



T.C.
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(κ, μ) – PARAKONTAK METRİK MANİFOLDLARIN
GEOMETRİSİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MUSTAFA ARSLAN

EYLÜL

(κ, μ) –PARAKONTAK METRİK MANİFOLDLARIN
GEOMETRİSİ ÜZERİNE

Mustafa ARSLAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİMDALI

Danışman

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EYLÜL 2024

Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Mustafa ARSLAN tarafından hazırlanan “ (κ, μ) –Parakontak Metrik Manifoldların Geometrisi Üzerine” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Başkan: Doç. Dr. İnan ÜNAL

Bilgisayar Mühendisliği Anabilim Dalı, Munzur Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Doç. Dr. Süleyman DİRİK

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 27/09/2024

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
 - Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
 - Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
 - Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
 - Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,
- bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

(İmza)

Mustafa ARSLAN

(Tarih)

(κ, μ) –PARAKONTAK METRİK MANİFOLDLARIN
 GEOMETİRİSİ ÜZERİNE
 (Yüksek Lisans Tezi)

Mustafa ARSLAN

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
 FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Eylül 2024

ÖZET

Bu çalışmada bir (κ, μ) -parakontak metrik manifold üzerinde semikonformal eğrilik tensörünün sağladığı bazı özellikler araştırılmıştır. Öncelikle bir (κ, μ) -parakontak metrik manifoldun semikonformal semisimetrik olması durumunda ortaya çıkan sonuçlar incelenmiş ve bu sonuçlara göre manifold hakkında bazı karakterizasyonlar verilmiş, sonrasında ise bazı eğrilik tensörleri ve semikonformal eğrilik tensörünün birbirlerine göre türev etkisi araştırılmıştır. Hesaplanan sonuçlara göre bir (κ, μ) -parakontak metrik manifoldun indirgendiği durumlar verilmiştir.

Sayfa adedi	: 26
Anahtar kelimeler	: Semikonformal eğrilik tensörü, (κ, μ) -parakontak metrik manifold, Semisimetrik manifold.
Danışman	: Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

ON THE GEOMETRY OF (κ, μ) -PARACONTACT METRIC MANIFOLD

(M. Sc. Thesis)

Mustafa ARSLAN

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

September 2024

ABSTRACT

In this study, some properties provided by the semiconformal curvature tensor on a (κ, μ) -paracontact metric manifold are investigated. First of all, the results that occur when a (κ, μ) -paracontact metric manifold is semiconformal and semisymmetric are examined and some characterizations about the manifold are given according to these results, and then the derivative effects of some curvature tensors and the semiconformal curvature tensor with respect to each other are investigated. According to the calculated results, the situations in which a (κ, μ) -paracontact metric manifold is reduced are given.

Number of pages : 26
Keywords : Semiconformal curvature tensor, (κ, μ) –paracontact metric manifold, Semisymmetric manifold.
Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Ümit YILDIRIM

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın her aşamasında ilgi ve desteğini esirgemeyen, bilgi ve birikiminden yararlandığım, yönlendirmeleri ile çalışmama her türlü bilimsel desteği sağlayan çok kıymetli danışman hocam Doç. Dr. Ümit YILDIRIM' a sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMAR.....	2
3. PARAKONTAK MANİFOLDLAR	12
3.1 Hemen Hemen Parakontak Manifoldlar	12
3.2 Hemen Hemen Parakontak Metrik Manifoldlar	12
3.3 (κ, μ) -Parakontak Metrik Manifoldlar	13
4. BULGULAR	14
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	22
KAYNAKLAR.....	23
ÖZGEÇMİŞ	26

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{R}$	Reel sayılar cümlesi
I, J	Sonlu indis cümleleri
d	Metrik fonksiyon
M	Düzgün manifold
$T_M(q)$	M nin q noktasındaki tanjant uzayı
Υ	M manifoldu üzerinde vektör alanı
$\chi(M)$	M manifoldu üzerinde vektör alanları uzayı
$[\]$	Lie parantez (bracket) operatörü
$C^\infty(M, \mathbb{R})$	Diferansiyellenebilir fonksiyonlar cümlesi
g	Riemann metriği
f_*	f nin türev dönüşümü
∇	M üzerinde Levi-Civita konneksiyonu
R	Riemann eğrilik tensörü
Q	Ricci operatörü
S	Ricci eğrilik tensörü
ϕ	$(1,1)$ – tipinde tensör alanı
ξ	Karakteristik vektör alanı
η	Kontakt form

1. GİRİŞ

Diferansiyel geometride manifoldlar teorisi en önemli çalışma alanlarında biridir. Başta fizik olmak üzere diğer bir çok disiplinde çok önemli uygulamaları vardır. Kuantum teorisi, genel görelilik teorisi, otonom sistemler bunlardan bazılarıdır. Özellikle manifoldlar üzerindeki yapıların incelenmesi ve eğrilik kavramı, manifoldları bu kavram üzerinde karakterize etme fırsatı sunmuştur. Manifoldlar üzerinde tanımlanan eğrilik tensörleri aracılığı ile manifoldların özel durumları incelenerek, eğrilik hesaplamaları yapılmakta ve daha genel manifoldların bu tensörler aracılığı ile özel bazı manifold türlerine indirgenme şartlarına dair sonuçlar verilebilmektedir. Bu tensörlerden başında gelen Riemann eğrilik tensörü ve daha sonraki zamanlarda Riemann eğrilik tensörünün daha genel durumu olarak ortaya çıkan pek çok eğrilik tensörü vardır. Bu tensörlerden bu çalışmada ele alınan konharmonik transformasyon altında invaryant kalan, (1,3)-tipinde bir tensör olan semikonformal eğrilik tensörü 2017 yılında Kim (Kim, 2017) tarafından tanımlanmıştır ve $\forall Y_1, Y_2, Y_3 \in \chi(M)$ için

$$P(Y_1, Y_2)Y_3 = -(n-2)bC(Y_1, Y_2)Y_3 + [a + (n-2)b]H(Y_1, Y_2)Y_3 \quad (1.1)$$

ile verilir. Burada C manifold üzerinde konformal eğrilik tensörü, H ise yine manifold üzerinde tanımlı konharmonik eğrilik tensörüdür. a ve b ise aynı anda sıfır olmayan sabitlerdir.

Parakontak geometri ile ilgili ilk çalışmalar Kaneyuki ve Williams (Kaneyuki ve Williams, 1985) tarafından başlatılmıştır. Sonrasında pek çok geometrici tarafından çalışılan kontak ve parakontak yapılar son zamanlarda diferansiyel geometrinin popüler konularındandır. Parakontak manifoldlar ve parakontak metrik manifoldların altmanifoldları ile ilgili ilk sistematik çalışmayı ise Zamkovoy (Zamkovoy, 2009) yapmıştır. Son zamanlarda ise Cappelletti-Montano (Cappelletti Montano ve ark. 2012) ve arkadaşları tarafından (κ, μ) –parakontak metrik manifold kavramı tanımlanmıştır. Bir hemen hemen parakontak metrik manifoldun Riemann eğrilik tensörü R

$$R(Y_1, Y_2)\xi = k(\eta(Y_2)Y_1 - \eta(Y_1)Y_2) + \mu(\eta(Y_2)hY_1 - \eta(Y_1)hY_2) \quad (1.2)$$

şartını sağlıyorsa bu manifolda (κ, μ) –parakontak metrik manifold adını verdiler. Bu tez çalışmasında bir (κ, μ) –parakontak metrik manifoldu üzerinde tanımlanan semikonformal eğrilik tensörünün sağladığı şartları incelenerek ortaya çıkan sonuçlara göre bir (κ, μ) –parakontak metrik manifoldunu karakterize eden bazı sonuçlar verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmada yararlanacağımız tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.1: X bir küme olmak üzere ve τ , X in kuvvet kümesinde bir alt küme olmak üzere, eğer;

- i) $X, \emptyset \in \tau$
- ii) I herhangi sayıda bir indis kümesi olmak üzere $\forall \{A_i\}_{i \in I} \subset \tau$ için $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$
Yani τ da alınan herhangi sayıdaki elemanlar birleşimi τ ya aittir.
- iii) J sonlu bir indis kümesi olmak üzere $\forall \{A_i\}_{i \in J} \subset \tau$ için $\bigcap_{i \in J} A_i \in \tau$
Yani τ da alınan sonlu sayıdaki elemanlar kesişimi τ ya aittir.

koşulları sağlanırsa τ ya X üzerinde bir topoloji, τ topolojisi ile donatılmış X kümesine veya (X, τ) ikilisine bir topolojik uzay denir (Aslım, 1988).

