

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

PARABOLİK KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN KAYNAK
TANIMLAMA PROBLEMİ



YÜKSEK LİSANS

Abdullah Necati DOĞAN

TEMMUZ - 2023
GÜMÜŞHANE



T.C.

**GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**PARABOLİK KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN KAYNAK
TANIMLAMA PROBLEMİ**

**ON SOURCE IDENTIFICATION PROBLEM FOR FRACTIONAL
PARABOLIC DIFFERENTIAL EQUATION**

YÜKSEK LİSANS

Abdullah Necati DOĞAN

TEMMUZ - 2023

GÜMÜŞHANE



T.C.

**GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**PARABOLİK KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN KAYNAK
TANIMLAMA PROBLEMİ**

**ON SOURCE IDENTIFICATION PROBLEM FOR FRACTIONAL
PARABOLIC DIFFERENTIAL EQUATION**

YÜKSEK LİSANS

Abdullah Necati DOĞAN

Danışman: Prof. Dr. Charyyar ASHYRALYYEV

TEMMUZ - 2023

GÜMÜŞHANE

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlamış olduğum “**Parabolik Kesirli Diferansiyel Denklemler İçin Kaynak Tanımlama Problemi**” isimli bu tezimin, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, alıntı yaptığım tüm çalışmalarını kaynakçada belirttiğimi ve Gümüşhane Üniversitesi’nin lisanslı kullanıcısı olduğum intihal yazılım programı ile Lisansüstü Eğitim Enstitüsü’nün belirlediği kısıtlara uygun olarak raporladığımı taahhüt ederim. Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivinde saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği’nin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

03/07/2023

.....
Abdullah Necati DOĞAN

TEŞEKKÜR

Bu çalışma, Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlanmıştır. Tezin hazırlanma sürecinde, öncelikle çalışmalarım boyunca yardımlarını benden esirgemeyen ve süreci dikkatle takip edip bana her yolumu kaybettiğimde yol gösteren, bilgi ve birikimlerini bana aktaran, çok kıymetli danışman hocam Prof. Dr. Charyyar ASHYRALYYEV' e teşekkür etmeyi borç bilirim.

Ayrıca her zaman destekleriyle yanımda olan, her yorulduğumda desteğini bulup zor yolları birlikte kat ettiğim eşim Handan DOĞAN 'a, azim kaynağım olarak bana destek veren küçük kızlarım Zeynep Meryem DOĞAN ve Elif Zümra DOĞAN 'a ve benim bu günlere gelmeme vesile olan, hayatımın her anında izlerini gördüğüm aileme çok teşekkür ederim.

Abdullah Necati DOĞAN

GÜMÜŞHANE - 2023

ÖZET

Bu çalışmada kesirli parabolik kısmi diferansiyel denklemlerde kaynak belirleme problemi üzerinde duruldu. Kesirli diferansiyel denklemler, Laplace dönüşümü, Fourier dönüşümü ve Fourier serileri yöntemleri, sonlu fark yöntemleri ve kaynak belirleme problemleri ile ilgili kavramlar ve tanımlar verilmiştir.

Bir boyutlu kesirli parabolik kısmi diferansiyel denklemin çözümü için Laplace dönüşümü, Fourier dönüşümü ve Fourier serileri yöntemleri uygulandı. Örneklerde kaynak belirleme problemi çözümü için algoritma sunulmuştur.

Ayrıca bir boyutlu kesirli parabolik kısmi diferansiyel denklem için kaynak belirleme problemine birinci mertebeden sonlu farklar şeması uygulanmıştır.

MATLAB programı ile test örnekte kesirli parabolik kısmi diferansiyel denklem için kaynak belirleme probleminin yaklaşık çözümünü gösteren sonlu fark şemalarının hataları incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Caputo kesirli türev, Fourier serileri, İntegral dönüşüm yöntemleri, Sonlu fark şeması, Yaklaşım hatası

ABSTRACT

This work focused on the problem of determining the source for fractional parabolic differential equations. Concepts and definitions related to fractional differential equations, Fourier series, Laplace and Fourier transform methods, finite difference methods and source determination problems are given.

For the solution of one-dimensional fractional parabolic partial differential equations, Laplace transform, Fourier transform and Fourier series methods are used. Algorithm of solving source identification is described on simple examples.

In addition, a first-order of accuracy finite difference scheme is applied to the source determination problem for fractional parabolic equation.

In the test example of source determination problem for parabolic fractional partial differential equation error analysing of approximate solution is carried out by using MATLAB program,

Keywords: Caputo fractional derivative, Fourier series, Integral transform methods, Finite difference scheme, Approximation error

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	III
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI.....	VI
TEŞEKKÜR.....	V
ÖZET.....	VI
ABSTRACT.....	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
TABLolar DİZİNİ	X
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	XI
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	XII
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Temel Kavramlar	7
1.2.1. Gama Fonksiyonu	7
1.2.2. Beta Fonksiyonu	7
1.2.3. Normlu Uzay.....	7
1.2.4. Dirichlet Sınır Şartları.....	8
1.2.5. Neumann Sınır Şartları.....	8
1.2.6. Robin Sınır Şartları	8
1.2.7. Laplace Dönüşümü.....	9
1.2.8. Ters Laplace Dönüşümü	9
1.2.9. Caputo Türevinin Laplace Dönüşümü	9
1.2.10. Fourier Dönüşümü	10
1.2.11. Ters Fourier Dönüşümü	10
1.2.12. Fourier Serileri ve Fourier Katsayıları	11
1.2.13. Sturm Liouville Problemi.....	11
1.2.14. Lineer Bağımlılık ve Lineer Bağımsızlık.....	11
1.2.15. Fark Türevleri.....	12
1.2.16. L. Euler Kesirli Türev Tanımı.....	12
1.2.17. Riemann - Liouville Kesirli Türev Tanımı	12

1.2.18. Caputo Kesirli Türev Tanımı	13
1.2.19. Doğrusallık (Lineer Olma Özelliği)	13
1.2.20. Homojen Olma Özelliği	13
1.2.21. Caputo Türev Yaklaşımının Birinci Mertebeden Fark Türevi	14
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR	15
2.1. Parabolik Kesirli Diferansiyel Denklemler İçin Kaynak Tanımlama Problemine Fourier Seri Yönteminin Uygulaması	15
2.2. Parabolik Kesirli Diferansiyel Denklemler İçin Kaynak Tanımlama Problemine Fourier İntegral Dönüşüm Yönteminin Uygulaması	26
2.3. Parabolik Kesirli Diferansiyel Denklemler İçin Kaynak Tanımlama Problemine Laplace İntegral Dönüşüm Yönteminin Uygulaması	31
3. BULGULAR ve TARTIŞMA	37
3.1. Fark Şeması	37
3.2. Sayısal Sonuçlar	39
4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	48
5. KAYNAKÇA	51
ÖZGEÇMİŞ	54

TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 1. u, v ve p için hata analizi	46
--	----



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. $N=20$, $M=20$ değerlerinde gerçek çözümün grafiği	46
Şekil 2. $N=20$, $M=20$ değerlerinde birinci dereceden fark şeması grafiği	47
Şekil 3. $N=40$, $M=40$ değerlerinde birinci dereceden fark şeması grafiği	47



SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

H	: Hilbert uzay
$\ p\ $	: H Hilbert uzayındaki p elemanın normu
$A_n, B_n, C_n,$	: $(N + 1) \times (N + 1)$ kare matrisleri
BMDFŞ	: I. mertebe doğruluklu fark şeması
λ	: Bir matrisin öz değeri
D_t^α	: Bir fonksiyonun t değişkenine göre α dereceden türevi
$\mathcal{F}$	: Fourier dönüşümü
$\mathcal{L}$	: Laplace Dönüşümü
Γ	: Gamma fonksiyonu
β	: Beta fonksiyonu
$f'(x_i)$	: f fonksiyonunun fark türevi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tamsayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
α	: Kesir mertebeli türevin mertebesi
$u(t, r)$	: t, r değişkenlerine bağlı fonksiyon
$v(t, r)$ ve $w(t, r)$	: u fonksiyonunun çözümü için kullanılan yardımcı fonksiyonlar
$p(r)$	: kaynak fonksiyonu

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Bu çalışma özellikle Fizik, Matematik, Mühendislik gibi bilim dallarında veya mekanik, dinamik gibi konularda kullanımı gün geçtikçe artan ve buna bağlı olarak daha fazla çalışmanın yapıldığı bir alan olan kesir mertebeli diferansiyel denklemler üzerine yapılmıştır. Bir boyutlu kesirli parabolik kısmi diferansiyel denklemin çözümü için klasik yöntemler kullanılmıştır. Ayrıca Laplace dönüşümü, Fourier dönüşümü ve Fourier serileri yöntemleri uygulanan örnekler sunulmuştur.

Çalışma oluşturulmadan önce genel kavramlar ve tanımlar verilmiştir.

Akgül, A., Inc, M. ve Baleanu, D., 2017 yılında yayınladıkları makalelerinde değişken mertebeli kesirli diferansiyel denklemlerin çözümleri üzerine çalışmışlardır.

Ashyralyev, A. ve Sobolevskii, PE, 2004 deki makalelerinde kısmi diferansiyel denklemler için yeni fark şemaları üzerine çalışmışlardır.

Ashyralyev, A. 2009 'da ki makalesinde kesirli türevler ve operatörlerin kesirli kuvvetleri üzerinde durmuştur.

Ashyralyev ve Dal, 2012 makalede sonlu fark ve iterasyon metotlarını kullanarak $\alpha = 1/2$ için kesirli hiperbolik kısmi diferansiyel denkleminin Neumann koşuluna bağlı yaklaşık çözümünü çalışmıştır.

Ashyralyev ve Uygun, 2012 makalede bir kesirli parabolik denklem için zamana bağlı kaynak belirleme probleminin kararlılık tahminleri operatör teorisi yaklaşımı yöntemi kullanılarak elde edilmiştir ve problemin yaklaşık çözümleri için fark şemaları incelenmiştir.

Ashyralyev, A. ve Modanlı, M., 2015 deki tez çalışmasında telgraf kısmi diferansiyel ve fark denklemleri için bir operatör yöntemini kullanmıştır.

Aslefallah, M., Rostamy, D. ve Hosseinkhani, K.,2014 yılında yayınladıkları makalelerinde zaman-kesirli diferansiyel difüzyon denklemini teta yöntemiyle çözme konusuna odaklanmışlardır.

Cakir, 2012 makalesinde Dirichlet-Neumann koşulları ile kesirli parabolik kısmi diferansiyel denklemler için fark şemalarının kararlılığını incelemiştir.

Chen, H., Xu, D., Cao, J. ve Zhou, J.,2017 deki çalışmalarında üç boyutlu fraksiyonel evrim denklemi için geriye dönük Euler alternatif yön örtük fark şeması ile ilgilenmişlerdir.

Çelik, C. ve Duman M., 2012 ‘ de ki makalelerinde Riezs kesirli türevli denklem için Crank-Nicholson yöntemini kullanarak hesaplama üzerinde durdu.

Düzgün, 2017 yüksek lisans tezinde non-lineer kesirli kısmi diferansiyel denklemlerde çözüm için geliştirilmiş F-açılım tekniği uygulanmıştır.

Gorial, 2011 deki makalesinde Riesz uzayı kesirli türevli reaksiyon-dağılım denklemi için sayısal yöntemler üzerine çalıştı.

Hiçdurmaz, 2020 doktora tezinde kesirli türevli Shröndinger diferansiyel denklemleri için başlangıç sınır değer problemlerinin çözümlerinin yaklaşık değerlerini hesaplamak için fark şemaları oluşturmuş ve kararlılık analizlerini yapmıştır.

Jafari, H., Gejii, Vs, 2006 daki birlikte yayınladıkları makalelerinde lineer ve lineer olmayan fraksiyonel difüzyon ve dalga denklemlerinin adomian ayrıştırmasıyla çözülmesini incelemişlerdir.

Joaquin ve Santos, 2011 makalesinde Caputo formunda fraksiyonel difüzyon ve difüzyon dalga denklemlerini çözmek için açık fark yöntemi kullanmıştır.

Karatay, İ., Bayramoğlu, SR ve Şahin, A., 2011 deki yayınladıkları makalelerinde yerel olmayan koşullu zaman kesirli ısı denklemi için örtülü fark yaklaşımını çalışmışlardır.

Karatay, İ., Bayramoğlu, SR ve Şahin, A.,2013 de yayınladıkları makalelerinde Crank-Nicholson yöntemine dayalı zaman kesirli ısı denklemi için yeni bir fark şemalarını kullanmışlardır.

