



T.C.

**BATMAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

**PARABOLİK TİPTEN BİR DENKLEM SİSTEMİNİN
ÇÖZÜMLERİNİN ÜSTEL BÜYÜMESİ**

Muhteşem DEMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**Ekim-2023
BATMAN
Her Hakkı Saklıdır**

TEZ KABUL VE ONAYI

Doç. Dr. Veyis TURUT danışmanlığında **Muhteşem Demir** tarafından hazırlanan “**Parabolik Tipten Bir Denklem Sisteminin Çözümlerinin Üstel Büyümesi**” adlı tez çalışması **27/10/2023** tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Batman Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Başkan

Prof. Dr. Zehra YÜCEDAĞ

.....

Danışman

Doç. Dr. Veyis TURUT

.....

Üye

Doç. Dr. Hasan DALMAN

.....

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr Osman PAKMA

Prof. Dr. Erhan PİŞKİN bu tez çalışmasının ikinci danışmanıdır.

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Muhteşem DEMİR

Tarih:

ÖZET

YÜKSEK LİSANS

PARABOLİK TİPTEN BİR DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN ÜSTEL BÜYÜMESİ

Muhteşem DEMİR

**BATMAN ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Danışman: Doç. Dr. Veyis TURUT

2023, 43 Sayfa

Jüri

**Doç. Dr. Veyis TURUT
Prof. Dr. Zehra YÜCEDAĞ
Doç. Dr. Hasan DALMAN**

Bu tezin ilk bölümünde çözümlerin üstel büyümesi ile ilgili bazı temel bilgiler ve örnekler verilmiştir. İkinci bölümde tezin esas kısmını oluşturan problemler tanıtılmıştır. Daha sonra literatür bilgisi verilmiştir. Üçüncü bölümde sonraki bölümde kullanılacak olan bazı temel tanım, teorem ve eşitsizlikler verilmiştir. Dördüncü bölümün birinci kısmında parabolik tipten viskoelastik Kirchhoff denklem sisteminin, ikinci kısmında ise parabolik tipten m -Laplasyan ve Kirchhoff terimli denkleminin çözümlerinin üstel büyümesi çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Üstel büyüme, Kirchhoff denklemi, m -Laplasyan denklemi, Viskoelastik tipli denklem.

ABSTRACT

MS THESIS

**EXPONENTIAL GROWTH OF SOLUTION FOR A SYSTEM OF A
PARABOLIC TYPE EQUATION**

Muhteşem DEMİR

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
BATMAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE**

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Veyis TURUT

2023, 46 Pages

Jury

**Assoc. Prof. Dr. Veyis TURUT
Prof. Dr. Zehra YÜCEDAĞ
Assoc. Prof. Dr. Hasan DALMAN**

The first section of this thesis provides fundamental information and examples concerning the exponential growth of solutions. In the second chapter, the problems that form the main part of the thesis are introduced. Later, literature information is given. In the third chapter, some fundamental definitions, theorems and inequalities that will be used in the next chapter are given. In the first part of the fourth section, solutions of the parabolic type viscoelastic Kirchhoff equation system have been studied, while in the second part, solutions with exponential growth for the parabolic type m-Laplacian equation with Kirchhoff term have been investigated.

Keywords: Exponential growth, Kirchhoff equation, m-Laplacian equation, Viscoelastic type equation.

ÖNSÖZ

Yapmış olduğum Yüksek Lisans tez çalışmasında engin bilgilerinden faydalandığım, tecrübelerinden istifade ettiğim ve istifade ederken göstermiş olduğu hoşgörü ve sabrı benden esirgemeyen, insani ve ahlaki değerleri ile de örnek edindiğim ve yanında çalışmaktan onur duyduğum değerli danışman hocalarım Prof. Dr. Erhan PİŞKİN ve Doç. Dr. Veyis TURUT'a teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Muhteşem DEMİR
BATMAN-2023



İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	2
3. MATERYAL VE YÖNTEM	4
3.1. Lebesgue Uzayı.....	4
3.2. Sobolev Uzayı.....	5
3.3. Eşitsizlikler	6
4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA.....	8
4.1. Parabolik Tipten Viskoelastik Kirchhoff Denklem Sisteminin Çözümlerinin Üstel Büyümesi.....	8
4.2. Parabolik Tipten m- Laplasyan ve Kirchhoff Terimli Denklemin Çözümünün Üstel Büyümesi.....	25
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	32
KAYNAKLAR	33
ÖZGEÇMİŞ	35

SİMGELER VE KISALTMALAR

R^n	: n boyutlu Euclid uzayı
Ω	: R^n de sınırlı bir bölge
$\partial\Omega$	: Ω bölgesinin sınırı
R^n	: n boyutlu Euclid uzayı
$C(\Omega)$	: Sürekli fonksiyonlar uzayı
$W^{m,p}(\Omega)$	: Sobolev uzayı
$L^p(\Omega)$	: p . mertebeden Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$H^m(\Omega)$	: Hilbert uzayı
Δ	: Laplace operatörü
∇	: Nabla operatörü (Gradyent)

1. GİRİŞ

Fizik, kimya, biyoloji, tıp, mühendislik,... gibi pek çok alanda ortaya çıkan denklemler diferansiyel denklem veya diferansiyel denklem sistemleri olarak modellenmektedir. Kısmi diferansiyel denklemler hiperbolik, parabolik ve eliptik tipten denklemler şeklinde sınıflandırılır. Bağımlı değişkenlerinden bir tanesi zaman değişkeni olan kısmi türevli denklemlere özel olarak evolüsyon denklemler denir. Dolayısıyla hiperbolik ve parabolik tipten denklemler birer evolüsyon denklemdir. Örneğin; dalgaların yayılması, ısı akışı, roketlerin hareketleri, bulaşıcı hastalıkların yayılması,... gibi olayların matematiksel modellenmesi birer evolüsyon denklemdir. Bu nedenle bu denklemlerin çözümlerinin bulunması önemlidir. Aslında çoğu zaman çözümün davranışının incelenmesi açık çözümü bulmaktan daha önemli olabilmektedir. Çözüm var mıdır, tek midir, patlama meydana gelir mi, asimptotik davranışı nasıldır, kararlı mıdır,... gibi sorular önemlidir (Pişkin 2021). Bu sebeple denklemlerin çözümlerinin üstel büyümesi ile ilgili bu tez çalışması yapılmıştır.

Özellikle çözümlerin üstel büyümesi, patlamanın özel bir durumudur. Burada zaman sonsuza giderken çözümlerin de sonsuza ıraksama durumu ele alınır. Bu durum aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$E(t) \text{ enerji fonksiyoneli olmak üzere } \forall t > 0 \text{ ve } c_1, c_2 > 0 \text{ için}$$

$$E(t) \geq c_1 e^{c_2 t}$$

eşitsizliği elde edilebilirse $t \rightarrow \infty$ için $E(t) \rightarrow \infty$ olur.

Şimdi bu duruma basit örnekler verelim:

Örnek 1: $u = u(t)$ için

$$\begin{cases} u' = 4u \\ u(0) = 2 \end{cases}$$

başlangıç değer probleminin çözümü $u(t) = 2e^{4t}$ olur. Burada $t \rightarrow \infty$ için $u(t) \rightarrow \infty$ olacağından bu durum çözümün üstel büyümesidir.

Örnek 2: $u = u(x, t)$ için

$$\begin{cases} u_t - 2xu_x = 0 \\ u(x, 0) = 3x \end{cases}$$

başlangıç değer probleminin çözümü $u(x, t) = 3xe^{2t}$ olur. Burada $t \rightarrow \infty$ için $u(x, t) \rightarrow \infty$ olacağından bu durum çözümün üstel büyümesidir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu tezin esas amacı (4.1) kısmında ele alınan parabolik tipten viskoelastik Kirchhoff

$$\begin{cases} u_t - \Delta u_t - M(\|\nabla u\|^2)\Delta u + \int_0^t g(t-\sigma) \Delta u(\sigma) d\sigma + |u|^{p-2}u_t = f_1(u, v), \\ v_t - \Delta v_t - M(\|\nabla v\|^2)\Delta v + \int_0^t h(t-\sigma) \Delta v(\sigma) d\sigma + |v|^{q-2}v_t = f_2(u, v) \end{cases}$$

denkleminin ve (4.2) kısmında ele alınan parabolik tipten m-Laplasyan ve Kirchhoff terimli

$$u_t - \Delta u_t - \operatorname{div}(|\nabla u|^{m-2}\nabla u) - M(\|\nabla u\|^2)\Delta u + |u|^{q-2}u_t = |u|^{p-2}u$$

denklemin çözümünün üstel büyümesi incelemektir.

Polat (2007)

$$u_t - u_{xx} + |u|^{m-2}u_t = |u|^{p-2}u$$

denkleminin çözümünün patlamasına çalıştı.

Korpusov ve Sveshnikov (2008)

$$u_t - \Delta u - \Delta u_t + |u|^{m-2}u_t = u(u - \alpha)(u - \beta)$$

denkleminin çözümünün patlamasına çalıştılar.

Hu, Qi ve Zhang (2014)

$$u_t - \Delta u + \int_0^t g(t-s) \Delta u(s) ds + |u|^{m-2}u_t = |u|^{p-2}u$$

denkleminin çözümünün patlamasına çalıştılar.

Pang ve Qiao (2015)

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + |u|^{m-2}u_t = f_1(u, v), \\ v_t - \Delta v + |v|^{m-2}v_t = f_2(u, v) \end{cases}$$

denkleminin çözümünün patlamasına çalıştılar.

Dang, Hu, Xia ve Zhang (2017)

$$u_t - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds + |u|^{k-2}u_t = |u|^{p-2}u$$

denkleminin çözümünün üstel büyümesine çalıştılar.

Ouaoua ve Maouni (2019)

$$u_t - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) + \omega|u|^{m(x)-2}u_t = b|u|^{r(x)-2}u$$

denkleminin çözümünün patlaması ve üstel büyümesine çalıştılar.

Pişkin ve Ekinci (2019)

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + |u|^{q-2}u_t = f_1(u, v), \\ v_t - \operatorname{div}(|\nabla v|^{m-2}\nabla v) + |v|^{q-2}v_t = f_2(u, v) \end{cases}$$

denkleminin çözümünün patlamasına ve üstel büyümesine çalıştılar.

Ouaoua, Khaldi ve Maouni (2020)

$$u_t - M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \Delta u + |u|^{m-2} u_t = |u|^{r-2}$$

denkleminin kararlılığını çalıştılar.

Pişkin ve Ekinci (2020)

$$u_t - \Delta u_t - M(\|\nabla u\|^2) \Delta u + |u|^{q-2} u_t = |u|^{p-2} u$$

denkleminin çözümünün patlamasına ve üstel büyümesine çalıştılar.

