

28436

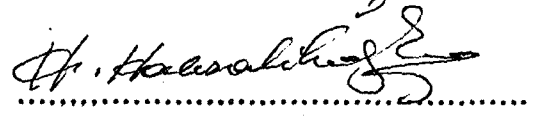
**PARALEL HİPERYÜZEYLER TEORİSİ
VE
KİNEMATİKTEKİ UYGULAMASI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
(MATEMATİK)**

**Hasan ES
Şubat 1993**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Bu tezin yüksek lisan tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.



Danışman

Prof. Dr. Hilmi HACISALİHOĞLU

Sınav Jürisi

Başkan: Prof.Dr.H.Hilmi HACISALİHOĞLU



Üye: Prof.Dr.Arif SABUNCUOĞLU



Üye: Yrd.Doç.Dr.Nejat EKMEKÇİ



Bu tez Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım esaslarına uygundur.



PARALEL HİPERYÜZEYLER TEORİSİ
VE
KİNEMATİKTEKİ UYGULAMASI
(Yüksek Lisans Tezi)

Hasan ES
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Şubat 1993

ÖZ

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm temel kavramlara ayrılmıştır.

İkinci bölümde paralel hiperyüzeyler kavramı ele alınarak, paralel hiperyüzeyler arasındaki özellikler ile aralarındaki bağıntılar bulunmuştur. Daha sonra, hiperyüzeyler ve paralel hiperyüzeylerin hacimleri arasındaki bağıntılar ile paralel hiperyüzeyler üzerindeki eğrilik çizgilerinin uzunlukları incelenmiş ve hesaplanmıştır.

Üçüncü bölümde ise paralel hiperyüzeyler teorisinin kinematikteki bir uygulaması olan yörünge hortumunun hacmi hesaplanmıştır.

Bilim Kodu: 403.02.01

Anahtar Kelimeler: Öklid Uzayı, Hacim Elementi, Şekil Operatörü, Normal Eğrilik, Gauss Eğirliği, Yüksek Mertebeden Gauss Eğrilikleri, Ortalama Eğrilik ve Hortumun Hacmi

Sayfa Adedi: 62

Tez Yöneticisi: Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU

**THE THEORY OF PARALLEL HYPERSURFACES
AND
ITS APPLICATION TO THE KINEMATIC
(M. Sc. Thesis)**

Hasan ES
GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
February 1993

ABSTRACT

This thesis consists of three chapters.

In the first chapter we present the basic concepts.

In the second chapter, by considering the concepts of parallel hypersurfaces, we find some properties and relations between any two parallel hypersurfaces. In particular, we give the relations between the volumes of any two parallel hypersurfaces. Moreover, we investigate and evaluate the length of curvature line of any two parallel hypersurfaces.

In the third chapter, we calculate the volume of a tubular which is an orbit. This is an application to the kinematic of the theory of parallel hypersurfaces.

Science code: 403.02.01

Key Words: Euclidean Space, Volume Element, The Shape Operator, Normal Curvature, Gaussian Curvature, Higher Order Gaussian Curvatures Mean Curvature and the volume of tubular.

Page : 62

Supervisor: Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU

TEŞEKKÜR

Bana bu çalışmayı veren ve çalışmalarımın her safhasında değerli ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU'na en derin saygı ve teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim. Ayrıca araştırmalarımda yardımcı olan Yrd. Doç. Dr. Nejat EKMEKÇİ ve Yrd. Doç. Dr. Yusuf YAYLI'ya teşekkür ederim.



SEMBOLLER

E^n	: n-boyutlu Öklid uzayı
$\chi(M)$	: M yüzeyi üzerindeki vektör alanların cümlesi
X	: Vektörel çarpım
$P_{Sp}(\lambda)$	: S şekil operatörünün karakteristik polinomu
S	: Hiperyüzeyin şekil operatörü
S_r	: Paralel hiperyüzeyin şekil operatörü
$T_M(p)$	: M yüzeyi üzerinde P noktasındaki tanjant vektörlerin vektör uzayı
K_i	: Yüksek mertebeden Gauss eğrilikleri
k_n	: Normal eğrilik fonksiyonu
k_g	: Geodezik eğrilik
H	: Hareketli uzay
H'	: Sabit uzay
H_1	: Rölatif sistem
K	: Hareketli küre
K'	: Sabit Küre
K_1	: Rölatif küre
$\vec{d_f X}$	: X noktasının sürüklenme hızı
$O(n)$	: Ortogonal matrislerin cümlesi
$\wedge$	: Dış çarpım

Şekillerin Listesi

Şekil II.2.1 : Paralel hiperyüzeyler

Şekil III.3.1 : Hareketli ve sabit uzaylarımızın ortonormal eksen sistemleri

Şekil III.3.2 : Paralel yüzeyler



İÇİNDEKİLER

ÖZ	iii
ABSTRACT.....	iv
TEŞEKKÜR	v
SEMBOLLER	vi
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	vii

GİRİŞ.....	1
------------	---

I. BÖLÜM

I.1. Şekil Operatörü ve Temel Formlar.....	2
I.2. Umbilik Nokta.....	2
I.3. Asli Eğrilikler-Asli Doğrultular.....	3
I.4. Gauss ve Ortalama Eğrilikleri	3
I.5. Manifoldlar Üzerinde Orientasyon.....	5
I.6. Manifoldlar Üzerinde Hacim Elementi.....	6

II. BÖLÜM

II.2. Paralel Hiperyüzler.....	8
II.3. Hiperyüzeylerin Hacimleri Arasındaki Bağntı.....	24
II.4. Paralel Hiperyüzeylerin Hacimleri Arasındaki Bağntılar.....	28
II.5. Paralel Hiperyüzeyler Üzerinde Eğrilik Çizgilerinin Uzunlukları	33

III. BÖLÜM

III.3. Yörünge Hortumunun Hacmi.....	38
--------------------------------------	----

SONUÇ.....	51
------------	----

KAYNAKLAR	52
-----------------	----

ÖZGEÇMİŞ	53
----------------	----

GİRİŞ

Paralel hiperyüzeylerden birine ait diferensiyel geometrinin diğeri üzerindeki korunan ve korunmayan yönleri son yıllarda önemli ve yoğun çalışmalara konu olmaktadır. Ayrıca bize göre yörünge hortumunun kinematiği de bu alana girmektedir.

Bu çalışmada gayemiz paralel hiperyüzeyler teorisinin yörünge hortumuna uygulamasını yapmaktır.

Bunun için diferensiyel geometride iyi bilinen teoriyi bu gaye için kinematikle birleştirdik.

Aslında yaptığımız iş de bu birleştirmeden ibarettir.



I. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

I. 1. Şekil Operatörü ve Temel Formlar

Tanım I.1.1. E^n , n-boyutlu Öklid uzayının (n-1) boyutlu hiperyüzeyi M ve M nin birim normal vektör alanı, N verilsin. E^n nin Riemann konneksiyonu D olmak üzere, $\forall X \in \chi(M)$ için

$$S: \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$X \rightarrow S(X) = D_X N$$

şeklinde tanımlı, S lineer dönüşümüne M üzerinde bir şekil operatörü denir [1].

Tanım I.1.2. E^n , n- boyutlu Öklid uzayında bir M hiperyüzeyi üzerinde q -yuncu temel form diye, $1 \leq q \leq n$ olmak üzere,

$$I^q: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, R)$$

$$(X, Y) \rightarrow I^q(X, Y) = \langle S^{q-1}(X), Y \rangle$$

şeklinde tanımlı I^q fonksiyonuna denir [1].

I. 2 Ümbilik Nokta

Tanım I.2.1. n-boyutlu Öklid uzayı E^n de bir hiperyüzey M olsun. $P \in M$ noktasında M nin şekil operatörü S olmak üzere $\exists \lambda \in R$ için,

$$S = \lambda_{n-1}$$

ise P noktasına M nin bir umbilik noktası denir [1].

1.3 Asli Eğrilikler-Asli Doğrultular

Tanım 1.3.1. E^n , n -boyutlu Öklid uzayında bir hiperyüzey M ve M nin şekil operatörü S olsun. M nin bir P noktasına karşılık gelen $S(p)$ nin karakteristik değerlerine M nin p noktasındaki asli eğrilikleri denir.

Asli eğriliklere karşılık gelen karakteristik vektörlerin belirttiği doğrultulara da M nin p noktasındaki asli eğrilik doğrultuları denir [1].

1.4 Gauss ve Ortalama Eğrilikleri

Tanım 1.4.1. E^n , n -boyutlu Öklid uzayının bir hiperyüzeyi M olsun. M nin p noktasındaki şekil operatörü $S(p)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} K: M &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\rightarrow K(p) = \det S(p) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan K fonksiyonuna, M nin Gauss eğrilik fonksiyonu ve $K(p)$ değerine de M nin p noktasındaki Gauss eğriliği denir [1].

Tanım 1.4.2. E^n , n -boyutlu Öklid uzayının bir hiperyüzeyi M olsun. M nin bir p noktasındaki şekil operatörü $S(p)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} H: M &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\rightarrow H(p) = \text{iz } S(p) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan H fonksiyonuna M nin ortalama eğrilik fonksiyonu ve $H(p)$ değerine de M nin p noktasındaki ortalama eğriliği denir [1].

