

T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ ve FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

PARETO II DAĞILIMININ SIRA İSTATİSTİKLERİNİN ŞARTLI
BEKLENEN DEĞERLERİ

Bilge EROL

EYLÜL 2019

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

PARETO II DAĞILIMININ SIRA İSTATİSTİKLERİNİN ŞARTLI
BEKLENEN DEĞERLERİ

Hazırlayan
Bilge EROL

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Fahrettin ÖZBEY

Jüri Üyeleri
Prof.Dr.Sinan ÇALIK
Doç.Dr.Hamit MİRİTAGİOĞLU
Dr. Öğr. Üyesi Fahrettin ÖZBEY

EYLÜL 2019

ONAY

Bilge EROL tarafından hazırlanan “**Pareto II Dağılımının Sıra İstatistiklerinin Şartlı Beklenen Değerleri**” adlı tez çalışması 10/09/2019 tarihinde yapılan sınavla aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / ~~oyçokluğu~~ ile Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Prof.Dr.Sinan ÇALIK

(Başkan)

Doç.Dr.Hamit MİRİTAGİOĞLU

(Üye)

Dr.Öğr. Üyesi Fahrettin ÖZBEY

(Danışman)

İmza



Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun 24./09/ 2019..gün ve 48./16 Sayılı kararı ile onaylanmıştır.



Doç. Dr. Fatih Ahmet ÇELİK

Enstitü Müdürü V.

BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI
ETİK BEYANI

Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre hazırlamış olduğum **“Pareto II Dağılımının Sıra İstatistiklerinin Şartlı Beklenen Değerleri”** adlı tezimin özgün bir çalışma olduğunu, tez hazırlanırken tüm aşamalarda bilimsel etik ilkelerine uygun davrandığımı, tez kapsamında sunulan tüm verileri bilimsel etik ilkelerine uygun elde ettiğimi, tezde faydalandığım tüm eserlere atıf yaptığımı ve kaynaklar kısmında bu eserleri gösterdiğimi beyan ederim. 10/09/2019.

Bilge EROL





ÖZET

PARETO II DAĞILIMININ SIRA İSTATİSTİKLERİNİN ŞARTLI BEKLENEN DEĞERLERİ

Bilge EROL

Yüksek Lisans Tezi

Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Fahrettin ÖZBEY

Eylül 2019, 43 sayfa

Bu tez çalışmasında, Pareto dağılımlarının türleri incelendi. Ayrıca Pareto dağılımlarının beklenen değerleri elde edildi. Sıra istatistiklerinin şartlı dağılımları incelendi. Bu şartlı sıra istatistiklerden faydalanılarak Pareto II dağılımının şartlı sıra istatistiklerinin dağılımları ve bu dağılımların beklenen değerleri elde edildi. Pareto II dağılımının parametrelerinin şartlı beklenen değerleri nasıl etkilediği araştırıldı.

Anahtar kelimeler: Pareto II Dağılımı, Sıra İstatistikleri, Şartlı Beklenen Değer.

ABSTRACT

THE CONDITIONAL EXPECTED VALUES OF ORDER STATISTICS OF PARETO II DISTRIBUTION

Bilge EROL

Master Thesis

Bitlis Eren University Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Statistics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Fahrettin ÖZBEY

September 2019, 43 pages

In this thesis, the types of Pareto distributions were examined. In addition, expected values of Pareto distributions were obtained. Conditional distributions of order statistics were examined. By using these conditional order statistics, distributions of conditional order statistics of Pareto II distribution and expected values of these distributions were obtained. How the parameters of Pareto II distribution affect conditional expected values, was investigated.

Keywords: Pareto II Distribution, Order Statistics, Conditional Expected Value.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın gerçekleştirilmesinde, değerli bilgilerini benimle paylaşan, kendisine ne zaman danışsam bana kıymetli zamanını ayırıp sabır ve büyük ilgiyle bana faydalı olabilmek için elinden gelenden fazlasını sunan, güler yüzünü ve samimiyetini benden esirgemeyen ve gelecekteki mesleki hayatımda da bana verdiği değerli bilgilerden faydalanacağımı düşündüğüm kıymetli ve danışman hoca statüsünü hakkıyla yerine getiren Sayın Dr. Öğr. Üyesi Fahrettin ÖZBEY’e sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım. Yine lisans ve yüksek lisansım boyunca bana yol gösteren, değerli bilgilerini benimle paylaşan, her türlü yardımı ve desteği esirgemeyen değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Sinan ÇALIK’a ve Doç. Dr. Mehmet GÜRCAN’a teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Benden hiçbir zaman maddi, manevi desteği esirgemeyen, bu hayattaki en büyük şansım olan, her şeyim, canım annem ve baba başta olmak üzere, tüm değerli aileme bütün kalbimle teşekkür ederim. Son olarak, bu süreçte ve her zaman, her konu da yanımda olan değerli arkadaşım Seval ŞAHİN’e teşekkür ederim.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında, Pareto II dağılımının minimum sıra istatistiklerinin bazı şartlı beklenen değerleri elde edildi. Pareto II dağılımının maksimum sıra istatistiklerinin bazı şartlı beklenen değerleri elde edildi. Pareto II dağılımının sıra istatistiklerinin bu şartlı beklenen değerler sırasıyla n , λ , ν ve x 'den nasıl etkilendiği incelendi.



İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÖNSÖZ	iv
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	v
ÇİZELGELER DİZİNİ	vi
SİMGELER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. MATERYAL VE YÖNTEM	2
2.1. Temel Tanım ve Teoremler	2
2.2. Sıra İstatistiklerinin Dağılımları	6
2.3. Pareto Dağılımları	8
2.3.1. Pareto Dağılımının Diğer Türleri	15
3. BULGULAR VE TARTIŞMA	18
3.1. Pareto Dağılımları ve Momentleri	18
3.2. Pareto II Dağılımının Sıra İstatistikleri	22
3.3. Pareto II Dağılımının Sıra İstatistiklerinin Şartlı Beklenen Değerleri	23
4. SONUÇ	26
5. KAYNAKLAR	38
6. EKLER	42
EK 1. R Programı Kodları	42
ÖZGEÇMİŞ	43

ÇİZELGELER DİZİNİ

ÇİZELGE

Sayfa

4.1. $x=2$ için Pareto II dağılımının minimum sıra istatistiklerinin bazı şartlı beklenen değerleri	27
4.2. $x=2$ için Pareto II dağılımının maksimum sıra istatistiklerinin bazı şartlı beklenen değerleri	29
4.3. $\lambda=2$, $v=4$ ve $x=5$ için Pareto II dağılımının bazı sıra istatistiklerinin şartlı beklenen değerleri	30
4.4. $n=100$, $v=4$ ve $x=5$ için Pareto II dağılımının bazı sıra istatistiklerinin şartlı beklenen değerleri	32
4.5. $n=100$ $\lambda=2$ ve $x=5$ için Pareto II dağılımının bazı sıra istatistiklerinin şartlı beklenen değerleri	34
4.6. $n=100$ $\lambda=2$ ve $v=4$ için Pareto II dağılımının bazı sıra istatistiklerinin şartlı beklenen değerleri	36

SİMGELER DİZİNİ

$f_{r:n}$	Sıra istatistiklerinin olasılık yoğunluk fonksiyonu
$F_{r:n}$	Sıra istatistiklerinin dağılım fonksiyonu
$f_{X_{s:n} \setminus X_{r:n}=x}(y)$	Sıra istatistiklerinin şartlı olasılık yoğunluk fonksiyonu
$E_{X_{s:n} \setminus X_{r:n}=x}(y)$	Sıra istatistiklerinin şartlı beklenen değeri



1. GİRİŞ

Sıra istatistikleri ilk olarak gökbilimciler tarafından yer tahmini yapmak için kullanıldı [1]. On dokuzuncu yüzyılın başlarında Laplace [2] ortancayı belirlemek için sıra istatistiklerini kullanmıştır [1]. Sıra istatistikleri ortanca, simetrik kesilmiş ortalama ve orta mesafe tahmini gibi hesaplamalarda kullanılmasına rağmen ilk olarak 1942’de Wilks [3] tarafından tanımlandı [1]. Sıra istatistikleri güçlü yer tahminlerinde (*robust location estimates*), aykırı değerlerin belirlenmesinde (*detection of outliers*), sansürlü örneklemede, (*censored sampling*), büyük periyotlu beklemlerde (*waiting for big one*), malzemelerin dayanıklılığını ölçmede (*strength of material*), güvenilirlik teorisinde (*reliability theory*), kalite kontrolde (*quality control*), en iyiyi seçmede (*selecting the best*), eşitsizliklerin ölçümünde (*inequality measurement*) ve uyum iyiliğini belirlemede (*goodness of fit*) kullanılmaktadır [4].

Sıra istatistikleri başlıca araştırma alanlarından biri olasılık ve dağılım fonksiyonlarının ifade edilmesi ve bu fonksiyonlardan yararlanılarak beklenen değerlerin elde edilmesidir. Bu bağlamda sıra istatistiklerinin çeşitli dağılımları, beklenen değerleri ve bunlar arasındaki ilişkiler birçok çalışmaya konu olmuştur [5-9].

Pareto I dağılımının sıra istatistikleri, beklenen değerleri ve bunların sayısal bazı değerleri hesaplandı [10]. Pareto I dağılımının sıra istatistikleri, tam momentleri elde edildi [11]. Pareto dağılımlarının minimum sıra istatistikleri karşılaştırıldı [12]. Pareto I dağılımının geliştirilmiş sıra istatistikleri elde edildi [13].

Bu tez çalışmasında Pareto II dağılımının sıra istatistikleri ve şartlı sıra istatistikleri ve bu sıra istatistiklerin beklenen değerleri elde edildi.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1.