Pişkin ve Ekinci (2021)

$$(1 + |u|^{q-2}) u_t - M(\|\nabla u\|^2) \Delta u + \int_0^t g(t-s) \Delta u(s) ds = f(u)$$

denklemin çözümünün patlamasına ve üstel büyümesine çalıştılar.

Ouaoua ve Boughamsa (2022)

$$\begin{cases} u_t - \Delta u - \Delta u_t + \int_0^t g(t-s) \Delta u(s) ds + |u|^{m-2} u_t = f_1(u, v), \\ v_t - \Delta v - \Delta v_t + \int_0^t h(t-s) \Delta v(s) ds + |v|^{k-2} v_t = f_2(u, v) \end{cases}$$

denklemin çözümünün üstel büyümesine çalıştılar.

Pişkin ve Butakın (2023)

$$u_t + \Delta^2 u - M(\|\nabla u\|^2) \Delta u + |u|^{p(x)-2} u_t = |u|^{q(x)-2} u$$

denkleminin global varlığına ve enerji azalmasına çalıştılar.

Pişkin ve Ekinci (2023)

$$\begin{cases} u_t - M(\|\nabla u\|^2) \Delta u + \int_0^t w_1(t-s) \Delta u(s) ds + |u|^{q-2} u_t = f_1(u, v), \\ v_t - M(\|\nabla v\|^2) \Delta v + \int_0^t w_2(t-s) \Delta v(s) ds + |v|^{q-2} v_t = f_2(u, v) \end{cases}$$

denklemin çözümünün patlamasına ve üstel büyümesine çalıştılar.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, daha sonra gerekli olabilecek bazı uzaylar, tanımlar ve eşitsizlikler yer almaktadır. (Adams ve Fournier, 2003; Brezis, 2011; Evans, 1998; Kesevan, 2003; Pişkin, 2017).

3.1. Lebesgue Uzayı ($L^p(\Omega)$)

Tanım 3.1.1. Ω, R^n de ölçülebilir bir bölge olsun. u ölçülebilir bir fonksiyon ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $|u(x)|^p$ Lebesgue anlamında integrallenebilir ise yani,

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty$$

ise $u(x)$ fonksiyonları p . kuvvetten integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı olarak adlandırılır ve bu sınıf $L^p(\Omega)$ veya L^p ile gösterilir. Bu şartı sağlayan tüm u fonksiyonlarının uzayına L^p Lebesgue uzayı denir. Burada L^p uzayının elemanları $\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty$ şartını sağlayan ölçülebilir fonksiyonların denklik sınıfıdır.

Bu uzaydaki norm

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

şeklinde tanımlanır. $L^p(\Omega)$ uzayı bu norm ile *Banach* uzayıdır.

Tanım 3.1.2. $vol(\Omega) = \int_{\Omega} 1 dx < \infty, 1 \leq p \leq q \leq \infty$ olsun. Bu durumda $u \in L^q(\Omega)$ ise $u \in L^p(\Omega)$ dır ve

$$\|u\|_p \leq c \|u\|_q$$

dır. Yani

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

gömülmesi geçerlidir.

Tanım 3.1.3. $L^2(\Omega)$,

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x) \overline{v(x)} dx$$

iç çarpımına göre *Hilbert* uzayıdır.

Tanım 3.1.4. $-\infty \leq a < b \leq \infty$ olsun. $\|u(\cdot)\|_X \in L^p(a, b)$ şartını sağlayan (a, b) den X e tanımlanmış u fonksiyonlar uzayı $L^p(a, b; X)$ uzayıdır ve bu uzay

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} = \begin{cases} \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \operatorname{ess\,sup}_{t \in (a,b)} \|u(t)\|_X, & p = \infty \end{cases}$$

normu ile *Banach* uzaydır.

Tanım 3.1.5. $[0, T]$ den X e tanımlanmış m . mertebeden sürekli türevli u fonksiyonlar uzayı $C^m([0, T]; X)$ uzayıdır ve

$$\|u\|_{C^m([0,T];X)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \sup \|D^\alpha u(t)\|_X$$

normu ile Banach uzaydır.

3.2. Sobolev Uzayı ($W^{m,p}(\Omega)$)

Tanım 3.2.1. $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ ve α çoklu-indisi verilsin. $\forall \gamma \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega} \gamma v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^\alpha \gamma dx$$

ise $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ fonksiyonuna u nun α . zayıf türevi denir ve $v = D^\alpha u$ şeklinde yazılır.

Tanım 3.2.2. Ω, R^n de bir bölge, $m \in Z^+ \cup \{0\}$ ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere, Sobolev uzayı

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

şeklinde tanımlanır ve bu uzay

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad p = \infty$$

normları ile Banach uzaydır.

$W^{m,p}(\Omega)$ uzayında $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının kapanışı $W_0^{m,p}(\Omega)$ dır.

Burada

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

gömülmesi geçerlidir.

Tanım 3.2.3. $p = 2$ ise $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ ve $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ dır. $H^m(\Omega)$ uzayındaki norm

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

şeklindedir.

Tanım 3.2.4. $H_0^1(\Omega)$ uzayında iç çarpım

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$$

dır ve norm

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}$$

şeklindedir.

Tanım 3.2.6. (Sobolev Gömülme Teoremi). Ω , R^n de koni özelliğine sahip açık bölge, $m \geq 1$ ve $j \geq 0$ şeklindeki tamsayılar ve $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda

(i) $mp > n$

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

dır.

(ii) $mp = n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \quad p \leq q < \infty$$

veya

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad p \leq q < \infty$$

dır. Ayrıca $p = 1$ ise

$$W^{j+m,1}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

dır.

(iii) $mp < n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \quad p \leq q \leq p^*$$

veya

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad p \leq q \leq p^*$$

dır. Burada

$$p^* = \begin{cases} \frac{np}{n-mp}, & n > mp \\ +\infty, & n \leq mp \end{cases}$$

dır. $W^{m,p}$ yerine $W_0^{m,p}$ uzayı alınırsa, Ω bölgesi üzerinde herhangi bir kısıtlama olmaksızın gömülmeler yine de geçerli olur.

3.3. Eşitsizlikler

Lemma 3.3.1. (Cauchy Eşitsizliği). $\varepsilon > 0$ ve $a, b \in R$ olsun. Bu durumda

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2} |a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |b|^2$$

dır.

Lemma 3.3.2. (Young Eşitsizliği). $\varepsilon > 0$, $a, b \geq 0$ ve $p > 1$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}$$

eşitsizliği veya

$$|ab| \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{\frac{-p}{q}} q^{-1}$ dır.

Lemma 3.3.3. (Hölder Eşitsizliği). $1 \leq p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Eğer $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$ olduğunda $uv \in L^1(\Omega)$ ve

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_q$$

dır.

Lemma 3.3.4. (Minkowski Eşitsizliği). $u, v \in L^p(\Omega)$ ve $p \geq 1$ ise

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Lemma 3.3.5. (Green Özdeşliği). $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ ve $v \in C^1(\bar{\Omega})$ için

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u dx$$

dır. Burada n birim vektör ve $\frac{\partial u}{\partial n} = n \cdot \nabla u$ dır.

4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

Bu kısımda (4.1.1) denklem sisteminin ve (4.2.1) denkleminin pozitif başlangıç enerjisi için uygun koşullar altında çözümlerinin üstel büyümesini ispatlayacağız.

4.1. Parabolik Tipten Viskoelastik Kirchhoff Denklem Sisteminin Çözümlerinin Üstel Büyümesi

Bu çalışmada

$$\begin{cases} u_t - \Delta u_t - M(\|\nabla u\|^2)\Delta u + \int_0^t g(t-\sigma)\Delta u(\sigma)d\sigma + |u|^{p-2}u_t = f_1(u, v), & (x, t) \in \Omega \times (0, T) \\ v_t - \Delta v_t - M(\|\nabla v\|^2)\Delta v + \int_0^t h(t-\sigma)\Delta v(\sigma)d\sigma + |v|^{q-2}v_t = f_2(u, v), & (x, t) \in \Omega \times (0, T) \\ u(x, t) = v(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega \\ v(x, 0) = v_0(x), & x \in \Omega \end{cases} \quad (4.1.1)$$

başlangıç sınır değer probleminin çözümlerinin üstel büyümesi çalışılacaktır. Burada $\Omega, R^n (n \geq 1)$ de $\partial\Omega$ düzgün sınıra sahip sınırlı bir bölgedir. $p > 2, q > 2$ sabit sayılardır.

Kabul edelim ki g ve h fonksiyonları sürekli, negatif olmayan ve artmayan

$$\begin{cases} g(s) \geq 0, & 1 - \int_0^t g(s)ds = l > 0 \\ h(s) \geq 0, & 1 - \int_0^t h(s)ds = k > 0 \end{cases} \quad (4.1.2)$$

ve

$$g'(s) \leq 0, h'(s) \leq 0, \forall s > 0$$

fonksiyonlar olsun. Ayrıca $s > 0$ ve $\alpha > 0$ için

$$M(s) = 1 + s^\alpha \quad (4.1.3)$$

olsun.

$f_1(u, v)$ ve $f_2(u, v)$ lineer olmayan fonksiyonlar

$$\begin{cases} f_1(u, v) = |u + v|^{2(r+1)}(u + v) + |u|^r u |v|^{r+2} \\ f_2(u, v) = |u + v|^{2(r+1)}(u + v) + |u|^{r+2} v |v|^r \end{cases} \quad (4.1.4)$$

dır.

Burada r

$$\begin{cases} -1 < r, & n = 1, 2, \\ -1 < r \leq \frac{3-n}{n-2}, & n \geq 3 \end{cases} \quad (4.1.5)$$

koşullarını sağlasın. $\forall (u, v) \in R^2$ için

$$u f_1(u, v) + v f_2(u, v) = 2(r+2)F(u, v)$$

dır. Burada

$$F(u, v) = \frac{1}{2(r+2)} [|u + v|^{2(r+2)} + 2|uv|^{(r+2)}] \quad (4.1.6)$$

ve

$$f_1(u, v) = \frac{\partial F(u, v)}{\partial u}, f_2(u, v) = \frac{\partial F(u, v)}{\partial v}$$

dır.

Lemma 1. (Messaoudi ve Houari 2010): c_0 ve c_1 pozitif sayılar olsun

$$\frac{c_0}{2(r+2)} (|u|^{2(r+2)} + |v|^{2(r+2)}) \leq F(u, v) \leq \frac{c_1}{2(r+2)} (|u|^{2(r+2)} + |v|^{2(r+2)}).$$

Lemma 2. Enerji fonksiyonelimiz artmayandır. Yani her $t \geq 0$ için $E'(t) \leq 0$ dır.

