

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

PARABOLİK DENKLEMLER İÇİN İNTEGRAL TİPİ LOKAL OLMAYAN
PROBLEMLER

YÜKSEK LİSANS

Rukiye AÇIKEL

TEMMUZ-2023
GÜMÜŞHANE



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**PARABOLİK DENKLEMLER İÇİN İNTEGRAL TİPİ LOKAL OLMAYAN
PROBLEMLER**

INTEGRAL TYPE NONLOCAL PROBLEMS FOR PARABOLIC EQUATIONS

YÜKSEK LİSANS

Rukiye AÇIKEL

**TEMMUZ-2023
GÜMÜŞHANE**



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**PARABOLİK DENKLEMLER İÇİN İNTEGRAL TİPİ LOKAL OLMAYAN
PROBLEMLER**

INTEGRAL TYPE NONLOCAL PROBLEMS FOR PARABOLIC EQUATIONS

YÜKSEK LİSANS

Rukiye AÇIKEL

Danışman: Prof. Dr. Charyyar ASHYRALYYEV

**TEMMUZ-2023
GÜMÜŞHANE**

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlamış olduğum “**Parabolik Denklemler İçin İntegral Tipi Lokal Olmayan Problemler**” isimli bu tezimin, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, alıntı yaptığım tüm çalışmaları kaynakçada belirttiğimi ve Gümüşhane Üniversitesi’nin lisanslı kullanıcısı olduğu intihal yazılım programı ile Lisansüstü Eğitim Enstitüsü’nün belirlediği kıstaslara uygun olarak raporladığımı taahhüt ederim. Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivinde saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği’nin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

04/07/2023

.....
Rukiye AÇIKEL

TEŞEKKÜR

Bu çalışma, Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlanmıştır. Bu tezin yazımı vesilesiyle, öncelikle çalışmalarım boyunca yardımlarını benden esirgemeyen, bilgi ve deneyimlerini benimle her zaman paylaşan, çok kıymetli danışman hocam Prof. Dr. Charyyar ASHYRALYYEV' e teşekkür ederim.

Tüm çalışmalarım aşamasında yanımda olan ve her an yardımına koşan, sıkıntılarımı ve mutluluğumu paylaştığım, yol arkadaşım, can yoldaşım, sevgili eşim, Selami AÇIKEL' e teşekkürlerimi sunarım. Canım oğlum Mustafa Kayra AÇIKEL'e sevgilerimi yolluyorum.

Rukiye AÇIKEL
GÜMÜŞHANE – 2023

ÖZET

Bu çalışmada, parabolik diferansiyel denklemler için ikinci tip sınır değer ve integral koşulları ile lokal problem ele alındı.

Parabolik denklemler için integral tipi lokal olmayan problemlerin çözümü önce Fourier seri yöntemi, sonra Fourier integral dönüşümü yöntemi ve en son Laplace integral dönüşüm yöntemi ile ele alındı.

Ayrıca, Neumann şartları ile verilen çok boyutlu parabolik kısmi diferansiyel denklem için birinci mertebeden sonlu fark şemaları araştırıldı.

Anahtar Kelimeler: Parabolik denklem, Fark şeması, Fourier Seri Yöntemi, Fourier İntegral Dönüşümü, Laplace İntegral Dönüşüm Yöntemi



SUMMARY

In this study will be discussed, the local problems with the second type of boundary value and integral conditions for parabolic differential equations will be discussed.

Finding the solution of integral type non-local problems for parabolic equations will be discussed first with the Fourier series method, then with the Fourier integral transform method, and finally with the Laplace integral transform method.

In addition, first order finite difference schemes for the multidimensional parabolic partial differential equation given by Neumann conditions will be investigated.

Keywords: Parabolic equation, Difference scheme, Fourier Series Method, Fourier Integral Transform, Laplace Integral Transform Method.

İÇİNDEKİLER

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI.....	III
TEŞEKKÜR.....	V
ÖZET.....	VI
SUMMARY	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
TABLOLAR DİZİNİ	IX
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	X
EKLER DİZİNİ.....	XI
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	XII
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1. Temel Kavramlar	1
1.2. Giriş	21
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	24
2.1. Parabolik Denklemler için İntegral Koşullu SDP'nin Çözümünün Fourier Yöntemlerle Bulunması	24
2.2. Parabolik Denklemler için İntegral Koşullu SDP'nin Çözümünün Fourier Yöntemlerle Bulunması	32
2.3. Parabolik Denklemler için İntegral Koşullu SDP'nin Çözümünün Laplace İntegral Dönüşümü Yöntemlerle Bulunması	37
3. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	42
3.1. Parabolik Denklem için İntegral Koşullu Lokal Olmayan Problemin sayısal çözümü	48
3.1.1. İntegral koşullu Bir boyutlu parabolik denklem için fark şema.....	48
3.1.2. İntegral koşullu iki boyutlu parabolik denklem için fark şema.....	56
4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	60
KAYNAKÇA.....	63
EKLER.....	67
ÖZGEÇMİŞ	71

TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 1. (3.20) BMDFŞ'nin hata analizi	51
Tablo 2. (3.23) BMDFŞ'nin hata analizi	59



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. $N=10, M=10$ için (3.20) BMDFS'nin yaklaşık çözüm grafiği	52
Şekil 2. $N=10, M=10$ için (3.19) Probleminin gerçek çözüm grafiği	52
Şekil 3. $N=20, M=20$ için (3.20) BMDFS'nin yaklaşık çözüm grafiği	53
Şekil 4. $N=20, M=20$ için (3.19) Probleminin gerçek çözüm grafiği	53
Şekil 5. $N=40, M=40$ için (3.20) BMDFS'nin yaklaşık çözüm grafiği	54
Şekil 6. $N=40, M=40$ için (3.19) Probleminin gerçek çözüm grafiği	54
Şekil 7. $N=60, M=60$ için (3.20) BMDFS'nin yaklaşık çözüm grafiği	55
Şekil 8. $N=60, M=60$ için (3.19) Probleminin gerçek çözüm grafiği	55



EKLER DİZİNİ

Ek 1. Örnek 3.1' in Sayısal Çözümü için MATLAB Program Kodları	67
Ek 2. Örnek 3.2.' in Sayısal Çözümü için MATLAB Program Kodları	69



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$F \{ f(z) \} = F(k), k \in R$	: Fourier dönüşümü
$F^{-1} \{ F(L) \} = f(x)$	: Ters Fourier dönüşümü
$A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots, B_1, \dots, B_2, \dots, B_n$	: Fourier seri sabit katsayıları
$[-\ell, -\ell]$	: Sabit bir aralık
z^-	: z'e soldan yaklaşırken
z^+	: z'e sağdan yaklaşırken
$L(s)$	: Laplace dönüşümü
L^{-1}	: Ters laplace dönüşümü
$v(t, s) = L \{ u(t, z) \}$	: u fonksiyonu için Laplace dönüşümü
$L \{ z^n f(z) \} = (-1)^n \frac{d}{ds^n} F(s)$	: Laplace dönüşüm türevleri
$L \left\{ \frac{f(z)}{z} \right\} = \int_s^\infty F(1) ds$	: Laplace dönüşüm integrali
$v(t, s) = F \{ u(t, z) \}$	: u fonksiyonu için Fourier dönüşümü
Ω	: n-boyutlu R^n uzayında bir birim küp
R^n	: n-boyutlu Öklid uzayı
A^x	: Pozitif tanımlı özdeşlenik operatörü
H	: Hilbert Uzayı
$D(A)$	: A operatörünün tanımlı olduğu bölge
$C(L_2(\overline{\Omega}))$	: Banach uzayı
$\ \cdot \ : X \rightarrow R$	: X üzerinde bir norm
$\ \ $	: Norm
ψ_n	: $(N+1) \times 1$ şeklinde verilen sütun matris

I_n	: $(N+1) \times (N+1)$ şeklinde verilen birim matris
A_n, B_n, C_n	: $(N+1) \times (N+1)$ kare matrisler
$\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$	: Matrisler
Eu_M^N, E_1, E_2	: Hata gösterimleri
BMDFŞ	: Birinci mertebeden doğrulukla fark şeması
İMDFŞ	: İkinci mertebeden doğrulukla fark şeması
İMDCNFŞ	: İkinci mertebeden doğrulukla Crank-Nicholson fark Şeması
SDP	: Sınır değer problemi

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Temel Kavramlar

İlk önce tezde kullandığımız tanımları, önermeleri ve kavramları vereceğiz

Tanım 1.1. (Altın, 2011) f fonksiyonunun bir $x_0 \in [m, n]$ noktasındaki soldan ve sağdan limitleri bir birinden farklı sonlu değerler ise x_0 noktasına bu fonksiyonunun bir *düzgün süreksizlik noktası* denir.

Tanım 1.2. (Altın, 2011) f fonksiyonu bir $[m, n]$ aralığının sonlu sayıda düzgün süreksizlik noktaları dışındaki tüm noktalarda sürekli olursa burada f fonksiyonu $[m, n]$ aralığında parçalı sürekli-olarak tanımlanır.

Tanım 1.3. (Altın, 2011) f fonksiyonu $[m, n]$ aralığında verilmiş olan parçalı sürekli bir fonksiyon olarak tanımlansın. Eğer $\forall x \in R$ için $f(x + T) = f(x)$, sıfır olmayan bir $T \in \mathbb{R}$ verilir ise f ye *periyodik fonksiyon* ve ayrıca T ye f fonksiyonunun *periyodu* denir.

Eğer T , periyodik f fonksiyonunun bir periyodu ise o zaman T nin katları da periyot olur.

Tanım 1.4. (Altın, 2011) Periyodik bir f fonksiyonun pozitif periyotları arasında bir en küçük eleman varsa bu elemana f nin *asli periyodu* veya *temel periyodu* denir.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}] \quad (1.1)$$

serisi yakınsak ise onun toplamı da $2l$ periyotlu periyodik bir fonksiyon olacaktır.

Tanım 1.5. (Altın, 2011) (1.1) serisinin yakınsadığı periyodik bir $f(x)$ fonksiyonun bulunması durumunda

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}] \quad (1.2)$$

serisine *Fourier serisi* ve $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots; b_1, \dots, b_n, \dots$ sabitlerine de $f(x)$ nin *Fourier katsayıları* denir.

Tanım 1.6. (Altın, 2011) Bir f fonksiyonu için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k [a_n \cos nx + b_n \sin nx] \right) \right]^2 dx = 0 \quad (1.3)$$

doğru ise, f fonksiyonunun **Fourier serisi** $f(x)$ e **yakınsar** denir.

$[-\pi, \pi]$ aralığında tanımlanmış olan bir f fonksiyonunun Fourier serisi,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx] \quad (1.4)$$

şeklinde olsun. Bir fonksiyon serisinin terim terime türetilebilmesi için $[-\pi, \pi]$ aralığında o serinin düzgün yakınsak olması gerekir. (1.4) serisinin terim terime türevini ve integralini alırsak,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n[-a_n \sin nx + b_n \cos nx]$$

$$\int f(x) dx = \frac{a_0}{2} x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [a_n \sin nx - b_n \cos nx] + c$$

şeklinde bulunur.

Fourier seri katsayılarının $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ gibi önemli bir özelliği vardır. İntegral serisinde $1/n$ çarpanı bu özelliği daha kuvvetlendirir. Ama türev serisindeki n çarpanı bu özelliği kaldırabilir.

Teorem 1.1. (Altın, 2011) $g(z), [-\pi, \pi]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ve $g(-\pi) = g(\pi)$ olsun. Eğer $g'(z)$ türevi aynı aralıkta parçalı sürekli ise, o takdirde $g'(z)$ in Fourier serisi $g(z)$ nin Fourier serisinden terim terime türetme ile elde edilebilir. Türetilmiş seri, z bir süreklilik noktası ise $g'(z)$ değerine, z bir düzgün süreksizlik noktası ise $\frac{1}{2} [g'(z^-) + g'(z^+)]$ değerine yakınsar.

İspat: $g(z)$ ve ayrıca $g'(z)$ fonksiyonlarının Fourier serileri sırasıyla

$$g(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n z + b_n \sin n z]$$

ve

$$g'(z) = \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a'_n \cos n z + b'_n \sin n z]$$

olsunlar. Bu durumda

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) dz,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) \cos n z dz, n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) \sin n z dz, n = 1, 2, 3, \dots$$

ve $g(-\pi) = g(\pi)$ eşitliği vardır. Ayrıca $g'(z)$ nin Fourier serisi açılımının katsayıları

$$a'_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g'(z) dz = \frac{1}{\pi} g(z) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi} (g(\pi) - g(-\pi))$$

$$a'_0 = 0,$$

$$a'_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g'(z) \cos n z dz = \frac{1}{\pi} g(z) \cos n z \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) \sin n z dz$$

$$= \frac{1}{\pi} (g(\pi) - g(-\pi)) \cos n \pi + n \left(\frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) \sin n z dz \right)$$

$$a'_n = n b_n,$$

$$\begin{aligned}
b'_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) \sin n z \, dz = \frac{1}{\pi} g(z) \sin n z \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) \cos n z \, dz \\
&= \frac{1}{\pi} (g(\pi) \sin n \pi + g(-\pi) \sin n \pi) - n \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) \cos n z \, dz \right) \\
b'_n &= n a_n
\end{aligned}$$

biçiminde hesaplanabilir.

Eğer $[-l, l]$ aralığında tanımlanmış olan $g(z)$ fonksiyonu Dirichlet şartlarını gerçekleştiriyorsa

$$a_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l g(\xi) e^{-\frac{in\pi\xi}{l}} d\xi \quad (1.5)$$

olacak şekilde, $g(z)$ fonksiyonu

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{\frac{in\pi z}{l}} \quad (1.6)$$

kompleks Fourier serisine açılabilir.

Bu gösterim $2l$ periyotludur. Ama, $g(z)$ periyodik olmadıkça (1.6) gösteriminin sağındaki toplam periyodik olmayabilir. Böylece, sınırlı aralıktaki problem ve sonsuz bir aralıktaki problem Fourier integrallere yol açar. Şimdi $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlanmış periyodik olmayan $g(z)$ fonksiyonunun integral açılımını $l \rightarrow \infty$ için bakalım.

$$k_n = \frac{n\pi}{l}, \Delta k_n = k_{n+1} - k_n = \frac{\pi}{l}$$

olacağından a_n katsayıları (1.6) gösteriminde yerine yazarsak,

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta k_n \left[\int_{-l}^l g(\xi) e^{-i\xi k_n} d\xi \right] e^{iz k_n}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = k, \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta k_n = dk$ olduğuna göre, sonuçta,

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-i\xi k} d\xi \right] e^{ikz} dk \quad (1.7)$$

elde edilir. Bu formüle Fourier integral formülü denir.

Tanım 1.7. (Altın, 2011) Eğer $g(x)$ fonksiyonu

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx < \infty$$

koşulunu sağlarsa $(-\infty, \infty)$ aralığında *mutlak değerce integre edilebilir* fonksiyon denir.

Teorem 1.2. (Altın, 2011) Eğer $g(z)$ fonksiyonu $(-\infty, \infty)$ aralığında Dirichlet şartlarını sağlarsa ve $(-\infty, \infty)$ aralığında mutlak değerce integre edilebilir fonksiyon ise, o halde (1.7) Fourier integrali düzgün süreksizlik z noktasında $\frac{g(z^-) + g(z^+)}{2}$ değerine yakınsar. Bir başka deyişle,

$$\frac{g(z^-) + g(z^+)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-ik\xi} d\xi \right] dk. \quad (1.8)$$

Aslında, bu Fourier integral formülü olur.

Eğer $g(z)$ fonksiyonu z noktasında sürekli ise $g(z^-) = g(z^+) = g(z)$ olduğuna göre denklem (1.8)'i

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-ik\xi} d\xi \right] dk$$

biçiminde yazabiliriz. Ayrıca bu durumda

$$g(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dk \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \cos k(z - \xi) d\xi \right] \quad (1.9)$$

biçiminde de ifade edilebilir. Çünkü

$$\begin{aligned}
g(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-ik\xi} d\xi \right] dk \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{ik(z-\xi)} dk d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(z-\xi)} dk d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \left[\int_0^{\infty} (e^{ik(z-\xi)} + e^{-ik(z-\xi)}) dk \right] d\xi \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \left[\int_0^{\infty} \frac{e^{ik(z-\xi)} + e^{-ik(z-\xi)}}{2} dk \right] d\xi \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \left[\int_0^{\infty} \cos k(z-\xi) dk \right] d\xi \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} g(\xi) \cos k(z-\xi) dk d\xi \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \cos k(z-\xi) d\xi dk
\end{aligned}$$

eşitliği vardır.

Şimdi $g(z)$ fonksiyonunun çift ve tek fonksiyon olduğu durumlar için Fourier integral formülünü oluşturalım:

$g(z)$ fonksiyonun çift olduğunu varsayalım. (1.9) formülünde kosinüs fonksiyonunu

$$g(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) (\cos kz \cos k\xi + \sin kz \sin k\xi) d\xi dk$$

biçiminde genişletince

$$g(z) = g(-z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos kz \left(\int_0^{\infty} g(\xi) \cos k\xi d\xi \right) dk \quad (1.10)$$

elde edilir. (1.10) formülüne **Fourier kosinüs integral formülü** denir.

$g(z)$ fonksiyonun tek fonksiyon olduğu varsayalım. Bu durumda benzer şekilde

$$g(z) = -g(-z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin kz \left(\int_0^{\infty} g(\xi) \sin k\xi d\xi \right) dk \quad (1.11)$$

elde edilir.

(1.10) ve (1.11) integral formülleri ilk olarak **Cauchy** tarafından bulunmuştur.

$g(z)$ fonksiyonun $(-\infty, \infty)$ aralığında mutlak değerce integrale edilebilir olduğunu varsayalım.

Tanım 1.8.(Debnath&Bhatta, 2007) $f(z)$ fonksiyonunun *Fourier dönüşümü*

$$\mathcal{F}\{f(z)\} = F(k), k \in \mathbb{R}$$

ile gösterilir ve

$$\mathcal{F}\{f(z)\} = F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikz} f(z) dz \quad (1.12)$$

olarak tanımlanır.

$f(z)$ fonksiyonun $(-\infty, \infty)$ aralığında mutlak değerce integrale edilebilir olduğu (1.12) integralin k değişkenine göre düzgün yakınsak olduğunu verir.

$f(z)$ fonksiyonunun $(-\infty, \infty)$ aralığında mutlak değerce integrale edilebilir olması koşulu fiziki uygulamaların çokluğunda çok güçlü bir kısıtlamadır. $\sin(az)$, $\cos(az)$, eksponansiyel fonksiyonlar, sabit fonksiyon, $z^n H(z)$ gibi fonksiyonların Fourier dönüşümleri yoktur. Burada

$$H(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0, \\ 0, & z < 0. \end{cases}$$

biçiminde tanımlı Heaviside fonksiyonudur.