Tanım 1.4.3. E^n , n -boyutlu Öklid uzayında bir hiperyüzey M olsun. M nin bir p noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesi $T_M(p)$ olmak üzere

$$S_p: T_M(p) \rightarrow T_M(p)$$

şekil operatörü verilsin. $P \in M$ deki S_p dönüşümüne karşılık gelen karakteristik vektörler $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$ ve bunlara karşılık gelen karakteristik değerler $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ olsun. O zaman S_p nin karakteristik polinomu;

$$\begin{aligned} K_1 &= \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1} \\ K_2 &= \sum_{i < j}^{n-1} \lambda_i \lambda_j = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \dots + \lambda_{n-2} \lambda_{n-1} \\ K_3 &= \sum_{i < j < k}^{n-1} \lambda_i \lambda_j \lambda_k = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \dots + \lambda_{n-3} \lambda_{n-2} \lambda_{n-1} \\ &\vdots \\ K_{n-1} &= \prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{n-2} \lambda_{n-1} \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} P_{S_p}(\lambda) &= \det [\lambda I_{n-1} - S_p] \\ &= \lambda^{n-1} + (-1)^1 K_1 \lambda^{n-2} + (-1)^2 K_2 \lambda^{n-3} + \dots + (-1)^{n-2} \\ &\quad K_{n-2} \lambda^1 + (-1)^{n-1} K_{n-1} \end{aligned}$$

dir. Burada $K_1, K_2, \dots, K_{n-1}$ fonksiyonlarına M hiperyüzeyinin yüksek mertebeden Gauss anlamında eğrilikleri diyeceğiz [1].

Tanım 1.4.4. E^n , n -boyutlu Öklid uzayında bir M hiperyüzeyi verilsin. M nin p noktasındaki şekil operatörü S_p olmak üzere,

$$P_{S_p}(\lambda) = \det[\lambda I_{n-1} - S_p]$$

$$= \lambda^{n-1} + (-1)^1 K_1 \lambda^{n-2} + (-1)^2 K_2 \lambda^{n-3} + \dots + (-1)^{n-2} K_{n-2} \lambda^1 + (-1)^{n-1} K_{n-1}$$

şeklinde tanımlı polinoma S_p şekil operatörünün karakteristik polinomu denir [1].

Özel Haller. $n=3$ için,

$$\begin{aligned} P_{Sp}(\lambda) &= \det[\lambda I_2 - S_p] \\ &= \det \begin{bmatrix} \lambda - \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda - \lambda_2 \end{bmatrix} \\ &= (\lambda - \lambda_1) (\lambda - \lambda_2) \\ &= \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) \lambda + \lambda_1 \lambda_2 \\ P_{Sp}(\lambda) &= \lambda^2 + (-1)^1 K_1 \lambda + (-1)^2 K_2 \end{aligned}$$

$n=4$ için,

$$\begin{aligned} P_{Sp}(\lambda) &= \det[\lambda I_3 - S_p] \\ &= \det \begin{bmatrix} \lambda - \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - \lambda_3 \end{bmatrix} \\ &= (\lambda - \lambda_1) (\lambda - \lambda_2) (\lambda - \lambda_3) \\ &= \lambda^3 + (-1)^1 (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \lambda^2 + (-1)^2 (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3) \lambda \\ &\quad + (-1)^3 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \\ P_{Sp}(\lambda) &= \lambda^3 + (-1)^1 K_1 \lambda^2 + (-1)^2 K_2 \lambda + (-1)^3 K_3 \end{aligned}$$

I. 5. Manifoldlar Üzerinde Orientasyon (Yönlendirme)

E^n , n - boyutlu Öklid uzayının k - boyutlu bir M manifoldunu ele alalım. M bir Manifold olduğuna göre M nin her bir x noktasındaki $T_M(x)$ tanjant uzayında bir μ_x orientasyonu tanımlamak istiyoruz. Bu işi bir V reel vektör uzayındaki gibi aynen yapabiliriz. Ancak manifoldun her bir

noktasında $T_M(x)$ için bir başka vektör uzayı söz konusudur. Bu nedenle her biri için bir orientasyon söz konusudur. Eğer M nin herbir noktasındaki tanjant uzaylarda orientasyon aynı ise M manifolduna uygun yönlendirilmiş manifold aksi halde M manifolduna uygun yönlendirilmemiş manifold denir.

Üzerinde uygun bir yönlendirme seçilebilen bir M manifolduna yönlendirilmiş manifold denir.

Bir M manifoldu üzerinde özel bir μ yönlendirmesi seçildiğinde (M, μ) ikilisine de yönlendirilmiş manifold veya kısaca yönlü manifold denir.

I. 6. Manifoldlar Üzerinde Hacim Elementi

n -boyutlu Öklid uzayı E^n de sınırlı (ya da sınırlı olmayan) μ yönlü bir k -manifold M olsun. $x \in M$ noktasındaki μ_x yönü ile T_x iç çarpımı bir k -form $w(x) \in \wedge^k(T_M(x))$ olan hacim elementini belirtir. $w \neq 0$ k -formuna M üzerinde μ tarafından belirtilen hacim elementi denir ve dv ile gösterilir. Bu k -form genel olarak bir $(k-1)$ -formun diferensiyeli olması da gerekmez.

M nin hacmi diye:

$$\int dv$$

integraline denir.

Eğer M kompakt ise bu integralin mevcut olacağı şekilde dv belirtilir.

1- boyutlu manifold için "hacim" yerine "uzunluk" ve 2-boyutlu manifold halinde ise "alan" sözü geçer. 1-manifold durumunda dv yerine

ds (yay elementi) ve 2-manifold durumunda dA ya da dS (yüzey elementi) ifadeleri kullanılır.

Özel haller. $n=3$ hali

E^3 de Alan Elementi:

E^3 de bir yönlendirilmiş 2-manifold (yüzey) M olsun. $x \in M$ noktasında dış birim normal $n(x)$ olsun. Eğer $\omega \in \wedge^2(T_M(x))$

$$\omega(u,v) = \det \begin{bmatrix} u \\ v \\ n(x) \end{bmatrix}$$

ile tanımlanırsa ve $[u, v] = \mu_x$ olmak üzere $T_M(x)$ de bir ortonormal baz $\{u, v\}$ ise

$$\omega(u, v) = 1$$

olur. Böylece,

$$dA = \omega$$

alınabilir. Diğer taraftan (x) vektörel çarpımının tanımından

$$\omega(u, v) = \langle uxv, n(x) \rangle$$

yazılabilir.

O halde,

$$dA(u,v) = \langle uxv, n(x) \rangle$$

elde edilir. Ayrıca $\forall u, v \in T_M(x)$ için,

$$uxv = \lambda n(x)$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} [u,v] &= \mu_x \text{ ise} \\ dA(u, v) &= \|\mu_x\| \end{aligned}$$

dir.

II. BÖLÜM

II. 2. Paralel Hiperyüzeyler

M_1 ve M_2 , E^n , n -boyutlu Öklid uzayının $(n-1)$ boyutlu iki hiperyüzeyi olsun. M_1 in birim normal vektör alanının

$$N = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad a_i \in C^\infty(M, \mathbb{R}), \quad 1 \leq i \leq n$$

olduğunu varsayalım. Eğer, bir $r \in \mathbb{R}$ sabit sayısı ve $\forall p \in M_1$ için

$$\begin{aligned} \vec{of}(p) &= \vec{op} + p\vec{f}(p) \\ f(p) &= p + rN(p) \end{aligned}$$

$$f(p) = (p_1 + ra_1(p), p_2 + ra_2(p), \dots, p_n + ra_n(p))$$

olacak şekilde bir

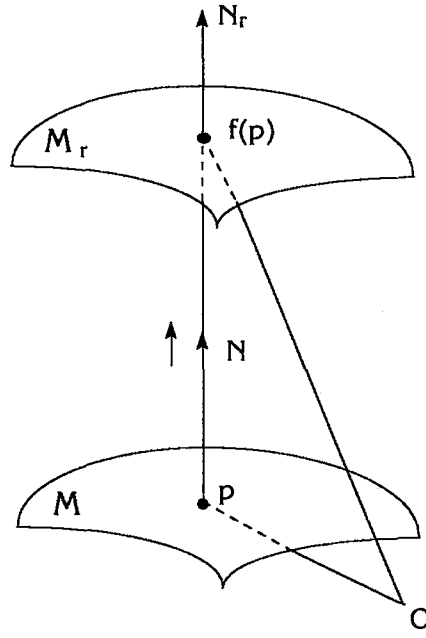
$$f : M_1 \rightarrow M_2$$

fonksiyonu bulunabilirse, M_2 ye M_1 in bir paralel hiperyüzeyi denir.

Burada

$$M_2 = \{p + rN(p) \mid p \in M_1\}$$

dir.

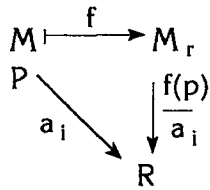


Şekil II.2.1

Bundan sonra aksi belirtilmedikçe, E^n in bir M hiperyüzeyine paralel olan bir diğer hiperyüzeyini M_r , M nin birim normal vektör alanını N , şekil operatörünü S , M_r nin birim normal vektör alanını N_r , şekil operatörünü de S_r ile göstereceğiz.

$$N_r = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad , \quad \bar{a}_i(f(p)) = a_i(p)$$

dir.



Teorem II.2.1. E^n , n -boyutlu Öklid uzayındaki bir M hiperyüzeyine paralel olan M_r hiperyüzeyi verilsin. E^n in $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ Öklid koordinat sistemine göre,

$$X \in \chi(M), \quad \overline{X} \in \chi(M_r)$$

vektör alanları

$$X = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \overline{X} = \sum_{i=1}^n \overline{b_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Öyleki, $\forall p \in M$ için $b_i(p) = \overline{b_i}(f(p))$, $1 \leq i \leq n$ özelliği ile verilsin. O zaman

$$1) f_*(X) = \overline{X} + r \overline{S(X)}$$

$$2) S_r(f_*(X)) = \overline{S(X)}$$

dir [1].