Burada $u, v \in W_0^{1,2}$ için

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) \|\Delta u\|^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t h(s) ds \right) \|\Delta v\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2(\alpha+1)} (\|\nabla u\|^{2(\alpha+1)} + \|\nabla v\|^{2(\alpha+1)}) + \frac{1}{2} [(g \diamond \nabla u)(t) + (h \diamond \nabla u)(t)] \\ &\quad - \int_{\Omega} F(u, v) dx \end{aligned}$$

ve

$$(\theta \diamond \omega)(t) = \int_0^t \theta(t-\sigma) \int_{\Omega} |\omega(t) - \omega(\sigma)|^2 dx d\sigma \quad (4.1.7)$$

dır.

İspat: (4.1.1) sisteminin ilk denklemini u_t , ikinci denklemini v_t ile çarpıp toplanırsa

$$\begin{aligned} u_t f_1(u, v) + v_t f_2(u, v) &= u_t u_t + v_t v_t - u_t \Delta u_t - v_t \Delta v_t \\ &\quad - u_t M(\|\nabla u\|^2) \Delta u - v_t M(\|\nabla v\|^2) \Delta v \\ &\quad + u_t \int_0^t g(t-\sigma) \Delta u(\sigma) d\sigma + v_t \int_0^t h(t-\sigma) \Delta v(\sigma) d\sigma \\ &\quad + u_t |u|^{p-2} u_t + v_t |v|^{q-2} v_t \end{aligned}$$

elde edilir. Elde ettiğimiz yukarıdaki ifadenin Ω bölgesi üzerinde integralini alalım

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_t f_1(u, v) dx + \int_{\Omega} v_t f_2(u, v) dx &= \\ &\underbrace{\int_{\Omega} u_t u_t dx}_{A_1} + \underbrace{\int_{\Omega} v_t v_t dx}_{B_1} - \underbrace{\int_{\Omega} u_t \Delta u_t dx}_{A_2} - \underbrace{\int_{\Omega} v_t \Delta v_t dx}_{B_2} - \underbrace{\int_{\Omega} u_t M(\|\nabla u\|^2) \Delta u dx}_{A_3} - \underbrace{\int_{\Omega} v_t M(\|\nabla v\|^2) \Delta v dx}_{B_3} \\ &\quad + \underbrace{\int_{\Omega} u_t \int_0^t g(t-\sigma) \Delta u(\sigma) d\sigma dx}_{A_4} + \underbrace{\int_{\Omega} v_t \int_0^t h(t-\sigma) \Delta v(\sigma) d\sigma dx}_{B_4} \end{aligned}$$

$$+ \int_{\Omega} u_t |u|^{p-2} u_t dx + \int_{\Omega} v_t |v|^{q-2} v_t dx \quad (4.1.8)$$

dır.

Şimdi bu terimleri hesaplayalım;

A_1 ifadesi

$$\int_{\Omega} |u_t|^2 dx = \|u_t\|^2$$

olur. B_1 ifadesi

$$\int_{\Omega} |v_t|^2 dx = \|v_t\|^2$$

olur. A_2 ifadesi için Green özdeşliği ve sınır koşulları kullanılırsa

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} u_t \Delta u_t dx &= \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u_t dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u_t|^2 dx \\ &= \|\nabla u_t\|^2 \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde B_2 ifadesi için

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} v_t \Delta v_t dx &= \int_{\Omega} \nabla v_t \nabla v_t dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla v_t|^2 dx \\ &= \|\nabla v_t\|^2 \end{aligned}$$

olur. A_3 ifadesi için, Green özdeşliği ve $M(s) = 1 + s^\alpha$ eşitliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} u_t M(\|\nabla u\|^2) \Delta u dx &= - \int_{\Omega} u_t (1 + \|\nabla u\|^{2\alpha}) \Delta u dx \\ &= - \int_{\Omega} u_t \Delta u dx - \int_{\Omega} \|\nabla u\|^{2\alpha} u_t \Delta u dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u dx + \|\nabla u\|^{2\alpha} \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 \right) dx + \|\nabla u\|^{2\alpha} \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 \right) dx \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2(\alpha+1)} \|\nabla u\|^{2(\alpha+1)} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2(\alpha+1)} \|\nabla u\|^{2(\alpha+1)} \right) \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde B_3 ifadesi

$$-\int_{\Omega} v_t M(\|\nabla v\|^2) \Delta v dx = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|\nabla v\|^2 + \frac{1}{2(\alpha+1)} \|\nabla v\|^{2(\alpha+1)} \right)$$

olur. A_4 ifadesi için

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_t \int_0^t g(t-\sigma) \Delta u(\sigma) d\sigma dx &= \int_0^t g(t-\sigma) \int_{\Omega} u_t \Delta u(\sigma) dx d\sigma \\ &= - \int_0^t g(t-\sigma) \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u(\sigma) dx d\sigma \\ &= - \int_0^t g(t-\sigma) \int_{\Omega} \nabla u_t (\nabla u(\sigma) - \nabla u(t) + \nabla u(t)) dx d\sigma \\ &= - \int_0^t g(t-\sigma) \int_{\Omega} \nabla u_t (\nabla u(\sigma) - \nabla u(t)) dx d\sigma \\ &\quad - \int_0^t g(t-\sigma) \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u(t) dx d\sigma \\ &= \int_0^t g(t-\sigma) \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} (\nabla u(\sigma) - \nabla u(t))^2 \right) dx d\sigma \\ &\quad - \int_0^t g(t-\sigma) \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |\nabla u(t)|^2 \right) dx d\sigma \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

olur. Şimdi (4.1.9) eşitliğinin sağ tarafındaki ifadeleri elde edelim:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t g(t-\sigma) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx d\sigma \right) \text{ ve } \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t g(t-\sigma) \int_{\Omega} (\nabla u(\sigma) - \nabla u(t))^2 dx d\sigma \right)$$

terimlerini göz önüne alalım

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t g(t-\sigma) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx d\sigma \right) &= \frac{1}{2} \int_0^t g'(t-\sigma) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx d\sigma \\ &\quad + \int_0^t g(t-\sigma) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) d\sigma \end{aligned}$$

den

$$\begin{aligned} - \int_0^t g(t-\sigma) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) d\sigma &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t g(t-\sigma) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx d\sigma \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^t g'(t-\sigma) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx d\sigma \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

olur. Benzer şekilde B_4 ifadesi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t g(t-\sigma) \int_{\Omega} (\nabla u(\sigma) - \nabla u(t))^2 dx d\sigma \right) &= \frac{1}{2} \int_0^t g'(t-\sigma) \int_{\Omega} (\nabla u(\sigma) - \nabla u(t))^2 dx d\sigma \\ &\quad + \int_0^t g(t-\sigma) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla u(\sigma) - \nabla u(t))^2 dx \right) d\sigma \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \int_0^t g(t-\sigma) \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla u(\sigma) - \nabla u(t))^2 dx d\sigma &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t g(t-\sigma) \int_{\Omega} (\nabla u(\sigma) - \nabla u(t))^2 dx d\sigma \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^t g'(t-\sigma) \int_{\Omega} (\nabla u(\sigma) - \nabla u(t))^2 dx d\sigma \quad (4.1.11) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_t \int_0^t g(t-\sigma) \Delta u(\sigma) d\sigma dx &= \int_0^t g(t-\sigma) \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} (\nabla u(\sigma) - \nabla u(t))^2 dx d\sigma \\ &\quad - \int_0^t g(t-\sigma) \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} |\nabla u(t)|^2 dx d\sigma \end{aligned}$$

olduğundan (4.1.10) ve (4.1.11) ifadelerini toplayalım

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_t \int_0^t g(t-\sigma) \Delta u(\sigma) d\sigma dx &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t g(t-\sigma) \int_{\Omega} (\nabla u(\sigma) - \nabla u(t))^2 dx d\sigma \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^t g'(t-\sigma) \int_{\Omega} (\nabla u(\sigma) - \nabla u(t))^2 dx d\sigma \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t g(t-\sigma) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx d\sigma \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t g'(t-\sigma) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx d\sigma \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\int_{\Omega} v_t \int_0^t h(t-\sigma) \Delta v(\sigma) d\sigma dx$ ifadesi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v_t \int_0^t h(t-\sigma) \Delta v(\sigma) d\sigma dx &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t h(t-\sigma) \int_{\Omega} (\nabla v(\sigma) - \nabla v(t))^2 dx d\sigma \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^t h'(t-\sigma) \int_{\Omega} (\nabla v(\sigma) - \nabla v(t))^2 dx d\sigma \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t h(t-\sigma) \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx d\sigma \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t h'(t-\sigma) \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx d\sigma \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} [u_t f_1(u, v) + v_t f_2(u, v)] dx &= \int_{\Omega} [|u + v|^{2r+3}(u + v) + |u|^{r+1}|v|^{r+1}(vu_t + uv_t)] dx \\
&= \int_{\Omega} [|u + v|^{2r+3}(u + v) + |uv|^{r+1} + (vu_t + uv_t)] dx \\
&= \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2(r+2)} \left(\frac{(u+v)^{2(r+2)} + 2(uv)^{r+2}}{2(r+2)F(u,v)} dx \right) \right] \quad (4.1.12) \\
&= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} F(u, v) dx
\end{aligned}$$

dır. Bulduğumuz eşitlikleri (4.1.8) de yerine yazalım

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\Omega} F(u, v) dx &= \|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + \|\nabla u_t\|^2 + \|\nabla v_t\|^2 \\
&+ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2(\alpha+1)} \|\nabla u\|^{2(\alpha+1)} \right) \\
&+ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|\nabla v\|^2 + \frac{1}{2(\alpha+1)} \|\nabla v\|^{2(\alpha+1)} \right) \\
&+ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t g(t-\sigma) \int_{\Omega} (\nabla u(\sigma) - \nabla u(t))^2 dx d\sigma \right) \\
&+ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t h(t-\sigma) \int_{\Omega} (\nabla v(\sigma) - \nabla v(t))^2 dx d\sigma \right) \\
&- \frac{1}{2} \left(\int_0^t g'(t-\sigma) \int_{\Omega} (\nabla u(\sigma) - \nabla u(t))^2 dx d\sigma \right) \\
&- \frac{1}{2} \left(\int_0^t h'(t-\sigma) \int_{\Omega} (\nabla v(\sigma) - \nabla v(t))^2 dx d\sigma \right) \\
&+ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t g(t-\sigma) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx d\sigma \right) \\
&+ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t h(t-\sigma) \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx d\sigma \right) \\
&- \frac{1}{2} \int_0^t g'(t-\sigma) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx d\sigma \\
&- \frac{1}{2} \int_0^t h'(t-\sigma) \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx d\sigma \\
&+ \int_{\Omega} u_t^2 |u|^{p-2} dx + \int_{\Omega} v_t^2 |v|^{q-2} dx
\end{aligned}$$

olur.