Sonlu veya sayılabilir bir örnek uzayı S olsun. Bu örnek uzayındaki her elemanı reel sayılara eşleyen fonksiyona kesikli rassal değişken denir. Bir rassal değişken herhangi bir aralıktaki bütün değerleri alabiliyorsa bu rassal değişkene, sürekli rassal değişken denir [14].

Tanım 2.1.2.

S örnek uzayı üzerinde tanımlı iki olay A ve B olsun. Bu olaylar,

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

şartını sağlıyorsa; A ve B olayları bağımsız olaylardır denir [15].

Tanım 2.1.3.

X kesikli bir rassal değişken ise, X 'in alabildiği her x değeri için

$$f(x) = P(X = x)$$

ile ifade edilen fonksiyona x 'in olasılık fonksiyonu denir [16].

Teorem 2.1.1.

Bir fonksiyon, ancak ve ancak aşağıdaki koşulları sağlarsa; kesikli bir X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu işlevini görebilir [16].

$$\forall x \in X \text{ için } f(x) \geq 0$$

$$\sum_{\forall x \in X} f(x) = 1$$

Tanım 2.1.4.

X kesikli bir rassal değişkense, $-\infty < x < \infty$ için

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t),$$

fonksiyonuna x 'in dağılım fonksiyonu denir [16].

Tanım 2.1.5.

X , sürekli bir rassal değişken olsun. $a, b \in R$ ve $a \leq b$ olmak üzere

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

ifadesindeki $f(x)$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa; sürekli bir X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu denir [16].

$$f(x) \geq 0 \quad -\infty < x < \infty \text{ için}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Tanım 2.1.6.

X sürekli bir rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(t)$ olmak üzere,

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

fonksiyonuna X 'in dağılım fonksiyonu denir [16].

Teorem 2.1.2.

X sürekli rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ ve dağılım fonksiyonu $F(x)$ ile gösterilsin $a, b \in R$ ve $a \leq b$ olmak üzere,

$$P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)$$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$$

şeklinde elde edilebilir [16].

Tanım 2.1.7.

X ve Y kesikli rassal değişkenler olsun. X ile Y 'nin aldığı her (x,y) değer çifti için,

$$f(x, y) = P(X = x, Y = y)$$

fonksiyonu tanımlı ve aşağıdaki şartları sağlıyorsa $f(x,y)$ fonksiyonuna X ile Y kesikli rassal değişkenlerinin ortak olasılık fonksiyonu denir [15].

$$\forall x \in X \text{ ve } \forall y \in Y \text{ için } f(x, y) \geq 0$$

$$\sum_x \sum_y f(x, y) = 1$$

Tanım 2.1.8.

X ve Y kesikli rassal değişkenlerinin ortak olasılık fonksiyonu $f(x, y)$ olmak üzere

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{s \leq x} \sum_{t \leq y} f(s, t)$$

fonksiyonuna X ile Y 'nin ortak dağılım fonksiyonu denir [16].

Tanım 2.1.9.

X ve Y sürekli rassal değişkenler olsun. $a_x \leq X \leq b_x$ ve $a_y \leq Y \leq b_y$ sınırlarıyla oluşan bölge A bölgesi ile gösterilsin. X ve Y rassal değişkenlerinin A bölgesinde olma olasılığı

$$P[(X, Y) \in A] = \iint_A f(x, y) dx dy$$

şeklinde tanımlanır ve $f(x, y)$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa X ile Y sürekli rassal değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu denir [16].

$$\forall x, y \text{ için } f(x, y) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

Tanım 2.1.10.

X ve Y sürekli rassal değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(s, t)$ olmak üzere

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(s, t) ds dt$$

fonksiyonuna X ile Y 'nin ortak dağılım fonksiyonu denir [16].

Tanım 2.1.11.

X ile Y rassal değişkenler olsun. X 'in olasılık (yoğunluk) fonksiyonu $f(x)$, Y 'nin olasılık (yoğunluk) fonksiyonu $f(y)$ ve X ile Y 'nin ortak olasılık (yoğunluk) fonksiyonu $f(x, y)$ olmak üzere;

$$f(xy) = \frac{f(x, y)}{f(y)}, \quad f(y) \neq 0$$

şeklinde tanımlı fonksiyonu X 'in koşullu olasılık (yoğunluk) fonksiyonu denir [16].

Tanım 2.1.12.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ rassal değişkenlerinin meydana gelme sırası değil, büyüklüklerinin sırası göz önüne alınırsa, bu rassal değişkenlerin sıralı istatistikleri,

$$X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$$

olarak ifade edilir.

$X_{r:n}$ rassal değişkenine r -inci sıra istatistiği ve $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ rassal vektörüne de sıra istatistikleri denilir. $X_{1:n}$, örneğin minimumu ve $X_{n:n}$, örneğin maksimumudur. Bundan dolayı ,

$$X_{1:n} = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

ve

$$X_{n:n} = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

yazılabilir [4].