Karatay, I., Kale, N. ve Bayramoğlu Erguner, vs. , 2014 yılında yayınladıkları makalelerinde matris metodu ile sonlu kısmi diferansiyel denklemlerin kararlılığı ve yakınsamasını incelemişlerdir.

Kilbas, Sristava ve Trujillo, 2006 makalesinde kesirli diferansiyel denklemlerin teorisi ve uygulamaları üzerine durmuştur.

Kumar, S.,2014 deki makalesinde kesirli telgraf denklemi için Laplace dönüşümü aracılığıyla yeni bir analitik modelleme üzerinde durmuştur.

Modanlı, M. ve Akgül, A., 2017' deki tez çalışmasında İkinci dereceden kısmi diferansiyel denklemlerin iki doğru yöntemle çözümü üzerine durmuşlardır.

Modanlı, 2018 makalesinde kesirli telegraf kısmi diferansiyel denklemlerde sonlu fark şeması yöntemi ile nümerik çözümünü araştırmıştır.

Murio ve Meja, 2008 makalesinde Caputo kesirli türevleri üzerine çalışmıştır.

Srivastava, Awasthi ve Tamsir zamana bağlı kesirli mertebeden Caputo hiperbolik telegraf denkleminin nümerik sonuçlarını RDTM (Reduced Differential Transform Method) metoduyla bulmuştur.

Singh, Gupta ve Rai, 2011 makalesinde kesirli biyotik denklemlerinin sonlu farklar yöntemi ile çözümü üzerine çalışma yapmıştır.

Su, L., Wang, W. ve Yang, Z.,2009' da yayınladıkları makalelerinde kesirli adveksiyon-difüzyon denklemi için sonlu fark yaklaşımları üzerine çalışmalar yapmışlardır.

Szekeres, B. ve Izsák, F., 2018' de sundukları makalelerinde Neumann sınır koşulları ile kesirli difüzyon denklemleri için sonlu farklar yöntemini uygulamışlardır.

Tadjeran, C., Meerschaert, MM ve Scheffler, HP, 2006, kesirli difüzyon denklemi için ikinci dereceden doğru sayısal yaklaşımı üzerinde çalışmışlardır.

Zhang, 2011 makalesinde uzay-zaman kesirli kısmi diferansiyel denklemler için sonlu fark yaklaşımları çalışılmıştır.

Zhang ve Xu, 2011 makalesinde kesirli difüzyon denklemi için ters kaynak problemi üzerine çalışmıştır.

Cannon ve Yin, 1990 makalesinde bazı ters parabolik problemlerin çözümleri üzerine çalışmıştır.

Ashyralyev ve Erdoğan 2011 de sundukları makalelerinde Dirichlet bir boyutlu parabolik denkleminde sağ tarafı Dirichlet koşulları ile tekrar yapılandırırken ters problemin sayısal çözümlerini de sundular. Çalışma fark şemalarının bir ve ikinci mertebeden çözümlerinin üzerine zorlu kararlılık tahminleri sunmuştur.

Ashyralyev ve Demirdağ, 2012 makalede parabolik denklem için bir kaynak belirleme probleminin iyi tanımlılığı araştırılmış ve bu ters problemde yaklaşık çözüm hesaplamak üzere bir ve ikinci mertebeden fark şemaları sunulmuştur.

Ashyralyev ve Akkan, 2020 makalede Dirichlet sınır koşulları ile çok boyutlu ters parabolik denklemler için lokal olmayan çok noktalı problemlerin yaklaşık çözümü için ikinci mertebe doğrulukla fark şemaları uygulanmıştır.

Ashyralyev, 2020 makalede lokal olmayan ters parabolik problemi integral koşullu çözmek için sonlu farklar yöntemi kullanmıştır.

Dehghan, 2001 yılında sunduğu makalesinde kaynak kontrol parametresiyle birlikte difüzyon denklemiyle ilgili ters problemi incelemiş bununla beraber kontrol parametresi atamak üzere çeşitli sonlu fark şemaları kullanmıştır.

Kalmenov ve Shaldanbaev (2010), ters ısı probleminde çözünürlük ölçütlerini kullandılar. Bu kapsamda lineer operatör teorisi yöntemleri kullanılarak limit değer probleminde bir kesin çözümün varlığı için kıstas oluşturmaya çalıştılar. Çalışmadaki yöntemin geleneksel yöntemlerden temel farkı, Hilbert uzayında verilen matematiksel fizikteki birçok başka çalışmadaki olduğu gibi, diferansiyel bir denklemden öte bir operatör olarak değerlendirilmesidir.

Ismailov ve Kanca 2011 yılında sundukları çalışmalarında yerel olmayan sınır ve üst belirli koşullarla ısı denkleminin ve üst zamana bağlı (ters) ısı kapasite katsayısını bulma probleminin çözümü ile birlikte ele aldılar. Bu çalışmada içerik ile ilgili varlık ve teklik teoremleri ispatlanmış bununla birlikte ters problemde sayısal çözümle ilgili birkaç fikrin örneklerini sunmuşlardır.

Mohebbi ve Abbasi, 2015 deki çalışmalarında bilinmeyen kontrol parametresi ve bilinmeyen ters bir parabolik problemde çözümü belirlemek için yüksek dereceli bir

sonlu fark şeması kurdular. Önerilen bu sayısal şemada, araştırmacılar konumlara göre türevleri dördüncü mertebeden kompakt sonlu farklar yaklaşımıyla değiştirdiler. Daha sonra önerilen fark şemasının kararlılığını ve yakınsamasını araştırdılar.

Caputo tipi kesirli türevleri içeren ters parabolik denklemler için kaynak belirleme problemleri yeterince araştırılmadığı görülmüş ve bu nedenle tez buradaki boşluğu doldurmak amacıyla yazılmıştır.

Bu çalışmada;

1) Kesirli parabolik denklem için $[0,1] \times [0,\pi]$ dikdörtgende

$$\begin{cases} \frac{\partial \mu(t,r)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mu(t,r)}{\partial r^2} + \mu(t,r) + D^{\frac{1}{2}} \mu(t,r) \\ = p(r) + f(t,r), 0 < t < 1, 0 < r < \pi \\ \mu(t,0) = 0, \mu(t,\pi) = 0, 0 < t < 1 \\ \mu(0,r) = \varphi(r), \mu(1,r) = \varpi(r), 0 \leq r \leq \pi \end{cases}$$

şeklindeki kaynak belirleme sınır değer problemine Fourier serileri yöntemi kullanıldı ve problemin çözüm algoritması verilecektir.

2) Kesirli parabolik denklem için $[0,1] \times (-\infty, \infty)$ alanında

$$\begin{cases} \mu_t(t,r) - \mu_{rr}(t,r) + \mu(t,r) - D^{\frac{1}{2}} \mu(t,r) \\ = f(t,r) + p(r), 0 < t < 1, -\infty < r < \infty, \\ \mu(1,r) = \xi(r), \mu(0,r) = \theta(r) \end{cases}$$

probleminin Fourier integral dönüşüm yöntemi yardımıyla çözüm algoritması verilerek, çözümlenecektir.

3) Kesirli parabolik denklem için $[0,1] \times [0, \infty)$ alanında

$$\begin{cases} u_t(t, r) - u_{rr}(t, r) + u(t, r) + D^{\frac{1}{2}}u(t, r) \\ = f(t, r) + p(r), 0 < t < 1, 0 \leq r < \infty, \\ u(1, r) = \varphi(r), u(0, r) = \psi(r), 0 \leq r < \infty, \\ u(t, 0) = \mu(t), u_r(t, 0) = \nu(t), 0 < t < 1 \end{cases}$$

şeklinde verilen sınır değer probleminin çözümü için Laplace dönüşüm yöntemi uygulanarak çözüm algoritması verilecektir.

4)

$$\begin{cases} \frac{\partial \mu(t, r)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mu(t, r)}{\partial r^2} + \mu(t, r) - D^{\frac{1}{2}}\mu(t, r) \\ = p(r) + f(t, r), 0 \leq t \leq 1, 0 < r < \pi \\ \mu(0, r) = \xi(r), \mu(\lambda, r) = \theta(r), 0 \leq r \leq \pi \\ u(t, 0) = 0, u(t, \pi) = 0, 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde verilen kesir türevli parabolik denklemlerde kaynak belirleme probleminin yaklaşık çözümünü bulmak için;

$$\begin{cases} \frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} = \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} - u_n^k + D^{\frac{1}{2}}_\tau u_n^k + p_n + f(t_k, r_n), \\ 0 \leq k \leq N, 0 \leq n \leq M, \\ u_n^0 = \varphi(r_n), u_n^s = \psi(r_n), 0 \leq n \leq M \\ u_0^k = 0, u_M^k = 0, 0 \leq k \leq N \end{cases}$$

birinci mertebeden doğruluk fark şeması incelenecektir.

Sonlu fark şeması yöntemi sınır değer problemleri içeren diferansiyel denklemlerin çözümünde sıkça kullanılan bir yöntem olarak burada da tercih edilmiştir.

1.2. Temel Kavramlar:

Bu kısımda tezde kullanılacak matematiksel tanımlar ve kavramlar verilecektir.

Tanım 1.2.1. Gama fonksiyonu: Matematikte faktöriyel fonksiyonunun karmaşık sayı ve tam sayı olmayan reel sayılar için genelleştirilmiş bir fonksiyondur. Euler integralinin ikinci türüdür.

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

şeklinde tanımlanan integrale gama fonksiyonu adı verilir (Podlubny, 1999).

Tanım 1.2.2. Beta fonksiyonu: Euler integralinin birinci türüdür.

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} \cdot (1-x)^{n-1} dx$$

şekliyle tanımlanan integrale beta fonksiyonu adı verilir (Podlubny, 1999).

Beta ve Gama fonksiyonları arasında

$$\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m) \cdot \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

ilişkisi vardır (Podlubny, 1999).

Tanım 1.2.3. U bir lineer kompleks uzay ve $\|\cdot\|: U \rightarrow \mathbb{C}; x \rightarrow \|x\|$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer her $x, y \in U$ ve $a \in \mathbb{C}$ için

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

özelliklerini sağlıyorsa $\|\cdot\|$ ya U üzerinde bir norm ve $(U, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu lineer uzay veya kısaca normlu uzay denir. (Maddox 1970)

Diferansiyel denklemleri sağlayan fonksiyonlar için farklı sınır değer şartları kullanılmaktadır.

Tanım 1.2.4. $[a,b]$ aralığında tanımlı $u(x)$ fonksiyonunda $x = a$ ve $x = b$ noktalarındaki değerleri u_a ve u_b olduğu durumlarda $u(a) = u_a$ ve $u(b) = u_b$ koşullarına Dirichlet şartları denir.

Özel olarak uçlardan tutturulmuş bir telin salınımı için bu şart kullanılabilir.

Tanım 1.2.5. $[a,b]$ aralığında tanımlı ve türevlenebilen $u(x)$ fonksiyonu için $x = a$ ve $x = b$ noktalarındaki türevleri u'_a ve u'_b olduğu durumlarda $\frac{du(a)}{dx} = u'_a$ ve $\frac{du(b)}{dx} = u'_b$ koşullarına Neumann tipi sınır şartları denir.

Tanım 1.2.6. Eğer ilave koşullar, u bilinmeyen fonksiyonunun ve türevinin tanım bölgesinin sınır noktalarındaki değerlerinin lineer birleşimi olarak verilmişse, bu şartlara Robin (karışık – mixed) sınır şartları denir. (Ashyralyyev, 2014)

Çok sayıdaki fiziksel ve matematiksel problemde, sınır-değer ve başlangıç-değer problemlerinde, diferansiyel denklemler için çözüm metodlarından biride integral dönüşümleridir. İntegral dönüşümü metodunun en temel özelliği; herhangi bir integral dönüşümü uzayında $F(s)$ noktasına karşılık olarak esas uzayda $f(t)$ noktasını oluşturarak çözüm aramaktır. Bu yöntemlerden bazılarını aşağıda işleyeceğiz.

Laplace integral dönüşüm yöntemi, dönüşüm yöntemleri içerisinde önemli bir yere sahiptir bunula birlikte fizik, matematik, mühendislik, telekominikasyon, mekanik ve bunlar gibi uygulamalı bilim dallarının çoğunda çokça kullanılmaktadır.

Tanım 1.2.7. $f(t)$, $t \geq 0$ için t reel değişkenine ait bir fonksiyonu olsun ($t < 0$ için $f(t) = 0$ kabul edildi). $s > 0$ gerçel veya kompleks bir parametre olmak üzere, t gerçel değişkeninin bir fonksiyonu e^{-st} olduğunda ,

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

integrali var olacak şekliyle s parametresi için bir değer bulmak mümkünse bu integrale $f(t)$ fonksiyonu için Laplace dönüşümü denir. Bu dönüşümü $\mathcal{L}\{f(t)\}$ veya $F(s)$ ile gösteririz. Burada,

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

olarak yazılabilir (Sneddon,1972).

