

T.C.
ERZİNCAN BİNALİ YILDIRIM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

PARA-SASAKİAN MANİFOLDLARININ TANJANT DEMETLERİNDE META-
METALİK YAPILAR

Edanur USLU

Danışman: Doç. Dr. Murat ALTUNBAŞ

TEZ JÜRİ ÜYELERİ

Doç. Dr. Sibel TURANLI

Doç. Dr. Murat ALTUNBAŞ

Doç. Dr. Tufan ÖZDİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ERZİNCAN, 2026

© 2026 [Edanur USLU]. Tüm hakları saklıdır.

Kabul ve Onay Sayfası

Doç. Dr. Murat ALTUNBAŞ danışmanlığında, Edanur USLU tarafından hazırlanan bu çalışma 09/06/2026 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul oybirliği (3/3) ile kabul edilmiştir.

Başkan: Doç. Dr. Sibel TURANLI İmza:

Üye : Doç. Dr. Murat ALTUNBAŞ İmza:

Üye : Doç. Dr. Tufan ÖZDİN İmza:

Bu tez Enstitü Yönetim Kurulunun / / 20.... tarih ve/..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Kemal Volkan ÖZDOKUR
Enstitü Müdür V.

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, şekil ve tabloların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

Bilimsel Etięe Uygunluk Sayfası

“Para-Sasakian Manifolrlarının Tanjant Demetlerinde Meta-Metalik Yapılar” isimli “Yüksek Lisans” tezim tarafımca intihal tespit programı ile incelenmiştir. Buna göre tezimde bilimsel etik ihlali ve intihal olarak nitelendirilebilecek herhangi bir durum olmadığını taahhüt ederim.

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir biçimde elde edildiğini; aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiğı gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi beyan ederim. 09/06/2026

(İmza)

Edanur USLU

ÖZET

PARA-SASAKIAN MANİFOLDLARININ TANJANT DEMETLERİNDE META-METALİK YAPILAR

Edanur USLU

Yüksek Lisans Tezi

Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Murat ALTUNBAŞ

2026, 32 sayfa

Bu tezde, para-Sasakian (P-Sasakian) manifoldların tanjant demetleri üzerinde meta-metalik yapılar incelenmiştir. Çalışmanın temel amacı, metalik yapılar için bilinen tanjant demet yaklaşımını, klasik metalik bağıntının bir genelleştirmesi olan meta-metalik bağıntı altında yeniden ele almaktır. Bu inceleme, tanjant demet üzerinde metalik yapılar için daha önce kurulmuş olan çerçevenin daha genel bir cebirsel yapı altında yeniden değerlendirilmesine dayanmaktadır. Bu doğrultuda, baz manifold üzerindeki para-Sasakian yapının tam ve yatay liftleri kullanılarak tanjant demet üzerinde yeni (1,1)-tipli tensör alanları tanımlanmış ve bunların meta-metalik bağıntıyı sağladığı gösterilerek iki farklı meta-metalik yapı elde edilmiştir. Tam lift ile kurulan yapının tam lift metriğiyle, yatay lift ile elde edilen yapının ise Sasaki metriğiyle uyumlu olduğu kanıtlanmış ve böylece tanjant demet üzerinde ilgili metriklerle uyumlu meta-metalik yapılar elde edilmiştir. Yapıların integrallenebilirliği Nijenhuis tensörü yardımıyla incelenmiş; tam lift kaynaklı yapının, baz manifoldun para-Sasakian olmasından dolayı herhangi bir ek koşula gerek kalmadan integrallenebilir olduğu, yatay lift kaynaklı yapının ise ancak koneksiyonun D-düz olması ve eğrilik tensörü üzerindeki belirli bir koşulun sağlanması durumunda integrallenebilir olduğu belirlenmiştir. Ayrıca her iki yapının da ilgili lift koneksiyonlarına göre paralel olmadığı ve bu yapılara karşılık gelen temel 2-formların kapalılık durumlarının lift seçimine göre farklılaştığı gösterilmiştir. Bu çalışma, tanjant demet geometrisi ile meta-metalik yapı kuramı arasında doğal bir bağ kurmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Lift koneksiyonu, lift metriği, meta-metalik yapı, metalik yapı, Nijenhuis tensörü, para-Sasakian manifold, tanjant demet

ABSTRACT

META-METALLIC STRUCTURES ON TANGENT BUNDLES OF PARA-SASAKIAN MANIFOLDS

Edanur USLU

Master's Thesis

Erzincan Binali Yıldırım University, Institute of Science and Technology,

Department of Mathematics

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Murat ALTUNBAŞ

2026, 32 pages

In this thesis, meta-metallic structures on the tangent bundles of para-Sasakian (P-Sasakian) manifolds are investigated. The main aim is to reconsider the tangent bundle approach known for metallic structures under the meta-metallic relation, which generalizes the classical metallic relation. This investigation re-examines, within a more general algebraic setting, the framework previously established for metallic structures on the tangent bundle. For this purpose, new $(1,1)$ -type tensor fields are defined on the tangent bundle by using the complete and horizontal lifts of the para-Sasakian structure, and they are shown to satisfy the meta-metallic relation, yielding two different meta-metallic structures. The complete-lift structure is compatible with the complete lift metric and the horizontal-lift structure with the Sasaki metric, thereby providing meta-metallic metric structures on the tangent bundle. Their integrability is examined by means of the Nijenhuis tensor; the complete-lift structure is integrable without any additional condition since the base manifold is para-Sasakian, while the horizontal-lift structure is integrable only when the connection is D-flat and a certain condition on the curvature tensor holds. Moreover, both structures are non-parallel with respect to the corresponding lift connections, and the closedness of the fundamental 2-forms associated with these structures differs according to the choice of lift. This study establishes a natural link between tangent bundle geometry and meta-metallic structure theory.

Keywords: Lift connection, lift metric, meta-metallic structure, metallic structure, Nijenhuis tensor, para-Sasakian manifold, tangent bundle

TEŞEKKÜR

Lisansüstü eğitimimin bu en önemli aşamasında, çalışmamın planlanmasından tamamlanmasına kadar geçen süreçte engin bilgi ve tecrübelerinden istifade ettiğim, akademik vizyonuyla yolumu aydınlatan ve kıymetli vaktini benden esirgemeyen saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Murat ALTUNBAŞ'a en içten Őükranlarımı sunarım.

Hayatım boyunca eğitime verdikleri öncelik, gösterdikleri sonsuz fedakârlık ve dualarıyla her daim yanımda hissettiğim, maddi ve manevi desteklerini benden hiçbir zaman esirgemeyen canım aileme, varlıkları ve bana duydukları güven için minnettarım.

Son olarak, bu meŐakkatli ve yoğun çalışma döneminin getirdiği tüm zorlukları benimle omuzlayan, sabrı, ilgisi ve anlayıŐıyla motivasyon kaynağım olan, sevgisini ve desteğini bir an olsun eksik etmeyen kıymetli niŐanlım Mustafa YALÇIN'a kalbi teşekkürlerimi sunarım.

Edanur USLU

Haziran, 2026

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	v
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Araştırmanın Amacı	2
1.2. Araştırmanın Kapsamı	3
1.3. Araştırmanın Önemi	3
1.4. Varsayımlar	3
1.5. Sınırlılıklar.....	4
2. KAVRAMSAL ÇERÇEVE VE İLGİLİ ÇALIŞMALAR	5
2.1. Meta-Altın Oran	5
2.2. Meta-Altın Yapılar	6
2.3. Metalik Yapılar.....	7
2.4. Meta-Metalik Yapılar	7
2.5. Para-Sasakian Manifoldları ve Tanjant Demet Geometrisi	8
2.6. Azami'nin Yaklaşımı ve Tezin Çıkış Noktası	8
2.7. Bu Tezin Literatürdeki Yeri	9
3. YÖNTEM	10
4. BULGULAR	20
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	28
5.1. Sonuçların Genel Değerlendirmesi.....	28
5.2. Literatürle Karşılaştırma.....	29
5.3. Çalışmanın Katkıları ve Sınırlılıkları	29
5.4. Gelecek Çalışmalar İçin Öneriler	30
KAYNAKÇA	31

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

\mathbb{R}	Reel sayılar kümesi
\mathbb{Z}^+	Pozitif tam sayılar kümesi
$C^\infty(M)$	M üzerinde C^∞ sınıftan fonksiyonlar halkası
M	Diferansiyellenebilir manifold
$T_p M$	M nin p noktasındaki tanjant uzayı
TM	M nin tanjant demeti
$\pi : TM \rightarrow M$	TM den M ye doğal izdüşüm
$\chi(M)$	M üzerindeki düzgün vektör alanlarının modülü
$T_s^r(M)$	M üzerindeki (r, s) –tipli tensör alanlarının kümesi
$\Omega^k(M)$	M üzerindeki k –formların uzayı
d	Dış türev operatörü
$[U, V]$	U ve V vektör alanlarının Lie parantezi
L_U	U yönündeki Lie türevi
∇	Lineer koneksiyon, Levi-Civita koneksiyonu
R	Riemann eğrilik tensörü
Γ_{ij}^k	Christoffel sembolleri
g	Riemann metriği
ϕ	Hemen-hemen parakontakt yapının $(1,1)$ -tipli tensör alanı
ξ	Karakteristik vektör alanı
η	Karakteristik 1-form
(M, ϕ, η, ξ, g)	Hemen-hemen parakontakt metrik manifold
VTM	TM 'nin dikey (vertical) dağılımı
HTM	TM 'nin yatay (horizontal) dağılımı
U^v, U^c, U^h	U vektör alanının dikey, tam, yatay liftleri
f^v, f^c	f fonksiyonunun dikey ve tam liftleri
ω^v, ω^c	ω 1-formunun dikey ve tam liftleri
ϕ^c, ϕ^h	ϕ tensör alanının tam ve yatay liftleri
γ	TM üzerinde dikey nesne üreten γ -operatörü
g^c	g metriğinin tam lift metriği
g^s	g metriğinin Sasaki tipi lift metriği
∇^c	Tam lift koneksiyonu
∇^h	Yatay lift koneksiyonu
c	Metalik oran
$\sigma_{p,q}$	Meta-metalik oran
J, F	Tanjant demet üzerinde meta-metalik $(1,1)$ -tipli tensör alanları
Φ	Yapıya karşılık gelen temel 2-form
N_j	J tensör alanının Nijenhuis tensörü

1. GİRİŞ

Diferansiyel geometride manifoldlar üzerinde tanımlanan yapılar, yalnızca baz manifoldun geometrisini anlamak bakımından değil, bu yapıların çeşitli demetler üzerine taşınmasıyla ortaya çıkan yeni geometrik ortamları incelemek bakımından da önemli bir yere sahiptir. Özellikle polinom yapılara dayanan tensör alanları, son yıllarda farklı manifold sınıfları üzerinde yoğun biçimde çalışılmış ve altın yapılar bu çerçevede dikkat çeken araştırma alanları arasında yer almıştır (Crasmareanu ve Hretcanu, 2008; Hretcanu ve Crasmareanu, 2009; Gezer, Cengiz ve Salimov, 2013; Chen, Choudhary ve Perween, 2024; Druta-Romaniuc, Hretcanu ve Gezer, 2025). Metalik yapılar, altın yapıları özel bir durum olarak kapsayan daha genel bir sınıf sundukları için klasik altın yapı yaklaşımına göre daha esnek bir inceleme imkânı sağlamaktadır (Hretcanu ve Crasmareanu, 2013; Gezer ve Karaman, 2015; Özkan ve Yılmaz, 2018; Khan, 2021; Altunbaş, 2023a; Chen, Choudhary ve Perween, 2025).