İspat: $f: M \rightarrow M_r$

dönüşümünü, E^n ye

$$f: E^n \rightarrow E^n$$

$$p \rightarrow f(p) = (p_1 + r a_1(p), p_2 + r a_2(p), \dots, p_n + r a_n(p))$$

şeklinde genişletelim. Burada M nin

$$N = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

normal vektör alanının $a_i \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, $1 \leq i \leq n$ bileşenlerinin de E^n ye

$$a_i = \begin{cases} a_i(p) & p \in M \\ 0 & p \notin M \end{cases}$$

şeklinde genişletildiğini varsayıyoruz.

1) E^n deki $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ Öklid koordinat sistemine göre f dönüşümünün koordinat fonksiyonları

$$f_i = x_i + r a_i : E^n \rightarrow R, 1 \leq i \leq n$$

olacağından,

$$f_* \leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \end{bmatrix} \in R^n$$

$$f_* \leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial x_2} & \frac{\partial x_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial x_n} & \frac{\partial x_2}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \end{bmatrix}$$

$$f_* \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \end{bmatrix}$$

$$f_* \leftrightarrow I_n + r \begin{bmatrix} \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \end{bmatrix}$$

olur. Böylece,

$$f_{*|p}(X_p) \leftrightarrow I_n(p)(X_p) + r \begin{bmatrix} \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \end{bmatrix}_{|p}(X_p), X_p \in \chi(M)$$

dir.

$$f_{*|p}(X_p) \leftrightarrow I_n \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_p + r \begin{bmatrix} \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \end{bmatrix}_p \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_p$$

$$= \begin{bmatrix} b_1(p) \\ b_2(p) \\ \vdots \\ b_n(p) \end{bmatrix} + r \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \Big|_p b_j(p) \right]$$

elde edilir. Burada ikinci taraftaki matris formunu, tekrar

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \mid 1 \leq i \leq n \right\}$$

bazı cinsinden yazarsak,

$$f_{*|p}(X_p) = \sum_{i=1}^n b_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} f(p) + r \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \Big|_p b_j(p) \frac{\partial}{\partial x_i} f(p)$$

veya,

$$b_i(p) = \overline{b_i}(f(p)) \quad , \quad 1 \leq i \leq n$$

eşitliğini kullanırsak,

$$f_{*|p}(X_p) = \sum_{i=1}^n \overline{b_i}(f(p)) \frac{\partial}{\partial x_i} f(p) + r \sum_{i=1}^n X_p[a_i] \frac{\partial}{\partial x_i} f(p)$$

elde edilir. Burada sağdaki ilk terim,

$$\sum_{i=1}^n \overline{b_i}(f(p)) \frac{\partial}{\partial x_i} f(p) = \overline{X} f(p) \quad ,$$

ikinci terim ise $r \overline{S(X)} f(p)$ dir. Çünkü,

$$S(X) = \sum_{i=1}^n X[a_i] \frac{\partial}{\partial x_i}$$

olduğundan,

$$\overline{S(X)} = \sum_{i=1}^n \overline{X[a_i]} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad X[a_i](p) = \overline{X[a_i](f(p))}$$

$$\overline{S(X)}|_{f(p)} = \sum_{i=1}^n \overline{X[a_i]}(f(p)) \frac{\partial}{\partial x_i}|_{f(p)}$$

$$= \sum_{i=1}^n X[a_i](p) \frac{\partial}{\partial x_i}|_{f(p)}$$

$$\overline{S(X)}|_{f(p)} = \sum_{i=1}^n X_p[a_i] \frac{\partial}{\partial x_i}|_{f(p)}$$

dir. Buna göre,

$$f_*|_p(X_p) = \overline{X}|_{f(p)} + r \overline{S(X)}|_{f(p)}$$

$$f_*(X) = \overline{X} + r \overline{S(X)}$$

elde edilir.

2) $\xi_i \circ f = a_i, 1 \leq i \leq n$

olmak üzere,

$$N_r = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

vektör alanının, M_r nin normali olduğu gösterelim.

Bunun için,

$$\chi(M_r) = f_*(\chi(M))$$

özelliklerinden yararlanacağız. O halde

$$\forall X = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \chi(M)$$

için,

$$\langle N_r, f_*(X) \rangle_{f(p)} = 0, \quad \forall p \in M$$

olmalıdır.

$$\begin{aligned}
 \langle N_r, f_*(X) \rangle_{f(p)} &= \langle N_r, \overline{X} + r \overline{S(X)} \rangle_{f(p)} \\
 &= \langle N_r, \overline{X} \rangle_{f(p)} + r \langle N_r, \overline{S(X)} \rangle_{f(p)} \\
 &= \left\langle \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^n \overline{b_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle_{f(p)} \\
 &\quad + r \left\langle \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^n X_p[a_i] \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle_{f(p)} \\
 &= \sum_{i=1}^n \xi_i(f(p)) \overline{b_i}(f(p)) + r \sum_{i=1}^n \xi_i(f(p)) X_p[a_i] \\
 &= \sum_{i=1}^n (\xi_i \circ f)(p) \overline{b_i}(p) + r \sum_{i=1}^n (\xi_i \circ f)(p) X_p[a_i] \\
 &= \sum_{i=1}^n a_i(p) \overline{b_i}(p) + r \sum_{i=1}^n a_i(p) X_p[a_i] \\
 &= \langle N_r, X \rangle_p + r \langle N, S(X) \rangle_p \\
 &\Rightarrow \langle N_r, f_*(X) \rangle_{f(p)} = 0
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi de

$$X = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

vektör alanının

$$\alpha : I \rightarrow M$$

eğrisinin birim teğet vektör alanı olduğunu kabul edelim. O zaman

$f_*(X) \in \chi(M_r)$ vektör alanı da

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M_r \\ \alpha \swarrow & & \nearrow f\alpha \\ & I & \end{array}$$

$$f\alpha : I \rightarrow M_r$$

eğrisinin teğet vektör alanı olur. Buna göre, $p = \alpha(t) \in M$ noktasında,

$$\begin{aligned} S(X)|_p &= D_{X_p} N \\ &= D_{X\alpha(t)} N \\ &= \sum_{i=1}^n X_{\alpha(t)} [a_i] \frac{\partial}{\partial x_i} |_{\alpha(t)} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{d(a_i \circ \alpha)}{dt} |_t \frac{\partial}{\partial x_i} |_p \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{d(\xi_i \circ f\alpha)}{dt} |_t \frac{\partial}{\partial x_i} |_p \\ &= \sum_{i=1}^n f_*(X)|_{f(p)} [\xi_i] \frac{\partial}{\partial x_i} |_{f(p)} \end{aligned}$$

dır. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} S_r(f_*(X))|_{f(p)} &= D_{f_*(X)|_{f(p)}} N_r \\ &= \sum_{i=1}^n f_*(X)|_{f(p)} [\xi_i] \frac{\partial}{\partial x_i} |_{f(p)} \end{aligned}$$

dir. Böylece,

$$S_r(f_*(X)) = \overline{S(X)}$$

elde edilir.

Teorem II.2.2. $f: M \rightarrow M_r$

olmak üzere M nin bir paralel hiperyüzeyi M_r olsun. O zaman,

- 1) f , üçüncü temel form olma özelliğini korur.
- 2) f , umbilik nokta olma özelliğini korur.
- 3) f , asli eğrilik doğrultusu olma özelliğini korur.
- 4) M nin temel formları, sırasıyla, I, II, III ile gösterilmek üzere $\forall X, Y \in \chi(M), \forall P \in M$ için,

$$\langle f_*(X), f_*(Y) \rangle_{f(P)} = I(X_P, Y_P) + 2r II(X_P, Y_P) + r^2 III(X_P, Y_P)$$

dir [1].

İspat: 1) M nin üçüncü temel formu III, M_r nin üçüncü temel formu da III_r olmak üzere,

$$\forall X, Y \in \chi(M) \text{ ve } \forall P \in M \text{ için,}$$

$$III_r(f_*(X_P), f_*(Y_P)) = III(X_P, Y_P)$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} III_r(f_*X_P, f_*Y_P) &= \langle S_r(f_*X_P), S_r(f_*Y_P) \rangle \\ &= \langle \overline{S(X)}, \overline{S(Y)} \rangle \\ &= \langle S(X), S(Y) \rangle \end{aligned}$$

$$III_r(f_*X_P, f_*Y_P) = III(X_P, Y_P)$$

dir.

- 2) $P \in M$, M nin bir umbilik noktası olsun. O zaman,

$\forall X_p \in T_M(P)$ ve bir tek $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$S(X_p) = \lambda X_p$$

dir. Ayrıca Teorem II.2.1 gereğince

$$f_*(X_p) = \overline{X} |f(p)| + r \overline{S(X)} |f(p)|$$

olacağından,

$$f_*(X_p) = (1 + r\lambda) \overline{X} |f(p)|$$

yazılabilir. Buna göre,

$\forall f_*(X_p) \in T_{M_r}(f(p))$ için,

$$\begin{aligned} S_r(f_*(X_p)) &= \overline{S(X_p)} \\ &= \lambda \overline{X} |f(p)| \\ &= \lambda \frac{1}{1+r\lambda} f_*(X_p) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_r(f_*(X_p)) = \frac{\lambda}{1+r\lambda} f_*(X_p)$$

elde edilir. Bu ise, $f(p) \in M_r$ noktasında S_r, M_r nin özdeşlik dönüşümünün bir katı demektir. Böylece, $P \in M$ umbilik nokta ise $f(p) \in M_r$ de M_r nin bir umbilik noktasıdır.