Tanım 1.2.8. Verilen bir $f(t)$ fonksiyonu Laplace dönüşümünde integral tanımı kullanılarak, s parametresine bağlı $F(s)$ fonksiyonunun tanımlandığını ve

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t) dt$$

olacak şekilde ifade edildiğini biliyoruz. Şimdi ise bilinmeyen bir $f(t)$ fonksiyonunda verilen Laplace dönüşümü $F(s)$ ise $f(t)$ fonksiyonunu nasıl bulabiliriz? sorusunun cevabına bakarsak. Buradaki $f(t)$ fonksiyonuna $F(s)$ fonksiyonunun Ters Laplace Dönüşümü adı verilir ve sembolik olarak $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ ile gösterilir. Burada $\mathcal{L}^{-1}$ sembolüne Ters Laplace Dönüşüm Operatörü denir (Dyke, 2001).

Tanım 1.2.9. ($0 < \alpha < 1$) olmak üzere $f(t)$ fonksiyonunun α . mertebeden Caputo türevinin Laplace dönüşümü,

$$\mathcal{L}[D_t^\alpha f(t)](s) = s^\alpha \cdot F(s) - s^{\alpha-1} \cdot f(0)$$

şeklinde tanımlanır. Burada; $F(s)$, $f(t)$ ' nin Laplace dönüşümüdür. (Bangan, S., ve vd.,2019).

Fourier integral dönüşümü 19. yy. da Fourier tarafından keşfedilmiş ve 20. yy da Oliver Heaviside tarafından geliştirilerek kullanılmıştır. Özellikle kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümündeki önemi büyüktür.

Tanım 1.2.10. Bir $f(x)$ fonksiyonu reel sayılar kümesinde tanımlı olmak üzere,

$$F(k) = F\{f(x)\} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-ikx} dx$$

integraline bu fonksiyonun Fourier integral dönüşümü denir. *Sürekli* $f(x)$ fonksiyonunun Fourier integral dönüşümünün varlığı için yeter koşul,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

integralinin mutlak yakınsak olmasıdır.

Tanım 1.2.11. Fourier integral dönüşümündeki orijinal $f(x)$ fonksiyonunu bulmamızı sağlayan,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx$$

integraline ters Fourier dönüşümü denir. (Ashyralyyev, vd., 2014)

Matematikteki kullanımıyla Fourier Serileri periyodik fonksiyonları basit dalgalı fonksiyonların toplamına dönüştürür. Fourier serileri ilk olarak J. Fourier tarafından 19. yy da ısı denklemlerinin çözümü için kullanılmıştır. Bugün ise akustik, titreşim analizi, sinyal işleme, kuantum mekaniği ve ekonomi hesaplamalarını elde etmek gibi birçok alanda kullanılmaktadır. Herhangi bir periyodik fonksiyonun sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının dalgalarının oluşturduğu bir serinin toplamı biçiminde ifade edilebileceği fikri üzerine ortaya atılmıştır.

Tanım 1.2.12. $f(t)$ bütün t ler için tanımlanmış $2L$ periyotlu parçalı ve sürekli bir fonksiyon olarak alınsın $f(t)$ nin Fourier Serisinin

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \right)$$

serisidir. Buradaki a_n ve b_n Fourier katsayıları

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt$$

olarak tanımlanır (V. Serov, 2017).

Tanım 1.2.13. Bir $X(x)$ fonksiyonu için aşağıdaki şekilde tanımlanan sınır değer problemine Sturm Liouville problemi denir.

$$\begin{cases} R''(r) + \lambda \cdot R(r) = 0, 0 < r < l; \\ a_0 \cdot R(0) + \beta_0 \cdot R'(0) = 0, \\ a_1 \cdot R(1) + \beta_1 \cdot R'(1) = 0 \end{cases}$$

Burada $a_0, \beta_0, a_1, \beta_1$ katsayıları $a_0\beta_0 \leq 0, a_1\beta_1 \geq 0, a_0^2 + \beta_0^2 > 0$ v $a_1^2 + \beta_1^2 > 0$ koşullarını sağlayan bilinen sayılardır.

λ parametresi için problemin sıfır (aşıkâr) olmayan çözümü varsa, bu parametreye öz değer adı verilir. Bu öz değere karşılık $R(r)$ çözümüne ise öz fonksiyon denir (Ashyralyev vd., 2014).

Tanım 1.2.14. Lineer Bağımlılık – Lineer Bağımsızlık $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ m adet vektör, $C_1, C_2, \dots, C_m$ m adet skaler olmak üzere,

$$C_1\vec{v}_1 + C_2\vec{v}_2 + \dots + C_m\vec{v}_m = \vec{0}$$

eşitliği ancak ve ancak $C_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$) için sağlanıyorsa $\vec{v}_i$ vektörleri kendi arasında lineer bağımsızdır denir veya $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$ vektör kümesinin elemanları kendi arasında lineer bağımsızdır denir. (1.2.1.) denklemini sağlayan 0 dan farklı en az bir katsayı bulunabiliyorsa bir vektörün diğerleri türünden yazılabildiği anlamına gelir, bundan dolayı $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$ vektör kümesinin elemanları kendi aralarında lineer bağımlıdır.

Tanım 1.2.15. f herhangi bir $[a, b]$ aralığında tanımlı fonksiyon olsun. Bu aralıkta ağ noktalarını $x_i = i \cdot h$; $i = 0, 1, \dots, M$; $M \cdot h = b - a$ buna göre;

- a) $f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$ ifadesine birinci mertebe ileri fark türevleri denir.
- b) $f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{h}$ ifadesine birinci mertebe geri fark türevleri denir.
- c) $f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h}$ ifadesine birinci mertebe merkezi fark türevleri

denir (Amiraliyev ve Duru, 2002).

Kesir Mertebeden Türev Ve İntegraller: 17. yy. ın ortalarında Newton tarafından türev tanımı kullanılmasından sonra türevin tam sayı mertebeleri üzerine birçok çalışma yapılmış, 17. yy. ın sonunda ise Leibniz ile L'Hospital ın mektuplaşması sonucunda türevin kesir mertebesine ait ilk çalışmaların temeli atılmıştır. Kesir mertebeden türevler ve integraller yıllarca değer görmemiş olsa da son yıllarda bu alanda çokça çalışma yapılmaya başlanmıştır. Şimdi bazı kesir mertebe türev tanımlarına göz atalım.

Tanım 1.2.16. L. Euler kesirli türev tanımını,

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}$$

şeklinde genelleştirmiştir (L. Euler 1970).

Tanım 1.2.17. f fonksiyonu her sonlu (a, x) aralığı için sürekli ve integrallenebilir olsun. $m \in \mathbb{Z}^+$, $m - 1 \leq \alpha < m$ olduğunda $x > a$ için bir reel f fonksiyonunda α . mertebe Riemann – Liouville kesirli türevi,

$$D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dx^m} \int_a^x f(t)(t-v)^{m-\alpha-1} dt$$

olarak tanımlanmıştır.

Kesir mertebeden türev ve integraller içerisinde Caputo tanımıyla ilgileneceğiz. Bunun nedeni Caputo yaklaşımında en temel avantaj, tamsayı mertebelerden diferansiyel denklemlerle aynı formda başlangıç koşullarına sahip olmasıdır (A. Carpintery and F. Mainardi,1997).

Tanım 1.2.18. $n-1 < \alpha < n$ ($n \in \mathbb{N}^+$) için $f, [a, b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde integrallenebilen, zamana bağlı değişken bulunduran bir fonksiyon olsun. α . mertebeden Caputo kesir mertebeli türevi,

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(v) dv}{(t-v)^{\alpha+1-n}}$$

şeklinde tanımlanmıştır (Caputo, 1967).

Şimdi kesirli türevin özelliklerine bakalım. Yani kesirli türevin bazı temel özelliklerden bahsedeceğiz.

Tanım 1.2.19. Doğrusallık (lineer olma) özelliği: Kesirli türevlerin doğrusal olma özelliği

$$\frac{D^\alpha [f_1 + f_2]}{[D(x-a)]^\alpha} = \frac{D^\alpha f_1}{[D(x-a)]^\alpha} + \frac{D^\alpha f_2}{[D(x-a)]^\alpha}$$

şeklinde ifade edilir (Podlubny, 1999).

Tanım 1.2.20. Homojen olma özelliği: Kesir mertebeli türevlerin homojen olma özelliği (C herhangi bir sabit olarak alınmıştır)

$$\frac{D^\alpha (Cf)}{[d(x-a)]^q} = C \frac{D^\alpha f}{[d(x-a)]^q}$$

olarak verilir (Podlubny, 1999).

Tanım 1.2.21.

$$D_t^{\frac{1}{2}} u^m(t, x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - r)} \sum_{m=1}^k \frac{\Gamma(k - r - \alpha + 1)}{(k - r)!} \frac{u_r^m - u_{r-1}^m}{\tau^\alpha}$$

Caputo kesirli türev yaklaşımının birinci mertebeden doğrulukla fark türevi denir (Ashyralyev, 2009).



2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu bölümde, sabit katsayılı ters parabolik diferansiyel denklemlerin Fourier integral dönüşümü yöntemi, Fourier serileri yöntemi ve Laplace dönüşüm yöntemleriyle çözümleri verilecektir.

2.1. Parabolik Kesirli Diferansiyel Denklemler İçin Kaynak Tanımlama Problemine Fourier Seri Yönteminin Uygulaması

Fourier serileri yöntemi uygulayarak aşağıdaki başlangıç sınır değer probleminin çözümü ile çalışmalarımıza başlayalım.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u(t,r)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t,r)}{\partial r^2} + u(t,r) + D^{\frac{1}{2}}u(t,r) \\ = p(r) + \left(6t + 3 + \frac{6}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}} \right) \sin r, 0 < t < 1, 0 < r < \pi \\ u(t,0) = 0, u(t,\pi) = 0, 0 < t < 1 \\ u(0,r) = 2 \sin r, 0 \leq r \leq \pi \\ u(1,r) = 5 \sin r, 0 \leq r \leq \pi \end{array} \right. \quad (1)$$

(1) problemini çözmek için Fourier serileri yöntemini kullanalım.

Problemin çözümü için;

$$u(t,r) = v(t,r) + w(t,r) \quad (2)$$

olacak şekilde problemi iki parçaya ayıralım. Burada $v(t,r)$ yardımcı fonksiyonunu kullanarak problemin t ve r değişkenlerine bağlı kısmına çözüm arayacağımız problemi yazalım.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v(t,r)}{\partial t} - \frac{\partial^2 v(t,r)}{\partial x^2} + v(t,r) + D^{\frac{1}{2}}v(t,r) = \left(6t + 3 + \frac{6}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{1}{2}}\right)\sin r \\ v(t,0) = 0, v(t,\pi) = 0, 0 < t < 1 \\ v(1,r) - v(0,r) = u(1,r) - u(0,r) = 3 \sin r, 0 \leq r \leq \pi \end{array} \right. \quad (3)$$

Şimdi ise yalnızca r değişkenine bağlı kısım için $w(t,r)$ yardımcı fonksiyonu ile çözüm arayacağımız kısmı yazalım.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w(t,r)}{\partial t} - \frac{\partial^2 w(t,r)}{\partial r^2} + w(t,r) + D^{\frac{1}{2}}w(t,r) = p(r), 0 < t < 1, 0 < r < \pi \\ w(t,0) = 0, w(t,\pi) = 0, 0 < t < 1 \\ w(1,r) - w(0,r) = 0, 0 \leq r \leq \pi \end{array} \right. \quad (4)$$

şeklinde problem dönüştürülür. (4) ün çözümü için;

$$w(t,r) = \alpha(t,r) + \beta(t,r) \quad (5)$$

biçiminde problemi bölersek,

$\alpha(t,r)$ homojen kısmın çözümü için,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \alpha(t,r)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \alpha(t,r)}{\partial r^2} + \alpha(t,r) + D^{\frac{1}{2}}\alpha(t,r) = 0 \\ \alpha(t,0) = 0, \alpha(t,\pi) = 0, 0 < t < 1 \\ \alpha(1,r) - \alpha(0,r) = 0, 0 \leq r \leq \pi \end{array} \right. \quad (6)$$

$\beta(t, r)$ homojen olmayan kısmın çözümü için,

$$\begin{cases} \frac{\partial \beta(t, r)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \beta(t, r)}{\partial r^2} + \beta(t, r) + D^{\frac{1}{2}} \beta(t, r) = p(r) \\ \beta(t, 0) = 0, \beta(t, \pi) = 0, 0 < t < 1 \\ \beta(1, r) - \beta(0, r) = 0, 0 \leq r \leq \pi \end{cases} \quad (7)$$

şeklinde yazılır. İlk önce (6) problemini değişkenlerine ayırma yöntemiyle çözelim.