$$(\theta \diamond \omega)(t) = \int_0^t \theta(t - \sigma) \int_{\Omega} |\omega(t) - \omega(\sigma)|^2 dx d\sigma \text{ ifadesi göz önünde alınıp}$$

yukarıdaki eşitliği düzenlersek

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2(\alpha+1)} \|\nabla u\|^{2(\alpha+1)} + \frac{1}{2} \|\nabla v\|^2 + \frac{1}{2(\alpha+1)} \|\nabla v\|^{2(\alpha+1)} + \frac{1}{2} (g \diamond \nabla u)(t) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} (h \diamond \nabla v)(t) - \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 \int_0^t g(s) ds - \frac{1}{2} \|\nabla v\|^2 \int_0^t h(s) ds - \int_{\Omega} F(u, v) dx \right) \\ & = \left(-\|u_t\|^2 - \|v_t\|^2 - \|\nabla u_t\|^2 - \|\nabla v_t\|^2 + \frac{1}{2} (g' \diamond \nabla u)(t) + \frac{1}{2} (h' \diamond \nabla v)(t) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^t g'(s) \underbrace{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}_{\|\nabla u\|^2} ds - \frac{1}{2} \int_0^t h'(s) \underbrace{\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx}_{\|\nabla v\|^2} ds \right. \\ & \quad \left. - \int_{\Omega} u_t^2 |u|^{p-2} dx - \int_{\Omega} v_t^2 |v|^{q-2} dx \right) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2} \underbrace{\left(1 - \int_0^t g(s) ds\right)}_{l \geq 0} \|\Delta u\|^2 + \frac{1}{2} \underbrace{\left(1 - \int_0^t h(s) ds\right)}_{k \geq 0} \|\Delta v\|^2 \\ & \quad + \frac{1}{2(\alpha+1)} (\|\nabla u\|^{2(\alpha+1)} + \|\nabla v\|^{2(\alpha+1)}) + \frac{1}{2} [(g \diamond \nabla u)(t) + (h \diamond \nabla v)(t)] \\ & \quad - \int_{\Omega} F(u, v) dx \end{aligned} \tag{4.1.13}$$

ve

$$\begin{aligned} E'(t) &= -\|u_t\|^2 - \|v_t\|^2 - \|\nabla u_t\|^2 - \|\nabla v_t\|^2 + \frac{1}{2} [(g' \diamond \nabla u)(t) + (h' \diamond \nabla v)(t)] \\ & \quad - \frac{1}{2} \left(\|\nabla u\|^2 \int_0^t g'(s) ds + \|\nabla v\|^2 \int_0^t h'(s) ds \right) - \int_{\Omega} u_t^2 |u|^{p-2} dx - \int_{\Omega} v_t^2 |v|^{q-2} dx \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$g'(s) \leq 0 \text{ ve } h'(s) \leq 0$$

olduğundan

$$E'(t) \leq 0$$

olur. Buradan 0 dan t ye integrallenirse

$$\int_0^t E'(t) dt \leq \int_0^t 0 dt,$$

$$E(t) - E(0) \leq 0,$$

$$E(t) \leq E(0) \quad (4.1.14)$$

elde edilir.

Teorem: (4.1.2), (4.1.3), (4.1.4) ve (4.1.5) koşulları sağlansın. Ayrıca $E(0) < 0$,

$2(r+2) > \max\{p, q\}$ ve $\max\{\int_0^t g(s) ds, \int_0^t h(s) ds\} < \frac{2(r+1)}{2(r+1)+1}$ ise (4.1.1) probleminin çözümü

üstel büyür.

İspat:

$$H(t) = -E(t) \quad (4.1.15)$$

ve

$$L(t) = H(t) + \frac{\varepsilon}{2} (\|u\|^2 + \|v\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2) \quad (4.1.16)$$

olsun. (4.1.14) ve (4.1.15) den

$$H(t) \geq H(0) \quad (4.1.17)$$

olur.

$$\begin{aligned} H(t) - \int_{\Omega} F(u, v) dx &= -\frac{1}{2} \underbrace{\left(1 - \int_0^t g(s) ds\right)}_{l \geq 0} \|\Delta u\|^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \underbrace{\left(1 - \int_0^t h(s) ds\right)}_{k \geq 0} \|\Delta v\|^2 \\ &\quad - \frac{1}{2(\alpha+1)} (\|\nabla u\|^{2(\alpha+1)} + \|\nabla v\|^{2(\alpha+1)}) \\ &\quad - \frac{1}{2} [(g \circ \nabla u)(t) + (h \circ \nabla u)(t)] \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

dır. Buradan

$$H(t) - \int_{\Omega} F(u, v) dx \leq 0 \quad (4.1.19)$$

olur. (4.1.17) ve (4.1.19) den

$$\int_{\Omega} F(u, v) dx \geq H(t) \geq H(0)$$

olur. (4.1.16) denkleminin türevini alırsak

$$L'(t) = H'(t) + \varepsilon \left(\int_{\Omega} uu_t dx + \int_{\Omega} vv_t dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx + \int_{\Omega} \nabla v \nabla v_t dx \right) \quad (4.1.20)$$

elde edilir. Şimdi (4.1.1) sisteminin ilk denklemini u , ikinci denklemini v ile çarpıp Ω bölgesinde integral alalım

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u f_1(u, v) dx &= \int_{\Omega} u u_t dx - \int_{\Omega} u \Delta u_t dx - \int_{\Omega} u M(\|\nabla u\|^2) \Delta u dx \\ &\quad + \int_{\Omega} u \int_0^t g(t - \sigma) \Delta u(\sigma) d\sigma dx + \int_{\Omega} |u|^{p-2} u u_t dx \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v f_2(u, v) dx &= \int_{\Omega} v v_t dx - \int_{\Omega} v \Delta v_t dx - \int_{\Omega} v M(\|\nabla v\|^2) \Delta v dx \\ &\quad + \int_{\Omega} v \int_0^t h(t - \sigma) \Delta v(\sigma) d\sigma dx + \int_{\Omega} |v|^{q-2} v v_t dx \end{aligned}$$

olur. Yukardaki eşitlikleri Green özdeşliğini kullanarak düzenleyelim

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u u_t dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx &= \int_{\Omega} u f_1(u, v) dx + \underbrace{\int_{\Omega} u M(\|\nabla u\|^2) \Delta u dx}_{A_6} \\ &\quad - \underbrace{\int_{\Omega} u \int_0^t g(t - \sigma) \Delta u(\sigma) d\sigma dx}_{A_7} - \int_{\Omega} |u|^{p-2} u u_t dx \end{aligned} \quad (4.1.21)$$

ve

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v v_t dx + \int_{\Omega} \nabla v \nabla v_t dx &= \int_{\Omega} v f_2(u, v) dx + \underbrace{\int_{\Omega} v M(\|\nabla v\|^2) \Delta v dx}_{B_6} \\ &\quad - \underbrace{\int_{\Omega} v \int_0^t h(t - \sigma) \Delta v(\sigma) d\sigma dx}_{B_7} - \int_{\Omega} |v|^{q-2} v v_t dx \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

olur. A_6 terimini hesaplayalım

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u M(\|\nabla u\|^2) \Delta u dx &= \int_{\Omega} u (1 + \|\nabla u\|^{2\alpha}) \Delta u dx \\ &= \int_{\Omega} u \Delta u dx + \int_{\Omega} u \|\nabla u\|^{2\alpha} \Delta u dx \\ &= - \int_{\Omega} \nabla u \nabla u dx - \|\nabla u\|^{2\alpha} \int_{\Omega} \nabla u \nabla u dx \\ &= -\|\nabla u\|^2 - \|\nabla u\|^{2\alpha} \|\nabla u\|^2 \\ &= -(\|\nabla u\|^2 + \|\nabla u\|^{2(\alpha+1)}) \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde B_6 terimi

$$\int_{\Omega} v M(\|\nabla v\|^2) \Delta v dx = -(\|\nabla v\|^2 + \|\nabla v\|^{2(\alpha+1)})$$

olur. A_7 terimini hesaplayalım, terim ekleme çıkarma yapıp, Young eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Omega} u \int_0^t g(t-\sigma) \Delta u(\sigma) d\sigma dx &= - \int_0^t g(t-\sigma) \int_{\Omega} u \Delta u(\sigma) dx d\sigma \\
 &= \int_0^t g(t-\sigma) \int_{\Omega} \nabla u \nabla u(\sigma) dx d\sigma \\
 &= \int_0^t g(t-\sigma) \int_{\Omega} \nabla u (\nabla u(\sigma) - \nabla u(t) + \nabla u(t)) dx d\sigma \\
 &= \int_0^t g(t-\sigma) \int_{\Omega} \nabla u (\nabla u(\sigma) - \nabla u(t)) dx d\sigma \\
 &\quad + \int_0^t g(t-\sigma) \|\nabla u\|^2 d\sigma \\
 &= \int_0^t g(t-\sigma) \int_{\Omega} \nabla u (\nabla u(\sigma) - \nabla u(t)) dx d\sigma \\
 &\quad + \|\nabla u\|^2 \int_0^t g(t-\sigma) d\sigma
 \end{aligned}$$

olur ve

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Omega} u \int_0^t g(t-\sigma) \Delta u(\sigma) d\sigma dx \\
 \geq \underbrace{\frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 \int_0^t g(t-\sigma) d\sigma - \frac{1}{2} \int_0^t g(t-\sigma) \int_{\Omega} (\nabla u(t) - \nabla u(\sigma))^2 dx d\sigma}_{\frac{1}{2} \|\nabla u\|_2^2 \left(\int_0^t g(s) ds \right) - \frac{1}{2} (g \diamond \nabla u)(t)}
 \end{aligned}$$

yazılabilir. Benzer şekilde B_7 terimi

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Omega} v \int_0^t h(t-\sigma) \Delta v(\sigma) d\sigma dx \\
 \geq \underbrace{\frac{1}{2} \|\nabla v\|^2 \int_0^t h(t-\sigma) d\sigma - \frac{1}{2} \int_0^t h(t-\sigma) \int_{\Omega} (\nabla v(t) - \nabla v(\sigma))^2 dx d\sigma}_{\frac{1}{2} \|\nabla v\|_2^2 \left(\int_0^t h(s) ds \right) - \frac{1}{2} (h \diamond \nabla v)(t)}
 \end{aligned}$$

yazılabilir. Bulduğumuz bu ifadeleri (4.1.21) ve (4.1.22) de yerlerine yazalım

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} u u_t dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx &\geq \int_{\Omega} u f_1(u, v) dx - (\|\nabla u\|^2 + \|\nabla u\|^{2(\alpha+1)}) \\
 &\quad - \frac{1}{2} (g \diamond \nabla u)(t) + \frac{1}{2} \|\nabla u\|_2^2 \left(\int_0^t g(s) ds \right) \\
 &\quad - \int_{\Omega} |u|^{p-2} u u_t dx
 \end{aligned} \tag{4.1.23}$$