Tanım 2.1.13.

X rassal değişkeninin olasılık (yoğunluk) fonksiyonu $f(x)$ olsun. $\theta \in R$ ve r pozitif tam sayı olmak üzere,

$$E[(x-\theta)^r] = \begin{cases} \sum_x (x-\theta)^r f(x), & \text{Kesikli rassal değişkenler için} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x-\theta)^r f(x) dx, & \text{Sürekli rassal değişkenler için} \end{cases}$$

ifadesine X 'in θ 'ya göre r -inci momenti denir [15]. $\theta = 0$ için sıfıra göre momentler elde edilir. $\theta = \mu$ alınırsa ortalamaya göre momentler bulunur.

2.2.Sıra İstatistiklerinin Dağılımları

$X_1, X_2, \dots, X_n$ sürekli rassal değişkenleri kendi aralarında bağımsız olsunlar. Ayrıca bu rassal değişkenler aynı dağılımlı olsun. Yani, bu rassal değişkenlerin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$, dağılım fonksiyonu $F(x)$ 'dir.

$X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ sıra istatistiklerinin r -incisi $X_{r:n}$ 'dir. $X_{r:n}$ sıra istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$\begin{aligned} f_{r:n}(x) &= \lim_{\delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{P(x < X_{r:n} \leq x + \delta x)}{\delta x} \right\} \\ &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \cdot [F(x)]^{r-1} f(x) [1-F(x)]^{n-r}, -\infty < x < \infty \end{aligned} \quad (2.1)$$

şeklinde ifade edilir [4]. Dağılım fonksiyonu ise

$$\begin{aligned}
F_{r:n}(x) &= P(X_{r:n} \leq x) \\
&= P(X_1, X_2 \dots X_n \text{ 'lerden en az } r \text{ tanesi, } x \text{ 'den küçüktür veya eşittir}) \\
&= \sum_{i=r}^n P(X_1, X_2 \dots X_n \text{ 'lerden tam } i \text{ tanesi, } x \text{ 'den küçüktür veya eşittir}) \\
&= \sum_{i=r}^n \binom{n}{i} [F(x)]^i [1-F(x)]^{n-i}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

şeklindedir [17].

$1 \leq r < s \leq n$ ve $-\infty < X_r < X_s < \infty$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
f_{r,s:n}(x_r, x_s) &= \lim_{\delta x_r \rightarrow 0, \delta x_s \rightarrow 0} \left(\frac{P(x_r < X_{r:n} \leq x_r + \delta x_r, x_s < X_{s:n} < x_s + \delta x_s)}{\delta x_r \delta x_s} \right) \\
&= \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} \cdot [F(x_r)]^{r-1} \cdot f(x_r) [F(x_s) - F(x_r)]^{s-r-1} \cdot f(x_s) \cdot [1-F(x_s)]^{n-s}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

ifadesine $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$ sıra istatistiklerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu denir [17].

Teorem 2.2.1.

$X_{r:n}$ r -inci sıra istatistiğinin x 'e eşit olma şartı altında $X_{s:n}$ s -inci sıra istatistiği şartlı olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{X_{s:n} | X_{r:n}=x}(y) = \frac{(n-r)!}{(s-1-r)!(n-s)!} \cdot \left[\frac{F(y) - F(x)}{1 - F(x)} \right]^{s-1-r} \cdot \frac{f(y)}{1 - F(x)} \cdot \left[\frac{1 - F(y)}{1 - F(x)} \right]^{n-s}$$

şeklindedir. Burada $x < y$ ve $r < s$ 'dir [17].

İspat

Şartlı dağılımın tanımından,

$$f_{X_{s:n} | X_{r:n}=x}(y) = \frac{f_{r,s:n}(x, y)}{f_{r:n}(x)}$$

yazılabilir. Bu son eşitlikte (2.1) ve (2.3) eşitlikleri kullanılırsa,

$$f_{X_{s:n} \setminus X_{r:n}=x}(y) = \frac{\frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-5)!} \cdot [F(x)]^{r-1} f(x) [F(y)-F(x)]^{s-r-1} f(y) [1-F(y)]^{n-s}}{\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \cdot [F(x)]^{r-1} f(x) [1-F(x)]^{n-r}}$$

ifadesi elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa $X_{r:n}$ r -inci sıra istatistiğinin x 'e eşit olma şartı altında $X_{s:n}$ s -inci sıra istatistiği şartlı olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{X_{s:n} \setminus X_{r:n}=x}(y) = \frac{(n-r)!}{(s-1-r)!(n-s)!} \cdot \left[\frac{F(y)-F(x)}{1-F(x)} \right]^{s-1-r} \cdot \frac{f(y)}{1-F(x)} \cdot \left[\frac{1-F(y)}{1-F(x)} \right]^{n-s}$$

şeklinde elde edilir.