Bunun için;

$$\alpha(t, r) = T(t)R(r) \quad (8)$$

şeklinde ele alalım. (8) in kısmi türevlerini alıp (6) da yerine yazarsak

$$\frac{T'(t) + T^{\left(\frac{1}{2}\right)}(t)}{T(t)} = \frac{R''(r)}{R(r)} - 1 = \lambda - 1 \quad (9)$$

elde edilir. (9) da başlangıç şartlarını yerine yazarsak

$$\begin{cases} R''(r) - \lambda R(r) = 0 \\ R(0) = 0, R(\pi) = 0 \end{cases}$$

olur. Sturm Louville problemi elde edilir ve şu durumlar oluşur.

I.Durum: $\lambda \geq 0$ ise diferansiyel denklem için genel çözümü

$$R(r) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}r} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}r}$$

şeklindedir. Sınır şartlarını yerine koyarsak,

$$c_1 + c_2 = 0$$

$$c_1 e^{\sqrt{\lambda}\pi} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\pi} = 0$$

elde edilir. Bu denklemlerden

$$c_1 = -c_2$$

$$-c_2 e^{\sqrt{\lambda}\pi} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\pi} = 0$$

$$c_2 (e^{-\sqrt{\lambda}\pi} - e^{\sqrt{\lambda}\pi}) = 0$$

yazılır ve sonuç olarak

$$-c_1 = c_2 = 0$$

$$R(r) = 0$$

bulunur.

II. durum

$\lambda = 0$ ise $R''(r) = 0$ bulunur. Bu denklemden genel çözüm

$$R(r) = c_1 r + c_2$$

şeklindedir. Denklemden sınır şartlarını yerine koyarsak

$$c_2 = 0$$

$$\pi \cdot c_1 + c_2 = 0$$

$$c_1 = 0$$

$$R(r) = 0$$

elde edilir.

III. durum:

$\lambda = 0$ ise denklem için genel çözüm

$$R(r) = c_1 \cos \sqrt{-\lambda} r + c_2 \sin \sqrt{-\lambda} r$$

şeklindedir. Sınır şartlarını denklemde yerine koyarsak

$$c_1 = 0$$

$$c_2 \sin \sqrt{-\lambda} \pi = 0, c_2 \neq 0$$

$$\sin \sqrt{-\lambda} = 0 \text{ ise } \sqrt{-\lambda} \pi = k\pi$$

$$\lambda_k = -k^2, k = 1, 2, 3, \dots$$

öz değerleri bulunur. Sonuç olarak, her λ_k öz değerine karşılık öz fonksiyonlar

$$R_k(r) = \sin kr, k = 1, 2, 3, \dots$$

şeklindedir. Diğer denklem kesirli diferansiyel denklemdir

$$\begin{cases} T_k'(t) + T_k^{\frac{1}{2}}(t) + k^2 T_k(t) + T_k(t) = 0 \\ T_k(1) - T_k(0) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

problemini çözmek için T_k fonksiyonunu

$$T_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^k t^{\frac{n}{2}} \quad (11)$$

şeklinde yazarsak. (11) in türevleri alınıp (10) da yerine yazıldığında

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} a_n^k t^{\frac{n}{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} a_0 t^{-\frac{1}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} a_n^k t^{\frac{n-1}{2}} + (k^2 + 1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n^k t^{\frac{n}{2}} = 0$$

elde edilir. Başlangıç koşullarını kullanarak

$$T_k(0) = a_0$$

$$T_k(1) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^k$$

$$T_k(1) - T_k(0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^k + a_0 - a_0 = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k = 0$$

olduğu görülür. Buradan a_n^k için $a_n^k = 0$ bulunur. Böylece,

$$\alpha(t, r) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^k t^{\frac{1}{2}} R_k(r) = 0$$

(6) 'nın çözümüdür.

(7) probleminin çözümünü bilinmeyen $p(r)$ fonksiyonunu bulduğumuzdan sonraya bırakalım.

Şimdi (3) problemini değişkenlerine ayırma yöntemiyle çözelim.

Bunun için;

$$v(t, r) = T(t)R(r)$$

şeklinde ele alalım. Bilinmeyen R ve T fonksiyonları için (9) denklemleri elde edilir. Sturm-Liouville problemi özdeğer ve özfonksiyonlarını kullanarak (3) probleminin çözümünü

$$v(t,r) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin(nr) \quad (12)$$

şeklinde arayacağız. Türevler alınıp (3) te yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n'(t) + n^2 c_n(t) + D^{\frac{1}{2}} c_n(t) + c_n(t) \right] \sin(nr) \\ &= \left(6t + 3 + \frac{6}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}} \right) \sin r + \sum_{n=2}^{\infty} 0 \cdot \sin(nr) \end{aligned}$$

bulunur. $n = 1$ için,

$$c_1'(t) + 2c_1(t) + D^{\frac{1}{2}} c_1(t) = 6t + 3 + \frac{6}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

olur. (13) denkleminin çözümü için

$$c_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{\frac{k}{2}} \quad (14)$$

olarak alalım. (14) ün kısmi türevlerini (13) de yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2} a_k t^{\frac{k}{2}-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} a_k t^{\frac{k-1}{2}} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{\frac{k}{2}} = 6t + 3 + \frac{6}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}} \\ & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2} a_k t^{\frac{k}{2}-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} a_k t^{\frac{k-1}{2}} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} t^{\frac{k-1}{2}} = 6t + 3 + \frac{6}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}} \\ & \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{k}{2} a_k t^{\frac{k}{2}-1} + \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} a_k t^{\frac{k-1}{2}} + 2a_{k-1} t^{\frac{k-1}{2}} \right] = 6t + 3 + \frac{6}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

denklemine ulaşırız. Burada,

$k = -1$ için;

$$t^{-\frac{1}{2}} : \frac{1}{2}a_1 + \frac{\Gamma(l)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}a_0 = 0 \quad (15)$$

$$a_1 = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}a_0$$

$k = 0$ için;

$$t^0 : a_2 + \frac{\sqrt{\pi}}{2}a_1 + 2a_0 = 3 \quad (16)$$

$$a_2 = 3 - a_0$$

$k = 1$ için;

$$t^{\frac{1}{2}} : \frac{3}{2}a_3 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}a_2 + 2a_1 = \frac{6}{\sqrt{\pi}} \quad (17)$$

$$a_3 = \frac{4a_0}{\sqrt{\pi}}$$

$k = 2$ için;

$$t^1 : 2a_4 + \frac{3\sqrt{\pi}}{4}a_3 + 2a_2 = 6 \quad (18)$$

$$2a_4 + \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \frac{4}{\sqrt{\pi}}a_0 + 2[3 - a_0] = 6$$

$$2a_4 = -a_0$$

$$a_4 = -\frac{a_0}{2}$$

k = 3 için;

$$t^{\frac{3}{2}} : \frac{5}{2}a_5 + \frac{8}{3\sqrt{\pi}}a_4 + 2a_3 = 0$$

$$\frac{5}{2}a_5 - \frac{8}{3\sqrt{\pi}}\frac{a_0}{2} + 2\frac{4a_0}{\sqrt{\pi}} = 0$$

(19)

$$30\sqrt{\pi}a_5 - 8a_0 + 48a_0 = 0$$

$$30\sqrt{\pi}a_5 = -40a_0$$

$$a_5 = -\frac{4a_0}{3\sqrt{\pi}}$$

eşitlikleri bulunur. Buradan

$$c_1(t) = a_0 + a_1t^{\frac{1}{2}} + a_2t^1 + a_3t^{\frac{3}{2}} + a_4t^2 + \dots$$

(20)

$$c_1(t) = a_0 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}a_0t^{\frac{1}{2}} + (3 - a_0)t^1 + \frac{4a_0}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{3}{2}} - \frac{a_0}{2}t^2 + \dots$$

için başlangıç-sınır değerlerini (19) da yerine yazdığımızda,

$$c_1(1) - c_1(0) = 3$$

$$c_1(1) - c_1(0) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}a_0 + 3 - a_0 + \frac{4}{\sqrt{\pi}}a_0 - \frac{a_0}{2} = 3$$

$$a_0\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} - \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$a_0 = 0$$

değerini elde ederiz. a_0 değerini (15,16,17,18,19) da yerine yazdığımızda

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = 3$$

$$a_3 = 0$$

$$a_4 = 0$$

$$a_5 = 0$$

$n=6,7,8,\dots$ için $a_n = 0$ olur. Bulduğumuz tüm a_n değerlerini (20) de yerine koyduğumuzda

$$c_1(t) = 0 + 0t^{\frac{1}{2}} + 3t^1 + 0t^{\frac{3}{2}} + 0t^2 + \dots \quad (21)$$

$$c_1(t) = 3t^1$$

elde edilir. Buradaki (21) den elde ettiğimiz c_1 değerini (12) de yerine yazarsak

$$v(t, r) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin(nr) \quad (22)$$

$$v(t, r) = 3t \sin r$$

olarak bulunur.

Bundan sonra $p(r)$ i bulacağız. $p(r)$ için

$$-\frac{\partial^2 v(1, r)}{\partial r^2} + v(1, r) = 6 \sin r,$$

$$-\frac{\partial^2 u(1, r)}{\partial r^2} + u(1, r) = 10 \sin r,$$

$$p(r) = -\frac{\partial^2 u(1, r)}{\partial r^2} + u(1, r) + \frac{\partial^2 v(1, r)}{\partial r^2} - v(1, r)$$

$$= 10 \sin r - 6 \sin r$$

$$p(r) = 4 \sin r$$

sonuç olarak $p(r) = 4 \sin r$ olarak elde edilmiş oldu. Şimdi $\beta(t, r)$ i bulalım.

$$\begin{cases} \frac{\partial \beta(t, r)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \beta(t, r)}{\partial r^2} + \beta(t, r) + D^{\frac{1}{2}} \beta(t, r) = 4 \sin r \\ \beta(t, 0) = 0, \beta(t, \pi) = 0, 0 < t < 1 \\ \beta(1, r) - \beta(0, r) = 0, 0 \leq r \leq \pi \end{cases} \quad (23)$$

olarak yazılır. (23) probleminin çözümünü

$$\beta(t, r) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n(t) \sin(nr) \quad (24)$$

formunda arayacağız. Türevler alınıp (23) de yerine yazıldığında

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[d_n'(t) + n^2 d_n(t) + D^{\frac{1}{2}} d_n(t) + d_n(t) \right] \sin(nr) = 4 \sin r$$

elde edilir. $n = 1$ için,

$$d_1'(t) + 2d_1(t) + D^{\frac{1}{2}} d_1(t) = 4 \quad (25)$$

olur. (25) r ye bağlı bir denklem olduğu için t ye göre türevleri 0 olur. Buradan,

$$2d_1(t) = 4$$

olacağı için,

$$d_1(t) = 2$$

olarak bulunur. (24) de yerine yazdığımızda

$$\beta(t, r) = 2 \sin r$$

değerini elde ederiz. Buna göre bulduğumuz α ve β değerlerini (5) de yerine yazdığımızda

$$w(t, r) = 0 + 2 \sin r$$

$$w(t, r) = 2 \sin r$$

olarak elde edilir. Şimdi bulduğumuz $v(t, r)$ ve $w(t, r)$ değerlerini (2) de yerine yazarsak,

$$u(t, r) = 3t \sin r + 2 \sin r$$

$$u(t, r) = (3t + 2) \sin r$$

olarak elde edilir.

2.2. Parabolik Kesirli Diferansiyel Denklemler İçin Kaynak Tanımlama Problemine Fourier İntegral Dönüşüm Yönteminin Uygulaması

$[0, 1] \times (-\infty, \infty)$ bölgesinde parabolik kesirli diferansiyel denklem için,

$$\begin{cases} u_t(t, r) - u_{rr}(t, r) + u(t, r) - D^{\frac{1}{2}}u(t, r) \\ = \left(2 + 4t(1 - r^2) - \frac{4}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}} \right) e^{-r^2} + p(r), 0 < t < 1, -\infty < r < \infty, \\ u(1, r) = 5e^{-r^2}, u(0, r) = 3e^{-r^2}, -\infty < r < \infty \end{cases} \quad (26)$$

şeklindeki kaynak belirleme sınır değer problemini ele alalım.

(26) problemin çözümünü bulmak için Fourier integral dönüşüm yöntemi uygulayacağız.