ve

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} v v_t dx + \int_{\Omega} \nabla v \nabla v_t dx &\geq \int_{\Omega} v f_2(u, v) dx - (\|\nabla v\|^2 + \|\nabla v\|^{2(\alpha+1)}) \\
&\quad - \frac{1}{2} (h \diamond \nabla v)(t) + \frac{1}{2} \|\nabla v\|_2^2 \left(\int_0^t h(s) ds \right) \\
&\quad - \int_{\Omega} |v|^{q-2} v v_t dx
\end{aligned} \tag{4.1.24}$$

elde edilir. (4.1.23) ve (4.1.24) eşitsizliklerini taraf tarafa toplayalım

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} u u_t dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx + \int_{\Omega} v v_t dx + \int_{\Omega} \nabla v \nabla v_t dx \\
\geq \int_{\Omega} u f_1(u, v) dx + \int_{\Omega} v f_2(u, v) dx \\
- (\|\nabla u\|^2 + \|\nabla u\|^{2(\alpha+1)}) - (\|\nabla v\|^2 + \|\nabla v\|^{2(\alpha+1)}) \\
- \frac{1}{2} (g \diamond \nabla u)(t) - \frac{1}{2} (h \diamond \nabla v)(t) \\
+ \frac{1}{2} \|\nabla u\|_2^2 \left(\int_0^t g(s) ds \right) + \frac{1}{2} \|\nabla v\|_2^2 \left(\int_0^t h(s) ds \right) \\
- \int_{\Omega} |u|^{p-2} u u_t dx - \int_{\Omega} |v|^{q-2} v v_t dx
\end{aligned}$$

olur. Bulduğumuz bu ifadeyi (4.1.20) eşitliğinde yerine yazalım

$$\begin{aligned}
L'(t) &\geq H'(t) \\
&\quad + \varepsilon \left[\int_{\Omega} u f_1(u, v) dx + \int_{\Omega} v f_2(u, v) dx - (\|\nabla u\|^2 + \|\nabla u\|^{2(\alpha+1)}) \right. \\
&\quad - (\|\nabla v\|^2 + \|\nabla v\|^{2(\alpha+1)}) - \frac{1}{2} (g \diamond \nabla u)(t) - \frac{1}{2} (h \diamond \nabla v)(t) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2} \left(\int_0^t h(s) ds \right) \|\nabla v\|_2^2 \\
&\quad \left. - \int_{\Omega} |u|^{p-2} u u_t dx - \int_{\Omega} |v|^{q-2} v v_t dx \right]
\end{aligned} \tag{4.1.25}$$

olur. Son iki terime Young eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |u|^{p-2} u u_t dx &= \int_{\Omega} |u|^{\frac{p-2}{2}} u |u|^{\frac{p-2}{2}} u_t dx \\
&\leq \lambda^{-1} \int_{\Omega} |u|^{\left(\frac{p-2}{2}\right)^2} u^2 dx + \lambda \int_{\Omega} |u|^{\left(\frac{p-2}{2}\right)^2} u_t^2 dx
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |v|^{q-2} v v_t dx &= \int_{\Omega} |v|^{\frac{q-2}{2}} v |v|^{\frac{q-2}{2}} v_t dx \\
&\leq \lambda^{-1} \int_{\Omega} |v|^{\left(\frac{q-2}{2}\right)^2} v^2 dx + \lambda \int_{\Omega} |v|^{\left(\frac{q-2}{2}\right)^2} v_t^2 dx
\end{aligned}$$

olur. $H'(t)$ nin değeri göz önüne alınır ve yukarıdaki ifadeler (4.1.25) te yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
L'(t) &\geq \|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + \|\nabla u_t\|^2 + \|\nabla v_t\|^2 - \frac{1}{2}[(g' \diamond \nabla v)(t) + (h' \diamond \nabla v)(t)] \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\|\nabla u\|^2 \int_0^t g'(s) ds + \|\nabla v\|^2 \int_0^t h'(s) ds \right) \\
&\quad + \int_{\Omega} u_t^2 |u|^{(p-2)} dx + \int_{\Omega} v_t^2 |v|^{(q-2)} dx \\
&\quad + \varepsilon \left[\int_{\Omega} u f_1(u, v) dx + \int_{\Omega} v f_2(u, v) dx - (\|\nabla u\|^2 + \|\nabla u\|^{2(\alpha+1)}) \right. \\
&\quad \left. - (\|\nabla v\|^2 + \|\nabla v\|^{2(\alpha+1)}) - \frac{1}{2}(g \diamond \nabla u)(t) - \frac{1}{2}(h \diamond \nabla v)(t) + \frac{1}{2} \|\nabla u\|_2^2 \left(\int_0^t g(s) ds \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \|\nabla v\|_2^2 \left(\int_0^t h(s) ds \right) - \lambda^{-1} \int_{\Omega} |u|^{(p-2)} u^2 dx - \lambda \int_{\Omega} |u|^{(p-2)} u_t^2 dx \right. \\
&\quad \left. - \lambda^{-1} \int_{\Omega} |v|^{(q-2)} v^2 dx - \lambda \int_{\Omega} |v|^{(q-2)} v_t^2 dx \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
L'(t) &\geq (1 - \varepsilon \lambda) \int_{\Omega} |u|^{(p-2)} u_t^2 dx + (1 - \varepsilon \lambda) \int_{\Omega} |v|^{(p-2)} u_t^2 dx \\
&\quad - \varepsilon \lambda^{-1} \|u\|_p^p - \varepsilon \lambda^{-1} \|v\|_q^q - \varepsilon \|\nabla u\|_2^2 \left(1 - \frac{1}{2} \int_0^t g(s) ds + \|\nabla u\|^{2\alpha} \right) \\
&\quad - \varepsilon \|\nabla v\|_2^2 \left(1 - \frac{1}{2} \int_0^t h(s) ds + \|\nabla v\|^{2\alpha} \right) - \frac{\varepsilon}{2} (g \diamond \nabla u)(t) - \frac{\varepsilon}{2} (h \diamond \nabla v)(t) \\
&\quad + \varepsilon \underbrace{\left(\int_{\Omega} u f_1(u, v) dx + \int_{\Omega} v f_2(u, v) dx \right)}_{C_1}
\end{aligned} \tag{4.1.26}$$

olur. (4.1.18) den

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} F(u, v) dx &= H(t) + \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t h(s) ds \right) \|\nabla v\|^2 \\
&\quad + \frac{1}{2(\alpha+1)} (\|\nabla u\|^{2(\alpha+1)} + \|\nabla v\|^{2(\alpha+1)}) \\
&\quad + \frac{1}{2} [(g \diamond \nabla u)(t) + (h \diamond \nabla v)(t)]
\end{aligned} \tag{4.1.27}$$

dır. (4.1.27) eşitliğini $2\varepsilon(r+2)$ ile çarpalım

$$\begin{aligned}
& 2\varepsilon(r+2) \int_{\Omega} F(u, v) dx \\
&= 2\varepsilon(r+2) \left[\begin{aligned} & H(t) + \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t h(s) ds \right) \|\nabla v\|^2 \\ & + \frac{1}{2(\alpha+1)} (\|\nabla u\|^{2(\alpha+1)} + \|\nabla v\|^{2(\alpha+1)}) + \frac{1}{2} ((g \diamond \nabla u)(t) + (h \diamond \nabla v)(t)) \end{aligned} \right] \quad (4.1.28)
\end{aligned}$$

olur.

$$\int_{\Omega} u f_1(u, v) dx + \int_{\Omega} v f_2(u, v) dx = 2(r+2) \int_{\Omega} F(u, v) dx$$

olduğundan

$$2\varepsilon(r+2) \int_{\Omega} F(u, v) dx = \varepsilon \underbrace{\left(\int_{\Omega} u f_1(u, v) dx + \int_{\Omega} v f_2(u, v) dx \right)}_{C_1}$$

(4.1.26) da C_1 değeri için (4.1.28) ifadesini yazalım

$$\begin{aligned}
L'(t) &\geq (1 - \varepsilon\lambda) \int_{\Omega} |u|^{(p-2)} u_t^2 dx + (1 - \varepsilon\lambda) \int_{\Omega} |v|^{(p-2)} v_t^2 dx \\
&\quad - \varepsilon\lambda^{-1} \|u\|_p^p - \varepsilon\lambda^{-1} \|v\|_q^q - \varepsilon \|\nabla u\|_2^2 \left(1 - \frac{1}{2} \int_0^t g(s) ds + \|\nabla u\|^{2\alpha} \right) \\
&\quad - \varepsilon \|\nabla v\|_2^2 \left(1 - \frac{1}{2} \int_0^t h(s) ds + \|\nabla v\|^{2\alpha} \right) \\
&\quad - \frac{\varepsilon}{2} (g \diamond \nabla u)(t) - \frac{\varepsilon}{2} (h \diamond \nabla v)(t) \\
&\quad + 2\varepsilon(r+2) \left[H(t) + \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) + \frac{1}{2} \|\nabla v\|^2 \left(1 - \int_0^t h(s) ds \right) \right. \\
&\quad + \frac{1}{2(\alpha+1)} (\|\nabla u\|^{2(\alpha+1)} + \|\nabla v\|^{2(\alpha+1)}) \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} ((g \diamond \nabla u)(t) + (h \diamond \nabla v)(t)) \right]
\end{aligned}$$

ifadeyi tekrar düzenleyelim

$$\begin{aligned}
L'(t) \geq & \varepsilon \|\nabla u\|^2 \left(\frac{2(r+2)-2}{2} - \frac{2(r+2)-1}{2} \int_0^t g(s) ds \right) \\
& + \varepsilon \|\nabla v\|^2 \left(\frac{2(r+2)-2}{2} - \frac{2(r+2)-1}{2} \int_0^t h(s) ds \right) \\
& + \varepsilon \|\nabla u\|^{2\alpha+2} \left(\frac{2(r+2)}{2(\alpha+1)} - 1 \right) + \varepsilon \|\nabla v\|^{2\alpha+2} \left(\frac{2(r+2)}{2(\alpha+1)} - 1 \right) \\
& + \varepsilon \left(\frac{2(r+2)}{2} - \frac{1}{2} \right) (g \diamond \nabla u)(t) + \varepsilon \left(\frac{2(r+2)}{2} - \frac{1}{2} \right) (h \diamond \nabla v)(t) \\
& - \varepsilon \lambda^{-1} \|u\|_p^p - \varepsilon \lambda^{-1} \|v\|_q^q \\
& + (1 - \varepsilon \lambda) \int_{\Omega} |u|^{p-2} u_t^2 dx + (1 - \varepsilon \lambda) \int_{\Omega} |v|^{q-2} v_t^2 dx \\
& + \varepsilon 2(r+2)H(t)
\end{aligned} \tag{4.1.29}$$