2.3.Pareto Dağılımları

Bu alt bölümde, Pareto dağılımlarının bir hiyerarşisi sunulmaktadır. İlk olarak klasik Pareto dağılımı ile başlanıp yer, ölçek ve şekil ile ilgili parametrelerin tanıtımıyla, Pareto IV ailesi olarak adlandırılan bir aile ile devam edilmektedir.

Genelleştirilmiş Pareto modellerinin hiyerarşisindeki başlangıç noktası, ParetoI dağılımı olarak adlandırılan klasik Pareto dağılımıdır. Hayatta kalma fonksiyonu aşağıdaki şekildedir.

$$\bar{F}(x) = (x/\sigma)^{-\alpha}, x > \sigma \quad (2.4)$$

Burada σ , ölçek parametresi ve α şekil parametresi pozitifdir. Dağılımın sonlu ortalaması olsun diye $\alpha > 1$ varsayımı yapılmaktadır. Eğer bir X rassal değişkeninin hayatta kalma fonksiyonu olarak (2.4) denklemini varsa,

$$x \sim P(1)(\sigma, \alpha)$$

olarak yazılır.

Literatürde çoğu yerde, standart Pareto dağılımının ek bir konum parametresine sahip olmasına izin verilmektedir. Sonuç olarak Pareto II dağılımı olarak adlandırılmaktadır. Uygun bir parametreleme aşağıdaki gibi sağlanır.

$$\bar{F}(x) = \left[1 + \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\alpha}, \quad x > \mu \quad (2.5)$$

Burada μ , konum parametresidir ve reel sayıdır. σ ve α ise pozitif reel sayılardır. Çoğu uygulamada μ negatif değildir, ancak negatif olsa bile yapıyı verilirse karmaşıktırmamaktadır. Bu açıdan, Schutz [18], olumsuz gelirlerin gerçek dünya fenomeni olduğuna ve görmezden gelinemeyeceğini belirtmiştir. Bu rassal değişken X 'in hayatta kalma fonksiyonu olarak (2.5) varsa, $x \sim P(II)(\mu, \sigma, \alpha)$ olarak yazılır.

Burada da, sonlu ilk momente sahip olmak için parametrenin α değeri genellikle 1'den büyük olduğu varsayılmaktadır. α şekil parametresi olarak adlandırılmaktadır. Bazen bir eşitsizlik indeksi olarak yorumlanabilmektedir. Genelleştirilmiş Pareto dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x; \sigma, k) = \frac{1}{\sigma} \left(1 - \frac{kx}{\sigma} \right)^{(1-k)/k} \quad (x > 0, (kx)/\sigma < 1) \quad (2.6)$$

şeklindedir. Burada $\sigma > 0$ ve $-\infty < k < \infty$ olur. $k=0$ 'a karşılık gelen yoğunluk, (2.6)'de $k \uparrow 0$ olarak limiti alınarak elde edilmektedir. Bu model (2.6), üç çeşit yoğunluk içerir. $k < 0$ olduğunda, bir Pareto II yoğunluğu verir. Yoğunluğu ($\mu = 0$ ile), $k=0$ olduğunda üstel bir yoğunluk verirken, $k > 0$ için, ölçeklendirilmiş bir Beta dağılımına (ilk veya standart türden) karşılık gelmektedir.

Pareto II dağılımının kesilmiş versiyonları simülasyon bağlamında uygulama bulmuş ve makul gelir dağılımı modelleri olarak önerilmiştir [19]. Bu dağılımların formülü,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq \mu \\ \frac{1 - \left(1 + \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^\alpha}{1 - \left(1 + \frac{\tau - \mu}{\sigma}\right)^{-\alpha}} & \mu < X < \tau, \\ 1 & x \geq \tau \end{cases} \quad (2.7)$$

şeklindedir. Benzer şekilde Pareto III dağılımının hayatta kalma fonksiyonu

$$\bar{F}(x) = \left[1 + \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{1/\gamma} \right]^{-1}, \quad x > \mu, \quad (2.8)$$

şeklinde ifade edilir. Burada μ gerçek olduğunda, σ pozitif ve γ pozitiftir. γ ifadesi eşitsizlik parametresi olarak adlandırılır. Eğer $\mu = 0$ ve $\gamma \leq 1$ ise, γ eşitsizlik parametresi gini indeksi olarak belirlenmektedir. Eğer X (2.8) hayatta kalma fonksiyonuna sahipse, $x \sim P(III)(\mu, \sigma, \gamma)$ olarak yazılmaktadır. Yarı-Pareto dağılımı olarak adlandırılan Pareto III dağılımı ile Pillai [20] tarafından tanıtılan dağılıma yakın bir ilişki göstermektedir. Pillai dağılımının hayatta kalma fonksiyonu,

$$\bar{F}(x) = [1 + \psi(x)]^{-1}, \quad x > 0 \quad (2.9)$$

şeklindedir. Burada ψ fonksiyonu fonksiyonel denklemi ifade etmektedir.