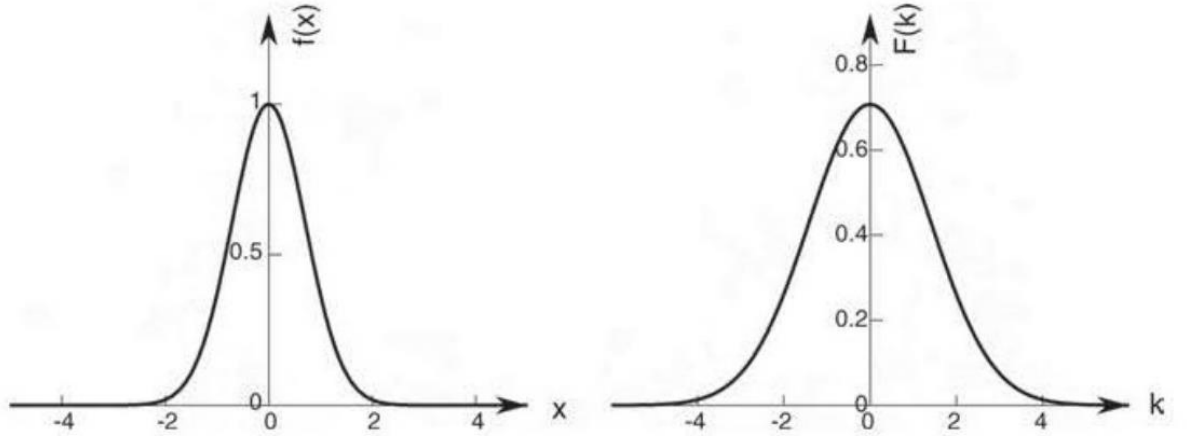
Örnek 1.1. $f(z) = e^{-az^2}$ fonksiyonun Fourier dönüşümünü bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} F(k) &= \mathcal{F}\{e^{-az^2}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikz} e^{-az^2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikz-az^2} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(z+\frac{ik}{2a}\right)^2 - \frac{k^2}{4a}} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{k^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(z+\frac{ik}{2a}\right)^2} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{k^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{k^2}{4a}} \end{aligned}$$

Burada $y = z + \frac{ik}{2a}$ olarak alınmıştır.

$a = 1$ durumunda $f(z) = e^{-z^2}$ fonksiyonun ve Fourier dönüşümünün grafikleri aşağıdaki grafiklerde verilmiştir.



Teorem 1.3. Fourier dönüşümü lineer bir dönüşümdür.

İspat: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve herhangi iki $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonlar için $\mathcal{F}\{f(z)\} = F(k)$, $\mathcal{F}\{g(z)\} = G(k)$ ise

$$\mathcal{F}\{\alpha f(z) + \beta g(z)\} = \alpha F(k) + \beta G(k)$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\alpha f(z) + \beta g(z)\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikz} (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikz} \alpha f(z) dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikz} \beta g(z) dz \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} F(k) + \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} G(k). \end{aligned}$$

Tanım 1.9. (Debnath&Bhatta, 2007) *Ters Fourier dönüşümü*

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(k)\} = f(z), z \in \mathbb{R}$$

ile gösterilir ve

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(k)\} = f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} F(k) dk \quad (1.13)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.10. $f(z)$ fonksiyonun *Laplace dönüşümü*

$$\mathcal{L}\{f(z)\} = F(s)$$

ile gösterilir ve aşağıdaki integrali tanımlı yapan $s \in \mathbb{C}$ için

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(z)\} = \int_0^{+\infty} f(z) e^{-sz} dz \quad (1.14)$$

olarak tanımlanır.

Şimdi Laplace dönüşümü ile ilgili birkaç örnek inceleyelim.

Örnek 1.2. $f(x) = 1, x > 0$ fonksiyonun Laplace dönüşümünü bulalım.

Çözüm: $F(s) = \mathcal{L}\{1\} = \int_0^{+\infty} e^{-sx} dx = \frac{1}{s}$

Örnek 1.3. $f(x) = e^{\alpha x}, \alpha = \text{sabit}$, fonksiyonun Laplace dönüşümünü bulalım.

Çözüm: Bu taktirde $F(s) = \mathcal{L}\{e^{\alpha x}\} = \int_0^{+\infty} e^{-(s-\alpha)x} dx = \frac{1}{s-\alpha}, s > \alpha$

Örnek 1.4 $f(x) = x^n$ (n bir pozitif doğal sayı) fonksiyonun Laplace dönüşümü bulalım.

Çözüm: $k \geq 1$ için

$$F(s) = \mathcal{L}\{x^k\} = \frac{k!}{s^{k+1}}$$

eşit olduğunu tümevarımla gösterelim.

i) $k = 1$ için

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx} dx = \frac{1}{s}$$

olduğu açıktır. Her iki tarafının s 'ye göre türevi alınırsa

$$\frac{d}{ds} \left(\int_0^{+\infty} e^{-sx} dx \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s} \right)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s} (e^{-sx}) dx = -\frac{1}{s^2}$$

$$\int_0^{+\infty} -xe^{-sx} dx = -\frac{1}{s^2}$$

$$\int_0^{+\infty} xe^{-sx} dx = \frac{1}{s^2}$$

eşit olduğu görülür.

ii) $k = n - 1$ için

$$\int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-sx} dx = \frac{(n-1)!}{s^n}$$

geçerli olduğunu kabul edelim.

iii) $k = n$ için bir üstteki eşitliğin her iki tarafının s 'ye göre türevi alınır

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-sx} dx \right) &= \frac{d}{ds} \frac{(n-1)!}{s^n} \\ \int_0^{+\infty} x^{n-1} \frac{\partial}{\partial s} (e^{-sx}) dx &= -\frac{(n-1)! n}{s^{n+1}} \\ \int_0^{+\infty} -x^{n-1} x e^{-sx} dx &= -\frac{n!}{s^{n+1}} \\ \int_0^{+\infty} x^n e^{-sx} dx &= \frac{n!}{s^{n+1}} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Örnek 1.5 α bir reel sabit olacak şekilde $f(z) = \sin(\alpha z)$ fonksiyonun Laplace dönüşümünü bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} F(s) = \mathcal{L}\{\sin(\alpha z)\} &= \int_0^{+\infty} e^{-sz} \sin(\alpha z) dz \\ \mathcal{L}\{\sin(\alpha z)\} &= \frac{1}{2i} \int_0^{+\infty} [e^{-z(s-i\alpha)} - e^{-z(s+i\alpha)}] dz \\ \mathcal{L}\{\sin(\alpha z)\} &= \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{s-i\alpha} - \frac{1}{s+i\alpha} \right] \\ \mathcal{L}\{\sin(\alpha z)\} &= \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2} \end{aligned}$$

Şimdi Laplace dönüşümünün birkaç basit özelliğine bakalım.

Tanım 1.11. $[0, \infty)$ aralığında tanımlı $g(x)$ fonksiyonu olmak üzere her $x > X$ için

$$|g(x)| \leq T e^{\alpha x} \quad (1.15)$$

olacak şekilde pozitif bir T sabit sayısı varsa $g(x)$ fonksiyonuna pozitif α . dereceden eksponansiyel sınırlı fonksiyon denir ve $g(x) = O(e^{\alpha x}), x \rightarrow \infty$ ile gösterilir.

Teorem 1.4. Eğer $g(x)$ fonksiyonu her bir $(0, X)$ sonlu aralıkta sürekli veya parçalı sürekli ve pozitif α . dereceden eksponansiyel sınırlı fonksiyon ise o halde her $Re s > \alpha$ için tanımlı $g(x)$ fonksiyonun Laplace dönüşümü vardır.

İspat: $Re s > \alpha$ için

$$|F(s)| = \left| \int_0^{+\infty} g(x)e^{-sx} dx \right| \leq \int_0^{+\infty} |g(x)|e^{-sx} dx$$

$$\leq K \int_0^{+\infty} e^{-(s-\alpha)x} dx = \frac{K}{s-\alpha}.$$

Teorem 1.5. (Heaviside, Debnath&Bhatta, 2007) Eğer $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$ ise $\mathcal{L}\{e^{-\alpha x} f(x)\} = F(s + \alpha)$. Burada α herhangi bir reel sabittir.

İspat:

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha x} f(x)\} = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x) e^{-sx} dt = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-(s+\alpha)x} dx = F(s + \alpha).$$

Sonuç:

$$\mathcal{L}\{x^n e^{-\alpha x}\} = \frac{n!}{(s + \alpha)^{n+1}}.$$

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha x} \sin b x\} = \frac{b}{(s + \alpha)^2 + b^2}.$$

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha x} \cos b x\} = \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + b^2}.$$

Teorem 1.6. (Türevin Laplace dönüşümü) Eğer $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$ ise

$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = s\mathcal{L}\{f(x)\} - f(0) = sF(s) - f(0),$$

$$\mathcal{L}\{f''(x)\} = s^2\mathcal{L}\{f(x)\} - sf(0) - f'(0) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(x)\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat:

$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = \int_0^{+\infty} f'(x)e^{-sx}dx = [f(x)e^{-sx}]_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} f(x)e^{-sx}dx$$

$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = sF(s) - f(0),$$

$$\mathcal{L}\{f''(x)\} = s\mathcal{L}\{f'(x)\} - f'(0) = s(sF(s) - f(0)) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}\{f''(x)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0).$$

Laplace dönüşümü lineerdir. Fourier dönüşümünün lineerlik özelliğinin ispatına benzer şekilde ispatı verilebilir.

Tanım 1.12. $x \geq 0$ için tanımlanan $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)$ fonksiyonlarının konvolüsyonu

$$\varphi_3(x) = \int_0^x \varphi_1(x-t)\varphi_2(t)dt \quad (1.16)$$

ile tanımlanan $\varphi_3(x)$ fonksiyonudur.

İki fonksiyonun konvolüsyonunun Laplace dönüşümü yine bu fonksiyonun Laplace dönüşümlerinin çarpımına eşittir. Yani (1.16) ile verilen konvolüsyonun Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{\varphi_3(x)\} = \mathcal{L}\{\varphi_1(x)\}\mathcal{L}\{\varphi_2(x)\} \quad (1.17)$$

şeklinde olur.

Laplace dönüşümün türevi ve integrali kavramını ele alalım.

Teorem 1.7. (Laplace dönüşümün türevleri) Eğer $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$ ise

$$\mathcal{L}\{x^n f(x)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

eşitliği vardır.

İspat:

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}F(s) &= \frac{d}{ds} \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s} e^{-sx} f(x) dx \\ &= - \int_0^{+\infty} x f(x) e^{-sx} dx \\ &= -\mathcal{L}\{x f(x)\}, \\ \frac{d^2}{ds^2}F(s) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial s^2} e^{-sx} f(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} x^2 f(x) e^{-sx} dx \\ &= \mathcal{L}\{x^2 f(x)\}, \\ \frac{d^n}{ds^n}F(s) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial^n}{\partial s^n} e^{-sx} f(x) dx \\ &= (-1)^n \int_0^{+\infty} x^n f(x) e^{-sx} dx \\ &= (-1)^n \mathcal{L}\{x^n f(x)\}.\end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$\mathcal{L}\{x^n f(x)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

elde edilir.

Teorem 1.8. (Laplace dönüşümünün integrali) Eğer $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$ ise

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(x)}{x}\right\} = \int_s^{\infty} F(s) ds.$$

İspat:

$$\begin{aligned}\int_s^{\infty} F(s) ds &= \int_s^{\infty} ds \int_0^{+\infty} f(x) e^{-sx} dx \\ &= \int_0^{+\infty} f(x) dx \int_s^{\infty} e^{-sx} ds\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x} e^{-sx} dx \\
&= \mathcal{L}\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}.
\end{aligned}$$

Teorem 1.9. (İntegralin Laplace dönüşümü) Eğer $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$ ise

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(y)dy\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

İspat:

$$g(x) = \int_0^x f(y)dy, \mathcal{L}\{g(x)\} = G(s)$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda

$$g(0) = 0, g'(x) = f(x)$$

eşitlikleri vardır.

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\} = \mathcal{L}\{g'(x)\} = sG(s) - g(0)$$

$$F(s) = sG(s)$$

eşitliğinden

$$G(s) = \frac{F(s)}{s}$$

$$\mathcal{L}\{g(x)\} = \frac{F(s)}{s}$$

ve dolayısıyla

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(y)dy\right\} = \frac{F(s)}{s}.$$

elde edilir.

Şimdi Ters Laplace dönüşümüne bakalım

Tanım 1.13. *Ters Laplace dönüşümü* $\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(z)$ ile gösterilir ve

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{sz} F(s) ds, c > 0 \quad (1.18)$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 1.6. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1.$

Çözüm: $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1.$

Örnek 1.7. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos(ax)$

Çözüm: $\mathcal{L}\{\cos(ax)\} = \frac{s}{s^2+a^2} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos(ax).$

Örnek 1.8. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-a)}\right\}$ ters Laplace dönüşümünün sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-a)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{a}\left[\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s}\right]\right\} \\ &= \frac{1}{a}\left[\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}\right] \\ &= \frac{1}{a}(e^{ax} - 1) \end{aligned}$$

Tanım 1.14. (Soykan, 2008): Bir N kümesi üzerinde tanımlı bir metrik her $r, s, t \in N$ için

- (1) $l(r, s) \geq 0$;
- (2) $l(r, s) = 0 \Leftrightarrow r = s$
- (3) $l(r, s) = l(s, r)$;
- (4) $l(r, t) \leq l(r, s) + l(s, t)$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlayan bir $l: N \times N \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonudur.

Eğer l, N 'nin üzerinde bir metrik ise (N, l) ikilisine bir metrik uzay denir. Burada herhangi bir N kümesi (N kümesi en az iki elemanlı bir küme olmak üzere) birden fazla metriğe sahip olabilir. Burada kullanılan metriğin hangi metrik olduğu açık olarak biliniyorsa “ (N, l) metrik uzayı” yerine “ N metrik uzayı” yazılabilir.

Tanım 1.15. (Cauchy dizisi ve tamlık).(Bayraktar,2017): $Y = (Y, l)$ bir metrik uzay olsun. Bu uzayda (y_n) bir dizi olsun. Verilmiş herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $r, s \geq s_0$ için

$$l(y_r, y_s) < \varepsilon \quad (1.19)$$

olacak şekilde bir $s_0 = s_0(\varepsilon)$ sayısı var ise (y_n) dizisine Cauchy dizisi (veya **esas** dizi) denir. Y de verilen her (y_n) Cauchy dizisi burada yakınsak ise (Y, l) metrik uzayına **tam metrik uzay** veya kısaca **tam** denir.

Bu tanıma göre tam metrik uzay, (1.20) Cauchy şartının yakınsaklık için gerek ve yeter şart olarak geçerli olduğu uzaydır.

Tanım 1.16. (Soykan,2008) X, Φ üzerinde verilmiş bir vektör uzay olarak alalım. X üzerinde olan bir norm aşağıda verilmiş olan özellikleri sağlayan bir

$$\| \cdot \|: X \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonudur: Burada her $r, s \in X$ ve ayrıca her $\alpha \in \Phi$ için

- (1) $\|r\| \geq 0$;
- (2) $\|r\| = 0 \Leftrightarrow r = 0$;
- (3) $\|\alpha r\| = |\alpha| \|r\|$;
- (4) $\|r + s\| \leq \|r\| + \|s\|$.

Üzerinde bir $\| \cdot \|$ normu tanımlanmış ise X vektör uzayına *normlu vektör uzay* ya da *normlu uzay* denir. $(X, \| \cdot \|)$ şeklinde gösterimi olur. X burada bir normlu uzay ~~olar~~ ise $\|r\| = 1$ eşitliğini sağlayan bir $r \in X$ vektörüne birim vektör denir.

Tanım 1.17. (Bayraktar,2017) $(N, \|\cdot\|)$ normlu uzayı, norm metriğine göre tam ise bu uzay **Banach uzayı** olarak tanımlanır.

Burada N 'nin normlu reel vektör uzayı ve kompleks vektör uzayı oluşuna göre ortaya çıkan Banach uzayına sırasıyla **Reel Banach uzayı** ve **Kompleks Banach uzayı** denir.

Tanım 1.18. (İç çarpım) (Fonksiyonel Analiz, Mustafa Bayraktar). A, G cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\langle, \rangle: A \times A \rightarrow G$ fonksiyonu,

$$a) \langle a + b, c \rangle = \langle a, c \rangle + \langle b, c \rangle,$$

$$b) \langle \beta a, b \rangle = \beta \langle a, b \rangle, (\beta \in G)$$

$$c) \langle a, b \rangle = \overline{\langle b, a \rangle},$$

$$d) \langle a, a \rangle \geq 0 \text{ ve } \langle a, a \rangle = 0 \Leftrightarrow a = \theta$$

şartlarını sağlıyor ise $\langle, \rangle: A \times A \rightarrow G$ fonksiyonuna **iç çarpım** ya da **iç çarpım fonksiyonu** adı verilir. Burada A 'ya da **iç çarpım uzayı** denir. İç çarpım uzayı genellikle iç çarpımla birlikte $(A, \langle, \rangle)$ olacak şekilde gösterilir. Burada iç çarpım uzayına ön-Hilbert uzayı da denir.

Teorem 1.10. (Bayraktar,2017) $(K, \langle, \rangle)$ olacak şekilde iç çarpım uzayı olarak alınsın ve $\| \cdot \|$ bu uzayda verilen iç çarpım normu olarak alınsın ise aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir.

$$1) |\langle k, l \rangle| \leq \|k\| \|l\| \text{ (Cauchy-Schwarz eşitsizliği) ,}$$

$$2) \|k + l\| \leq \|k\| + \|l\| \text{ (Üçgen eşitsizliği) .}$$

Tanım 1.19. (Hilbert uzayı) (Fonksiyonel Analiz, Mustafa Bayraktar) A bir iç çarpım uzayı ve $\| \cdot \|$ bu iç çarpımın normu olarak verilsin. Ayrıca

$$l(m, n) = \|m - n\| = \sqrt{\langle m - n, m - n \rangle}$$

metriği tanımlansın. İç çarpım normuyla tanımlanan bu l metriğine göre A iç çarpım uzayı tam ise A 'ya Hilbert uzayı denir. $G = \mathbb{R} (G = \mathbb{C})$ ise A ya reel (kompleks) Hilbert uzayı denir.

Bu tanıma göre Hilbert uzayları, özel Banach uzaylarıdır.

Tanım 1.20. (Ashyralyev ve Sobolevskii,1994) Eğer $v(t)$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlarsa

$$v'(t) + Av(t) = f(t), 0 \leq t \leq 1, v(0) = v_0$$

probleminin çözümüdür denir.

1) $v(t)$, $[0,1]$ segmenti üzerinde sürekli türevlenebilirdir. Segmentin uç noktalarındaki türev uygun tek taraflı türevler olarak anlaşılır.

2) $v(t)$ elementi tüm $t \in [0,1]$ için $D(A)$ 'ya aittir ve $Av(t)$ fonksiyonu, $[0,1]$ üzerinde süreklidir.

3) $v(t)$, $v'(t) + Av(t) = f(t)$, $0 \leq t \leq 1$, $v(0) = v_0$ eşitliğini ve sınır şartlarını sağlar.

$v'(t) + Av(t) = f(t)$, $0 \leq t \leq 1$, $v(0) = v_0$ Cauchy problemini, ona karşılık gelen

$$Du_k + Au_k = \varphi_k, 1 \leq k \leq N, u_0 = u_0(\tau)$$

şeklindeki fark problemi ile ilişkilendireceğiz.

