

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**PARAMETRİK (HİPER)YÜZEYLERİN ARAKESİT EĞRİSİ İÇİN
WILLMORE-BENZERİ METOTLAR**

ÖZLEM AKBABA

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
DOÇ. DR. MUSTAFA DÜLDÜL**

İSTANBUL, 2013

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**PARAMETRİK (HİPER)YÜZEYLERİN ARAKESİT EĞRİSİ İÇİN
WILLMORE-BENZERİ METOTLAR**

Özlem AKBABA tarafından hazırlanan tez çalışması 05.08.2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Mustafa DÜLDÜL
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Mustafa DÜLDÜL
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Salim YÜCE

Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU

Bahçeşehir Üniversitesi

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın yapılması fikrinden gerçekleşmesine kadar görüş, düşünce, bilgi ve deneyimlerinden faydalandığım danışman hocam **Doç. Dr. Mustafa DÜLDÜL**'e teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Tüm hayatım boyunca maddi ve manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen aileme de teşekkürlerimi sunarım.

Ağustos, 2013

Özlem AKBABA

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
BÖLÜM 1	
GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	2
1.3 Orijinal Katkı	3
BÖLÜM 2	
TEMEL KAVRAMLAR	4
BÖLÜM 3	
WILLMORE METODU ($\mathbb{E}^3$)	9
BÖLÜM 4	
WILLMORE METODU'NUN $\mathbb{E}^4$ UZAYINA GENİŞLETİLMESİ	11
BÖLÜM 5	
$\mathbb{E}^3$ UZAYINDA ARAKESİT PROBLEMLERİ İÇİN WILLMORE-BENZERİ METOTLAR	14
5.1 Parametrik Denklemlerle Verilen İki Yüzeyin Arakesit Eğrisi	14
5.2 Biri Parametrik Diğer Kapalı Denklemlerle Verilen İki Yüzeyin Arakesit Eğrisi	17
5.3 Yüzeylerin Arakesit Problemleri İçin Örnekler	19
5.3.1 Parametrik-parametrik Arakesit Problemi	19
5.3.2 Parametrik –kapalı Arakesit Problemi	22

BÖLÜM 6

$\mathbb{E}^4$ UZAYINDA ARAKESİT PROBLEMLERİ İÇİN WILLMORE-BENZERİ METOTLAR	26
6.1 Parametrik Denklemlle Verilen Üç Hiperyüzeyin Arakesit Eğrisi	26
6.2 İki Parametrik Biri Kapalı Denklemlle Verilen Üç Hiperyüzeyin Arakesit Eğrisi.....	31
6.3 Biri Parametrik Diğerleri Kapalı Denklemlle Verilen Üç Hiperyüzeyin Arakesit Eğrisi.....	33
6.4 Hiperyüzeylerin Arakesit Problemleri İçin Örnekler	35
6.4.1 Parametrik-parametrik-parametrik Arakesit Problemi	35
6.4.2 Parametrik-parametrik-kapalı Arakesit Problemi	39
6.4.3 Parametrik-kapalı-kapalı Arakesit Problemi.....	43

BÖLÜM 7

SONUÇ VE ÖNERİLER	48
KAYNAKLAR.....	49
ÖZGEÇMİŞ.....	51

SİMGE LİSTESİ

$\mathbb{E}^n$	n-boyutlu Öklid uzayı
t	birim teğet vektör alanı
n	asli normal vektör alanı
b_1	birinci binormal vektör alanı
b_2	ikinci binormal vektör alanı
k_1	$\mathbb{E}^4$ de 1. eğrilik
k_2	$\mathbb{E}^4$ de 2. eğrilik
k_3	$\mathbb{E}^4$ de 3. eğrilik
κ	$\mathbb{E}^3$ de eğrilik
τ	$\mathbb{E}^3$ de burulma

**PARAMETRİK (HİPER)YÜZEYLERİN ARAKESİT EĞRİSİ İÇİN
WILLMORE-BENZERİ METOTLAR**

Özlem AKBABA

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mustafa DÜLDÜL

Bu çalışma yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde literatür özeti ve tezin amacı verilmiştir.

İkinci bölümde eğrilerin ve yüzeylerin diferensiyel geometrisi ile ilgili bazı temel kavramlar belirtilmiştir.

Üçüncü bölümde, kapalı denklemleriyle verilen iki yüzeyin arakesit eğrisinin eğrilik ve burulmasının nasıl hesaplanacağını gösteren Willmore metodu anlatılmış ve dördüncü bölümde de bu metodun 4-boyutlu uzaya genişletilmesinden bahsedilmiştir.

Beşinci ve altıncı bölümler tezin orijinal kısımlarıdır.

Beşinci bölümde, Willmore metodundaki düşünceden yararlanarak, 3-boyutlu Öklid uzayında en az biri parametrik olarak verilen iki yüzeyin enine arakesit eğrisinin Frenet elemanlarının hesaplanışı gösterilmiştir.

Altıncı bölümde ise 4-boyutlu Öklid uzayında en az biri parametrik denklemleriyle verilen üç hiperyüzeyin enine arakesit eğrisinin Frenet elemanlarının Willmore-benzeri yöntemlerle nasıl hesaplanabileceği ifade edilmiştir.

Yedinci bölümde ise sonuç ve öneriler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Willmore metodu, arakesit eğrisi, Frenet elemanları, enine arakesit

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ABSTRACT

WILLMORE-LIKE METHODS FOR THE INTERSECTION CURVE OF PARAMETRIC (HYPER)SURFACES

Özlem AKBABA

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL

This study consists of seven sections. The aim of thesis and review of the literature are given in the first chapter.

In the second chapter, some basic concepts related to differential geometry of curves and surfaces are indicated.

In the third chapter, the Willmore method which shows how to calculate the curvature and torsion of the intersection curve of two surfaces given by their implicit equations is explained and in the fourth chapter, the extension of this method into four-dimensional space is mentioned.

The fifth and the sixth sections are the original part of thesis.

In the fifth chapter, the calculation of Frenet apparatus of the transversal intersection curve of two surfaces in which at least one surface is given by parametrically in 3-dimensional Euclidian space is shown by using the idea of Willmore's method.

In the sixth chapter, with Willmore-like methods, how we can calculate the Frenet apparatus of the transversal intersection curve of three hypersurfaces in which at least one is given by its parametric equation in 4-dimensional Euclidean space is expressed.

In the seventh chapter, conclusions and recommendations are presented.

Key Words: Willmore method, intersection curve, Frenet frame, transversal intersection

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

1.1 Literatür Özeti

Diferensiyel geometride, parametrik denklemleriyle verilen bir eğrinin eğrilikleri ve Frenet vektörleri $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında kolaylıkla bulunabilir [1-7]. $\mathbb{E}^n$ de bir eğri arakesit eğrisi olarak verildiğinde onun Frenet elemanlarını belirlemek çok zordur. Bu zorlukları aşmak için $\mathbb{E}^3$ de kesişen iki yüzey ve $\mathbb{E}^4$ de kesişen üç hiperyüzey için farklı metotlar geliştirilmiştir. (Hiper)yüzeylerin arakesiti enine (transversal) veya teğetsel arakesit olmak üzere iki farklı şekildedir. (Hiper)yüzeylerin normal vektörlerinin arakesit noktasında lineer bağımsız olduğu enine arakesit probleminde teğet doğrultu (hiper)yüzeylerin normal vektörlerinin vektörel çarpımı ile kolayca bulunabilmektedir.

(Hiper)yüzeyler parametrik veya kapalı denklemleriyle verilebileceğinden, arakesit problemleri 3-boyutlu uzayda

parametrik-parametrik, parametrik-kapalı, kapalı-kapalı

şeklinde, ve 4-boyutlu uzayda ise

parametrik-parametrik-parametrik, parametrik-parametrik-kapalı,

parametrik-kapalı-kapalı, kapalı-kapalı-kapalı

olarak ortaya çıkmaktadır. Bu arakesit problemleri son yıllarda oldukça çok ilgi görmüştür.

Hartmann $\mathbb{E}^3$ de bütün arakesit problemleri için, arakesit eğrisinin eğriliğini hesaplayan formüller geliştirmiştir [8]. Ye ve Maekawa iki yüzeyin bütün arakesit problemleri için eğriliklerin ve Frenet vektörlerinin nasıl hesaplanacağını ifade etmiş ve yüksek mertebeden türevlerin bulunması için algoritmalar geliştirmiştir [9]. Goldman kapalı denklemleriyle verilen n tane hiperyüzeyin arakesit eğrisi için birinci eğriliği ve kapalı denklemleriyle verilen iki yüzey için tüm Frenet elemanlarını elde etmiştir [10]. Aléssio, kapalı fonksiyon teoremini kullanarak, $\mathbb{E}^3$ de kapalı denklemleriyle verilen iki yüzeyin [11] ve $\mathbb{E}^4$ de de kapalı denklemleriyle verilen üç hiperyüzeyin [12] arakesit eğrilerinin Frenet elemanlarını bulmuştur. Düldül, $\mathbb{E}^4$ de parametrik denklemleriyle verilen üç hiperyüzeyin arakesit eğrisinin eğriliklerini ve Frenet vektörlerini vermiştir [13]. Soliman vd. de kapalı ve parametrik denklemleriyle verilen yüzeylerin arakesit eğrileri için çalışmalar yapmıştır [14]. Abdel-All vd. kapalı denklemleriyle verilen iki yüzeyin arakesit eğrisi için Frenet elemanlarını farklı bir yöntemle hesaplamıştır [15]. Ayrıca $\mathbb{E}^4$ de parametrik-parametrik-kapalı ve parametrik-kapalı-kapalı hiperyüzeylerin arakesit eğrileri için Frenet elemanlarını elde etmişlerdir [16].

Willmore $\mathbb{E}^3$ de $f(x, y, z) = 0$ ve $g(x, y, z) = 0$ kapalı denklemleriyle verilen iki yüzeyin enine arakesit eğrisini göz önüne almıştır. $\mathbf{h} = \nabla f \times \nabla g$ olarak ve

$$\Delta = \lambda \frac{d}{ds} = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} + h_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \text{ operatörünü tanımlayarak, arakesit eğrisinin eğrilik}$$

ve burulmasını elde etmiştir [17]. Uyar Düldül ve Düldül ise Willmore metodunu 4-boyutlu uzaya genişleterek, kapalı denklemleriyle verilen üç hiperyüzeyin enine arakesit eğrisinin Frenet elemanlarını hesaplamıştır [18].

1.2 Tezin Amacı

Bu tez çalışmasının amacı, 3-boyutlu ve 4-boyutlu Öklid uzaylarında enine arakesit eğrilerinin Frenet elemanlarını elde etmek için yeni ve kolay uygulanabilir metotlar vermektir. T. J. Willmore'un düşüncesi kullanılarak elde edilecek olan bu metotlarda amaç yeni tanımlanacak bazı operatörler yardımıyla en az biri parametrik olarak verilen (hiper)yüzeylerin enine arakesit eğrisinin Frenet vektörlerini ve eğriliklerini elde etmektir.

1.3 Orijinal Katkı

Bu çalışmada, 3-boyutlu Öklid uzayında

parametrik-parametrik, parametrik-kapalı

ve 4-boyutlu Öklid uzayında

parametrik-parametrik-parametrik, parametrik-parametrik-kapalı,

parametrik-kapalı-kapalı

denklemleriyle verilen (hiper)yüzeylerin enine arakesit problemleri için Willmore-benzeri yeni operatörler verilecektir. Böylece bu operatörler yardımıyla ifade edilen ve yalnızca skaler çarpım ile vektörel çarpım kullanan metotlar herhangi bir arakesit problemine kolayca uygulanabilecek ve bu metotlar daha önce verilen yöntemlerle karşılaştırıldığında yukarıdaki arakesit problemleri için hesaplamaları kolaylaştıracaktır.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1 $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık olsun. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ diferensiyellenebilir fonksiyonuna $\mathbb{E}^3$ de bir diferensiyellenebilir eğri denir.

Tanım 2.2 $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ eğrisi verilsin. I aralığındaki her bir t için $\mathbb{E}^3$ ün $\alpha(t)$ noktasındaki

$$\alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}(t), \frac{d\alpha_2}{dt}(t), \frac{d\alpha_3}{dt}(t) \right)_{\alpha(t)}$$

tanjant vektörüne α nın $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü denir.

Tanım 2.3 $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ bir eğri olsun. α nın her noktasındaki hız vektörü sıfır vektöründen farklı ise yani; $\forall t \in I$ için $\alpha'(t) \neq \vec{0}$ oluyorsa α eğrisine regüler eğri denir.

Tanım 2.4 $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için $\|\alpha'(t)\| = 1$ oluyorsa α eğrisine birim hızlı eğri denir.

Tanım 2.5 $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğri olsun. $\forall s \in I$ için $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s)$ ile tanımlı $\mathbf{t} = \alpha'$ vektör alanına α eğrisi boyunca birim teğet vektör alanı denir.

Tanım 2.6 $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğri olsun. $\forall s \in I$ için $\kappa(s) = \|\mathbf{t}'(s)\|$ ile tanımlı $\kappa: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna α eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. Belli bir $s_0 \in I$ için $\kappa(s_0) \in \mathbb{R}$ sayısına da α eğrisinin $\alpha(s_0)$ noktasındaki eğriliği denir.

Tanım 2.7 $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğri olsun. $\kappa > 0$ olan bir α eğrisi için $\mathbf{n}(s) = \frac{\mathbf{t}'(s)}{\|\mathbf{t}'(s)\|} = \frac{\mathbf{t}'(s)}{\|\mathbf{t}'(s)\|}$ ile tanımlı $\mathbf{n}$ vektör alanına α eğrisi boyunca asal (asli) normal vektör alanı denir.

Tanım 2.8 $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğri olsun. α eğrisi için $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ ile tanımlı $\mathbf{b}$ vektör alanına α eğrisi boyunca binormal vektör alanı denir.

Teorem 2.9 $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğri olsun. α eğrisi için $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ vektör alanları α eğrisi boyunca bir çatı oluşturur.

Tanım 2.10 $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğri olsun. α eğrisi boyunca tanımlanan $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ çatı alanına **Frenet** çatı alanı denir.

Tanım 2.11 $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğri olsun. α eğrisi boyunca $\tau = -\langle \mathbf{b}', \mathbf{n} \rangle$ ile tanımlanan τ fonksiyonuna α eğrisinin burulma (torsiyon) fonksiyonu denir. Belli bir $s_0 \in I$ için $\tau(s_0) \in \mathbb{R}$ sayısına da α eğrisinin $\alpha(s_0)$ noktasındaki burulması denir.

Teorem 2.12 $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi eğriliği $\kappa > 0$ ve burulması τ olan birim hızlı bir eğri olsun.

$$\mathbf{t}' = \kappa \mathbf{n}$$

$$\mathbf{n}' = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}$$

$$\mathbf{b}' = -\tau \mathbf{n}$$

formüllerine Frenet formülleri denir.

Teorem 2.13 $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı olmayan regüler bir eğri olsun. Bu takdirde, eğrinin Frenet elemanları

$$\mathbf{t} = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t}, \quad \mathbf{b} = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \quad \text{ve} \quad \kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}, \quad \tau = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}$$

eşitlikleri ile verilir.

Tanım 2.14 Bir $M \subset \mathbb{E}^3$ kümesi verilsin. $\forall P \in M$ noktası için, görüntüsü P noktasının M deki komşuluğunu kapsayan ve $D \subset \mathbb{E}^2$ açık kümesi üzerinde tanımlı bir $X: D \rightarrow M$ dönüşümü

- i) birebir,
- ii) regüler,
- iii) $X^{-1}: X(D) \rightarrow D$ fonksiyonu sürekli

olacak şekilde bulunabiliyorsa, M kümesine $\mathbb{E}^3$ de bir yüzey denir.