Altın oran etrafında gelişen matematiksel ve geometrik düşünceler zamanla yalnızca klasik altın oranla sınırlı kalmamış, ona yakın fakat ondan farklı yeni oranların da incelenmesine yol açmıştır. Bu bağlamda, logaritmik spiral ile altın oran arasında yaygın biçimde kurulan ilişkinin her durumda doğru olmadığı görülmüştür. Bartlett (2019) tarafından bazı spiral yapılarda yaklaşık 1,356 değerine karşılık gelen meta-altın oranının daha uygun bir sabit olduğu ortaya konmuştur. Huylebrouck (2014) ise bu oranın yalnızca sayısal bir sabit olarak değil, aynı zamanda belirli cebirsel ve geometrik özellikler taşıyan matematiksel bir nesne olarak ele alınabileceğini göstermiştir. Böylece meta-altın oran düşüncesi, daha sonra manifoldlar üzerinde tanımlanan yeni yapılar için ilham veren bir kavramsal zemin oluşturmuştur.

Bu gelişmeler doğrultusunda, meta-altın yapılar ve daha sonra meta-metalik yapılar tanımlanmıştır. Meta-metalik yapıların ortaya çıkışı, meta-altın oranla ilişkili cebirsel düşüncenin metalik yapılar gibi daha genel bir geometrik sınıfa başarıyla taşınabildiğini göstermiştir. Bu yapıların integrallenebilirlik, eğrilik ve metrik uyumluluk gibi özellikleri üzerine yapılan çalışmalar, meta-metalik yapıların bağımsız bir araştırma alanı oluşturduğunu ortaya koymaktadır (Şahin ve Şahin, 2022; Altunbaş, 2023b; Erdoğan, Perkaş ve Bozdağ, 2024).

Öte yandan, diferansiyellenebilir manifoldlar üzerindeki yapıların tanjant demetine taşınması, lift teorisinin temel uygulamalarından biridir. Dikey, tam ve yatay lifter yardımıyla baz manifold üzerindeki vektör alanları, 1-formlar, tensörler ve metrikler tanjant demetine

aktarılabilmekte, böylece baz manifoldun geometrisi daha yüksek boyutlu bir ortamda yeniden incelenebilmektedir. Bu yaklaşım, özellikle kontakt ve parakontakt yapılar üzerinde etkili sonuçlar vermiştir. Nitekim Azami (2021), P-Sasakian manifoldların tanjant demetleri üzerinde metalik yapıları tam, yatay ve dikey liftler yardımıyla ele alarak bu yapıların integrallenebilirlik ve paralellik özelliklerini incelemiştir.

Bu tezde, söz konusu yaklaşım daha genel bir yapıya taşınarak para-Sasakian manifoldların tanjant demetleri üzerinde meta-metalik yapılar incelenmektedir. Başka bir ifadeyle, tanjant demet üzerinde metalik yapıların incelendiği mevcut çerçeve, burada meta-metalik yapı bağıntısı altında yeniden kurulmaktadır. Bu amaçla, para-Sasakian yapının uygun liftleri yardımıyla tanjant demet üzerinde meta-metalik yapılar tanımlanmakta, bu yapıların ilgili metriklerle uyumu, integrallenebilirlikleri ve paralellik durumları araştırılmaktadır. Böylece hem meta-metalik yapı teorisine yeni örnekler kazandırmak hem de para-Sasakian manifoldların tanjant demeti geometrisine katkıda bulunmak amaçlanmaktadır.

Bu çalışma, bir yönüyle meta-altın oran ile başlayan ve meta-metalik yapılara kadar uzanan kavramsal çizgiyi tanjant demet geometrisine taşımaktadır. Diğer yönüyle ise para-Sasakian manifoldların tanjant demetleri üzerinde daha önce metalik yapılar için kurulmuş olan yöntemi meta-metalik yapılar düzeyinde yeniden ele almaktadır. Bu bakımdan tez, hem mevcut literatürün doğal bir devamı niteliğindedir hem de daha genel bir yapı sınıfı üzerinde yeni sonuçlara ulaşmayı hedeflemektedir.

1.1. Araştırmanın Amacı

Bu tezin temel amacı, para-Sasakian manifoldların tanjant demetleri üzerinde meta-metalik yapıların tanımlanması ve bu yapıların temel geometrik özelliklerinin incelenmesidir. Bu doğrultuda, baz manifold üzerindeki para-Sasakian yapının uygun liftlerinden yararlanılarak tanjant demet üzerinde meta-metalik yapıların kurulması hedeflenmektedir. Ayrıca bu yapıların ilgili metriklerle uyumluluğunun belirlenmesi, Nijenhuis tensörü yardımıyla integrallenebilirlik koşullarının araştırılması ve lift koneksiyonlarına göre paralellik durumlarının incelenmesi amaçlanmaktadır. Bu yönüyle çalışma, Azami (2021) tarafından metalik yapılar için ortaya konulan çerçeveyi daha genel bir cebirsel yapı altında yeniden değerlendirmektedir.

1.2. Araştırmanın Kapsamı

Bu tez, para-Sasakian manifoldların tanjant demetleri üzerinde tanımlanan meta-metalik yapılar ile sınırlıdır. Çalışmada öncelikle para-Sasakian yapı, tanjant demet, lift işlemleri, lift metrikleri ve lift koneksiyonları gibi temel kavramlar ele alınmaktadır. Daha sonra bu araçlar kullanılarak tanjant demet üzerinde meta-metalik yapılar kurulmakta ve bunların metrik uyumluluğu, integrallenebilirliği ve paralellik özellikleri incelenmektedir.

Çalışmanın kapsamı, temel olarak tam ve yatay liftler yardımıyla elde edilen yapılar üzerinde yoğunlaşmaktadır. Meta-metalik yapıların farklı demet türleri üzerindeki davranışı, alt manifoldlara indirgenmiş biçimleri ya da daha genel yarı-Riemann geometrik ortamlardaki uygulamaları bu tez kapsamı dışında bırakılmıştır. Bu tür konular ileride yapılabilecek çalışmalar arasında değerlendirilebilir.

1.3. Araştırmanın Önemi

Bu tez birkaç bakımdan önem taşımaktadır. İlk olarak, meta-altın oranla başlayan ve meta-metalik yapılara kadar uzanan kavramsal çizginin tanjant demet geometrisine uygulanması bakımından önemlidir. Böylece sayısal bir oran etrafında gelişen cebirsel-geometrik düşüncenin diferansiyel geometri içinde daha somut ve yapısal bir biçimde kullanılması mümkün hâle gelmektedir (Huylebrouck, 2014; Bartlett, 2019; Erdoğan vd., 2024).

İkinci olarak, tanjant demet üzerinde metalik yapılar için kurulmuş olan yöntemin meta-metalik yapılar düzeyine taşınması, mevcut bilginin yalnızca tekrarı değil, daha genel bir yapı sınıfı altında yeniden değerlendirilmesi anlamına gelmektedir. Bu durum, para-Sasakian manifoldların tanjant demeti üzerinde yeni örnekler ve yeni sonuçlar elde edilmesine imkân vermektedir. Son olarak, bu tez para-Sasakian geometri, lift teorisi ve meta-metalik yapı kuramı arasında bir köprü kurmaktadır. Bu bakımdan çalışmanın, ileride kotanjant demetler, tensör demetleri veya başka geometrik yapı sınıfları üzerinde yapılacak benzer incelemelere zemin hazırlaması beklenmektedir.

1.4. Varsayımlar

Bu tezde, ele alınan tüm manifoldların, tensör alanlarının, metriklerin ve koneksiyonların yeterli derecede diferansiyellenebilir olduğu kabul edilmektedir. Çalışma boyunca kullanılan tüm geometrik nesnelerin C^∞ sınıfından olduğu varsayılmıştır. Ayrıca para-Sasakian manifoldun tanımlayıcı yapısının ilgili koşulları sağladığı ve kullanılan lift işlemlerinin

diferansiyel geometri literatüründe kabul edilen standart anlamlarıyla geçerli olduğu kabul edilmektedir.

1.5. Sınırlılıklar

Bu tez, para-Sasakian manifoldlarının tanjant demetleri üzerinde tanımlanan meta-metalik yapılarla sınırlıdır. Dolayısıyla başka kontakt yapı sınıfları, farklı demet türleri ve daha genel yarı-Riemann geometrik uzaylar doğrudan ele alınmamaktadır. Ayrıca çalışmada meta-metalik yapıların temel olarak belirli liftler aracılığıyla elde edilen biçimleri incelenmekte, daha genel doğal liftlerin ya da farklı koneksiyon türlerinin sistematik analizi yapılmamaktadır.

2. KAVRAMSAL ÇERÇEVE VE İLGİLİ ÇALIŞMALAR

Bu bölümde, tez konusunun dayandığı kuramsal arka plan ve ilgili çalışmalar ele alınmaktadır. Öncelikle meta-altın oran düşüncesinin ortaya çıkışı ve bu düşüncenin geometrik yapılara yansımaları üzerinde durulacak, daha sonra meta-altın, metalik ve meta-metalik yapılar arasındaki ilişki açıklanacaktır. Son olarak para-Sasakian manifoldların tanjant demetleri üzerinde tanımlanan yapılara ilişkin mevcut literatür değerlendirilerek bu tezin söz konusu çalışmalar içindeki yeri ortaya konulacaktır.

2.1. Meta-Altın Oran

Altın oran, matematik ve geometri tarihinde uzun süredir özel bir yere sahip olmakla birlikte, doğadaki her spiral biçimin ya da estetik düzenin doğrudan bu oranla açıklanabileceği düşüncesi zamanla sorgulanmaya başlanmıştır. Özellikle logaritmik spiral üzerine yapılan çalışmalar, bu konuda daha dikkatli bir yaklaşım gerektiğini göstermiştir. Uzun yıllar boyunca Nautilus kabuklarının bir altın oran (yaklaşık 1,618) veya klasik 4:3 (yaklaşık 1,333) oranına sahip olduğu varsayılmıştır. Ancak Bartlett (2019), Smithsonian koleksiyonundaki 80 adet kabuk üzerinde yürüttüğü kapsamlı ölçümlerde bu yaygın kabullerin her durumda geçerli olmadığını göstermiştir. Bartlett, özellikle nadir bir tür olan *Crusty Nautilus (Allonautilus scrobiculatus)* kabuklarının spirallerini çevreleyen dikdörtgenlerin en-boy oranının altın orana değil, yaklaşık 1,356 değerine daha uygun olduğunu göstermiştir. Böylece doğadaki kusursuz formlardan birinin matematiksel karşılığı olarak "meta-altın oran" kavramı öne çıkmıştır.

Huylebrouck (2014), bu oranı daha sistematik biçimde inceleyerek meta-altın oranın (altın oran ϕ olmak üzere $x^2 = \frac{x}{\phi} + 1$ denkleminin pozitif kökü olarak) belirli cebirsel bağıntılar, sürekli kesir açılımları ve geometrik inşalar bakımından anlamlı bir yapıya sahip olduğunu ortaya koymuştur. Öyle ki, meta-altın orana sahip bir dikdörtgen, altın oranlı bir dikdörtgen ile daha küçük bir meta-altın oran dikdörtgenine ayrışabilmektedir. Bu çalışma, meta-altın oranın yalnızca spesifik bir biyolojik gözlemden ibaret olmadığını, aksine altın oranla akraba olan ancak kendi başına matematiksel olarak incelenmeye değer bağımsız bir nesne olduğunu göstermesi bakımından önemlidir. Böylece meta-altın oran, daha sonra diferansiyellenebilir manifoldlar üzerinde kurulacak yeni tensör alanlarının ve yapıların ilham kaynağı hâline gelmiştir.