Buna bakarak verilen N pozitif bir tamsayı $\tau = \frac{1}{N}$, $Du_k = \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau}$, ve $u^\tau = \{u_k\}_1^N$, $\varphi^\tau = \{\varphi_k\}_1^N$ vektörleri E Banach uzayının elemanlarından oluşan sırasıyla bilinmeyen ve verilen ağ(grid) fonksiyonlardır φ^τ fonksiyonu ve $u_0(\tau)$ elemanları sırasıyla, belirli bir şekilde $f(t)$ ve v_0 değerlerin yaklaşımlarıdır.

Tanım 1.21. Ω n-boyutlu $\mathbb{R}^n$ uzayında bir birim küp ve $\mathbb{R}^n$ 'nin açık bir alt kümesi olduğunu varsayalım. Sobolev uzayı $W^{k,p}(\Omega)$, $|\alpha| \leq k$ 'lı her çoklu dizin α için zayıf türev $D^\alpha u$ ve $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ olacak şekilde $u \in L^p(\Omega)$ işlevlerinden oluşur. Böylece

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega): D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq k\}$$

$u \in W^{k,p}(\Omega)$ ise, normunu tanımlarız

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty$$

ve

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \operatorname{esssup}_{\Omega} |D^{\alpha} u|.$$

$D^0 u = D^{(0,\dots,0)} u = u$ olduğundan, Ω' nun Ω nun açık bir altkümesi olduğunu varsayalım. $\overline{\Omega'}$, Ω nin kompakt bir alt kümesi ise, Ω' , Ω içinde kompakt bir şekilde yer alır Ω' A Ω ile gösterilir. Her $\Omega' \subset \Omega$ için $u \in W^{k,p}(\Omega')$ ise, $u \in W_{loc}^{k,p}$



1.2. Giriş

Parabolik kısmi diferansiyel denklemler için yapılan araştırmalar yerel olmayan şartlarıyla verilen denklemlerin farklı uygulamalı alanlarında önemi artmaktadır.

Ters parabolik denklemler de kullanılan yerel olmayan sınır değer problemleri biyolojik, fiziksel, sistem mühendisliği, ekonomi ve sosyolojik süreçleri modellemek için kullanılır ve birçok kişi tarafından incelenmiştir.

Bu çalışmada, ikinci tür sınır değer probleminin (SDP) yaklaşık çözümü integral tip yerel olmayan koşullu parabolik kısmi diferansiyel denklem için incelenmiştir. Neumann sınır koşulu ile parabolik SDP'nin yaklaşık olarak çözümü için birinci doğruluk mertebesi mutlak kararlı fark şeması incelendi. Neumann sınır koşulu ile parabolik kısmi diferansiyel denklem için integral tip yerel olmayan SDP'nin çözümü için sayısal analizler gösterilmektedir. Önerilen sayısal yöntemin etkinliği test örneklerinde verilmiştir.

Ashyralyev ve Ashyralyev, 2022 makalede çok boyutlu parabolik kısmi diferansiyel denklemler de zamana göre yerel olmayan sınır değer problemi (SDP) incelendi. Daha sonra yerel olmayan sınır değer probleminin (SDP) çözümünü yaklaşık olarak bulmak için iki fark şeması tartışılmıştır. Çözümlerin kararlılığına ilişkin teoremler, her iki fark şeması da ispatsız olarak verilmiştir. Test örnekleri için sayısal sonuçlar özetlenmiştir

Ashyralyev ve Gönenç, 2021 makalede, ikinci tür sınır ve integral koşulları ile yerel olmayan ters parabolik problemin yaklaşımını ele alıyoruz. Fark şemasının çözümü için kararlılık ve zorlayıcı kararlılık tahminleri elde edilmiştir. Bir ve iki boyutlu ters parabolik denklemlerin örneklerinde sayısal sonuçların bazı gösterimleri bakılmıştır.

Ashyralyev, 2019 makalede bir ve iki boyutlu durumlarda integral ve Dirichlet koşulları ile ters parabolik denklem için SDP'ler için sayısal sonuçlar sunuyoruz.

Ashyralyev ve Ashyralyev, 2022 makalede, parabolik bir denklem için lokal olmayan sınır değer probleminin integral tipini incelenmiştir.

Ashyralyev, 2020 makalede lokal olmayan ters parabolik problemi integral koşullu çözmek için sonlu farklar yöntemi uygulanmıştır, ters parabolik problemin yaklaşımı için ikinci derece doğruluk farkı şeması oluşturulmuştur, bu fark şemasının çözümleri için kararlılık tahminleri gösterilmiştir. Ayrıca, çok boyutlu ters parabolik sınır değer probleminin (SDP) birinci tür sınır koşulu ile yaklaşımı için ikinci mertebeden olan doğruluk farkı şemasını ve onun çözümü bulmak için kararlılık tahminleri incelenmiştir. Bu makalede, basit test problemleri için sayısal gösterim verilmiştir.

Ancak parabolik denklemler için ikinci tip Neumann koşullu yerel olmayan sınır değer şartlarıyla fark şemaları problemleri incelenmesi yapılmamıştır. Burada ele aldığımız problemlerde kararlılık analizleri incelemesi yapılmadı. Gerçek değere yakın olacak şekilde çözüm bulabilmek için de kararlılık soruları bellidir.

İkinci tip sınır değer problemleri (SDP) ve integral koşulları ve ayrıca yerel olmayan ters parabolik problemleri araştırma yapmakta kullanılan klasik yöntemler (Laplace integral yöntemleri, Fourier integral yöntemleri ve Fourier serileri) sabit katsayılı olan durumlarda uygulanabilir.

$[0,1] \times [0,\pi]$ bölgesinde parabolik denklem için

$$u_t(t, x) = u_{xx}(t, x) - u(t, x) + R(t, x) \quad 0 < t < 1, \quad 0 < x < \pi$$

$$u(0, x) = \int_0^1 e^{-2x} u(\tau, x) d\tau + \lambda(x)$$

$$u(t, 0) = 0, \quad u(t, \pi) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1$$

Burada Fourier seri yöntemi kullanılarak integral koşullu yerel olmayan sınır değer problemin çözümü araştırıldı.

$[0,1] \times (-\infty, \infty)$ bölgesinde parabolik denklem

$$u_t(t, x) = 2u_{xx}(t, x) - u(t, x) + R(t, x)$$

$$u(0, x) = \int_0^1 e^{-2\tau} u(\tau, x) d\tau + \lambda(x) \quad 0 < t < 1, \quad -\infty < x < \infty.$$

Burada Fourier integral dönüşümü yöntemini kullanılarak, integral koşullu yerel olmayan sınır değer probleminin çözümü araştırıldı.

$[0,1] \times [0, \infty)$ bölgesinde parabolik denklem için

$$u_t(t, x) = 2u_{xx}(t, x) - u(t, x) + R(t, x) \quad 0 < t < 1, \quad 0 < x < \infty$$

$$u(0, x) = \int_0^1 e^{-2\tau} u(\tau, x) d\tau + \lambda(x) \quad 0 < x < \infty$$

$$u(t, 0) = 0, \quad u_x(t, 0) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1$$

formundaki yerel olmayan problemin çözümünü Laplace integral dönüşümü yöntemi kullanılarak bulundu.

Parabolik denklem için integral tipindeki lokal olmayan şartlı ve Neumann sınır koşullu

$$u(t, x) = e^{-2t} \cos x$$

$$u_t(t, x) = -(3 + 2 \cos x)u_{xx} + 2 \sin x u_x(t, x) + u(t, x) = f(t, x)$$

$$u(0, x) = \frac{1}{3} \int_0^1 e^{-2s} u(s, x) ds + \varphi(x)$$

$$u_x(t, 0) = 0, \quad u_x(t, \pi) = 0$$

şeklindeki sınır değer problemi fark şemasına bakıldı.

$$u_t - (3 + 2x)u_{xx} + 2u_x - u_{yy} + u = f(t, x, y)$$

$$f(t, x, y) = e^{-2t} y^2 (y-1)^2 (-16x^3 - 24x^2 + 36x + 6) - e^{-2t} x^2 (x-1)^2 y^2 (y-1)^2 - e^{-2t} x^2 (x-1)^2 (12y^2 - 12y + 2)$$

$$0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$u(0, x, y) = \frac{1}{3} \int_0^1 e^{-2s} u(s, x, y) ds + \varphi(x, y)$$

$$\varphi(x, y) = x^2 (x-1)^2 y^2 (y-1)^2 \left(\frac{13}{4} - \frac{e^{-4}}{4} \right)$$

$$u_x(t, 1, y) = 0, \quad u_x(t, 0, y) = 0$$

$$u_y(t, x, 1) = 0, \quad u_y(t, x, 0) = 0$$

$$u = e^{-2t} x^2 (x-1)^2 y^2 (y-1)^2$$

$$u(t, x, y) = e^{-2t} x^2 (x-1)^2 y^2 (y-1)^2$$

Şeklindeki iki boyutlu Neumann koşullu ve lokal olmayan sınır değer problemine bakıldı.

Algoritma ve MATLAB kodları test örneklerde parabolik lokal olmayan sınır değer problemlerinin çözümlerini bulmak için oluşturuldu.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu bölümde, sabit katsayılı parabolik kısmi diferansiyel denklemler için integral koşullu sınır değer problemleri (SDP) Laplace integral dönüşüm, Fourier integral dönüşüm ve Fourier serileri yöntemlerin çözümlü örnekler ile yapılacaktır.

2.1. Parabolik Denklemler için İntegral Koşullu SDP'nin Çözümünün Fourier Yöntemlerle Bulunması

İlk olarak, $[0,1] \times [0,\pi]$ bölgesinde parabolik denklem için

$$u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) - u(t,x) + 3e^{-2t} \cdot \sin 2x \quad 0 < t < 1, \quad 0 < x < \pi$$

$$u(0,x) = \int_0^1 e^{-2x} u(\tau,x) \cdot d\tau + \left(\frac{e^{-4} + 3}{4} \right) \cdot \sin 2x \quad (2.1)$$

$$u(t,0) = 0, \quad u(t,\pi) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1$$

integral tipindeki lokal olmayan koşulu ile sınır değer problemin çözümünü Fourier seri yöntemiyle ele alalım.

Çözüm

$$u(t,x) = v(t,x) + w(t,x) \quad (2.2)$$

olacak şeklinde bulmaya çalışacağız. Bu denklemde verilen $v(t,x)$ ve $w(t,x)$ fonksiyonlarını sırasıyla homojen denklem

$$v_t(t,x) = v_{xx}(t,x) - v(t,x) \quad 0 < t < 1, \quad 0 < x < \pi \quad (2.3)$$

$$v(0, x) = \int_0^1 e^{-2\tau} v(\tau, x) . d\tau, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$v(t, 0) = 0, \quad v(t, \pi), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

için SDP'nin ve homojen olmayan denklem için

$$u_t(t, x) = w_x(t, x) - w(t, x) + 3.e^{-2t} . \sin 2x \quad 0 < t < 1, \quad 0 < x < \pi$$

$$w_t(t, x) = w_{xx}(t, x) - w(t, x) + 3.e^{-2t} . \sin 2x \quad 0 < t < 1, \quad 0 < x < \pi$$

$$w(0, x) = \int_0^1 e^{-2\tau} . w(\tau, x) . d\tau + \left(\frac{e^{-4} + 3}{4} \right) . \sin 2x \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (2.4)$$

$$w(t, 0) = 0, \quad w(t, \pi) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Burada SDP'nin çözümü olarak alınır.

İlk önce denklem (2.3)'de verilen problemin çözümünü yapalım.

$$v(t, x) = X(x) . T(t) \quad (2.5)$$

olacak şekilde arayalım. (2.3) problemin çözümünü değişkenlerde ayırma yöntemiyle bakacağız. $v(t, x)$ fonksiyonunun x ve t değişkenlerine göre türevlerini alarak (2.3) problemin diferansiyel denkleminde yerine yazalım,

$$T'(t) . X(x) = T(t) . X''(x) - T(t) . X(x)$$

veya

$$T'(t) . X(x) + T(t) . X(x) = T(t) . X''(x)$$

olacak şekilde düzenlenir ve $X(x)$ ortak parantezine alınır ise

$$X(x)(T'(t) + T(t)) = T(t).X''(x)$$

ifadesine dönüşür. Bu ifade de λ bir sabit olmak üzere düzenlenme yapılır ise

$$\lambda = \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t) + T(t)}{T(t)}$$

şeklinde yazılır. Denklem (2.3) problemin sınır değer koşullarını kullanarak

$$X(\pi) = 0 \text{ ve } X(0) = 0 \quad (2.6)$$

alınır. Şimdi,

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0 \quad (2.7)$$

Denklemini için (2.6) sınır değer şartları ile sınır değer problemini inceleyelim. (2.7) adi diferansiyel denkleminin çözümünü bulmak için

$$m^2 - \lambda = 0$$

karakteristik denklemini yazalım. $\lambda \geq 0$ için sadece trivial çözüm vardır. O zaman $\lambda < 0$ durumuna bakalım.

$$X(x) = a_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + a_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x)$$

eşitliği (2.7) denkleminin çözümüdür. Burada sınır değerlerini yerine koyalım

$$x=0 \text{ için } a_1=0,$$

$$x=\pi \text{ için } x(\pi)=a_2.\sin(-\lambda)\pi=0.$$

$$\sqrt{-\lambda}\pi=n\pi$$

$$\sqrt{-\lambda}=n$$

olur. Böylece

$$-\lambda_n=n^2, \quad n=1,2,\dots \quad (2.8)$$

öz değerleri elde edilmiş olur. Denklem (2.8) Öz değerlere karşılık olarak gelen, öz fonksiyonları $n=1,2,\dots$ olmak üzere $X_n(x)=\sin nx$ şeklinde olur. Şimdi $T_k(t)$ fonksiyonun bulalım

$$-n^2=\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T'(t)+T(t)}{T(t)}$$

olduğuna göre

$$T'(t)+T(t)=\left(\frac{X''(x)}{X(x)}\right).T(t)$$

$-n^2$ denklemde yerine yazılır ise

$$T'(t)+T(t)=-n^2.T(t)$$

$$T'(t)+T(t)[1+n^2]=0 \quad (2.9)$$

denkleminin çözümü c_n , $n=1,2,\dots$ keyfi sabitler olacak şekilde

$$T_k(t)=c_k.e^{-(1+n^2)t}$$

biçimindedir. Sonuç olarak (2.3) denkleminde verilen problemin çözümü

$$v(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-(1+n^2)t} \sin n\pi x$$

olacak şekilde bulunur. Şimdi integral koşulundan

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-(1+n^2)t} \sin nx = \int_0^1 e^{-2\tau} \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-(1+n^2)\tau} \sin n\pi d\tau$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-(1+n^2)t} \sin nx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_0^1 e^{-2\tau} c_k e^{-(1+n^2)\tau} d\tau \cdot \sin nx$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-(1+n^2)t} \sin nx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\frac{1 - e^{-(3+n^2)}}{3 + n^2} \right) \sin nx$$

elde edilir. Buna göre $k=1,2,\dots$ için

$c_k = 0$ olur. Yani çözümü

$v(t, x) = 0$ olarak bulunur.

şimdi (2.4) problemin çözümünü $B_k(t)$ keyfi fonksiyonlar olacak biçimde

$$w(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot \sin k(x) \tag{2.10}$$

şeklinde arayacağız.

Buradan (2.10) ifadesinin t ve x değişkenlerine göre türevleri alınıp (2.4) diferansiyel denkleminde yerine yazılırsa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(B_k'(t) + k^2 \cdot B_k(t) + B_k(t) \right) \sin kx = 3e^{-2t} \cdot \sin 2x$$

elde edilir. $k \neq 2$ indisleri için

$$B_k'(t) + (k^2 + 1) \cdot B_k(t) = 0$$

olur. a_k keyfi sabit olacak şekilde

$$B_k(t) = a_k e^{(1+k^2)t}$$

elde edilir. Buna göre

$$w(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{(1+k^2)t} \sin kx$$

sonucuna ulaşılır.

$$w(0, x) = \int_0^1 e^{-2\tau} w(\tau, x) d\tau + \left(\frac{e^{-4} + 3}{4} \right) \sin 2x \quad (2.11)$$

integral koşulunu kullanırsak

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{(1+k^2)t} \sin kx = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^1 e^{-2\tau} a_k e^{(1+k^2)\tau} d\tau \right) \sin kx + \left(\frac{e^{-4} + 3}{4} \right) \sin 2x$$

olur. Böylece

$$a_k \cdot e^{(1+k^2)} = a_k \int_0^1 e^{-2\tau} \cdot e^{(1+k^2)\tau} \cdot d\tau$$

eşitliği gösterilir. Buradan $k \neq 2$ için indisler $a_k = 0$ olduğu görülür.

$k = 2$ durumda

$$B_2'(t) + 5B_2(t) = 3e^{-2t} \quad (2.12)$$

denkleminde ulaşılır. (2.12) denkleminin çözümü

$$B_2(t) = B_2(0)e^{-5t} + 3 \int_0^t e^{-5(t-s)} \cdot e^{-2s} \cdot ds$$

şeklindedir. Yine (2.11) integral koşulunu kullanırsak

$$w(t, x) = B_2(t) \cdot \sin 2x = \left(B_2(0)e^{-5t} + 3 \int_0^t e^{-5(t-s)} \cdot e^{-2s} \cdot ds \right) \sin 2x$$

$$w(t, x) = \left(e^{-5t} (B_2(0) - 1) + e^{-2t} \right) \cdot \sin 2x$$

$$w(0, x) = (B_2(0) - 1 + 1) \sin 2x = B_2(0) \sin 2x$$

$$B_2(0) \cdot \sin 2x = \int_0^1 e^{-2\tau} \left[\left(e^{-5\tau} (B_2(0) - 1) + e^{-2\tau} \right) \right] d\tau \sin 2x + \frac{e^{-4} + 3}{4} \sin 2x$$

$$B_2(0) \cdot \sin 2x = \int_0^1 \left((B_2(0) - 1) \cdot e^{-7\tau} + e^{-4\tau} \right) d\tau \cdot \sin 2x + \frac{e^{-4} + 3}{4} \sin 2x$$

$$B_2(0) \cdot \sin 2x = \left(\frac{(B_2(0)-1)e^{-7\tau}}{-7} + \frac{e^{-4\tau}}{-4} \right) \Bigg|_0^1 \cdot \sin 2x + \frac{e^{-4}+3}{4} \sin 2x$$

$$B_2(0) \left(1 + \frac{e^{-7}}{7} - \frac{1}{7} \right) = \frac{e^{-7}}{7} - \frac{1}{7} + 1$$

eşitliğinden $B_2(0)=1$ olduğu görülür. O halde (5.4) problemin çözümü

$$w(t, x) = B_2(t) \sin 2x = \left(e^{-5t} (B_2(0)-1) + e^{-2t} \right) \sin 2x = e^{-2t} \cdot \sin 2x$$

şeklindedir. Denklem (2.2) ifadesini kullanırsak denklem (2.1)'de verilen problemin çözümü

$$u(t, x) = e^{-2t} \cdot \sin 2x$$

şeklinde elde edilir.

