nabla_{\varphi Y} \varphi)X - \varphi \nabla_{\varphi Y} X - \varphi((\nabla_X \varphi)Y + \varphi \nabla_X Y - \nabla_{\varphi Y} X) \\
& -\varphi(\nabla_{\varphi X} Y - (\nabla_Y \varphi)X - \varphi \nabla_Y X) + (\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\
& = (\nabla_{\varphi X} \varphi)Y + \varphi \nabla_{\varphi X} Y - (\nabla_{\varphi Y} \varphi)X - \varphi \nabla_{\varphi Y} X - \varphi(\nabla_X \varphi)Y - \nabla_X Y + \varphi \nabla_{\varphi Y} X
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\varphi \nabla_{\varphi X} Y + \varphi (\nabla_Y \varphi) X + \nabla_Y X + \nabla_X Y - \nabla_Y X \\
 & = (\nabla_{\varphi X} \varphi) Y - (\nabla_{\varphi Y} \varphi) X - \varphi ((\nabla_X \varphi) Y - (\nabla_Y \varphi) X) \\
 & = \varphi (\nabla_{\varphi X} \varphi) Y - \varphi (\nabla_{\varphi Y} \varphi) X - \varphi ((\nabla_X \varphi) Y - (\nabla_Y \varphi) X) \\
 & = \varphi \{ (\nabla_{\varphi X} \varphi) Y - (\nabla_{\varphi Y} \varphi) X \} - \varphi \{ (\nabla_X \varphi) Y - (\nabla_Y \varphi) X \}
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Eğer (∇, φ) Codazzi çifti ise $N_\varphi(X, Y) = 0$ olur. (4.14) ve (4.15) eşitliklerinden

$$(\Phi_\varphi G)(X, Y, Z) = (\Phi_\varphi g)(X, \varphi Y, Z) = (\nabla_{\varphi X} G)(Y, Z) - (\nabla_X g)(\varphi Y, \varphi Z)$$

bulunur.

Böylece ispat tamamlanır.

M_{2n} manifoldunda ∇, g nin Levi-Civita konneksiyonu, g para Norden metrik ve φ de $\nabla \varphi = 0$ şartını sağlayan hemen hemen para kompleks yapı olmak üzere (M_{2n}, φ, g) üçlününün para Kahler-Norden manifold olduğu daha önce ifade edilmişti. Ayrıca g para Norden metriği olmak üzere bir hemen hemen para kompleks manifoldda $\Phi_\varphi g = 0$ şartının $\nabla \varphi = 0$ şartına denk olduğu da Teorem 3.17.1 de verilmiştir. Yani g para Norden metriği holomorfik ise (M_{2n}, φ, g) manifolduna para Kahler-Norden manifold denir. Bu bilgilerden hareketle aşağıdaki teorem yazılır.

Teorem 4.4.2: (M_{2n}, φ, g) hemen hemen para Norden manifoldu üzerinde ∇ burulmasız bir lineer konneksiyon, G twin metrik ve (∇, φ) Codazzi çifti olsun. Bu durumda (M_{2n}, φ, g) manifoldunun para anti-Kahler manifold olması için gerek ve yeter şart

$$(\nabla_{\varphi X} G)(Y, Z) = (\nabla_X g)(\varphi Y, \varphi Z)$$

olmasıdır.

İspat: Verilen şartlar dahilinde Teorem 4.4.1 den

$$(\Phi_\varphi G)(X, Y, Z) = (\Phi_\varphi g)(X, \varphi Y, Z) = (\nabla_{\varphi X} G)(Y, Z) - (\nabla_X g)(\varphi Y, \varphi Z)$$

olduğu bilinmektedir. Eğer (M_{2n}, φ, g) manifoldu para anti-Kahler manifold ise

$$\Phi_{\varphi}g = 0 \text{ olacağından}$$

$$(\nabla_{\varphi X}G)(Y, Z) = (\nabla_X g)(\varphi Y, \varphi Z)$$

olur.

Böylece ispat tamamlanır.