2.2. Meta-Altın Yapılar

Meta-altın oran düşüncesinin manifold teorisine yansımaları literatürde iki farklı temel yaklaşımla ele alınmıştır. İlk olarak Şahin ve Şahin (2022) tarafından tanıtılan meta-altın Riemann manifoldu kavramı, halihazırda bir altın yapıya (tensör alanına) sahip manifoldlar üzerinde inşa edilmiştir. Bu çalışmada meta-altın yapı, bir P altın yapısı üzerinde $PF_1^2U = PU + F_1U$ (veya denk karakteristik denklemiyle $F_1^2 = PF_1 - F_1 + I$) koşulunu sağlayan bir F_1 endomorfizması olarak tanımlanmış ve bu yapının metrik uyumluluğu integrallenebilirliği ile eğrilik özellikleri araştırılmıştır. Burada U bir vektör alanıdır. Bu yaklaşım, sabit eğrilikli bir meta-altın Riemann manifoldunun ancak düz (flat) bir uzay olabileceğini göstererek alana önemli bir katkı sunmuştur.

Öte yandan, meta-altın yapının diferansiyel geometrideki farklı bir inşası Altunbaş (2023b) tarafından sunulmuştur. Şahin ve Şahin (2022) çalışmasında meta-altın yapı bir tensör alanı üzerine kurulurken, Altunbaş (2023b), meta-altın yapıyı doğrudan reel bir sayı olan altın oran φ üzerinden tanımlamıştır. Bu yaklaşımda ikinci tip meta-altın yapı, manifold üzerinde $F_2^2 = \frac{1}{\varphi}F_2 + I$ karakteristik denklemini sağlayan bir (1,1)-tipli tensör alanı olarak ele alınmıştır. Bu tanımda $\frac{1}{\varphi}$ katsayısının irrasyonel bir sayı olması, bu yeni meta-altın yapının tamsayı katsayılı klasik metalik yapılar ailesinin (ve alt sınıflarının) hiçbirine dâhil olmamasını sağlamış ve onu literatürde özgün bir konuma taşımıştır.

Altunbaş (2023b) tarafından yapılan çalışmada, bu yeni F_2 meta-altın yapısının Riemann metriği ile uyumluluğu saf (pure) tensör kavramı üzerinden incelenmiş ve Tachibana operatörü kullanılarak yapının integrallenebilirlik koşulları ortaya konmuştur. Ayrıca bu meta-altın yapıya karşılık gelen bir hemen hemen çarpım yapısı elde edilmiş ve “ikiz (twin) meta-altın metrik” kavramı tanıtılmıştır. Ayrıca, söz konusu yapının tanjant, kotanjant ve tensör demetlerine Sasaki metrikleri yardımıyla liftleri tanımlanmış, bu demetlerin yerel ayrışabilirlik (locally decomposable) durumları kanıtlanmıştır.

Gerek bir tensör alanına dayalı yaklaşımlar gerekse doğrudan altın oran reel sayısı üzerinden yapılan irrasyonel katsayılı inşalar, meta-altın kavramının zengin bir cebirsel ve geometrik altyapı sunduğunu ortaya koymaktadır. Bu çerçevede, altın yapıların daha geniş bir polinom yapılar ailesinin özel bir durumu olarak değerlendirilebilmesi, söz konusu yaklaşımların daha

genel yapı sınıflarına genelleştirilmesi yönünde önemli bir teorik motivasyon kaynağı oluşturmaktadır.

2.3. Metalik Yapılar

Metalik yapılar, altın yapılardan daha genel bir sınıf olarak Hreţcanu ve Crasmareanu (2013) tarafından tanıtılmıştır. Bir (1,1)-tipli J tensör alanının $J^2 = pJ + qI$ bağıntısını sağlamasıyla tanımlanan metalik yapı, altın yapıyı özel bir durum olarak içine alan geniş bir polinom yapılar ailesi sunmaktadır. Uyumlu bir Riemann metriği ile ele alındığında metalik Riemann manifoldu kavramı elde edilir. Bu yapı sınıfı, diferansiyel geometride çok sayıda farklı uygulamanın incelenmesine imkân vermiştir. Örneğin, Özkan ve Yılmaz (2018), hemen hemen çarpım yapıları kullanarak metalik yapıları incelemiştir. Gezer ve Karaman (2015), metalik Riemann yapıları kavramından hareketle, bu yapıların integrallenebilirliğini ve eğrilik özelliklerini araştırmışlardır. Blaga ve Hreţcanu (2018) ise metalik yapılar çerçevesinde metalik eşlenik koneksiyonlar kavramını tanıtmışlardır. Bu koneksiyonlar, literatürdeki altın eşlenik koneksiyonların bir genelleştirmesini ifade etmektedir. Konunun kapsamını genişletmek amacıyla ilerleyen süreçte metalik yapıların farklı formları da ele alınmış, bu doğrultuda genelleştirilmiş metalik pseudo-Riemann yapılar ile harmonik metalik yapılar incelenmiştir (Blaga ve Nannicini, 2020; 2021).

Metalik yapıların bu genel niteliği, onları meta-altın oranla bağlantılı yeni yapıların taşınabileceği uygun bir zemin hâline getirmiştir. Bu nedenle meta-altın yapılarda ortaya çıkan düşüncenin metalik yapı sınıfına uyarlanması doğal bir gelişme olmuştur.

2.4. Meta-Metalik Yapılar

Meta-metalik yapılar, meta-altın oran düşüncesinin metalik yapılar bağlamında yeniden kurulmasıyla ortaya çıkmıştır. Bu yapılar Erdoğan vd. (2024) tarafından, J bir metalik yapı olmak üzere, $JF_3^2 = aJ + bF_3$ şeklinde tanımlanmıştır. Burada a ve b pozitif tam sayılardır. Bu çalışmada yapıların örnekleri verilmiş, integrallenebilirliği araştırılmış ve eğrilik tensörü ile ilişkileri incelenmiştir. Ayrıca sabit eğrilik durumunda ortaya çıkan bazı sonuçlar değerlendirilmiştir.

Bu gelişme, meta-altın oranla başlayan düşüncenin daha geniş bir cebirsel çerçeveye başarıyla taşınabildiğini göstermektedir. Böylece meta-metalik yapılar, yalnızca meta-altın yapıların bir genellemesi olarak değil, kendi başına incelenebilecek bağımsız bir yapı sınıfı olarak önem

kazanmıştır. Ancak bu tezde ele alınan meta-metalik yapı, söz konusu çalışmadaki gibi bir metalik tensör alanı üzerine inşa edilmemiş, doğrudan meta-metalik oranı temsil eden irrasyonel sayı temel alınarak farklı bir cebirsel yaklaşımla tanımlanmıştır.

2.5. Para-Sasakian Manifolrları ve Tanjant Demet Geometrisi

Tezin geometrik zemini para-Sasakian, kısaca P-Sasakian manifoldlarıdır. Para-kontakt ve para-Sasakian yapılar, klasik kontakt geometrinin paralel bir uzantısı olarak ortaya çıkmış ve özellikle tensörel bağıntıları bakımından zengin bir yapı sunmuştur. Bu yapı sınıfı, baz manifold üzerindeki geometrik verilerin tanjant demete taşınması açısından da uygun bir ortam oluşturmaktadır. Çünkü para-Sasakian yapının belirli tensörel özellikleri, lift işlemleri altında düzenli biçimde izlenebilmektedir.

Tanjant demet üzerinde yapı incelemek, diferansiyel geometrinin klasik yöntemlerinden biri olan lift teorisine dayanır. Dikey, tam ve yatay liftler yardımıyla baz manifold üzerindeki vektör alanları, 1-formlar, tensörler, metrikler ve koneksiyonlar tanjant demete taşınabilir. Bu sayede baz manifoldun geometrisi daha yüksek boyutlu bir ortamda yeniden ele alınabilir. Bu yaklaşım, yalnızca teknik bir işlem değil, aynı zamanda baz yapıların davranışını daha geniş bir bağlamda gözlemlemeyi sağlayan güçlü bir yöntemdir.

2.6. Azami'nin Yaklaşımı ve Tezin Çıkış Noktası

Azami (2021), P-Sasakian manifoldların tanjant demetleri üzerinde metalik yapıları ele almış ve bunları tam, yatay ve dikey liftler yardımıyla incelemiştir. Bu çalışmada tanjant demet üzerinde metalik yapıların tanımlanabileceği gösterilmiş, daha sonra bu yapıların metrik uyumluluğu, integrallenebilirliği ve paralellik özellikleri araştırılmıştır. Ayrıca temel 2-formların kapalılığı gibi bazı diferansiyel özellikler de incelenmiştir. Bu yaklaşım, para-Sasakian yapının tanjant demet geometrisinde polinom yapılara dayalı yeni yapılar üretebildiğini açık biçimde ortaya koymuştur.

Bu tezin çıkış noktası da tam olarak burada yer almaktadır. Azami'nin metalik yapılar için kurduğu yöntemin meta-metalik yapı bağıntısına uyarlanması bu çalışmanın temel hareket noktasını oluşturmuştur. Dolayısıyla bu tezde, tanjant demet üzerinde metalik yapılar için geliştirilen çerçeve, daha genel olan meta-metalik yapı bağıntısı altında yeniden ele alınmaktadır.

2.7. Bu Tezin Literatürdeki Yeri

Bu tez, meta-altın ve meta-metalik yapı teorisi, para-Sasakian geometri ve tanjant demetler üzerindeki lift teorisi arasında yer almaktadır. Literatürde metalik yapıların tanjant demetler üzerindeki liftleri incelenmiş olmakla birlikte, para-Sasakian manifoldlarının tanjant demetlerinde meta-metalik yapıların tam ve yatay liftler aracılığıyla sistematik olarak ele alınması mevcut çalışmaların doğal bir devamı niteliğindedir.

Bu çalışmada, tanjant demet üzerinde elde edilen meta-metalik yapıların metrik uyumluluğu, integrallenebilirliği, paralellik özellikleri ve temel 2-formlarının kapalılığı incelenerek mevcut metalik yapı sonuçlarının meta-metalik bağlamdaki karşılıkları araştırılmaktadır. Bir sonraki bölümde bu incelemede kullanılacak temel tanımlar, lift işlemleri ve yardımcı geometrik araçlar verilecektir.

3. YÖNTEM

Bu bölümde, çalışmamızın temelini oluşturan kavramlar tanıtılacaktır. İlk olarak diferansiyellenebilir manifoldlar, tensör alanları, diferansiyel formlar ve Riemann geometrisinin temel araçları hatırlatılacak; ardından lineer koneksiyon, kovaryant türev, Lie türevi ve eğrilik tensörü ele alınacaktır. Daha sonra hemen hemen parakontakt ve P-Sasakian manifold yapıları incelenecek, bir manifoldun tanjant demeti üzerindeki dikey, tam ve yatay lift kavramları ile bu liflere karşılık gelen metrikler ve lineer koneksiyonlar verilecektir. Son olarak, çalışmamızın konusu olan meta-metalik yapıların temelini oluşturan klasik metalik yapılar ile bu yapıların integrallenebilirliğinde belirleyici rol oynayan Nijenhuis tensörü tanıtılacaktır. Bu bölümde verilen tanım ve özellikler için temel başvuru kaynakları (Yano ve Ishihara, 1973), (León ve Rodrigues, 1989), (Hretcanu ve Crasmareanu, 2013) ve (Azami, 2021) çalışmalarıdır.

Tanım 3.1. Bir M Hausdorff ve ikinci sayılabilir topolojik uzayı verilsin. Eğer M üzerinde, her bir noktanın bir açık komşuluğunu \mathbb{R}^n 'nin bir açık alt kümesine homeomorf yapan haritalardan oluşan bir atlas tanımlanabiliyor ve bu atlasın geçiş fonksiyonları C^∞ sınıfından ise M ye n -boyutlu diferansiyellenebilir (düzgün) manifold denir.

Çalışma boyunca tüm manifoldlar, üzerlerindeki tensör alanları ve koneksiyonlar C^∞ sınıfından kabul edilecektir.