Problemi önce $u = v + w$ şeklinde iki parçaya ayıralım. $v(t, x)$ yardımcı fonksiyonu için

$$\begin{cases} v_t(t, r) - v_{rr}(t, r) + v(t, r) - D^{\frac{1}{2}}v(t, r) \\ = \left(2 + 4t(1 - r^2) - \frac{4}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}} \right) e^{-r^2} \\ v(1, r) - v(0, r) = 2e^{-r^2}, -\infty < r < \infty \end{cases} \quad (27)$$

denklemini elde ederiz. Denklemin çözümü için her iki tarafın Fourier dönüşümünü alırsak

$$F\{v(t, r)\} = V(t, s)$$

$$F\{v_{rr}(t, r)\} = -s^2 V(t, s)$$

$$F\{v(t, r)\} = V(t, s)$$

$$F\{v_{rr}(t, r)\} = -s^2 V(t, s)$$

$$F\{v_t(t, r)\} = V_t(t, s)$$

$$F\{D^{\frac{1}{2}}v(t, r)\} = D^{\frac{1}{2}}V(t, s)$$

$$F\{4te^{-r^2} - 8rte^{-r^2}\} = -2tF\left\{\left(e^{-r^2}\right)''\right\} = 2s^2tF\left\{e^{-r^2}\right\}$$

eşitliklerini elde etmiş oluruz. Burada elde ettiğimiz eşitlikleri yerine yazdığımızda problem aşağıdaki şekle dönüşür.

$$\left\{ \begin{array}{l} V_t(t,s) + (s^2 + 1)V(t,s) - D^{\frac{1}{2}}V(t,s) \\ = \left(2 - \frac{4}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}} \right) F\left\{ e^{-r^2} \right\} + 2s^2 t F\left\{ e^{-r^2} \right\} \\ V(1,s) - V(0,s) = 2F\left\{ e^{-r^2} \right\} \end{array} \right. \quad (28)$$

Elde ettiğimiz (28) probleminde

$$V(t,s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(s) t^{\frac{k}{2}} = a_0(s) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(s) t^{\frac{k}{2}} \quad (29)$$

şeklinde çözüm ararsak ve (28) de gerekli türevleri yerine yazdığımızda problem

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2} a_k(s) t^{\frac{k}{2}-1} + (s^2 + 1) \sum_{k=0}^{\infty} a_k(s) t^{\frac{k}{2}} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k(s) \frac{\Gamma(\frac{k}{2}+1)}{\Gamma(\frac{k}{2}+\frac{1}{2})} t^{\frac{k}{2}-\frac{1}{2}} \\ = \left(2 - \frac{4}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}} \right) F\left\{ e^{-r^2} \right\} + 2s^2 t F\left\{ e^{-r^2} \right\} \end{array} \right.$$

elde edilir.

$$F\left\{ e^{-r^2} \right\} = E(s)$$

notasyonunu kullanırsak ve $k = -1, 0, 1, 2, \dots$ değerlerinden

$k = -1$ için;

$$t^{-\frac{1}{2}} : \frac{1}{2} a_1 + a_0 \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0$$

$$a_1 = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} a_0$$

k = 0 için

$$t^0 : a_2 + (s^2 + 1)a_0 - \frac{\sqrt{\pi}}{2} a_1 = 2E(s)$$

$$a_2 + s^2 a_0 + a_0 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} a_0 = 2E(s)$$

$$a_2 = 2E(s) - s^2 a_0$$

k = 1 için

$$t^{\frac{1}{2}} : \frac{3}{2} a_3 + (s^2 + 1)a_1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} a_2 = -\frac{4}{\sqrt{\pi}} E(s)$$

$$\frac{3}{2} a_3 + (s^2 + 1) \frac{4}{\sqrt{\pi}} a_0 - (2E(s) - s^2 a_0 - 3a_0) \frac{2}{\sqrt{\pi}} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} E(s)$$

$$\frac{3\sqrt{\pi}}{2} a_3 + 4s^2 a_0 + 4a_0 - 4E(s) + 2s^2 a_0 + 6a_0 = -4E(s)$$

$$a_3 = -\frac{4s^2 a_0}{\sqrt{\pi}} - \frac{20a_0}{3\sqrt{\pi}}$$

k = 2 için

$$t^1 : 2a_4 + (s^2 + 1)a_2 - \frac{3\sqrt{\pi}}{4} a_3 = 2s^2 E(s)$$

$$2a_4 + (s^2 + 1)(2E(s) - s^2 a_0 - 3a_0) + \left(\frac{4s^2 a_0}{\sqrt{\pi}} + \frac{20a_0}{3\sqrt{\pi}} \right) \frac{3\sqrt{\pi}}{4} = 2s^2 E(s)$$

$$2a_4 + 2s^2 E(s) - s^4 a_0 - 3s^2 a_0 + 3s^2 a_0 + 5a_0 = 2s^2 E(s)$$

$$a_4 = \frac{s^4 a_0 - 5a_0}{2}$$

eşitlikleri elde edilir. (Eşitlik 69) da elde ettiğimiz eşitlikler yerine yazıldığında

$$V(t, s) = a_0 + \frac{4}{\sqrt{\pi}} a_0 t^{\frac{1}{2}} + (2E(s) - s^2 a_0) t^1 \quad (30)$$

$$+ \left(\frac{4s^2 a_0}{\sqrt{\pi}} - \frac{20a_0}{3\sqrt{\pi}} \right) t^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{s^4 a_0 - 5a_0}{2} \right) t^2$$

olarak bulunur. Başlangıç - sınır değerlerini (30) da yerine yazdığımızda

$$V(1, s) - V(0, s)$$

$$= \frac{4}{\sqrt{\pi}} a_0 + (2E(s) - s^2 a_0) + \left(\frac{4s^2 a_0}{\sqrt{\pi}} - \frac{20a_0}{3\sqrt{\pi}} \right) + \left(\frac{s^4 a_0 - 5a_0}{2} \right) = 2E(s)$$

$$a_0 \left(\frac{4}{\sqrt{\pi}} - s^2 + \frac{4s^2}{\sqrt{\pi}} - \frac{20}{3\sqrt{\pi}} + \frac{s^4 - 5}{2} \right) = 0$$

olur ve buradan $a_0 = 0$ bulunur. Bu durumda (30) denkleminde a_0 lar yerine yazıldığında

$$V(t, s) = 2E(s)t$$

olarak elde edilir. Her iki tarafa ters Fourier dönüşümü uygularsak

$$v(t, r) = 2te^{-r^2}$$

şeklinde çözümlenir. Şimdi bu çözümleri kullanarak $p(r)$ i elde edelim. $p(r)$ bulmak için,

$$p(r) = -\frac{d^2 u(1, r)}{dr^2} + u(1, r) + \frac{d^2 v(1, r)}{dr^2} - v(1, r)$$

eşitliğinden faydalanalım. Burada değerler yerine yazıldığında

$$p(r) = (4r^2 - 1)e^{-r^2}$$

şeklinde elde edilir. Şimdi $u(t, r)$ i hesaplayalım.

$$u(t, r) = v(t, r) + u(1, r) - v(1, r)$$

$$u(t, r) = 2te^{-r^2} + 5e^{-r^2} - 2e^{-r^2}$$

$$u(t, r) = (2t + 3)e^{-r^2}$$

şeklinde denklemin çözümüne ulaşırız.

2.3. Parabolik Kesirli Diferansiyel Denklemler İçin Kaynak Tanımlama Problemine Laplace İntegral Dönüşüm Yönteminin Uygulaması

$[0, 1] \times [0, \infty)$ bölgesinde parabolik kesirli diferansiyel denklem için,

$$\begin{cases} u_t(t, r) - u_{rr}(t, r) + u(t, r) + D^{\frac{1}{2}}u(t, r) \\ = \left(2 + 4t + \frac{4}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{1}{2}}\right) \sin r + p(r), 0 < t < 1, 0 \leq r < \infty, \\ u(1, r) = 3\sin r, u(0, r) = \sin r, 0 \leq r < \infty, \\ u(t, 0) = 0, u_r(t, 0) = 2t + 3, 0 < t < 1 \end{cases}$$

Laplace dönüşüm yönteminden faydalanarak çözüme ulaşalım. Problemimizi öncelikle

$$u(t, r) = v(t, r) + w(t, r) \tag{31}$$

şeklinde iki parçaya ayıralım. $v(t, r)$ yardımcı fonksiyonu için

$$\begin{cases} v_t(t, r) - v_{rr}(t, r) + v(t, r) + D^{\frac{1}{2}}v(t, r) \\ = \left(2 + 4t + \frac{4}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{1}{2}}\right) \sin r \\ v(1, r) - v(0, r) = 2\sin r \\ v(t, 0) = 0, v_r(t, 0) = 2t \end{cases} \tag{32}$$

problemini yazarız. (32) probleminin çözümü için her iki tarafın Laplace dönüşümünü alırsak

$$L\{v(t,r)\} = V(t,s)$$

$$L\{v_{rr}(t,r)\} = s^2 V(t,s) - sv(t,0) - v_r(t,0)$$

$$L\{v_{rr}(t,r)\} = s^2 V(t,s) - 2t \quad (33)$$

$$L\{v_t(t,r)\} = V_t(t,s)$$

$$L\{D^{\frac{1}{2}}v(t,r)\} = D^{\frac{1}{2}}V(t,s)$$

eşitliklerini elde ederiz ve (33) ü (32) de yerine yazdığımızda problem aşağıdaki şekle dönüşür.

$$\begin{cases} V_t(t,s) - (s^2 - 1)V(t,s) + D^{\frac{1}{2}}V(t,s) \\ = \left(2 + 4t + \frac{4}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{1}{2}}\right) \frac{1}{s^2 + 1} - 2t \end{cases} \quad (34)$$

Problemi çözmek için,

$$V(t,s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(s) t^{\frac{k}{2}} = a_0(s) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(s) t^{\frac{k}{2}} \quad (35)$$

şeklinde alırsak

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2} a_k(s) t^{\frac{k}{2}-1} - (s^2 - 1) \sum_{k=0}^{\infty} a_k(s) t^{\frac{k}{2}} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(s) \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(\frac{k+1}{2})} t^{\frac{k}{2}-\frac{1}{2}} \\ = \left(2 + 4t + \frac{4}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{1}{2}}\right) \frac{1}{s^2 + 1} - 2t \end{cases} \quad (36)$$

şeklinde denklemi yazabiliriz. $k = -1, 0, 1, 2, \dots$ değerleri için (36) denklemi çözümlendiğinde;

$k = -1$ olduğunda

$$t^{-\frac{1}{2}} : \frac{1}{2} a_1 + a_0 \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0$$

$$a_1 = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} a_0$$

$k = 0$ olduğunda

$$t^0 : a_2 - (s^2 - 1)a_0 + \frac{\sqrt{\pi}}{2} a_1 = 2 \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$a_2 - s^2 a_0 + a_0 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} a_0 = 2 \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$a_2 = 2 \frac{1}{s^2 + 1} + s^2 a_0$$