$$\bar{F}(x) = [1 + \psi(x)]^{-1}, \quad x > 0 \quad (2.10)$$

$p \in (0,1)$ ve $\alpha > 0$ alınırsa $\psi(x) = x^{1/\gamma}$ ile $\alpha = 1/\gamma$ $P(III)(0,1,\gamma)$ dağılımı elde edilir. Daha fazla genelleme yapabiliriz. Hem bir şekil hem de bir eşitsizlik parametresi getirilerek, Pareto(IV) ailesine ulaşılır. Pareto(IV) dağılımının hayatta kalma fonksiyonu,

$$\bar{F}(x) = \left[1 + \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{1/\gamma} \right]^{-\alpha}, \quad x > \mu \quad (2.11)$$

şeklindedir. Burada μ (konum parametresi) reel sayıdır, σ (ölçek parametresi) pozitif, γ (eşitsizlik parametresi) pozitif ve α (şekil parametresi) pozitifdir. Pareto (IV) ailesi, daha uzmanlaşmış üç aile için dağılım sonuçlarını hesaplamak için uygun bir yöntem sunmaktadır. Bunlar Pareto (IV) ailesinin özel durumları olarak tanımlanabilir:

$$\begin{aligned} P(\text{I})(\sigma, \alpha) &= P(\text{IV})(\sigma, \sigma, 1, \alpha), \\ P(\text{II})(\mu, \sigma, \alpha) &= P(\text{IV})(\mu, \sigma, 1, \alpha), \\ P(\text{III})(\mu, \sigma, \gamma) &= P(\text{IV})(\mu, \sigma, \gamma, 1) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Feller [21] Pareto dağılımını biraz farklı bir şekilde tanımlamıştır. Y rassal değişken, γ_1 ve γ_2 parametrelerine sahip bir Beta dağılımı olsun. Yani,

$$f_Y(y) = y^{\gamma_1-1} (1-y)^{\gamma_2-1} / B(\gamma_1, \gamma_2), \quad 0 < y < 1, \quad (2.13)$$

şeklinde tanımlansın, ayrıca burada $U=Y-1$ olarak tanımlanır. U , Felleri'in Pareto dağılımı olarak adlandırıldığı dağılımdır. Böyle bir rastlantısal değişkenin gücünün lineer bir işlevini düşünerek, Feller-Pareto ailesi olarak adlandırılan çok genel bir aileye ulaşılır. Daha doğrusu $\gamma \sim \text{Beta}(\gamma_1, \gamma_2)$, μ reel sayı, $\sigma > 0$ ve $\gamma > 0$ olmak üzere

$$W = \mu + \sigma(\gamma^{-1} - 1)^\gamma, \quad (2.14)$$

şeklinde tanımlanır. Burada W bir Feller-Pareto dağılımına sahiptir ve $W \sim FP(\mu, \sigma, \gamma, \gamma_1, \gamma_2)$ yazıla bilinir. Bu ailenin Pareto (IV) ailesinin (ve dolayısıyla diğer Pareto ailelerinin) bir genellemesini nasıl temsil ettiğini görmek için, hayatta kalma işlevini kapalı biçimde elde edilmeye çalışılırsa ve bu amaçla $\gamma \sim \text{Beta}(\gamma_1, \gamma_2)$ ve $U = \gamma^{-1} - 1$, alındığında U ikinci türden bir Beta dağılımına sahiptir ve U 'nun yoğunluk fonksiyonu

$$f_U(u) = u^{\gamma_2-1} (1+u)^{-\gamma_1-\gamma_2} / B(\gamma_1, \gamma_2), \quad u > 0 \quad (2.15)$$

şeklindedir. Eğer $W(2.14)$ 'de tanımladığı gibi alınırsa, o zaman

$$P(W > w) = P(\mu + \sigma U^\gamma > w) = \left(U > \left(\frac{w - \mu}{\sigma} \right)^{1/\gamma} \right) \quad (2.16)$$

ifadesi elde edilir. Bu nedenle, U 'nun hayatta kalma fonksiyonu için kapalı bir forma ihtiyaç duyulur. Bu γ_1 veya γ_2 'nin 1 olması durumunda en kolay olacaktır. $\gamma_2=1$ olduğu durumu ele alınırsa, böylece,

$$\bar{F}_U(\gamma) = (1 + \gamma)^{-\gamma_1}, \quad \gamma > 0 \quad (2.17)$$

elde edilir. (2.16) ve (2.17) eşitlikleri düzenlenirse;

$$P(W > w) = \left[1 + \left(\frac{w - \mu}{\sigma} \right)^{1/\gamma} \right]^{-\gamma_1} \quad (2.18)$$

ifadesi elde edilir. (2.11)'e baktığımızda, Pareto(IV) dağılımlarının , $\gamma_2=1$ ile Feller-Pareto dağılımları ile özdeş olduğunu görüyoruz. Yani;

$$P(IV)(\mu, \sigma, \gamma, \alpha) = FP(\mu, \sigma, \gamma, \alpha, 1) \quad (2.19)$$

elde edilir. Ayrıca $\gamma_1 = 1$ olduğunda ise,

$$P(W > w) = 1 - \left[1 + \left(\frac{w - \mu}{\sigma} \right)^{-1/\gamma} \right]^{-\gamma_2} \quad (2.20)$$

elde edilir. Feller-Pareto familyasının, davranışları üst kuyruğunda Paretian olmayan belirgin dağılımları (2.20) içeriği görülebilir.