Tanım 2.2: (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere X in açık alt kümelerinden bir sınıf B olsun. X in her açık altkümesi B nin elemanlarının herhangi bir birleşimi olarak yazılabiliyorsa B ye X uzayının bir bazı denir (Aslım, 1988).

Tanım 2.3: X boş olmayan bir küme ve $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere $\forall x, y, z \in X$ için

- i) $x \neq y$ için $d(x, y) > 0$
- ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- iii) $d(x, y) = d(y, x)$
- iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

koşulları sağlanıyorsa d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik denir (Aslım, 1988).

Tanım 2.4: X topolojik uzay ve $x \in X$ olmak üzere x noktasını içeren $U \subset X$ kümesinin her N üst kümesine x noktasının bir komşuluğu denir (Aslım, 1988).

Tanım 2.5: (X, τ) ve (X', τ') herhangi topolojik uzaylar olmak üzere bir $f : X \rightarrow X'$ biçiminde tanımlanan fonksiyon ve $x_o \in X$ olsun. $f(x_o)$ ın X' uzayında her N' komşuluğu için $f(N) \subset N'$ koşulunu sağlayan x_o ın bir N komşuluğu varsa, f fonksiyonu τ ve τ' ye göre süreklidir denir (Aslım, 1988).

Tanım 2.6: $f : X \rightarrow X'$ fonksiyonu birebir, örten, sürekli ve tersi de sürekli ise, f fonksiyonuna bir *homeomorfizm* (topolojik dönüşüm) denir. X ve X' uzaylarına da *homeomorfiktirler* denir (Aslım, 1988).

Tanım 2.7: X topolojik uzayından alınan farklı x ve y noktaları için kesişimi boş küme olan x noktasının K komşuluğu ve y noktasının L komşuluğu varsa X topolojik uzayına *Hausdorff uzayı* ($H - uzayı$) denir (Aslım, 1988).

Tanım 2.8: (X, τ) topolojik uzayının açık alt örtüleri K ve M olsun. $K = \{k_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ve $L = \{l_\alpha\}_{\alpha \in J}$ olmak üzere L nin her bir açık kümesi K nın bir açık kümesi içinde bulunuyorsa L ye K nın incelti miş idir denir. (X, τ) topolojik uzayı bir Hausdorff uzay ve her açık örtüsünün de bir lokal sonlu incelmesi var ise (X, τ) 'ya *parakompakt* denir (Aslım, 1988).

Tanım 2.9: X bir Hausdorff uzayı olmak üzere herhangi bir $U \subset X$ açık kümesinden $V \subset \mathbb{R}^n$ açık kümesine tanımlanan

$$\varphi: U \rightarrow V$$

homeomorfizmine, X te n -boyutlu koordinat sistemi veya harita, U açık kümesine de φ haritasının koordinat komşuluğu veya koordinat bölgesi denir ve (U, φ) şeklinde gösterilir (Hacısalıhoğlu, 1980).

Tanım 2.10: M bir topolojik uzay olsun. M nin her noktasının $\mathbb{R}^n$ uzayına veya $\mathbb{R}^n$ uzayının bir U açık alt kümesine homeomorf olan bir koordinat komşuluğu var ise, M ye $n - boyutlu$ *topolojik manifold* denir (Hacısalıhoğlu, 1980).

Tanım 2.11: X bir Hausdorff uzayı ve $k \geq 0$ şartını sağlayan bir tamsayı olsun. Eğer $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha): \alpha \in A, U_\alpha \subset X\}$ lokal koordinat ailesi aşağıdaki şartları sağlıyor ise bu aileye X üzerinde C^k sınıftan bir atlas denir (Hacısalıhoğlu, 1980).

- i) Lokal haritaların U_α bölgesi X uzayını örter. Yani X , n -boyutlu topolojik manifolddur.
- ii) $\forall \alpha, \beta \in A$ için $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ olacak biçimde $\forall \alpha, \beta \in A$ için,

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

dönüşümü C^k sınıftandır (Hacısalıhoğlu, 1980).

Tanım 2.12: M bir n -boyutlu topolojik manifold ve $S = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_\alpha$ de M nin bir atlası olsun. Eğer S atlası aşağıdaki özelliğe sahip ise S ye C^r , $r \geq 1$, sınıftandır denir.

$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ olacak biçimde $\forall \alpha, \beta \in A$ için

$$\omega_{\alpha\beta} = \psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}: \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

ve

$$\omega_{\beta\alpha} = \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}: \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

fonksiyonları C^r sınıftandır. Eğer S atlası M üzerinde C^r sınıftan ise S ye M üzerinde bir C^r sınıftan diferansiyellenebilir yapı ve M ye n -boyutlu diferansiyellenebilir manifold denir (Hacısalıhoğlu, 1980).

Tanım 2.13: M bir manifold ve $q \in M$ olsun. $X_q: C(q) \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü

$$i) \quad X_q(af + bg) = aX_q(f) + bX_q(g), \quad \forall f, g \in C(q) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$ii) \quad X_q(f \cdot g) = X_q(f) \cdot g(q) + f(q) X_q(g)$$

özelliklerini sağlıyor ise X_q ye M nin q noktasındaki *tanjant vektörü* denir.

M nin q noktasındaki tanjant vektörlerin cümlesi $T_M(q)$ ile gösterilir ve

$T_M(q) = \left\{ \vec{V}_q \mid \vec{V}_q: C^\infty(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{\text{lineer ve leibnitz}} \mathbb{R} \right\}$ biçiminde gösterilir. Bu cümlede iç ve dış işlemler

$$\oplus: T_M(q) \times T_M(q) \rightarrow T_M(q)$$

$$(\vec{V}_q, \vec{W}_q) \rightarrow \vec{V}_q \oplus \vec{W}_q: C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\vec{V}_q \oplus \vec{W}_q)[f] = \vec{V}_q[f] + \vec{W}_q[f]$$

ve

$$\odot: \mathbb{R} \times T_M(q) \rightarrow T_M(q)$$

$$(\lambda, \vec{V}_q) \rightarrow \lambda \vec{V}_q: C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\lambda \vec{V}_q)[f] = \lambda \vec{V}_q[f], \quad \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklinde tanımlanırlar. Bu işlemlere göre $T_M(q)$ reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu uzaya M nin q noktasındaki *tanjant uzayı* denir (Hacısalıhoğlu, 1980).

Tanım 2.14: M , n - boyutlu bir manifold ve $q \in M$ noktasındaki tanjant uzayı $T_M(q)$ olsun.

$$T^*_M(q) = \{f \mid f: T^*_M(q) \xrightarrow{\text{lineer}} \mathbb{R}\}$$

biçiminde tanımlanan $T^*_M(q)$ uzayına $T_M(q)$ nin q noktasındaki *dual uzayı* veya *kotanjant uzay* denir (Hacısalıhoğlu, 1980).