$k = 1$ olduğunda

$$t^{\frac{1}{2}} : \frac{3}{2} a_3 - (s^2 - 1)a_1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} a_2 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$\frac{3}{2} a_3 + (s^2 - 1) \frac{2}{\sqrt{\pi}} a_0 + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{2s^2 a_0}{\sqrt{\pi}} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$\frac{3\sqrt{\pi}}{4} a_3 = -2s^2 a_0 + a_0$$

$$a_3 = (-2s^2 a_0 + a_0) \frac{4}{3\sqrt{\pi}}$$

$k = 2$ olduğunda

$$t^1 : 2a_4 - (s^2 - 1)a_2 + \frac{3\sqrt{\pi}}{4}a_3 = 4\frac{1}{s^2 + 1} - 2$$

$$2a_4 - (s^2 - 1)\left(\frac{2}{s^2 + 1} + s^2a_0\right) - 2s^2a_0 + a_0 = 4\frac{1}{s^2 + 1} - 2$$

$$2a_4 - \frac{2s^2}{s^2 + 1} - s^4a_0 + \frac{2}{s^2 + 1} + s^2a_0 - 2s^2a_0 + a_0 = 4\frac{1}{s^2 + 1} - 2$$

$$a_4 = \frac{s^2 + 1}{s^2 + 1} + \frac{s^4a_0 + s^2a_0 - a_0}{2} - 1$$

$$a_4 = \frac{s^4a_0 + s^2a_0 - a_0}{2}$$

eşitlikleri elde edilir. Eşitlikler (36) da yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} V(t, s) = & a_0 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}a_0t^{\frac{1}{2}} + \left(2\frac{1}{s^2 + 1} + s^2a_0\right)t^1 \\ & - \left(-2s^2a_0 + a_0\right)\frac{4}{3\sqrt{\pi}}t^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{s^4a_0 + s^2a_0 - a_0}{2}\right)t^2 \end{aligned} \quad (37)$$

olduğu görülür. Başlangıç - sınır değerleri (37) de yerine yazılırsa

$$V(1, s) - V(0, s) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}a_0 + \frac{2}{s^2 + 1} + s^2a_0 + \frac{8}{3\sqrt{\pi}}s^2a_0$$

$$-\frac{4}{3\sqrt{\pi}}a_0 + \frac{s^4a_0 + s^2a_0 - a_0}{2} = \frac{2}{s^2 + 1}$$

$$a_0\left(\frac{8}{3\sqrt{\pi}}s^2 - \frac{10}{3\sqrt{\pi}} + s^4 + 2s^2 - 1\right) = 0$$

olacağından dolayı $a_0 = 0$ olarak bulunur ve (37) de yerine yazılırsa

$$V(t, s) = \frac{2}{s^2 + 1} t$$

elde edilir. Her iki tarafa ters Laplace dönüşümü uygularsak denklem,

$$v(t, r) = 2t \sin r$$

şeklinde çözüm elde ederiz. Şimdi bu çözümleri kullanarak $p(r)$ e ulaşmak için

$$p(r) = -\frac{d^2 u(1, r)}{dr^2} + u(1, r) + \frac{d^2 v(1, r)}{dr^2} - v(1, r)$$

eşitliğinden faydalanalım. Buradan,

$$p(r) = 5 \sin r + 5 \sin r - 2 \sin r - 2 \sin r$$

olmak üzere

$$p(r) = 6 \sin r \tag{38}$$

şeklinde elde edilir. $w(t, r)$ i hesaplamak için (38) kullanılarak

$$\begin{cases} w_t(t, r) - w_{rr}(t, r) + w(t, r) + D^{\frac{1}{2}} w(t, r) \\ = 6 \sin r \\ w(1, r) - w(0, r) = 0 \\ w(t, 0) = 0, w_r(t, 0) = 3 \end{cases} \tag{39}$$

denklemini yazılabilir. Burada $w(t, r)$ denklemin r ye bağlı kısım olduğu için t ye göre türevleri 0 sonucunu verir. Bu yüzden denklem

$$-w_{rr}(t, r) + w(t, r) = 6 \sin r \tag{40}$$

olur. (40) da her iki tarafa Laplace dönüşümü uygularsak

$$L\{w_{rr}(t, r)\} = s^2 W(t, s) - s w(t, 0) - w_r(t, 0)$$

$$L\{w_{rr}(t, r)\} = s^2 W(t, s) - 3 \quad (41)$$

$$L\{w(t, r)\} = W(t, s)$$

eşitliklerini elde ederiz. (39) da bu eşitlikler yerine yazıldığında,

$$-s^2 W(t, s) + 3 + W(t, s) = \frac{6}{s^2 + 1}$$

$$(1 - s^2) W(t, s) = \frac{6}{s^2 + 1} - 3$$

$$(1 - s^2) W(t, s) = \frac{6 - 3 - 3s^2}{s^2 + 1}$$

$$(1 - s^2) W(t, s) = \frac{3 - 3s^2}{s^2 + 1}$$

$$W(t, s) = \frac{3}{s^2 + 1} \quad (42)$$

olur. Şimdi (42) de her iki tarafa ters Laplace dönüşümü uygularsak

$$w(t, r) = 3 \sin r \quad (43)$$

olarak bulunur. Buradan bulduğumuz $v(t, r)$ ve $w(t, r)$ değerlerini (31) içerisinde yerine yazarsak

$$u(t, r) = v(t, r) + w(t, r)$$

$$u(t, r) = 2t \sin r + 3 \sin r$$

$$u(t, r) = (2t + 3) \sin r$$

olarak problemin çözümü bulunur.

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

3.1. Fark Şeması

$[\cdot]$ en büyük tamsayı fonksiyonuna ait gösterim olsun

$$l_m = \left[\frac{s_m}{\tau} \right], p_i = \frac{s_m}{\tau} - l_m, \quad m = 1, 2, \dots, k$$

notasyonlarına göre I. mertebeden doğrulukla fark şeması için,

$$\begin{cases} \tau^{-1}(v_k - v_{k-1}) + Av_k = f_k + p, f_k = f(t_k), 1 \leq k \leq N, \\ v_N = \zeta, v_0 - \sum_{m=1}^k \mu_i v_{l_i} = \psi \end{cases} \quad (44)$$

formunu göz önüne alırsak. Bu durumdan hareketle

$$\tau^{-1}(v_k - v_{k-1}) + Av_k = f_k + p, f_k = f(t_k), 1 \leq k \leq N, \quad (45)$$

olarak yazılır. O halde problemin çözümü

$$v_k = R^k v_0 + \sum_{m=1}^k R^{k-m+1} (f_m + p) \tau, 0 \leq k \leq N \quad (46)$$

şeklindedir. Bu çözümde, p bilinmeyendir. (46) eşitliğinde (45) lokal olmayan şartları kullanıldığında

$$R^k v_0 + \sum_{m=1}^k R^{N-m+1} (f_m + p) \tau = \zeta,$$

$$v_0 - \sum_{m=1}^k \mu_m \left(R^{l_m} v_0 + \sum_{n=1}^{l_m} R^{l_m-n+1} (p + f_j) \tau \right) = \psi$$

denklemini elde ederiz. Bu ifadeler için,

$$\sum_{m=1}^N R_m^{N-m+1} \tau = A^{-1}(I - R^N), \quad (47)$$

$$\sum_{m=1}^{l_i} R_m^{l_i-m+1} \tau = A^{-1}(I - R^{l_i}),$$

formüllerini uygularsak v_0 ve $A^{-1}p$ için

$$R^N v_0 + A^{-1}(I - R^{l_i})p = \zeta - \sum_{m=1}^N R_m^{N-m+1} f_m \tau, \quad (48)$$

$$\left(I - \sum_{m=1}^k \mu_m R^{l_m} \right) v_0 - \sum_{m=1}^k \mu_m (I - R^{l_m}) A^{-1} p = \psi + \sum_{m=1}^k \mu_m \sum_{n=1}^{l_i} R^{l_m-n+1} f_n \tau$$

denklem sistemini elde ederiz. Bu sistemin determinant operatörü

$$D_1 = R^N \sum_{m=1}^k \mu_m (I - R^{l_m}) - (I - R^N) \left(I - \sum_{m=1}^k \mu_m R^{l_m} \right)$$

$$D_1 = -(I - R^N)^{-1} \left(I + \sum_{m=1}^k \mu_m (I - R^N)^{-1} (R^N - R^{l_m}) \right)$$

$$D_1 = -(I - R^N)^{-1} T_1$$

şeklindedir. T_1 operatörü sınırlıdır ve Φ_1 in tersi varlığına göre D_1 operatörünün

$D_1^{-1} = -\Phi_1(I - R^N)$ şeklindeki tersi vardır ve sınırlıdır. Buna göre,

$$v_0 = D_1^{-1} \left\{ - \sum_{m=1}^k \mu_m (I - R^{l_m}) \left(\zeta - \sum_{n=1}^N R^{N-n+1} f_n \tau \right) - (I - R^N) \left(\psi + \sum_{m=1}^k \mu_m \sum_{n=1}^{l_m} R^{l_m-n+1} f_n \tau \right) \right\} \quad (49)$$

$$A^{-1}p = D_1^{-1} \left\{ - \left(I - \sum_{m=1}^k \mu_m R^{l_m} \right) \left(\zeta - \sum_{n=1}^N R^{N-n+1} f_n \tau \right) + R^N \left(\psi + \sum_{m=1}^k \mu_m \sum_{n=1}^{l_m} R^{l_m-n+1} f_n \tau \right) \right\}$$

olur. Buradan,

$$\sum_{n=1}^k R^{k-n+1} \tau = A^{-1}(I - R^k)$$

yazılabilir. (46), (47), (48) ve (49) dan

$$\begin{aligned} v_k &= R^k D_1^{-1} \left\{ - \sum_{m=1}^k \mu_m (I - R^{l_m}) \left(\zeta - \sum_{n=1}^N \mu_m R^{N-n+1} \right) - (I - R^N) \left(\psi + \sum_{m=1}^k \mu_m \sum_{n=1}^{l_m} R^{l_m-n+1} f_n \tau \right) \right\} \\ v_k &= R^k D_1^{-1} \left\{ - \sum_{m=1}^k \mu_m (I - R^{l_m}) \left(\zeta - \sum_{n=1}^N \mu_m R^{N-n+1} \right) - (I - R^N) \left(\psi + \sum_{m=1}^k \mu_m \sum_{n=1}^{l_m} R^{l_m-n+1} f_n \tau \right) \right\} \\ &+ A^{-1}(I - R^k) A D_1^{-1} \left\{ - \left(I - \sum_{m=1}^k \mu_m R^{l_m} \right) \left(\zeta - \sum_{n=1}^N R^{N-n+1} f_n \tau \right) + R^N \left(\psi + \sum_{m=1}^k \mu_m \sum_{n=1}^{l_m} R^{l_m-n+1} f_n \tau \right) \right\} \\ &+ \sum_{n=1}^k R^{k-n+1} f_n \tau, 1 \leq k \leq N \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

3.2. Sayısal Sonuçlar

$$\left\{ \begin{aligned} u_t(t, r) &= u_{rr}(t, r) - u(t, r) - D^{\frac{1}{2}} u(t, r) + p(r) + f(t, r), \\ f(t, r) &= \left(2t^3 + 5t^2 + 2t + 2 + \frac{16}{5\sqrt{\pi}} t^{\frac{5}{2}} + \frac{8}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}} \right) \sin r, \\ 0 &\leq t \leq 1, 0 < r < \pi \\ u(0, r) &= 0, u(\lambda, r) = (\lambda^3 + \lambda^2 + 1) \sin r, \\ u(t, 0) &= u(t, \pi) = 0, 0 \leq t \leq 1 \end{aligned} \right. \quad (50)$$

problemini

$$u(t, r) = v(t, r) + w(t, r), \quad (51)$$

şeklinde ayırılım.

$v(t, r)$ için;

$$\begin{cases} v_t(t, r) = v_{rr}(t, r) - v(t, r) - D^{\frac{1}{2}}v(t, r) + f(t, r), \\ 0 \leq t \leq 1, 0 < r < \pi \\ v(0, r) - v(\lambda(r)) = u(0, r) - u(\lambda(r)) = -(\lambda^3 + \lambda^2) \sin r, 0 \leq r \leq \pi \\ v(t, 0) = v(t, \pi) = 0, 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$w(t, r)$ için;

$$\begin{cases} w_t(t, r) = w_{rr}(t, r) - w(t, r) - D^{\frac{1}{2}}w(t, r) + p(r), \\ 0 \leq t \leq 1, 0 < r < \pi \\ w(0, r) - w(\lambda(r)) = 0, 0 \leq r \leq \pi \\ w(t, 0) = w(t, \pi) = 0, 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

problemlerini elde ederiz. $u(t, r)$ için;

$$\frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} = \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} - u_n^k - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{q=1}^k \frac{\Gamma(k-q-\alpha+1)}{(k-q)!} \frac{u_n^q - u_n^{q-1}}{\tau^\alpha}$$

$$+ p_n + f(t_k, r_n),$$

(52)

$$\frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} = \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} - u_n^k - \frac{1}{\tau^\alpha} u_n^k - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{q=1}^{k-1} \frac{\Gamma(k-q-\alpha+1)}{(k-q)!} \frac{u_n^q}{\tau^\alpha}$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{q=2}^k \frac{\Gamma(k-q-\alpha+1)}{(k-q)!} \frac{u_n^{q-1}}{\tau^\alpha} + u_n^0 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\Gamma(k-\alpha)}{(k-1)!} \frac{1}{\tau^\alpha} + p_n + f(t_k, r_n),$$

$$u_n^0 = 0, u_n^l = (\lambda^3 + \lambda^2) \sin r_n, 0 \leq n \leq M$$

$$u_0^k = 0, u_M^k = 0, 0 \leq t \leq 1$$

fark şeması ve $v(t, r)$ için;

$$v_t(t, r) = v_{rr}(t, r) - v(t, r) - D^{\frac{1}{2}}v(t, r) + f(t, r),$$

$$0 \leq t \leq 1, 0 < r < \pi$$

$$v(0, r) - v(\lambda, r) = u(0, r) - u(\lambda, r) = -(\lambda^3 + \lambda^2) \sin r, 0 \leq r \leq \pi$$

$$v(t, 0) = v(t, \pi) = 0, 0 \leq t \leq 1$$

fark şeması

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{v_n^k - v_n^{k-1}}{\tau} = \frac{v_{n+1}^k - 2v_n^k + v_{n-1}^k}{h^2} - v_n^k - \frac{1}{\Gamma(l-\alpha)} \sum_{q=1}^k \frac{\Gamma(k-q-\alpha+1)}{(k-q)!} \frac{v_n^q - v_n^{q-1}}{\tau^\alpha} \\ + f(t_k, r_n), 0 \leq k \leq N, 0 \leq n \leq M \\ v_n^0 - v_n^l = u_n^0 - u_n^l = -(\lambda^3 + \lambda^2) \sin r_n, 0 \leq n \leq M \\ v_0^k = 0, v_M^k = 0, 0 \leq k \leq N \end{array} \right.$$