Teorem 2.15 $\mathbb{E}^3$ de bir $M: f(x, y, z) = c$ alt kümesi bir yüzeydir $\Leftrightarrow \forall P \in M$ için $\nabla f(P) \neq \vec{0}$ dır.

Tanım 2.16 $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık ve $M \subset \mathbb{E}^3$ bir yüzey olsun. $\alpha: I \rightarrow M$ diferensiyellenebilir fonksiyonuna M yüzeyi üzerinde bir eğri denir.

Tanım 2.17 $M \subset \mathbb{E}^3$ bir yüzey olsun. $\vec{v}_P \in T_{\mathbb{E}^3}(P)$ tanjant vektörü P noktasından geçen ve yüzey üzerinde kalan bir eğrinin hız vektörü oluyorsa, $\vec{v}_P$ tanjant vektörüne M yüzeyinin P noktasında bir teğet vektörü denir. Yüzeyin $P \in M$ noktasındaki bütün teğet vektörlerinin kümesi M yüzeyinin P noktasındaki teğet düzlemi olarak adlandırılır ve $T_M(P)$ ile gösterilir.

Tanım 2.18 $M \subset \mathbb{E}^3$ yüzeyi boyunca bir V vektör alanı verilsin. $\forall P \in M$ noktasına bir $V(P) = \vec{v}_P$ teğet vektörü karşılık getiren V vektör alanına M yüzeyi boyunca bir teğet vektör alanı denir.

Tanım 2.19 $M \subset \mathbb{E}^3$ bir yüzey ve $P \in M$ bir nokta olsun. P noktasındaki $T_M(P)$ teğet düzlemine dik olan bir U_P tanjant vektörüne M yüzeyinin P noktasındaki normal vektörü denir.

Tanım 2.20 $M \subset \mathbb{E}^3$ yüzeyi boyunca bir U vektör alanı verilsin. Eğer $\forall P \in M$ için elde edilen $U(P) = \vec{u}_P$ tanjant vektörü M yüzeyinin bir normal vektörü oluyorsa, U vektör alanına M yüzeyi boyunca bir normal vektör alanı denir.

Tanım 2.21 $\mathbb{E}^n$, n -boyutlu Öklid uzayında $(n-1)$ -boyutlu bir yüzey veya $(n-1)$ -yüzey diye $\mathbb{E}^n$ deki boş olmayan bir M kümesine denir, öyleki bu M kümesi

$$M = \{x \in U \subset E^n / f: U \xrightarrow{\text{dif.bilir}} \mathbb{R}, f(x) = c, U \text{ bir açık alt küme}\}$$

$\nabla f(P) \neq 0, \forall P \in M$ biçiminde tanımlanır.

$\mathbb{E}^2$ de 1-yüzeye düzlemsel eğri denir. $\mathbb{E}^3$ de bir 2-yüzeye sadece yüzey denir. $\mathbb{E}^n$ de bir $(n-1)$ -yüzey, $n > 3$ olması halinde daha çok bir hiperyüzey olarak adlandırılır.

Tanım 2.22 $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayının standart bazı $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ olsun. $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^4 x_i e_i$,

$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^4 y_i e_i$ ve $\mathbf{z} = \sum_{i=1}^4 z_i e_i$ vektörlerinin üçlü (vektörel) çarpımı

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} \times \mathbf{z} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}$$

ile tanımlanır, [19, 20].

Tanım 2.23 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^4$ birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda

$$\mathbf{t}(s) = \gamma'(s)$$

ile tanımlanan $\mathbf{t}$ vektör alanına eğrinin teğet vektör alanı denir.

Tanım 2.24 $\mathbb{E}^4$ de birim hızlı $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^4$ eğrisi için, $\gamma''(s) \neq 0$ olmak üzere

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|}$$

ile tanımlı $\mathbf{n}$ vektör alanına γ eğrisinin asli normal vektör alanı denir.

Tanım 2.25 $\mathbb{E}^4$ de birim hızlı $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^4$ eğrisi için

$$k_1(s) = \sqrt{\langle \gamma''(s), \gamma''(s) \rangle}$$

ile tanımlı $k_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna γ eğrisinin birinci eğrilik fonksiyonu denir. Belli bir $s_0 \in I$ için $k_1(s_0) \in \mathbb{R}$ sayısına da eğrisinin $\gamma(s_0)$ noktasındaki birinci eğriliği denir.

Tanım 2.26 $\mathbb{E}^4$ de birim hızlı $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^4$ eğrisi için

$$\mathbf{b}_2(s) = \frac{\gamma'(s) \times \gamma''(s) \times \gamma'''(s)}{\|\gamma'(s) \times \gamma''(s) \times \gamma'''(s)\|}$$

ile tanımlı $\mathbf{b}_2$ vektör alanına γ eğrisinin ikinci binormal vektör alanı denir [12].

Tanım 2.27 $\mathbb{E}^4$ de birim hızlı $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^4$ eğrisi için

$$\mathbf{b}_1(s) = \mathbf{b}_2(s) \times \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$$

ile tanımlı $\mathbf{b}_1$ vektör alanına γ eğrisinin birinci binormal vektör alanı denir [12].

Tanım 2.28 $\mathbb{E}^4$ de birim hızlı $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^4$ eğrisi için

$$k_2(s) = \frac{\langle \mathbf{b}_1(s), \gamma'''(s) \rangle}{k_1(s)}$$

ile tanımlanan $k_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna γ eğrisinin ikinci eğrilik fonksiyonu denir. Belli bir $s_0 \in I$ için $k_2(s_0) \in \mathbb{R}$ sayısına da γ eğrisinin $\gamma(s_0)$ noktasındaki ikinci eğriliği denir [12].

Tanım 2.29 $\mathbb{E}^4$ de birim hızlı $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^4$ eğrisi için

$$k_3(s) = \frac{\langle \mathbf{b}_2(s), \gamma^{(4)}(s) \rangle}{k_1(s)k_2(s)}$$

ile tanımlanan $k_3 : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna γ eğrisinin üçüncü eğrilik fonksiyonu denir. Belli bir $s_0 \in I$ için $k_3(s_0) \in \mathbb{R}$ sayısına da γ eğrisinin $\gamma(s_0)$ noktasındaki üçüncü eğriliği denir [12].

Teorem 2.30 $\gamma, M \subset \mathbb{E}^4$ hiperyüzeyi üzerinde bir eğri olsun. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere $\gamma(s) \in M$ noktasında i. eğrilik $k_i(s)$ ve Frenet 4-ayaklısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ ise Frenet formülleri, [21],

$$\mathbf{t}' = k_1 \mathbf{n}, \quad \mathbf{n}' = -k_1 \mathbf{t} + k_2 \mathbf{b}_1, \quad \mathbf{b}_1' = -k_2 \mathbf{n} + k_3 \mathbf{b}_2, \quad \mathbf{b}_2' = -k_3 \mathbf{b}_1$$

şeklindedir.

BÖLÜM 3

WILLMORE METODU ($\mathbb{E}^3$)

S_1 ve S_2 kesişen regüler yüzeyleri $f(x, y, z) = 0$ ve $g(x, y, z) = 0$ kapalı denklemleriyle verilsin. Bu yüzeylerin birim hızlı arakesit eğrisi $\alpha(s)$ olsun. S_1 ve S_2 yüzeylerinin normal vektör alanları sırasıyla ∇f ve ∇g olmak üzere, arakesit eğrisinin $\mathbf{t}$ birim teğet vektör alanı bu iki yüzeyin normal vektörlerine dik olacaktır. Dolayısıyla $\mathbf{t}$ yüzey normallerinin vektörel çarpımına paralel olacaktır [17].

$\nabla f = \left(\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz} \right)$ ve $\nabla g = \left(\frac{dg}{dx}, \frac{dg}{dy}, \frac{dg}{dz} \right)$ olmak üzere $\mathbf{h} = \nabla f \times \nabla g$ vektörü tanımlanırsa, $\mathbf{h} = \lambda \mathbf{t}$ yazılabilir. Buradan

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{h}}{\lambda}, \quad \lambda^2 = \langle \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle. \quad (3.1)$$

$\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$ alınırsa $\mathbf{h} = \lambda \mathbf{t} = \lambda \alpha' = (\lambda x', \lambda y', \lambda z')$ olup,

$$\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3)$$

ise $\lambda x' = h_1$, $\lambda y' = h_2$, $\lambda z' = h_3$ yazılabilir.

$$\Delta = \lambda \frac{d}{ds} = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} + h_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (3.2)$$

operatörü tanımlayalım.

$\mathbf{h} = \lambda \mathbf{t}$ eşitliğine Δ operatörü uygulanırsa

$$\Delta \mathbf{h} = \Delta(\lambda \mathbf{t}) = \lambda \left(\frac{d\lambda}{ds} \mathbf{t} + \lambda \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right) = \lambda \lambda' \mathbf{t} + \lambda^2 \kappa \mathbf{n}$$

yani

$$\Delta \mathbf{h} = \lambda \lambda' \mathbf{t} + \lambda^2 \kappa \mathbf{n} \quad (3.3)$$

elde edilir. Son eşitliğin iki tarafı $\mathbf{t}$ ile iç çarpılırsa

$$\lambda' = \frac{\langle \Delta \mathbf{h}, \mathbf{t} \rangle}{\lambda} \quad (3.4)$$

bulunur.

$\mathbf{h}$ ve $\Delta \mathbf{h}$ vektörlerinin vektörel çarpımını alırsak

$\mathbf{h} \times \Delta \mathbf{h} = (\lambda \mathbf{t}) \times (\lambda^2 \kappa \mathbf{n} + \lambda \lambda' \mathbf{t}) = \lambda^3 \kappa \mathbf{b}$ olup, $\mathbf{h} \times \Delta \mathbf{h} = \mathbf{k}$ denilirse, arakesit eğrisinin eğriliği

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{k}\|}{\lambda^3} \quad (3.5)$$

eşitliğinden bulunabilir.

$\mathbf{k} = \mathbf{h} \times \Delta \mathbf{h} = \lambda^3 \kappa \mathbf{b}$ eşitliğine Δ operatörü uygulanırsa

$$\Delta \mathbf{k} = \lambda (\lambda^3 \kappa)' \mathbf{b} - \lambda^4 \kappa \tau \mathbf{n} \quad (3.6)$$

elde edilir. (3.3) ve (3.6) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \langle \Delta \mathbf{h}, \Delta \mathbf{k} \rangle &= \langle (\lambda^2 \kappa \mathbf{n} + \lambda \lambda' \mathbf{t}), (\lambda (\lambda^3 \kappa)' \mathbf{b} - \lambda^4 \kappa \tau \mathbf{n}) \rangle \\ &= -\lambda^6 \kappa^2 \tau \end{aligned}$$

olacağından arakesit eğrisinin burulması

$$\tau = -\frac{\langle \Delta \mathbf{h}, \Delta \mathbf{k} \rangle}{\lambda^6 \kappa^2} \quad (3.7)$$

ile hesaplanır.

WILLMORE METODU'NUN $\mathbb{E}^4$ UZAYINA GENİŞLETİLMESİ

M_1, M_2 ve M_3 enine kesişen üç regüler hiperyüzey olsun. $f_i(x, y, z, w) = 0, i = 1, 2, 3$ kapalı denklemleriyle verilen bu hiperyüzeylerin birim hızlı arakesit eğrisi $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s), w(s))$ olsun. Arakesit eğrisinin $\mathbf{t}$ birim teğet vektör alanı hiperyüzey normallerine dik olacağından, hiperyüzey normallerinin vektörel çarpımına paralel olacaktır [18].

$\nabla f_1 \times \nabla f_2 \times \nabla f_3 = \mathbf{h}$ alınırsa $\mathbf{h} = \lambda \mathbf{t}$ olup,

$$\lambda x' = h_1, \lambda y' = h_2, \lambda z' = h_3, \lambda w' = h_4$$

olur.

$$\Delta = \lambda \frac{d}{ds} = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} + h_3 \frac{\partial}{\partial z} + h_4 \frac{\partial}{\partial w} \right) \quad (4.1)$$

operatörünü tanımlayalım [18].

$\mathbf{h} = \lambda \mathbf{t}$ eşitliğine Δ operatörü uygulanırsa

$$\Delta \mathbf{h} = \Delta(\lambda \mathbf{t}) = \lambda(\lambda' \mathbf{t} + \lambda \mathbf{t}') = \lambda \lambda' \mathbf{t} + \lambda^2 k_1 \mathbf{n} \quad (4.2)$$

bulunur. $\mathbf{t} = \frac{\mathbf{h}}{\lambda}$ olduğundan (4.2) eşitliği kullanılırsa

$$\lambda' = \frac{\langle \Delta \mathbf{h}, \mathbf{t} \rangle}{\lambda}$$

ve

$$\langle \Delta \mathbf{h}, \Delta \mathbf{h} \rangle = \langle (\lambda \lambda' \mathbf{t} + \lambda^2 k_1 \mathbf{n}), (\lambda \lambda' \mathbf{t} + \lambda^2 k_1 \mathbf{n}) \rangle = \lambda^2 (\lambda')^2 + \lambda^4 (k_1)^2$$

elde edilir. Böylece arakesit eğrisinin birinci eğriliği

$$k_1 = \frac{1}{\lambda^2} \sqrt{\langle \Delta \mathbf{h}, \Delta \mathbf{h} \rangle - \lambda^2 (\lambda')^2} \quad (4.3)$$

ile hesaplanabilir. λ' ve k_1 değerleri (4.2) eşitliğinde yerine yazılırsa, arakesit eğrisinin asli normal vektörü

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\lambda^2 k_1} (\Delta \mathbf{h} - \lambda \lambda' \mathbf{t}) \quad (4.4)$$

ile verilir.

$\Delta \mathbf{h} = \lambda \lambda' \mathbf{t} + \lambda^2 k_1 \mathbf{n}$ eşitliğine Δ operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} \Delta^2 \mathbf{h} &= \lambda \left((\lambda')^2 \mathbf{t} + \lambda (\lambda'' \mathbf{t} + \lambda' \mathbf{t}') + 2 \lambda \lambda' k_1 \mathbf{n} + \lambda^2 k_1' \mathbf{n} + \lambda^2 (k_1' \mathbf{n} + k_1 \mathbf{n}') \right) \\ &= (\lambda (\lambda')^2 + \lambda^2 \lambda'' - \lambda^3 k_1^2) \mathbf{t} + (3 \lambda^2 \lambda' k_1 + \lambda^3 k_1') \mathbf{n} + \lambda^3 k_1 k_2 \mathbf{b}_1 \end{aligned} \quad (4.5)$$

olur. $\mathbf{h}, \Delta \mathbf{h}$ ve $\Delta^2 \mathbf{h}$ vektörlerinin vektörel çarpımı alınır

$$\mathbf{h} \times \Delta \mathbf{h} \times \Delta^2 \mathbf{h} = \lambda^6 k_1^2 k_2 \mathbf{b}_2$$

olacağından arakesit eğrisinin ikinci binormal vektörü

$$\mathbf{b}_2 = \frac{\mathbf{h} \times \Delta \mathbf{h} \times \Delta^2 \mathbf{h}}{\|\mathbf{h} \times \Delta \mathbf{h} \times \Delta^2 \mathbf{h}\|} \quad (4.6)$$

ve birinci binormal vektörü

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2 \times \mathbf{t} \times \mathbf{n} \quad (4.7)$$

ile hesaplanır.