Tanım 3.2. M bir manifold ve $T_p M$, M nin $p \in M$ noktasındaki tanjant uzayı olsun. Her $p \in M$ noktasına $T_p M$ uzayından bir vektör atayan ve bu atamanın koordinatlara göre düzgün olduğu bir U fonksiyonuna M üzerinde bir vektör alanı denir.

M üzerindeki tüm düzgün vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ ile gösterilir ve $C^\infty(M)$ halkası üzerinde bir modüldür.

Tanım 3.3. M bir manifold olsun. M nin her noktasına (r, s) -tipli bir tensör atayan ve koordinatlara göre düzgün olan bir fonksiyona M üzerinde (r, s) -tipli tensör alanı denir.

M üzerindeki (r, s) -tipli tüm tensör alanlarının kümesi $\mathcal{T}_s^r(M)$ ile gösterilir. Özel olarak $(1, 0)$ -tipli tensör alanı bir vektör alanı, $(0, 1)$ -tipli tensör alanı bir 1-form ve $(1, 1)$ -tipli tensör alanı her noktada tanjant uzaydan kendisine bir lineer dönüşüm tanımlar.

Tanım 3.4. M bir manifold olsun. M üzerinde k tane vektör alanı argümanı alan, $C^\infty(M)$ k -lineer ve antisimetrik bir fonksiyona M üzerinde bir k -form denir.

M üzerindeki tüm k -formların kümesi $\Omega^k(M)$ ile gösterilir. Özel olarak $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$ ve $\Omega^1(M)$ 1-formların uzayıdır.

Tanım 3.5. M bir manifold olsun. M üzerinde, her k için $d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ şeklinde tanımlanan, \mathbb{R} -lineer, $d \circ d = 0$ özelliğini ve dereceli Leibniz kuralını sağlayan operatöre dış türev denir.

Bir 1-form ω ve $U, V \in \chi(M)$ için dış türev

$$d\omega(U, V) = U(\omega(V)) - V(\omega(U)) - \omega([U, V])$$

eşitliğini sağlar.

Tanım 3.6. M bir manifold olsun. M üzerinde her noktada simetrik, bilineer ve pozitif tanımlı bir iç çarpım tanımlayan (0,2)-tipli düzgün bir g tensör alanına M üzerinde bir Riemann metriği, (M, g) ikilisine ise bir Riemann manifoldu denir.

Bu durumda her $U, V \in \chi(M)$ için

$$g(U, V) = g(V, U),$$

$$g(U, U) \geq 0,$$

$$g(U, U) = 0 \Leftrightarrow U = 0$$

özellikleri sağlanır. Pozitif tanımlılık koşulu yalnızca dejenere olmama koşulu ile gevşetilirse g bir yarı-Riemann metriği adını alır.

Tanım 3.7. M bir manifold olsun. Her $U, V \in \chi(M)$ için $\nabla_U V \in \chi(M)$ olacak biçimde tanımlanan ve

$$\nabla_{fU+V} W = f\nabla_U W + \nabla_V W,$$

$$\nabla_U (fV + W) = (Uf)V + f\nabla_U V + \nabla_U W$$

özelliklerini her $U, V, W \in \chi(M)$ ve $f \in C^\infty(M)$ için sağlayan $\nabla: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ operatörüne M üzerinde bir lineer koneksiyon, $\nabla_U V$ niceliğine ise V vektör alanının U yönündeki kovaryant türevi denir.

Bir A tensör alanı için kovaryant türev Leibniz kuralı kullanılarak doğal biçimde genişletilir. Eğer $\nabla A = 0$ ise A ya paralel tensör alanı adı verilir.

Tanım 3.8. $U, V \in \chi(M)$ iki vektör alanı olsun. Her $f \in C^\infty(M)$ için

$$[U, V]f = U(Vf) - V(Uf)$$

ile tanımlanan $[U, V]$ vektör alanına U ve V nin Lie parantezi denir.

Lie parantezi bilineer, antisimetriktir ve Jacobi özdeşliğini sağlar.

Tanım 3.9. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. M üzerinde her $U, V, W \in \chi(M)$ için

$$\nabla_U V - \nabla_V U = [U, V],$$

$$U \cdot g(V, W) = g(\nabla_U V, W) + g(V, \nabla_U W)$$

koşullarını sağlayan tek bir ∇ lineer koneksiyonu vardır ve bu koneksiyona Levi-Civita koneksiyonu denir.

Tanım 3.10. $U \in \chi(M)$ bir vektör alanı olsun. U tarafından üretilen yerel akış boyunca tensör alanlarının değişimini ölçen \mathcal{L}_U operatörüne U yönündeki Lie türevi denir.

Bir $f \in C^\infty(M)$ fonksiyonu, bir $V \in \chi(M)$ vektör alanı ve bir $\omega \in \Omega^1(M)$ 1-formu için

$$\mathcal{L}_U f = Uf, \quad \mathcal{L}_U V = [U, V],$$

$$(\mathcal{L}_U \omega)(V) = U(\omega(V)) - \omega([U, V])$$

eşitlikleri geçerlidir. Lie türevi daha yüksek mertebeli tensör alanlarına Leibniz kuralıyla genişletilir.

Tanım 3.11. (M, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ Levi-Civita koneksiyonu olsun. Her $U, V, W \in \chi(M)$ için

$$R(U, V)W = \nabla_U \nabla_V W - \nabla_V \nabla_U W - \nabla_{[U, V]} W \quad (3.1)$$

ile tanımlanan (1,3)-tipli R tensör alanına (M, g) nin Riemann eğrilik tensörü denir.

R tensörü ilk iki argümanına göre antisimetriktir ve Bianchi özdeşliklerini sağlar.

Eğer $R \equiv 0$ ise (M, g) manifolduna düz (flat) Riemann manifoldu denir.

Tanım 3.12. $n = 2k + 1$ -boyutlu bir M manifoldu üzerinde verilen ϕ (1,1)-tipli tensör alanı, η 1-formu, ξ vektör alanı ve g yarı-Riemann metriği için (ϕ, η, ξ, g) dördlüsü her $U, V \in \chi(M)$ için aşağıdakileri sağlıyorsa, bu yapıya M üzerinde bir hemen hemen parakontakt metrik yapı, M manifolduna ise hemen hemen parakontakt metrik manifold denir:

$$\phi^2 U = U - \eta(U)\xi, \quad \eta(\xi) = 1, \quad \eta \circ \phi = 0, \quad \phi\xi = 0, \quad (3.2)$$

$$g(U, \xi) = \eta(U), \quad g(U, V) = g(\phi U, \phi V) + \eta(U)\eta(V). \quad (3.3)$$

Tanım 3.13. (M, ϕ, η, ξ, g) bir hemen hemen parakontakt metrik manifold olsun. M nin Levi-Civita koneksiyonu ∇ olmak üzere her $U, V \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_U \phi)V = -g(U, V)\xi - \eta(V)U + 2\eta(U)\eta(V)\xi \quad (3.4)$$

koşulu sağlanıyorsa M ye para-Sasakian manifold ya da kısaca P-Sasakian manifold adı verilir (Sato, 1977).

Bir P-Sasakian manifoldda ayrıca her $U, V \in \chi(M)$ için

$$\nabla_U \xi = \phi U, \quad (\nabla_U \eta)V = g(\phi U, V) = (\nabla_V \eta)U \quad (3.5)$$

eşitlikleri geçerlidir (Azami, 2021).

Tanım 3.14. (M, g) n -boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. M nin her p noktasındaki tanjant uzaylarının ayrık birleşimi $TM = \cup_{p \in M} T_p M$ şeklinde tanımlanır ve TM ye M nin tanjant demeti denir.

TM , $2n$ -boyutlu diferansiyellenebilir bir manifolddur. $\pi: TM \rightarrow M$, $\pi(p, v) = p$ ile tanımlanan doğal izdüşüm, TM yi M üzerinde bir vektör demeti hâline getirir. M üzerindeki bir (U, x^1, \dots, x^n) yerel koordinat sistemi, TM üzerinde $(\pi^{-1}(U), x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$ yerel koordinatlarını indirger.

Tanım 3.15. $(p, v) \in TM$ olmak üzere $V_v = \ker\{\pi_*(v): T_v(TM) \rightarrow T_pM\}$ ile tanımlanan alt uzayların birleşimi $VTM = \cup_{(p,v)} V_v$ ye TM nin dikey dağılımı denir. VTM nin TTM içindeki bir tümleyeni HTM ile gösterildiğinde

$$TTM = VTM \oplus HTM$$

ayrışımı elde edilir ve HTM ye TM nin yatay dağılımı denir.

M nin Christoffel sembolleri Γ_{ki}^h ile gösterildiğinde $\pi^{-1}(U)$ üzerinde $\left\{\frac{\partial}{\partial y^i}\right\}$ ailesi VTM için, $\left\{\frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - y^k \Gamma_{ki}^l \frac{\partial}{\partial y^l}\right\}$ ailesi ise HTM için yerel çatı oluşturur.

Tanım 3.16. M bir manifold ve TM onun tanjant demeti olsun. M üzerinde tanımlı bir f fonksiyonunun, bir U vektör alanının, bir ω 1-formunun ve bir F (1,1)-tipli tensör alanının TM üzerine dikey liftleri sırasıyla f^v, U^v, ω^v ve F^v ile gösterilir ve $f^v = f \circ \pi$, $U^v(\iota\omega) = (\omega(U))^v$, $\omega^v(U^c) = (\omega(U))^v$, $\omega^v(U^v) = 0$, $F^v(U^v) = 0$, $F^v(U^c) = (F(U))^v$ özellikleriyle tanımlanır. Dikey lift, M üzerindeki nesnelere TM üzerine VTM içinde kalacak biçimde taşır (Yano ve Ishihara, 1973).

Tanım 3.17. F , M üzerinde $r \geq 1$ olmak üzere $(1, r)$ veya $(0, r)$ -tipli bir tensör alanı olsun. Her $U \in \chi(M)$ için $F_U(U_1, \dots, U_{r-1}) = F(U_1, \dots, U_{r-1}, U)$ ile tanımlanan tensör yardımıyla

$$\gamma_U F = (F_U)^v$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme γ operatörü denir.

γF daima TM üzerinde dikey bir nesnedir. Özel olarak (M, g) bir Riemann manifoldu ve R onun eğrilik tensörü ise $\gamma R(U, V)$ niceliği TM üzerinde dikey bir vektör alanıdır ve yatay liftlerin Lie parantezinin hesabında temel rol oynar (Yano ve Ishihara, 1973).

Tanım 3.18. M bir manifold olsun. Bir $f \in C^\infty(M)$ fonksiyonunun TM üzerine tam lifti, her $(p, v) \in TM$ için $f^c(p, v) = (df)_p(v)$ şeklinde tanımlanır.

Bir $U = U^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ vektör alanının tam lifti

$$U^c = U^i \frac{\partial}{\partial x^i} - y^j \frac{\partial U^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^i}$$

olarak verilir. Bir ω 1-formunun tam lifti $\omega^c(U^c) = (\omega(U))^c$ ve $\omega^c(U^v) = (\omega(U))^v$ koşullarıyla, bir F (1,1)-tipli tensör alanının tam lifti F^c ise $F^c(U^c) = (F(U))^c$ ve $F^c(U^v) = (F(U))^v$ koşullarıyla tanımlanır.

Tanım 3.19. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. Bir $f \in C^\infty(M)$ fonksiyonunun yatay lifti $f^h = f^c - \nabla_\gamma f$ şeklinde tanımlanır, burada $\nabla_\gamma f = \gamma(\nabla f)$ dir.