Tanım 2.15: Reel sayılar cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı V ve V^* , V nin duali olsun.

$$L(V^r, V^{*s}; \mathbb{R}) = \{f \mid f: V^r \times V^{*s} \xrightarrow{(r+s)\text{-lineer}} \mathbb{R}\}$$

uzayında iç ve dış işlemler sırasıyla

$$(f \oplus g)(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s) + g(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s)$$

ve

$$(\lambda f)(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s) = \lambda f(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s)$$

şeklinde tanımlanırlar. Bu uzaya *r. mertebeden kovaryant ve s. mertebeden kontravaryant tensör uzayı* denir. Bu uzayın elemanlarına da *(r, s) mertebeli tensör* denir (Boothby, 1986).

Tanım 2.16: *M* diferensiyellenebilir bir manifold ve *M* üzerindeki diferansiyellenebilir fonksiyonların cümlesi $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere

$Y: C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ dönüşümü

$$i) \quad Y(af + bg) = aY(f) + bY(g), \quad \forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R}) \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$ii) \quad Y(f \cdot g) = Y(f) \cdot g + fY(g)$$

özelliklerini sağlıyor ise *Y* a *M* üzerinde bir *vektör alanı* denir. *M* üzerindeki vektör alanların cümlesi $\chi(M)$ ile gösterilir (Boothby, 1986).

Tanım 2.17: *M* diferansiyellenebilir manifold ve *M* üzerindeki vektör alanları cümlesi $\chi(M)$ olmak üzere $Y_1, Y_2, Y_3 \in \chi(M)$ için

$$[,]: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M), \quad \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$[Y_1, Y_2] = Y_1(Y_2 f) - Y_2(Y_1 f)$$

ile tanımlanan fonksiyona Y_1 ve Y_2 nin *Lie parantez (bracket) operatörü* denir ve aşağıdaki özellikleri sağlamaktadır (Yano ve Kon, 1984).

$$i) \quad [Y_1, Y_2]f \in C^\infty(M, \mathbb{R}),$$

$$ii) \quad [fY_1 + gY_2] = f[Y_1, Y_2] + f(Y_1[g])Y_2 - g(Y_2[f])Y_1,$$

$$iii) \quad [Y_1, Y_2] = -[Y_2, Y_1],$$

$$iv) \quad [[Y_1, Y_2], Y_3] + [[Y_2, Y_3], Y_1] + [[Y_1, Y_3], Y_2] = 0.$$

Tanım 2.18: M ve $\bar{M}$ m ve n boyutlu diferensiyellenebilir manifoldlar ve $f: M \rightarrow \bar{M}$ fonksiyonu q noktasında diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$f_*: T_M(q) \rightarrow T_{\bar{M}}(f(q))$$

$$V_q \rightarrow f_*|_q(V_q) = (\bar{V}_q[f_1]|_{f(q)}, \dots, \bar{V}_q[f_n]|_{f(q)})$$

ile tanımlı f_* dönüşümüne f nin *türev dönüşümü* denir. Eğer $g \in C(\bar{M}, \mathbb{R})$, $f(q)$ nin komşuluğunda diferensiyellenebilir bir fonksiyon ise

$$(f_*(V_q))g = V_q(g \circ f)$$

dır (Hacısalıhoğlu, 1980).

Tanım 2.19: M bir manifold ve g, M üzerinde $(2,0)$ mertebeli tensör alanı olsun. Eğer g tensör alanı her $Y_1, Y_2 \in \chi(M)$ için

$$i) \quad g(Y_1, Y_2) = g(Y_2, Y_1)$$

$$ii) \quad g(Y_1, Y_1) \geq 0 \text{ ve } g(Y_1, Y_1) = 0 \Leftrightarrow Y_1 = 0$$

şartları sağlanıyor ise g ye *Riemann metriği* denir. g Riemann metriği ile tanımlı bir manifoldta da *Riemann manifoldu* denir. Bir M manifoldu üzerindeki g Riemann metriği $T_M(q)$ üzerinde iç çarpım ile tanımlanır.

$\{x_1, \dots, x_n\}$ M de lokal koordinat sistemi olsun. Burada g nin bu lokal koordinat sistemine göre bileşenleri,

$$g_{ij} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$$

ile verilir. Burada $\frac{\partial}{\partial x_i}, 1 \leq i \leq n, T_M(q)$ uzayının bir bazıdır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.20: M bir diferensiyellenebilir manifold ve M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} \nabla: \chi(M) \times \chi(M) &\xrightarrow{2-linear} \chi(M) \\ (Y_1, Y_2) &\longrightarrow \nabla(Y_1, Y_2) = \nabla_{Y_1} Y_2 \end{aligned}$$

dönüşümü $\forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R}), \forall Y_1, Y_2, Y_3 \in \chi(M)$ için,

$$i) \quad \nabla_{Y_1}(Y_2 + Y_3) = \nabla_{Y_1} Y_2 + \nabla_{Y_1} Y_3,$$

$$ii) \quad \nabla_{fY_1 + gY_2} Y_3 = f \nabla_{Y_1} Y_3 + g \nabla_{Y_2} Y_3,$$

$$iii) \quad \nabla_{Y_1}(fY_2) = f \nabla_{Y_1} Y_2 + Y_1(f)Y_2$$

özelliklerini sağlarsa, ∇ ya M üzerinde bir *afin konneksiyon*, ∇_{Y_1} e de Y_1 e göre kovaryant türev operatörü denir (Hacısalıhoğlu, 1980).

Tanım 2.21: (M, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde tanımlanan bir afin konneksiyon olsun. O zaman $\forall Y_1, Y_2, Y_3 \in \chi(M)$ olmak üzere ∇ dönüşümü,

$$i) \quad \nabla_{Y_1} Y_2 - \nabla_{Y_2} Y_1 = [Y_1, Y_2] \text{ (Konneksiyonun sıfır torsiyon özelliği)}$$

$$ii) \quad Y_1 g(Y_2, Y_3) = g(\nabla_{Y_1} Y_2, Y_3) + g(Y_2, \nabla_{Y_1} Y_3) \text{ (Konneksiyonun metrikle bağdaşma özelliği)}$$

şartlarını sağlıyorsa ∇ ya M üzerinde sıfır torsiyonlu konneksiyon, Riemann konneksiyonu veya *Levi-Civita Konneksiyonu* denir (Hacısalıhoğlu, 1980).

Tanım 2.22: (M, g) Riemann manifoldu ve $Y_1 \in \chi(M)$ için L_{Y_1} , keyfi (r, s) -tipinde tensör alanını yine (r, s) -tipinde tensör alanına götürür ve Y_1 vektör alanına göre *Lie türev operatörü* olarak adlandırılır. $Y_2 \in \chi(M)$ için

$$L_{Y_1}Y_2 = [Y_1, Y_2]$$

şeklinde tanımlıdır. $f \in C(M, \mathbb{R})$ için $L_{Y_1}f = Y_1(f)$ dir. Her $Y_2, Y_3 \in \chi(M)$ için g -Riemann metrik tensörünün Y_1 -vektör alanlarına göre Lie- türevi

$$\begin{aligned} (L_{Y_1}g)(Y_2, Y_3) &= L_{Y_1}g(Y_2, Y_3) - g(L_{Y_1}Y_2, Y_3) - g(Y_2, L_{Y_1}Y_3) \\ &= Y_1(g(Y_2, Y_3)) - g([Y_1, Y_2], Y_3) - g(Y_2, [Y_1, Y_3]) \\ &= g(\nabla_{Y_1}Y_2, Y_3) + g(Y_2, \nabla_{Y_1}Y_3) - g(\nabla_{Y_1}Y_2, Y_3) \\ &\quad + g(\nabla_{Y_2}Y_1, Y_3) - g(Y_2, \nabla_{Y_1}Y_3) + g(Y_2, \nabla_{Y_3}Y_1) \\ &= g(\nabla_{Y_2}Y_1, Y_3) + g(Y_2, \nabla_{Y_3}Y_1) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $L_{Y_1}g = 0$ ise Y_1 vektör alanına *Killing vektör alanı* denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.23: (M, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olsun.

$$\begin{aligned} R: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ R(Y_1, Y_2)Y_3 &= \nabla_{Y_1}\nabla_{Y_2}Y_3 - \nabla_{Y_2}\nabla_{Y_1}Y_3 - \nabla_{[Y_1, Y_2]}Y_3 \end{aligned}$$

ile tanımlanan R dönüşümü $(1,3)$ tipinde tensör alanıdır. Bu tensör M nin *Riemann eğrilik tensörü* olarak adlandırılır (O'Neill, 1983).