(4.5) ve (4.7) kullanılarak arakesit eğrisinin ikinci eğriliği

$$k_2 = \frac{1}{\lambda^3 k_1} \langle \Delta^2 \mathbf{h}, \mathbf{b}_1 \rangle \quad (4.8)$$

yardımıyla bulunur. (4.5) eşitliğine Δ operatörü uygulanırsa

$$\Delta^3 \mathbf{h} = \left(\lambda(\lambda')^3 + 4\lambda^2 \lambda' \lambda'' + \lambda^3 \lambda''' - 3\lambda^4 k_1 k_1' \right) \mathbf{t} + \left(7\lambda^2 (\lambda')^2 k_1 - \lambda^4 k_1^3 + 4\lambda^3 \lambda'' k_1 \right. \\ \left. + 6\lambda^3 \lambda' k_1' + \lambda^4 k_1'' - \lambda^4 k_1 k_2'^2 \right) \mathbf{n} + \left(6\lambda^3 \lambda' k_1 k_2 + 2\lambda^4 k_1' k_2 + \lambda^4 k_1 k_2' \right) \mathbf{b}_1 + \lambda^4 k_1 k_2 k_3 \mathbf{b}_2$$

olup, arakesit eğrisinin üçüncü eğriliği

$$k_3 = \frac{1}{\lambda^4 k_1 k_2} \langle \Delta^3 \mathbf{h}, \mathbf{b}_2 \rangle \quad (4.9)$$

ile hesaplanır.

$\mathbb{E}^3$ UZAYINDA ARAKESİT PROBLEMLERİ İÇİN WILLMORE-BENZERİ METOTLAR

5.1 Parametrik Denklemlerle Verilen İki Yüzeyin Arakesit Eğrisi

$\mathbb{E}^3$ de $X(u, v)$ ve $Y(p, q)$ parametrik denklemleriyle verilen enine kesişen iki regüler yüzey S_1 ve S_2 olsun. Bu iki yüzeyin birim hızlı arakesit eğrisi $\alpha(s)$ olsun. S_1 ve S_2 yüzeylerinin normal vektör alanları sırasıyla $\mathbf{N}_1 = X_u \times X_v$ ve $\mathbf{N}_2 = Y_p \times Y_q$ olmak üzere arakesit eğrisinin $\mathbf{t}$ birim teğet vektörü bu normal vektörlere dik olacağından $\mathbf{t}$, $\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$ ile lineer bağımlıdır.

$\mathbf{h} = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 = (X_u \times X_v) \times (Y_p \times Y_q)$ alınır $\mathbf{h} = \lambda \mathbf{t}$ olup, birim teğet vektör $\mathbf{t} = \frac{\mathbf{h}}{\lambda}$ ile belirlenir.

$$\Delta = \lambda \frac{d}{ds} = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial u} + h_2 \frac{\partial}{\partial v} + h_3 \frac{\partial}{\partial p} + h_4 \frac{\partial}{\partial q} \right) \quad (5.1)$$

operatörünü tanımlayalım.

Buradan

$$\lambda u' = h_1, \lambda v' = h_2, \lambda p' = h_3, \lambda q' = h_4 \quad (5.2)$$

elde edilir. $\alpha(s)$ arakesit eğrisi yüzey denklemlerini sağlayacağından

$$\alpha(s) = X(u(s), v(s)) \text{ ve } \alpha(s) = Y(p(s), q(s))$$

yazılabilir.

$$\alpha'(s) = \frac{dX}{ds} = \frac{\partial X}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial X}{\partial v} \frac{dv}{ds} \quad \text{ve} \quad \alpha'(s) = \frac{dY}{ds} = \frac{\partial Y}{\partial p} \frac{dp}{ds} + \frac{\partial Y}{\partial q} \frac{dq}{ds}$$

veya kısaca

$$\alpha' = X_u u' + X_v v' \quad \text{ve} \quad \alpha' = Y_p p' + Y_q q' \quad \text{elde edilir. Bu eşitlikler } \lambda \text{ ile çarpılıp (5.2)}$$

kullanılırsa

$$\lambda \alpha' = \mathbf{h} = h_1 X_u + h_2 X_v \quad \text{ve} \quad \lambda \alpha' = \mathbf{h} = h_3 Y_p + h_4 Y_q \quad \text{elde edilir.}$$

h_1, h_2, h_3, h_4 bilinmeyenlerini aşağıdaki şekilde hesaplayabiliriz.

$\mathbf{h} = h_1 X_u + h_2 X_v$ vektörünü, sırasıyla, X_u ve X_v ile iç çarparsak

$$\begin{cases} \langle X_u, X_u \rangle h_1 + \langle X_v, X_u \rangle h_2 = \langle \mathbf{h}, X_u \rangle \\ \langle X_u, X_v \rangle h_1 + \langle X_v, X_v \rangle h_2 = \langle \mathbf{h}, X_v \rangle \end{cases}$$

olup, $\langle X_u, X_u \rangle = E$, $\langle X_u, X_v \rangle = \langle X_v, X_u \rangle = F$, $\langle X_v, X_v \rangle = G$ yazılırsa

$$\begin{cases} E h_1 + F h_2 = \langle \mathbf{h}, X_u \rangle \\ F h_1 + G h_2 = \langle \mathbf{h}, X_v \rangle \end{cases}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin katsayılar determinanı, S_1 bir regüler

yüzey olduğundan, $\delta = \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} \neq 0$. Bu durumda denklem sistemini Cramer yöntemi ile

çözersek,

$$h_1 = \frac{\begin{vmatrix} \langle \mathbf{h}, X_u \rangle & F \\ \langle \mathbf{h}, X_v \rangle & G \end{vmatrix}}{EG - F^2} \Rightarrow h_1 = \frac{G \langle \mathbf{h}, X_u \rangle - F \langle \mathbf{h}, X_v \rangle}{EG - F^2} \quad (5.3)$$

$$h_2 = \frac{\begin{vmatrix} E & \langle \mathbf{h}, X_u \rangle \\ F & \langle \mathbf{h}, X_v \rangle \end{vmatrix}}{EG - F^2} \Rightarrow h_2 = \frac{E \langle \mathbf{h}, X_v \rangle - F \langle \mathbf{h}, X_u \rangle}{EG - F^2} \quad (5.4)$$

bulunur.

Benzer şekilde

$\mathbf{h} = h_3 Y_p + h_4 Y_q$ vektörünü sırasıyla, Y_p ve Y_q ile iç çarparsak

$$\langle Y_p, Y_p \rangle h_3 + \langle Y_q, Y_p \rangle h_4 = \langle \mathbf{h}, Y_p \rangle$$

$$\langle Y_p, Y_q \rangle h_3 + \langle Y_q, Y_q \rangle h_4 = \langle \mathbf{h}, Y_q \rangle$$

olup, $\langle Y_p, Y_p \rangle = e$, $\langle Y_p, Y_q \rangle = \langle Y_q, Y_p \rangle = f$, $\langle Y_q, Y_q \rangle = g$ yazılırsa

$$eh_3 + fh_4 = \langle \mathbf{h}, Y_p \rangle$$

$$fh_3 + gh_4 = \langle \mathbf{h}, Y_q \rangle$$

denklem sistemi elde edilir. S_2 bir regüler yüzey olduğundan $\delta = \begin{vmatrix} e & f \\ f & g \end{vmatrix} \neq 0$. Bu

durumda denklem sistemini Cramer yöntemi ile çözersek

$$h_3 = \frac{\begin{vmatrix} \langle \mathbf{h}, Y_p \rangle & f \\ \langle \mathbf{h}, Y_q \rangle & g \end{vmatrix}}{eg - f^2} \Rightarrow h_3 = \frac{g \langle \mathbf{h}, Y_p \rangle - f \langle \mathbf{h}, Y_q \rangle}{eg - f^2} \quad (5.5)$$

$$h_4 = \frac{\begin{vmatrix} e & \langle \mathbf{h}, Y_p \rangle \\ f & \langle \mathbf{h}, Y_q \rangle \end{vmatrix}}{eg - f^2} \Rightarrow h_4 = \frac{e \langle \mathbf{h}, Y_q \rangle - f \langle \mathbf{h}, Y_p \rangle}{eg - f^2} \quad (5.6)$$

elde edilir.

$\mathbf{h} = \lambda \mathbf{t}$ eşitliğine Δ operatörü uygulandığında $\Delta \mathbf{h} = \lambda \lambda' \mathbf{t} + \lambda^2 \kappa \mathbf{n}$ olduğundan, $\lambda \lambda' = \langle \Delta \mathbf{h}, \mathbf{t} \rangle$ ve $\langle \Delta \mathbf{h}, \Delta \mathbf{h} \rangle = (\lambda \lambda')^2 + \lambda^4 \kappa^2$ eşitlikleri kullanılırsa arakesit eğrisinin birinci eğriliği

$$\kappa^2 = \frac{\langle \Delta \mathbf{h}, \Delta \mathbf{h} \rangle - (\lambda \lambda')^2}{\lambda^4} \quad (5.7)$$

ve arakesit eğrisinin asli normal vektörü

$$\mathbf{n} = \frac{\Delta \mathbf{h} - \lambda \lambda' \mathbf{t}}{\lambda^2 \kappa} \quad (5.8)$$

ile hesaplanabilir. Buradan arakesit eğrisinin binormal vektörü $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ ile bulunur.

$\Delta \mathbf{h} = \lambda \lambda' \mathbf{t} + \lambda^2 \kappa \mathbf{n}$ eşitliğine Δ operatörü uygulandığında

$$\Delta^2 h = (\lambda(\lambda')^2 + \lambda^2 \lambda'' - \lambda^3 \kappa^2) \mathbf{t} + (\lambda^2 \lambda' \kappa + \lambda(\lambda^2 \kappa)') \mathbf{n} + \lambda^3 \kappa \tau \mathbf{b}$$

olup, bu eşitliğin her iki tarafı $\mathbf{b}$ ile iççarpılırsa, arakesit eğrisinin burulması

$$\tau = \frac{\langle \Delta^2 \mathbf{h}, \mathbf{b} \rangle}{\lambda^3 \kappa} \quad (5.9)$$

ile de bulunabilir.

5.2 Biri Parametrik Diğeri Kapalı Denklemleriyle Verilen İki Yüzeyin Arakesit Eğrisi

$S_1 \dots X = X(u, v)$ ve $S_2 \dots f(x, y, z) = 0$ denklemleriyle verilen, enine kesişen iki regüler yüzey olsun. Bu iki yüzeyin birim hızlı arakesit eğrisini $\alpha(s)$ ile gösterelim. S_1 ve S_2 yüzeylerinin normal vektör alanları sırasıyla $\mathbf{N}_1 = X_u \times X_v$ ve $\mathbf{N}_2 = \nabla f$ olmak üzere α arakesit eğrisinin $\mathbf{t}$ birim teğet vektörü bu normal vektörlere dik olacaktır. Dolayısıyla $\mathbf{t}$ vektörü $\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$ ile lineer bağımlı olacaktır, yani

$$\mathbf{h} = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 = (X_u \times X_v) \times \nabla f \text{ olmak üzere } \mathbf{h} = \lambda \mathbf{t}, \quad \mathbf{t} = \frac{\mathbf{h}}{\lambda} \text{ yazılabilir.}$$

$$\Theta = \lambda \frac{d}{ds} = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial u} + h_2 \frac{\partial}{\partial v} + h_3 \frac{\partial}{\partial x} + h_4 \frac{\partial}{\partial y} + h_5 \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (5.10)$$

operatörünü tanımlayalım.

Buradan

$$\lambda u' = h_1, \quad \lambda v' = h_2, \quad \lambda x' = h_3, \quad \lambda y' = h_4, \quad \lambda z' = h_5$$

elde edilir.

α arakesit eğrisi S_1 yüzeyinin denklemini sağlayacağından $\alpha(s) = X(u(s), v(s))$ yazılabilir. Bu eşitlikten s ye göre türev alınırsa

$$\alpha' = X_u u' + X_v v' \text{ ve } \lambda \alpha' = \mathbf{h} = h_1 X_u + h_2 X_v$$

elde edilir.

Buradaki h_1 ve h_2 bilinmeyenleri (5.3) ve (5.4) denklemleri yardımıyla bulunabilir.

$\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$ alınır ve Θ operatörü uygulanırsa

$$\lambda \alpha'(s) = (\lambda x'(s), \lambda y'(s), \lambda z'(s))$$

yani,

$$\mathbf{h} = (h_3, h_4, h_5) \quad (5.11)$$

bulunur.

Böylece S_1 ve S_2 yüzeylerinin enine arakesit eğrisinin Frenet elemanları

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{h}}{\lambda}, \quad \lambda \lambda' = \langle \Theta \mathbf{h}, \mathbf{t} \rangle, \quad \kappa^2 = \frac{\langle \Theta \mathbf{h}, \Theta \mathbf{h} \rangle - (\lambda \lambda')^2}{\lambda^4}, \quad \mathbf{n} = \frac{\Theta \mathbf{h} - \lambda \lambda' \mathbf{t}}{\lambda^2 \kappa} \quad (5.12)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}, \quad \tau = \frac{\langle \Theta^2 \mathbf{h}, \mathbf{b} \rangle}{\lambda^3 \kappa}$$

ile hesaplanır.

5.3 Yüzeylerin Arakesit Problemleri İçin Örnekler

5.3.1 Parametrik-parametrik Arakesit Problemi

$$X(u, v) = (u, uv, v)$$

$$Y(p, q) = (p, q, q^2 + 2)$$

parametrik denklemleriyle verilen regüler yüzeyleri göz önüne alalım. Bu yüzeylerin arakesit eğrisinin $P = X(0, 2) = Y(0, 0) = (0, 0, 2)$ noktasındaki Frenet elemanlarını bulalım.

$$\begin{aligned} X_u &= (1, v, 0) \\ X_v &= (0, u, 1) \end{aligned} \Rightarrow \mathbf{N}_1 = X_u \times X_v = (v, -1, u)$$

$$\begin{aligned} Y_p &= (0, 0, 1) \\ Y_q &= (0, 1, 2q) \end{aligned} \Rightarrow \mathbf{N}_2 = Y_p \times Y_q = (0, -2q, 1)$$

olduğundan,

$$\mathbf{h} = (X_u \times X_v) \times (Y_p \times Y_q) = (2qu - 1, -v, -2vq)$$

bulunur. Böylece $\mathbf{h}(P) = (-1, -2, 0)$ olup,

$$\lambda^2 = \langle \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle \Rightarrow \lambda^2(P) = \langle \mathbf{h}(P), \mathbf{h}(P) \rangle = \langle (-1, -2, 0), (-1, -2, 0) \rangle = 5$$

yani,

$$\lambda(P) = \pm\sqrt{5}$$

bulunur.

$\lambda(P) = -\sqrt{5}$ alalım. Bu durumda arakesit eğrisinin P noktasındaki birim teğet vektörü

$$\mathbf{t}(P) = \frac{\mathbf{h}(P)}{\lambda(P)} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0)$$

olarak bulunur.

$\mathbf{h}=(2qu-1,-v,-2vq)$ eşitliğine (5.1) ile tanımlanan Δ operatörü uygulanırsa

$$\Delta \mathbf{h}=\lambda(2q'u+2qu',-v',-2v'q-2vq')=(2uh_4+2qh_1,-h_2,-2qh_2-2vh_4)$$

elde edilir. h_1, h_2, h_4 bilinmeyenlerini bulalım.