2.2. Parabolik Denklemler için İntegral Koşullu SDP'nin Çözümünün Fourier Yöntemlerle Bulunması

Bu kısımda $[0,1] \times (-\infty, \infty)$ bölgesinde parabolik denklem için

$$u_t(t, x) = 2u_{xx}(t, x) - u(t, x) + (11 + 18t - 64tx^2 - 32x^2)e^{-2x^2} \quad (2.13)$$

$$u(0, x) = \int_0^1 e^{-2\tau} u(\tau, x) d\tau + e^{-2x^2} [2e^{-2}] \quad 0 < t < 1, \quad -\infty < x < \infty$$

Fourier integral dönüşümü yöntemini kullanarak integral koşullu yerel olmayan sınır değer probleminin çözümünü bulalım.

Problemin çözümünü yapabilmek için Fourier integral dönüşümünü kullanarak soruda verilen diferansiyel denklemin her iki yanını da x değişken olacak şekilde dönüşüm uygulayalım.

$$v(t, s) = F \{u(t, x)\} \quad (2.14)$$

notasyonunu ele alalım. Fourier dönüşüm özelliklerine göre;

$$F \{u_{xx}(t, x)\} = (is)^2 F \{u(t, x)\} = (is)^2 v(t, s),$$

$$(F \{u_{xx}(t, x)\})_t = v(t, s)$$

$$F \left\{ e^{-2z^2} (11+18t-64tx^2-32x^2) \right\}$$

$$F \left\{ 3e^{-2x^2} \right\} + F \left\{ 2te^{-2x^2} \right\} + F \left\{ -4te^{-2x^2} (16x^2-4) \right\} + F \left\{ -2e^{-2x^2} (16x^2-4) \right\}$$

$$(3+2t-4t(is)^2-2(is)^2).F \left\{ e^{-2x^2} \right\}$$

$$(3+2t+4ts^2+2s^2).F \left\{ e^{-2x^2} \right\}$$

elde edilir. Böylece (2.13) diferansiyel denkleminde

$$F \{u_t\} = 2F \{u_{xx}\} - F \{u\} + (3+2t+4ts^2+2s^2).F \left\{ e^{-2x^2} \right\}$$

$$v_t(t,s) = 2(is)^2 v(t,s) - v(t,s) + (3+2t+4ts^2+2s^2)F \left\{ e^{-2x^2} \right\}$$

$$v_t(t,s) + (2s^2+1)v(t,s) = (3+2t+4ts^2+2s^2)F \left\{ e^{-2x^2} \right\} \quad (2.15)$$

elde edilir. (2.15) denklemini çözmek için ilk önce

$$v_t^h(t,s) + (2s^2+1)v^h(t,s) = 0$$

homojen denklemini ele alalım onun çözümü;

$$v^h(t,s) = v(0,s)e^{-t(2s^2+1)}$$

olarak bulunur. Bu durumda homojen olmayan (2.15) denkleminin çözümü

$$v(t,s) = v(0,s)e^{-t(2s^2+1)} + \int_0^t e^{-(t-\tau)(2s^2+1)} \cdot (3+2\tau+4\tau s^2+2s^2) d\tau \cdot F\{e^{-2x^2}\} \quad (2.16)$$

şeklindedir.

$$I(t) = \int_0^t e^{(2s^2+1)\tau} \cdot \tau \cdot d\tau$$

ve

$$M(t) = \int_0^t e^{-(2s^2+1)(t-\tau)} \cdot (3+2\tau+4\tau s^2+2s^2) d\tau \cdot F\{e^{-2x^2}\}$$

olacak şekilde ele alınarak integralini hesaplayalım.

ilk olarak

$$I(t) = \int_0^t e^{(2s^2+1)\tau} \cdot \tau \cdot d\tau$$

integralini hesaplayalım. Kısmi integrasyon basamaklarını kullanarak işlemleri yapalım.

$$\left[\begin{array}{ll} u = \tau & e^{(2s^2+1)\tau} \cdot d\tau = d\mathcal{G} \\ du = d\tau & \mathcal{G} = \frac{e^{(2s^2+1)\tau}}{2s^2+1} \end{array} \right]$$

$$\frac{\tau \cdot e^{(2s^2+1)\tau}}{2s^2+1} \Big|_0^t - \int_0^t \frac{e^{(2s^2+1)\tau}}{2s^2+1} \cdot d\tau$$

$$\frac{\tau \cdot e^{(2s^2+1)\tau}}{2s^2+1} - \frac{e^{(2s^2+1)\tau}}{2s^2+1} \Big|_0^t \Rightarrow \frac{t \cdot e^{(2s^2+1)t}}{2s^2+1} - \frac{e^{(2s^2+1)t}}{(2s^2+1)^2} + \frac{1}{(2s^2+1)^2}$$

bulunur.

Şimdi

$$M(t) = \int_0^t e^{-(2s^2+1)(t-\tau)} \cdot (3+2\tau+4\tau s^2+2s^2) d\tau \cdot F\{e^{-2x^2}\}$$

integralini hesaplayalım

$$M(t) = e^{-(2s^2+1)t} \left[(3+2s^2) e^{(2s^2+1)t} + (2+4s^2) \int_0^t e^{(2s^2+1)\tau} \cdot \tau \cdot d\tau \right]$$

$$e^{-(2s^2+1)t} \cdot \left[\frac{3+2s^2 \cdot e^{(2s^2+1)\tau}}{2s^2+1} \Big|_0^t + (2+4s^2) \cdot I(t) \right]$$

$$e^{-(2s^2+1)t} \cdot \left[\left(\frac{3+2s^2 \cdot e^{(2s^2+1)t}}{2s^2+1} - \frac{3+2s^2}{2s^2+1} \right) + 2(1+2s^2) \right] \left(\frac{t \cdot e^{(2s^2+1)t}}{2s^2+1} - \frac{e^{(2s^2+1)t} - 1}{(2s^2+1)^2} \right)$$

$$\frac{2}{2s^2+1} + 1 - \frac{2 \cdot e^{-(2s^2+1)t}}{2s^2+1} - 1 \cdot e^{-(2s^2+1)t} + 2t - \frac{2}{2s^2+1} + \frac{2e^{-(2s^2+1)t}}{2s^2+1}$$

$$M(t) = 1 - e^{-(2s^2+1)t} + 2t$$

olarak bulunur. (2.16) çözümünü kullanarak

$$v(t, s) = v(0, s) \cdot e^{-2(s^2+1)t} + M(t) \cdot F \left\{ e^{-2x^2} \right\}$$

$$v(t, s) = v(0, s) \cdot e^{-2(s^2+1)t} + (1 - e^{-(2s^2+1)t} + 2t) F \left\{ e^{-2x^2} \right\}$$

elde edilir.

$$v(0, s) = \int_0^1 e^{-2\tau} v(\tau, s) d\tau + \varphi(x)$$

$$v(\tau, s) = v(0, s) e^{-(2s^2+1)\tau} + (1 - e^{-(2s^2+1)\tau} + 2\tau) \cdot F \left\{ e^{-2x^2} \right\}$$

$$v(0, s) = v(0, s) = \int_0^1 e^{-2\tau} e^{-(2s^2+1)\tau} d\tau + \int_0^1 e^{-2\tau} (1 - e^{-(2s^2+1)\tau} + 2\tau) d\tau \cdot F \left\{ e^{-2x^2} \right\} + F \left\{ e^{-2x^2} \right\} \cdot (2e^{-2})$$

$$v(0, s) \left(1 - \int_0^1 e^{-(2s^2+3)\tau} .d\tau \right) = \int_0^1 e^{-2\tau} d\tau - \int_0^1 e^{-(2s^2+3)\tau} .d\tau + 2 \int_0^1 e^{-2\tau} .\tau .d\tau .F \left\{ e^{-2x^2} \right\} + F \left\{ e^{-2x^2} \right\} .(2e^{-2})$$

$$v(0, s) \left(1 + \frac{e^{-(2s^2+3)}}{2s^2+3} - \frac{1}{2s^2+3} \right) = \left(\frac{e^{-\tau}}{-2} - \frac{e^{-(2s^2+3)\tau}}{-(2s^2+3)} - \tau e^{-2\tau} - \frac{e^{-2\tau}}{2} \right) \Bigg|_0^1 F \left\{ e^{-2x^2} \right\} + F \left\{ e^{-2x^2} \right\} .(2e^{-2})$$

$$v(0, s) \left(1 + \frac{e^{-(2s^2+3)}}{2s^2+3} - \frac{1}{2s^2+3} \right) = \left(-e^{-2} + \frac{-(2s^2+3)}{2s^2+3} - e^{-2} - \left(-1 + \frac{1}{2s^2+3} \right) \right) F \left\{ e^{-2x^2} \right\} + F \left\{ e^{-2x^2} \right\} .(2e^{-2})$$

$$v(0, s) \left(1 + \frac{e^{-(2s^2+3)}}{2s^2+3} - \frac{1}{2s^2+3} \right) = F \left\{ e^{-2x^2} \right\} \left(-2e^{-2} + 1 - \frac{1}{2s^2+3} + \frac{e^{-(2s^2+3)}}{2s^2+3} + 2e^{-2} \right)$$

$$v(0, s) = 1 F \left\{ e^{-2x^2} \right\}$$

bulunur.

Böylelikle

$$v(t, s) = v(0, s) .e^{-(2s^2+1)t} + (1 - e^{-(2s^2+1)t} + 2t) .F \left\{ e^{-2x^2} \right\}$$

$$v = v(t, s) = (e^{-(2s^2+1)t} + 1 - e^{-(2s^2+1)t} + 2t) F \left\{ e^{-2x^2} \right\}$$

$$v(t, s) = (1 + 2t) F \left\{ e^{-2x^2} \right\}$$

elde edilir. Şimdi bulduğumuz ifadenin her iki yanına da ters fourier dönüşümü uygulanırsa

$$u(t, x) = F^{-1} \left\{ u(t, s) \right\} = F^{-1} \left\{ (1 + 2t) .F \left\{ e^{-2x^2} \right\} \right\}$$

$$= (1 + 2t) e^{-2x^2}$$

şeklinde çözüme ulaşılır.

2.3. Parabolik Denklemler için İntegral Koşullu SDP'nin Çözümünün Laplace İntegral Dönüşümü Yöntemlerle Bulunması

$[0,1] \times [0,\infty]$ bölgesinde parabolik denklem için

$$u_t(t, x) = 2u_{xx}(t, x) - u(t, x) + 2 + 2t - 2e^{-x} - 2xe^{-x} - 6te^{-x} + 2xte^{-x} \quad 0 < t < 1, \quad 0 < x < \infty$$

$$u(0, x) = \int_0^1 e^{-2\tau} u(\tau, x) d\tau + \left(\frac{1-3e^{-2}}{2} \right) (1 - e^{-x} - xe^{-x}) \quad 0 < x < \infty \quad (2.17)$$

$$u_z(t, 0) = 0 \text{ ve } u(t, 0) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1$$

şeklinde yerel olmayan problemin çözümünü Laplace integral dönüşümü yöntemi ile bulalım.

(2.17) probleminin diferansiyel denkleminde x değişkenine Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$L\{u_t(t, x)\} = L\{2u_{xx}(t, x)\} - L\{u(t, x)\} + L\{2 + 2t - 2e^{-x} - 2xe^{-x} - 6te^{-x} + 2xte^{-x}\}$$

$$\begin{aligned} (L\{u(t, x)\})_t &= 2(s^2 L\{u(t, x)\} - su(t, 0) - u_x(t, 0)) - L\{u(t, x)\} + \frac{2+2t}{s} \\ &\quad - \frac{2}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{6t}{s+1} + \frac{2t}{(s+1)^2} \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. $u(t, x)$ fonksiyonu x değişken olarak alınır ise Laplace dönüşümünü

$v(t, s) = L\{u(t, x)\}$ ile gösterelim. Buna göre;

$$v_t(t,s) - 2s^2 v(t,s) + v(t,s) = \frac{2+2t}{s} - \frac{2}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{6t}{s+1} + \frac{2t}{(s+1)^2}$$

$$v_t(t,s) + (1-2s^2)v(t,s) = \frac{2+2t}{s} - \frac{2}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{6t}{s+1} + \frac{2t}{(s+1)^2}$$

olur.

$$v_t^h(t,s) + (1-2s^2)v^h(t,s) = 0$$

şeklinde homojen denklemin genel çözümü burada c keyfi sabit olmak üzere;

$$v^h(t,s) = e^{-(1-2s^2)t} . c$$

olarak bulunur.

Homojen olmayan denklemin özel çözümü

$v_t^{\ddot{}}(t,s) = a(s)t + b(s)$ formunda arayalım. Buradan

$$v_t^{\ddot{}}(t,s) = a(s)$$

$$a(s) + (1-2s^2)a(s)t + (1-2s^2)b(s) = t \left(\frac{2}{s} - \frac{6}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} \right) + \frac{2}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2}$$

$$(1-2s^2)a(s) = \frac{2}{s} - \frac{6}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2}$$

$$a(s) + (1 - 2s^2)b(s) = \frac{2}{s} - \frac{6}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$a(s) = \frac{2}{s(1-2s^2)} - \frac{6}{(s+1)(1-2s^2)} + \frac{2}{(s+1)^2(1-2s^2)}$$

$$b(s) = \left[\frac{2}{s} - \frac{2}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{2}{s(1-2s^2)} + \frac{6}{(s+1)(1-2s^2)} - \frac{2}{(s+1)^2(1-2s^2)} \right] \cdot \frac{1}{(1-2s^2)}$$

bulunur. Bulunan $a(s)$ ve $b(s)$ fonksiyonları yerine yazarsak, Özel çözüm;

$$\begin{aligned} v^{\circ}(t, s) = & \frac{2}{1-2s^2} \left[\frac{1}{s} - \frac{3}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} \right] \cdot t \\ & + \frac{2}{1-2s^2} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{s(1-2s^2)} + \frac{3}{(s+1)(1-2s^2)} - \frac{1}{(s+1)^2(1-2s^2)} \right] \end{aligned}$$

$$v^{\circ}(t, s) = \left(\frac{2}{s} - \frac{2}{(s+1)} - \frac{2}{(s+1)^2} \right) \cdot t$$

olarak elde edilir. Böylece

$$v(t, s) = e^{-(1-2s^2)t} \cdot c + \left(\frac{2}{s} - \frac{2}{(s+1)} - \frac{2}{(s+1)^2} \right) \cdot t$$

elde edilir. Şimdi (2.17) problemi integral koşuluna Laplace dönüşümünü uygulayım.

$$L \left\{ \left(\frac{-3e^{-2}+1}{2} \right) \cdot (1 - e^{-x} - xe^{-x}) \right\}$$

$$= \frac{-3e^{-2}+1}{2} \cdot [L\{1\}] - L\{e^{-x}\} - L\{xe^{-x}\}$$

$$\frac{-3e^{-2}+1}{2} \cdot \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} \right\}$$

olduğuna göre integral koşulu

$$v(0, s) = \int_0^1 e^{-2\tau} v(\tau, s) d\tau + \frac{-3e^{-2}+1}{2} \cdot \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} \right\}$$

şeklinde yazabiliriz. Buna göre

$$e^{-(1-2s^2)t} \cdot C + \left(\frac{2}{s} - \frac{2}{(s+1)} - \frac{2}{(s+1)^2} \right) t$$

ifadesi yerine yazılırsa

$$v(0, s) = \int_0^1 e^{-2\tau} \left(e^{-(1-2s^2)t} \cdot C + \left(\frac{2}{s} - \frac{2}{(s+1)} - \frac{2}{(s+1)^2} \right) \tau \right) d\tau + \frac{-3e^{-2}+1}{2} \cdot \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+1)^2} \right)$$

olur. Buradan

$$e^{-(1-2s^2)0} \cdot C = \frac{c(e^{-3+2s^2} - 1)}{2s^2 - 3}$$

ve c = 0 olduğu görülür. Böylece

$$v(t,s) = \left(\frac{2}{s} - \frac{2}{(s+1)} - \frac{2}{(s+1)^2} \right) t \quad (2.18)$$

çözümüne ulaşırız. (2.18) eşitliğin her iki yanına ters Laplace dönüşümü uygularsak

$$u(t,z) = \left[L^{-1} \{v(t,s)\} = L^{-1} \left\{ \frac{2}{s} \right\} - L^{-1} \left\{ \frac{2}{(s+1)} \right\} - L^{-1} \left\{ \frac{2}{(s+1)^2} \right\} \right] t$$

$$u(t,x) = (2 - 2e^{-x} - 2xe^{-x})t$$

elde ederiz. (5.18) probleminin çözümü

$$u(t,x) = (2 - 2e^{-x} - 2xe^{-x})t$$

olur.

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

Buradaki bölümde, parabolik denklemler de yerel olmayan sınır değer problemlerin (SDP) yaklaşık olarak çözümlerini yapmak için fark şemalarının çözümlerin uygulamalarını ele alacağız. Yaklaşım çözümleri için Ashyralyev ve Ashyralyyev (2022) makalede alınan kararlılık sonuçlarını kullanacağız.

Tek boyutlu parabolik denklemler de yerel olmayan bir sınır değer problemi (SDP) ele alalım.

$$\begin{aligned} v_t - (a(x)v_x)_x + \delta v &= f(t, x), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l, \\ v(0, x) &= \int_0^T \alpha(s) Bv(s, x) ds + \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$v(t, 0) = v(t, l), \quad v_x(t, 0) = v_x(t, l), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Burada $0 < a \leq a(x)$, $a(l) = a(0)$ ve δ pozitif bir sabittir. (3.1) problemi $v(t, x)$ fonksiyonu $a(x)$, $x \in (0, l)$, $\varphi(x)$, $x \in [0, l]$, $f(t, x)$, (t, x) , $(0, T) \times (0, l)$ sınır değerleri kullanılarak Hilbert uzayında $H = L_2[0, l]$ indirgenir.

$$A_z = -\frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{dz(x)}{dx} \right) + \delta z(x) \quad (3.2)$$

şeklinde diferansiyel ifade

$$D(A) = \{z : z, z'' \in L_2(0, l), z(0) = z(l), z'(0) = z'(l)\}. \quad (3.3)$$

olmak üzere A pozitif bir operatörü tanımlar.

Teorem3.1. (Ashyralyev ve Ashyralyyev, 2022)

$$\varphi(x) \in W_2^2(0, l), \quad f(t, x) \in C_0^\alpha([0, T], L_2(0, l)) \quad \text{ve} \quad \int_0^T |a(s)| ds \|B\|_{L_2(0, l) \rightarrow L_2(0, l)} < 1$$

koşullarının karşılandığını varsayalım. O halde, (3.1) probleminin $u \in C_0^\alpha([0, T], L_2(0, l))$ çözümü vardır ve yerel olmayan sınır değer probleminin (3.1) çözümü aşağıdaki gibidir.

$$\|u\|_{C([0, T], L_2(0, l))} \leq M_{a, b, q, \delta} \left[\|\varphi\|_{L_2(0, l)} + \|f\|_{C([0, T], L_2(0, l))} \right] \quad (3.4)$$

$$\|u_t\|_{C([0, T], L_2(0, l))} + \|u\|_{C([0, T], W_2^2(0, l))} \leq M_{a, b, q, \delta} \left[\|\varphi\|_{W_2^2(0, l)} + \|f_t\|_{C([0, T], L_2(0, l))} + \|f(0)\|_{L_2(0, l)} \right] \quad (3.5)$$

$$\|u_t\|_{C_0^\alpha([0, T], L_2(0, l))} + \|u\|_{C_0^\alpha([0, T], W_2^2(0, l))} \leq M_{a, b, q, \delta} \|\varphi\|_{W_2^2(0, l)} + \frac{M_{a, b, q, \delta}}{\alpha(1-\alpha)} \|f\|_{C_0^\alpha([0, T], L_2(0, l))} \quad (3.6)$$

Burada, Sobolev uzayı $W_2^2(0, l)$, $(0, l)$ üzerinde tanımlanan tüm $v(x)$ fonksiyonlarının kümesi olarak tanımlanır ve $v(x)$, $v'(x)$, ve $v''(x)$, $L_2(0, l)$ 'de yerel olarak integrallenebilir fonksiyonlar olmak üzere $W_2^2(0, l)$ uzayındaki $v(x)$ fonksiyonun normu

$$\|v\|_{W_2^2(0, l)} = \left(\int_0^l |v(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_0^l |v'(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_0^l |v''(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

şeklindedir.