3) $X \in \chi(M)$, bir asli eğrilik doğrultusu olsun. $f_*(X) \in \chi(M_r)$ nin de bir asli eğrilik doğrultusu olduğunu göstereceğiz.

M nin p noktasında asli eğrilik doğrultusu X olduğundan

$$S(X_p) = \lambda X_p$$

olur. Teorem II.2.1. gereğince,

$$\begin{aligned} f_*(X_p) &= \overline{X}|_{f(p)} + r \overline{S(X)}|_{f(p)} \\ &= \overline{X}|_{f(p)} + r \lambda \overline{X}|_{f(p)} \\ &= (1 + r\lambda) \overline{X}|_{f(p)} \end{aligned}$$

yazılabilir. Buna göre $\forall f_*(X_p) \in T_{M_r}(f(p))$ için

$$\begin{aligned} S_r(f_*(X_p)) &= \overline{S(X_p)} \\ &= \lambda \overline{X}|_{f(p)} \\ &= \lambda \frac{1}{1+r\lambda} f_*(X_p) \\ S_r(f_*(X_p)) &= \frac{\lambda}{1+r\lambda} f_*(X_p) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $f_*(X_p)$ nin $f(p) \in M_r$ noktasında asli eğrilik doğrultusu olduğunu gösterir.

4) $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $\forall p \in M$ için,

$$\begin{aligned} \langle f_*X, f_*Y \rangle|_{f(p)} &= \langle \overline{X} + r \overline{S(X)}, \overline{Y} + r \overline{S(Y)} \rangle|_{f(p)} \\ &= \langle \overline{X}, \overline{Y} \rangle|_{f(p)} + \langle \overline{X}, r \overline{S(Y)} \rangle|_{f(p)} \\ &\quad + \langle r \overline{S(X)}, \overline{Y} \rangle|_{f(p)} + \langle r \overline{S(X)}, r \overline{S(Y)} \rangle|_{f(p)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle \overline{X}, \overline{Y} \rangle_{f(p)} + r \langle \overline{X}, \overline{S(Y)} \rangle_{f(p)} \\
&+ r \langle \overline{S(X)}, \overline{Y} \rangle_{f(p)} + r^2 \langle \overline{S(X)}, \overline{S(Y)} \rangle_{f(p)} \\
&= \langle X, Y \rangle_p + r \langle X, S(Y) \rangle_p \\
&+ r \langle S(X), Y \rangle_p + r^2 \langle S(X), S(Y) \rangle_p \\
&= \langle X, Y \rangle_p + 2r \langle S(X), Y \rangle_p \\
&+ r^2 \langle S(X), S(Y) \rangle_p \\
\langle f_*X, f_*Y \rangle_{f(p)} &= I(X_p, Y_p) + 2r II(X_p, Y_p) + r^2 III(X_p, Y_p)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem II.2.3. $M \subset E^3$ yüzeyinin bir paralel yüzeyi M_r olsun. $P \in M$ noktasında M nin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırası ile, K ve H , $f(p) \in M_r$ noktasında M_r nin Gauss ve ortalama eğrilikleri de K_r ve H_r olsun. O zaman,

$$K_r = \frac{K}{1+rH+r^2K}$$

$$H_r = \frac{H+2rK}{1+rH+r^2K}$$

dır [1].

İspat: $P \in M$ noktasında, M nin asli eğrilikleri, k_1, k_2 ($k_1 \neq k_2$) ve bunlara karşılık gelen asli eğrilik doğrultuları da X_1 ve X_2 olsun. O zaman Teorem II.2.2 gereğince, M_r nin $f(p)$ noktasındaki, asli eğrilik doğrultuları da $f_*(X_1)$ ve $f_*(X_2)$ olur. Üstelik,

$$S_r(f_*X_1) = \frac{k_1}{1+rk_1} f_*X_1$$

$$S_r(f_*X_2) = \frac{k_2}{1+rk_2} f_*X_2$$

dir. Dolayısıyla,

$$\{f_*X_1, f_*X_2\}$$

bazına göre S_r nin matrisi,

$$S_r = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{1+rk_1} & 0 \\ 0 & \frac{k_2}{1+rk_2} \end{bmatrix}$$

olup,

$$H_r = \text{İz}(S_r)$$

$$H_r = \frac{k_1}{1+rk_1} + \frac{k_2}{1+rk_2}$$

$$H_r = \frac{k_1+rk_1k_2+k_2+rk_1k_2}{1+rk_1+rk_2+r^2k_1k_2}$$

$$H_r = \frac{(k_1+k_2) + 2r(k_1k_2)}{1+r(k_1+k_2)+r^2k_1k_2}$$

$$H_r = \frac{H+2rK}{1+rH+r^2K}$$

dir.

$$\begin{aligned}
K_r &= \det(S_r) \\
&= \frac{k_1}{1+rk_1} \cdot \frac{k_2}{1+rk_2} \\
&= \frac{k_1 k_2}{1+r(k_1+k_2)+r^2 k_1 k_2} \\
&= \frac{K}{1+rH+r^2 K}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem II.2.4. E^n , n - boyutlu Öklid uzayında irtibatlı bir M hiperyüzeyi verilsin. M nin bütün noktaları umbilik ise M hiperyüzeyi bir hiperdüzlemin veya bir kürenin açık alt cümlesidir. Üstelik, M kapalı ise o zaman, M hiperdüzlem veya hiperküredir [1].

İspat: $P \in M$ olmak üzere, $X_p \in T_M(p)$ verilsin. C^∞ sınıfından en az bir $X \in \chi(M)$ için $X(p) = X_p$ dir. C^∞ sınıfından bir diğer Y vektör alanını da $\{X_p, Y_p\}$ lineer bağımsız olacak şekilde seçelim. M nin $\forall p \in M$ noktası umbilik nokta olduğundan,

$$S = \lambda I$$

yazılabilir. Şimdi,

$$\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonunun sabit bir fonksiyon olduğunu gösterelim. Herşeyden önce, $\lambda \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ olduğu

$$K = \lambda^{n-1}$$

olduğundan açıktır.

Şöyleki,

$$S = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} \in R_{n-1}^{n-1}$$

$$K = \det S = \lambda^{n-1}$$

dir. Çünkü M nin boyutu $(n-1)$ dir.

$$K : M \rightarrow R$$

olduğundan λ da C^∞ dir.

Codazzi - Mainardi denkleminde

$$D_X S(Y) - D_Y S(X) - S([X, Y]) = 0$$

$$D_X(\lambda Y) - D_Y(\lambda X) - \lambda[X, Y] = 0$$

$$X_p[\lambda]Y_p + \lambda D_{X_p}Y_p - (Y_p[\lambda]X_p + \lambda D_{Y_p}X_p) - \lambda[X_p, Y_p] = 0$$

$$X_p[\lambda]Y_p + \lambda D_{X_p}Y_p - Y_p[\lambda]X_p - \lambda D_{Y_p}X_p - \lambda[X_p, Y_p] = 0$$

$$X_p[\lambda]Y_p - Y_p[\lambda]X_p + \lambda(D_{X_p}Y_p - D_{Y_p}X_p) - \lambda[X_p, Y_p] = 0$$

$$X_p[\lambda]Y_p - Y_p[\lambda]X_p + \lambda[X_p, Y_p] - \lambda[X_p, Y_p] = 0.$$

Buradan da

$$X_p[\lambda]Y_p - Y_p[\lambda]X_p = 0$$

olur.

$\{X_p, Y_p\}$ lineer bağımsız olduklarından

$$X_p[\lambda] = 0$$

elde edilir. $\forall X_p \in T_M(p), \forall p \in M$ için yukarıdaki düşünce tekrar edilebileceğinden ve M nin de irtibatlı olduğu gözönüne alınırsa, λ, M üzerinde sabit bir fonksiyon olur.

i) Eğer λ , sıfır fonksiyonu ise M üzerinde,

$$S = \lambda I$$

eşitliğinden,

$$S = 0$$

olur. Böylece, $\forall X_p \in T_M(p)$ için,

$$D_{X_p}N = 0$$

olur. Ve dolayısı ile N, M üzerinde sabit vektör alanıdır. Böylece M , bir hiperdüzlemin açık altcümlesi olmak zorunda kalır.

ii) λ , sıfır fonksiyonu değilse $\lambda > 0$ olduğunu kabul edelim. O zaman, M ye paralel olan

$$M_r = \{f(p) \mid f(p) = p + rN_p, p \in M\}$$

yüzeyini $r = -\frac{1}{\lambda}$ olarak seçelim. Teorem II.2.1 gereğince;

$$\begin{aligned} f_*(X_p) &= \overline{X_p} + r \overline{S(X)}, \forall X_p \in T_M(p) \\ &= \overline{X_p} - \frac{1}{\lambda} \lambda \overline{X_p} \end{aligned}$$

$$= \overline{X_p} - \overline{X_p}$$

$$f_*(X_p) = 0$$

elde edilir.

$f_* = 0$ ve M irtibatlı olduğundan

$$f : M \rightarrow M_r$$

dönüşümü sabit bir dönüşümdür.

Şimdi, $P \in M$ için

$$C = p - \frac{1}{\lambda} N_p \in E^n, \quad C = Q - \frac{1}{\lambda} N_q \in E^n$$

noktasını tanımlıyalım. Bu taktirde, $\forall Q \in M$ için,

$$d(C, Q) = \|Q - C\| = \frac{1}{\lambda}$$

dir. O halde, M bir kürenin açık altcümlesidir. Eğer M kapalı ise o zaman, $\lambda=0$ halinde M bir hiperdüzlem, $\lambda \neq 0$ halinde M bir hiperküredir.