$\forall Y_4 \in \chi(M)$ için $K(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) = g(R(Y_1, Y_2)Y_3, Y_4)$ tensörüne de M nin *Riemann-Christoffel eğrilik tensörü* denir.

Teorem 2.1: $\forall Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 \in \chi(M)$ Riemann eğrilik tensörü aşağıdaki özelliklere sahiptir. (O'Neill, 1983).

- i) $R(Y_1, Y_2)Y_3 = -R(Y_2, Y_1)Y_3$
- ii) $g(R(Y_1, Y_2)Y_4, Y_5) = -g(R(Y_1, Y_2)Y_5, Y_4)$
- iii) $R(Y_1, Y_2)Y_3 + R(Y_2, Y_3)Y_1 + R(Y_3, Y_1)Y_2 = 0$
- iv) $g(R(Y_1, Y_2)Y_4, Y_5) = g(R(Y_4, Y_5)Y_1, Y_2)$

Tanım 2.24: Bir n -boyutlu Riemann manifoldu (M, g) üzerinde Riemann eğrilik tensörü R ve $\chi(M)$ nin bir bazı $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olsun.

$$Q: \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$Y_1 \rightarrow QY_1 = \sum_{i=1}^n R(Y_1, e_i)e_i$$

şeklinde tanımlanan Q operatörüne *Ricci Operatörü* denir.

Tanım 2.25: Bir n -boyutlu Riemann manifoldu (M, g) ve R de M Riemann manifoldunun eğrilik tensörü olsun. $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ cümlesi $\chi(M)$ nin ortonormal vektör alanları olmak üzere $\forall Y_1, Y_2 \in \chi(M)$ için

$$S: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$(Y_1, Y_2) \rightarrow S(Y_1, Y_2) = \sum_{i=1}^n g(R(e_i, Y_1)Y_2, e_i)$$

dönüşümü ile tanımlı $(0,2)$ –mertebeli

$$S(Y_1, Y_2) = \sum_{i=1}^n g(R(e_i, Y_1)Y_2, e_i)$$

tensör alanına (M, g) manifoldunun *Ricci eğrilik tensörü* adı verilir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.26: (M, g) , n -boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, \dots, e_n\}$, $\chi(M)$ 'nin ortonormal bir bazı olmak üzere

$$\tau = \sum_{i=1}^n S(e_i, e_i)$$

fonksiyonuna M nin *skaler eğriliği* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.27: (M, g) , n -boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. $\forall Y_1, Y_2 \in \chi(M)$ için

$$S(Y_1, Y_2) = \lambda g(Y_1, Y_2) \quad (2.1)$$

olacak biçimde M üzerinde bir λ fonksiyonu var ise yani M nin Ricci tensörü S , metrik tensör g nin bir katı ise M ye *Einstein manifoldu* adı verilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.28: M , n -boyutlu Riemann manifoldu olsun. S Ricci tensörü için eğer $\forall Y_1, Y_2 \in \chi(M)$ olmak üzere

$$S(Y_1, Y_2) = ag(Y_1, Y_2) + b\eta(Y_1)\eta(Y_2) \quad (2.2)$$

eşitliği sağlanıyor ise M 'ye η -Einstein manifoldu denir (Boothby, 1986).

Tanım 2.29: Bir n -boyutlu Riemann manifoldu (M, g) ve M manifoldunun bir q noktasındaki tanjant uzayı $T_q M$ ve $T_q M$ uzayının 2-boyutlu bir alt uzayı Π olsun. Π düzlemini geren birim vektörler Y_1 ve Y_2 olmak üzere

$$K(\Pi) = K(Y_1, Y_2) = \frac{g(R(Y_1, Y_2)Y_2, Y_1)}{g(Y_1, Y_1)g(Y_2, Y_2) - g(Y_1, Y_2)^2} \quad (2.3)$$

ifadesine M manifoldunun Π düzlemine göre *kesit eğriliği* denir (Şahin, 2012).

3. PARAKONTAK MANİFOLDLAR

Bu bölümde bir manifoldun hangi şartlar altında hemen hemen parakontak manifold, hemen hemen parakontak metrik manifold, κ -parakontak manifold, (κ, μ) –parakontak manifold temel tanımlarına ve bir sonraki bölümde kullanılacak olan temel teoremlere yer verilmiştir.

3.1 Hemen Hemen Parakontak Manifolddlar

Tanım 3.1.1: $(2n + 1)$ -boyutlu diferansiyellenebilir bir M manifoldu için M^{2n+1} üzerinde $(1,1)$ tipinde tensör alanı ϕ , bir vektör alanı ξ ve 1-form η olmak üzere (ϕ, ξ, η) yapısı M^{2n+1} üzerinde eğer;

$$\eta(\xi) = 1, \quad \phi^2 = I - \eta \otimes \xi, \quad D = \text{çek} \eta \quad (3.1)$$

ise (ϕ, ξ, η) üçlüsü M üzerinde bir hemen hemen parakontak yapıdır denir. (M, ϕ, ξ, η) dörtlüsüne bir *hemen hemen parakontak manifold* denir (Zamkovoy, 2009).

Teorem 3.1.2: $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta)$ bir hemen hemen parakontak manifold olsun. O zaman

$$\phi(\xi) = 0, \quad \eta \circ \phi = 0, \quad \text{ran} \phi = 2n \quad (3.2)$$

eşitlikleri geçerlidir (Zamkovoy, 2009).

3.2 Hemen Hemen Parakontak Metrik Manifolddlar

Bu kısımda hemen hemen parakontak manifoldlar üzerinde bir metrik tanımlanacak ve bazı özellikleri ele alınacaktır.

Tanım 3.2.1: M bir Riemann manifoldu ve g , M üzerinde tanımlı metrik tensör olmak üzere; g metrik tensörünün indeksine Riemann manifoldunun *indeksi* denir ve $\text{ind}M$ ile gösterilir. O halde $0 \leq \text{ind}M \leq \text{boy}M$ dir. Özel olarak $2 \leq \text{ind}M$ ve $2 \leq \text{boy}M$ ise M ye semi-Riemann manifoldu ve g ye de *semi-Riemann metriği* denir (O'Neill, 1983).

Teorem 3.2.1: (M, ϕ, ξ, η) yapısı $(2n + 1)$ –boyutlu bir hemen hemen parakontak manifold olmak üzere, M manifoldu üzerinde bir g semi-Riemann metrik tensör alanı, $\forall Y_3 \in \chi(M)$ için

$$g(Y_3, \xi) = \eta(Y_3) \quad (3.3)$$

şeklinde tanımlanır (Zamkovoy, 2009).

Teorem 3.2.2: $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta)$ bir hemen hemen parakontak diferansiyellenebilir semi-Riemann manifold olmak üzere M üzerinde $\forall Y_3, Y_4 \in \chi(M)$ ve $\xi \in \chi(M)$ için,

$$g(\phi Y_3, \phi Y_4) = -g(Y_3, Y_4) + \eta(Y_3)\eta(Y_4), \quad g(Y_3, \xi) = \eta(Y_3) \quad (3.4)$$

şartlarını sağlayan bir g semi-Riemann metriği vardır (Zamkovoy, 2009).