Ayrıca $L_{2h} = L_2[0, l]_h$ ve $W_{2h}^2 = W_2^2[0, l]_h$

$$\|\gamma^h\|_{L_{2h}} = \left(\sum_{x \in [0, l]_h} |\gamma^h(x)|^2 h \right)^{1/2}$$

ve

$$\|\gamma^h\|_{W_{2h}^2} = \|\gamma^h\|_{L_{2h}} + \left(\sum_{x \in [0, l]_h} |(\gamma^h)_{xx,j}|^2 h \right)^{1/2}$$

Normları ile $[0, l]_h = \{x_n = nh, 0 \leq n \leq M, Mh = l\}$ üzerinde tanımlanan $\gamma^h(x) = \{\gamma_n\}_{n=0}^M$ fonksiyonlarının normlu uzayları olsun

A_h^x fark operatörü $u_M = u_0$, $u_1 - u_0 = u_M - u_{M-1}$ olmak üzere

$$A_h^x u^h(x) = \left\{ -\frac{1}{h} \left(a_{n+1} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} - a_n \frac{u_n - u_{n-1}}{h} \right) + \delta u_n \right\}_1^{M-1} \quad (3.7)$$

formundadır (Ashyralyev ve Ashyralyev (2022)).

$[0, l]_h$ üzerinde tanımlanan $u^h(x) = \{u_n\}_{n=0}^M$ fonksiyon uzayında olan yerel olmayan sınır değer probleminin $\{u_k^h(x)\}_{k=0}^N$ sayısal çözümü için (3.1), t cinsinden birinci ve ikinci doğruluk fark şemalarını:

$$\frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} - \frac{1}{h} \left(a_{n+1} \frac{u_{n+1}^k - u_n^k}{h} - a_n \frac{u_n^k - u_{n-1}^k}{h} \right) + \delta u_n^k = f_n^k$$

$$f_n^k = f(t_k, x_n), \quad t_k = k\tau, \quad x_n = nh, \quad k = \overline{1, N} \text{ ve } n = \overline{1, M-1}, \quad (3.8)$$

$$u_n^0 = \varphi_n, \quad \varphi_n = \varphi(x_n), \quad n \in \overline{0, M}$$

$$u_M^k = u_0^k, \quad u_1^k - u_0^k = u_M^k - u_{M-1}^k, \quad k \in \overline{0, N}$$

$$\frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} - \frac{1}{2h} \left(a_{n+1} \frac{u_{n+1}^k - u_n^k}{h} - a_n \frac{u_n^k - u_{n-1}^k}{h} \right) - \frac{1}{2h} \left(a_{n+1} \frac{u_{n+1}^{k-1} - u_n^{k-1}}{h} - a_n \frac{u_n^{k-1} - u_{n-1}^{k-1}}{h} \right) + \delta \frac{u_n^k + u_n^{k-1}}{2} = f_n^k,$$

$$f_n^k = f \left(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n \right), \quad t_k = k\tau, \quad x_n = nh, \quad k \in \overline{1, N}, \quad n \in \overline{1, M-1} \quad (3.9)$$

$$u_n^0 = \varphi_n, \quad \varphi_n = \varphi(x_n), \quad n \in \overline{0, M}$$

$$u_M^k = u_0^k, \quad u_1^k - u_0^k = u_M^k - u_{M-1}^k, \quad k \in \overline{0, N},$$

şeklinde alabiliriz.

Teorem3.2. (Ashyralyev ve Ashyralyyev, 2022) τ ve h yeterince küçük sayılar olmak üzere

$$\left[\frac{|a_0| + |a_N|}{2} \tau + \sum_{i=1}^{N-1} |a_i| \tau \right] \|B\|_{L_{2h} \rightarrow L_{2h}} < 1$$

olduğunu varsayalım. O zaman (3.8) ve (3.9)'un fark şemalarının çözümleri için aşağıdaki kararlılık eşitsizlikleri doğrudur:

$$\left\| \{u_k^h\}_{k=1}^N \right\|_{C_r^\alpha(L_{2h})} \leq M_{a,b,q,\delta} \left[\|\varphi^h\|_{L_{2h}} + \left\| \{f_k^h\}_{k=1}^N \right\|_{C_r^\alpha(L_{2h})} \right],$$

$$\left\| \left\{ \frac{1}{\tau} (u_k^h - u_{k-1}^h) \right\}_{k=1}^N \right\|_{C(L_{2h})} \leq M_{a,b,q,\delta} \left[\|\varphi^h\|_{W_{2h}^2} + \ln \frac{1}{h+\tau} \left\| \{f_k^h\}_{k=1}^N \right\|_{C(L_{2h})} \right]$$

$$\left\| \left\{ \frac{1}{\tau} (u_k^h - u_{k-1}^h) \right\}_{k=1}^N \right\|_{C_r^\alpha(L_{2h})} \leq M_{a,b,q,\delta} \left[\|\varphi^h\|_{W_{2h}^2} + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \left\| \{f_k^h\}_{k=1}^N \right\|_{C_r^\alpha(L_{2h})} \right]$$

Ω n-boyutlu R^n Öklid uzayında bir birim küp ve S onun sınırı, $\Omega = \Omega \cup S$ olsun.

İkinci olarak, $[0, T] \times \Omega$ bölgesinde $(x = (x_1, \dots, x_n), 0 < x_k < 1, 1 \leq k \leq n)$ çok boyutlu parabolik denklemler de yerel olmayan bir sınır değer problemi (SDP) inceleyelim:

$$u_t - \sum_{r=1}^n (a_r(x) u_{x_r})_{x_r} = f(t, x), \quad 0 < t < T, \quad x \in \Omega$$

$$u(0, x) = \int_0^T \alpha(s) B u(s, x) ds + \varphi(x), \quad x \in \Omega \quad (3.10)$$

$$u(t, x) = 0, \quad x \in S, \quad 0 \leq t \leq T$$

Problem (3.10), $a_r(x) \geq a > 0$ ($x \in \Omega$), $\varphi(x)$ ($x \in \Omega$) ve $f(t, x)$ ($t \in (0, T), x \in \Omega$) düzgün fonksiyonları için $u(t, x)$ 'e çözümüne sahiptir. Bu, karma problemi (3.10), norm ile Ω üzerinde tanımlanan tüm integrallenebilir fonksiyonların Hilbert uzayı $H = L_2(\Omega)$ 'deki yerel olmayan bir sınır değer problemine indirgememizi sağlar. Bu uzayda f fonksiyonun normu

$$\|f\|_{L_2(\Omega)} = \left\{ \int_{x \in \Omega} \cdots \int |f(x)|^2 dx_1 \cdots dx_n \right\}^{1/2}$$

şeklindedir. Etki alanı

$$D(A^x) = \left\{ u(x) : u(x), u_{x_r}(x), (a_r(x)u_{x_r})_{x_r} \in L_2(\Omega), 1 \leq r \leq n, u(x) = 0, x \in S \right\}$$

olmak üzere özeşlenik pozitif tanımlı A^x operatörü

$$A^x u(x) = - \sum_{r=1}^n (a_r(x)u_{x_r})_{x_r} \quad (3.11)$$

formunda tanımlayalım.

Teorem.3.3. (Ashyralyev ve Ashyralyev, 2022)

$\varphi(x) \in W_2^2(\Omega)$, $f(t, x) \in C_0^\alpha([0, T], L_2(\Omega))$ olduğunu ve $\int_0^T |a(s)| ds \|B\|_{H \rightarrow H} < 1$ koşulunu sağladığını varsayalım. O halde, (3.10) probleminin $u \in C_0^\alpha([0, T], L_2(\Omega))$ çözümü vardır ve lokal olmayan (3.10) sınır değer probleminin çözümü aşağıdaki kararlılık eşitliklerini sağlar:

$$\|u\|_{C([0, T], L_2(\Omega))} \leq M_{a, b, q, \delta} \left[\|\varphi\|_{L_2(\Omega)} + \|f\|_{C([0, T], L_2(\Omega))} \right], \quad (3.12)$$

$$\|u_t\|_{C([0, T], L_2(\Omega))} + \|u\|_{C([0, T], W_2^2(\Omega))} \leq M_{a, b, q, \delta} \left[\|\varphi\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f_t\|_{C([0, T], L_2(\Omega))} + \|f(0)\|_{L_2(\Omega)} \right], \quad (3.13)$$

$$\|u_t\|_{C_0^\alpha([0, T], L_2(\Omega))} + \|u\|_{C_0^\alpha([0, T], W_2^2(\Omega))} \leq M_{a, b, q, \delta} \|\varphi\|_{W_2^2(\Omega)} + \frac{M_{a, b, q, \delta}}{\alpha(1-\alpha)} \|f\|_{C_0^\alpha([0, T], L_2(\Omega))}. \quad (3.14)$$

Burada, Sobolev uzayı $W_2^2(\Omega)$, tüm ikinci dereceden kısmi türevler $u_{x_r x_r}$, $r = 1, \dots, n$ ile $L_2(\Omega)$ üzerinde tanımlanan ve üzerinde integrallenebilen tüm u fonksiyonlarının kümesi olarak tanımlanır,

$$\|u\|_{W_2^2(\Omega)} = \|u\|_{L_2(\Omega)} + \left(\int_{x \in \Omega} \cdots \int \sum_{r=1}^n |u_{x_r x_r}|^2 dx_1 \dots dx_n \right)^{1/2}$$

Problem (3.10) sayısal olarak iki aşamada ele alınır.

$$\Omega_h = \{x = x_m = (h_1 m_1, \dots, h_n m_n), m = (m_1, \dots, m_n), 0 \leq m_r \leq M_r, h_r M_r = L, r = 1, \dots, n\}$$

$$\Omega_h = \Omega_h \cap \Omega \quad S_h = \Omega_h \cap S$$

A_h^x operatörü

$$A_h^x u^h(x) = - \sum_{r=1}^n \left(a_r(x) u_{x_r}^h \right)_{x_r, j_r} \quad (3.15)$$

tüm $x \in S_h$ için $u^h(x) = 0$ koşullarını sağlayan $u^h(x)$ fonksiyonlarının üzerinde tanımlıdır.

A_h^x ile

$$\begin{aligned} v_t^h(t, x) + A_h^x v^h(t, x) &= f^h(t, x), \quad 0 < t < T, \quad x \in \Omega_h \\ v^h(0, x) &= \int_0^T \alpha(s) B_h v^h(s, x) ds + \varphi^h(x), \quad x \in \Omega_h \end{aligned} \quad (3.16)$$

sonsuz bir diferansiyel denklem sistemi için lokal olmayan sınır değer problemine ulaşırız.

Problem (3.16), t cinsinden

$$\begin{aligned} \frac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} + A_h^x u_k^h(x) &= \varphi_k^h(x) \\ \varphi_k^h(x) &= f^k(t_k, x), \quad t_k = k\tau, \quad 1 \leq k \leq N, \quad x \in \Omega_h, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$u_0^h(x) = \frac{a(0)Bu_0^h(x) + a(T)u_N^h(T)}{2} \tau + \sum_{i=1}^{N-1} \alpha(t_i) Bu_i^h(x) \tau + \varphi^h(x), \quad x \in \Omega_h$$

burada birinci mertebeden doğrulukla fark şeması ve

$$\begin{aligned} \frac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} + \frac{1}{2} A_h^x u_k^h(x) + \frac{1}{2} A_h^x u_{k-1}^h(x) &= \varphi_k^h(x) \\ \varphi_k^h(x) &= f^k\left(t_k - \frac{\tau}{2}, x\right), \quad t_k = k\tau, \quad 1 \leq k \leq N, \quad x \in \Omega_h \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$u_0^h(x) = \frac{a(0)Bu_0^h(x) + a(T)u_N^h(T)}{2} \tau + \sum_{i=1}^{N-1} \alpha(t_i) Bu_i^h(x) \tau + \varphi^h(x), \quad x \in \Omega_h$$

formundaki ikinci mertebeden doğrulukla fark şeması ile değiştirebilir.

Sonucu formüle etmek için, $x \in \Omega_h$ üzerinde tanımlanan tüm fonksiyonlarının $\varphi^h(x) = \varphi(h_1 m_1, \dots, h_n m_n)$ uzayını $L_{2h} = L_2(\Omega_h)$ ile belirliyoruz ve normu

$$\|\varphi^h\|_{L_{2h}} = \left(\sum_{x \in \Omega_h} |\varphi^h(x)|^2 h \right)^{1/2}$$

şeklinde tanımlıyoruz.

Teorem3.4. (Ashyralyev ve Ashyralyev, 2022) τ ve $|h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2}$ yeterince küçük sayılar olmak üzere

$$\left[\frac{|a_0| + |a_N|}{2} \tau + \sum_{i=1}^{N-1} |a_i| \tau \right] < 1$$

koşul sağlansın. (3.17) ve (3.18) fark şemaların çözümü için aşağıdaki kararlılık eşitlikleri

$$\left\| \{u_k^h\}_{k=1}^N \right\|_{C_r^\alpha(L_{2h})} \leq M_{a,b,q,\delta} \left[\|\varphi^h\|_{L_{2h}} + \left\| \{f_k^h\}_{k=1}^N \right\|_{C_r^\alpha(L_{2h})} \right],$$

$$\left\| \left\{ \frac{1}{\tau} (u_k^h - u_{k-1}^h) \right\}_{k=1}^N \right\|_{C(L_{2h})} \leq M_{a,b,q,\delta} \left[\|\varphi^h\|_{W_{2h}^2} + \ln \frac{1}{|h| + \tau} \left\| \{f_k^h\}_{k=1}^N \right\|_{C(L_{2h})} \right],$$

$$\left\| \left\{ \frac{1}{\tau} (u_k^h - u_{k-1}^h) \right\}_{k=1}^N \right\|_{C_r^\alpha(L_{2h})} \leq M_{a,b,q,\delta} \left[\|\varphi^h\|_{W_{2h}^2} + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \left\| \{f_k^h\}_{k=1}^N \right\|_{C_r^\alpha(L_{2h})} \right].$$

3.1. Parabolik Denklem için İntegral Koşullu Lokal Olmayan Problemin sayısal çözümü

Bu bölümde; 1. mertebeden fark şemasını ve ayrıca 2. mertebeden olan iki adet fark şemasını kullanılarak yerel olmayan parabolik sınır değer probleminin (SDP) çözümünü ele alacağız ayrıca test örneklerde sayısal çözümleri ele alınacaktır. MATLAB kodları kullanılarak fark şemalarının çözümleri ele alınacaktır.

3.1.1. İntegral koşullu Bir boyutlu parabolik denklem için fark şema

Örnek 3.1. Parabolik denklem için integral tipindeki yerel olmayan şartlı ve Neumann sınır koşullu

$$\begin{cases} u_t(t, x) - (3 + 2 \cos x)U_{xx} + 2 \sin x u_x(t, x) + u(t, x) = f(t, x), \\ f(t, x) = e^{-2t} \cos x (2 + 2 \cos x) - e^{-2t} \cdot 2 \sin^2 x \\ u(0, x) = \frac{1}{3} \int_0^1 e^{-2s} \cdot u(s, x) ds + \psi(x), \\ \psi(x) = \cos x \left(1 + \frac{e^{-4}}{12} - \frac{1}{12} \right), \\ u_z(t, 0) = 0, u_z(t, \pi) = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

şeklindeki sınır değer problemine bakılacaktır.

Çözüm:

$u(t, x) = e^{-2t} \cos x$ fonksiyonu (3.19) sınır değer problemi gerçek çözümüdür. (3.19) probleminin yaklaşık çözümü için (3.17) denkleminin birinci dereceden doğrulukla fark şemasını ele alalım.

$$\begin{cases} \frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} - (3 + 2 \cos x_n) \frac{(u_{n+1}^{k-1} - 2u_n^{k-1} + u_{n-1}^{k-1}))}{h^2} + 2 \sin x_n \frac{(u_{n+1}^{k-1} - u_{n-1}^{k-1}))}{2h} + u_n^{k-1} = f(t_n, x_k) \\ n = 1, \dots, M-1 \text{ ve } k = 1, \dots, N \\ u_n^0 = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^N e^{-2t_j} \cdot u_n^j \cdot \tau + \cos x_n \left(1 + \frac{e^{-4}}{12} - \frac{1}{12} \right) \quad n = 0, \dots, M \\ u_1^k = u_0^k, \quad u_M^K = u_{M-1}^K, \quad k = 0, \dots, N \end{cases} \quad (3.20)$$

burada

$$u_{n-1} = \begin{bmatrix} u_{n-1}^0 \\ \vdots \\ u_{n-1}^N \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}, \quad u_{n+1} = \begin{bmatrix} u_{n+1}^0 \\ \vdots \\ u_{n+1}^N \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}, \quad u_n = \begin{bmatrix} u_n^0 \\ \vdots \\ u_n^N \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}$$

olmak üzere (3.20) denklem sistemi aşağıdaki gibi

$$A_n u_{n+1} + B_n u_n + C_n u_{n-1} = I_n \psi_n, \quad n=1, \dots, M-1 \quad (3.21)$$

$u_0 = u_1, u_M = u_{M-1}$ matris formunda yazılabilir.