II.3. Hiperyüzeylerin Hacimleri Arasındaki Bağını

Teorem II.3.1. M_1 ve M_2 , E^{n+1} de iki hiperyüzey ve

$$f : M_1 \rightarrow M_2$$

fonksiyonu diferensiyellenebilir olsun. Bu durumda dv_1 ve dv_2 , sırası ile, M_1 ve M_2 nin hacim elementlerini göstermek üzere,

$$dv_2 = |\det f| dv_1$$

dir [2].

İspat: V , n -boyutlu vektör uzayı ve

$$A: V \rightarrow V$$

lineer dönüşüm olsun. V üzerinde

$$g_A : V \times V \times \dots \times V \rightarrow \wedge^n V$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \mapsto g_A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = A(\alpha_1) \wedge \dots \wedge A(\alpha_n)$$

şeklinde g_A fonksiyonunu tanımlayalım. g_A n - lineer ve alternedir.

Bu durumda,

$$f_A: \wedge^n V \rightarrow \wedge^n V$$

$$\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \mapsto f_A(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n) = g_A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$= A(\alpha_1) \wedge \dots \wedge A(\alpha_n)$$

fonksiyonu tanımlanır ve f_A da lineerdir.

V nin bir bazı $\emptyset = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ ve A lineer dönüşümüne karşılık gelen matris

$$A_\emptyset = [a_{ij}]$$

olsun.

$$A(\alpha_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \alpha_i, \quad 1 \leq j \leq n, \quad \det A = [a_{ij}]$$

dir. Şimdi,

$J = 1$ için ve toplamı i_1 üzerinde alalım.

$$A(\alpha_1) = \sum_{i_1=1}^n a_{i_1 1} \alpha_{i_1},$$

$$A(\alpha_2) = \sum_{i_2=1}^n a_{i_2 2} \alpha_{i_2}$$

.

.

.

$$A(\alpha_n) = \sum_{i_n=1}^n a_{i_n n} \alpha_{i_n}$$

$$g_A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = A(\alpha_1) \wedge A(\alpha_2) \wedge \dots \wedge A(\alpha_n)$$

$$= \sum_{i_1=1}^n a_{i_1 1} \alpha_{i_1} \wedge \sum_{i_2=1}^n a_{i_2 2} \alpha_{i_2} \wedge \dots \wedge \sum_{i_n=1}^n a_{i_n n} \alpha_{i_n}$$

g_A n-lineer olduğundan

$$= \sum_{i_1 i_2 \dots i_n=1}^n a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} \alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_n}$$

Buradan

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}, \quad \sigma(1) = i_1, \dots, \sigma(n) = i_n$$

$$= \sum_{i_1 i_2 \dots i_n=1}^n a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n} \alpha_{\sigma(1)} \wedge \alpha_{\sigma(2)} \wedge \dots \wedge \alpha_{\sigma(n)}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i_1 i_2 \dots i_n=1}^n a_{\sigma(1)i_1} a_{\sigma(2)i_2} \dots a_{\sigma(n)i_n} S(\sigma) \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n \\
&= \sum_{i_1 i_2 \dots i_n=1}^n S(\sigma) a_{\sigma(1)i_1} a_{\sigma(2)i_2} \dots a_{\sigma(n)i_n} \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n \\
&= \det A. \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n
\end{aligned}$$

olur. Burada

$A: V \rightarrow V$ lineer dönüşümü yerine f_* ve V vektör uzayları yerine de, sırası ile, $T_M(p)$, $T_M(f(p))$ alınarak

$$f_*: T_M(p) \rightarrow T_M(f(p))$$

lineer dönüşümünü elde ederiz. Ayrıca

V nin $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ bazı yerine de

$T_M(p)$ nin $\{X_{u_1}, X_{u_2}, \dots, X_{u_n}\}$ ortonormal bazını alarak

$$A(\alpha_1) \wedge A(\alpha_2) \wedge \dots \wedge A(\alpha_n) = \det A. \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n \quad \text{den}$$

$$f_*(X_{u_1}) \wedge f_*(X_{u_2}) \wedge \dots \wedge f_*(X_{u_n}) = \det f_* X_{u_1} \wedge X_{u_2} \wedge \dots \wedge X_{u_n}$$

ve her iki tarafın normunu alırsak

$$\|f_*(X_{u_1}) \wedge f_*(X_{u_2}) \wedge \dots \wedge f_*(X_{u_n})\| = \|\det f_* X_{u_1} \wedge X_{u_2} \wedge \dots \wedge X_{u_n}\|$$

$$\|f_*(X_{u_1}) \wedge f_*(X_{u_2}) \wedge \dots \wedge f_*(X_{u_n})\| = |\det f_*| \|X_{u_1} \wedge X_{u_2} \wedge \dots \wedge X_{u_n}\|$$

$$dv_2 = |\det f_*| dv_1$$

elde edilir.

II.V. Paralel Hiperyüzeylerin Hacimleri Arasındaki Bağlılıklar

Teorem II.4.1. M ve M_r E^{n+1} de paralel hiperyüzeyler ve hacim elementleri de, sırasıyla, dv ve dv_r olsun. Bu durumda,

$$dv_r = \left| \prod_{i=1}^n (1+r k_i) \right| dv$$

dir [2].

İspat: $\emptyset = \{X_{u_1}, X_{u_2}, \dots, X_{u_n}\}$ vektör alanlarının koordinat sistemini seçelim. Burada $\{X_{u_1}|_p, X_{u_2}|_p, \dots, X_{u_n}|_p\}$ $T_M(p)$ nin ortonormal bazıdır.

$\forall X_{u_i}, 1 \leq i \leq n$, M de asli doğrultu vektörleridir. k_i ler, $(1 \leq i \leq n)$ M nin asli eğrilik fonksiyonları olmak üzere,

$$S(X_{u_i}) = k_i X_{u_i}, 1 \leq i \leq n$$

Teorem II.3.1. gereğince M_r nin $f(p)$ noktasındaki hacim elementlerinin

$$dv_r = \|f_*(X_{u_1}) \wedge f_*(X_{u_2}) \wedge \dots \wedge f_*(X_{u_n})\| du_1 \wedge \dots \wedge du_n$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi $\det f_*$ in değerini hesaplayalım.

Teorem II.2.1 gereğince

$$f_*(X_{u_i}) = X_{u_i} + r S(X_{u_i}), 1 \leq i \leq n$$

$$= X_{u_i} + r k_i X_{u_i}$$

$$f_*(X_{u_i}) = (1+r k_i) X_{u_i}$$

yazılabilir. $\emptyset$ ortonormal baz olduğundan

$$\det f^* = (1+rk_1) (1+rk_2) \dots (1+rk_n) , \quad 1 \leq i \leq n$$

$$dv_r = |\det f^*| \|X_{u_1} \wedge \dots \wedge X_{u_n}\| du_1 \wedge \dots \wedge du_n$$

idi. Burada $\det f^*$ değeri yerine yazılırsa,

$$dv_r = \left| \prod_{i=1}^n (1+rk_i) \right| dv$$

elde edilir.

Teorem II. 4.2. M ve M_r paralel iki hiperyüzey olsun.

$$f : M \rightarrow M_r$$

$$p \rightarrow f(p) = p + rN$$

$$S(X_{u_i}) = k_i X_{u_i}, \quad 1 \leq i \leq t \leq n$$

olduğuna göre

$$v(f^*(X_{u_1}), \dots, f^*(X_{u_t})) = \prod_{i=1}^t (1+rk_i) v(X_{u_1}, \dots, X_{u_t})$$

dir. Burada $v(X_{u_1}, \dots, X_{u_t})$, $X_{u_1}, \dots, X_{u_t}$ vektörlerinin gerdiği t boyutlu hacim elementini gösterir [2].

İspat: Bu teorem II.4.1 in bir sonucudur. Teorem II.4.1 gereğince

$$\|f^*(X_{u_1}) \wedge f^*(X_{u_2}) \wedge \dots \wedge f^*(X_{u_t})\| = \left| \prod_{i=1}^t (1+rk_i) \right| \|X_{u_1} \wedge \dots \wedge X_{u_t}\|$$

$$v(f^*(X_{u_1}), f^*(X_{u_2}), \dots, f^*(X_{u_t})) = \prod_{i=1}^t (1+rk_i) v(X_{u_1}, \dots, X_{u_t})$$

dir.

Teorem II. 4.3:

M ve M_r E^{n+1} de kapalı paralel iki hiperyüzey olsun. dv ve dv_r c -boyutlu hacim elementleri olsun. Eğer K_i ler, $(0 \leq i \leq n-1)$ M nin yüksek mertebeden Gauss eğrilikleri ise,

$$dv_r = \left| 1 + \sum_{i=1}^c r^i K_i \right| dv, \quad 1 \leq c \leq n$$

dir.