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = 1+v^2, & \langle \mathbf{h}, X_u \rangle &= 2uq-v^2-1, \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = \langle X_v, X_u \rangle = uv, & \langle \mathbf{h}, X_v \rangle &= -uv-2vq, \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = 1+u^2, & EG-F^2 &= 1+u^2+v^2 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} e &= \langle Y_p, Y_p \rangle = 1, & \langle h, Y_p \rangle &= 2uq-1, \\ f &= \langle Y_p, Y_q \rangle = \langle Y_q, Y_p \rangle = 0, & \langle h, Y_q \rangle &= -v-4vq^2, \\ g &= \langle Y_q, Y_q \rangle = 1+4q^2, & eg-f^2 &= 1+4q^2 \end{aligned}$$

olup, bu eşitlikleri (5.3), (5.4) ve (5.6) de yerlerine yazarsak

$$h_1 = \frac{(1+u^2)(2uq-v^2-1)-uv(-uv-2vq)}{1+u^2+v^2} \Rightarrow h_1 = 2uq-1,$$

$$h_2 = \frac{(1+v^2)(-uv-2vq)-uv(2uq-v^2-1)}{1+u^2+v^2} \Rightarrow h_2 = -2vq,$$

$$h_4 = \frac{(-v-4vq^2)}{1+4q^2} \Rightarrow h_4 = -v$$

bulunur. Böylece

$$\Delta \mathbf{h} = (-2uv+2q(2uq-1), 2vq, 4vq^2+2v^2)$$

ve

$$\Delta \mathbf{h}(P) = (0, 0, 8)$$

elde edilir.

$$\lambda(P)\lambda'(P) = \langle \Delta \mathbf{h}(P), \mathbf{t}(P) \rangle = \left\langle (0, 0, 8), \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0) \right\rangle = 0$$

olduğundan, (5.7) eşitliği kullanılarak arakesit eğrisinin eğriliği

$$\kappa(P) = \sqrt{\frac{\langle \Delta \mathbf{h}(P), \Delta \mathbf{h}(P) \rangle - (\lambda(P)\lambda'(P))^2}{\lambda^4(P)}} = \sqrt{\frac{\langle (0,0,8), (0,0,8) \rangle}{(-\sqrt{5})^4}}$$

$$\kappa(P) = \frac{8}{5}$$

olarak hesaplanır. Ayrıca, (5.8) ile arakesit eğrisinin asli normal vektörü

$$\mathbf{n}(P) = \frac{\Delta \mathbf{h}(P) - \lambda(P)\lambda'(P)\mathbf{t}(P)}{\lambda^2(P)\kappa(P)} = \frac{(0,0,8)}{(-\sqrt{5})^2 \frac{8}{5}} = (0,0,1)$$

şeklindedir. Burada arakesit eğrisinin binormal vektörü

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} \Rightarrow \mathbf{b}(P) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0) \times (0,0,1) \Rightarrow \mathbf{b}(P) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1,0)$$

olarak elde edilir.

$\Delta \mathbf{h} = (-2uv + 2q(2uq - 1), 2vq, 4vq^2 + 2v^2)$ eşitliğine Δ operatörü uygulanırsa

$$\Delta^2 \mathbf{h} = \lambda(-2u'v - 2uv' + 2q'(2uq - 1) + 2q(2u'q + 2uq'), 2v'q + 2vq', 4v'q^2 + 8vqq' + 4vv')$$

$$\Delta^2 \mathbf{h} = (-2vh_1 - 2uh_2 + 2(2uq - 1)h_4 + 2q(2qh_1 + 2uh_4), 2qh_2 + 2vh_4, 4q^2h_2 + 8vqh_4 + 4vh_2).$$

Böylece,

$$\Delta^2 \mathbf{h} = (4v + 8uq^3 + 8uq^3 - 4q^2, -4vq^2 - 2v^2, -8vq^3 - 16v^2q)$$

ve

$$\Delta^2 \mathbf{h}(P) = (8, -8, 0)$$

elde edilir. Dolayısıyla, (5.9) eşitliği yardımıyla, arakesit eğrisinin burulması

$$\tau(P) = \frac{\langle \Delta^2 \mathbf{h}(P), \mathbf{b}(P) \rangle}{\lambda(P)^3 \kappa(P)} = \frac{\langle (8, -8, 0), \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1, 0) \rangle}{(-\sqrt{5})^3 \frac{8}{5}} = -\frac{1}{2}$$

olarak bulunur.

5.3.2 Parametrik –kapalı Arakesit Problemi

$$X(u, v) = (u, v, uv)$$

$$f(x, y, z) = xz - y^2 = 0$$

regüler yüzeyleri verilsin. Bu yüzeylerin arakesit eğrisinin $P = X(1, 2) = (1, 1, 2)$ noktasındaki Frenet elemanlarını bulalım.

$$\left. \begin{array}{l} X_u = (1, 0, v) \\ X_v = (0, 1, u) \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{N}_1 = X_u \times X_v = (-v, -u, 1)$$

ve

$$\mathbf{N}_2 = \nabla f = (z, -2y, x)$$

olduğundan,

$$\mathbf{h} = (X_u \times X_v) \times \nabla f = (2y - ux, vx + z, 2vy + uz)$$

bulunur. Böylece

$$\mathbf{h}(P) = (1, 2, 3)$$

olup,

$$\lambda^2 = \langle \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle \Rightarrow \lambda^2(P) = \langle \mathbf{h}(P), \mathbf{h}(P) \rangle = \langle (1, 2, 3), (1, 2, 3) \rangle = 14$$

yani,

$$\lambda(P) = \pm \sqrt{14}$$

bulunur.

$\lambda(P) = \sqrt{14}$ alalım. Bu durumda arakesit eğrisinin P noktasındaki birim teğet vektörü

$$\mathbf{t}(P) = \frac{\mathbf{h}(P)}{\lambda(P)} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3)$$

olarak bulunur.

$\mathbf{h} = (2y - ux, vx + z, 2vy + uz)$ eşitliğine (5.10) ile tanımlanan Θ operatörü uygulanırsa

$$\Theta \mathbf{h} = \lambda(2y' - u'x - ux', v'x + vx' + z', 2v'y + 2vy' + u'z + uz')$$

$$\Theta \mathbf{h} = (2h_4 - xh_1 - uh_3, xh_2 + vh_3 + h_5, 2yh_2 + 2vh_4 + zh_1 + uh_5)$$

elde edilir. h_1, h_2, h_3, h_4 ve h_5 bilinmeyenlerini bulalım.

$$\begin{aligned} E = \langle X_u, X_u \rangle &= 1 + v^2 & \langle \mathbf{h}, X_u \rangle &= 2y - ux + 2v^2y + uvz \\ F = \langle X_u, X_v \rangle &= \langle X_v, X_u \rangle = uv & \langle \mathbf{h}, X_v \rangle &= vx + z + 2uvy + u^2z \\ G = \langle X_v, X_v \rangle &= 1 + u^2 & EG - F^2 &= 1 + u^2 + v^2 \end{aligned}$$

değerleri, (5.3) ve (5.4) eşitliklerinde yerlerine yazılırsa

$$h_1 = \frac{(1+u^2)(2y-ux+2v^2y+uvz) - uv(vx+z+2uvy+u^2z)}{1+u^2+v^2} \Rightarrow h_1 = 2y - ux$$

$$h_2 = \frac{(1+v^2)(vx+z+2uvy+u^2z) - uv(2y-ux+2v^2y+uvz)}{1+u^2+v^2} \Rightarrow h_2 = vx + z$$

elde edilir. Diğer taraftan, (5.11) eşitliğinden $\mathbf{h} = (h_3, h_4, h_5)$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\mathbf{h} = (2y - ux, vx + z, 2vy + uz) \text{ ise}$$

$$h_3 = 2y - ux$$

$$h_4 = vx + z$$

$$h_5 = 2vy + uz$$

elde edilir. Böylece,

$$\Theta \mathbf{h} = (2vx + 2z - 2xy + ux^2 - 2uy + u^2x, vx^2 + xz + 4vy - vux + uz, 2yvx + 4yz + 2v^2x + 2vz - zux + 2uvy + u^2z)$$

ve

$$\Theta \mathbf{h}(P) = (2, 6, 12)$$

bulunur.

$$\lambda(P)\lambda'(P) = \langle \Theta \mathbf{h}(P), \mathbf{t}(P) \rangle = \left\langle (2, 6, 12), \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3) \right\rangle = \frac{50}{\sqrt{14}}$$

olduğundan, (5.12) eşitliğinden arakesit eğrisinin eğriliği

$$\kappa(P) = \sqrt{\frac{\langle \Theta \mathbf{h}(P), \Theta \mathbf{h}(P) \rangle - (\lambda(P)\lambda'(P))^2}{\lambda^4(P)}} = \sqrt{\frac{\langle (2, 6, 12), (2, 6, 12) \rangle - \left(\sqrt{14} \cdot \frac{25}{7}\right)^2}{(\sqrt{14})^4}}$$

yani,

$$\kappa(P) = \frac{\sqrt{266}}{98}$$

olarak hesaplanır. Ayrıca, arakesit eğrisinin asli normal vektörü de (5.12) ile

$$\mathbf{n}(P) = \frac{\Theta \mathbf{h}(P) - \lambda(P)\lambda'(P)\mathbf{t}(P)}{\lambda^2(P)\kappa(P)} = \frac{(2, 6, 12) - \sqrt{14} \frac{25}{7} \left(\frac{1}{\sqrt{14}} (1, 2, 3) \right)}{(\sqrt{14})^2 \frac{\sqrt{266}}{98}}$$

$$\mathbf{n}(P) = \frac{\sqrt{266}}{266} (-11, -8, 9)$$

şeklindedir. Buradan arakesit eğrisinin binormal vektörü

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} \Rightarrow \mathbf{b}(P) = \left(\frac{1}{\sqrt{14}} (1, 2, 3) \right) \times \left(\frac{\sqrt{266}}{266} (-11, -8, 9) \right)$$

$$\mathbf{b}(P) = \left(\frac{3\sqrt{19}}{19}, -\frac{3\sqrt{19}}{19}, \frac{\sqrt{19}}{19} \right)$$

olarak bulunur.

$$\Theta \mathbf{h} = (2vx + 2z - 2xy + ux^2 - 2uy + u^2x, vx^2 + xz + 4vy - vux + uz, 2yvx + 4yz + 2v^2x + 2vz - zux + 2uvy + u^2z) \text{ eşitliğine } \Theta \text{ operatörü uygulanırsa}$$

$$\Theta^2 \mathbf{h} = \lambda (2v'x + 2vx' + 2z' - 2x'y - 2xy' + u'x^2 + 2uxx' - 2u'y - 2uy' + 2uu'x + u^2x',$$

$$v'x^2 + 2vxx' + x'z + xz' + 4v'y + 4vy' + u'z + uz' - u'vx - v'ux - uvx', 2xyv' + 2xvy'$$

$$+ 2vyx' + 2y'z + 4yz' + 4vxv' + 2v^2x' + 2v'z + 2vz' - xzu' - uzx' - uxz' + 2vyu' + 2uyv'$$

$$+ 2uvy' + 2uzu' + u^2z')$$

veya

$$\begin{aligned}\Theta^2\mathbf{h} = & (2xh_2 + 2vh_3 + 2h_5 - 2yh_3 - 2xh_4 + x^2h_1 + 2uxh_3 - 2yh_1 - 2uh_4 + 2uxh_1 + u^2h_3, \\ & 2xyh_2 + 2xvh_4 + 2vyh_3 + 4zh_4 + 4yh_5 + 4vxh_2 + 2v^2h_3 + 2zh_2 + 2vh_5 - xzh_1 - uz h_3 - uxh_5 \\ & + 2vyh_1 + 2uyh_2 + 2uvh_4 + 2uzh_1 + u^2h_5)\end{aligned}$$

elde edilir. h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 bilinmeyenleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\Theta^2\mathbf{h} = & (-2ux^3 - 8y^2 - 4u^2x^2 + 2yu^2 + 2yx^2 + 8vy - 4uvx + 2uyx + 10uxy, vx^3 + zx^2 \\ & + 4vxy - 2uvx^2 + u^2z + vxu^2 + 4v^2x + 8yz + 4vyx + 4vz - 2uxz, u^3z + 2vyx^2 + 16vy^2 + 6v^2x^2 \\ & + 2z^2 + 8v^2y + uzx^2 + 4z^2 - 2u^2xz + 2vyu^2 + 12vxz - 4uvxy + 8uzy + 4vuz)\end{aligned}$$

ve

$$\Theta^2\mathbf{h}(P) = (6, 24, 60)$$

elde edilir. Dolayısıyla arakesit eğrisinin burulması (5.12) eşitliği yardımıyla

$$\tau(P) = \frac{\langle \Theta^2\mathbf{h}(P), \mathbf{b}(P) \rangle}{\lambda^3(P)\kappa(P)} = \frac{\left\langle (6, 24, 60), \left(\frac{3\sqrt{19}}{19}, -\frac{3\sqrt{19}}{19}, \frac{\sqrt{19}}{19} \right) \right\rangle}{(\sqrt{14})^3 \frac{\sqrt{266}}{98}} = \frac{3}{19}$$

olarak bulunur.

$\mathbb{E}^4$ UZAYINDA ARAKESİT PROBLEMLERİ İÇİN WILLMORE-BENZERİ METOTLAR

6.1 Parametrik Denklemlerle Verilen Üç Hiperyüzeyin Arakesit Eğrisi

$\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında $R^1 = R^1(u_1, u_2, u_3)$, $R^2 = R^2(u_4, u_5, u_6)$ ve $R^3 = R^3(u_7, u_8, u_9)$ parametrik denklemleriyle verilen ve enine kesişen üç regüler hiperyüzey, sırasıyla, M_1 , M_2 ve M_3 olsun. M_1 , M_2 , M_3 hiperyüzeylerinin normal vektör alanları,

$$\mathbf{R}_j^i = \frac{\partial \mathbf{R}^i}{\partial u_j} \text{ olmak üzere}$$

$$\mathbf{N}_1 = \mathbf{R}_1^1 \times \mathbf{R}_2^1 \times \mathbf{R}_3^1, \mathbf{N}_2 = \mathbf{R}_4^2 \times \mathbf{R}_5^2 \times \mathbf{R}_6^2, \mathbf{N}_3 = \mathbf{R}_7^3 \times \mathbf{R}_8^3 \times \mathbf{R}_9^3$$

şeklindedir. M_1 , M_2 ve M_3 hiperyüzeylerinin birim hızlı arakesit eğrisini $\alpha(s)$ ile gösterelim. α eğrisinin $\mathbf{t}$ birim teğet vektörü hiperyüzeylerin normal vektör alanlarına dik olacağından, $\mathbf{t}$ vektörü $\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 \times \mathbf{N}_3 = \mathbf{h}$ vektörüne paralel olacaktır. Dolayısıyla

$\mathbf{h} = \lambda \mathbf{t}$ yazılabilir. Buradan arakesit eğrisinin birim teğet vektörü $\mathbf{t} = \frac{\mathbf{h}}{\lambda}$ ile bulunur.

$$\Phi = \lambda \frac{d}{ds} = \left(\sum_{i=1}^9 h_i \frac{\partial}{\partial u_i} \right) \quad (6.1)$$

operatörünü tanımlayalım.