4.5. φ –İnvaryant Lineer Konneksiyon

(M_{2n}, g) pseudo Rieman manifoldu üzerinde ∇ lineer konneksiyonu verilmiş olsun. ∇^* ve $\nabla^\dagger$ sırasıyla g –conjugate ve G –conjugate konneksiyonlar olmak üzere konneksiyonların φ –invaryantlığı ile ilgili özellikler aşağıdaki teoremlerde verilmiştir.

Teorem 4.5.1: (M_{2n}, φ, g, G) hemen hemen para Norden manifold olsun. ∇^* ve $\nabla^\dagger$ sırasıyla g –conjugate ve G –conjugate konneksiyonlar olsun. Bu durumda

- i. ∇ nın φ –invaryant olması için gerek ve yeter şart ∇^* nın da φ –invaryant olmasıdır.
- ii. ∇ nın φ –invaryant olması için gerek ve yeter şart $\nabla^\dagger$ nın da φ –invaryant olmasıdır.

İspat:

$$\begin{aligned}
 \text{i. } G(\nabla_X^* \varphi Y - \varphi \nabla_X^* Y, Z) &= G(\nabla_X^* \varphi Y, Z) - G(\varphi \nabla_X^* Y, Z) \\
 &= g(\nabla_X^* \varphi Y, \varphi Z) - g(\varphi \nabla_X^* Y, \varphi Z) \\
 &= g(\varphi Z, \nabla_X^* \varphi Y) - g(Z, \nabla_X^* Y) \\
 &= Xg(\varphi Z, \varphi Y) - g(\nabla_X \varphi Z, \varphi Y) - Xg(Z, Y) + g(\nabla_X Z, Y) \\
 &= Xg(Z, Y) - g(\varphi Y, \nabla_X \varphi Z) - Xg(Z, Y) + g(Y, \nabla_X Z) \\
 &= -g(\varphi Y, \nabla_X \varphi Z) + g(\varphi Y, \varphi \nabla_X Z) \\
 &= -G(Y, \nabla_X \varphi Z) + G(Y, \varphi \nabla_X Z) \\
 &= G(\varphi \nabla_X Z - \nabla_X \varphi Z, Y)
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan $\nabla_X^* \varphi Y = \varphi \nabla_X^* Y$ olması için gerek ve yeter şartın $\varphi \nabla_X Z = \nabla_X \varphi Z$ olması gerektiği görülür.

$$\begin{aligned}
 \text{ii. } G(\nabla_X^+ \varphi Y - \varphi \nabla_X^+ Y, Z) &= G(Z, \nabla_X^+ \varphi Y) - G(\varphi Z, \nabla_X^+ Y) \\
 &= XG(Z, \varphi Y) - G(\nabla_X Z, \varphi Y) - XG(\varphi Z, Y) + G(\nabla_X \varphi Z, Y) \\
 &= -G(\nabla_X Z, \varphi Y) + G(\nabla_X \varphi Z, Y) \\
 &= -G(\varphi \nabla_X Z, Y) + G(\nabla_X \varphi Z, Y) \\
 &= G(\nabla_X \varphi Z - \varphi \nabla_X Z, Y)
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan $\nabla_X^+ \varphi Y = \varphi \nabla_X^+ Y$ olması için gerek ve yeter şartın $\nabla_X \varphi Z = \varphi \nabla_X Z$ olması gerektiği görülür.

Teorem 4.5.2: (M_{2n}, φ, g, G) hemen hemen para Norden manifold olsun. ∇ , φ –invariant lineer konneksiyon, ∇^* ve ∇^+ sırasıyla g –conjugate ve G –conjugate konneksiyonlar olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

- i. ∇^* ve ∇^+ çakışır.
- ii. (∇, G) nin Codazzi çifti olması için gerek ve yeter şart (∇, g) nin Codazzi çifti olmasıdır.