İspat: Teorem II.4.1 gereğince,

$$v(f^*(X_{u_1}), f^*(X_{u_2}), \dots, f^*(X_{u_c})) = \prod_{i=1}^c (1+rk_i) v(X_{u_1}, \dots, X_{u_n})$$

yazabiliriz. Buradaki

$$\prod_{i=1}^c (1+rk_i)$$

değerini hesaplayalım.

$$\prod_{i=1}^c (1+rk_i) = (1+rk_1) (1+rk_2) \dots (1+rk_c)$$

c= 2 için

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^2 (1+rk_i) &= (1+rk_1) (1+rk_2) \\ &= 1+r(k_1+k_2) + r^2 k_1 k_2 \\ &= 1+ r \sum_{i=1}^2 k_i + r^2 \prod_{i=1}^2 k_i\end{aligned}$$

c= 3 için

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^3 (1+rk_i) &= (1+rk_1) (1+rk_2) (1+rk_3) \\ &= 1+r(k_1+k_2+k_3) + r^2 (k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3) + r^2 (k_1 k_2 k_3) \\ &= 1+ r \sum_{i=1}^3 k_i + r^2 \sum_{i < j = 1}^3 k_i k_j + r^3 \prod_{i=1}^3 k_i\end{aligned}$$

c= n için

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^n (1+rk_i) &= 1+ r \sum_{i=1}^n k_i + r^2 \sum_{i < j = 1}^n k_i k_j + r^3 \sum_{i < j < r = 1}^n k_i k_j k_r + \dots + \\ &\quad + r^{n-1} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_{n-1} = 1}^{n-1} k_{i_1} k_{i_2} \dots k_{i_{n-1}} + r^n \prod_{i=1}^n k_i \\ &= 1 + rK_1 + r^2 K_2 + r^3 K_3 + \dots + r^{n-1} K_{n-1} + r^n K_n \\ \prod_{i=1}^n (1+rk_i) &= 1 + \sum_{i=1}^n r^i K_i .\end{aligned}$$

Bulduğumuz ifadeyi yerine yazarsak

$$v(f_*(X_{u_1}), \dots, f_*(X_{u_c})) = \left(1 + \sum_{i=1}^c r^i K_i\right) v(X_{u_1}, \dots, X_{u_c})$$

elde edilir. Buradan

$$dv_r = \left|1 + \sum_{i=1}^c r^i K_i\right| dv$$

sonucu elde edilir.

Teorem II. 4.4. M ve M_r E^{n+1} de sınırlı ve kapalı paralel iki hiperyüzey olsunlar. M ve M_r nin, sırası ile, n -boyutlu hacimleri v ve v_r olsun. M tarafından sınırlanan hacim F ve M_r tarafından sınırlanan hacim F_r olsun. O zaman,

$$F_r = F + \sum_{i=1}^n r^i \int K_i dv$$

dir.

İspat:

$$dv_r = \left(1 + \sum_{i=1}^n r^i K_i\right) dv$$

olduğunu biliyoruz.

$$dv_r - dv = \left(1 + \sum_{i=1}^n r^i K_i\right) dv - dv$$

$$dv_r - dv = dv + \sum_{i=1}^n r^i K_i dv - dv$$

$$dv_r - dv = \sum_{i=1}^n r^i K_i dv$$

dir. Ayrıca,

$$F_r = \int dv_r, \quad F = \int dv$$

dir. Buradan

$$F_r - F = \int dv_r - \int dv$$

$$F_r - F = \int (dv_r - dv)$$

$$F_r - F = \int \left(\sum_{i=1}^n r^i K_i dv \right)$$

$$F_r - F = \sum_{i=1}^n r^i \int K_i dv$$

$$F_r = F + \sum_{i=1}^n r^i \int K_i dv$$

dir.

II.5. Paralel Hiperyüzeyler Üzerinde Eğrilik Çizgilerinin Uzunlukları

M ve M_r paralel hiperyüzeyler arasında

$$f: M \rightarrow M_r$$

diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. O zaman aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem II.5.1. α , M üzerinde regüler kapalı bir eğrilik çizgisi ve α nın birim teğet vektör alanı X olmak üzere,

$$S(X) = k_1 X$$

olsun. O zaman

$$L_r = L + r \int_{\alpha} k_1 ds$$

dir [2].

Burada L ve L_r , α ve α_r nin yay uzunluklarıdır ve S , M nin şekil operatörüdür, s , α nın yay parametresidir.

İspat: Teorem II.4.2. gereğince

$$dv(f_*(X)) = \prod_{i=1}^1 (1 + r k_i) dv(X)$$

$$\|f_*(X)\| = (1 + r k_1) \|X\|, \|X\| = 1$$

$$ds_r = (1 + r k_1) ds$$

dir. O halde her iki tarafın I aralığı üzerinde integralini alırsak

$$\int_I ds_r = \int_I (1 + r k_1) ds$$

$$\int_I ds_r = \int_I ds + r \int_I k_1 ds$$

$$L_r = L + r \int k_1 ds$$

Burada I , α nın tanım cümlesidir. Şayet teorem II.5.1 de $n=1$, $M=\alpha$ ve

$$\alpha: I \rightarrow E^2$$

ise

$$L_r = L + 2\pi r$$

olduğunu gösterelim.

M manifoldu yerine α , M_r manifoldu yerine α_r alalım. O zaman

$$M_r = \{\alpha(t) + rV_2 | t \in I\}$$

olur. Burada V_2 de α nın 2. Frenet vektör alanıdır.

Teorem II.5.1. gereğince,

$$L_r = L + r \int_I k_1 ds$$

olduğunu biliyoruz.

α üzerinde X yönündeki normal eğrilik

$$\begin{aligned} k_n(X) &= \langle X, S(X) \rangle \\ &= \langle X, k_1 X \rangle \\ &= k_1 \langle X, X \rangle \end{aligned}$$

$$k_n(X) = k_1$$

dir. Bu durumda

$$S: T_M(p) \rightarrow T_M(p)$$

$$\text{boy } T_M(p) = 1 \text{ ve } S(X) = k_1 X$$

dir.

Bundan başka α nın birim teğet vektör alanı X olduğundan, $X = V_1$ olacaktır.

Frenet formülleri gereğince,

$$D_{V_1} V_1 = k_1 V_2$$

dir.

$$\begin{aligned} |D_{V_1} V_1| &= |k_1 V_2| \\ &= k_1 |V_2|, \quad |V_2| = 1 \end{aligned}$$

olduğundan,

$$|D_X X| = k_1$$

$$k_g = k_1$$

dir. O halde,

$$k_1 = k_n = k_g$$

olduğunu göstermiş olduk. Böylece,

Teorem II.5.1. gereğince,

$$L_r = L + r \int_I k_g ds$$

olur. Bu son denklemden E^2 de α , yarıçapı R olan bir çember alalım. O zaman,

$$\alpha = (R \cos \Theta, R \sin \Theta)$$

olur. α 'yı birim hızlı olacak şekilde parametrelendirelim:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{d\Theta} \frac{d\Theta}{ds}$$

$$||\alpha' || = ||\dot{\alpha} || \frac{d\Theta}{ds}$$

$$1 = ||\dot{\alpha} || \frac{d\Theta}{ds}$$

$$ds = ||\dot{\alpha} || d\Theta$$

$$\int ds = \int ||\dot{\alpha} || d\Theta$$

$$s = R\Theta$$

$$\Theta = \frac{s}{R}$$

olur. Burada s , α nin yay parametresidir.

$$\alpha = \left(R \cos \frac{s}{R}, R \sin \frac{s}{R} \right)$$

$$K_g = \|D_T T\|, \quad D_T T = \frac{d^2 \alpha}{ds^2}$$

dir.

$$T = \alpha' = \left(-\sin \frac{s}{R}, \cos \frac{s}{R} \right)$$

$$D_T T = \alpha'' = \left(-\frac{1}{R} \cos \frac{s}{R}, \frac{1}{R} \sin \frac{s}{R} \right)$$

Buradan da

$$K_g = \frac{1}{R}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} k_g ds &= \int_0^{2\pi R} \frac{1}{R} ds \\ &= \frac{1}{R} 2\pi R \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

Bulunanlar,

$$L_r = L + r \int k_g ds$$

ifadesinde yerlerine yazılırsa

$$L_r = L + r2\pi$$

bulunur.

III. BÖLÜM

III.3. Yörünge Hortumunun Hacmi

E^n , n-boyutlu Öklid uzayında hareketli H uzayının pozitif yönlü $\{O;E_i\}$ ortonormal eksen sistemi ve sabit H' uzayını da pozitif yönlü $\{O'; E'_i\}$ ortonormal eksen sistemi ile gösterelim. Ayrıca H nın H' ye göre $H \setminus H' = B$ hareketini, H_1 uzayı ile gösterilen bir üçüncü pozitif yönlü $\{Q; R_i\}$ ortonormal sisteminde ifade edelim (rölatif sistem). Burada

$$\langle E_i, E_j \rangle = \delta_{ij}, \langle E'_i, E'_j \rangle = \delta_{ij}, \langle R_i, R_j \rangle = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

dir.

$$\vec{OQ} = \vec{q}, \quad \vec{O'Q} = \vec{q}'$$

dersek,

$$\vec{q} = q_1 R_1 + q_2 R_2 + \dots + q_n R_n$$

$$\vec{q}' = q'_1 R_1 + q'_2 R_2 + \dots + q'_n R_n$$

$$d\vec{q} = w_1^* R_1 + w_2^* R_2 + \dots + w_n^* R_n = \sum_{i=1}^n w_i^* R_i$$

$$d\vec{q}' = w'_1 R_1 + w'_2 R_2 + \dots + w'_n R_n = \sum_{i=1}^n w'_i R_i$$

olur.