olur. Buradan $2(r+2) > \max\{p, q\}$ olduğundan

$$L^{2(r+2)}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), L^{2(r+2)}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

gömülmesi ve $\forall x > 0, 0 \leq l \leq 1, z > 0$ için

$$x^l \leq (x+1) \leq \left(1 + \frac{1}{z}\right)(x+z)$$

cebirsel ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\|u\|_p^p & \leq c \|u\|_{2(r+2)}^p \\
& \leq c \left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} \right)^{\frac{p}{2(r+2)}},
\end{aligned} \tag{4.1.30}$$

$$\begin{aligned}
\|v\|_q^q & \leq c \|v\|_{2(r+2)}^q \\
& \leq c \left(\|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} \right)^{\frac{q}{2(r+2)}}
\end{aligned} \tag{4.1.31}$$

ve

$$\begin{aligned}
\left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} \right)^{\frac{p}{2(r+2)}} & \leq \left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + 1 \right) \\
& \leq \left(1 + \frac{1}{H(0)} \right) \left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + H(0) \right),
\end{aligned} \tag{4.1.32}$$

$$\begin{aligned}
\left(\|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} \right)^{\frac{q}{2(r+2)}} & \leq \left(\|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + 1 \right) \\
& \leq \left(1 + \frac{1}{H(0)} \right) \left(\|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + H(0) \right)
\end{aligned} \tag{4.1.33}$$

olur. (4.1.30) ve (4.1.32) den

$$\begin{aligned}\|u\|_p^p &\leq c \left(1 + \frac{1}{H(0)}\right) \left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + H(0)\right) \\ &\leq c_1 \left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + H(t)\right)\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde (4.1.31) ve (4.1.33) den

$$\begin{aligned}\|v\|_q^q &\leq c \left(1 + \frac{1}{H(0)}\right) \left(\|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + H(0)\right) \\ &\leq c_2 \left(\|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + H(t)\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 1 ve (4.1.19) den

$$\|u\|_p^p \leq c_3 \int_{\Omega} [uf_1(u, v) + vf_2(u, v)] dx \quad (4.1.34)$$

ve

$$\|v\|_q^q \leq c_4 \int_{\Omega} [uf_1(u, v) + vf_2(u, v)] dx \quad (4.1.35)$$

olur. (4.1.34) ve (4.1.35) eşitsizliğini (4.1.29) da yazalım

$$\begin{aligned}L'(t) &\geq \underbrace{\varepsilon \|\nabla u\|^2 \left(\frac{2(r+1)}{2} - \frac{2(r+2)-1}{2} \int_0^t g(s) ds \right)}_{a_1} \\ &\quad + \underbrace{\varepsilon \|\nabla v\|^2 \left(\frac{2(r+1)}{2} - \frac{2(r+2)-1}{2} \int_0^t h(s) ds \right)}_{a_2} \\ &\quad + \underbrace{\varepsilon \|\nabla u\|^{2\alpha+2} \left(\frac{2(r+2)}{2(\alpha+1)} - 1 \right)}_{a_3} + \underbrace{\varepsilon \|\nabla v\|^{2\alpha+2} \left(\frac{2(r+2)}{2(\alpha+1)} - 1 \right)}_{a_3} \\ &\quad + \underbrace{\varepsilon \left(\frac{2(r+2)}{2} - \frac{1}{2} \right)}_{a_4} (g \diamond \nabla u)(t) + \underbrace{\varepsilon \left(\frac{2(r+2)}{2} - \frac{1}{2} \right)}_{a_4} (h \diamond \nabla v)(t) \\ &\quad + (1 - \varepsilon\lambda) \int_{\Omega} |u|^{p-2} u_t^2 dx + (1 - \varepsilon\lambda) \int_{\Omega} |v|^{q-2} v_t^2 dx \\ &\quad + 2\varepsilon(r+2)H(t) - \varepsilon\lambda^{-1}c_5 \int_{\Omega} [uf_1(u, v) + vf_2(u, v)] dx\end{aligned}$$

olur.

$$a_5 = \min\{a_1, a_2\}, \quad a_4 = \frac{2(r+2)}{2} - \frac{1}{2}, \quad c_5 = c_3 + c_4 \text{ ve } 0 < a_6 < \min\{a_4, a_5\}$$

olsun

$$\begin{aligned}
L'(t) &\geq \varepsilon a_5(\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2) + \varepsilon a_3(\|\nabla u\|^{2\alpha+2} + \|\nabla v\|^{2\alpha+2}) \\
&\quad + \varepsilon a_4[(g \diamond \nabla u)(t) + (h \diamond \nabla v)(t)] \\
&\quad + (1 - \varepsilon\lambda) \int_{\Omega} |u|^{p-2} u_t^2 dx \\
&\quad + (1 - \varepsilon\lambda) \int_{\Omega} |v|^{q-2} v_t^2 dx \\
&\quad + 2\varepsilon(r+2)H(t) \\
&\quad - \varepsilon\lambda^{-1}c_5 \int_{\Omega} [uf_1(u, v) + vf_2(u, v)] dx
\end{aligned} \tag{4.1.36}$$

olur. (4.1.13) ve (4.1.15) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
2H(t) &= - \underbrace{\left(1 - \int_0^t g(s)ds\right)}_{l \geq 0} \|\nabla u\|^2 - \underbrace{\left(1 - \int_0^t h(s)ds\right)}_{k \geq 0} \|\nabla v\|^2 \\
&\quad - \frac{1}{\alpha+1} (\|\nabla u\|^{2(\alpha+1)} + \|\nabla v\|^{2(\alpha+1)}) - [(g \diamond \nabla u)(t) + (h \diamond \nabla v)(t)] \\
&\quad + 2 \int_{\Omega} F(u, v) dx
\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}
2H(t) &\geq -\|\nabla u\|^2 - \|\nabla v\|^2 - \frac{1}{\alpha+1} (\|\nabla u\|^{2(\alpha+1)} + \|\nabla v\|^{2(\alpha+1)}) \\
&\quad - [(g \diamond \nabla u)(t) + (h \diamond \nabla v)(t)] + 2 \int_{\Omega} F(u, v) dx
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.1.36) eşitsizliğine $2\varepsilon a_6 H(t)$ ekleyip çıkaralım ve ifadeyi düzenleyelim

$$\begin{aligned}
L'(t) &\geq \varepsilon(a_5 - a_6)(\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2) + \varepsilon \left(a_3 - \frac{a_6}{\alpha+1}\right) (\|\nabla u\|^{2\alpha+2} + \|\nabla v\|^{2\alpha+2}) \\
&\quad + \varepsilon(a_4 - a_6)[(g \diamond \nabla u)(t) + (h \diamond \nabla v)(t)] \\
&\quad + (1 - \varepsilon\lambda) \int_{\Omega} |u|^{p-2} u_t^2 dx + (1 - \varepsilon\lambda) \int_{\Omega} |v|^{q-2} v_t^2 dx \\
&\quad + \varepsilon(2(r+2) - 2a_6)H(t) \\
&\quad + \varepsilon \left(\frac{2a_6}{2(r+2)} - \lambda^{-1}c_5\right) \int_{\Omega} [uf_1(u, v) + vf_2(u, v)] dx
\end{aligned} \tag{4.1.37}$$

olur. λ ve ε yeterince küçük seçilirse

$$(1 - \varepsilon\lambda) > 0, \left(\frac{2a_6}{2(r+2)} - \lambda^{-1}c_5\right) > 0$$

ve

$$(2(r+2) - 2a_6) > 0 \text{ ve } a_3 - \frac{a_6}{\alpha+1} > 0$$

olur. Böylece

$$L'(t) \geq K_1 \left[\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2 + \|\nabla u\|^{2\alpha+2} + \|\nabla v\|^{2\alpha+2} \right. \\ \left. + (g \diamond \nabla u)(t) + (h \diamond \nabla v)(t) + H(t) \right] \quad (4.1.38)$$

yazılabilir. Sobolev-Poincare eşitsizliğinden

$$\|u\|^2 \leq c \|\nabla u\|^2$$

ve

$$\|v\|^2 \leq c \|\nabla v\|^2$$

yazılabilir. Böylece (4.1.16) ifadesi

$$L(t) \leq K_2 (H(t) + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2)$$

olur. Buradan

$$L(t) \leq K_2 \left[\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2 + \|\nabla u\|^{2\alpha+2} + \|\nabla v\|^{2\alpha+2} \right. \\ \left. + (g \diamond \nabla u)(t) + (h \diamond \nabla v)(t) + H(t) \right] \quad (4.1.39)$$

eşitsizliği de yazılabilir. (4.1.39) ve (4.1.40) dan

$$L'(t) \geq \eta L(t) \quad (4.1.40)$$

elde edilir. Burada

$$\eta = \frac{K_1}{K_2}, \eta > 0$$

dir. (4.1.40) ifadesi 0 dan t ye integrallenirse

$$\int_0^t \frac{L'(x)}{L(x)} dx \geq \int_0^t \eta dx$$

$$\ln L(t) - \ln L(0) \geq \eta t$$

$$\frac{L(t)}{L(0)} \geq e^{\eta t}$$

olur.

$$L(0) = H(0) + \frac{\varepsilon}{2} (\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2) > 0$$

olduğundan

$$L(t) \geq L(0)e^{\eta t}$$

elde edilir. Bu da (4.1.1) probleminin uygun koşullarda üstel büyüdüğünü gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4.2. Parabolik Tipten m- Laplasyan ve Kirchhoff Terimli Denklemin Çözümünün Üstel Büyümesi

Bu çalışmada

$$\begin{cases} u_t - \Delta u_t - \operatorname{div}(|\nabla u|^{m-2} \nabla u) - M(\|\nabla u\|^2) \Delta u + |u|^{q-2} u_t = |u|^{p-2} u, & x \in \Omega, t > 0 \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega \end{cases} \quad (4.2.1)$$

başlangıç sınır değer problemi çalışılacaktır. Burada Ω, R^n de $\partial\Omega$ düzgün sınırına sahip sınırlı bir bölgedir ve $p > q > m > 2$ sabit sayılardır. $\alpha > 0$ ve $s > 0$ için

$$M(s) = 1 + s^\alpha$$

dır. Ayrıca

$$\begin{cases} 2 < q < p < \infty; & n = 1, 2 \\ 2 < q < p \leq \frac{2(n-1)}{n-2}; & n \geq 3 \end{cases} \quad (4.2.2)$$

Lemma 1. Enerji fonksiyoneli artmayandır. Yani her $t \geq 0$ için $E'(t) \leq 0$ dır.