Bir $U = U^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ vektör alanının yatay lifti

$$U^h = U^i \frac{\partial}{\partial x^i} - y^j U^i \Gamma_{ij}^l \frac{\partial}{\partial y^l}$$

olarak verilir. Bu durumda $\pi_* U^h = U$ ve $U^h \in HTM$ olur. Bir ω 1-formu için yatay lift $\omega^h = \omega^c - \nabla_\gamma \omega$, bir F (1,1)-tipli tensör alanı için ise $F^h(U^h) = (FU)^h$ ve $F^h(U^v) = (FU)^v$ koşullarıyla tanımlanır.

Önerme 3.20. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. Her $U, V \in \chi(M)$, $f \in C^\infty(M)$ ve F (1,1)-tipli tensör alanı için aşağıdaki ilişkiler geçerlidir:

$$U^v f^v = 0, \quad U^v f^c = U^c f^v = (Uf)^v, \quad U^c f^c = (Uf)^c,$$

$$[U^v, V^v] = 0, \quad [U^v, V^c] = [U, V]^v, \quad [U^c, V^c] = [U, V]^c, \quad (3.6)$$

$$[U^v, V^h] = -(\nabla_V U)^v, \quad [U^h, V^h] = [U, V]^h - \gamma R(U, V), \quad (3.7)$$

burada R, g nin eğrilik tensörüdür. Ayrıca $P(x)$ tek değişkenli bir polinom olduğunda $P(F^c) = (P(F))^c$ ve $P(F^h) = (P(F))^h$ sağlanır (Yano ve Ishihara, 1973).

Önerme 3.21. (M, ϕ, η, ξ, g) bir P-Sasakian manifoldu olsun. Hemen hemen parakontakt yapının ve tam ile dikey liftlerin tanımları kullanıldığında aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$(\phi^c)^2 = (\phi^2)^c = I - \eta^c \otimes \xi^v - \eta^v \otimes \xi^c, \quad (3.8)$$

$$\eta^v(\xi^c) = \eta^c(\xi^v) = 1, \quad \eta^v(\xi^v) = \eta^c(\xi^c) = 0, \quad (3.9)$$

$$\phi^c(\xi^v) = \phi^c(\xi^c) = 0, \quad \eta^v \circ \phi^c = \eta^c \circ \phi^c = 0. \quad (3.10)$$

Önerme 3.22. (M, ϕ, η, ξ, g) bir P-Sasakian manifoldu olsun. Yatay ve dikey liftlerin tanımlarından aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$(\phi^h)^2 = (\phi^2)^h = I - \eta^h \otimes \xi^v - \eta^v \otimes \xi^h, \quad (3.11)$$

$$\eta^v(\xi^h) = \eta^h(\xi^v) = 1, \quad \eta^v(\xi^v) = \eta^h(\xi^h) = 0, \quad (3.12)$$

$$\phi^h(\xi^v) = \phi^h(\xi^h) = 0, \quad \eta^v \circ \phi^h = \eta^h \circ \phi^h = 0. \quad (3.13)$$

Ayrıca her $U \in \chi(M)$ için $\phi^h U^v = (\phi U)^v$, $\phi^h U^h = (\phi U)^h$ ve $\eta^h(U^v) = \eta^v(U^v) = 0$, $\eta^h(U^h) = \eta^v(U^h) = (\eta(U))^h$ sağlanır.

Tanım 3.23. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. g metriğinin TM üzerine tam lifti g^c , her $U, V \in \chi(M)$ için

$$g^c(U^v, V^v) = 0, \quad g^c(U^v, V^c) = g^c(U^c, V^v) = (g(U, V))^v, \quad (3.14)$$

$$g^c(U^c, V^c) = (g(U, V))^c$$

koşullarıyla tanımlanan TM üzerinde bir yarı-Riemann metriğidir.

Tanım 3.24. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. g nin TM üzerine yatay lifti g^h , her $U, V \in \chi(M)$ için

$$g^h(U^v, V^v) = 0, \quad g^h(U^v, V^h) = (g(U, V))^v \text{ ve } g^h(U^h, V^h) = 0 \quad (3.15)$$

koşullarıyla verilen yarı-Riemann metriğidir.

Tanım 3.25. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. TM üzerinde her $U, V \in \chi(M)$ için

$$g^s(U^v, V^v) = (g(U, V))^v, \quad g^s(U^v, V^h) = 0, \quad g^s(U^h, V^h) = (g(U, V))^v \quad (3.16)$$

koşullarıyla tanımlanan g^s metriğine TM üzerindeki Sasaki metriği denir.

Sasaki metriği TM üzerinde bir Riemann metriğidir.

Tanım 3.26. M bir manifold ve ∇ M üzerinde bir lineer koneksiyon olsun. ∇ nin TM üzerine tam lifti ∇^c , her $U, V \in \chi(M)$ için

$$\nabla_{U^c}^c V^c = (\nabla_U V)^c, \quad \nabla_{U^v}^c V^v = 0, \quad \nabla_{U^v}^c V^c = \nabla_{U^c}^c V^v = (\nabla_U V)^v \quad (3.17)$$

koşullarıyla tanımlanan TM üzerindeki yegâne lineer koneksiyondur.

Tanım 3.27. M üzerindeki bir ∇ lineer koneksiyonunun TM üzerine yatay lifti ∇^h , her $U, V \in \chi(M)$ için

$$\nabla_{U^v}^h V^v = \nabla_{U^v}^h V^h = 0, \quad \nabla_{U^h}^h V^v = (\nabla_U V)^v, \quad \nabla_{U^h}^h V^h = (\nabla_U V)^h \quad (3.18)$$

koşullarıyla tanımlanan TM üzerindeki yegâne lineer koneksiyondur.

Tanım 3.28. a ve b pozitif tamsayılar olsun. $x^2 - ax - b = 0$ ikinci dereceden denkleminin pozitif kökü

$$c = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \quad (3.19)$$

şeklindedir ve metalik ortalamalar ailesinin bir üyesi olup metalik oran olarak adlandırılır.

$a = b = 1$ için bu sayı altın oran φ ye, $a = 2, b = 1$ için ise gümüş orana eşittir (Hretcanu ve Crasmareanu, 2013).

Tanım 3.29. M bir manifold olsun. M üzerindeki bir J $(1,1)$ -tipli tensör alanı

$$J^2 = pJ + qI \quad (3.20)$$

denklemini sağlıyorsa J ye M üzerinde bir metalik yapı denir. Burada p, q pozitif tamsayılar ve I birim tensör alanıdır.

Tanım 3.30. M bir manifold olsun. Eğer M üzerinde tanımlı bir g Riemann metriği her $U, V \in \chi(M)$ için

$$g(JU, V) = g(U, JV) \quad (3.21)$$

veya buna denk olarak $g(JU, JV) = p g(U, JV) + q g(U, V)$ koşulunu sağlıyorsa, g metriğine J -uyumlu (veya pür) metrik adı verilir.

Bu durumda (M, g, J) üçlüsü metalik Riemann manifoldu olarak adlandırılır (Hretcanu ve Crasmareanu, 2013).

Tanım 3.31. p ve q iki pozitif tamsayı ve c , (3.19) ile verilen metalik oran olsun. Meta-metalik oran

$$\psi^2 - \frac{p}{c}\psi - q = 0$$

denkleminin pozitif kökü olan $\sigma_{p,q} = \frac{\frac{p}{c} + \sqrt{\frac{p^2}{c^2} + 4q}}{2}$ sayısı olarak tanımlanır. Bu durumda $\sigma_{p,q}^2 = \frac{p}{c}\sigma_{p,q} + q$ eşitliği sağlanır.

Tanım 3.32. M bir manifold ve J , M üzerinde (1,1)-tipli bir tensör alanı olsun. Her $U, V \in \chi(M)$ için

$$N_J(U, V) = [JU, JV] - J[JU, V] - J[U, JV] + J^2[U, V] \quad (3.22)$$

ile tanımlanan (1,2)-tipli N_J tensörüne J nin Nijenhuis tensörü denir.

Eğer $N_J \equiv 0$ ise J yapısına integrallenebilir denir. (Goldberg ve Yano, 1970).

Tanım 3.33. (M, g) bir Riemann manifoldu, ∇ Levi-Civita koneksiyonu ve M üzerinde bir η 1-formu için

$$D_p = \{v \in T_p M : \eta(v) = 0\}, \quad p \in M \quad (3.23)$$

şeklinde tanımlanan D dağılımını ele alalım. Eğer her $U, V \in D$ için $\nabla_U V \in D$ ise ∇ koneksiyonuna D -düz koneksiyon denir.

Önerme 3.34. Φ , bir manifold üzerinde bir 2-form ve X, Y, Z vektör alanları olsun. Bu durumda Φ nin dış türevi

$$3 d\Phi(X, Y, Z) = X\Phi(Y, Z) + Y\Phi(Z, X) + Z\Phi(X, Y) - \Phi([X, Y], Z) - \Phi([Z, X], Y) - \Phi([Y, Z], X) \quad (3.24)$$

eşitliği ile verilir.

Bu eşitlik, Φ nin kapalı olup olmadığını sınamak için temel araçtır.

Bir sonraki bölümde, P-Sasakian yapısının tam ve yatay liftleri kullanılarak yeni (1,1)-tipli tensör alanları tanımlanacak, bu tensör alanlarının Tanım 3.29 daki klasik metalik yapı denkleminin bir genelleştirmesi olan $J^2 = \frac{p}{c}J + qI$ ilişkisini sağladığı gösterilerek tanjant demet üzerinde meta-metalik yapılar elde edilecektir.

4. BULGULAR

Bu bölümde, bir P-Sasakian manifoldun tanjant demeti üzerinde meta-metalik yapılar inşa edilecek ve bu yapıların metrik uyumluluğu, integrallenebilirliği ile paralellik özellikleri incelenecektir. İlk olarak baz manifolddaki para-Sasakian yapının tam liftleri kullanılarak tanjant demetinde bir meta-metalik Riemann yapısı elde edilecek, ardından aynı incelemeler yatay lift yardımıyla tekrarlanacaktır.

Tanım 4.1. M bir manifold olsun. M üzerindeki (1,1)-tipli bir J tensör alanı

$$J^2 = \frac{p}{c} J + qI \quad (4.1)$$

koşulunu sağlıyorsa J ye M üzerinde bir meta-metalik yapı denir. Burada $p, q \in \mathbb{Z}^+$, c ise (3.19) ile verilen metalik orandır.

M üzerindeki bir g Riemann metriği her $U, V \in \chi(M)$ için

$$g(JU, V) = g(U, JV),$$

$$g(JU, JV) = g(J^2U, V) = g\left(\left(\frac{p}{c}J + qI\right)U, V\right) = \frac{p}{c}g(JU, V) + qg(U, V) \quad (4.2)$$

koşulunu sağlıyorsa, g ye J -uyumlu (pür) metrik adı verilir. Bu durumda (M, g, J) üçlüsü meta-metalik Riemann manifoldu olarak adlandırılır.

Önerme 4.2. (M, ϕ, η, ξ, g) bir P-Sasakian manifoldu ve TM onun tanjant demeti olsun. TM üzerinde

$$J = \frac{p}{2c}I - \left(\sigma_{p,q} - \frac{p}{2c}\right)(\phi^c + \eta^v \otimes \xi^v + \eta^c \otimes \xi^c) \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlanan (1,1)-tipli J tensör alanı, TM üzerinde bir meta-metalik yapıdır.