Tanım 3.2.2: $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta)$ hemen hemen parakontak manifoldu olsun.(3.4) eşitliğini gerçekleştiren g semi-Riemann metriğine $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta)$ üzerinde *hemen hemen parakontak metrik*, (ϕ, ξ, η, g) yapısına *hemen hemen parakontak metrik yapı*, $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ beşlisine de *hemen hemen parakontak metrik manifold* adı verilir (Zamkovoy, 2009).

3.3 (κ, μ) -Parakontak Metrik Manifoldlar

Bu kısımda κ -parakontak yapı, κ -parakontak manifoldlar ve (κ, μ) –parakontak metrik manifoldlar tanıtılıp bazı temel tanım ve özellikler verilmiştir.

Tanım 3.2.3: $(2n + 1)$ -boyutlu bir M parakontak metrik manifoldu olmak üzere (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen parakontak metrik yapısında bulunan ξ vektör alanı g ye göre bir Killing vektör alanı ise M üzerindeki parakontak yapıya *κ -parakontak yapı* denir. M ye de *κ -parakontak manifold* denir (Zamkovoy, 2009).

Önerme 3.1.1: M^{2n+1} parakontak metrik manifoldu olmak üzere M^{2n+1} in κ -parakontak manifolddur ancak ve ancak her $Y_3 \in \chi(M)$ için

$$\nabla_{Y_3}\xi = -\phi Y_3 \quad (3.5)$$

dir (Zamkovoy, 2009).

Önerme 3.1.2: M^{2n+1} bir κ -parakontak manifold olsun. Q, M^{2n+1} de eğrilik operatörü olmak üzere

$$Q\xi = -2n\xi$$

dir (Zamkovoy, 2009).

Tanım 3.2.4: $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen parakontak metrik manifoldu ve R de bu manifoldun Riemann eğrilik tensörü ve $Y_1, Y_2; M$ üzerinde birer vektör alanı, ayrıca κ ve μ birer reel sabit olmak üzere, $\forall Y_1, Y_2 \in \chi(M)$ için,

$$R(Y_1, Y_2)\xi = k(\eta(Y_2)Y_1 - \eta(Y_1)Y_2) + \mu(\eta(Y_2)hY_1 - \eta(Y_1)hY_2) \quad (3.6)$$

sağlanıyor ise bu manifolda (κ, μ) -parakontak metrik manifold denir (Cappelletti ve Terlizzi, 2010).

Yardımcı Teorem 3.3.1: $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen parakontak metrik (κ, μ) -manifoldunda; Y_1 ve Y_2, M üzerinde vektör alanları ve $Q, (M, g)$ nin Ricci operatörü olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır (Cappelletti Montano ve ark. 2012).

$$h^2 = (1 + \kappa)\phi^2, \quad (3.7)$$

$$Q\xi = 2n\kappa\xi, \quad (3.8)$$

$$(\nabla_{Y_1}\phi)Y_2 = -g(Y_1 - hY_1, Y_2)\xi + \eta(Y_2)(Y_1 - hY_1), \quad \kappa \neq -1, \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} (\nabla_{Y_1}h)Y_2 - (\nabla_{Y_2}h)Y_1 = & -(1 + \kappa)(2g(Y_1, \phi Y_2)\xi + \eta(Y_1)\phi Y_2 - \eta(Y_2)\phi Y_1) \\ & + (1 - \mu)(\eta(Y_1)\phi hY_2 - \eta(Y_2)\phi hY_1), \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned}
QY_1 = & [2(1-n) + n\eta]Y_1 + [2(n-1) + \mu]hY_1 \\
& + [2(n-1) + n(2\kappa - \mu)]\eta(Y_1)\xi,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\nabla_\xi h = \mu h \circ \phi, \quad \nabla_\xi \phi h = -\mu h, \tag{3.12}$$



4. BULGULAR

2017 yılında Kim (Kim, 2017), konharmonik transformasyon altında invaryant kalan (1,3)-tipinde semikonformal eğrilik tensörünü tanımladı. (M^n, g) Riemann manifoldu üzerinde (1,3)-tipinde semikonformal eğrilik tensörü P , $\forall Y_1, Y_2, Y_3 \in \chi(M)$ için,

$$P(Y_1, Y_2)Y_3 = -(n-2)bC(Y_1, Y_2)Y_3 + [a + (n-2)b]H(Y_1, Y_2)Y_3 \quad (4.1)$$

eşitliği şeklinde tanımlıdır. Burada a ve b aynı anda sıfır olmayan sabitlerdir. Öte yandan C konformal eğrilik tensörü olup $\forall Y_1, Y_2, Y_3 \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned} C(Y_1, Y_2)Y_3 &= R(Y_1, Y_2)Y_3 \\ &\quad - \frac{1}{n-2} [S(Y_2, Y_3)Y_1 - S(Y_1, Y_3)Y_2 + g(Y_2, Y_3)QY_1 - g(Y_1, Y_3)QY_2] \\ &\quad + \left[\frac{r}{(n-1)(n-2)} \right] [g(Y_2, Y_3)Y_1 - g(Y_1, Y_3)Y_2] \end{aligned} \quad (4.2)$$

olur. Aynı zamanda H ise konharmonik eğrilik tensörü olup,

$$\begin{aligned} H(Y_1, Y_2)Y_3 &= R(Y_1, Y_2)Y_3 \\ &\quad - \frac{1}{n-2} [S(Y_2, Y_3)Y_1 - S(Y_1, Y_3)Y_2 + g(Y_2, Y_3)QY_1 - g(Y_1, Y_3)QY_2] \end{aligned} \quad (4.3)$$

biçiminde tanımlıdır. r manifoldun skaler eğriliği, Q manifoldun Ricci operatörü, S ise Ricci tensörüdür. $g(QY_1, Y_2) = S(Y_1, Y_2)$ dir.

Burada (4.1) eşitliğinde (4.2) ve (4.3) eşitlikleri yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} P(Y_1, Y_2)Y_3 &= -(2n-1)bR(Y_1, Y_2)Y_3 + \frac{-(2n-1)b}{2n-1} [S(Y_2, Y_3)Y_1 - S(Y_1, Y_3)Y_2 \\ &\quad + g(Y_2, Y_3)QY_1 - g(Y_1, Y_3)QY_2] \\ &\quad + \frac{-(2n-1)br}{2n(2n-1)} [g(Y_2, Y_3)Y_1 - g(Y_1, Y_3)Y_2] \\ &\quad + [a + (2n-1)b]R(Y_1, Y_2)Y_3 \\ &\quad - \frac{[a + (2n-1)b]}{2n-1} [S(Y_2, Y_3)Y_1 - S(Y_1, Y_3)Y_2 \\ &\quad + g(Y_2, Y_3)QY_1 - g(Y_1, Y_3)QY_2] \end{aligned} \quad (4.4)$$

eşitliği bulunur.

Son eşitlikte gerekli sadeleştirmeler yapıldığında, $P(Y_1, Y_2)Y_3$ semikonformal eğrilik tensörü,

$$P(Y_1, Y_2)Y_3 = a.H(Y_1, Y_2)Y_3 - \frac{br}{2n}[g(Y_2, Y_3)Y_1 - g(Y_1, Y_3)Y_2] \quad (4.5)$$

biçimine indirgenir.