İspat: (4.2.1) denklemini u_t ile çarpılır ve Ω üzerinde integrallenirse

$$\begin{aligned} & \underbrace{\int_{\Omega} u_t u_t dx}_{A_1} - \underbrace{\int_{\Omega} \Delta u_t u_t dx}_{A_2} - \underbrace{\int_{\Omega} \operatorname{div}(|\nabla u|^{m-2} \nabla u) u_t dx}_{A_3} - \underbrace{\int_{\Omega} M(\|\nabla u\|^2) \Delta u u_t dx}_{A_4} + \int_{\Omega} |u|^{q-2} u_t u_t dx \\ &= \underbrace{\int_{\Omega} |u|^{p-2} u u_t dx}_{A_5} \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

olur. (4.2.3) eşitliğindeki A_1, A_2, A_3, A_4 ve A_5 terimlerini hesaplayalım.

A_1 ifadesi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_t u_t dx &= \int_{\Omega} |u_t|^2 dx \\ &= \|u_t\|^2 \end{aligned}$$

olur. A_2 ifadesi için Green özdeşliği ve sınır koşulu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} u_t \Delta u_t dx &= \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u_t dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u_t|^2 dx \\ &= \|\nabla u_t\|^2 \end{aligned}$$

olur. A_3 ifadesi için kısmi integrasyon ve sınır değerlerinin kullanılmasıyla

$$- \int_{\Omega} \operatorname{div}(|\nabla u|^{m-2} \nabla u) u_t dx = \frac{1}{m} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|_m^m$$

olur. A_4 ifadesi için Green özdeşliği ve $M(s) = 1 + s^\alpha$ eşitliğini kullanırsak

$$\begin{aligned}
-\int_{\Omega} u_t M(\|\nabla u\|^2) \Delta u dx &= -\int_{\Omega} u_t (1 + \|\nabla u\|^{2\alpha}) \Delta u dx \\
&= -\int_{\Omega} u_t \Delta u dx - \int_{\Omega} \|\nabla u\|^{2\alpha} u_t \Delta u dx \\
&= \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u dx + \|\nabla u\|^{2\alpha} \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u dx \\
&= \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 dx \right) + \|\nabla u\|^{2\alpha} \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 \right) dx \\
&= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) + \|\nabla u\|^{2\alpha} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \\
&= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2(\alpha+1)} \|\nabla u\|^{2(\alpha+1)} \right)
\end{aligned}$$

olur. A_5 ifadesi

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |u|^{p-2} u u_t dx &= \int_{\Omega} |u|^{p-1} u_t dx \\
&= \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{p} |u|^p \right) dx. \\
&= \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right) \\
&= \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|u\|_p^p
\end{aligned}$$

olur. Bu ifadeler (4.2.3) de yazılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|u\|_p^p &= \|u_t\|^2 + \|\nabla u_t\|^2 + \frac{d}{dt} \frac{1}{m} \|\nabla u\|_m^m \\
&\quad + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2(\alpha+1)} \|\nabla u\|^{2(\alpha+1)} \right) \\
&\quad + \int_{\Omega} |u|^{q-2} u_t u_t dx
\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

olur. (4.2.4) eşitliğini düzenlersek

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{p} \|u\|_p^p + \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2(\alpha+1)} \|\nabla u\|^{2(\alpha+1)} + \frac{1}{m} \|\nabla u\|_m^m \right) &= -\|u_t\|^2 - \|\nabla u_t\|^2 \\
&\quad - \int_{\Omega} |u|^{q-2} u_t u_t dx
\end{aligned}$$

olur. Burada

$$E(t) = \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2(\alpha+1)} \|\nabla u\|^{2(\alpha+1)} + \frac{1}{m} \|\nabla u\|_m^m - \frac{1}{p} \|u\|_p^p \tag{4.2.5}$$

alınırsa

$$E'(t) = -\|u_t\|^2 - \|\nabla u_t\|^2 - \int_{\Omega} |u|^{q-2} u_t u_t dx \quad (4.2.6)$$

elde edilir. Böylece

$$E'(t) \leq 0 \quad (4.2.7)$$

olur. Bu ifade 0 dan t ye integrallenirse

$$\begin{aligned} \int_0^t E'(t) dt &\leq \int_0^t 0 dt, \\ E(t) - E(0) &\leq 0, \\ E(t) &\leq E(0) \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

elde edilir.

Teorem 1: (4.2.2) ve $p \geq \frac{2m(\alpha+1)}{m-1}$ koşulları sağlansın. Ayrıca $u_0 \in W_0^{1,m}$ ve $E(0) < 0$ olsun. Bu şartlarda (4.2.1) probleminin çözümü üstel büyür.

İspat:

$$-E(t) = H(t)$$

ve

$$L(t) = H(t) + \frac{\varepsilon}{2} (\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2) \quad (4.2.9)$$

olsun. (4.2.9) ifadesinin türevini alalım

$$L'(t) = H'(t) + \varepsilon \left(\int_{\Omega} u u_t dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx \right) \quad (4.2.10)$$

olur. Şimdi (4.2.1) denklemini u ile çarpıp Ω üzerinde integral alalım

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u|^{p-2} u^2 dx &= \int_{\Omega} |u|^{q-2} u_t u dx + \int_{\Omega} u_t u dx - \int_{\Omega} \Delta u_t u dx \\ &\quad - \int_{\Omega} u M(\|\nabla u\|^2) \Delta u dx - \int_{\Omega} \operatorname{div}(|\nabla u|^{m-2} \nabla u) u dx \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

olur. (4.2.10) eşitliğini Green özdeşliği ve sınır koşulu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_t u dx + \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u dx &= \underbrace{\int_{\Omega} \operatorname{div}(|\nabla u|^{m-2} \nabla u) u dx}_{B_1} + \underbrace{\int_{\Omega} u M(\|\nabla u\|^2) \Delta u dx}_{B_2} \\ &\quad - \int_{\Omega} |u|^{q-2} u_t u dx + \underbrace{\int_{\Omega} |u|^{p-2} u^2 dx}_{B_3} \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

olur. (4.2.12) eşitliğindeki B_1 , B_2 ve B_3 terimlerini hesaplayalım.

B_1 ifadesi için kısmi integrasyon ve sınır değerlerinin kullanılmasıyla

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(|\nabla u|^{m-2} \nabla u) u dx = -\|\nabla u\|_m^m$$

olur. B_2 ifadesi için Green özdeşliği ve $M(s) = 1 + s^\alpha$ eşitliğini kullanırsak

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u(1 + \|\nabla u\|^{2\alpha}) \Delta u dx &= \int_{\Omega} u \Delta u dx + \int_{\Omega} u \Delta u \|\nabla u\|^{2\alpha} dx \\ &= - \int_{\Omega} \nabla u \nabla u dx - \|\nabla u\|^{2\alpha} \int_{\Omega} \nabla u \nabla u dx \\ &= -\|\nabla u\|^2 - \|\nabla u\|^{2(\alpha+1)} \end{aligned}$$

olur. B_3 ifadesi için

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u|^{p-2} u^2 dx &= \int_{\Omega} |u|^p dx \\ &= \|u\|_p^p \end{aligned}$$

olur. Bulduğumuz B_1, B_2 ve B_3 değerlerini (4.2.12) de yerine yazalım

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_t u dx + \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u dx &= -\|\nabla u\|_m^m - \|\nabla u\|^2 - \|\nabla u\|^{2(\alpha+1)} \\ &\quad - \int_{\Omega} |u|^{q-2} u_t u dx + \|u\|_p^p \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

olur. (4.2.13) denklemini (4.2.10) denkleminde yerine yazarsak

$$L'(t) = H'(t) + \varepsilon \left(-\|\nabla u\|_m^m - \|\nabla u\|^2 - \|\nabla u\|^{2\alpha+2} - \int_{\Omega} |u|^{q-2} u_t u dx + \|u\|_p^p \right) \quad (4.2.14)$$

olur.

$$-E'(t) = H'(t)$$

ifadesinden,

$$H'(t) = \|u_t\|^2 + \|\nabla u_t\|^2 + \int_{\Omega} |u|^{q-2} u_t u_t dx \quad (4.2.15)$$

olur. (4.2.15) ifadesini (4.2.14)'te yerine yazalım

$$\begin{aligned} L'(t) &= \|u_t\|^2 + \|\nabla u_t\|^2 + \int_{\Omega} |u|^{q-2} u_t^2 dx - \varepsilon \|\nabla u\|_m^m - \varepsilon \|\nabla u\|^2 \\ &\quad - \varepsilon \|\nabla u\|^{2\alpha+2} - \varepsilon \underbrace{\int_{\Omega} |u|^{q-2} u_t u dx}_{D_1} + \varepsilon \|u\|_p^p \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

elde edilir. (4.2.16) da D_1 ifadesi için Young eşitsizliğini kullanırsak

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u|^{q-2} u_t u dx &= \int_{\Omega} |u|^{\frac{q-2}{2}} u_t |u|^{\frac{q-2}{2}} u dx \\ &\leq \lambda^{-1} \int_{\Omega} |u|^{\left(\frac{q-2}{2}\right)^2} u_t^2 dx + \lambda \int_{\Omega} |u|^{\left(\frac{q-2}{2}\right)^2} u^2 dx \end{aligned}$$

$$\leq \lambda^{-1} \int_{\Omega} |u|^{q-2} u_t^2 dx + \lambda \|u\|_q^q \quad (4.2.17)$$

olur. (4.2.17) ifadesini (4.2.16) ifadesinde yerine yazalım

$$\begin{aligned} L'(t) &\geq \|u_t\|^2 + \|\nabla u_t\|^2 + (1 - \varepsilon \lambda^{-1}) \int_{\Omega} |u|^{q-2} u_t^2 dx \\ &\quad - \varepsilon \|\nabla u\|_m^m - \varepsilon \|\nabla u\|^2 - \varepsilon \|\nabla u\|^{2(\alpha+1)} \\ &\quad - \varepsilon \lambda \|u\|_q^q + \varepsilon \|u\|_p^p \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

olur.