İspat. (3.8) – (3.10) eşitliklerinden yararlanılarak için aşağıdakiler elde edilir:

$$\begin{aligned} J(\xi^v) &= \frac{p}{2c}I(\xi^v) - \left(2\sigma_{p,q} - \frac{p}{2c}\right)(\phi^c + \eta^v \otimes \xi^v + \eta^c \otimes \xi^c)(\xi^v) \\ &= \frac{p}{2c}\xi^v - \left(2\sigma_{p,q} - \frac{p}{2c}\right)(\phi^c(\xi^v) + \eta^v(\xi^v)\xi^v + \eta^c(\xi^v)\xi^c) \\ &= \frac{p}{2c}\xi^v - \left(\sigma_{p,q} - \frac{p}{2c}\right)\xi^c. \end{aligned}$$

Burada (3.10) gereği $\phi^c(\xi^v) = 0$, (3.9) gereği $\eta^v(\xi^v) = 0$ ve $\eta^c(\xi^v) = 1$ kullanılmıştır. Benzer şekilde

$$J(\xi^c) = \frac{p}{2c} \xi^c - (\sigma_{p,q} - \frac{p}{2c}) \xi^v$$

$$J(\phi^c(\tilde{U})) = \frac{p}{2c} \phi^c(\tilde{U}) - (\sigma_{p,q} - \frac{p}{2c}) (\tilde{U} - \eta^c(\tilde{U}) \xi^v - \eta^v(\tilde{U}) \xi^c).$$

elde edilir. Buradan keyfi $\tilde{U} \in \chi(TM)$ için

$$J(\tilde{U}) = \frac{p}{2c} \tilde{U} - (\sigma_{p,q} - \frac{p}{2c}) (\phi^c(\tilde{U}) + \eta^v(\tilde{U}) \xi^v + \eta^c(\tilde{U}) \xi^c) \quad (4.4)$$

ve

$$\begin{aligned} J^2(\tilde{U}) &= \frac{p}{2c} J(\tilde{U}) - (\sigma_{p,q} - \frac{p}{2c}) [J(\phi^c(\tilde{U})) + \eta^v(\tilde{U}) J(\xi^v) + \eta^c(\tilde{U}) J(\xi^c)] \\ &= \frac{p}{2c} \left[\frac{p}{2c} \tilde{U} - (\sigma_{p,q} - \frac{p}{2c}) (\phi^c(\tilde{U}) + \eta^v(\tilde{U}) \xi^v + \eta^c(\tilde{U}) \xi^c) \right] \\ &\quad - (\sigma_{p,q} - \frac{p}{2c}) \left[\frac{p}{2c} \phi^c(\tilde{U}) - (\sigma_{p,q} - \frac{p}{2c}) (\tilde{U} - \eta^c(\tilde{U}) \xi^v - \eta^v(\tilde{U}) \xi^c) \right. \\ &\quad \left. + \eta^v(\tilde{U}) (\frac{p}{2c} \xi^v - (\sigma_{p,q} - \frac{p}{2c}) \xi^c) + \eta^c(\tilde{U}) (\frac{p}{2c} \xi^c - (\sigma_{p,q} - \frac{p}{2c}) \xi^v) \right] \\ &= \left[\frac{p^2}{4c^2} + (\sigma_{p,q} - \frac{p}{2c})^2 \right] \tilde{U} - \frac{p}{c} (\sigma_{p,q} - \frac{p}{2c}) (\phi^c(\tilde{U}) + \eta^v(\tilde{U}) \xi^v + \eta^c(\tilde{U}) \xi^c) \\ &= q \tilde{U} + \frac{p}{c} \left[\frac{p}{2c} \tilde{U} - (\sigma_{p,q} - \frac{p}{2c}) (\phi^c(\tilde{U}) + \eta^v(\tilde{U}) \xi^v + \eta^c(\tilde{U}) \xi^c) \right] \\ &= \frac{p}{c} J(\tilde{U}) + q \tilde{U} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $(\sigma_{p,q} - \frac{p}{2c})^2 = q + \frac{p^2}{4c^2}$ eşitliği kullanılmıştır. \square

Önerme 4.3. (M, ϕ, η, ξ, g) bir P-Sasakian manifoldu olsun ve J (4.3) ile verilsin. Bu durumda her $\tilde{U}, \tilde{V} \in \chi(TM)$ için

$$g^c(J\tilde{U}, J\tilde{V}) = \frac{p}{c} g^c(\tilde{U}, J\tilde{V}) + q g^c(\tilde{U}, \tilde{V}) \quad (4.5)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Hemen hemen parakontakt yapı (3.3) gereği $g(U, \xi) = \eta(U)$ ve $\phi\xi = 0$ olduğundan, tam lift metriği için (3.14) kullanılarak her $U, V \in \chi(M)$ için

$$g^c(U^v, V^v) = 0, \quad g^c(U^v, \xi^c) = (g(U, \xi))^v = (\eta(U))^v,$$

$$g^c((\phi U)^v, \xi^c) = (g(\phi U, \xi))^v = (g(U, \phi \xi))^v = 0, \quad g^c(\xi^c, \xi^c) = (g(\xi, \xi))^c = 0$$

elde edilir. (4.4) ifadesi ve dikey liftlerle ξ^c arasındaki simetri özellikleri kullanılarak

$$JU^v = \frac{p}{2c} U^v - \left(\sigma_{p,q} - \frac{p}{2c} \right) ((\phi U)^v + (\eta(U))^v \xi^c), \quad (4.6)$$

$$JU^c = \frac{p}{2c} U^c - \left(\sigma_{p,q} - \frac{p}{2c} \right) ((\phi U)^c + (\eta(U))^v \xi^v + (\eta(U))^c \xi^c) \quad (4.7)$$

ifadeleri yazılır. İç çarpımın bilineerliği kullanılarak ve sıfır olan terimler atılarak

$$g^c(JU^v, JV^v) = \frac{p}{c} g^c(U^v, JV^v) + q g^c(U^v, V^v)$$

ilişkisi doğrulanır. Diğer durumlar (örneğin JU^v ile JV^c , JU^c ile JV^c) için hesap, (3.14), (4.6), (4.7) ile P-Sasakian simetrisi $g(U, \phi V) = g(\phi U, V)$ ve $g(\phi U, \phi V) = g(U, V) - \eta(U)\eta(V)$ kullanılarak benzer şekilde tamamlanır. \square

Teorem 4.4. (M, ϕ, η, ξ, g) bir P-Sasakian manifoldu ve J , (4.3) ile verilsin. Bu durumda J meta-metalik yapısı integrallenebilir.

İspat. η 1-formu, (3.23) ile tanımlanan D dağılımını verir. D nin ortogonal tümleyeni ξ tarafından gerilen bir boyutlu dağılımdır. J nin Nijenhuis tensörünün hesabı için aşağıdaki yardımcı tensörler tanımlansın:

$$N^1 = N_\phi - 2d\eta \otimes \xi, \quad N^2(U, V) = (\mathcal{L}_{\phi U} \eta)V - (\mathcal{L}_{\phi V} \eta)U,$$

$$N^3 = \mathcal{L}_\xi \phi, \quad N^4 = \mathcal{L}_\xi \eta.$$

Bu tensörler dış türev, Lie türevi ve Nijenhuis tensörü yardımıyla tanımlanmıştır. D nin $C^\infty(M)$ -modül kesitleri olan U, V için, Önerme 3.20 ile verilen (3.6), (3.7) Lie parantez kuralları ve Önerme 3.21 deki (3.8)–(3.10) eşitlikleri kullanılarak

$$N_J(U^v, V^v) = 0,$$

$$N_J(U^v, V^c) = A([N^1(U, V)]^v + N^2(U, V)\xi^c),$$

$$N_J(U^c, V^c) = A([N^1(U, V)]^c + N^2(U, V)\xi^v),$$

$$N_J(U^v, \xi^v) = A(-(N^3U)^v + N^4(U)\xi^c),$$

$$N_J(U^v, \xi^c) = A([\phi(N^3U) - N^4(U)\xi]^v + N^2(U, \xi)\xi^c),$$

$$N_J(U^c, \xi^v) = A(-(N^3U)^c + (\phi(N^3U))^v - [N^4(\phi U) - N^4(U)]^c \xi^c),$$

$$N_J(U^c, \xi^c) = A(-(N^3U)^v + [N^4(U) + N^2(U, \xi)]\xi^c + [\phi(N^3U) - N^4(U)\xi]^c),$$

$$N_J(\xi^v, \xi^v) = N_J(\xi^c, \xi^c) = N_J(\xi^v, \xi^c) = 0$$

eşitlikleri elde edilir; burada $A = \left(\sigma_{p,q} - \frac{p}{2c}\right)^2$ dir. P-Sasakian manifoldları normal olduğundan N^1 tensörü sıfırdır, üstelik $N^1 = 0$ olduğunda N^2, N^3 ve N^4 tensörleri de sıfırlanır. Dolayısıyla her $\tilde{U}, \tilde{V} \in \chi(TM)$ için $N_J(\tilde{U}, \tilde{V}) = 0$ olur, yani J yapısı integrallenebilirdir. \square

Teorem 4.5. (M, ϕ, η, ξ, g) bir P-Sasakian manifoldu ve J , (4.3) ile verilsin. Bu durumda J meta-metalik yapısı ∇^c ye göre paralel olamaz.

İspat. D dağılımı (3.23) ile tanımlansın. Tam lift koneksiyonun özellikleri (3.17), P-Sasakian eşitliği (3.5) ile verilen $\nabla_U \xi = \phi U$, ve (4.3) kullanılarak her $U \in D$ için

$$(\nabla_{U^c}^c J)\xi^c = \nabla_{U^c}^c (J\xi^c) - J(\nabla_{U^c}^c \xi^c)$$

açılımı yapılır. $J\xi^c = \frac{p}{2c}\xi^c - \left(\sigma_{p,q} - \frac{p}{2c}\right)\xi^v$ olduğu Önerme 4.2 ispatından bilinmektedir.

$\nabla_U \xi = \phi U$ ve $\eta(U) = 0$ ($U \in D$) eşitlikleri kullanılarak

$$(\nabla_{U^c}^c J)\xi^c = -\left(\sigma_{p,q} - \frac{p}{2c}\right)[(\phi U)^v - U^c] \neq 0$$

elde edilir. Bu ise her sıfırdan farklı $U \in D$ için J yapısının ∇^c ye göre paralel olmadığını gösterir. \square

Önerme 4.6. (M, ϕ, η, ξ, g) bir P-Sasakian manifoldu olsun, $\nabla\phi = 0$ varsayalım ve J , (4.3) ile verilsin. Bu durumda

$$\Phi(\tilde{U}, \tilde{V}) = g^c(\tilde{U}, J\tilde{V}) - \frac{p}{2c}g^c(\tilde{U}, \tilde{V}), \quad \tilde{U}, \tilde{V} \in \chi(TM) \quad (4.8)$$

ile tanımlanan temel 2-form Φ ancak ve ancak her $U, V, W \in \chi(M)$ için

$$g(\nabla_V U, \phi W) + g(\nabla_W V, \phi U) + g(\nabla_U W, \phi V) = 0 \quad (4.9)$$

sağlandığında kapalıdır.

İspat. 2-formlar için dış türev (coboundary) formülü (Önerme 3.34) ile (3.24) kullanılarak her $U, V, W \in \chi(M)$ için $3 d\Phi(U^c, V^c, W^v)$ açılımı yazılır. (4.6) ve (4.7) ifadeleri ile JW^v ve JU^c açılımları yerine konulduğunda elde edilen ifade $\nabla\phi = 0$ varsayımı ve hemen hemen parakontakt (3.3) ten gelen $g(U, \phi V) = g(\phi U, V)$ simetrisi kullanılarak

$$Ug(V, \phi W) - g([U, V], \phi W) = g(\nabla_V U, \phi W) + g(\nabla_U W, \phi V)$$

eşitliği yazılır. Ayrıca (3.5) ile verilen $\nabla_U \xi = \phi U$ kullanılarak $g([U, V], \xi) = U(\eta(V)) - V(\eta(U))$ elde edilir. Bu özdeşlikler birleştirildiğinde

$$\begin{aligned} -\frac{3}{\sigma_{p,q} - \frac{p}{2c}} d\Phi(U^c, V^c, W^v) &= 2\{g(\nabla_V U, \phi W) + g(\nabla_W V, \phi U) + g(\nabla_U W, \phi V)\} \\ &+ 2\{(\eta(V))^c (U\eta(W))^v + (\eta(W))^v (V\eta(U))^c + (\eta(U))^c (W\eta(V))^v\} \end{aligned}$$

ifadesi bulunur. $U, V, W \in D$ alındığında η içeren terimler sıfırlanır ve $d\Phi(U^c, V^c, W^v) = 0$ olması (4.9) ile denk olur. $U = \xi$ veya $W = \xi$ durumları da aynı sonucu verir. Diğer kombinasyonlar (4.9) a indirgenir. \square

Şimdi, yatay lift kullanarak TM üzerinde bir F meta-metalik yapısı elde edeceğiz ve bunun paralelliği ile integrallenebilirliğini inceleyeceğiz.