Burada $\psi_n, (N+1) \times 1$ şeklinde verilen sütun matris, $I_n, (N+1) \times (N+1)$ şeklinde verilen birim matris, A_n, B_n ve $C_n, (N+1) \times (N+1)$ şeklinde verilen kare matrisler

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_n & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & c_n & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_n = \begin{bmatrix} 1 & -e_1^{-2t_1} \tau & -e_2^{-2t_2} \tau & \cdots & -e^{-2t_{N-2}} \tau & -e^{-2t_{N-1}} \tau & -e^{-2t_N} \tau \\ b_n & s & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_n & s & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & b_n & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n & s \end{bmatrix},$$

$$a_n = -\frac{(3+2\cos x_n)}{h^2} + \frac{\sin x_n}{h}$$

$$b_n = -\frac{1}{\tau} + \frac{(3+2\cos x_n).2}{h^2} + 1$$

$$c_n = -\frac{(3+2\cos x_n)}{h^2} - \frac{2\sin x_n}{2h}$$

$$s = \frac{1}{\tau}$$

$$\psi_n = \begin{bmatrix} \psi_N^0 \\ \vdots \\ \psi_N^N \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}$$

$$\psi_n^0 = \cos x_n (1 + \frac{e^{-4}}{12} - \frac{1}{12}), n=1, \dots \text{ ve } M-1$$

$$\psi_n^K = f(t_n, x_k), k=1, \dots, N, n=1, \dots \text{ ve } M-1$$

Şimdi (3.20) fark denklemlerini numerik çözümü için düzenlenmiş Gauss eliminasyon metodunu kullanacağız (Samarskii, 2001)

Yani

$\alpha_1 = I$, $\beta_1, (N+1) \times 1$ tipinde sıfır sütun vektörü,

$a_n, (n=2, \dots, M-1), (N+1) \times (N+1)$ şeklinde verilen kare matris ve

$\beta_n, (n = 2, \dots, M-1), (N+1) \times 1$ şeklinde verilen sütun matrisi olmak üzere, (3.21) denklem sistemin çözümü

$$u_n = \alpha_{n+1} u_{n+1} + \beta_{n+1}, n = M-1, \dots, 1,$$

Şeklinde arayacağız.

Buna göre,

$$\alpha_{n+1} = -(B_n + C_n \alpha_n)^{-1} A_n,$$

$$\beta_{n+1} = (B_n + C_n \alpha_n)^{-1} (I_n \phi_n - C_n \beta_n)$$

ve

$$u_M = u_{M-1} = (A_{M-1} + B_{M-1} + C_{M-1} \alpha_{M-1})^{-1} (I_{M-1} \psi_{M-1} - C_{M-1} \beta_{M-1})$$

olur.

(N,M) farklı değerleri için

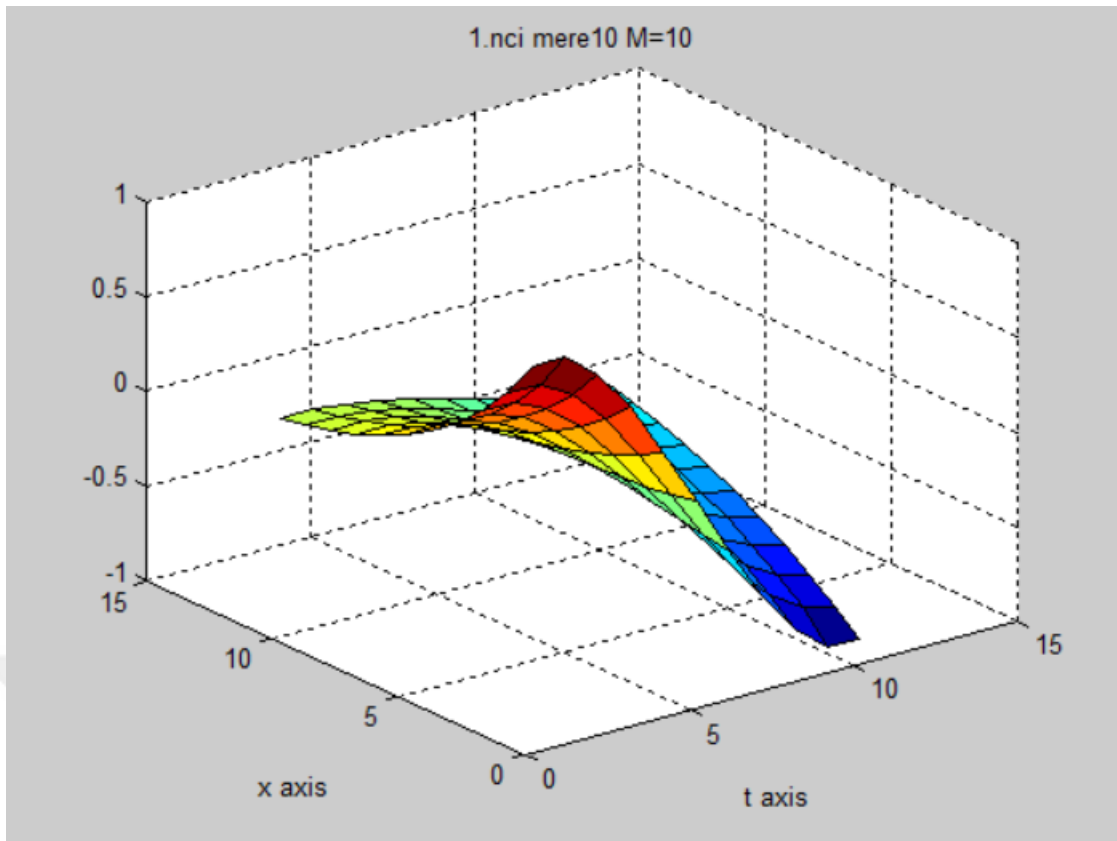
$$Eu_M^N = \max_{1 \leq k \leq N-1} \left(\sum_{n=1}^{M-1} (u(x_n, t_k) - u_n^k)^2 h \right)^{\frac{1}{2}}$$

normu ile hesaplanır.

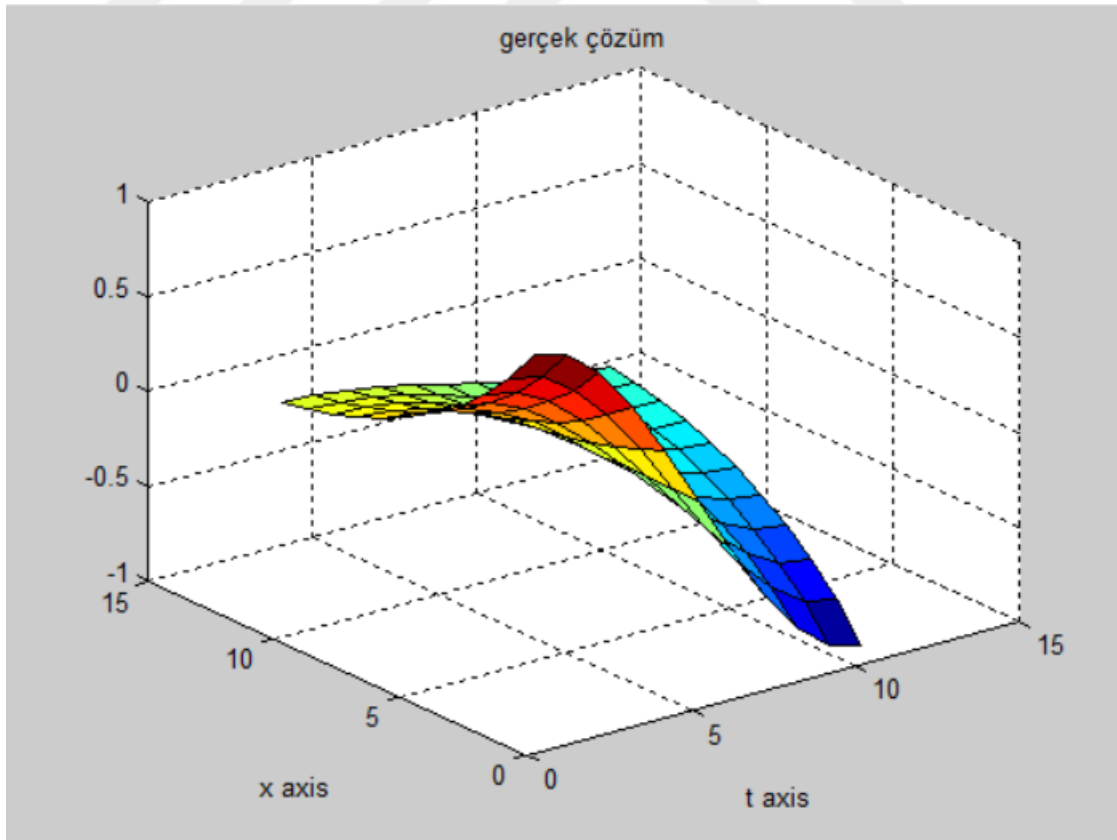
Tablo 1. (3.20) BMDFS'nin hata analizi

Hata/(N,M)	(10,10)	(20,20)	(40,40)	(60,60)	(80,80)
Eu_M^N	0.11947	0.059838	0.030508	0.020514	0.015457
Bağıl Hata	0.12353	0.06012	0,03489	0.020492	0.015441

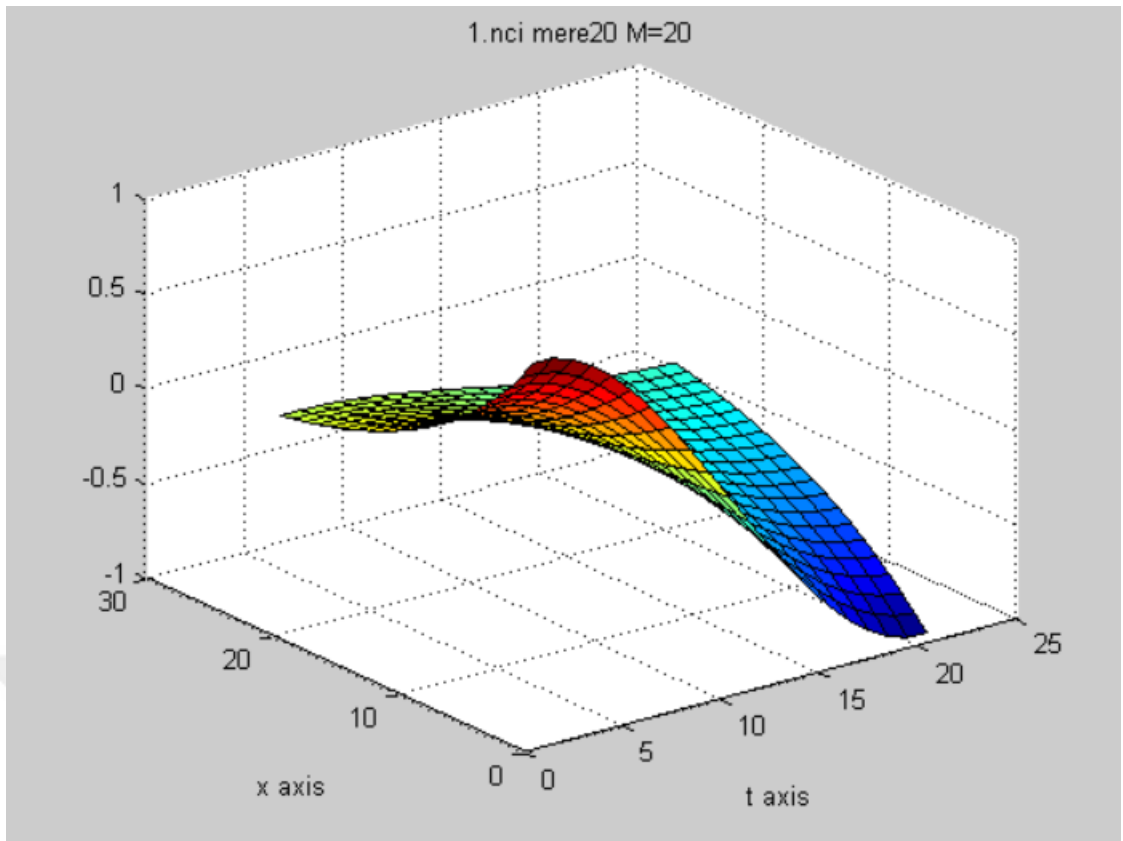
Tablo.1' de gördüğümüz gibi N ile M değerleri iki kat arttığında hata değerleri yaklaşık olarak 1/2 oranında azalır. Tablodaki N ve M değerleri kullanılarak, (3.20) BMDFS' nin yaklaşık çözüm grafiği, (3.19) problemi için gerçek çözüm grafiği verilen farklı değerlere göre sırasıyla, Şekil.1'de, Şekil.2'de, Şekil.3'de, Şekil.4'de, Şekil.5'de, Şekil.6'da, Şekil.7'de ve Şekil.8' de gösterilmiştir



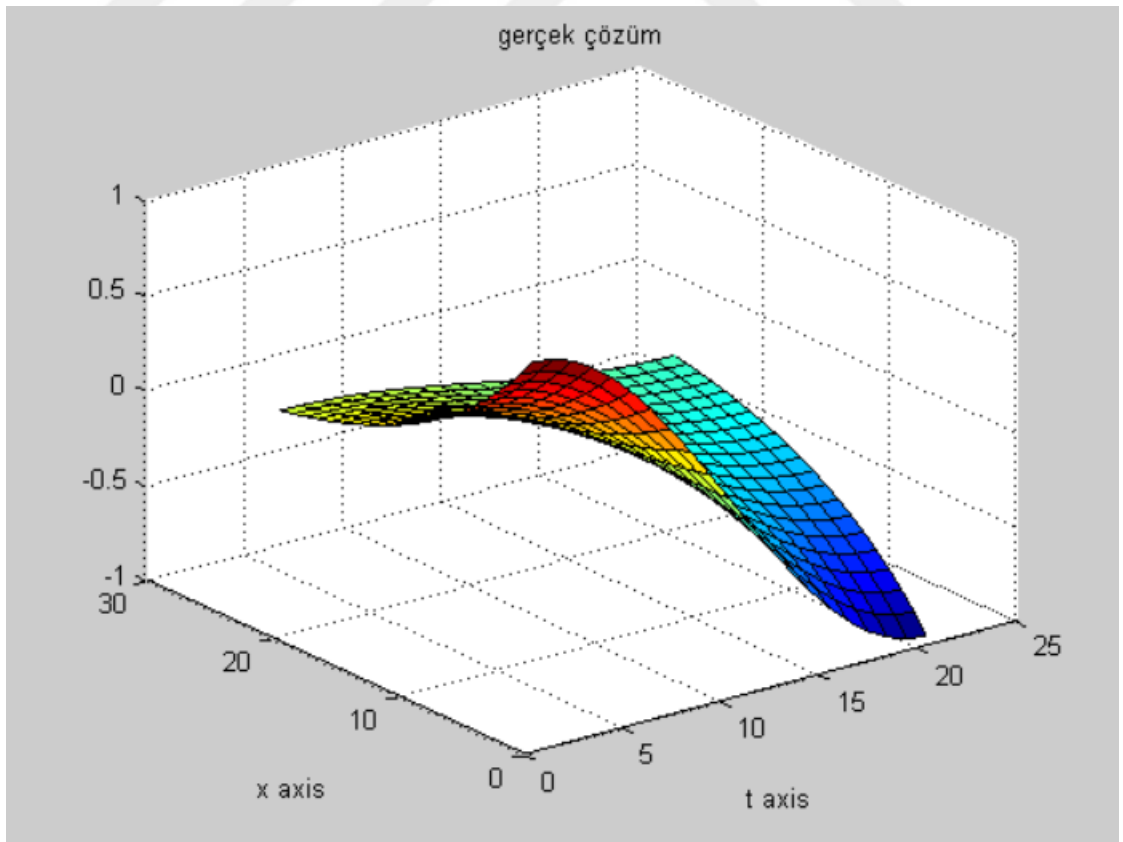
Şekil 1. $N=10, M=10$ için (3.20) BMDFS'nin yaklaşık çözüm grafiği



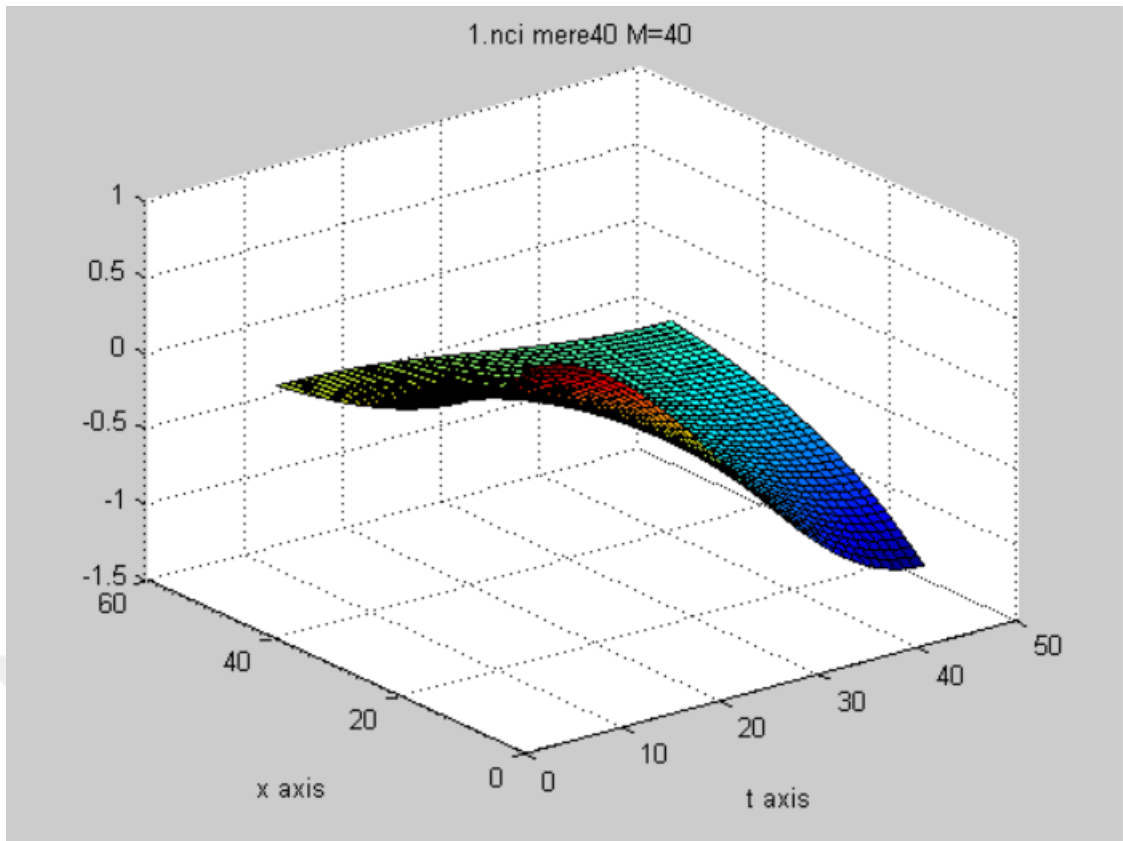
Şekil 2. $N=10, M=10$ için (3.19) Probleminin gerçek çözüm grafiği