İspat:

$$\begin{aligned}
 \text{i. } ZG(X, Y) - G(\nabla_Z X, Y) &= G(X, \nabla_Z^+ Y) \\
 Zg(\varphi X, Y) - g(\varphi \nabla_Z X, Y) &= g(\varphi X, \nabla_Z^+ Y) \\
 Zg(\varphi X, Y) - g(\nabla_Z \varphi X, Y) &= g(\varphi X, \nabla_Z^+ Y) \\
 g(\varphi X, \nabla_Z^* Y) &= g(\varphi X, \nabla_Z^+ Y)
 \end{aligned}$$

olup

$$g(\varphi X, \nabla_Z^* Y) = g(\varphi X, \nabla_Z^+ Y) \Leftrightarrow \nabla^* = \nabla^+$$

olur.

$$\text{ii.} \quad (\nabla_Z G)(X, Y) = (\nabla_X G)(Z, Y)$$

$$ZG(X, Y) - G(\nabla_Z X, Y) - G(X, \nabla_Z Y) = XG(Z, Y) - G(\nabla_X Z, Y) - G(Z, \nabla_X Y)$$

$$Zg(\varphi X, Y) - g(\varphi \nabla_Z X, Y) - g(\varphi X, \nabla_Z Y) = Xg(\varphi Z, Y) - g(\varphi \nabla_X Z, Y) - g(\varphi Z, \nabla_X Y)$$

$$Zg(X, \varphi Y) - g(\nabla_Z X, \varphi Y) - g(X, \nabla_Z \varphi Y) = Xg(Z, \varphi Y) - g(\nabla_X Z, \varphi Y) - g(Z, \nabla_X \varphi Y)$$

$$(\nabla_Z g)(X, \varphi Y) = (\nabla_X g)(Z, \varphi Y)$$

elde edilir.

Böylece ispat tamamlanır.

4.6. İstatistiksel Manifold

(M_{2n}, φ, g) hemen hemen para Norden manifoldu ve bu manifold üzerinde ∇ burulmasız lineer konneksiyonu verilsin. (∇, φ) bir Codazzi çifti ise bu yapıya istatistiksel yapı, manifolda da istatistiksel manifold denir. Buradan hareketle aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.6.1: (M_{2n}, φ, g, G) hemen hemen para Norden manifold, ∇, φ –invariant, burulmasız lineer konneksiyon, ∇^* ve $\nabla^\dagger$ de sırasıyla g –conjugate ve G –conjugate konneksiyonlar olsun. Eğer (∇, G) bir istatistiksel yapı ise bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır:

i. (∇, g) bir istatistiksel yapıdır.

ii. $(\nabla^\dagger, g)$ bir istatistiksel yapıdır.

iii. (∇^*, g) bir istatistiksel yapıdır.

Tersine i. ii. ve iii. sağlanırsa (∇, G) bir istatistiksel yapıdır.

İspat:

i. Verilen şartlar altında (∇, g) nin bir istatistiksel yapı olduğu Teorem 4.5.2. den açıkça görülür.

- ii. $(\nabla^\dagger, g)$ bir istatistiksel yapı olduğunu göstermek için verilen şartlar dahilinde $(\nabla^\dagger, g)$ nin bir Codazzi çifti olduğunu göstermek gerekir.

$$\begin{aligned}
& (\nabla_Z^\dagger g)(X, Y) - (\nabla_X^\dagger g)(Z, Y) \\
&= Zg(X, Y) - g(\nabla_Z^\dagger X, Y) - g(X, \nabla_Z^\dagger Y) - Xg(Z, Y) + g(\nabla_X^\dagger Z, Y) + g(Z, \nabla_X^\dagger Y) \\
&= -g(X, \nabla_Z^\dagger Y - \nabla_Z Y) + g(Z, \nabla_X^\dagger Y - \nabla_X Y) \\
&= -g(\varphi X, \varphi(\nabla_Z^\dagger Y - \nabla_Z Y)) + g(\varphi Z, \varphi(\nabla_X^\dagger Y - \nabla_X Y)) \\
&= -G(X, (\nabla^\dagger - \nabla)_Z \varphi Y) + G(Z, (\nabla^\dagger - \nabla)_X \varphi Y) \\
&= -\mathcal{F}(X, \varphi Y, Z) + \mathcal{F}(Z, \varphi Y, X) \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