Eğer bir $x \in H_1$ noktasının $\{Q; R_i\}$ sistemine göre koordinatları

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ise

$$\vec{X} = x_1 R_1 + x_2 R_2 + \dots + x_n R_n$$

$$\vec{X} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n] \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}$$

$$\vec{X} = X^T R$$

$$\vec{X} = \vec{OX} = \vec{OQ} + \vec{QX} = \vec{q} + X^T R$$

$$\vec{X}' = \vec{O'X} = \vec{O'Q} + \vec{QX} = \vec{q}' + X^T R$$

Öte yandan

$$E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix}, E' = \begin{bmatrix} E'_1 \\ E'_2 \\ \vdots \\ E'_n \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}$$

$$A: R \rightarrow O(n) = \{A \mid AA^T = A^T A = I_n\}$$

$$t \rightarrow A(t)$$

ve

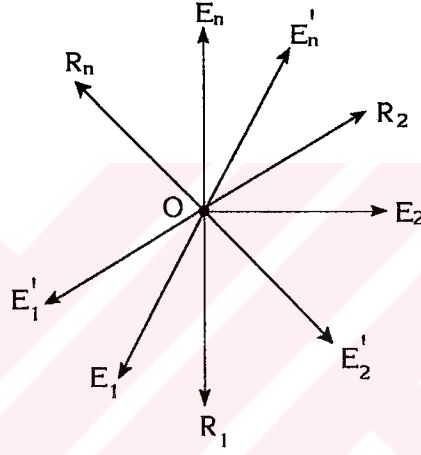
$$A': R \rightarrow O(n) = \{A' \mid A' A'^T = A'^T A' = I_n\}$$

olmak üzere,

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

yazılabilir.

Hareketli ve sabit uzaylarımızın ortonormal eksen sistemlerini bir noktada düşünürsek, üçü de birer ortonormal bazdır.



Şekil III.3.1

Bu baz vektörlerinin herbirinin uç noktaları birim hiperküre üzerindedir. Dolayısıyla,

$$E_1 = a_{11}R_1 + a_{12}R_2 + \dots + a_{1n}R_n$$

$$E_2 = a_{21}R_1 + a_{22}R_2 + \dots + a_{2n}R_n$$

$$\vdots$$

$$E_n = a_{n1}R_1 + a_{n2}R_2 + \dots + a_{nn}R_n$$

dir. Bunu matris formda yazarsak

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}, \quad a_{ij} = a_{ij}(t)$$

veya kısaca

$$E = AR$$

olur. Aynı şekilde

$$E' = A'R$$

yazılabilir.

$$A \in O(n) \Rightarrow AA^T = A^TA = I_n$$

$$A' \in O(n) \Rightarrow A'A'^T = A'^TA' = I_n$$

dir. Buradan ilk eşitliğin her iki yanının diferensiyeli alınırsa,

$$d(A^TA) = d(I_n)$$

$$dA^TA + A^TdA = 0$$

$$dA^TA = \Omega, \quad \Omega^T = A^TdA$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\Omega + \Omega^T = 0 \Rightarrow \Omega^T = -\Omega$$

eşitliği sağlandığından Ω , $n \times n$ tipinde antisimetrik bir matristir.

Benzer şekilde,

$$A'^T A' = I_n$$

$$\delta(A'^T A') = \delta(I_n)$$

$$\delta A'^T A' + A'^T \delta A' = 0$$

$$\delta A'^T A' = \Omega', \quad \Omega'^T = A'^T \delta A'$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\Omega' + \Omega'^T = 0 \Rightarrow \Omega' = -\Omega'^T$$

eşitliği sağlandığından Ω' , $n \times n$ tipinde antisimetrik matristir.

$$E = AR \text{ ve } E' = A'R$$

olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$E = AR \Rightarrow R = A^T E$$

$$E' = A'R \Rightarrow R = A'^T E'$$

elde edilir.

$K_1 \setminus K$ küresel hareketinin denklemi,

$$R = A^T E$$

$$dR = dA^T E + A^T dE$$

$$dR = dA^T E$$

$$dR = dA^T AR$$

$$dR = \Omega R$$

dir. Benzer şekilde $K_1 \setminus K'$ küresel hareketinin denklemi de

$$R = A'^T E'$$

$$\delta R = \delta A'^T E' + A'^T \delta E'$$

$$\delta R = \delta A'^T E'$$

$$\delta R = \delta A'^T A' R$$

$$\delta R = \Omega' R$$

olur. Böylece, $x \in H_1$ noktasının $H_1 \setminus H$ daki değişimi

$$\begin{aligned}\vec{X} &= \vec{q} + X^T R \\ d\vec{X} &= d\vec{q} + dX^T R + X^T dR \\ d\vec{X} &= w^{*T} R + dX^T R + X^T \Omega R \\ d\vec{X} &= (w^{*T} + X^T \Omega) R + dX^T R\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde,

$x' \in H_1$ noktasının $H_1 \setminus H'$ daki değişimi

$$\begin{aligned}\vec{X}' &= \vec{q}' + X'^T R \\ \delta \vec{X}' &= \delta \vec{q}' + \delta X'^T R + X'^T \delta R \\ \delta \vec{X}' &= w'^{*T} R + \delta X'^T R + X'^T \Omega' R \\ \delta \vec{X}' &= (w'^{*T} + X'^T \Omega') R + \delta X'^T R\end{aligned}$$

bulunur. Burada, Ω ve Ω' matrisleri; $H \setminus H_1$, $H' \setminus H_1$ uzay hareketlerinin, dönme kısımlarına ait Darboux tensörüne karşılık gelen matrislerdir.

$x \in H_1$ noktası sabit ise $dX^T = 0$ olur. O zaman,

$$\vec{dX} = (w^{*T} + X^T \Omega) R$$

dir. Benzer şekilde,

$$\vec{\delta X'} = (w'^{*T} + X'^T \Omega') R$$

elde edilir.

Eğer x noktası H da sabit ise $\vec{dX} = 0$ olacağından bu değişmeye (H' ye göre değişimi) x noktasının sürüklenme hızı denir. Sürüklenme hızını $\vec{d_f X}$ ile gösterelim. Ayrıca,

$$\vec{d_f X} = \vec{\delta X'} - \vec{dX}$$

şeklinde ifade edilir.

$$\vec{d_f X} = \vec{\delta X'} - \vec{dX}$$

$$\vec{d_f X} = (w'^{*T} + X'^T \Omega') R - (w^{*T} + X^T \Omega) R$$

$$\vec{d_f X} = (w'^{*} - w^*)^T R + X^T (\Omega' - \Omega) R$$

olur. $\Omega' - \Omega$ antisimetrik matris olduğundan

$$\Omega' - \Omega = \Psi$$

dersek,

$$\vec{d_f X} = [(w'^{*} - w^*)^T + X^T \Psi] R$$

$$d_f X^T R = [(w'^{*} - w^*)^T + X^T \Psi] R$$

olur. Böylece, sürüklenme hızının matris şeklindeki ifadesi

$$d_f X^T = (w'^* - w^*)^T + X^T \Psi$$

elde edilir. Burada $w'^* - w^*$ kolon matrisi Darboux tensörünün Q noktasına göre moment vektörünün matrisidir. Bunu

$$\Psi^* = w'^* - w^*$$

matrisi ile gösterirsek,

$$d_f X^T = \Psi^{*T} + X^T \Psi$$

olur. Ve her iki tarafın transpozunu alırsak,

$$d_f X = \Psi^* + \Psi^T X$$

elde edilir.

$(n-1)$ gerçel parametrelili,

$$\begin{aligned} \vec{X} &= \vec{X}(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) \\ &= x_1(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + x_n(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) \frac{\partial}{\partial x_n} \end{aligned}$$

vektörü ile verilen E^n deki M regüler hiperyüzeyi için,

$$d\vec{X} \wedge \dots \wedge d\vec{X} = (n-1)! \vec{N} \|\vec{X}_{u_1} \wedge \dots \wedge \vec{X}_{u_{n-1}}\| du_1 \wedge \dots \wedge du_{n-1}$$

dir. Verilen hiperyüzeyin dA skaler hiperalan elementi

$$dA = \|\vec{X}_{u_1} \wedge \vec{X}_{u_2} \wedge \dots \wedge \vec{X}_{u_{n-1}}\| du_1 \wedge du_2 \wedge \dots \wedge du_{n-1}$$

ve $d\vec{A}$ vektörel hiperalan elementi de

$$\vec{dA} = \frac{1}{(n-1)!} (d\vec{X} \wedge \dots \wedge d\vec{X})$$

olarak tanımlanır.

Öte yandan $x \in H_1$ noktasının H' ye göre hareketini vektörel olarak

$$d_f \vec{X} = \vec{\Psi}^* + \vec{\Psi} \wedge \vec{X}$$

yazabiliriz.

Kapalı bir $H \setminus H' = B$ uzay hareketinde hareketli H uzayındaki çevre eğrisi ∂M olan bir hiperyüzey parçası tesbit edelim. Bu hiperyüzey parçası $H \setminus H' = B$ hareketinde H' sabit uzayında genel olarak hipertor biçiminde bir uzay parçası resmeder. Biz bu uzay parçasına M nin yörünge hortumu diyoruz. Bu uzay parçası Φ ile gösterilirse Φ nin yörünge hortumunun dv hiperhacim elemanını

$$dv = \langle d_f \vec{X}, d\vec{A} \rangle$$

şeklinde tanımlıyoruz.

$$dv = \langle d_f \vec{X}, d\vec{A} \rangle$$

$$dv = \langle \vec{\Psi}^* + \vec{\Psi} \wedge \vec{X}, \frac{1}{(n-1)!} d\vec{X} \wedge \dots \wedge d\vec{X} \rangle$$

$$dv = \frac{1}{(n-1)!} \langle \vec{\Psi}^*, d\vec{X} \wedge \dots \wedge d\vec{X} \rangle + \frac{1}{(n-1)!} \langle \vec{\Psi} \wedge \vec{X}, d\vec{X} \wedge \dots \wedge d\vec{X} \rangle$$

olur.