şeklindedir. Fark şemasının ilk denklemini

$$\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau^\alpha} + \frac{2}{h^2} + 1 \right) v_n^k + \left(-\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau^\alpha} \right) v_n^{k-1} + \frac{1}{\Gamma(l-\alpha)} \sum_{q=1}^{k-1} \frac{\Gamma(k-q-\alpha+1)}{(k-q)!} \frac{v_n^m}{\tau^\alpha}$$

$$- \frac{1}{\Gamma(l-\alpha)} \sum_{q=1}^{k-1} \frac{\Gamma(k-q-\alpha+1)}{(k-q)!} \frac{v_n^{q-1}}{\tau^\alpha} - \frac{1}{h^2} v_{n+1}^k - \frac{1}{h^2} v_{n-1}^k = f(t_k, r_n)$$

şeklinde yazabiliriz. Daha sonra 2. toplam indisinde $m \leq 1$ yerine l alırsak

$$\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau^\alpha} + \frac{2}{h^2} + 1 \right) v_n^k + \left(-\frac{1}{\tau} + \frac{2-\alpha}{\tau^\alpha} \right) v_n^{k-1} + \frac{1}{\Gamma(l-\alpha)} \sum_{q=1}^{k-1} \frac{\Gamma(k-q-\alpha+1)}{(k-q)!} \frac{v_n^q}{\tau^\alpha}$$

$$- \frac{1}{\Gamma(l-\alpha)} \sum_{q=0}^{k-2} \frac{\Gamma(k-q-\alpha)}{(k-q-1)!} \frac{v_n^q}{\tau^\alpha} - \frac{1}{h^2} v_{n+1}^k - \frac{1}{h^2} v_{n-1}^k = f(t_k, r_n)$$

olur. Şimdi bunu,

$$\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau^\alpha} + \frac{2}{h^2} + 1 \right) v_n^k + \left(-\frac{1}{\tau} + \frac{2-\alpha}{\tau^\alpha} \right) v_n^{k-1}$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(l-\alpha)} \sum_{q=1}^{k-2} \left(\frac{\Gamma(k-q-\alpha+1)}{(k-q)!} - \frac{\Gamma(k-q-\alpha)}{(k-q-1)!} \right) \frac{v_n^q}{\tau^\alpha}$$

$$- \frac{1}{\Gamma(l-\alpha)} \frac{\Gamma(k-\alpha)}{(k-1)!} \frac{v_n^0}{\tau^\alpha} - \frac{1}{h^2} v_{n+1}^k - \frac{1}{h^2} v_{n-1}^k = f(t_k, r_n)$$

olarak yazabiliriz. Sonuçta fark şeması

$$\left\{ \begin{aligned}
& \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau^\alpha} + \frac{2}{h^2} + 1 \right) v_n^k + \left(-\frac{1}{\tau} + \frac{2-\alpha}{\tau^\alpha} \right) v_n^{k-1} \\
& + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{q=1}^{k-2} \left(\frac{\Gamma(k-q-\alpha+1)}{(k-q)!} - \frac{\Gamma(k-q-\alpha)}{(k-q-1)!} \right) \frac{v_n^q}{\tau^\alpha} \\
& - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\Gamma(k-\alpha)}{(k-1)!} \frac{v_n^0}{\tau^\alpha} - \frac{1}{h^2} v_{n+1}^k - \frac{1}{h^2} v_{n-1}^k = f(t_k, r_n) \\
& 0 \leq k \leq N, 0 \leq n \leq M \\
& v_n^0 - v_n^l = u_n^0 - u_n^l = -(\lambda^3 + \lambda^2) \sin r_n, 0 \leq n \leq M \\
& v_0^k = 0, v_M^k = 0, 0 \leq k \leq N
\end{aligned} \right.$$

formunda yazılabilir.

$$b_{k,0} = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\tau^\alpha} \frac{\Gamma(k-\alpha)}{(k-1)!}$$

$$b_{k,q} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\tau^\alpha} \left(\frac{\Gamma(k-q-\alpha+1)}{(k-q)!} - \frac{\Gamma(k-q-\alpha)}{(k-q-1)!} \right), \quad q=1, k-2,$$

$$b_{k,k-1} = -\frac{1}{\tau} + \frac{2-\alpha}{\tau^\alpha},$$

$$b_{k,k} = \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau^\alpha} + \frac{2}{h^2} + 1, a = -\frac{1}{h^2},$$

$$b_{k,0} \quad b_{k,1} \quad b_{k,2} \quad \cdots \quad b_{k,k-1} \quad b_{k,k} \quad 0 \quad \cdots$$

$$av_{n+1}^k + av_{n-1}^k + b_{k,0}v_n^0 + b_{k,1}v_n^1 + \dots b_{k,q}v_n^q + \dots + b_{k,k}v_n^k + 0 + \dots + 0 = f(t_k, r_n)$$

$$, v_n = \begin{bmatrix} v_n^0 \\ v_n^1 \\ \vdots \\ v_n^q \\ \vdots \\ v_n^N \end{bmatrix}$$

$$f(t_k, x_n) = \left(2t_k^3 + 5t_k^2 + 2t_k + 2 + \frac{16}{5\sqrt{\pi}} t_k^{\frac{5}{2}} + \frac{8}{3\sqrt{\pi}} t_k^{\frac{3}{2}} \right) \sin x_n,$$

$$1 \leq k \leq N, 1 \leq n \leq M-1, Mh = \pi, N\tau = 1,$$

$$v_n^0 - v_n^l = -(\lambda^3 + \lambda^2) \sin x_n, 0 \leq n \leq M$$

$$v_0^k = 0, v_M^k = 0, 0 \leq k \leq N$$

notasyonları kullanılarak fark şeması

$$A v_{n+1} + B v_n + C v_{n-1} = R \theta_n, n=1,...,M-1,$$

$$v_0 = \overset{\leftrightarrow}{0}, v_M = \overset{\leftrightarrow}{0},$$

matris formunda yazılabilir. (ma) ifadesindeki $\bullet_n$ sütun matrisi A, B, C 'ler ise kare matrislerdir.

Yani bu matrisler;

$$A = C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & a & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{N1} & b_{N2} & b_{N3} & \cdots & b_{N,N-1} & b_{N,N} & 0 \\ b_{N+1,1} & b_{N+1,2} & b_{N+1,3} & \cdots & b_{N+1,N-1} & b_{N+1,N} & b_{N+1,N+1} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

$$p(r) = -u_{rr}(\lambda, r) + u(\lambda, r) + v_{rr}(\lambda, r) - v(\lambda, r)$$

olduğuna göre

$$p(r_n) = -\frac{u_{n+1}^l - 2u_n^l + u_{n-1}^l}{h^2} + u_n^l + \frac{v_{n+1}^l - 2v_n^l + v_{n-1}^l}{h^2} - v_n^l$$

şeklinde yazılır. problemin sayısal çözümünü bulmak için 3 adımdan oluşan algoritma kullanacağız. Algoritmanın 1. adımında (ma) fark şemasının çözümü bulunur 2. adımda $p(r_n)$ ler (pn) formülü ile hesaplanır. Daha sonra 3. adımda

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(-\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau^\alpha} + \frac{2}{h^2} + 1 \right) w_n^k + \left(\frac{1}{\tau} - \frac{(2-\alpha)}{\tau^\alpha} \right) w_n^{k-1} \\ & - \frac{1}{\Gamma(l-\alpha)} \sum_{q=1}^{k-2} \left(\frac{\Gamma(k-q-\alpha+1)}{(k-q)!} - \frac{\Gamma(k-q-\alpha)}{(k-q-1)!} \right) \frac{w_n^q}{\tau^\alpha} \\ & + \frac{1}{\Gamma(l-\alpha)} \frac{\Gamma(k-\alpha)}{(k-1)!} \frac{w_n^0}{\tau^\alpha} - \frac{1}{h^2} w_{n+1}^k - \frac{1}{h^2} w_{n-1}^k = p(r_n), \\ & 0 \leq k \leq N, 0 \leq n \leq M \\ & w_n^0 - w_n^l = 0, 0 \leq n \leq M \\ & w_0^k = 0, w_M^k = 0, 0 \leq k \leq N \end{aligned} \right.$$

fark şemasının çözümü bulunur.

(N,M) nin farklı değerleri için Tablo 1' de ki mevcut hatalar

$$Eu_M^N = \max_{1 \leq k \leq N-1} \left(\sum_{n=1}^{M-1} (u(t_n, r_n) - u_n^k)^2 h \right)^{\frac{1}{2}}$$

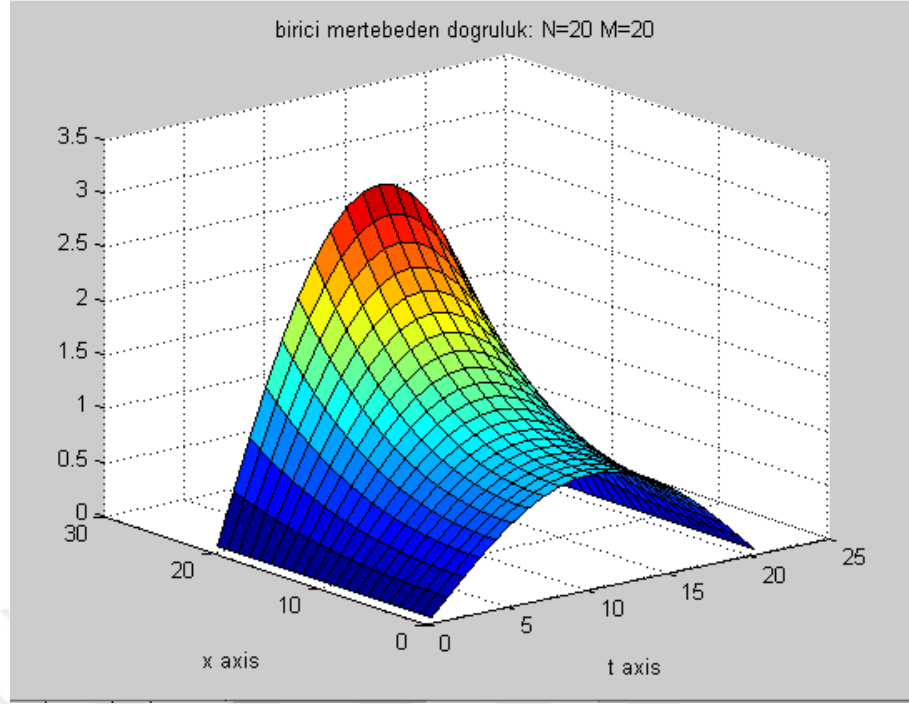
normuyla hesaplanır.