- iii. (∇^*, g) bir istatistiksel yapı olduğunu göstermek için verilen şartlar dahilinde (∇^*, g) nin bir Codazzi çifti olduğunu göstermek gerekir.

$$\begin{aligned}
& (\nabla_Z^* g)(X, Y) - (\nabla_X^* g)(Z, Y) \\
&= Zg(X, Y) - g(\nabla_Z^* X, Y) - g(X, \nabla_Z^* Y) - Xg(Z, Y) + g(\nabla_X^* Z, Y) + g(Z, \nabla_X^* Y) \\
&= -g(X, (\nabla^* - \nabla)_Z Y) + g(Z, (\nabla^* - \nabla)_X Y) \\
&= -\mathcal{C}(X, Y, Z) + \mathcal{C}(Z, Y, X) \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.6.1: : (M_{2n}, φ, g, G) hemen hemen para Norden manifold, ∇, φ –invariant, burulmasız lineer konneksiyon, ∇^* de g –conjugate konneksiyon olsun. Bu durumda (∇, G) nin istatistiksel yapı olması için gerek ve yeter şart (∇^*, G) nin de istatistiksel yapı olmasıdır.

İspat: (∇^*, G) nin istatistiksel yapı olması için $(\nabla_Z^* G)(X, Y) = (\nabla_X^* G)(Z, Y)$ olmalıdır.

$$\begin{aligned}
 & (\nabla_Z^* G)(X, Y) - (\nabla_X^* G)(Z, Y) \\
 &= ZG(X, Y) - G(\nabla_Z^* X, Y) - G(X, \nabla_Z^* Y) - XG(Z, Y) + G(\nabla_X^* Z, Y) + G(Z, \nabla_X^* Y) \\
 &= Zg(\varphi X, Y) - g(\varphi Y, \nabla_Z^* X) - g(\varphi X, \nabla_Z^* Y) - Xg(\varphi Z, Y) + g(\varphi Y, \nabla_X^* Z) + g(\varphi Z, \nabla_X^* Y) \\
 &= g(\nabla_Z \varphi X, Y) - g(\varphi Y, \nabla_Z^* X) - g(\nabla_X \varphi Z, Y) + g(\varphi Y, \nabla_X^* Z) \\
 &= g(\varphi Y, \nabla_Z X) - g(\varphi Y, \nabla_Z^* X) - g(\varphi Y, \nabla_X Z) + g(\varphi Y, \nabla_X^* Z) \\
 &= -g(\varphi Y, (\nabla^* - \nabla)_Z X) + g(\varphi Y, (\nabla^* - \nabla)_X Z) \\
 &= -G(Y, (\nabla^* - \nabla)_Z X) + G(Y, (\nabla^* - \nabla)_X Z) \\
 &= -G(Y, (\nabla^\dagger - \nabla)_Z X) + G(Y, (\nabla^\dagger - \nabla)_X Z) \\
 &= -\mathcal{F}(Y, X, Z) + \mathcal{F}(Y, Z, X) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece ispat tamamlanır

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu bölümde yapılan tez çalışasında elde ettiğimiz bazı sonuçlar verilecektir.

Bu tezde hemen hemen para Norden manifoldu üzerinde Codazzi çiftlerinin çeşitli özellikleri araştırılmıştır.

İlk olarak (M_{2n}, φ, g, G) hemen hemen para Norden manifoldu üzerinde sırasıyla ∇^φ , φ – conjugate konneksiyonu, ∇^* , g – conjugate konneksiyonu ve $\nabla^\dagger$, G – conjugate konneksiyonu verilmiştir. Ayrıca bu konneksiyonların Klein-4 grup şartlarını sağladıkları gösterilmiştir.

İkinci olarak (M_{2n}, φ, g, G) hemen hemen para Norden manifoldu üzerinde (∇, φ) , (∇, g) ve (∇, G) Codazzi çiftleri verilmiş ve bu Codazzi çiftlerinin çeşitli özellikleri araştırılmıştır.