Bu operatör kullanılırsa, $\lambda u_i' = h_i, i=1,2,...,9$ elde edilir. α arakesit eğrisi M_1 hiperyüzeyinin denklemini sağlayacağından $\alpha(s) = R^1(u_1(s), u_2(s), u_3(s))$ yazılabilir. Bu son eşitliğe Φ operatörü uygulanırsa

$$\lambda \alpha' = \mathbf{R}_1^1(\lambda u_1') + \mathbf{R}_2^1(\lambda u_2') + \mathbf{R}_3^1(\lambda u_3')$$

veya

$$\mathbf{h} = h_1 \mathbf{R}_1^1 + h_2 \mathbf{R}_2^1 + h_3 \mathbf{R}_3^1$$

elde edilir. h_1, h_2, h_3 bilinmeyenlerini bulmak için son eşitliği, sırasıyla, $\mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}_3^1$ ile iç çarparsak

$$\left. \begin{aligned} \langle \mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_1^1 \rangle h_1 + \langle \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}_1^1 \rangle h_2 + \langle \mathbf{R}_3^1, \mathbf{R}_1^1 \rangle h_3 &= \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_1^1 \rangle \\ \langle \mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_2^1 \rangle h_1 + \langle \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}_2^1 \rangle h_2 + \langle \mathbf{R}_3^1, \mathbf{R}_2^1 \rangle h_3 &= \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_2^1 \rangle \\ \langle \mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_3^1 \rangle h_1 + \langle \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}_3^1 \rangle h_2 + \langle \mathbf{R}_3^1, \mathbf{R}_3^1 \rangle h_3 &= \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_3^1 \rangle \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin katsayılar determinanı

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} \langle \mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_1^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}_1^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_3^1, \mathbf{R}_1^1 \rangle \\ \langle \mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_2^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}_2^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_3^1, \mathbf{R}_2^1 \rangle \\ \langle \mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_3^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}_3^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_3^1, \mathbf{R}_3^1 \rangle \end{vmatrix} = \|\mathbf{R}_1^1 \times \mathbf{R}_2^1 \times \mathbf{R}_3^1\|^2 \text{ olup, } M_1 \text{ bir regüler hiperyüzey}$$

olduğundan $\delta_1 \neq 0$ bulunur. O halde Cramer metodu ile çözüm yapılarak

$$h_1 = \frac{\begin{vmatrix} \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_1^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}_1^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_3^1, \mathbf{R}_1^1 \rangle \\ \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_2^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}_2^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_3^1, \mathbf{R}_2^1 \rangle \\ \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_3^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}_3^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_3^1, \mathbf{R}_3^1 \rangle \end{vmatrix}}{\delta_1} \quad (6.3)$$

$$h_2 = \frac{\begin{vmatrix} \langle \mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_1^1 \rangle & \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_1^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_3^1, \mathbf{R}_1^1 \rangle \\ \langle \mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_2^1 \rangle & \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_2^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_3^1, \mathbf{R}_2^1 \rangle \\ \langle \mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_3^1 \rangle & \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_3^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_3^1, \mathbf{R}_3^1 \rangle \end{vmatrix}}{\delta_1} \quad (6.4)$$

$$h_3 = \frac{\begin{vmatrix} \langle \mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_1^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}_1^1 \rangle & \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_1^1 \rangle \\ \langle \mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_2^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}_2^1 \rangle & \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_2^1 \rangle \\ \langle \mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_3^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}_3^1 \rangle & \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_3^1 \rangle \end{vmatrix}}{\delta_1} \quad (6.5)$$

veya $a_{ij} = \langle \mathbf{R}_i^1, \mathbf{R}_j^1 \rangle$ ve $\mu_i = \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_i^1 \rangle$ olmak üzere

$$h_i = \frac{1}{\delta_1} \left\{ \mu_i (a_{jj} a_{kk} - a_{jk}^2) + \mu_j (a_{ik} a_{kj} - a_{ij} a_{kk}) + \mu_k (a_{ij} a_{jk} - a_{ik} a_{jj}) \right\}, \quad (6.6)$$

$i, j, k = 1, 2, 3$ (dairesel)

elde edilir.

α arakesit eğrisi M_2 hiperyüzeyinin denklemini de sağlayacağından

$\alpha(s) = R^2(u_4(s), u_5(s), u_6(s))$ yazılabilir. Bu son eşitliğe Φ operatörü uygulanırsa

$$\lambda \alpha' = \mathbf{R}_4^2(\lambda u_4') + \mathbf{R}_5^2(\lambda u_5') + \mathbf{R}_6^2(\lambda u_6')$$

veya

$$\mathbf{h} = h_4 \mathbf{R}_4^2 + h_5 \mathbf{R}_5^2 + h_6 \mathbf{R}_6^2$$

elde edilir. Bu son eşitliği $\mathbf{R}_4^2, \mathbf{R}_5^2, \mathbf{R}_6^2$ ile iç çarparsak

$$\begin{cases} \langle \mathbf{R}_4^2, \mathbf{R}_4^2 \rangle h_1 + \langle \mathbf{R}_5^2, \mathbf{R}_4^2 \rangle h_2 + \langle \mathbf{R}_6^2, \mathbf{R}_4^2 \rangle h_3 = \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_4^2 \rangle \\ \langle \mathbf{R}_4^2, \mathbf{R}_5^2 \rangle h_1 + \langle \mathbf{R}_5^2, \mathbf{R}_5^2 \rangle h_2 + \langle \mathbf{R}_6^2, \mathbf{R}_5^2 \rangle h_3 = \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_5^2 \rangle \\ \langle \mathbf{R}_4^2, \mathbf{R}_6^2 \rangle h_1 + \langle \mathbf{R}_5^2, \mathbf{R}_6^2 \rangle h_2 + \langle \mathbf{R}_6^2, \mathbf{R}_6^2 \rangle h_3 = \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_6^2 \rangle \end{cases} \quad (6.7)$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Burada $\delta_2 = \|\mathbf{R}_4^2 \times \mathbf{R}_5^2 \times \mathbf{R}_6^2\|^2 \neq 0$ olduğundan,

sistemin çözümü

$$h_4 = \frac{\begin{vmatrix} \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_4^2 \rangle & \langle \mathbf{R}_5^2, \mathbf{R}_4^2 \rangle & \langle \mathbf{R}_6^2, \mathbf{R}_4^2 \rangle \\ \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_5^2 \rangle & \langle \mathbf{R}_5^2, \mathbf{R}_5^2 \rangle & \langle \mathbf{R}_6^2, \mathbf{R}_5^2 \rangle \\ \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_6^2 \rangle & \langle \mathbf{R}_5^2, \mathbf{R}_6^2 \rangle & \langle \mathbf{R}_6^2, \mathbf{R}_6^2 \rangle \end{vmatrix}}{\delta_2} \quad (6.8)$$

$$h_5 = \frac{\begin{vmatrix} \langle \mathbf{R}_4^2, \mathbf{R}_4^2 \rangle & \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_4^2 \rangle & \langle \mathbf{R}_6^2, \mathbf{R}_4^2 \rangle \\ \langle \mathbf{R}_4^2, \mathbf{R}_5^2 \rangle & \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_5^2 \rangle & \langle \mathbf{R}_6^2, \mathbf{R}_5^2 \rangle \\ \langle \mathbf{R}_4^2, \mathbf{R}_6^2 \rangle & \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_6^2 \rangle & \langle \mathbf{R}_6^2, \mathbf{R}_6^2 \rangle \end{vmatrix}}{\delta_2} \quad (6.9)$$

$$h_6 = \frac{\begin{vmatrix} \langle \mathbf{R}_4^2, \mathbf{R}_4^2 \rangle & \langle \mathbf{R}_5^2, \mathbf{R}_4^2 \rangle & \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_4^2 \rangle \\ \langle \mathbf{R}_4^2, \mathbf{R}_5^2 \rangle & \langle \mathbf{R}_5^2, \mathbf{R}_5^2 \rangle & \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_5^2 \rangle \\ \langle \mathbf{R}_4^2, \mathbf{R}_6^2 \rangle & \langle \mathbf{R}_5^2, \mathbf{R}_6^2 \rangle & \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_6^2 \rangle \end{vmatrix}}{\delta_2} \quad (6.10)$$

veya $b_{ij} = \langle \mathbf{R}_i^2, \mathbf{R}_j^2 \rangle$ ve $\eta_i = \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_i^2 \rangle$ olmak üzere,

$$h_i = \frac{1}{\delta_2} \left\{ \eta_i (b_{jj}b_{kk} - b_{jk}^2) + \eta_j (b_{ik}b_{kj} - b_{ij}b_{kk}) + \eta_k (b_{ij}b_{jk} - b_{ik}b_{jj}) \right\} \quad (6.11)$$

$i, j, k = 4, 5, 6$ (daireesel)

şeklinde hesaplanabilir.

α arakesit eğrisi M_3 yüzeyinin denklemini de sağlayacağından

$\alpha(s) = R^3(u_7(s), u_8(s), u_9(s))$ yazılabilir. Bu eşitliğe Φ operatörü uygulanırsa

$$\lambda \alpha' = \mathbf{R}_7^3(\lambda u_7') + \mathbf{R}_8^3(\lambda u_8') + \mathbf{R}_9^3(\lambda u_9')$$

veya

$$\mathbf{h} = h_7 \mathbf{R}_7^3 + h_8 \mathbf{R}_8^3 + h_9 \mathbf{R}_9^3$$

elde edilir. Bu eşitliği $\mathbf{R}_7^3, \mathbf{R}_8^3, \mathbf{R}_9^3$ ile iç çarparsak

$$\left. \begin{aligned} \langle \mathbf{R}_7^3, \mathbf{R}_7^3 \rangle h_1 + \langle \mathbf{R}_8^3, \mathbf{R}_7^3 \rangle h_2 + \langle \mathbf{R}_9^3, \mathbf{R}_7^3 \rangle h_3 &= \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_7^3 \rangle \\ \langle \mathbf{R}_7^3, \mathbf{R}_8^3 \rangle h_1 + \langle \mathbf{R}_8^3, \mathbf{R}_8^3 \rangle h_2 + \langle \mathbf{R}_9^3, \mathbf{R}_8^3 \rangle h_3 &= \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_8^3 \rangle \\ \langle \mathbf{R}_7^3, \mathbf{R}_9^3 \rangle h_1 + \langle \mathbf{R}_8^3, \mathbf{R}_9^3 \rangle h_2 + \langle \mathbf{R}_9^3, \mathbf{R}_9^3 \rangle h_3 &= \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_9^3 \rangle \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Burada $\delta_3 = \|\mathbf{R}_7^3 \times \mathbf{R}_8^3 \times \mathbf{R}_9^3\|^2 \neq 0$ olduğundan,

sistemin çözümü

$$h_7 = \frac{\begin{vmatrix} \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_7^3 \rangle & \langle \mathbf{R}_8^3, \mathbf{R}_7^3 \rangle & \langle \mathbf{R}_9^3, \mathbf{R}_7^3 \rangle \\ \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_8^3 \rangle & \langle \mathbf{R}_8^3, \mathbf{R}_8^3 \rangle & \langle \mathbf{R}_9^3, \mathbf{R}_8^3 \rangle \\ \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_9^3 \rangle & \langle \mathbf{R}_8^3, \mathbf{R}_9^3 \rangle & \langle \mathbf{R}_9^3, \mathbf{R}_9^3 \rangle \end{vmatrix}}{\delta_3} \quad (6.13)$$

$$h_8 = \frac{\begin{vmatrix} \langle \mathbf{R}_7^3, \mathbf{R}_7^3 \rangle & \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_7^3 \rangle & \langle \mathbf{R}_9^3, \mathbf{R}_7^3 \rangle \\ \langle \mathbf{R}_7^3, \mathbf{R}_8^3 \rangle & \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_8^3 \rangle & \langle \mathbf{R}_9^3, \mathbf{R}_8^3 \rangle \\ \langle \mathbf{R}_7^3, \mathbf{R}_9^3 \rangle & \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_9^3 \rangle & \langle \mathbf{R}_9^3, \mathbf{R}_9^3 \rangle \end{vmatrix}}{\delta_3} \quad (6.14)$$

$$h_9 = \frac{\begin{vmatrix} \langle \mathbf{R}_7^3, \mathbf{R}_7^3 \rangle & \langle \mathbf{R}_8^3, \mathbf{R}_7^3 \rangle & \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_7^3 \rangle \\ \langle \mathbf{R}_7^3, \mathbf{R}_8^3 \rangle & \langle \mathbf{R}_8^3, \mathbf{R}_8^3 \rangle & \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_8^3 \rangle \\ \langle \mathbf{R}_7^3, \mathbf{R}_9^3 \rangle & \langle \mathbf{R}_8^3, \mathbf{R}_9^3 \rangle & \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_9^3 \rangle \end{vmatrix}}{\delta_3} \quad (6.15)$$

veya $c_{pr} = \langle \mathbf{R}_p^3, \mathbf{R}_r^3 \rangle$ ve $v_p = \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_p^3 \rangle$ olmak üzere

$$h_i = \frac{1}{\delta_3} \left\{ v_p (c_{rr} c_{ss} - c_{rs}^2) + v_r (c_{ps} c_{sr} - c_{pr} c_{ss}) + v_k (c_{pr} c_{rs} - c_{ps} c_{rr}) \right\} \quad (6.16)$$

$p, r, s = 7, 8, 9$ (dairesel)

eşitlikleri kullanılarak hesaplanabilir.

Böylece M_1 , M_2 ve M_3 hiperyüzeylerinin enine arakesit eğrisinin Frenet elemanları dördüncü bölümde ifade edildiği gibi

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{h}}{\lambda}, \quad \lambda\lambda' = \langle \Phi\mathbf{h}, \mathbf{t} \rangle, \quad k_1 = \frac{\sqrt{\langle \Phi\mathbf{h}, \Phi\mathbf{h} \rangle - (\lambda\lambda')^2}}{\lambda^2}, \quad \mathbf{n} = \frac{\Phi\mathbf{h} - \lambda\lambda'\mathbf{t}}{\lambda^2 k_1} \quad (6.17)$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{\mathbf{h} \times \Phi\mathbf{h} \times \Phi^2\mathbf{h}}{\|\mathbf{h} \times \Phi\mathbf{h} \times \Phi^2\mathbf{h}\|}, \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2 \times \mathbf{t} \times \mathbf{n}, \quad k_2 = \frac{1}{\lambda^3 k_1} \langle \Phi^2\mathbf{h}, \mathbf{b}_1 \rangle, \quad k_3 = \frac{1}{\lambda^4 k_1 k_2} \langle \Phi^3\mathbf{h}, \mathbf{b}_2 \rangle$$

eşitlikleri kullanılarak hesaplanabilir.

6.2 İki Parametrik Biri Kapalı Denklemiyle Verilen Üç Hiperyüzeyin Arakesit Eğrisi

$\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında $R^1 = R^1(u_1, u_2, u_3)$, $R^2 = R^2(u_4, u_5, u_6)$ ve $f(x, y, z, w) = 0$ denklemleriyle verilen ve enine kesişen üç regüler hiperyüzey, sırasıyla, M_1 , M_2 ve M_3 olsun. M_1 , M_2 , M_3 hiperyüzeylerinin normal vektör alanları,

$$\mathbf{N}_1 = \mathbf{R}_1^1 \times \mathbf{R}_2^1 \times \mathbf{R}_3^1, \quad \mathbf{N}_2 = \mathbf{R}_4^2 \times \mathbf{R}_5^2 \times \mathbf{R}_6^2, \quad \mathbf{N}_3 = \nabla f$$

şeklinde dir. M_1 , M_2 ve M_3 hiperyüzeylerinin birim hızlı arakesit eğrisini $\alpha(s)$ ile gösterelim. α eğrisinin $\mathbf{t}$ birim teğet vektörü hiperyüzeylerin normal vektör alanlarına dik olacağından, $\mathbf{t}$ vektörü $\mathbf{h} = (\mathbf{R}_1^1 \times \mathbf{R}_2^1 \times \mathbf{R}_3^1) \times (\mathbf{R}_4^2 \times \mathbf{R}_5^2 \times \mathbf{R}_6^2) \times \nabla f$ vektörüne paralel olacaktır. Dolayısıyla

$\mathbf{h} = \lambda \mathbf{t}$ yazılabilir. Buradan arakesit eğrisinin birim teğet vektörü $\mathbf{t} = \frac{\mathbf{h}}{\lambda}$ ile bulunur.

$$\Psi = \lambda \frac{d}{ds} = \left(\sum_{i=1}^6 h_i \frac{\partial}{\partial u_i} + h_7 \frac{\partial}{\partial x} + h_8 \frac{\partial}{\partial y} + h_9 \frac{\partial}{\partial z} + h_{10} \frac{\partial}{\partial w} \right) \quad (6.18)$$

operatörünü tanımlayalım.