Tablo 1. (50) BMDFŞ' na ait hata analizi

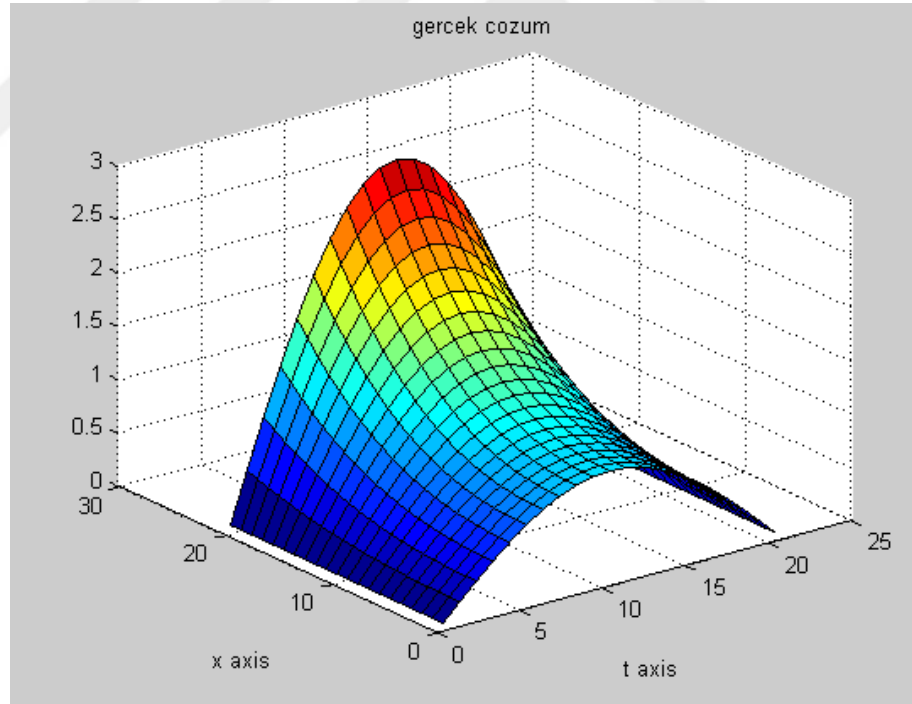
Hata/(N,M)	(10,10)	(20,20)	(40,40)	(80,80)	(160,160)
Eu_M^N	0.064627	0,04569819	0,032314	0,022849	0,016157
Ev_M^N	0,07355	0,052006997	0,036775	0,026003	0,018387
Ep_M^N	0,06985	0,049394237	0,034927	0,024697	0,017464

Tablo 1.' den hareketle N ve M değerlerini 2 katına çıkardığımızda hata değerlerinin yaklaşık olarak $\frac{1}{2^\alpha}$ katı olduğunu gördük. ($\alpha = \frac{1}{2}$ için)

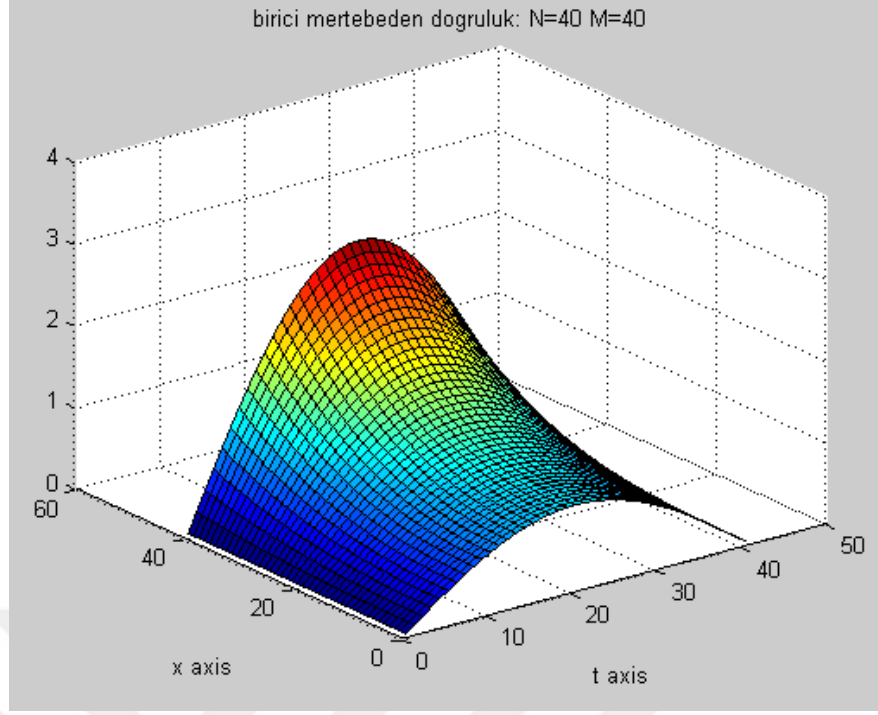
Tablodaki N ve M değerleri kullanılarak, (50) e ait yaklaşık çözüm grafiğini ve (50) probleminin gerçek çözüm grafiğini verilen farklı değerlere göre sırasıyla, Şekil 1., Şekil 2., Şekil 3., de gösterilmiştir.



Şekil 1. $N=20$, $M=20$ için (50) BMDFŞ' nin yaklaşık çözümünün grafiği



Şekil 2. $N=20$, $M=20$ değerleri için (50) probleminin gerçek çözümüne ait grafiği



Şekil 3. $N=40$, $M=40$ değerleri için (50) BMDFŞ' nin yaklaşık çözüm grafiği

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

1) Kesirli parabolik denklem için $[0,1] \times [0, \pi]$ dikdörtgende

$$\begin{cases} \frac{\partial \mu(t,r)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mu(t,r)}{\partial r^2} + \mu(t,r) + D^{\frac{1}{2}} \mu(t,r) \\ = p(r) + f(t,r), 0 < t < 1, 0 < r < \pi \\ \mu(t,0) = 0, \mu(t,\pi) = 0, 0 < t < 1 \\ \mu(0,r) = \varphi(r), \mu(1,r) = \varpi(r), 0 \leq r \leq \pi \end{cases}$$

şeklindeki kaynak belirleme sınır değer problemine Fourier serileri yöntemi kullanıldı ve problemin çözüm algoritması verildi.

2) Kesirli parabolik denklem için $[0,1] \times (-\infty, \infty)$ alanında

$$\begin{cases} \mu_t(t,r) - \mu_{rr}(t,r) + \mu(t,r) - D^{\frac{1}{2}} \mu(t,r) \\ = f(t,r) + p(r), 0 < t < 1, -\infty < r < \infty, \\ \mu(1,r) = \xi(r), \mu(0,r) = \theta(r) \end{cases}$$

probleminin Fourier integral dönüşüm yöntemi yardımıyla çözüm algoritması verilerek, çözümlendi.

3) Kesirli parabolik denklem için $[0,1] \times [0, \infty)$ alanında

$$\begin{cases} u_t(t,r) - u_{rr}(t,r) + u(t,r) + D^{\frac{1}{2}}u(t,r) \\ = f(t,r) + p(r), 0 < t < 1, 0 \leq r < \infty, \\ u(1,r) = \varphi(r), u(0,r) = \psi(r), 0 \leq r < \infty, \\ u(t,0) = \mu(t), u_r(t,0) = \nu(t), 0 < t < 1 \end{cases}$$

şeklinde verilen sınır değer probleminin çözümü için Laplace dönüşüm yöntemi uygulanarak çözüm algoritması verildi.

4)

$$\begin{cases} \frac{\partial \mu(t,r)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mu(t,r)}{\partial r^2} + \mu(t,r) - D^{\frac{1}{2}}\mu(t,r) \\ = p(r) + f(t,r), 0 \leq t \leq 1, 0 < r < \pi \\ \mu(0,r) = \xi(r), \mu(\lambda,r) = \theta(r), 0 \leq r \leq \pi \\ u(t,0) = 0, u(t,\pi) = 0, 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde verilen kesir türevli parabolik denklemlerde kaynak belirleme probleminin yaklaşık çözümünü bulmak için;

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} = \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} - u_n^k + D_{\tau}^{\frac{1}{2}} u_n^k + p_n + f(t_k, r_n), \\ 0 \leq k \leq N, 0 \leq n \leq M, \\ u_n^0 = \varphi(r_n), u_n^s = \psi(r_n), 0 \leq n \leq M \\ u_0^k = 0, u_M^k = 0, 0 \leq k \leq N \end{array} \right.$$

birinci mertebeden doğruluk fark şeması incelendi.

Araştırılan problemlerde kesirli türev Caputo türevidir. Sonuçlarımız farklı sınır koşullarındaki kesirli türevli parabolik kısmi diferansiyel denklem muhteva eden modelleri yorumlamaya katkı sağlayacaktır.

Kısmi türevli parabolik denklemlerde Drichlet koşullu sınır değer problemlerinin çözümü için algoritmalar sunulmuştur.

Ayrıca tezde elde edilecek sonuçlar farklı bilimsel alanlarda modelleme işlemlerinde uygulanabilir.

KAYNAKÇA

- Amirali, G. ve Duru, H. (2002). Nümerik analiz. Pegem A yayıncılık, Ankara, 371s.
- Ashyralyev, A. (2007). Fractional spaces generated by the positive differential and difference operators in a Banach space. In K. Tas, D. Baleanu, & J. A. T. Machado (Eds.), Proceedings of the Conference Mathematical Methods in Engineering (ss. 13-22). Springer, Netherlands.
- Ashyralyev, A. (2009). A note on fractional derivatives and fractional powers of operators. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 357(1), 232-236.
- Ashyralyev, C. (2020). Stability of Rothe difference scheme for the reverse parabolic problem with integral boundary condition. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 43, 5369-5379.
- Ashyralyev, C. and Gönenç, A. (2020). Numerical solution of the nonlocal reverse parabolic problem with second kind boundary and integral conditions. AIP Conference Proceedings.
- Ashyralyev, C. and Akkan, P. (2020). Source identification problem for a parabolic equation with multipoint nonlocal boundary condition. Numerical Functional Analysis and Optimization. doi: 10.1080/01630563.2020.1802748.
- Bangan, S. and Zakari, M. (2020). Analytical approximation solution of system of pseudo-parabolic fractional equations using a modified double Laplace decomposition method. International Journal of Numerical Methods and Applications, 19(2), 167-190.
- Cakir, Z. (2012). Stability of difference schemes for fractional parabolic PDE with the Dirichlet-Neumann conditions. Abstract and Applied Analysis, 13 pages.
- Cannon, J. and Yin, H.-M. (1990). Numerical solutions of some parabolic inverse problems. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2, 177-191.
- Caputo, M. (1967). Linear models of dissipation whose q is almost frequency independent II. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 13, 529-539.
- Dyke, P.P.G. (2001). Fourier transforms. In: An introduction to Laplace transforms and Fourier series.

- Eser, D. and Kirdar, D. (2007). Some integral transforms and their applications. Master of science thesis, Department of Mathematics, Eskişehir Osmangazi University, Vol. 2.
- Gorenflo, R. and Mainardi, F. (1997). Fractional Calculus: Integral and differential equations of fractional order. In A. Carpinteri & F. Mainardi (Eds.), *Fractals and fractional calculus in continuum mechanics* (ss. 223-276). Springer-Verlag, New York.
- Isakov, V. (1998). Inverse problems for partial differential equations. *Applied Mathematical Sciences*, 127, Springer.
- Joaquin, Q. M. and Santos, B. Y. (2011). An explicit difference method for solving fractional diffusion and diffusion-wave equations in the Caputo form. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 6, Article Number: 021014.
- Kilbas, A. Sristava, H. and Trujillo, J. (1993). *Theory and applications of fractional differential equations*, North-Holland mathematics studies, 2006.
- Kimura, T. and Suzuki, T. (Year not provided). A parabolic inverse problem arising in a mathematical model for chromatography. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 53, 1747–1761.
- Lascarides, C. G. and Maddox, I. J. (1970). Matrix transformations between some classes of sequences. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 68, 99-104.
- Murio, D. and Meja, C. (2008). Generalized time fractional IHCP with Caputo fractional derivatives. In *Proceedings of the 6th International Conference on Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice*, Dourdan (Paris), 15-19 June, Vol. 135, pp. 1-8, *Journal of Physics: Conference Series*, France.
- Podlubny, I. (1999). *Fractional differential equations*, vol. 198 of *Mathematics in science and engineering*. Academic Press, San Diego, California, USA.
- Prilepko, A. and Kostin, A. (1992a). On certain inverse problems for parabolic equations with final and integral observation. *Matematicheskii Sbornik*, 183(4), 49-68.
- Prilepko, A. and Kostin, A. (1992b). Some inverse problems for parabolic equations with final and integral observation. *Mat. Sb.*, 183, 49-68.

- Samko, S. Kilbas, A. and Marichev, O. (1993). Fractional integrals and derivatives. Gordon and Breach, Yverdon, Switzerland.
- Singh, J. Gupta, P. K. and Rai, K. (2011). Solution of fractional bioheat equations by finite difference method and HPM. Mathematical and Computer Modelling, 54, 2316-2325.
- Sneddon, I. N. (1972). The use of integral transformations. New York, McGraw Hill.
- Serov, V. (2017). Fourier series, Fourier transform and their applications to mathematical physics. Applied Mathematical Sciences, 197, DOI: 10.1007/978-3-319-65262-7 2.
- Zhang, Y. (2011). Finite difference approximations for space-time fractional partial differential equation. Journal of Numerical Mathematics, 17(4), 319-326.
- Zhang, Y. and Xu, X. (2011). Inverse source problem for a fractional diffusion equation. Inverse Problems, 27, 1-12.

ÖZGEÇMİŞ

Lise öğrenimini Gümüşhane Mareşal Çakmak Anadolu Öğretmen Lisesinde tamamladı, ardından üniversite öğrenimini 2004 yılında girdiği Ankara Gazi Üniversitesi, Gazi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümünde tamamladı. 2013 de MEB’ de matematik öğretmeni olarak başladığı kadrosunda görevine devam etmektedir.