Üçüncü olarak (M_{2n}, φ, g) hemen hemen para Norden manifoldu üzerinde ∇ , ∇^* ve ∇^φ konneksiyonlarının eğrilikleri sırasıyla R , R^* ve R^φ olmak üzere bu eğrilikler arasındaki ilişki verilmiştir.

Dördüncü olarak (M_{2n}, φ, g, G) hemen hemen para Norden manifoldu üzerinde g ve G metriğine uygulanan Tachibana operatöründen elde edilen sonuçlar verilmiştir. Ardından ∇ burulmasız lineer konneksiyonu dikkate alınarak Nijenhuis tensörü hesaplanmıştır. Son olarak da (M_{2n}, φ, g, G) manifoldunun para Kahler Norden olması için gerekli ve yeter şart elde edilmiştir.

Beşinci olarak φ –invariant lineer konneksiyon kavramı üzerinde durulmuştur. (M_{2n}, φ, g, G) hemen hemen para Norden manifoldu üzerinde ∇ lineer konneksiyon ve ∇^* ve $\nabla^\dagger$ sırasıyla g – conjugate ve G – conjugate konneksiyonlar olmak üzere bu konneksiyonların φ –invariantlığı ile ilgili şartlar ve özellikler araştırılmıştır.

Son olarak da istatistiksel manifoldlar ve özellikleri incelenmiştir.

KAYNAKLAR

- Bishop, R., L. Goldberg, S. I. 1968. Tensor analysis on manifolds. Dover Publications, 35, New York.
- Blaga, A. 2014. The geometry of golden conjugate connections. Sarajevo Journal of Mathematics, 10(23), 237-245.
- Blaga, M., A. Crasmareanu, M. 2012. The geometry of complex conjugate connections. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 41(1), 119-126.
- Blaga, M., A. Crasmareanu, M. 2015. The geometry of tangent conjugate connections. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 44(4), 767-774.
- Calin, Ovidiu., Matsuzoe, H., Zhang, J. 2009. Generalizations of conjugate connections. Trends in Differential Geometry, 26-34.
- Catino, G., Mantegazza, C., Mazzieri, L. 2015. A note on Codazzi tensors. Math. Ann. 362, 629-638.
- D'atri, J. E. 1985. Codazzi tensors and harmonic curvature for left invariant metrics. Geometriae Dedicata, 19(3), 229-236.
- Derdzinski, A., Shen, C. 1983. Codazzi tensor fields, Curvature and Pontryagin Forms. Proc. London Math. Soc., 47(3), 15-26.
- Derdzinski, A. 1981. Some remarks on the local structure of Codazzi tensors. Global Differential Geometry and Global Analysis. Springer, Berlin, Heidelberg, 251-255.
- Dillen, F., Nomizu, K., Vranken, L. 1990. Conjugate connections and Radon's theorem in affine differential geometry. Mh. Math., 109, 221-235.
- Etayo, F., Santamaria, R. 2000. ($J^2 = \mp 1$) –metric manifolds. Publ. Math. Debrecen 57(3-4), 435-444.
- Fei, T., Zhang, J. 2017. Interaction of Codazzi couplings with (Para-) kahler geometry. Results Math, 72, 2037-2056.
- Ganchev, G.T., Borisov, A. V. 1986. Note on the almost complex manifolds with a Norden metric. C. R. Acad. Bulgarie Sci. 39(5), 31-34.
- Gebarowski, A. 1994. The structure of certain Riemannian manifolds admitting Codazzi tensors. Demonstratio Mathematica, 27(1), 249-252.
- Gezer, A., Cakicioglu, H. Notes concerning Codazzi pairs on almost anti-Hermitian manifolds. Inpressed.
- İşcan, M. 2008. B-Manifoldların Geometrisi. Yüksek Lisans Tezi, Atatürk Üni., Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Erzurum.
- İşcan, M., Sarsılmaz, H., Turanlı, S. 2014. On 4-dimensional almost para complex pure Walker manifolds. Turkish Journal of Mathematics, 38, 1071-1080.
- Kobayashi, S., Nomizu, K. 1963. Foundations of Differential Geometry I. Wiley.
- Kruchkovich, G.I. 1972. Hypercomplex structure on a manifold. I. Tr. Sem. Vect. Tens. Anal. Moscow Univ., 16, 174-201.