Ayrıca (4.3) eşitliğinde $Y_3 = \xi$ olarak seçilirse;

$$\begin{aligned} H(Y_1, Y_2)\xi &= R(Y_1, Y_2)\xi \\ &- \frac{1}{2n-1}[S(Y_2, \xi)Y_1 - S(Y_1, \xi)Y_2 + g(Y_2, \xi)QY_1 - g(Y_1, \xi)QY_2] \end{aligned} \quad (4.6)$$

olur. Bu eşitlikte (2.2), (3.4), (3.6), (3.11) eşitlikleri kullanılır ise,

$$\begin{aligned} H(Y_1, Y_2)\xi &= \kappa[\eta(Y_2)Y_1 - \eta(Y_1)Y_2] + \mu[\eta(Y_2)hY_1 - \eta(Y_1)hY_2] \\ &- \frac{1}{2n-1}[2n\kappa\eta(Y_2)Y_1 - 2n\kappa\eta(Y_1)Y_2] \\ &- \frac{1}{2n-1}[[2(1-n) + n\mu]\eta(Y_2)Y_1 + [2(1-n) + \mu]h\eta(Y_2)Y_1 \\ &+ [2(n-1) + n(2\kappa - \mu)]\eta(Y_1)\eta(Y_2)\xi \\ &- [2(1-n) + n\mu]\eta(Y_1)Y_2 - [2(n-1) + \mu]h\eta(Y_1)Y_2 \\ &- [2(n-1) + n(2\kappa - \mu)]\eta(Y_1)\eta(Y_2)\xi \end{aligned} \quad (4.7)$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapılır ise,

$$\begin{aligned} H(Y_1, Y_2)\xi &= \kappa[\eta(Y_2)Y_1 - \eta(Y_1)Y_2] + \mu[\eta(Y_2)hY_1 - \eta(Y_1)hY_2] \\ &- \frac{2n\kappa}{2n-1}[\eta(Y_2)Y_1 - \eta(Y_1)Y_2] \\ &- \frac{[2(1-n) + n\mu]}{2n-1}[\eta(Y_2)Y_1 - \eta(Y_1)Y_2] \\ &- \frac{[2(n-1) + \mu]}{2n-1}[h\eta(Y_2)Y_1 - h\eta(Y_1)Y_2] \end{aligned} \quad (4.8)$$

bulunur. Buradan,

$$H(Y_1, Y_2)\xi = \left[\kappa - \frac{2n\kappa}{2n-1} - \frac{[2(1-n) + n\mu]}{2n-1} \right] [\eta(Y_2)Y_1 - \eta(Y_1)Y_2]$$

$$+ \left[\mu - \frac{[2(n-1) + \mu]}{2n-1} \right] [\eta(Y_2)hY_1 - \eta(Y_1)hY_2] \quad (4.9)$$

olup buradan da,

$$\begin{aligned} H(Y_1, Y_2)\xi = & - \left[\frac{(\kappa + 2) + n(\mu - 2)}{2n-1} \right] [\eta(Y_2)Y_1 - \eta(Y_1)Y_2] \\ & + \left[\frac{(2\mu - 2)(n-1)}{2n-1} \right] [\eta(Y_2)hY_1 - \eta(Y_1)hY_2] \end{aligned} \quad (4.10)$$

elde edilir. Son olarak $Y_2 = \xi$ seçtiğimizde ise

$$\begin{aligned} H(Y_1, \xi)\xi = & - \left[\frac{(\kappa + 2) + n(\mu - 2)}{2n-1} \right] [Y_1 - \eta(Y_1)\xi] \\ & + \frac{(2\mu - 2)(n-1)}{2n-1} Y_1 h \end{aligned} \quad (4.11)$$

elde edilir.

Ayrıca (4.5) eşitliğinde Y_1 yerine ξ seçtiğimizde,

$$P(\xi, Y_2)Y_3 = a.H(\xi, Y_2)Y_3 - \frac{br}{2n} [g(Y_2, Y_3)\xi - g(\xi, Y_3)Y_2] \quad (4.12)$$

bulunur. Bu eşitlikte $H(\xi, Y_2)Y_3$ ve $g(\xi, Y_3)$ eşitlikleri kullanıldığında ise

$$\begin{aligned} P(\xi, Y_2)Y_3 = & \left[\frac{a(2n - n\mu - 4)}{2n-1} - \frac{br}{2n} \right] [g(Y_2, Y_3)\xi - \eta(Y_3)Y_2] \\ & - \left[\frac{2a(n-1)(\mu-1)}{2n-1} \right] [g(hY_2, Y_3)\xi - \eta(Y_3)hY_2] \end{aligned} \quad (4.13)$$

elde edilir.

Benzer şekilde son olarak (4.5) eşitliğinde $Y_3 = \xi$ seçtiğimizde ise

$$\begin{aligned}
P(Y_1, Y_2)\xi &= \left[\frac{-a(\kappa + 2) - an(\mu - 2)}{2n - 1} - \frac{br}{2n} \right] [\eta(Y_2)Y_1 - \eta(Y_1)Y_2] \\
&+ \left[\frac{2a(n - 1)(\mu - 1)}{2n - 1} \right] [\eta(Y_2)hY_1 - \eta(Y_1)hY_2]
\end{aligned} \tag{4.14}$$

elde edilir.

Teorem 4.1: M , $(2n + 1)$ -boyutlu bir (κ, μ) –parakontak metrik manifoldu olmak üzere, M semikonformal semisimetriktir gerek ve yeter şart aşağıdaki ifadelerden en az biri doğrudur.

- i) M , bir $(\kappa, 1)$ –parakontak metrik manifolduna indirgenir.
- ii) M nin semikonformal eğrilik tensörü P olmak üzere $\forall Y_1, Y_2, Y_3 \in \chi(M)$ için

$$P(Y_1, Y_2)Y_3 = \frac{-br}{2n - 1} [g(Y_2, Y_3)Y_1 - g(Y_1, Y_3)Y_2] \tag{4.15}$$

biçimine indirgenir.

$$iii) \quad (\kappa + 1)(\kappa - \mu(\kappa + 1))h^2 + (\mu - \kappa)h = 0 \tag{4.16}$$

bağıntısı geçerlidir.

İspat: $(2n + 1)$ -boyutlu M (κ, μ) –parakontak metrik manifoldu semikonformal semisimetrik olsun.

O zaman $\forall Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 \in \chi(M)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
(R(Y_1, Y_2)P)(Y_4, Y_5, Y_3) &= R(Y_1, Y_2)P(Y_4, Y_5)Y_3 - P(R(Y_1, Y_2)Y_4, Y_5)Y_3 \\
&\quad - P(Y_4, R(Y_1, Y_2)Y_5)Y_3 - P(Y_4, Y_5)R(Y_1, Y_2)Y_3 \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.17}$$

olur. Bu eşitlikte $Y_3 = \xi$ seçtiğimizde ise,

$$0 = R(Y_1, Y_2)P(Y_4, Y_5)\xi - P(R(Y_1, Y_2)Y_4, Y_5)\xi$$

$$-P(Y_4, R(Y_1, Y_2)Y_5)\xi - P(Y_4, Y_5)R(Y_1, Y_2)\xi \quad (4.18)$$

bulunur. Burada (3.6) ve (4.14) eşitlikleri kullanılır ise,

$$\begin{aligned} 0 = & \left[\frac{-a(\kappa + 2) - a.n(\mu - 2)}{2n - 1} - \frac{br}{2n} \right] [\eta(R(Y_1, Y_2)Y_4)Y_5 - \eta(R(Y_1, Y_2)Y_5)Y_4] \\ & + \left[\frac{2a(\mu - 1)(n - 1)}{2n - 1} \right] [\eta(Y_5)R(Y_1, Y_2)hY_4 - \eta(Y_4)R(Y_1, Y_2)hY_5 \\ & - \eta(Y_5)h(R(Y_1, Y_2)Y_4) - \eta(R(Y_1, Y_2)Y_4)hY_5 - \eta(R(Y_1, Y_2)Y_5)hY_4 \\ & + \eta(Y_4)hR(Y_1, Y_2)Y_5] \\ & - \kappa[\eta(Y_2)P(Y_4, Y_5)Y_1 - \eta(Y_1)P(Y_4, Y_5)Y_2] \\ & - \mu[\eta(Y_2)P(Y_4, Y_5)hY_1 + \eta(Y_1)P(Y_4, Y_5)hY_2] \end{aligned} \quad (4.19)$$