$$\varepsilon \|u\|_p^p = \varepsilon p H(t) + \varepsilon \frac{p}{2} \|\nabla u\|^2 + \varepsilon \frac{p}{2(\alpha+1)} \|\nabla u\|^{2(\alpha+1)} + \varepsilon \frac{p}{m} \|\nabla u\|_m^m$$

denklemini (4.2.18) de yerine yazalım

$$\begin{aligned} L'(t) &\geq \|u_t\|^2 + \|\nabla u_t\|^2 + (1 - \varepsilon \lambda^{-1}) \int_{\Omega} |u|^{q-2} u_t^2 dx \\ &\quad - \varepsilon \|\nabla u\|_m^m - \varepsilon \|\nabla u\|^2 - \varepsilon \|\nabla u\|^{2(\alpha+1)} \\ &\quad - \varepsilon \lambda \|u\|_q^q + \varepsilon p H(t) + \varepsilon \frac{p}{2} \|\nabla u\|^2 \\ &\quad + \varepsilon \frac{p}{2(\alpha+1)} \|\nabla u\|^{2(\alpha+1)} + \varepsilon \frac{p}{m} \|\nabla u\|_m^m \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

elde edilir. Buradan (4.2.19) denklemindeki $\|u\|_q^q$ ifadesi için $p > q > m > 2$ olduğundan

$$L^p(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \hookrightarrow L^m(\Omega)$$

gömülmesinden

$$\begin{aligned} \|u\|_q^q &\leq c \|u\|_p^q \\ &= c (\|u\|_p^p)^{\frac{q}{p}} \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

olur. Burada $0 < \frac{q}{p} < 1$ olduğundan $\forall x > 0, 0 \leq l \leq 1, z > 0$ için

$$x^l \leq (x+1) \leq \left(1 + \frac{1}{z}\right)(x+z) \quad \forall x \geq 0, 0 \leq l \leq 1, z > 0$$

cebirsel ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned} (\|u\|_p^p)^{\frac{q}{p}} &\leq (\|u\|_p^p + 1) \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{H(0)}\right) (\|u\|_p^p + H(0)) \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

olur. (4.2.20) ve (4.2.21) den

$$\|u\|_q^q \leq c \left(1 + \frac{1}{H(0)}\right) (\|u\|_p^p + H(0))$$

$$\begin{aligned}
&\leq c_1 \left(\|u\|_p^p + H(0) \right) \\
&\leq C_1 \|u\|_p^p
\end{aligned} \tag{4.2.22}$$

elde edilir. (4.2.24) eşitsizliğinin (4.2.19) denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
L'(t) &\geq \|u_t\|^2 + \|\nabla u_t\|^2 + (1 - \varepsilon \lambda^{-1}) \int_{\Omega} |u|^{q-2} u_t^2 dx \\
&\quad + \varepsilon \left(\frac{p}{m} - 1 \right) \|\nabla u\|_m^m + \varepsilon \left(\frac{p}{2} - 1 \right) \|\nabla u\|^2 \\
&\quad + \varepsilon \left(\frac{p}{2(\alpha+1)} - 1 \right) \|\nabla u\|^{2(\alpha+1)} \\
&\quad - \varepsilon \lambda C_1 \|u\|_p^p + \varepsilon \underbrace{\left(\frac{p}{m} - 1 \right) H(t)}_{D_2} \\
&\quad - \varepsilon \left(\frac{p}{m} - 1 \right) H(t) + \varepsilon p H(t)
\end{aligned}$$

elde edilir. D_2 terimindeki $H(t)$ ifadesinin eşitini yerine yazalım ve ifadeyi düzenleyelim

$$\begin{aligned}
L'(t) &\geq \|u_t\|^2 + \|\nabla u_t\|^2 + (1 - \varepsilon \lambda^{-1}) \int_{\Omega} |u|^{q-2} u_t^2 dx \\
&\quad + \varepsilon (a_1 - a_2) \|\nabla u\|_m^m + \varepsilon \left(\frac{p}{2} - 1 - \frac{a_1}{2} \right) \|\nabla u\|^2 \\
&\quad + \varepsilon \left(\frac{p}{2(\alpha+1)} - 1 - \frac{a_1}{2(\alpha+1)} \right) \|\nabla u\|^{2(\alpha+1)} \\
&\quad + \varepsilon \left(\frac{a_1}{p} - \lambda C_1 \right) \|u\|_p^p + \varepsilon (p - a_1) H(t)
\end{aligned} \tag{4.2.23}$$

olur.

$$a_1 = \frac{p}{m} - 1 \text{ ve } a_2 = \frac{a_1}{m}$$

olsun.

$$1 - \varepsilon \lambda^{-1} \geq 0, \quad \frac{a_1}{p} - \lambda C_1 \geq 0$$

olacak şekilde λ ve ε yeterince küçük seçilebilir. Ayrıca

$$a_1 - a_2 \geq 0, \quad \frac{p}{2(\alpha+1)} - 1 - \frac{a_1}{2(\alpha+1)} \geq 0, \quad p - a_1 \geq 0$$

dır. Böylece

$$L'(t) \geq K_1 (H(t) + \|u_t\|^2 + \|\nabla u_t\|^2 + \|\nabla u\|_m^m + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla u\|^{2(\alpha+1)} + \|u\|_p^p) \tag{4.2.24}$$

yazılabilir. Sobolev-Poincare eşitsizliğinden

$$\|u\|^2 \leq c \|\nabla u\|^2$$

dır. Böylece (4.2.9) ifadesi

$$L(t) \leq K_2 (H(t) + \|\nabla u\|^2), K_2 > 0 \tag{4.2.25}$$

olur. Buradan (4.2.25) ifadesi

$$L(t) \leq K_2 (H(t) + \|u_t\|^2 + \|\nabla u_t\|^2 + \|\nabla u\|_m^m + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla u\|^{2(\alpha+1)} + \|u\|_p^p) \quad (4.2.26)$$

eşitsizliği şeklinde de yazılabilir. (4.2.24) ve (4.2.26) ifadelerinden

$$L'(t) \geq \vartheta L(t) \quad (4.2.27)$$

elde edilir. Burada

$$\vartheta = \frac{K_1}{K_2}$$

dir. (4.2.27) ifadesinin 0 dan t ye integrallenirse

$$\int_0^t \frac{L'(x)}{L(x)} dx \geq \int_0^t \vartheta dx$$

$$\ln L(t) - \ln L(0) \geq \vartheta t$$

$$\frac{L(t)}{L(0)} \geq e^{\vartheta t}$$

olur.

$$L(0) = H(0) + \frac{\varepsilon}{2} (\|u_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2) > 0$$

olduğundan

$$L(t) \geq L(0)e^{\vartheta t}$$

elde edilir. Bu da (4.2.1) probleminin uygun koşullarda üstel büyüdüğünü gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Bu çalışmamızda parabolik tipten viskoelastik Kirchhoff

$$\begin{cases} u_t - \Delta u_t - M(\|\nabla u\|^2)\Delta u + \int_0^t g(t-\sigma)\Delta u(\sigma)d\sigma + |u|^{p-2}u_t = f_1(u, v), \\ v_t - \Delta v_t - M(\|\nabla v\|^2)\Delta v + \int_0^t h(t-\sigma)\Delta v(\sigma)d\sigma + |v|^{q-2}v_t = f_2(u, v) \end{cases}$$

denklem sisteminin ve parabolik tipten m-Laplasyan ve Kirchhoff terimli

$$u_t - \Delta u_t - \operatorname{div}(|\nabla u|^{m-2}\nabla u) - M(\|\nabla u\|^2)\Delta u + |u|^{q-2}u_t = |u|^{p-2}u$$

denklemin çözümünün üstel büyümesi incelenmiştir.

5.2 Öneriler

Bu problemlerin çözümlerinin patlaması, enerji azalması gibi matematiksel özellikleri de çalışılabilir.

Sınırlı bir Ω bölgesinde yapılan bu çalışmalar sınırsız bölgede de yapılabilir.

6.KAYNAKLAR

- Adams, R. A. ve Fournier, J. J. F. 2003, Sobolev Spaces, *Academic Press*.
- Brezis, H. 2011, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, *Springer*.
- Dang J., Hu Q., Xia S. ve Zhang H. 2017, Exponential Growth of Solition for a Class of Reaction Diffusion Equation with Memory and Multiple Nonlinearities, *Research in Applied Mathematics*, 1-9.
- Evans, L. C. 1998, Partial differential equations, *Graduate Studies in Mathematics*.
Hu Q., Qi L. ve Zhang H. 2014, Blow up solitions for a reaction diffusion equation with memory and multiple nonlinearities, *Journal of Advances in Mathematics*, 6(3), 1050-1055.
- Karpusov M. O. ve Sveshnikov A. G. 2008, Sufficent close-to-necessary cpnditions for the blow-up of solutions to a strongly nonlinear generalized Boussinesq equation, 48(9), 1591-1599
- Kesevan, S. 2003, Topics in fuctional analysis and applications, *John Wiley Sons*.
- Messaoudi S. A. ve Haouari S. B. 2010, Global nonexistence of positive initial-energy solitions of a system of nonlinear viscoelastic wave equations with damping and source terms, 365, 277-287.
- Ouaoua A., Khaldi A. ve Maouni M. 2020, Stabilization of solutions for a Kirchhoff type reaction-diffusion equation, *Canad. J. Appl. Math.*, 2(2), 71-80.
- Ouaoua A. ve Boughamsa W. 2022, Exponential growth of solution for a couple of semi-linear pseudo-parabolic equations with memory and source terms, 2(1), 43-52.
- Ouaoua A. ve Maouni M. 2019, Blow-up, exponential growth of solution for a nonlinear parabolik equation with $p(x)$ -Laplacian, *Int. J. Anal. Appl.*, 17(4), 620-929.
- Pang J. ve Qiao B. 2015, Blow up solitions for initial boundary value problem of reaction diffusion equations, *Journal of Advances in Mathematics*, 10(1), 3138-3144.
- Pişkin, E., 2017, Sobolev Uzayları, *Seçkin Yayınları*.
- Pişkin E., 2021, Evolüsyon Denklemlerin Çözümlerinin Patlaması, *Pegem Akademi*.
- Pişkin E. ve Butakın G. 2023, Existence and Decay of Solutions for Parabolik-Type Kirchhoff Equation with Variable Exponents, 6(1), 32-41.
- Pişkin E. ve Ekinci F. 2023, Blow up and growth of solitions to a viscoelastic parabolic type Kirchhoff equation, *Filomat*, 37(2), 519-530.

- Pişkin E. ve Ekinçi F. 2021, Qualitative analysis of solitions for a Kirchhoff-type parabolic equation with multiple nonlinearities, *Hacettepe Journal of Mathematics & Statistics*, 50(2), 397-413.
- Pişkin E. ve Ekinçi F. 2020, Blow up and growth of solitions for a parabolic type Kirchhoff equation with multiple nonlinearities, *Konuralp Journal of Matematics*, 8(1),216-222.
- Pişkin E. ve Ekinçi F. 2019, Nonexistence and growth of solutions for a parabolic p-Laplacian system, *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, 10(3),301-307.
- Polat N. 2007, Blow up of solitions for a nonlinear reaction diffusion equation with multiple nonlinearities, *International Journal of Science and Technology*, 2(2), 123-128.