Hurlimann [22] genelleştirilmiş bir dönüşüm şeması kullanarak belirli genel Pareto modelleri geliştirilebilir. Bir boyutta, bu tür modeller

$$X = h(\mu + \sigma g(Y)) \quad (2.21)$$

şeklinde ifade edilir. Burada g ve h işlevleri iyi tanımlanmış ve Y belirli bir dağılıma sahiptir. Özellikle $Y, h(u) = u$ ve $g(u) = e^{cu}$ için üstel dağılımı seçimi Pareto (II) modeline yol açar; aşağıdaki denklemi (2.29) aşağıda notasyonun değiştirdiği göz önüne alınmalıdır. g , h ve Y dağılımı için alternatif seçenekler ilginç rakip modelleri ortaya koyar. Hurlimann [22]'de türediği yaygın Pareto dağılımlarının genel Feller-Pareto modelinin özel durumları olduğu gösterilmiştir.(2.14) kullanılarak tanımlanan genel Feller –Pareto dağılımı ,

$$F_w(w) = \frac{\left(\frac{w-\mu}{\sigma}\right)^{(\gamma_2/\gamma)-1} \left[1 + \left(\frac{w-\mu}{\sigma}\right)^{1/\gamma}\right]^{-\gamma_1-\gamma_2}}{[\gamma\sigma B(\gamma_1, \gamma_2)]} \quad w > \mu \quad (2.22)$$

şeklindedir.

Kalbfleisch ve Prentice [23] bu yoğunluğu ($\mu=0$) genelleştirilmiş F yoğunluğu olarak adlandırmışlardır. Karşılık gelen hayatta kalma fonksiyonu,

$$P(W > w) = P\left(Y < \left[1 + \left(\frac{w-\mu}{\sigma}\right)^{1/\gamma}\right]^{-1}\right) \quad (2.23)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada $Y \sim Beta(\gamma_1, \gamma_2)$. Birçok hesaplamada, (2.14) ile doğrudan çalışmak tercih edilmektedir. Pareto (IV) dağılımları $\gamma_2=1$ olduğunda duruma karşılık gelmektedir. Ayrıca $\gamma_1=\gamma_2=1$ olduğunda Pareto (III) dağılımları elde edilir.

Feller-Pareto dağılımının alternatif bir sunumu mümkündür. Bir X rassal değişken, aşağıdaki formda ise , $FP(\mu, \sigma, \gamma, \gamma_1, \gamma_2)$ dağılımına sahiptir.

$$X = \mu + \sigma(Z_2 / Z_1)^\gamma \quad (2.24)$$

Burada Z_i 'nin birim ölçek parametresi $Z_i \sim \Gamma(\gamma_i, 1)$, $i = 1, 2$ olan bağımsız gamma rassal değişkenleridir. (2.24) ifadesi $\mu = 0$ olduğunda Feller-Pareto sınıfı elde edilir.

$$X \sim FP(0, \sigma, \gamma, \gamma_1, \gamma_2) = X^{-1} \sim FP(0, \sigma^{-1}, \gamma, \gamma_2, \gamma_1) \quad (2.25)$$

Zandonatti [24] tarafından genelleştirilmiş bir Feller-Pareto dağılımı tanımlanmıştır. Model (2.14) ifadesine bir ek parametre içerir.

μ için , $\sigma > 0$, $\delta > 0$ ve $\gamma > 0$ olmak üzere ve $\gamma \sim Beta(\gamma_1, \gamma_2)$ alınırsa

$$V = \mu + \sigma(\gamma^{-\delta} - 1)^\gamma \quad (2.26)$$

ifadesi tanımlanır. Böyle bir rassal değişken V 'nin genelleştirilmiş bir Feller-Pareto dağılımına sahip olduğu söylenir ve $V \sim GFP(\mu, \sigma, \delta, \gamma, \gamma_1, \gamma_2)$ yazıla bilinir.

Genelleşmiş Pareto ailelerinin daha zengin aileleri için, (2.24) eşitliğinin

$$X = (\mu_1 + \sigma_1 Z_1^{\gamma_1}) / (\mu_2 + \sigma_2 Z_2^{\gamma_2}) \quad (2.27)$$

şeklinde alınması yanlış olmaz ve burada Z_i 'ler bağımsız gamma değişkenleridir ($Z_i \sim \Gamma(\lambda_i, 1), i = 1, 2$). Böylece son derece esnek sekiz parametrelili bir aile elde edilir.