eşitliği elde edilir. Son eşitlikte, $Y_4 = Y_2 = \xi$ alınırsa,

$$\begin{aligned} 0 = & \left[\frac{-a(\kappa + 2) - a.n(\mu - 2)}{2n - 1} - \frac{br}{2n} \right] [\eta(R(Y_1, \xi)\xi)Y_5 - \eta(Y_5)hR(Y_1, \xi)\xi] \\ & + \left[\frac{2a(\mu - 1)(n - 1)}{2n - 1} \right] [\eta(Y_5)R(Y_1, \xi)h\xi - \eta(\xi)R(Y_1, \xi)hY_5 \\ & - \eta(Y_5)h(R(Y_1, \xi)\xi) - \eta(R(Y_1, \xi)\xi)hY_5 - B\eta(R(Y_1, \xi)Y_5)h\xi \\ & + \eta(\xi)hR(Y_1, \xi)Y_5] \\ & - \kappa[\eta(\xi)P(\xi, Y_5)Y_1 - \eta(Y_1)P(\xi, Y_5)\xi] \\ & - \mu[\eta(\xi)P(\xi, Y_5)hY_1 + \eta(Y_1)P(\xi, Y_5)h\xi] \end{aligned} \quad (4.20)$$

bulunur. (4.20) eşitliğinde gerekli kısaltmalar yapılır ise,

$$\begin{aligned} 0 = & \left[\frac{2a(\mu - 1)(n - 1)}{2n - 1} \right] [\kappa g(Y_1, Y_5)\xi - \kappa\eta(Y_5)Y_1 + \mu g(hY_1, Y_5)\xi \\ & - \mu\eta(Y_5)hY_1 + \kappa\eta(Y_1)hY_5 - \eta(Y_1)hY_5 + \kappa\eta(Y_1)Y_5 - A\eta(Y_1)Y_5 \\ & - \kappa g(hY_5, Y_1)\xi + \kappa\eta(Y_1)hY_5 + \kappa hY_5\eta(Y_1) - \mu g(hY_5, hY_1)\xi] \end{aligned} \quad (4.21)$$

elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafına $\xi \in \chi(M)$ uygulanır ise,

$$0 = \left[\frac{2a(\mu - 1)(n - 1)}{2n - 1} \right] [\kappa g(Y_1, Y_5) - \kappa \eta(Y_1) \eta(Y_5) + \mu g(hY_1, Y_5) - A \eta(Y_1) \eta(Y_5) + \kappa \eta(Y_1) \eta(Y_5) - \kappa g(hY_5, Y_1) - \mu g(hY_5, hY_1)] \quad (4.22)$$

elde edilir. Eğer (4.22) eşitliğinde gerekli sadeleştirmeler yapılır ise,

$$0 = \left[\frac{2a(\mu - 1)(n - 1)}{2n - 1} \right] [\kappa [g(Y_1, Y_5) - \eta(Y_5) \eta(Y_1) - g(hY_5, Y_1)] + \mu [g(hY_1, Y_5) - g(hY_5, hY_1)]] \quad (4.23)$$

olur. Burada

$$\frac{2a(\mu - 1)(n - 1)}{2n - 1} = 0 \quad (4.24)$$

olarak alınırsa, ya

$\mu - 1 = 0$ eşitliğinden $\mu = 1$ olup, bir (κ, μ) -parakontak metrik manifoldu $(\kappa, 1)$ -parakontak metrik manifolduna indirgenir.

Ya da $2a = 0$ eşitliğinden $a = 0$ olduğunda ise

$$P(Y_1, Y_2)Y_3 = a.H(Y_1, Y_2)Y_3 - \frac{br}{2n} [g(Y_2, Y_3)Y_1 - g(Y_1, Y_3)Y_2] \quad (4.25)$$

eşitliğinde semikonformal eğrilik tensörü P ,

$$P(Y_1, Y_2)Y_3 = -\frac{br}{2n} [g(Y_2, Y_3)Y_1 - g(Y_1, Y_3)Y_2] \quad (4.26)$$

biçimine indirgenir.

Diğer taraftan

$$\begin{aligned} & \kappa [g(Y_1, Y_5) - \eta(Y_5) \eta(Y_1) - g(hY_5, Y_1)] \\ & + \mu [g(hY_1, Y_5) - g(hY_5, hY_1)] = 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

olup h' in simetrik olması kullanılır ise,

$$\begin{aligned} & \kappa[g(Y_1, Y_5) - \eta(Y_5)\eta(Y_1) - g(hY_1, Y_5)] \\ & + \mu[g(hY_1, Y_5) - g(h^2Y_5, Y_1)] = 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

bulunur. Son eşitlikte de (3.4) eşitliği kullanılır ise,

$$\begin{aligned} & \kappa[g(\phi Y_1, \phi Y_5) - g(hY_1, Y_5)] + \mu[g(hY_1, Y_5) - (\kappa + 1)g(\phi^2 Y_1, Y_5)] = 0 \\ & \kappa[-g(\phi^2 Y_1, Y_5) - g(hY_1, Y_5)] + \mu[g(hY_1, Y_5) - (\kappa + 1)g(\phi^2 Y_1, Y_5)] = 0 \\ & g(\phi^2 Y_1, Y_5)[- \kappa - \mu(\kappa + 1)] + g(hY_1, Y_5)(- \kappa + \mu) = 0 \\ & (\kappa + 1)(- \kappa - \mu(\kappa + 1))g(h^2 Y_1, Y_5) + (\mu - \kappa)g(hY_1, Y_5) = 0 \\ & (\kappa + 1)(- \kappa - \mu(\kappa + 1))h^2 + (\mu - \kappa)h = 0 \end{aligned}$$

bağıntısı elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.2: M , $(2n + 1)$ -boyutlu bir (κ, μ) –parakontak metrik manifoldu olmak üzere, M semikonformal Ricci semisimetrik olması için gerek ve yeter şart M 'nin Einstein manifoldu olmasıdır.

İspat: $(2n + 1)$ -boyutlu M (κ, μ) –parakontak metrik manifoldu semikonformal semisimetrik olsun.

O zaman $\forall Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \in \chi(M)$ olmak üzere

$$P(Y_1, Y_2)S = 0 \quad (4.29)$$

olur. Burada

$$S(P(Y_1, Y_2)Y_3, Y_4) + S(Y_3, P(Y_1, Y_2)Y_4) = 0 \quad (4.30)$$

şeklindedir. Eğer (4.30) eşitliğinde $Y_1 = Y_3 = \xi$ seçilir ise,

$$S(P(\xi, Y_2)\xi, Y_4) + 2n\kappa\eta(P(\xi, Y_2)Y_4) = 0 \quad (4.31)$$

bulunur. Ayrıca (4.31) eşitliğinde $P(\xi, Y_2)\xi$ ve (4.3) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
0 = & \left[\frac{a(2n - n\mu - 4)}{2n - 1} - \frac{br}{2n} \right] \eta(Y_2)S(\xi, Y_4) - \left[\frac{a(2n - n\mu - 4)}{2n - 1} - \frac{br}{2n} \right] S(Y_2, Y_4) \\
& + \left[\frac{2a(n - 1)(\mu - 1)}{2n - 1} \right] S(hY_2, Y_4) + \left[\frac{a(2n - n\mu - 4)}{2n - 1} - \frac{br}{2n} \right] 2n\kappa g(Y_2, Y_4) \\
& - \left[\frac{a(2n - n\mu - 4)}{2n - 1} - \frac{br}{2n} \right] 2n\kappa \eta(Y_4)\eta(Y_2) \\
& - \left[\frac{2a(n - 1)(\mu - 1)}{2n - 1} \right] 2n\kappa g(hY_2, Y_4)
\end{aligned} \tag{4.32}$$