Bu operatör kullanılırsa,

$$\lambda u_i' = h_i \quad (i=1, 2, \dots, 6), \quad \lambda x' = h_7, \quad \lambda y' = h_8, \quad \lambda z' = h_9, \quad \lambda w' = h_{10}$$

elde edilir.

α arakesit eğrisi M_1 hiperyüzeyinin denklemini sağlayacağından

$\alpha(s) = R^1(u_1(s), u_2(s), u_3(s))$ yazılabilir. Bu eşitliğe Ψ operatörü uygulanırsa

$$\lambda \alpha' = \mathbf{R}_1^1(\lambda u_1') + \mathbf{R}_2^1(\lambda u_2') + \mathbf{R}_3^1(\lambda u_3')$$

veya

$$\mathbf{h} = h_1 \mathbf{R}_1^1 + h_2 \mathbf{R}_2^2 + h_3 \mathbf{R}_3^3$$

elde edilir.

h_1, h_2, h_3 bilinmeyenleri (6.6) eşitliği kullanılarak hesaplanabilir.

α arakesit eğrisi M_2 hiperyüzeyinin de denklemini sağlayacağından

$\alpha(s) = R^2(u_4(s), u_5(s), u_6(s))$ yazılabilir. Bu eşitliğe Ψ operatörü uygulanırsa

$$\lambda \alpha' = \mathbf{R}_4^2(\lambda u_4') + \mathbf{R}_5^2(\lambda u_5') + \mathbf{R}_6^2(\lambda u_6')$$

veya

$$\mathbf{h} = h_4 \mathbf{R}_4^2 + h_5 \mathbf{R}_5^2 + h_6 \mathbf{R}_6^2$$

elde edilir.

h_4, h_5, h_6 bilinmeyenleri (6.11) eşitliği kullanılarak hesaplanabilir.

α eğrisi M_3 yüzeyinin de denklemini sağlayacağından, $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s), w(s))$

alınırsa ve Ψ operatörü uygulanırsa

$$\lambda \alpha'(s) = (\lambda x'(s), \lambda y'(s), \lambda z'(s), \lambda w'(s))$$

olur, yani,

$$\mathbf{h} = (h_7, h_8, h_9, h_{10}) \quad (6.19)$$

elde edilir.

Böylece, dördüncü bölümde ifade edildiği gibi, M_1, M_2 ve M_3 hiperyüzeylerinin enine arakesit eğrisinin Frenet elemanları

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{h}}{\lambda}, \quad \lambda \lambda' = \langle \Psi \mathbf{h}, \mathbf{t} \rangle, \quad k_1 = \frac{\sqrt{\langle \Psi \mathbf{h}, \Psi \mathbf{h} \rangle - (\lambda \lambda')^2}}{\lambda^2}, \quad \mathbf{n} = \frac{\Psi \mathbf{h} - \lambda \lambda' \mathbf{t}}{\lambda^2 \kappa} \quad (6.20)$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{\mathbf{h} \times \Psi \mathbf{h} \times \Psi^2 \mathbf{h}}{\|\mathbf{h} \times \Psi \mathbf{h} \times \Psi^2 \mathbf{h}\|}, \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2 \times \mathbf{t} \times \mathbf{n}, \quad k_2 = \frac{1}{\lambda^3 k_1} \langle \Psi^2 \mathbf{h}, \mathbf{b}_1 \rangle, \quad k_3 = \frac{1}{\lambda^4 k_1 k_2} \langle \Psi^3 \mathbf{h}, \mathbf{b}_2 \rangle$$

eşitlikleri yardımıyla bulunabilir.

6.3 Biri Parametrik Diğerleri Kapalı Denklemiyle Verilen Üç Hiperyüzeyin Arakesit Eğrisi

$\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında $R^1 = R^1(u_1, u_2, u_3)$, $f(x, y, z, w) = 0$ ve $g(x, y, z, w) = 0$ denklemleriyle verilen ve enine kesişen üç regüler hiperyüzey, sırasıyla, M_1 , M_2 ve M_3 olsun. M_1 , M_2 , M_3 hiperyüzeylerinin normal vektör alanları,

$$\mathbf{N}_1 = \mathbf{R}_1^1 \times \mathbf{R}_2^1 \times \mathbf{R}_3^1, \quad \mathbf{N}_2 = \nabla f, \quad \mathbf{N}_3 = \nabla g$$

şeklinde. M_1 , M_2 ve M_3 hiperyüzeylerinin birim hızlı arakesit eğrisini $\alpha(s)$ ile gösterelim. α eğrisinin $\mathbf{t}$ birim teğet vektörü hiperyüzeylerin normal vektör alanlarına dik olduğundan, $\mathbf{t}$ vektörü $\mathbf{h} = (\mathbf{R}_1^1 \times \mathbf{R}_2^1 \times \mathbf{R}_3^1) \times \nabla f \times \nabla g$ vektörüne paralel olacaktır. Dolayısıyla, $\mathbf{h} = \lambda \mathbf{t}$ yazılabilir.

$$\Omega = \lambda \frac{d}{ds} = \left(\sum_{i=1}^3 h_i \frac{\partial}{\partial u_i} + h_4 \frac{\partial}{\partial x} + h_5 \frac{\partial}{\partial y} + h_6 \frac{\partial}{\partial z} + h_7 \frac{\partial}{\partial w} \right) \quad (6.21)$$

operatörünü tanımlayalım.

Bu operatör kullanılırsa

$$\lambda u_i' = h_i \quad (i=1, 2, 3), \quad \lambda x' = h_4, \quad \lambda y' = h_5, \quad \lambda z' = h_6, \quad \lambda w' = h_7$$

elde edilir.

α arakesit eğrisi M_1 hiperyüzeyinin denklemini sağlayacağından

$\alpha(s) = R^1(u_1(s), u_2(s), u_3(s))$ yazılabilir. Bu eşitliğe Ω operatörü uygulanırsa

$$\lambda \alpha' = \mathbf{R}_1^1(\lambda u_1') + \mathbf{R}_2^1(\lambda u_2') + \mathbf{R}_3^1(\lambda u_3')$$

veya

$$\mathbf{h} = h_1 \mathbf{R}_1^1 + h_2 \mathbf{R}_2^2 + h_3 \mathbf{R}_3^3$$

elde edilir.

h_1, h_2, h_3 bilinmeyenleri (6.6) eşitliği kullanılarak hesaplanabilir.

α arakesit eğrisi $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s), w(s))$ alınır ve Ω operatörü uygulanırsa

$$\lambda \mathbf{a}'(s) = (\lambda x'(s), \lambda y'(s), \lambda z'(s), \lambda w'(s))$$

olur, yani,

$$\mathbf{h} = (h_4, h_5, h_6, h_7) \quad (6.22)$$

elde edilir.

Böylece M_1 , M_2 ve M_3 hiperyüzeylerinin enine arakesit eğrisinin Frenet elemanları

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{h}}{\lambda}, \quad \lambda \lambda' = \langle \Omega \mathbf{h}, \mathbf{t} \rangle, \quad k_1 = \frac{\sqrt{\langle \Omega \mathbf{h}, \Omega \mathbf{h} \rangle - (\lambda \lambda')^2}}{\lambda^2}, \quad \mathbf{n} = \frac{\Omega \mathbf{h} - \lambda \lambda' \mathbf{t}}{\lambda^2 \kappa}, \quad (6.23)$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{\mathbf{h} \times \Omega \mathbf{h} \times \Omega^2 \mathbf{h}}{\|\mathbf{h} \times \Omega \mathbf{h} \times \Omega^2 \mathbf{h}\|}, \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2 \times \mathbf{t} \times \mathbf{n}, \quad k_2 = \frac{1}{\lambda^3 k_1} \langle \Omega^2 \mathbf{h}, \mathbf{b}_1 \rangle, \quad k_3 = \frac{1}{\lambda^4 k_1 k_2} \langle \Omega^3 \mathbf{h}, \mathbf{b}_2 \rangle$$

eşitlikleri kullanılarak bulunabilir.

6.4 Hiperyüzeylerin Arakesit Problemleri İçin Örnekler

6.4.1 Parametrik-parametrik-parametrik Arakesit Problemi

$$R^1(u_1, u_2, u_3) = (u_1 - u_3, u_1^3, u_2, u_3),$$

$$R^2(u_4, u_5, u_6) = (u_4 - u_6, u_5, u_4^2, u_6),$$

$$R^3(u_7, u_8, u_9) = (1 + u_9, u_7, u_8, u_9)$$

regüler hiperyüzeyleri veriliyor. Bu hiperyüzeylerin arakesit eğrisinin $P = (1, 1, 1, 0) = R^1(1, 1, 0) = R^2(1, 1, 0) = R^3(1, 1, 0)$ noktasındaki Frenet elemanlarını bulalım.

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{R}_1^1 = (1, 3u_1^2, 0, 0) \\ \mathbf{R}_2^1 = (0, 0, 1, 0) \\ \mathbf{R}_3^1 = (-1, 0, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{N}_1 = \mathbf{R}_1^1 \times \mathbf{R}_2^1 \times \mathbf{R}_3^1 = (3u_1^2, -1, 0, 3u_1^2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{R}_4^2 = (1, 0, 2u_4, 0) \\ \mathbf{R}_5^2 = (0, 1, 0, 0) \\ \mathbf{R}_6^2 = (-1, 0, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{N}_2 = \mathbf{R}_4^2 \times \mathbf{R}_5^2 \times \mathbf{R}_6^2 = (-2u_4, 0, 1, -2u_4)$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{R}_7^3 = (0, 1, 0, 0) \\ \mathbf{R}_8^3 = (0, 0, 1, 0) \\ \mathbf{R}_9^3 = (1, 0, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{N}_3 = \mathbf{R}_7^3 \times \mathbf{R}_8^3 \times \mathbf{R}_9^3 = (1, 0, 0, -1)$$

olduğundan

$$\mathbf{h} = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 \times \mathbf{N}_3 = (1, 6u_1^2, 4u_4, 1)$$

bulunur. Böylece

$$\mathbf{h}(P) = (1, 6, 4, 1)$$

olup,

$$\lambda^2 = \langle \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle \Rightarrow \lambda^2(P) = \langle \mathbf{h}(P), \mathbf{h}(P) \rangle = \langle (1, 6, 4, 1), (1, 6, 4, 1) \rangle = 54$$

yani,

$$\lambda(P) = \pm 3\sqrt{6}$$

bulunur.

$\lambda(P) = 3\sqrt{6}$ alalım. Bu durumda arakesit eğrisinin P noktasındaki birim teğet vektörü

$$\mathbf{t}(P) = \frac{\mathbf{h}(P)}{\lambda(P)} = \frac{1}{3\sqrt{6}}(1, 6, 4, 1)$$

olarak bulunur.

$\mathbf{h} = (1, 6u_1^2, 4u_4, 1)$ eşitliğine (6.1) ile tanımlanan Φ operatörü uygulanırsa

$$\Phi \mathbf{h} = \lambda \left(0, 12u_1u_1', 4u_4', 0 \right) = (0, 12u_1h_1, 4h_4, 0)$$

elde edilir. h_1, h_4 bilinmeyenlerini bulalım.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_1^1 \rangle &= 1 + 9u_1^4, & \langle \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}_2^1 \rangle &= 1, & \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_1^1 \rangle &= 1 + 18u_1^4, \\ \langle \mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_2^1 \rangle &= 0, & \langle \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}_3^1 \rangle &= 0, & \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_2^1 \rangle &= 4u_4, \\ \langle \mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_3^1 \rangle &= -1, & \langle \mathbf{R}_3^1, \mathbf{R}_3^1 \rangle &= 2, & \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_3^1 \rangle &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{R}_4^2, \mathbf{R}_4^2 \rangle &= 1 + 4u_4^2, & \langle \mathbf{R}_5^2, \mathbf{R}_5^2 \rangle &= 1, & \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_4^2 \rangle &= 1 + 8u_4^2, \\ \langle \mathbf{R}_4^2, \mathbf{R}_5^2 \rangle &= 0, & \langle \mathbf{R}_5^2, \mathbf{R}_6^2 \rangle &= 0, & \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_5^2 \rangle &= 6u_1^2, \\ \langle \mathbf{R}_4^2, \mathbf{R}_6^2 \rangle &= -1, & \langle \mathbf{R}_6^2, \mathbf{R}_6^2 \rangle &= 2, & \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_6^2 \rangle &= 0 \end{aligned}$$

olup, bu eşitlikleri (6.3) ve (6.8) de yerine yazarsak

$$h_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1+18u_1^4 & 0 & -1 \\ 4u_4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+9u_1^4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2+36u_1^4}{1+18u_1^4} = 2 \quad \Rightarrow \quad h_1 = 2$$

$$h_4 = \frac{\begin{vmatrix} 1+8u_4^2 & 0 & -1 \\ 6u_1^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+4u_4^2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2+16u_4^2}{1+8u_4^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad h_4 = 2$$

bulunur. Böylece

$$\Phi \mathbf{h} = (0, 24u_1, 8, 0)$$

ve

$$\Phi \mathbf{h}(P) = (0, 24, 8, 0)$$

elde edilir.

$$\lambda(P)\lambda'(P) = \langle \Phi \mathbf{h}(P), \mathbf{t}(P) \rangle = \left\langle (0, 24, 8, 0), \left(\frac{\sqrt{6}}{18}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{9}, \frac{\sqrt{6}}{18} \right) \right\rangle = \frac{88\sqrt{6}}{9}$$

olduğundan, arakesit eğrisinin birinci eğriliği

$$\begin{aligned} k_1(P) &= \frac{1}{\lambda^2(P)} \sqrt{\langle \Phi \mathbf{h}(P), \Phi \mathbf{h}(P) \rangle - (\lambda(P)\lambda'(P))^2} \\ &= \frac{1}{(3\sqrt{6})^2} \sqrt{\langle (0, 24, 8, 0), (0, 24, 8, 0) \rangle - \left(3\sqrt{6} \cdot \frac{88}{27} \right)^2} \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$k_1(P) = \frac{8\sqrt{21}}{243}$$

olarak hesaplanır. Ayrıca, arakesit eğrisinin asli normal vektörü de

$$\mathbf{n}(P) = \frac{\Phi \mathbf{h}(P) - \lambda(P)\lambda'(P)\mathbf{t}(P)}{\lambda^2(P)k_1(P)} = \frac{(0, 24, 8, 0) - \frac{88\sqrt{6}}{9} \left(\frac{\sqrt{6}}{18}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{9}, \frac{\sqrt{6}}{18} \right)}{(3\sqrt{6})^2 \frac{8\sqrt{21}}{243}}$$

$$\mathbf{n}(P) = \left(-\frac{11}{6\sqrt{21}}, \frac{5}{2\sqrt{21}}, -\frac{17}{6\sqrt{21}}, -\frac{11}{6\sqrt{21}} \right)$$

ile verilir.