Önerme 4.7. (M, ϕ, η, ξ, g) bir P-Sasakian manifoldu olsun. TM üzerinde

$$F = \frac{p}{2c} I - \left(\sigma_{p,q} - \frac{p}{2c}\right) (\phi^h + \eta^h \otimes \xi^h + \eta^v \otimes \xi^v) \quad (4.10)$$

ile tanımlanan (1,1)-tipli F tensör alanı bir meta-metalik yapıdır.

İspat. Önerme 3.22 ile verilen (3.11)–(3.13) eşitlikleri kullanılarak her $\tilde{U} \in \chi(TM)$ için

$$\begin{aligned} F(\xi^v) &= \frac{p}{2c} \xi^v - \left(\sigma_{p,q} - \frac{p}{2c}\right) \xi^h, & F(\xi^h) &= \frac{p}{2c} \xi^h - \left(\sigma_{p,q} - \frac{p}{2c}\right) \xi^v, \\ F(\phi^h \tilde{U}) &= \frac{p}{2c} \phi^h \tilde{U} - \left(\sigma_{p,q} - \frac{p}{2c}\right) (\tilde{U} - \eta^h(\tilde{U})\xi^v - \eta^v(\tilde{U})\xi^h) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan keyfi \tilde{U} için

$$F(\tilde{U}) = \frac{p}{2c} \tilde{U} - \left(\sigma_{p,q} - \frac{p}{2c} \right) (\phi^h \tilde{U} + \eta^v(\tilde{U}) \xi^v + \eta^h(\tilde{U}) \xi^h)$$

bulunur. (3.19) den gelen $\sigma_{p,q}^2 = \frac{p}{c} \sigma_{p,q} + q$ özdeşliği kullanılarak $F^2(\tilde{U}) = \frac{p}{c} F(\tilde{U}) + q \tilde{U}$ elde edilir. Dolayısıyla F bir meta-metalik yapıdır. \square

Önerme 4.8. (M, ϕ, η, ξ, g) bir P-Sasakian manifoldu, F (4.10) ile ve g^s (3.16) ile tanımlanan Sasaki metriği olsun. Bu durumda her $\tilde{U}, \tilde{V} \in \chi(TM)$ için

$$g^s(F\tilde{U}, F\tilde{V}) = \frac{p}{c} g^s(\tilde{U}, F\tilde{V}) + q g^s(\tilde{U}, \tilde{V}) \quad (4.11)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Önerme 3.22 deki yatay-dikey lift uyumlulukları gereği her $U \in \chi(M)$ için

$$FU^v = \frac{p}{2c} U^v - \left(\sigma_{p,q} - \frac{p}{2c} \right) (\phi U)^v$$

elde edilir. Sasaki metriğinin tanımı (3.16) kullanılarak

$$g^s(FU^v, FV^v) = \left\{ \left(q + \frac{p^2}{2c^2} \right) g(U, V) - \frac{p}{c} \left(\sigma_{p,q} - \frac{p}{2c} \right) g(U, \phi V) \right\}^v,$$

$$g^s(U^v, FV^v) = \left\{ \frac{p}{2c} g(U, V) - \left(\sigma_{p,q} - \frac{p}{2c} \right) g(U, \phi V) \right\}^v$$

bulunur. Buradan doğrudan $g^s(FU^v, FV^v) = \frac{p}{c} g^s(U^v, FV^v) + q g^s(U^v, V^v)$ elde edilir. Diğer durumlar (3.16), (4.10) ve P-Sasakian özellikleri kullanılarak benzer biçimde gösterilir. \square

Teorem 4.9. (M, ϕ, η, ξ, g) bir P-Sasakian manifoldu olsun. TM üzerinde (4.10) ile tanımlanan F meta-metalik yapısı integrallenebilirdir ancak ve ancak ∇ koneksiyonu D -düzdür ve

$$R(\phi U, \phi V) + R(U, V) - \phi \{ R(\phi U, V) + R(U, \phi V) \} = 0 \quad (4.12)$$

eşitliği her $U, V \in D$ için sağlanır; burada R , (3.1) ile verilen M nin eğrilik tensörüdür.

İspat. F nin integrallenebilir olması Tanım 3.32 gereği $N_F = 0$ olmasına denktir. Yazım kolaylığı için $\alpha = \sigma_{p,q} - \frac{p}{2c}$ skaler bir sabit ve $\tilde{\phi} = \phi^h + \eta^h \otimes \xi^h + \eta^v \otimes \xi^v$ olarak

tanımlansın. $F = \frac{p}{2c}I - \alpha\tilde{\phi}$ yazılabilir. Nijenhuis tensörünün lineerlik özelliklerinden ve I nın integrallenebilirliğe etki etmemesinden dolayı $N_F = \alpha^2 N_{\tilde{\phi}}$ olur. $\alpha \neq 0$ olduğundan $N_F = 0$ olması $N_{\tilde{\phi}} = 0$ olmasına denktir.

Her $U, V \in D$ ve $W \in TM$ için yatay ve dikey liftlerin özellikleri (3.6), (3.7) ile (3.11)–(3.13) ve eğrilik tensörünün tanımı (3.1) kullanılarak $N_{\tilde{\phi}}$ tensörünün bileşenleri hesaplandığında, yatay-yatay eşleşme

$$N_{\tilde{\phi}}(U^h, V^h)W = [N^1(U, V)]^h W + \{\eta R(\phi U, V)W + \eta R(U, \phi V)W\}\xi^h \\ - \{R(\phi U, \phi V)W + R(U, V)W - \phi R(\phi U, V)W + \phi R(U, \phi V)W\}^v + N^2(U, V)\xi^v$$

ifadesini verir. P-Sasakian manifoldlar için $N^1 = 0$ ve $N^2 = 0$ olduğundan, bu ifadenin sıfır olması, dikey lift bileşeninin sıfırlanması ile, yani (4.12) ile denktir.

Yatay-dikey eşleşme için aynı şekilde hesap yapıldığında

$$N_{\tilde{\phi}}(U^h, V^v) = (\nabla_{\phi U}\phi V - \phi\nabla_{\phi U}V - \phi\nabla_U\phi V + \nabla_UV)^v - \{\eta(\nabla_{\phi U}V) + \eta(\nabla_U\phi V)\}\xi^h$$

ifadesi bulunur. P-Sasakian özelliği (3.4) kullanılarak bu ifadenin sıfır olması, her $U, V \in D$ için $\eta(\nabla_UV) = 0$ olmasına, yani $\nabla_UV \in D$ koşuluna denk düşer. Tanım 3.33 gereği bu, ∇ nın D -düz koneksiyon olması demektir.

Diğer eşleşmeler ξ ile $\phi\xi = 0$ ve $\eta(\xi) = 1$ özellikleri sayesinde otomatik olarak sıfırlanır. Sonuç olarak $N_F = 0$ koşulu, (4.12) ve ∇ nın D -düz koneksiyon olmasının eş zamanlı sağlanmasına denktir. \square

Önerme 4.10. (M, ϕ, η, ξ, g) bir P-Sasakian manifoldu ve F , (4.10) ile verilsin. Bu durumda F meta-metalik yapısı ∇^h ye göre paralel olamaz.

İspat. Yatay lift koneksiyonu özellikleri (3.18) ve P-Sasakian eşitliği $\nabla_U\xi = \phi U$ kullanılarak

$$(\nabla_{U^h}^h F)\xi^h = \nabla_{U^h}^h(F\xi^h) - F(\nabla_{U^h}^h\xi^h) = -\left(\sigma_{p,q} - \frac{p}{2c}\right)[(\phi U)^v - (\phi^2 U)^h]$$

elde edilir. Her $U \in D \setminus \{0\}$ için bu ifade sıfırdan farklıdır, dolayısıyla F , ∇^h ye göre paralel değildir. \square

Önerme 4.11. (M, ϕ, η, ξ, g) bir P-Sasakian manifoldu ve F , (4.10) ile verilsin. TM üzerinde

$$\Phi'(\tilde{U}, \tilde{V}) = g^s(\tilde{U}, F\tilde{V}) - \frac{p}{2c} g^s(\tilde{U}, \tilde{V}), \quad \tilde{U}, \tilde{V} \in \chi(TM) \quad (4.13)$$

ile tanımlanan temel 2-form Φ' kapalı olamaz.

İspat. $U \in D$, $g(U, U) = 1$ olan birim vektör alanı olsun. (4.10) ve Önerme 3.22 gereği

$$FU^v = \frac{p}{2c} U^v - \left(\sigma_{p,q} - \frac{p}{2c} \right) (\phi U)^v, \quad F\xi^v = \frac{p}{2c} \xi^v - \left(\sigma_{p,q} - \frac{p}{2c} \right) \xi^h$$

ifadeleri yazılır (zira $U \in D$ için $\eta(U) = 0$). Önerme 3.34 deki dış türev formülü (3.24), Sasaki metriğinin tanımı (3.16) ve (3.7) deki $[U^v, V^h] = -(\nabla_V U)^v$ Lie parantez kuralı ile $\nabla_U \xi = \phi U$ kullanılarak

$$-\frac{3}{\sigma_{p,q} - \frac{p}{2c}} d\Phi'(U^h, U^v, \xi^v) = -g(\nabla_U \xi, \phi U)^v = -g(\phi U, \phi U)^v = -g(U, U)^v = -1$$

elde edilir. Burada son adımda hemen hemen parakontakt (3.3) den gelen $g(\phi U, \phi U) = g(U, U) - \eta(U)\eta(U) = 1$ ($U \in D$ için $\eta(U) = 0$) eşitliği kullanılmıştır. Dolayısıyla $d\Phi'(U^h, U^v, \xi^v) \neq 0$ olur ve Φ' kapalı olamaz. \square

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu bölümde, tez kapsamında elde edilen bulgular bir bütün olarak değerlendirilecek, sonuçların literatürdeki çalışmalarla ilişkisi tartışılacak ve ileride yapılabilecek araştırmalar için öneriler sunulacaktır.

5.1. Sonuçların Genel Değerlendirmesi

Bu tezde, bir P-Sasakian manifoldun tanjant demeti üzerinde tam ve yatay liftler yardımıyla iki farklı meta-metalik yapı inşa edilmiş; bu yapıların metrik uyumluluğu, integrallenebilirliği ve paralellik özellikleri sistematik biçimde incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar, tanjant demet geometrisinin meta-metalik yapı kuramına ne biçimde katkı sağlayabileceğini ortaya koymaktadır.

İlk olarak, tam lift kaynaklı J yapısının (Önerme 4.2) tanjant demeti üzerinde her zaman bir meta-metalik Riemann yapısı oluşturduğu ve g^c tam lift metriğiyle uyumlu olduğu (Önerme 4.3) gösterilmiştir. Bu yapının integrallenebilirliği (Teorem 4.4), baz manifoldun P-Sasakian yapısından kaynaklanan $N^1 = 0$ özelliği sayesinde herhangi bir ek koşula gerek kalmadan sağlanmaktadır. Bununla birlikte J yapısı, ∇^c tam lift koneksiyonuna göre paralel olamamaktadır (Teorem 4.5). Bu durum P-Sasakian yapının $\nabla_U \xi = \phi U$ özelliğinin doğal bir sonucudur ve geometrik olarak yapının tam lift düzeyinde rijit olmadığını göstermektedir.