- Lauritzen, S. L. 1987. Statistical manifolds, in: Differential geometry in statistical inferences. IMS Lecture Notes Monograph Series Institute of Mathematical Statistics, 10, 163-216.
- Norden, A.P. 1960. On a certain class of four-dimensional a-spaces. Iz. VUZ, (4), 145-157.
- Pinkall, U., Schwenk-Schellschmidt, A., Simon, U. 1994. Geometric methods for solving Codazzi and Monge-Ampere equations. Math. Ann. 298, 89-100.
- Salimov, A. A. 1983. Almost Analyticity of a Riemannian metric and integrability of a structure. Trudy Geom. Sem. Kazan. Univ., 15, 72-78.
- Salimov, A. A. 1994. Generalized Yano-Ako operator and the complete lift of tensor fields. Tensor (N.S), 55(2), 142-146.
- Salimov, A. A. 1996. Lifts of poly-affinor structures on pure sections of a tensor bundle. Russian Math. (Iz. Vuz), 40(10), 52-59.
- Salimov, A. A. 2010. On operators associated with tensor fields. J. Geom. 99(1-2), 107-145.
- Salimov, A. A., Iscan, M. 2009. On kahler-Norden manifolds. Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci., 119(1), 71-80.
- Salimov, A. A., Iscan, M. 2010. Some properties of Norden-Walker metrics. Mathematical Journal., 33(2), 283-293.
- Salimov, A. A., Iscan, M., Akbulut, K. 2010. Notes on para-Norden-Walker 4-manifolds, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 7(8), 1331-1347.
- Salimov, A. A., Iscan, M., Etayo, F. 2007. Paraholomorphic B-manifold and its properties. Topology Appl. 154, 925-933.
- Salimov, A. A., Mağden, A. 2008. Diferensiyel Geometri. Aktif Yayıncılık, 326, Erzurum.
- Salimov, A. A., Turanli, S. 2013. Curvature properties of anti-kahler Codazzi manifolds. C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. I, 351 (5-6), 225-227.
- Salimov, A. A., Akbulut, K., Turanli, S. 2013. On an isotropic property of anti-kahler Codazzi manifolds. C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. I, 351(21-22), 837-839.
- Schwenk-Schellschmidt, A., Simon, U. 2009. Codazzi-equivalent affine connections. Result. Math., 56, 211-229.
- Shandra, G.I., Stepanov, S.E., Mikes, J. 2019. On higher-order Codazzi tensors on complete Riemannian manifolds. Annals of Global Analysis and Geometry, 56, 429-442.
- Simon, U. 1975. A further method in differential geometry. Abh. Math. Sem. Hamburg 44(1), 52-69.
- Simon, U. 1981. Codazzi tensors. Global Differential Geometry and Global Analysis. Springer, Berlin, Heidelberg, 289-296.
- Simon, U., Schwenk-Schellschmidt, A., Vrancken, L. 2010. Codazzi-equivalent Riemannian metrics. Asian J. Math., 14(3), 291-302.
- Tachibana, A. 1960. Analytic tensor and its generalization. Tôhoku Math. J., 12(2), 208-221.

- Taşcı, D. 2018. Soyut Cebir. Gazi Kitabevi, 649, Ankara.
- Turanlı, S. 2011. Walker manifoldları. Yüksek Lisans Tezi, Atatürk Üni., Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 76, Erzurum.
- Vishnevskii, V.V., Shirokov, A.P., Shurygin, V.V. 1985. Spaces over algebras. Kazan Gos. University, Kazan, Russian.
- Vishnevskii, V.V. 2002. Integrable affinor structures and their plural interpretations. J. of Math. Sciences, 108(2), 151-187.
- Yano, K. 1965. Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces, Pergamon Press, N.Y.
- Yano, K. Ako, M. 1968. On certain operators associated with tensor fields. Kodai Math. Sem. Rep., 20, 414-43