$$(3.3.1) \dots\dots\dots v = \frac{1}{(n-1)!} \int_B \int_M \langle \vec{\Psi}^*, d\vec{X} \wedge \dots \wedge d\vec{X} \rangle \\ + \frac{1}{(n-1)!} \int_B \int_M \langle \vec{\Psi} \wedge \vec{X}, d\vec{X} \wedge \dots \wedge d\vec{X} \rangle$$

(n-1) gerçel parametrelili

$$\vec{X} = \vec{X}(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) = x_1(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + x_n(u_1, \dots, u_{n-1}) \frac{\partial}{\partial x_n}$$

vektörü ile verilen E^n deki M regüler hiperyüzeyi için

$$d\vec{X} \wedge \dots \wedge d\vec{X} = (n-1)! \vec{N} dA$$

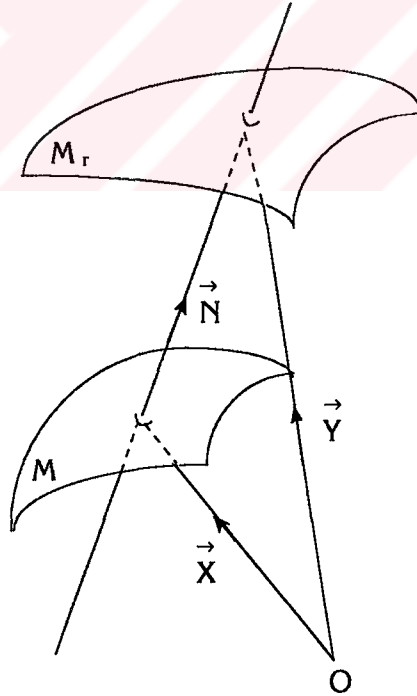
dır. Bu ifadeyi (3.3.1) de yerine yazarsak

$$v = \int_B \int_M \langle \vec{\Psi}^*, \vec{N} \rangle dA + \int_B \int_M \langle \vec{\Psi} \wedge \vec{X}, \vec{N} \rangle dA$$

$$v = \int_M \left(\int_B \langle \vec{\Psi}^*, \vec{N} \rangle + \int_B \langle \vec{\Psi} \wedge \vec{X}, \vec{N} \rangle \right) dA$$

$$v = \int_M \left(\int_B \langle \vec{\Psi}^*, \vec{N} \rangle dA + \int_B \langle \vec{\Psi} \wedge \vec{X}, \vec{N} \rangle dA \right)$$

elde edilir.



Şekil III.3.2

M ve M_r paralel hiperyüzeyleri için

$$\vec{Y} = \vec{X} + r\vec{N}$$

$$d_f \vec{X} = \vec{\Psi}^* + \vec{\Psi} \wedge \vec{X}$$

$$d_f \vec{Y} = \vec{\Psi}^* + \vec{\Psi} \wedge \vec{Y}$$

$$= \vec{\Psi}^* + \vec{\Psi} \wedge (\vec{X} + r\vec{N})$$

$$= \vec{\Psi}^* + \vec{\Psi} \wedge \vec{X} + r\vec{\Psi} \wedge \vec{N}$$

$$d_f \vec{Y} = d_f \vec{X} + r\vec{\Psi} \wedge \vec{N}$$

elde edilir.

M ve M_r nin vektörel alan elementleri için

$$d\vec{A} = \frac{1}{(n-1)!} d\vec{X} \wedge \dots \wedge d\vec{X} = \vec{N} dA$$

$$d\vec{A}_r = \frac{1}{(n-1)!} d\vec{Y} \wedge \dots \wedge d\vec{Y} = \vec{N} dA_r$$

ve hacim elementleri için

$$dv = \langle d_f \vec{X}, d\vec{A} \rangle$$

$$dv_r = \langle d_f \vec{Y}, d\vec{A}_r \rangle$$

dır. $d_f \vec{Y} = d_f \vec{X} + r\vec{\Psi} \wedge \vec{N}$ olduğundan

$$dv_r = \langle d_f \vec{X} + r \vec{\Psi} \wedge \vec{N}, d\vec{A}_r \rangle$$

$$dv_r = \langle d_f \vec{X}, d\vec{A}_r \rangle + r \langle \vec{\Psi} \wedge \vec{N}, d\vec{A}_r \rangle$$

yazılabilir. Bu ifadelerde

$$d_f \vec{X} = \vec{\Psi}^* + \vec{\Psi} \wedge \vec{X}$$

değerleri yerlerine yazılır ve integral alınırsa M nin sınırladığı hortumun hacmi için

$$v = \int_M \left[\langle \int_B \vec{\Psi}^* + \int_B \vec{\Psi} \wedge \vec{X}, \vec{N} \rangle dA \right]$$

ve benzer şekilde M_r hiperyüzeyinin sınırladığı hortumun hacmi için

$$v_r = \int_{M_r} \left[\langle \int_B \vec{\Psi}^* + \int_B \vec{\Psi} \wedge \vec{Y}, \vec{N} \rangle dA_r \right]$$

yazılabilir. Hortum kabuğunun hacmi ise, M ve M_r aynı parametrelerle tanımlanabileceğinden,

$$v_r - v = \int_{M_r} \left\{ \langle \int_B \vec{\Psi}^* + \int_B \vec{\Psi} \wedge \vec{Y}, \vec{N} \rangle dA_r \right\} - \int_M \left\{ \langle \int_B \vec{\Psi}^* + \int_B \vec{\Psi} \wedge \vec{X}, \vec{N} \rangle dA \right\}$$

olarak yazılabilir.

$n=3$ özel durumunda,

$$v = \frac{1}{2} \int_M \langle \int_B \vec{\Psi}^*, d\vec{X} \wedge d\vec{X} \rangle + \frac{1}{2} \int_M \langle \int_B \vec{\Psi} \wedge \vec{X}, d\vec{X} \wedge d\vec{X} \rangle$$

$$v = \langle \int_B \vec{\Psi}^*, \frac{1}{2} \int_M d\vec{X} \wedge d\vec{X} \rangle + \langle \int_B \vec{\Psi}, \frac{1}{2} \int_M \vec{X} \wedge (d\vec{X} \wedge d\vec{X}) \rangle$$

olur. Burada

$$\int_B \vec{\Psi}^* = \vec{k}^* \quad , \quad \int_B \vec{\Psi} = \vec{k}$$

ve M ile M_r hiperyüzeyleri için, sırası ile,

$$\frac{1}{2} \int_M d\vec{X} \wedge d\vec{X} = \vec{h} \quad , \quad \frac{1}{2} \int_M d\vec{X} \wedge (\vec{X} \wedge d\vec{X}) = \vec{h}^*$$

$$\frac{1}{2} \int_{M_r} d\vec{Y} \wedge d\vec{Y} = \vec{\bar{h}} \quad , \quad \frac{1}{2} \int_{M_r} d\vec{Y} \wedge (\vec{Y} \wedge d\vec{Y}) = \vec{\bar{h}}^*$$

alırsak, Φ yörünge hortumunun v hacmi,

$$(\vec{h}, \vec{h}^*), (\vec{k}, \vec{k}^*)$$

vidalarının,

$$v = \langle \vec{h}, \vec{k}^* \rangle + \langle \vec{h}^*, \vec{k} \rangle$$

momenti ile verildiğini biliyoruz [4]. Benzer şekilde v_r hacmi için de

$$v_r = \langle \vec{\bar{h}}, \vec{k}^* \rangle + \langle \vec{\bar{h}}^*, \vec{k} \rangle$$

olur. Hortum kabuğunun hacmi ise

$$v_r - v = \langle \vec{\bar{h}} - \vec{h}, \vec{k}^* \rangle + \langle \vec{\bar{h}}^* - \vec{h}^*, \vec{k} \rangle$$

olarak yazılabilir. Şu halde hortum kabuğunun hacmi

$$(\vec{\bar{h}} - \vec{h}, \vec{\bar{h}}^* - \vec{h}^*), (\vec{k}, \vec{k}^*)$$

vidalarının $v_r - v$ momentini almış olur.

SONUÇ

Bu çalışmada paralel hiperyüzeyler teorisine dair bilinen özellikler ve teori bir araya getirilmiştir.

Bilhassa kapalı paralel hiperyüzeyler için sınırlanan hacimler o hiperyüzeyle ait ortak KOENIGS vidası ve alan elementleri cinsinden hesaplandı.

Daha sonra paralel hiperyüzeylerden birinin hortumun iç diğerinin de dış yüzeyi olması hali bir uygulama olarak verildi. Böylece dış yüzeyin sınırladığı hacmi veren KOENIGS vidası ile iç yüzeyin sınırladığı hacmin aynı cins vidasının sayesinde hortum kabuğunun vidası da elde edildi.

KAYNAKLAR

- [1]. HACISALİHOĞLU, H.H., Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları.
- [2]. HACISALİHOĞLU, H.H-GÖRGÜLÜ, A. On Steiner's Formulae, Journal of Sci. and. Arts of Gazi Üniv. V.2. Number 2.pp. 1-13.
- [3]. HACISALİHOĞLU, H.H-ÖZDAMAR, E. Higher Order Gaussian Curvatures and Fundamental Forms Journal of the Faculty of Sciences of the Karadeniz Technical University, Trabzon-Turkey
- [4]. Müller, H.R. Kinematik Dersleri (Tercüme), Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları 1963-Ankara

ÖZGEÇMİŞ

Reyhanlı'da 1964 yılında doğdu. İlk öğrenimini Reyhanlı Oğuzhan İlkokulunda, orta öğrenimini Reyhanlı Ortaokulunda ve Reyhanlı Lisesinde yaptı. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden mezun olarak, G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans programına girdi. Daha sonra, M.E. Bakanlığında öğretmen olarak çalışmaya başladı. Halen bu görevi sürdürmektedir.