İkinci olarak, yatay lift kaynaklı F yapısının (Önerme 4.7) Sasaki metriğiyle uyumlu bir meta-metalik Riemann yapısı tanımladığı (Önerme 4.8) gösterilmiştir. Tam lift durumundan farklı olarak, F yapısının integrallenebilirliği baz manifoldun geometrisine doğrudan bağlıdır: ∇ koneksiyonunun D -düz olması ve eğrilik tensörü üzerindeki (4.12) koşulunun aynı anda sağlanması gerekmektedir (Teorem 4.9). Bu durum, yatay lift yaklaşımının yalnızca cebirsel değil aynı zamanda diferansiyel kısıtlamalar gerektirdiğini ortaya koymaktadır. Ayrıca F yapısının da ∇^h ye göre paralel olamadığı ve buna karşılık gelen Φ' temel 2-formunun kapalı olamayacağı (Önerme 4.10, Önerme 4.11) ispatlanmıştır.

Bu iki yapı arasındaki temel fark integrallenebilirlik koşulunun yapısında belirginleşmektedir. Tam lift, baz manifoldun P-Sasakian olması koşulu altında otomatik integrallenebilirlik üretirken, yatay lift bu sonucu ancak ek geometrik kısıtlamalar altında sağlamaktadır. Bu bulgu, lift seçimine bağlı olarak elde edilen meta-metalik yapıların farklı geometrik karakter taşıdığını göstermektedir.

5.2. Literatürle Karşılaştırma

Elde edilen sonuçlar Azami'nin (2021) P-Sasakian manifoldların tanjant demetleri üzerinde metalik yapılarla ilgili bulgularıyla karşılaştırıldığında, klasik metalik yapı denklemi $J^2 = pJ + qI$ yerine genelleştirilmiş $J^2 = \frac{p}{c}J + qI$ denklemi kullanıldığında benzer geometrik özelliklerin korunduğu görülmektedir. Bu durum, p katsayısının $\frac{p}{c}$ ile değiştirilmesinin yapının cebirsel iskeletini koruduğunu, yalnızca metalik orana ek bir bağımlılık getirdiğini ortaya koymaktadır. Dolayısıyla bu tezdeki bulgular, metalik yapı kuramı için bilinen sonuçların meta-metalik düzeye doğal bir genelleştirmesidir.

Erdoğan vd. (2024) çalışmasında meta-metalik yapılar yalnızca baz manifold üzerinde ele alınmış; integrallenebilirlik, eğrilik tensörü ile ilişki ve sabit eğrilik durumu incelenmiştir. Bu tezde ise farklı bir meta-metalik yapı tanjant demet ortamına yerleştirilmektedir. Böylece Erdoğan ve arkadaşlarının baz manifold üzerinde elde ettikleri sonuçların lift teorisi aracılığıyla daha yüksek boyutlu bir geometrik yapıda yeniden ifade edilebileceği anlaşılmaktadır.

Şahin ve Şahin (2022) tarafından tanıtılan meta-altın yapı kuramı ve Altunbaş (2023b) tarafından ortaya konulan farklı tip meta-altın yapı yaklaşımı ile karşılaştırıldığında, bu tezde elde edilen sonuçların daha genel bir cebirsel zemin üzerinde durduğu söylenebilir. Meta-altın yapılar, $p = q = 1$ özel durumuna karşılık gelmekte iken meta-metalik yapılar herhangi bir $p, q \in \mathbb{Z}^+$ ikilisi için tanımlanabilmektedir. Bu yönüyle, meta-altın yapılar bu tezde incelenen meta-metalik yapıların bir alt sınıfı olarak değerlendirilebilir.

Bartlett (2019) ve Huylebrouck (2014) çalışmalarında meta-altın oran sayısal ve cebirsel bakımdan incelenmişti. Bu tez, söz konusu sayısal sabitin manifold geometrisindeki yansımalarının altın oranla sınırlı olmadığını, daha genel metalik oranlar ailesi için de paralel sonuçlar verebileceğini göstermektedir.

5.3. Çalışmanın Katkıları ve Sınırlılıkları

Bu tezin başlıca katkıları üç başlık altında değerlendirilebilir. Birincisi, tanjant demet geometrisi ile meta-metalik yapı kuramı arasında köprü kurulmuş, bu iki alandaki kavramların ortak bir çerçevede ele alınabileceği gösterilmiştir. İkincisi, P-Sasakian manifoldların tanjant demetleri üzerinde tam ve yatay liftlerin meta-metalik yapı üretmek için kullanılabileceği ortaya konmuştur. Üçüncüsü, integrallenebilirlik koşulunun lift türüne göre nasıl değişkenlik

gösterdiği belirlenmiş ve D -düz koneksiyon kavramının yatay lift kaynaklı yapılar için belirleyici bir rol oynadığı tespit edilmiştir.

Bununla birlikte, çalışmanın belirli sınırlılıkları da bulunmaktadır. Birincisi, tezde yalnızca tam lift metriği g^c ve Sasaki metriği g^s üzerinde durulmuş, Cheeger–Gromoll metriği ya da daha genel doğal metrikler için inceleme yapılmamıştır. İkincisi, dikey lift kaynaklı meta-metalik yapılar bu tezde sistematik olarak ele alınmamıştır. Bu yapıların belirgin biçimde dejenere geometrik özellikler vermesi nedeniyle inceleme tam ve yatay liftlerle sınırlı tutulmuştur. Üçüncüsü, çalışma boyunca baz manifoldun P-Sasakian olduğu varsayılmış, daha genel parakontakt yapı sınıfları doğrudan ele alınmamıştır.

5.4. Gelecek Çalışmalar İçin Öneriler

Bu tezde geliştirilen yaklaşım, ileride yapılabilecek pek çok çalışma için bir çıkış noktası oluşturabilir. İlk olarak, tanjant demet üzerinde Cheeger–Gromoll metriği ya da daha genel doğal metrikler kullanılarak meta-metalik yapıların metrik uyumluluğu ve integrallenebilirlik özellikleri yeniden incelenebilir. Bu farklı metriklerin yapısal sonuçları nasıl değiştirdiği, kuramın daha genel bir biçimde anlaşılmasına katkı sağlayacaktır.

İkinci olarak, kotanjant demetler ve daha yüksek mertebeden tensör demetleri üzerinde benzer meta-metalik yapı incelemeleri yapılabilir. Özellikle Hamilton mekaniği ile yakın ilişkisi bulunan kotanjant demet ortamı, meta-metalik yapıların fiziksel yorumları için verimli bir zemin sunabilir.

Üçüncü olarak, baz manifoldun yapı sınıfı genişletilerek α -para-Sasakian, para-Kenmotsu veya genel hemen hemen parakontakt manifoldlar üzerinde aynı yaklaşım denenebilir. Bu sayede meta-metalik yapıların hangi geometrik koşullar altında integrallenebilirlik kazandığı daha kapsamlı biçimde belirlenebilir.

Dördüncü olarak, meta-metalik yapıların yarı-Riemann manifoldlar üzerindeki davranışı, ışık-tipi (lightlike) alt manifoldlar bağlamında incelenebilir. Bu tür bir genelleştirme, son yıllarda meta-altın yarı-Riemann manifoldlar için yapılan çalışmaların doğal bir uzantısı olacaktır.

Son olarak, bu tezde elde edilen yapıların alt manifold teorisi çerçevesinde değerlendirilmesi, yarı-değişmez (semi-invariant), eğik (slant) ve yarı-eğik (hemi-slant) alt manifold kavramlarının meta-metalik geometriye taşınmasına imkân tanıyacak, böylece kuramın hem teorik hem de uygulamalı yönleri genişletilebilecektir.

KAYNAKÇA

- Altunbaş, M. (2023a). Metallic Riemannian structures on the tangent bundles of Riemannian manifolds with natural metrics. *International Electronic Journal of Geometry*, 16(1), 95–103.
- Altunbaş, M. (2023b). Notes on meta-golden structures. *Advanced Studies: Euro-Tbilisi Mathematical Journal*, 16(4 Suppl.), 43–54.
- Azami, S. (2021). Metallic structures on the tangent bundle of P-Sasakian manifolds. *Khayyam Journal of Mathematics*, 7(2), 298–309.
- Bartlett, C. (2019). Nautilus spirals and the meta-golden ratio Chi. *Nexus Network Journal*, 21(3), 641–656.
- Bлага, A. M., & Hretcanu, C.-E. (2018). Metallic conjugate connections. *Revista de la Unión Matemática Argentina*, 59(1), 179–192.
- Bлага, A. M., & Nannicini, A. (2020). On the geometry of metallic pseudo-Riemannian structures. *Rivista di Matematica della Università di Parma*, 11, 69–87.
- Bлага, A. M., & Nannicini, A. (2021). Harmonic metallic structures. *Rendiconti del Seminario Matematico Università e Politecnico di Torino*, 79, 43–58.
- Chen, B. Y., Choudhary, M. A., & Perween, A. (2024). A comprehensive review of golden Riemannian manifolds. *Axioms*, 13(10), Art. 724, 54 pp.
- Chen, B. Y., Choudhary, M. A., & Perween, A. (2025). Recent advances in metallic Riemannian geometry: A comprehensive review. *Tamkang Journal of Mathematics*, 56(3), 249–290.
- Crasmareanu, M., & Hretcanu, C. E. (2008). Golden differential geometry. *Chaos, Solitons & Fractals*, 38(5), 1229–1238.
- Druta-Romaniuc, S., Hretcanu, C., & Gezer, A. (2025). New structures of golden type on the tangent bundle. *Turkish Journal of Mathematics*, 49(6), 850–871.
- Erdoğan, F. E., Perктаş, S. Y., & Bozdağ, Ş. N. (2024). Meta-metallic Riemannian manifolds. *Filomat*, 38(1), 315–323.
- Gezer, A., Cengiz, N., & Salimov, A. (2013). On integrability of Golden Riemannian structures. *Turkish Journal of Mathematics*, 37(4), 693–703.
- Gezer, A., & Karaman, Ç. (2015). On metallic Riemannian structures. *Turkish Journal of Mathematics*, 39(6), 954–962.
- Goldberg, S. I., & Yano, K. (1970). Polynomial structures on manifolds. *Kodai Mathematical Seminar Reports*, 22, 199–218.
- Hretcanu, C. E., & Crasmareanu, M. (2009). Applications of the golden ratio on Riemannian manifolds. *Turkish Journal of Mathematics*, 33(2), 179–191.
- Hretcanu, C. E., & Crasmareanu, M. (2013). Metallic structures on Riemannian manifolds. *Revista de la Unión Matemática Argentina*, 54(2), 15–27.
- Huylebrouck, D. (2014). The meta-golden ratio Chi. *Bridges 2014: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture* (pp. 151–158). Seoul, Güney Kore: Tessellations Publishing.
- Khan, M. N. I., & Kankarej, M. (2021). On the metallic structure on differentiable manifolds. *Tensor Society of India*, 15, 10–16.

- León, M., & Rodrigues, P. R. (1989). *Methods of differential geometry in analytical mechanics* (North-Holland Mathematics Studies 158). Amsterdam, Hollanda: Elsevier Publishing.
- Özkan, M., & Yılmaz, F. (2018). Metallic structures on differentiable manifolds. *Journal of Science and Arts*, 44(3), 645–660.
- Sato, I. (1977). On a structure similar to the almost contact structure II. *Tensor (N.S.)*, 31, 199–205.
- Şahin, F., & Şahin, B. (2022). Meta-golden Riemannian manifolds. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 45(16), 10491–10501.
- Yano, K., & Ishihara, S. (1973). *Tangent and cotangent bundles: Differential geometry*. New York, NY: Marcel Dekker.