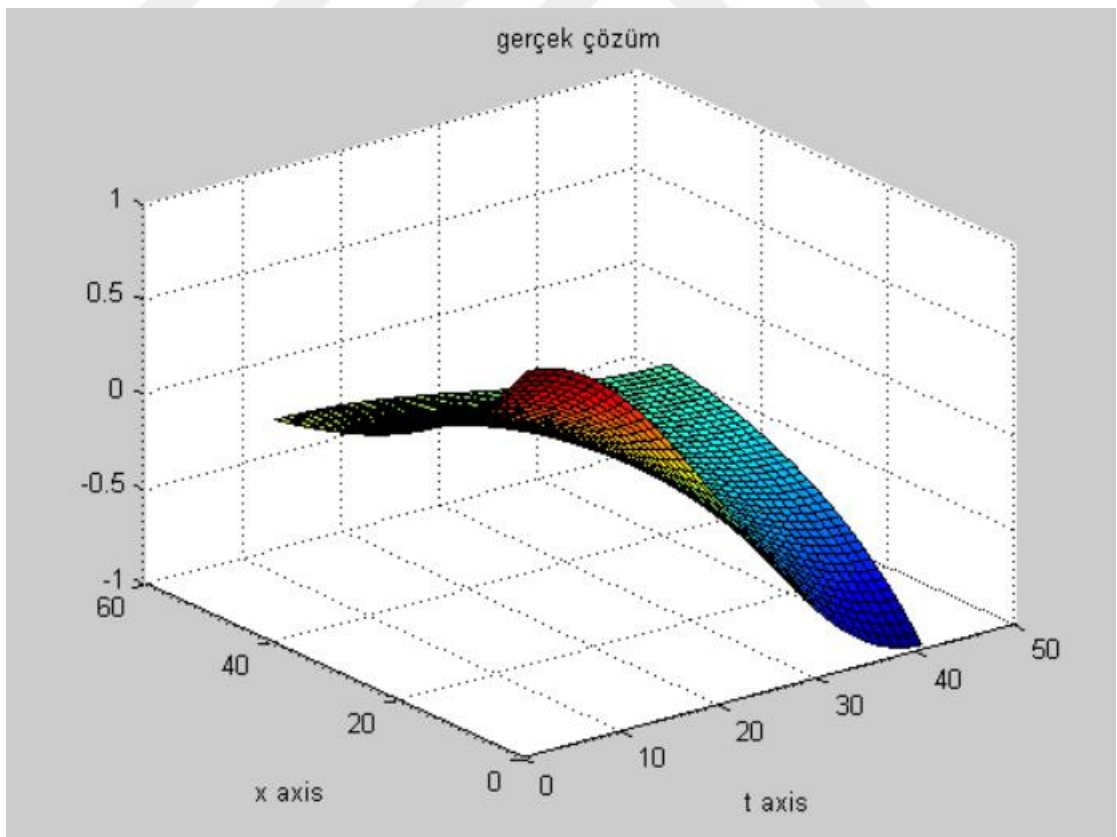
Şekil 3. $N=20, M=20$ için (3.20) BMDFS'nin yaklaşık çözüm grafiği



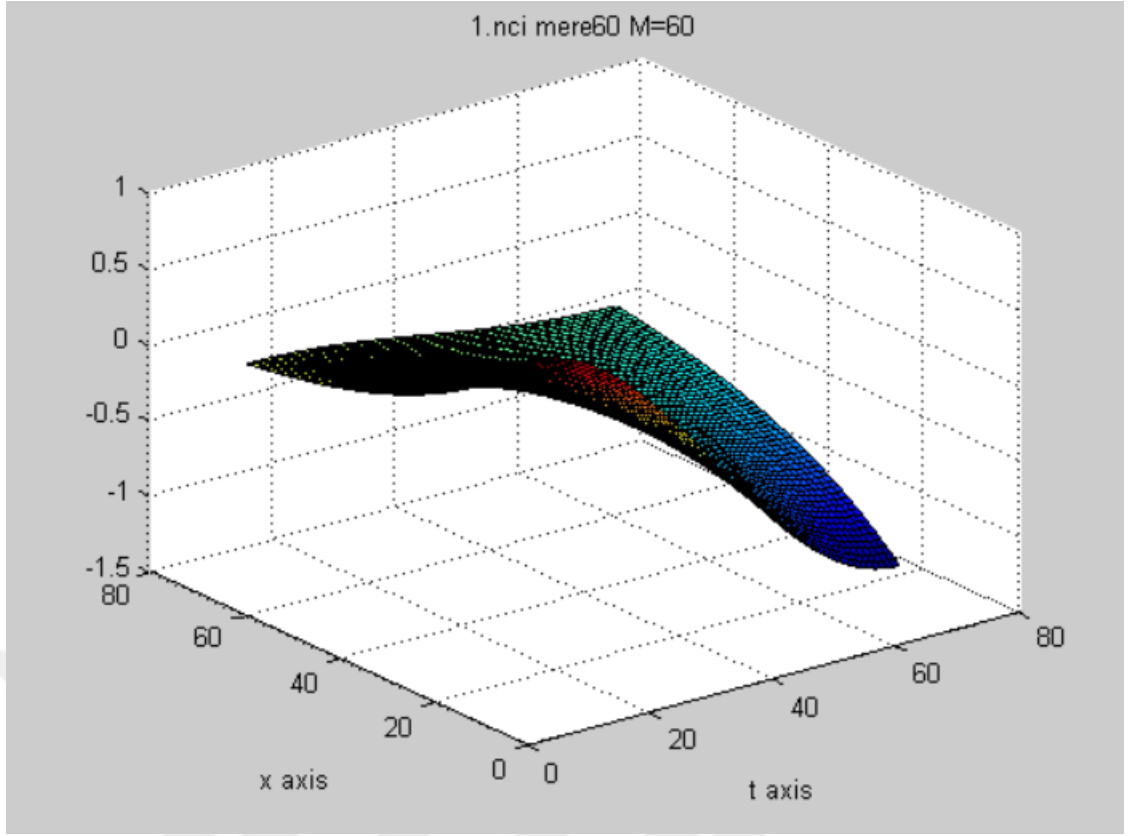
Şekil 4. $N=20, M=20$ için (3.19) Probleminin gerçek çözüm grafiği



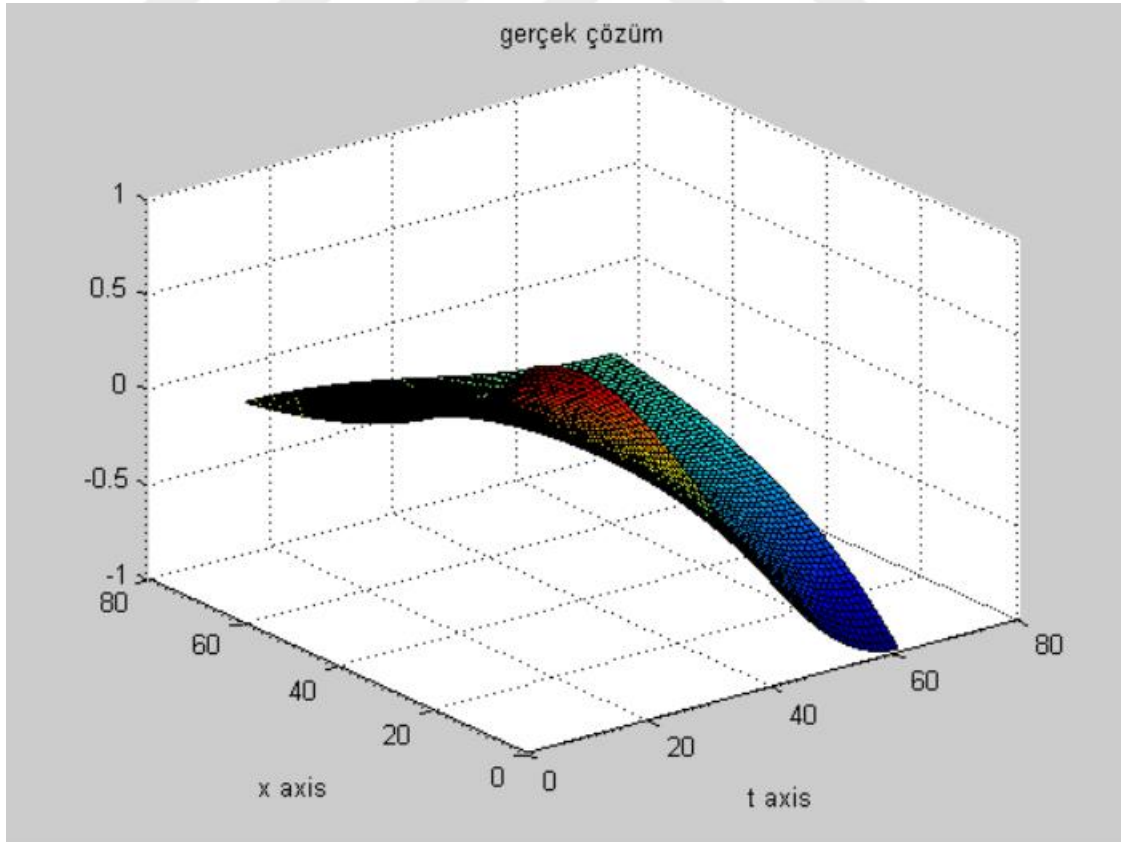
Şekil 5. $N=40$, $M=40$ için (3.20) BMDFS' nin yaklaşık çözüm grafiği



Şekil 6. $N=40$, $M=40$ için (3.19) Probleminin gerçek çözüm grafiği



Şekil 7. $N=60$, $M=60$ için (3.20) BMDFŞ' nin yaklaşık çözüm grafiği



Şekil 8. $N=60$, $M=60$ için (3.19) Probleminin gerçek çözüm grafiği

3.1.2. İntegral koşullu iki boyutlu parabolik denklem için fark şema

Örnek 3.2. Parabolik diferansiyel denklem için

$$\begin{cases} u_t - (3+2x)u_{xx} + 2u_x - u_{yy} + u = f(t, x, y) \\ f(t, x, y) = e^{-2t}y^2(y-1)^2(-16x^3 - 24x^2 + 36x + 6) - e^{-2t}x^2(x-1)^2y^2(y-1)^2 - e^{-2t}x^2(x-1)^2(12y^2 - 12y + 2) \\ 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \\ u(0, x, y) = \frac{1}{3} \int_0^1 e^{-2s} u(s, x, y) ds + \phi(x, y) \\ \phi(x, y) = x^2(x-1)^2y^2(y-1)^2 \left(\frac{13}{4} - \frac{e^{-4}}{4} \right) \\ u_x(t, 1, y) = 0, \quad u_x(t, 0, y) = 0 \\ u_y(t, x, 1) = 0, \quad u_y(t, x, 0) = 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

şeklinde iki boyutlu Neumann koşullu ve lokal olmayan sınır değer problemine bakacağız.

Çözüm:

$u(t, x, y) = e^{-2t}x^2(x-1)^2y^2(y-1)^2$ fonksiyonu (3.22) probleminin gerçek çözümüdür.

$$\psi_{m,n} = \psi(x_m, y_n), \quad n = \overline{0, M}, \quad m = \overline{0, M}$$

$$f_{m,n}^k = f(t_k, x_m, y_n), \quad k = \overline{0, N}, \quad n = \overline{0, M}, \quad m = \overline{0, M}$$

burada (3.22) denkleminde verilen lokal olmayan parabolik sınır değer problemini (SDP) yaklaşık çözümünü bulabilmek için (3.18) denkleminde verilen fark şemasını kullanalım.

$$\begin{cases} \frac{u_{m,n}^{k+1} - u_{m,n}^k}{\tau} - \frac{(3+2x_m)(u_{m+1,n}^k - 2u_{m,n}^k + u_{m-1,n}^k)}{h^2} + \frac{2u_{m+1,n}^k - u_{m-1,n}^k}{2h} - \frac{u_{m,n+1}^k - 2u_{m,n}^k + u_{m,n-1}^k}{h^2} + u_{m,n}^k = f_{m,n}^k \\ 1 \leq k \leq N-1, \quad 1 \leq n, m \leq M-1 \\ u_{m,n}^N = \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-2t_j} u_{m,n}^j \tau + x_m^2(x_m-1)^2y_m^2(y_m-1)^2 \left(\frac{13}{4} - \frac{e^{-4}}{4} \right) \end{cases} \quad (3.23)$$

elde edilir.

$$u_{m,n}^{k+1} \left(\frac{1}{\tau} \right) + u_{m,n}^k \left(-\frac{1}{\tau} + \frac{6+4x_m+2}{h^2} + 1 \right) + u_{m+1,n}^k \left(\frac{-3-2x_m}{h^2} + \frac{1}{h} \right) + u_{m-1,n}^k \left(\frac{-3-2x_m}{h^2} + \frac{1}{h} \right) + u_{m,n+1}^k \left(-\frac{1}{h^2} \right) + u_{m,n-1}^k \left(-\frac{1}{h^2} \right) = f$$

(3.23) fark problemi (3.21) matris formunda

$$\begin{cases} A_n u_{n+1} + B_n u_n + C_n u_{n-1} = I f^{(n)}, & n = 1, \dots, M-1 \\ u_0 = u_1, u_M = u_{M-1} \end{cases} \quad (3.24)$$

şeklinde yazabiliriz.

Burada $K=(N+1)(M+1)$ olmak üzere $A_n, B_n, C_n, I, K \times K$ tipinde kare matrisler ve I birim matris $f^{(n)}, u_{n-1}, u_n, u_{n+1}, K \times 1$ tipinde sütun matris matrisler

$$f^n = \begin{bmatrix} f_{0,n}^0 \\ \vdots \\ f_{0,n}^N \\ f_{1,n}^0 \\ \vdots \\ f_{1,n}^N \\ \vdots \\ f_{M,n}^0 \\ \vdots \\ f_{M,n}^N \end{bmatrix}_{K \times 1}, \quad u_{n+1} = \begin{bmatrix} u_{0,n+1}^0 \\ \vdots \\ u_{0,n+1}^N \\ u_{1,n+1}^0 \\ \vdots \\ u_{1,n+1}^N \\ \vdots \\ u_{M,n+1}^0 \\ \vdots \\ u_{M,n+1}^N \end{bmatrix}_{K \times 1}, \quad u_n = \begin{bmatrix} u_{0,n}^0 \\ \vdots \\ u_{0,n}^N \\ u_{1,n}^0 \\ \vdots \\ u_{1,n}^N \\ \vdots \\ u_{M,n}^0 \\ \vdots \\ u_{M,n}^N \end{bmatrix}_{K \times 1}, \quad u_{n-1} = \begin{bmatrix} u_{0,n-1}^0 \\ \vdots \\ u_{0,n-1}^N \\ u_{1,n-1}^0 \\ \vdots \\ u_{1,n-1}^N \\ \vdots \\ u_{M,n-1}^0 \\ \vdots \\ u_{M,n-1}^N \end{bmatrix}_{K \times 1}$$

ve

$$A_n = C_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & D & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & D & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{K \times 1}$$

$$B_n = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & R \end{bmatrix}_{k \times k}$$

$$a = -\frac{1}{h^2} \quad b = -\frac{1}{\tau} + \frac{8}{h^2} + 1 \quad r = \frac{1}{\tau}$$

$$e_{1,N+1} = 1, \quad e_{1,k} = -t_k \tau, \quad k = 1, \dots, N$$

Diğer durumlar için $i = \overline{2, N}$ olur.

$$e_{i,N+1} = 1, \quad e_{i,k} = -t_k \tau, \quad k = 1, \dots, N$$

$$f_{m,n}^k(t_k, x_n, y_m), \quad k = 1, \dots, N+1,$$

$$f_{m,n}^0 = \psi_{m,n}, \quad n, m = 1, \dots, M-1$$

$$D = \text{diag}(0, a, a, \dots, a, 0), \quad 0 = 0_{(N+1) \times (N+1)}$$

$$R = I_{(N+1) \times (N+1)}$$

yukarıda verilen matrislerden

$$A_n u_{n+1} + B_n u_n + C_n u_{n-1} = I f^{(n)} \text{ denklemini}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & D & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & D & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{0,n+1}^0 \\ \vdots \\ u_{0,n+1}^N \\ u_{1,n+1}^0 \\ \vdots \\ u_{1,n+1}^N \\ \vdots \\ u_{M,n+1}^0 \\ \vdots \\ u_{M,n+1}^N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{0,n}^0 \\ \vdots \\ u_{0,n}^N \\ u_{1,n}^0 \\ \vdots \\ u_{1,n}^N \\ \vdots \\ u_{M,n}^0 \\ \vdots \\ u_{M,n}^N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & D & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & D & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{0,n-1}^0 \\ \vdots \\ u_{0,n-1}^N \\ u_{1,n-1}^0 \\ \vdots \\ u_{1,n-1}^N \\ \vdots \\ u_{M,n-1}^0 \\ \vdots \\ u_{M,n-1}^N \end{bmatrix} = I f^{(n)}$$

biçiminde yazılır.

$u_n = \alpha_{n+1} u_{n+1} + B_{n+1}$, $n = M-1, \dots, 1$ olacak biçimde çözümü arayacağız. O zaman

$$\alpha_{n+1} = -\left(B_n + C_n \alpha_n\right)^{-1} A_n,$$

$$\beta_{n+1} = (B_n + C_n \alpha_n)^{-1} (I_n \Psi_n - C_n B_n), n = 1, \dots, M-1$$

$$u_M = u_{M-1} = (A_n + B_n + C_n \alpha_{M-1})^{-1} (I_{M-1} f_{M-1} - C_n B_{M-1})$$

şeklinde yazılır.

MATLAB programı üzerinde düzenlenmiş Gauss eliminasyon metodunu kullanarak (3.23) fark probleminin çözümü hesaplandı.

$$Eu_M^N = \max_{1 \leq k \leq N-1} \left(\sum_{n=1}^{M-1} \left(\sum_{m=1}^{M-1} (U(x_n, y_m, t_k) - U_{n,m}^k)^2 h^2 \right)^{1/2} \right)$$

Formülü ile hata hesaplanarak farklı (N,M) değerleri için sonuç bulunmuş olur.

Tablo 2. (3.23) BMDFS'nin hata analizi

Hata/(N,M)	(10,10)	(20,20)	(40,40)
Eu_M^N	0.6075	0.2957	0.16547

Yukarıdaki tabloda gösterildiği gibi N ile M değerlerini 2 katına çıkarınca yaklaşık hata değeri ½ oranında azalmıştır.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Yapılan tez çalışmasında, Parabolik Denklemler için integral koşullu SDP çözümlerinin klasik yöntemlerle bulunması incelenmiştir. Ayrıca Parabolik denklemler için integral tipindeki yerel olmayan şartlı ve Neuman sınır koşullu problemin bir boyutlu ve iki boyutlu olarak 1. dereceden ve 2. dereceden fark şemalarına bakılmıştır.

Sonuç 1: $[0,1] \times [0,\pi]$ tanımlı bölgedeki parabolik denklem için

$$u_t(t, x) = u_{xx}(t, x) - u(t, x) + R(t, x), \quad u(t, 0) = 0 \quad u(t, \pi) = 0$$

$$u(0, x) = \int_0^1 k(\tau) u(\tau, x) d\tau + \lambda(x),$$

formundaki denklemin çözümüne Fourier seri yöntemi kullanılarak ulaşıldı.

Sonuç 2: $[0,1] \times (-\infty, \infty)$ tanımlı bölgedeki parabolik denklem

$$u_t(t, x) = 2u_{xx}(t, x) - u(t, x) + R(t, x)$$

$$u(0, x) = \int_0^1 k(\tau) u(\tau, x) d\tau + \lambda(x)$$

formatındaki SDP'nin Fourier yöntemler yöntemi ile çözümü yapıldı.

Sonuç 3: $[0,1] \times [0, \infty]$ bölgesinde parabolik denklem

$$u_t(t, x) = 2u_{xx}(t, x) - u(t, x) + R(t, x)$$

$$u(0, x) = \int_0^1 k(\tau) u(\tau, x) d\tau + \lambda(x)$$

$u_z(t, 0) = 0$ ve $u(t, 0) = 0$ şartları altındaki SDP'nin Laplace integral dönüşümü yolu ile çözüme ulaşılmıştır.