$\Phi \mathbf{h} = (0, 24u_1, 8, 0)$ eşitliğine Φ operatörü uygulanırsa

$$\Phi^2 \mathbf{h} = \lambda(0, 24u_1', 0, 0) = (0, 24h_1, 0, 0)$$

bulunur. $h_1 = 2$ değeri yerine yazılırsa $\Phi^2 \mathbf{h} = (0, 48, 0, 0)$ olur. Bu durumda

$$\mathbf{h}(P) \times \Phi \mathbf{h}(P) \times \Phi^2 \mathbf{h}(P) = (-384, 0, 0, 384)$$

olup, arakesit eğrisinin ikinci ve birinci binormal vektörleri, sırasıyla,

$$\mathbf{b}_2(P) = \frac{(\mathbf{h}(P) \times \Phi \mathbf{h}(P) \times \Phi^2 \mathbf{h}(P))}{\|\mathbf{h}(P) \times \Phi \mathbf{h}(P) \times \Phi^2 \mathbf{h}(P)\|} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\mathbf{b}_1(P) = \mathbf{b}_2(P) \times \mathbf{t}(P) \times \mathbf{n}(P) = \left(-\frac{3\sqrt{7}}{14}, -\frac{\sqrt{7}}{14}, \frac{3\sqrt{7}}{14}, -\frac{3\sqrt{7}}{14} \right)$$

ve ikinci eğriliği de

$$k_2(P) = \frac{\langle \Phi^2 \mathbf{h}(P), \mathbf{b}_1(P) \rangle}{\lambda^3(P)k_1(P)} = \frac{\left\langle (0, 48, 0, 0), \left(-\frac{3\sqrt{7}}{14}, -\frac{\sqrt{7}}{14}, \frac{3\sqrt{7}}{14}, -\frac{3\sqrt{7}}{14} \right) \right\rangle}{(3\sqrt{6})^3 \frac{8\sqrt{21}}{243}} = -\frac{3\sqrt{2}}{28}$$

olarak hesaplanır.

$\Phi^2 \mathbf{h} = (0, 48, 0, 0)$ eşitliğine Φ operatörü uygulanırsa

$$\Phi^3 \mathbf{h} = \lambda(0, 0, 0, 0) = \vec{0}$$

elde edilir. O halde arakesit eğrisinin üçüncü eğriliği

$$k_3(P) = \frac{\langle \Phi^3 \mathbf{h}(P), \mathbf{b}_2(P) \rangle}{\lambda^4(P)k_1(P)k_2(P)} = 0 \Rightarrow k_3(P) = 0$$

bulunur.

6.4.2 Parametrik-parametrik-kapalı Arakesit Problemi

$$R^1(u_1, u_2, u_3) = (u_1, u_2, -(u_2 - u_3)^3, u_3),$$

$$R^2(u_4, u_5, u_6) = ((u_4 - u_6)^2, u_4, u_5, u_6),$$

$$f(x, y, z, w) = y + w - 1 = 0$$

regüler hiperyüzeyleri veriliyor. Bu hiperyüzeylerin arakesit eğrisinin

$P = (1, 0, 1, 1) = R^1(1, 0, 1) = R^2(0, 1, 1)$ noktasındaki Frenet elemanlarını bulalım.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R}_1^1 &= (1, 0, 0, 0) \\ \mathbf{R}_2^1 &= (0, 1, -3(u_2 - u_3)^2, 0) \\ \mathbf{R}_3^1 &= (0, 0, 3(u_2 - u_3)^2, 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{N}_1 = \mathbf{R}_1^1 \times \mathbf{R}_2^1 \times \mathbf{R}_3^1 = (0, 3(u_2 - u_3)^2, 1, -3(u_2 - u_3)^2)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R}_4^2 &= (2(u_4 - u_6), 1, 0, 0) \\ \mathbf{R}_5^2 &= (0, 0, 1, 0) \\ \mathbf{R}_6^2 &= (-2(u_4 - u_6), 0, 0, 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{N}_2 = \mathbf{R}_4^2 \times \mathbf{R}_5^2 \times \mathbf{R}_6^2 = (1, -2(u_4 - u_6), 0, 2(u_4 - u_6))$$

$$\mathbf{N}_3 = \nabla f = (0, 1, 0, 1)$$

olduğundan

$$\mathbf{h} = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 \times \mathbf{N}_3 = (4(u_4 - u_6), 1, -6(u_2 - u_3)^2, -1)$$

bulunur. Böylece

$$\mathbf{h}(P) = (-4, 1, -6, -1)$$

olup,

$$\lambda^2 = \langle \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle \Rightarrow \lambda^2(P) = \langle \mathbf{h}(P), \mathbf{h}(P) \rangle = \langle (-4, 1, -6, -1), (-4, 1, -6, -1) \rangle = 54$$

yani,

$$\lambda(P) = \pm 3\sqrt{6}$$

bulunur.

$\lambda(P) = -3\sqrt{6}$ alalım. Bu durumda arakesit eğrisinin P noktasındaki birim teğet vektörü

$$\mathbf{t}(P) = \frac{\mathbf{h}(P)}{\lambda(P)} = \frac{1}{3\sqrt{6}}(4, -1, 6, 1)$$

olarak bulunur.

$\mathbf{h} = (4(u_4 - u_6), 1, -6(u_2 - u_3)^2, -1)$ eşitliğine (6.18) ile tanımlanan Ψ operatörü uygulanırsa

$$\Psi \mathbf{h} = \lambda \left(4(u_4' - u_6'), 0, -12(u_2' - u_3')(u_2 - u_3), 0 \right) = (4(h_4 - h_6), 0, -12(h_2 - h_3)(u_2 - u_3), 0)$$

elde edilir. h_2, h_3, h_4 ve h_6 bilinmeyenlerini bulalım.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_1^1 \rangle &= 1, & \langle \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}_2^1 \rangle &= 1 + 9(u_2 - u_3)^4, & \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_1^1 \rangle &= 4(u_4 - u_6), \\ \langle \mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_2^1 \rangle &= 0, & \langle \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}_3^1 \rangle &= -9(u_2 - u_3)^4, & \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_2^1 \rangle &= 1 + 18(u_2 - u_3)^4, \\ \langle \mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_3^1 \rangle &= 0, & \langle \mathbf{R}_3^1, \mathbf{R}_3^1 \rangle &= 1 + 9(u_2 - u_3)^4, & \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_3^1 \rangle &= -1 - 18(u_2 - u_3)^4 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{R}_4^2, \mathbf{R}_4^2 \rangle &= 1 + 4(u_4 - u_6)^2, & \langle \mathbf{R}_5^2, \mathbf{R}_5^2 \rangle &= 1, & \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_4^2 \rangle &= 1 + 8(u_4 - u_6)^2, \\ \langle \mathbf{R}_4^2, \mathbf{R}_5^2 \rangle &= 0, & \langle \mathbf{R}_5^2, \mathbf{R}_6^2 \rangle &= 0, & \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_5^2 \rangle &= -6(u_2 - u_3)^2, \\ \langle \mathbf{R}_4^2, \mathbf{R}_6^2 \rangle &= -4(u_4 - u_6)^2, & \langle \mathbf{R}_6^2, \mathbf{R}_6^2 \rangle &= 1 + 4(u_4 - u_6)^2, & \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_6^2 \rangle &= -1 - 8(u_4 - u_6)^2 \end{aligned}$$

olup, bu eşitlikleri (6.4) , (6.5) , (6.8) ve (6.10) da yerlerine yazarsak

$$h_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4(u_4 - u_6) & 0 \\ 0 & 1 + 18(u_2 - u_3)^4 & -9(u_2 - u_3)^4 \\ 0 & -1 - 18(u_2 - u_3)^4 & 1 + 9(u_2 - u_3)^4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + 9(u_2 - u_3)^4 & -9(u_2 - u_3)^4 \\ 0 & -9(u_2 - u_3)^4 & 1 + 9(u_2 - u_3)^4 \end{vmatrix}} = 1$$

$$h_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4(u_4 - u_6) \\ 0 & 1 + 9(u_2 - u_3)^4 & 1 + 18(u_2 - u_3)^4 \\ 0 & -9(u_2 - u_3)^4 & -1 - 18(u_2 - u_3)^4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + 9(u_2 - u_3)^4 & -9(u_2 - u_3)^4 \\ 0 & -9(u_2 - u_3)^4 & 1 + 9(u_2 - u_3)^4 \end{vmatrix}} = -1$$

$$h_4 = \frac{\begin{vmatrix} 1+8(u_4-u_6)^2 & 0 & -4(u_4-u_6)^2 \\ -6(u_2-u_3)^2 & 1 & 0 \\ -1-8(u_4-u_6)^2 & 0 & 1+4(u_4-u_6)^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+4(u_4-u_6)^2 & 0 & -4(u_4-u_6)^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4(u_4-u_6)^2 & 0 & 1+4(u_4-u_6)^2 \end{vmatrix}} = 1$$

$$h_6 = \frac{\begin{vmatrix} 1+4(u_4-u_6)^2 & 0 & 1+8(u_4-u_6)^2 \\ 0 & 1 & -6(u_2-u_3)^2 \\ -4(u_4-u_6)^2 & 0 & -1-8(u_4-u_6)^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+4(u_4-u_6)^2 & 0 & -4(u_4-u_6)^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4(u_4-u_6)^2 & 0 & 1+4(u_4-u_6)^2 \end{vmatrix}} = -1$$

bulunur. Böylece

$$\Psi \mathbf{h} = (8, 0, -24(u_2 - u_3), 0)$$

ve

$$\Psi \mathbf{h}(P) = (8, 0, 24, 0)$$

elde edilir.

$$\lambda(P)\lambda'(P) = \langle \Psi \mathbf{h}(P), \mathbf{t}(P) \rangle = \left\langle (8, 0, 24, 0), \frac{1}{3\sqrt{6}}(4, -1, 6, 1) \right\rangle = \frac{88\sqrt{6}}{9}$$

olduğundan, arakesit eğrisinin birinci eğriliği

$$\begin{aligned} k_1(P) &= \frac{1}{\lambda^2(P)} \sqrt{\langle \Psi \mathbf{h}(P), \Psi \mathbf{h}(P) \rangle - (\lambda(P)\lambda'(P))^2} \\ &= \frac{1}{(-3\sqrt{6})^2} \sqrt{\langle (8, 0, 24, 0), (8, 0, 24, 0) \rangle - \left(\frac{88\sqrt{6}}{9} \right)^2} \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$k_1(P) = \frac{8\sqrt{21}}{243}$$

olarak hesaplanır. Ayrıca, arakesit eğrisinin asli normal vektörü de

$$\mathbf{n}(P) = \frac{\Psi \mathbf{h}(P) - \lambda(P) \lambda'(P) \mathbf{t}(P)}{\lambda^2(P) k_1(P)} = \frac{(8, 0, 24, 0) - \frac{88\sqrt{6}}{9} \left(\frac{1}{3\sqrt{6}} (4, -1, 6, 1) \right)}{(-3\sqrt{6})^2 \frac{8\sqrt{21}}{243}}$$

$$\mathbf{n}(P) = \left(-\frac{17}{6\sqrt{21}}, \frac{11}{6\sqrt{21}}, \frac{15}{6\sqrt{21}}, -\frac{11}{6\sqrt{21}} \right)$$

ile verilir.

$\Psi \mathbf{h} = (8, 0, -24(u_2 - u_3), 0)$ eşitliğine Ψ operatörü uygulanırsa

$$\Psi^2 \mathbf{h} = \lambda \left(0, 0, -24(u_2' - u_3'), 0 \right) = (0, 0, -24(h_2 - h_3), 0)$$

bulunur. Böylece,

$$\Psi^2 \mathbf{h} = (0, 0, -48, 0)$$

olur. Bu durumda

$$\mathbf{h}(P) \times \Psi \mathbf{h}(P) \times \Psi^2 \mathbf{h}(P) = -384(0, 1, 0, 1)$$

olup, arakesit eğrisinin ikinci ve birinci binormal vektörleri, sırasıyla,

$$\mathbf{b}_2(P) = \frac{(\mathbf{h}(P) \times \Psi \mathbf{h}(P) \times \Psi^2 \mathbf{h}(P))}{\|\mathbf{h}(P) \times \Psi \mathbf{h}(P) \times \Psi^2 \mathbf{h}(P)\|} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

$$\mathbf{b}_1(P) = \mathbf{b}_2(P) \times \mathbf{t}(P) \times \mathbf{n}(P) = \left(-\frac{3}{2\sqrt{7}}, -\frac{3}{2\sqrt{7}}, \frac{1}{2\sqrt{7}}, \frac{3}{2\sqrt{7}} \right)$$

ve ikinci eğriliği de

$$k_2(P) = \frac{\langle \Psi^2 \mathbf{h}(P), \mathbf{b}_1(P) \rangle}{\lambda^3(P) k_1(P)} = \frac{\left\langle (0, 0, -48, 0), \left(-\frac{3}{2\sqrt{7}}, -\frac{3}{2\sqrt{7}}, \frac{1}{2\sqrt{7}}, \frac{3}{2\sqrt{7}} \right) \right\rangle}{(-3\sqrt{6})^3 \frac{8\sqrt{21}}{243}} = -\frac{3\sqrt{2}}{28}$$

olarak hesaplanır.

$\Psi^2 \mathbf{h} = (0, 0, -48, 0)$ eşitliğine Ψ operatörü uygulanırsa

$$\Psi^3 \mathbf{h} = \lambda(0, 0, 0, 0) = \vec{0}$$

elde edilir. O halde arakesit eğrisinin üçüncü eğriliği

$$k_3(P) = \frac{\langle \Psi^3 \mathbf{h}(P), \mathbf{b}_2(P) \rangle}{\lambda^4(P) k_1(P) k_2(P)} = 0 \Rightarrow k_3(P) = 0$$

bulunur.

6.4.3 Parametrik-kapalı-kapalı Arakesit Problemi

$$R^1(u_1, u_2, u_3) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos u_1, \frac{1}{2} \sin u_1, u_2, u_3 \right),$$

$$f(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - 2 = 0,$$

$$g(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 - w^2 = 0$$

regüler hiperyüzeyleri veriliyor. Bu hiperyüzeylerin arakesit eğrisinin

$$P = R^1\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) \text{ noktasındaki Frenet elemanlarını bulalım.}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R}_1^1 &= \left(-\frac{1}{2} \sin u_1, \frac{1}{2} \cos u_1, 0, 0 \right) \\ \mathbf{R}_2^1 &= (0, 0, 1, 0) \\ \mathbf{R}_3^1 &= (0, 0, 0, 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{N}_1 = \mathbf{R}_1^1 \times \mathbf{R}_2^1 \times \mathbf{R}_3^1 = \left(\frac{1}{2} \cos u_1, \frac{1}{2} \sin u_1, 0, 0 \right)$$

$$\mathbf{N}_2 = \nabla f = (2x, 2y, 2z, 2w)$$

ve

$$\mathbf{N}_3 = \nabla g = (2x, 2y, 2z, -2w)$$

bulunur.

$$\mathbf{h} = (\mathbf{R}_1^1 \times \mathbf{R}_2^1 \times \mathbf{R}_3^1) \times \nabla f \times \nabla g = (-4zw \sin u_1, 4zw \cos u_1, -4yw \cos u_1 + 4wx \sin u_1, 0)$$

ve böylece

$$\mathbf{h}(P) = (-2\sqrt{2}, 0, 2, 0)$$

olup,

$$\lambda^2 = \langle \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle \Rightarrow \lambda^2(P) = \langle \mathbf{h}(P), \mathbf{h}(P) \rangle = \langle (-2\sqrt{2}, 0, 2, 0), (-2\sqrt{2}, 0, 2, 0) \rangle$$

yani,

$$\lambda(P) = \pm 2\sqrt{3}$$

bulunur.

$\lambda(P) = 2\sqrt{3}$ alalım. Bu durumda arakesit eğrisinin P noktasındaki birim teğet vektörü

$$\mathbf{t}(P) = \frac{\mathbf{h}(P)}{\lambda(P)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\sqrt{2}, 0, 1, 0)$$

olarak bulunur.