olur. Buradan da

$$\begin{aligned}
0 = & \left[\frac{a(2n - n\mu - 4)}{2n - 1} - \frac{br}{2n} \right] S(Y_2, Y_4) - \left[\frac{a(2n - n\mu - 4)}{2n - 1} - \frac{br}{2n} \right] 2n\kappa g(Y_2, Y_4) \\
& + \left[\frac{2a(n - 1)(\mu - 1)}{2n - 1} \right] S(hY_2, Y_4) - \left[\frac{2a(n - 1)(\mu - 1)}{2n - 1} \right] 2n\kappa g(hY_2, Y_4)
\end{aligned} \tag{4.33}$$

elde edilir. Öte yandan (4.33) eşitliğinde Y_2 yerine hY_2 seçilir ise,

$$\begin{aligned}
0 = & \left[\frac{a(2n - n\mu - 4)}{2n - 1} - \frac{br}{2n} \right] S(hY_2, Y_4) - \left[\frac{a(2n - n\mu - 4)}{2n - 1} - \frac{br}{2n} \right] 2n\kappa g(hY_2, Y_4) \\
& + \left[\frac{2a(n - 1)(\mu - 1)}{2n - 1} \right] (\kappa + 1)S(Y_2, Y_4) \\
& - \left[\frac{2a(n - 1)(\mu - 1)}{2n - 1} \right] (\kappa + 1)2n\kappa g(Y_2, Y_4)
\end{aligned} \tag{4.34}$$

bulunur. Ayrıca (4.33) ve (4.34) eşitlikleri yardımıyla,

$$S(Y_2, Y_4) = 2n\kappa g(Y_2, Y_4)$$

elde edilir. Böylece $(2n + 1)$ -boyutlu M , (κ, μ) -parakontak metrik manifoldu semikonformal semisimetrik ise M bir Einstein manifoldudur.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçların (κ, μ) –parakontak metrik manifoldların karakterize edilmesinde önemli bir yeri vardır. Manifoldlar üzerindeki simetriklik durumları ilgili manifoldun incelenmesinde kolaylıklar sağlaması açısından oldukça önemlidir. İncelenen (κ, μ) –parakontak metrik manifoldun semikonformal semi simetriklik durumu için oldukça önemli, manifoldu karakterize eden sonuçlar elde edilmiştir. Öncelikle (κ, μ) – manifoldunun daha özel bir durum olan $(\kappa, 1)$ –parakontak metrik manifold durumuna indirgendiği görülmüştür. Daha sonra bu manifold üzerindeki semikonformal eğrilik tensörünün

$$P(Y_1, Y_2)Y_3 = -\frac{br}{2n} [g(Y_2, Y_3)Y_1 - g(Y_1, Y_3)Y_2]$$

durumuna indirgendiği görülmüştür. Bu durum özel olarak ele alındığında, eğer

$$R(Y_1, Y_2)Y_3 = -\frac{br}{2n} [g(Y_2, Y_3)Y_1 - g(Y_1, Y_3)Y_2]$$

biçiminde olsaydı, bu durumda manifoldun sabit kesit eğrilikli reel uzay forma indirgendiği söylenecekti. Ancak elde edilen şart konusunda literatürde herhangi bir sınıflandırma yoktur. Bu durumun incelenerek, semikonformal reel uzay form gibi bir durum elde edilip edilmeyeceği bir açık problemdir. Diğer taraftan esas teoremin sonuçlarından olan,

$$(\kappa + 1)(-\kappa - \mu(\kappa + 1))h^2 + (\mu - \kappa)h = 0$$

bağıntısının da ayrıca ele alınması gerekmektedir. Burada κ, μ ve h arasında bir bağıntı elde edilmiştir. Bu bağıntının bir (κ, μ) –parakontak metrik manifoldunu hangi özel durumlara indirgediği ise ikinci bir açık problemdir. Tez çalışması sonucunda elde edilen bulguların yanında, literatüre Türkçe özgün bir kaynak kazandırılmıştır. Bu kapsamda yapılan bu tez çalışmasının ileride (κ, μ) –parakontak metrik manifoldlar hakkında araştırma yapmak isteyen geometricilere de bir kaynak olacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- Aslım, G. (1988). *Genel Topoloji*, Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları. No. 109, İzmir.
- Atçeken, M. and Yıldırım, Ü. (2015). On almost $C(\alpha)$ -manifold satisfying certain conditions on concircular curvature tensor. *Pure and Applied Mathematics Journal*, 9, 4(1-2), 31-34.
- Blair, D. E. (2002). *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*, Progress in Mathematics, 203. Birkhauser Boston, Incorporated. , Boston, MA.
- Boothby, W. M. (1986). *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. London: Academic Press, Incorporated.
- Cappelletti Montano and B., Di Terlizzi, L. (2010). Geometric Structures Associated to a Contact Metric (κ, μ) Space. *Pacific Journal of Mathematics* ., 256(2): 257-292.
- Cappelletti Montano, B., Küpeli Erken, I. and Murathan, C. (2012). Nullity Conditions in Paracontact Geometry. *Differential Geometry and its applications*. 30 (6):665-693.
- Chen, B.Y., (1973). *Geometry of Submanifolds*, Pure ve Applied Mathematics., No. 22. Marcel Dekker, Incorporated., New York.
- Hacısalıhoğlu, H.H. (1980). *Yüksek Diferansiyel Geometriye Giriş*. Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.
- Hacısalıhoğlu, H.H. (1983). *Diferansiyel Geometri*, İnönü Üniversitesi Yayınları.
- Kaneyuki, S. and Williams, F.L. 1985. Almost Paracontact and Parahodge Structures on Manifolds. *Nagoya Mathematical Journal*, 99: 173-187.
- Kenmotsu, K. (1972). A Class of Contact Riemann Manifold. *Tohoku Mathematics Journal*. 24, 93-103.
- Kim, J. (2017). On pseudo semiconformally symmetric manifolds. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*. 2017;54(1):177–186.
- O'Neill, B. (1983). *Semi-Riemann Geometry*. Academic Press. Incorporated.
- Pitiş, G. (2007). Pitiş, *Geometry of Kenmotsu Manifolds*, Publishing House of Transilvania University of Brasov. Romania.
- Şahin, B. (2012). *Manifoldların Diferansiyel Geometrisi*. Ankara: Nobel Yayın.
- Yano, K. and Kon, M. (1984). *Structures on Manifolds*. World Scientific Publishing, Singapore.

- Yano, K. and Bochner, S. (1953). *Curvature and Betti numbers*, Princeton University Press.
- Yano, K. (1940). Conircular Geometry I. Conircular Transformations *Proceedings of the Imperial Academy*, Vol. 16, No. 6, pp. 195-200.
- Yıldırım, Ü., (2016). *C(α) Manifoldunun Geometrisi Üzerine.*, Doktora Tezi. Tokat.
- Yıldırım, Ü., Atçeken, M. and Dirik, S., (2019). A Normal Paracontact Metric Manifold Satisfying Some Conditions on the M-Projective Curvature Tensor. *Konuralp Journal of Mathematics*, vol: 7(1), 217-221.
- Yıldırım, Ü., Atçeken, M. and Dirik, S., (2019). Pseudo Projective Curvature Tensor Satisfying Some Properties on a Normal Paracontact Metric Manifold. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 68(1), 997-1006.
- Zamkovoy, S. (2009). Canonical connections on paracontact manifolds. *Annals of Global Analysis and Geometry*, 36(1), 37-60.

Adı-Soyadı: Mustafa ARSLAN

Lisans: Kafkas Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi-2012

Amasya Üniversitesi, Eğitim Fakültesi-2016

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

- 1-) “15. Ankara Matematik Günleri” sempozyumunda “ (κ, μ) – Parakontak Metrik Manifoldlar Üzerinde Semi Konformal Eğrilik Tensörü” başlıklı bildiri (23 Mayıs 2024-8 sayfa).