Sonuç 4: $u_x(t, x) - y(x)u_{xx}(t, x) + y'(x)u_x(t, x) + u(t, x) - R(t, x)$

$k=0$ için

$$u(0, x) = \frac{1}{3} \int_0^1 k(s) u(s, x) ds + \lambda(x)$$

$$x=0 \text{ için } u_x(t,0)=0 \text{ ve } x=\pi \text{ için } u_x(t,\pi)=0$$

Şeklinde integral tipi yerel olmayan şartlı ve Neumann sınır koşullu bir boyutlu parabolik denklem için birinci dereceden fark şeması kullanılarak gerçek çözüm ve yaklaşık çözüm arasındaki farkın ne oranda olduğu araştırılmıştır ve çözümü yapılmıştır.

Tüm bu çalışmalar yapılırken kullanılan birinci dereceden fark şeması ise

$$\frac{u_n^{k-1}(x) - u_n^{k-1}(x)}{\tau} - y(x_n) \frac{(u_{n+1}^{k-1} - 2u_n^{k-1} + u_{n-1}^{k-1})}{h^2} + 2y'(x_n) \left(\frac{u_{n+1}^{k-1} - u_{n-1}^{k-1}}{2h} \right) + u_n^{k-1} = R(t_n, x_k)$$

$$u_n^m(x) = \frac{1}{3} \sum_{s=1}^N q(t_j) u_n^j \tau + \lambda(x_n) \quad n=0, \dots, M$$

$$u_1^k = u_0^k \quad u_M^k = u_{M-1}^k \quad k=0, \dots, N$$

olarak kullanılmıştır.

Sonuç 5: Parabolik diferansiyel denklem için

$$u_t(t, x, y) - y(x) u_{xx}(t, x, y) + y'(x) u_x(t, x, y) - u_y(t, x, y) + u(t, x, y) = R(t, x, y)$$

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

$t=0$ için

$$u(0, x, y) = \frac{1}{3} \int_0^1 k(s) u(s, x, y) ds + \lambda(\tau, y)$$

$$u_x(t, 1, y) = 0 \quad u_y(t, x, 1) = 0$$

$$u_x(t, 0, y) = 0 \quad u_y(t, x, 0) = 0$$

Şeklinde iki boyutlu Neumann koşullu ve yerel olmayan SDP'nin 2. Dereceden fark şeması kullanılarak çözüme ulaşılmıştır. Kullanılan 2. Dereceden fark şeması

$$u_k^p(x) - u_{k-1}^p(x) - \frac{1}{2} (B_p^x u_k^p(x) + B_p^x u_{k-1}^p(x)) = R_k(x)$$

$$R_k(x) = f^p(t_{j-1}, x), \quad t_k = k\tau, \quad k = 1, \dots, N, \quad N_\tau = 1, \quad x \in \Omega_p$$

$$u_N^p(x) = \sum_{j=1}^N \delta\left(t_{j-\frac{1}{2}}\right) \frac{\tau}{3} [u_j^p(x) + u_{j-1}^p(x)] + w^p(x)$$

ile çözüme ulaşılmıştır.

Sonuç 6: yapılan örnek çalışmalarda parabolik yerel olmayan SDP'nin matlab kodları kullanılarak yaklaşık çözümleri bulunmuştur.

Sonuç 7: Birinci ve ikinci mertebeden denklemlerin fark şemalarının yaklaşık çözümleri ile problemlerin gerçek çözümleri ve bu çözümlerin grafikleri bulunmuştur. Ulaşılan sonuçlar bilimsel olarak desteklenmiştir.

Bu tezdeki sonuçlarla farklı şartlarda oluşturulan parabolik kısmı diferansiyel denklem türlerini incelemeye katkı sağlanmıştır.

KAYNAKÇA

- Aldulaimi, R. K. M. (2019). An innovative receiver design for a parabolic trough solar collector using overlapped and reverse flow: An Experimental Study, Arabian Journal for Science and Engineering 44(9) , 7529- 7539.
- Altın, A. (2011). Fourier Analizi, Gazi Kitabevi, Ankara, (ss.1-126)
- Anonim. (2023). Gümüşhane Üniversitesi Tez Yazım Kılavuzu. <https://enstitu.gumushane.edu.tr/>, Erişim: 5 Mayıs 2023.
- Ashyralyyev, C. (2022). On the second order of accuracy stable difference scheme for integral type non-local elliptic source identification problem, Computational & Applied Mathematics, 2238-3603
- Ashyralyyev, A. ve Sobolevskii, P. E. (1994). Well-posedness of parabolic difference equations, Vol. 69 of Operator Theory: Advances and Applications. Birkhäuser, Basel, Switzerland.
- Ashyralyyev, A. ve Sobolevskii, P. E. (2004). Difference Schemes for Partial Differential Equations, Operator Theory Advances and Applications (Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin).
- Ashyralyyev, C. (2018). Well-posedness of boundary value problems for reverse parabolic equation with integral condition. e-Journal of Analysis and Applied Mathematics, 11-20.
- Ashyralyyev, C. (2020). Stability of Rothe difference scheme for the reverse parabolic problem with integral boundary condition. Math Meth Appl Sci. 2020;43:5369-5379.
- Ashyralyyev, C. (2020). The second order of ADS for reverse parabolic boundary value problem with integral condition. Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, 46(2), (ss 346-359).
- Ashyralyyev, C. ve Gönenç, A. (2020). Numerical solution of the nonlocal reverse parabolic problem with second kind boundary and integral conditions. AIP Conference Proceedings.
- Ashyralyyev, C. ve Akkan, P. (2020). Source identification problem for a parabolic equation with multipoint nonlocal boundary condition, Numerical Functional Analysis and Optimization, doi: 10.1080/01630563.2020.1802748, 1-23.
- Ashyralyyev, C., Dural, A. ve Sozen, Y. (2012). Finite difference method for the reverse parabolic problem, Abstr. Appl. Anal. (vol.2012, 1-17).

- Ashyralyev, C., Dural, A. ve Sozen, Y. (2012). Finite difference method for the reverse parabolic problem with Neumann condition, AIP Conference Proceedings 1470, 102-105.
- A. Ashyralyev, A. Hanalyev, and P. E. Sobolevskii. (2021). “Coercive solvability of nonlocal boundary value problem for parabolic equations,” *Abstr. Appl. Anal.* 6 (1), 53–61.
- A. Ashyralyev, I. Karatay, and P. E. Sobolevskii. (2004). “Well-posedness of the nonlocal boundary value problem for parabolic difference equations,” *Discrete Dyn. Nat. Soc.*, 273–286.
- A. V. Gulin and V. A. Morozova. (2003). “On the stability of a nonlocal finite-difference boundary value problem,” *Differ. Equations* 39 (7), 962–967.
- A. V. Gulin, N. I. Ionkin, and V. A. Morozova. (2001). “Stability of a nonlocal two-dimensional finite-difference problem,” *Differ. Equations* 37 (7), 970–978.
- A. Ashyralyev, S. Piskarev, and S. Wei. (2002). “On well-posedness of the difference schemes for abstract parabolic equations in $L_p([0, 1], E)$ spaces,” *Numer. Funct. Anal. Optim.* 23 (7–8), 669–693.
- Bayraktar, M. (2017). *Fonksiyonel Analiz*. Korza Yayıncılık Basım San. ve Tic. A.Ş., Ankara, (ss.265-366)
- D. Guidetti, B. Karasozen, and S. Piskarev. (2004). “Approximation of abstract differential equations,” *J. Math. Sci.* 122 (2), 3013–3054.
- Debnath I., Bhatta D. (2007). *Integral Transforms and Their Applications*, Taylor & Francis.
- Hao, D.N., Duc, N.V. ve Thang, N.V. (2018). Backward semi-linear parabolic equations with time-dependent coefficients and local Lipschitz source, Inverse Problems 34(5), Article Number: 055010.
- Ijacu, D. ve Marinescu, M. (2014). Filtering for non-markovian SDEs involving nonlinear SPDEs and backward
- I. P. Gavrilyuk and V. L. Makarov. (2000). Exponentially convergent parallel discretization methods for the first order evolution equations (Preprint Inst. Angew. Anal. Stoch. (WIAS), Berlin).
- I. P. Gavrilyuk. (1999). “Strongly p -positive operators and explicit representations of the solutions of initial value problems for second-order differential equations in Banach space,” *J. Math. Anal. Appl.* 236 (2). 327–349.
- John W. Miles. (1971). *Integral Transforms in Applied Mathematics*, · Cambridge University Press.

- Karatay, İ. (2004). Lokal Olmayan Parabolik Sınır Değer Fark Problemlerinin İyi Konumlanmışlığı, Doktora Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 111s.
- Klimsiak, T. (2012). Strong solutions of semilinear parabolic equations with measure data and generalized backward stochastic differential equation, Potential Analysis, 36(2), 373-404.
- Krein, S. G. (1966). Linear Differential Equations in Banach Space. Nauka, Moscow, Russia.
- L. E. Rossovskii and A. R. Hanalyev. (2019). “Coercive solvability of nonlocal boundary-value problems for parabolic equations,” J. Math. Sci. 239, 855–866.
- Lachapelle, A., Salomon, J. ve Turinici, G. (2010). Computation of mean field equilibria in economics, Mathematical Models & Methods in Applied Sciences, 20(4), 567-588.
- LaRosa, T. (1986). The propagation of an electron beam through the solar corona, Ph.D. thesis, Department of Physics and Astronomy, University of Maryland.
- Samarskii, A. (2007). The Theory of Difference Schemes (Dekker, New York).
- Sneddon, I.N. (1972). The Use Integral Transformations ,New York:McGraw · Hill.
- Sobolevskii, P. (1975). Difference methods for the approximate solution of differential equations (Voronezh State University Press, Voronezh, Russia,).
- Soyhan, Y. (2008). Fonksiyonel Analiz, Nobel Yayın Dağıtım Tic. Ltd. Şti, Ankara, (ss.1-128)
- Stewartson, K. (1974). Multistructural boundary layers on flat plates and related bodies, Advances in Applied Mechanics 14, 145-239.
- Stewartson, K. (1981). D’Alembert’s paradox, SIAM Review, 23(3), 308-343.
- P. E. Sobolevskii. (1964). “Coerciveness inequalities for abstract parabolic equations,” Sov. Math. Dokl. 5, 894–897.
- P. E. Sobolevskii. (1971). “The coercive solvability of difference equations,” Dokl. Acad. Nauk SSSR 201 (5), 1063– 1066.
- Thanh, B.L.T., Smarrazzo, F. ve Tesei, A. (2014). Sobolev regularization of a class of forward backward-parabolic equations, Journal of Differential Equations, 257(5), 1403-1456.
- V. N. Starovoitov. (2021). “Unique solvability of linear time-nonlocal parabolic problem,” Sib. Math. J. 62 (2), 337– 340.

- V. V. Shelukhin. (1991). “A problem with time-averaged data for nonlinear parabolic equations,” *Sib. Math. J.* 32 (2), 309–320.
- V. V. Shelukhin. (1993). “A variational principle for linear evolution problems nonlocal in time,” *Sib. Math. J.* 34 (2), 369–384.
- Yagola, A.G. ve Klibanov, M.V. (2019). Convergent numerical methods for parabolic equations with reversed time via a new Carleman estimate, Inverse Problems, 35(11), Article Number 115012.
- Y. G. Wang and M. Oberguggenberger. (1999). “Nonlinear parabolic equations with regularized derivatives,” *J. Math. Anal. Appl.* 233 (2), 644–658.
- W. J. Beyn and B. M. Garay. (2002). “Estimates of variable stepsize Runge–Kutta methods for sectorial evolution equations with nonsmooth data,” *Appl. Numer. Math.* 41 (3), 369–400.



EKLER

Ek 1. Örnek 3.1' in Sayısal Çözümü için MATLAB Program Kodları

```
function pr(N,M)
% Computers numerical solution of the equation
%  $u_t - (3+2\cos x)u_{xx} + 2\sin x u_x + u = f(x)$ ;
if nargin < 1; end;
close;close;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% first order
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%1
tau=1/N; h=pi/M;
A=zeros(N+1,N+1,M+1);
B=A;
C=A;
for k=1:N+1
    t(k)=(k-1)*tau;
end;
for n=1:M+1;
    x=(n-1)*h;
    for k=1:N;
        A(k,k+1,n)=-(3+2*cos(x))/h^2+ sin(x)/h;
        C(k,k+1,n)=-(3+2*cos(x))/h^2- sin(x)/h ;
        B(k,k+1,n)=1/tau+2*(3+2*cos(x))/h^2+1;
        B(k,k,n)=-1/tau;
    end;
    B(N+1,1,n)=1-tau/6;
    B(N+1,N+1,n)=-exp(-2)*tau/6;
    for j=2:N;
        B(N+1,j,n)= - exp(-2*t(j))*tau/3;
    end;

end
R=eye(N+1,N+1);
fii=zeros(N+1,M+1);
for n=1:M+1;
    x=(n-1)*h;
    for k=1:N;
        fii(k,n)=f(t(k),x);
    end
    fii(N+1,n)=fi(x);
end
alphaf{1}=R;
bethaf{1}=zeros(N+1,1);
for j=2:M;
    Q=inv(B(:,j)+C(:,j)*alphaf{j-1});
    alphaf{j}=-Q*A(:,j);
    bethaf{j}=Q*(R*(fii(:,j))-(C(:,j)*bethaf{j-1}));
end;
U=zeros(N+1,M+1);es=U;
Q1=inv(A(:,M)+B(:,M)+C(:,M)*alphaf{M});
U(:,M+1)=Q1*(R*fii(:,M)-C(:,M)*bethaf{M});
for j=M:-1:1;
    U(:,j)=alphaf{j}*U(:,j+1)+bethaf{j};
end;
```



```

%%\%%\%%\%%\Gerçek çözüm \%%\%%\%%\%%\%%\%%
for n=1:M+1;
for k=1:N+1;
x=(n-1)*h;
es(k,n)=exp(-2*t(k))*cos(x);
end;
end;
% Output;
format('shortG');
maxes=max(max(es)) ;
maxapp=max(max(U)) ;
maxerror=max(max(abs(es-U)));
relativeerror=max(max((abs(es-U)))/max(max(abs(U)) ));
display(['N=',num2str(N), ' M=',num2str(M)])
cevapf=[maxerror,relativeerror]
%GRAPH OF THE SOLUTION for first order;

str1=strcat('1.nci mere',num2str(N), ' M=',num2str(M));
figure; surf(U); title(str1);xlabel('t axis');
ylabel('x axis'); rotate3d ;
figure; surf(es); title('gerçek çözüm'); xlabel('t axis'); ylabel('x axis');rotate3d ;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%8
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
SUB FUNCTIONS %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function rx=fi(x)
rx=(1+exp(-4)/12-1/12)*cos(x);
function rsftx=f(t,x)
rsftx=exp(-2*t)*(2+ 2*cos(x))*cos(x) -exp(-2*t)*2*sin(x)*sin(x);

```

Ek 2. Örnek 3.2.' in Sayısal Çözümü için MATLAB Program Kodları

```

function reverse1_int_3d(N,M)
% Computers numerical solution of the equation
%  $u_t(t,x,y) + (1+2*x)^2 u_{xx}(t,x,y) + 4*(1+2*x)u_x(t,x,y) + u_{yy}(t,x,y) - u = ftx(t,x);$ 
%  $u(1,x,y) = \text{int}[0:1] (\exp(-2\text{gam}) * u(\text{gam},x,y) + \text{ksi}(x,y))$ 
%  $u_x(t,0,y) = 0, u_x(t,\pi,y) = 0$ 
%  $u_y(t,0,y) = 0, u_y(t,\pi,y) = 0$ 
if nargin < 1; end;
close;close;
%%% first order %%%
T=1;
tau=T/N; h=pi/M;
%%% First step FIRST ORDER ACCURACY %%%Calculation V
NK=(N+1)*(M+1);
A=zeros(NK,NK);B=eye(NK,NK);C=A;
a=1/h^2;b=-1-1/tau-4/h^2;r=1/tau;
for j=2:M;
x=(j-1)*h;
ii=(N+1)*(j-1);
for i=ii+2:ii+N+1;
A(i,i)=1/h^2;
C(i,i)=1/h^2;
B(i,i)=-1/tau-(2*(1+2*x)^2+2)/h^2-1;
B(i,i-1)=r;
B(i,i+M+1)=(1+2*x)^2/h^2+2*(1+2*x)/h;
B(i,i-M-1)=(1+2*x)^2/h^2-2*(1+2*x)/h;
end;
B(ii+1,ii+N+1)=1;
for k=1:N;
t=(k-1)*tau;
B(ii+1,ii+k)=-alf(t)*tau;
end;
end;
R=eye(NK,NK);
fii=zeros(NK,M+1);
for m=1:M+1;
x=(m-1)*h;
for j=1:M+1;
ii=(N+1)*(j-1);
y=(j-1)*h;
for k=2:N+1;
t=(k-1)*tau;
fii(ii+k,j)=rsf(t,x,y);
end;
fii(ii+1,j)=ksii(x,y);
end;
end;
alphaf{1}=R;bethaf{1}=zeros(NK,1);
for j=2:M
Q=inv(B+C*alphaf{j-1});
alphaf{j}=-Q*A;
bethaf{j}=Q*(R*(fii(:,j))-C*bethaf{j-1});
end;
V=zeros(NK,M+1);
Q1=inv(A(:,:)+B(:,:)+C(:,:)*alphaf{M});
V(:,M+1)=Q1*(R*fii(:,M)-C(:,:)*bethaf{M});

```

```

for j=M:-1:1
V(:,j)=alphaf{j}*V(:,j+1)+bethaf{j};
end
Vf=zeros(N+1,M+1,M+1);
Ve=zeros(N+1,M+1,M+1);
for n=1:M+1;
x=(n-1)*h;
for j=1:M+1;
ii=(N+1)*(j-1);
y=(j-1)*h;
for k=1:N+1;
t=(k-1)*tau;
Vf(k,n,j)=V(ii+k,n);Ve(k,n,j)=exactu(t,x,y);
end;
end;
end;
ftv=Vf-Ve;
fv=zeros(N+1,1);
for k=1:N+1;
s=0;
for n=1:M+1;
for j=1:M+1;
sv=ftv(k,n,j);
s=s+sv*sv;
end;
end;
fv(k,1)=s^(1/2)*h*h;
end;
maxerrorv=max(fv);
cevap1=[maxerrorv]
%%% SUB FUNCTIONS %%%
function ksi=ksii(x,y)
ksi=cos(x)*cos(y)*(exp(-2)+exp(-4)/4-1/4);
function extxu=exactu(t,x,y)
extxu=exp(-2*t)*cos(x)*cos(y);
function al=alf(t)
al=exp(-2*t);
function rsftx=rsf(t,x,y)
rsftx=-(4+(1+2*x)^2)*exp(-2*t)*cos(x)*cos(y)-4*(1+2*x)*exp(-2*t)*sin(x)*cos(y);

```

ÖZGEÇMİŞ

İlköğretimimi Adıyaman’da başlayıp bitirdim. Lise öğrenimini İstanbul’da, üniversite eğitimimi ise Çukurova Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde 2014 yılında tamamladım. Sonraki süreçte Bayburt Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliğini 2022 yılında tamamladım.