$\mathbf{h} = (-4zwsin u_1, 4zwcossin u_1, -4ywcossin u_1 + 4wxsin u_1, 0)$ eşitliğine (6.21) de tanımlanan

Ω operatörü uygulanırsa

$$\Omega \mathbf{h} = \lambda(-4zwu' \cos u_1 - 4z'w \sin u_1 - 4zw' \sin u_1, -4zwu' \sin u_1 + 4z'w \cos u_1 + 4zw' \cos u_1, \\ 4ywu' \sin u_1 - 4y'w \cos u_1 - 4yw' \cos u_1 + 4wxu' \cos u_1 + 4w'x \sin u_1 + 4wx' \sin u_1, 0)$$

veya

$$\Omega \mathbf{h} = (-4zwh_1 \cos u_1 - 4wh_6 \sin u_1 - 4zh_7 \sin u_1, \\ -4zwh_1 \sin u_1 + 4wh_6 \cos u_1 + 4zh_7 \cos u_1, \\ 4ywh_1 \sin u_1 - 4wh_5 \cos u_1 - 4yh_7 \cos u_1 \\ + 4wxh_1 \cos u_1 + 4xh_7 \sin u_1 + 4wh_4 \sin u_1, 0)$$

elde edilir. h_1, h_4, h_5, h_6, h_7 bilinmeyenlerini bulalım.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_1^1 \rangle &= \frac{1}{4}, & \langle \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}_2^1 \rangle &= 1, & \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_1^1 \rangle &= 2zw, \\ \langle \mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_2^1 \rangle &= 0, & \langle \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}_3^1 \rangle &= 0, & \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_2^1 \rangle &= -4ywcossin u_1 + 4wxsin u_1, \\ \langle \mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_3^1 \rangle &= 0, & \langle \mathbf{R}_3^1, \mathbf{R}_3^1 \rangle &= 1, & \langle \mathbf{h}, \mathbf{R}_3^1 \rangle &= 0 \end{aligned}$$

$\delta_1 = \|\mathbf{R}_1^1 \times \mathbf{R}_2^1 \times \mathbf{R}_3^1\|^2 = \frac{1}{4}$ olup, bu eşitlikleri (6.3) de yerine yazarsak

$$h_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2zw & 0 & 0 \\ -4yw \cos u_1 + 4wx \sin u_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\frac{1}{4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = 8zw \Rightarrow h_1 = 8zw$$

bulunur. (6.22) den $\mathbf{h} = (h_4, h_5, h_6, h_7)$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\mathbf{h} = (-4zwsin u_1, 4zwc \cos u_1, -4yw \cos u_1 + 4wx \sin u_1, 0) = (h_4, h_5, h_6, h_7)$$

yani

$$h_4 = -4zwsin u_1, \quad h_5 = 4zwc \cos u_1, \quad h_6 = -4yw \cos u_1 + 4wx \sin u_1, \quad h_7 = 0$$

şeklindedir. Böylece,

$$\begin{aligned} \Omega \mathbf{h} = & (-32z^2w^2 \cos u_1 + 8yw^2 \sin 2u_1 - 16w^2x \sin^2 u_1, \\ & -32z^2w^2 \sin u_1 - 16yw^2 \cos^2 u_1 + 8w^2x \sin 2u_1, \\ & 32yzw^2 \sin u_1 - 16zw^2 + 32xzw^2 \cos u_1, 0) \end{aligned}$$

ve

$$\Omega \mathbf{h}(P) = (-8, -16, 0, 0)$$

elde edilir. (6.21) den

$$\lambda(P)\lambda'(P) = \langle \Omega \mathbf{h}(P), \mathbf{t}(P) \rangle = \left\langle (-8, -16, 0, 0), \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0 \right) \right\rangle = \frac{8\sqrt{6}}{3}$$

olduğundan, arakesit eğrisinin birinci eğriliği

$$\begin{aligned} k_1(P) &= \frac{1}{\lambda^2(P)} \sqrt{\langle \Omega \mathbf{h}(P), \Omega \mathbf{h}(P) \rangle - (\lambda(P)\lambda'(P))^2} \\ &= \frac{1}{(2\sqrt{3})^2} \sqrt{\langle (-8, -16, 0, 0), (-8, -16, 0, 0) \rangle - (2\sqrt{3} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{3})^2} \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$k_1(P) = \frac{2\sqrt{39}}{9}$$

olarak hesaplanır. Ayrıca, arakesit eğrisinin asli normal vektörü (6.23) den

$$\mathbf{n}(P) = \frac{\Omega \mathbf{h}(P) - \lambda(P)\lambda'(P)\mathbf{t}(P)}{\lambda^2(P)k_1(P)} = \frac{(-8, -16, 0, 0) - 2\sqrt{3} \frac{4\sqrt{2}}{3} \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0 \right)}{(2\sqrt{3})^2 \frac{2\sqrt{39}}{9}}$$

$$\mathbf{n}(P) = \left(-\frac{\sqrt{39}}{39}, -\frac{2\sqrt{39}}{13}, -\frac{\sqrt{78}}{39}, 0 \right)$$

olarak bulunur.

$$\begin{aligned} \Omega \mathbf{h} = & \left(-32z^2w^2 \cos u_1 + 8yw^2 \sin 2u_1 - 16w^2x \sin^2 u_1, \right. \\ & -32z^2w^2 \sin u_1 - 16yw^2 \cos^2 u_1 + 8w^2x \sin 2u_1, \\ & \left. 32yzw^2 \sin u_1 - 16zw^2 + 32xzw^2 \cos u_1, 0 \right) \end{aligned}$$

eşitliğine Ω operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} \Omega^2 \mathbf{h} = & \lambda \left(32z^2w^2u_1' \sin u_1 - 64zz'w^2 \cos u_1 - 64ww'z^2 \cos u_1 + 16yw^2u_1' \cos 2u_1 \right. \\ & + 8y'w^2 \sin 2u_1 + 16yww' \sin 2u_1 - 16w^2xu' \sin 2u_1 - 32ww'x \sin^2 u_1, \\ & -16w^2x' \sin^2 u_1 - 32z^2w^2u' \cos u_1 - 64zz'w^2 \sin u_1 - 64z^2ww' \sin u_1 \\ & + 16yw^2u' \sin 2u_1 - 16y'w^2 \cos^2 u_1 - 32yww' \cos^2 u_1 + 16w^2xu' \cos 2u_1 \\ & + 16xww' \sin 2u_1 + 8w^2x' \sin 2u_1, 32yz(2ww' \sin u_1 + w^2u' \cos u_1) \\ & + (32y'z + 32yz')w^2 \sin u_1 - 16z'w^2 - 32zww' + (32x'z + 32xz')w^2 \cos u_1 \\ & \left. + 32xz(2ww' \cos u_1 - w^2u' \sin u_1), 0 \right) \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} \Omega^2 \mathbf{h} = & \left(32z^2w^2h_1 \sin u_1 - 64zw^2h_6 \cos u_1 - 64wz^2h_7 \cos u_1 + 16yw^2h_1 \cos 2u_1 \right. \\ & + 8w^2h_5 \sin 2u_1 + 16ywh_7 \sin 2u_1 - 16w^2xh_1 \sin 2u_1 - 32wxh_7 \sin^2 u_1 \\ & - 16w^2h_4 \sin^2 u_1, -32z^2w^2h_1 \cos u_1 - 64zw^2h_1 \sin u_6 - 64z^2wh_7 \sin u_1 \\ & + 16yw^2h_1 \sin 2u_1 - 16y^2w^2h_5 \cos^2 u_1 - 32wh_1 \cos^2 u_1 + 16w^2xh_1 \cos 2u_1 \\ & + 16xwh_7 \sin 2u_1 + 8w^2h_4 \sin 2u_1, 64yzwh_7 \sin u_1 + 32yzw^2h_1 \cos u_1 + 32zw^2h_5 \sin u_1 \\ & + 32yw^2h_6 \sin u_1 - 16w^2h_6 - 32zwh_7 + 32zw^2h_4 \cos u_1 + 32xw^2h_6 \cos u_1 \\ & \left. + 64xzw h_7 \cos u_1 - 32xzw^2h_1 \sin u_1, 0 \right) \end{aligned}$$

olup, bilinmeyenler yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\Omega^2\mathbf{h} = & \left(256z^3w^3 \sin u_1 + 256yzw^3 \cos^2 u_1 - 256xzw^3 \sin 2u_1 + 128yzw^3 \cos 2u_1 \right. \\ & + 32zw^3 \sin 2u_1 \cos u_1 + 64zw^3 \sin^3 u_1, -256z^3w^3 \cos u_1 + 256yzw^3 \sin 2u_1 \\ & - 256xzw^3 \sin^2 u_1 - 64zw^3 \cos^3 u_1 + 128xzw^3 \cos 2u_1 - 32zw^3 \sin u_1 \sin 2u_1, \\ & 256yz^2w^3 \cos u_1 - 64y^2w^3 \sin 2u_1 + 128xyw^3 \sin^2 u_1 + 64yw^3 \cos u_1 - 64xw^3 \sin u_1 \\ & \left. - 128xyw^3 \cos^2 u_1 + 64x^2w^3 \sin 2u_1 - 256xz^2w^3 \sin u_1, 0 \right)\end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda

$$\Omega^2\mathbf{h}(P) = (64\sqrt{2}, -96\sqrt{2}, -64, 0)$$

ve

$$\mathbf{h}(P) \times \Omega\mathbf{h}(P) \times \Omega^2\mathbf{h}(P) = (0, 0, 0, -1536\sqrt{2})$$

olup, (6.21) den, arakesit eğrisinin ikinci ve birinci binormal vektörleri, sırasıyla,

$$\mathbf{b}_2(P) = \frac{(\mathbf{h}(P) \times \Omega\mathbf{h}(P) \times \Omega^2\mathbf{h}(P))}{\|\mathbf{h}(P) \times \Omega\mathbf{h}(P) \times \Omega^2\mathbf{h}(P)\|} = (0, 0, 0, -1)$$

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2 \times \mathbf{t} \times \mathbf{n} \Rightarrow \mathbf{b}_1(P) = \mathbf{b}_2(P) \times \mathbf{t}(P) \times \mathbf{n}(P) = \left(-\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{\sqrt{13}}{13}, -\frac{2\sqrt{26}}{13}, 0\right)$$

ve ikinci eğriliği de

$$\begin{aligned}k_2(P) &= \frac{\langle \Omega^2\mathbf{h}(P), \mathbf{b}_1(P) \rangle}{\lambda^3(P)k_1(P)} \\ &= \frac{\left\langle (64\sqrt{2}, -96\sqrt{2}, -64, 0), \left(-\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{\sqrt{13}}{13}, -\frac{2\sqrt{26}}{13}, 0\right) \right\rangle}{(2\sqrt{3})^3 \frac{2\sqrt{39}}{9}} = -\frac{6\sqrt{2}}{13}\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

$\Omega^3\mathbf{h} = (..., ..., ..., 0)$ olacağından arakesit eğrisinin üçüncü eğriliği

$$k_3(P) = \frac{\langle \Omega^3\mathbf{h}(P), \mathbf{b}_2(P) \rangle}{\lambda^4(P)k_1(P)k_2(P)} = \frac{\langle (..., ..., ..., 0), (0, 0, 0, -1) \rangle}{\lambda^4(P)k_1(P)k_2(P)} = 0 \Rightarrow k_3(P) = 0$$

bulunur.

SONUÇ VE ÖNERİLER

3-boyutlu ve 4-boyutlu Öklid uzaylarında enine arakesit eğrilerinin Frenet elemanlarını elde etmek için yeni ve kolay uygulanabilir metotlar verilmiştir. T. J. Willmore'un düşüncesi kullanılarak elde edilen bu metotlarda bazı operatörler tanımlanmış, böylece en az biri parametrik olarak verilen (hiper)yüzeylerin enine arakesit eğrisinin Frenet vektörleri ve eğrilikleri elde edilmiştir.

Bu çalışmada verilen yöntemler n – boyutlu Öklid uzayında $n-1$ tane hiperyüzeyin arakesit problemi için genelleştirilebilir.

KAYNAKLAR

- [1] do Carmo, M. P., (1976). Differential Geometry of Curves and Surface, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [2] Guggenheimer, H. W., (1963). Differential Geometry, Mc Graw-Hill Company, Inc. , New York, 1963.
- [3] Klingenberg, W., (1978). A Course in Differential Geometry, Springer-Verlag, New York Inc.
- [4] Kühnel, W., (2006). Differential Geometry: curves-surfaces-manifolds, 2nd ed. Student mathematical library vol. 16. A. M. S., Providence, RI
- [5] Patrikalakis, N. M. And Maekawa, T., (2002). Shape Interrogation for Computer Aided Design and Manufacturing, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- [6] Spivak M., (1999). A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, vol.4. Publish or Perish, 3rd Edition, Houston, TX.
- [7] Struik, D. J., (1950). Lectures on Classical Differential Geometry. Addison-Wesley, Reading, MA.
- [8] Hartmann, E., (1996). “ G^2 Interpolation and blending on surfaces”, The Visual Computer 12: 181-192.
- [9] Ye, X. ve Maekawa, T., (1999). “Differential geometry of intersection curves of two surfaces”, Computer Aided Design 16: 767-788.
- [10] Goldman, R., (2005). “Curvature formulas for implicit curves and surfaces”, Computer Aided Design 22: 632-658.
- [11] Aléssio, O., (2006). “Geometria Diferencial de Curvas de Intersecao Duas Superficies Implicitas”, TEMA 7 (2): 169-178.
- [12] Aléssio, O., (2009). “Differential Geometry of Intersection Curves in $\mathbb{R}^4$ of three implicit surfaces”, Computer Aided Design, 26 (4): 455-471.

- [13] Soliman, M. A., Abdel-All, N. H., Hassan, S. A. ve Badr, S. A. (2011). "Intersection curves of implicit and parametric surfaces in $\mathbb{R}^3$ ", Applied Mathematics, 2: 1019-1026.
- [14] Abdel-All, N. H., Badr, S. A., Soliman, M. A. ve Hassan, S. A. (2012). "Intersection curves of two implicit surfaces in $\mathbb{R}^3$ ", Journal of Mathematical and Computational Science, 2 (2): 152-171.
- [15] Abdel-All, N. H., Badr, S. A., Soliman, M. A. ve Hassan, S. A. (2012). "Intersection curves of hypersurfaces in $\mathbb{R}^4$ ", Computer Aided Geometric Design, 29 (2): 99-108.
- [16] Döldül, M., (2010). "On the intersection curve of three parametric hypersurfaces", Computer Aided Geometric Design, 27 (1): 118-127.
- [17] Willmore, T. J., (1959). An Introduction to Differential Geometry, Clarendon Press, Oxford.
- [18] Uyar Döldül, B. ve Döldül, M., (2012). "The extension of Willmore's method into 4-space", Mathematical Communications 17 (2): 423-431.
- [19] Hollasch, S. R., (1991). Four-space visualization of 4D objects, Master thesis, Arizona State University, Arizona.
- [20] Williams, M. Z. ve Stein, F. M., (1964). "A triple product of vectors in four-space", Math Mag. 37 (4): 230-235.
- [21] Gluck, H., (1966). "Higher curvatures of curves in Euclidean space", Amer. Math. Monthly, 73 (7): 699-704.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Özlem AKBABA
Doğum Tarihi ve Yeri : 06.03.1989 , Çatalca
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : ozlm.akbaba@ gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2011
Lise	Sayısal	İto Çatalca Çok Programlı Lisesi	2007