Genelleştirilmiş Pareto dağılımlarının tamamı karşılaştırıldı. Hemen hemen hepsi Feller-Pareto ailesinde yer alır ve dağılım sonuçların elde edilemeyen bir türevlenmesi mümkün olur.

Feller-Pareto'nun genelleştirilmiş versiyonları ve (2.27) tanımlanmıştır. Pareto (I) dağılımına ilişkin istatistiksel teoremin büyük bir kısmı, yanlış gösterimden türetilmiştir (veya elde edilmiş olabilir). $P(I)(\sigma, \alpha)$ dağılımına sahip X tesadüfi değişkeni

$$X = \sigma e^{v/\alpha} \quad (2.28)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $V \sim \Gamma(1, 1)$ (bir standart üstel rassal değişken) $P(II)$ 'nin üstel bir rassal değişken açısından benzer bir gösterimi mümkündür. Yani;

$$X = \mu + \sigma(e^{v/\alpha} - 1) \quad (2.29)$$

şeklindedir.

Maguire vd. [25] tarafından bilinen Pareto(II) dağılımının ikinci önemli temsili, üstellerin bir karışımıdır.

Üstel dağılımların bir gamma karışımı olarak Pareto (II) dağılımının bu temsili doğuştan ve hayatta kalma bağlamlarında doğal olarak ortaya çıkmaktadır. Keiding vd. [26].

Pareto (III) dağılımı Fisk [27, 28] tarafından $label5sech^2$ dağılımı ile ilişkilendirilmiş. Ayrıca Lojistik dağılımı ile yakından ilgili olduğu ortaya konulmuştur. Rastgele bir değişken X 'in bir lojistik (μ, σ) dağılımına sahip olsun. O zaman X 'in dağılım fonksiyonu,

$$F_X(x) = \left[1 + e^{-(x-\mu)/\sigma} \right]^{-1}, \quad -\infty < x < \infty$$

şeklindedir ve $X \sim L(\mu, \sigma)$ yazıla bilinir. Ayrıca aşağıdaki ifadeyi doğrulamak zor değil.

$$X \sim L(\mu, \sigma) \Leftrightarrow e^x \sim P(III)(0, e^\mu, \sigma) \quad (2.30)$$

son ifadenin bir sonucu olarak, Pareto(III) dağılımına bazen log-lojistik dağılımı denir.

Pareto (IV) dağılımı, Weibull dağılımlarının bir karışımı olarak temsil edilir.

$$P(X > x \mid Z = z) e^{-z[(x-\mu)/\sigma]^{1/\gamma}} \quad x > \mu,$$

yukarıdaki ifade $Z \sim \Gamma(\alpha, 1)$ ve $X \sim P(IV)(\mu, \sigma, \gamma, \alpha)$ alınırsa Weibull dağılımı elde edilir. Bu bağlamda, Pareto (IV) dağılımı literatürde ilk olarak mühendislik alanında görülmüştür [29].

2.3.1. Pareto Dağılımlarının Diğer Türleri

Gamma-Pareto I:

Gamma-Pareto I dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha (\alpha) c^\alpha} \left(\frac{\theta}{x} \right)^{\frac{1}{c}} \left(\log \left(\frac{x}{\theta} \right) \right)^{\alpha-1}, \quad x, \theta, c, \alpha > 0$$

şeklinde ifade edilir [30].

Gamma-Pareto II

Gamma-Pareto II dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{\theta^{\frac{1}{c}}}{\Gamma(\alpha)c^\alpha} (x+\theta)^{-1-(1/c)} \left[\log \left(1 + \frac{x}{\theta} \right) \right]^{\alpha-1}, x > 0$$

şeklinde ifade edilebilir [30].

Gamma-Pareto III

Gamma-Pareto III dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir [30].

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \left(b + \frac{\alpha}{x+\theta} \right) \left[\frac{\theta e^{-bx}}{(x+\theta)^\alpha} \right]^{1/\beta} \left[-\log \left(\frac{\theta e^{-bx}}{(x+\theta)^\alpha} \right) \right]^{\alpha-1}, x > 0$$

Gamma-Pareto IV

Gamma-Pareto IV dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir [30, 31].

$$f(x) = \frac{1}{\gamma \sigma \Gamma(\alpha) c^\alpha} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^{-1-1/c} \left(1 + \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^{1/\gamma} \right)^{-1-1/c} \left[\log \left(1 + \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^{1/\gamma} \right) \right]^{\alpha-1}, x > 0$$

Weibull-Pareto

Weibull-Pareto dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir [32].

$$f(x) = \frac{kc}{yx} \left\{ \frac{k}{y} \log \left(\frac{x}{\theta} \right) \right\}^{c-1} \exp \left\{ - \left(\frac{k}{y} \log \left(\frac{x}{\theta} \right) \right)^c \right\}, x > 0,$$

Beta-Pareto I

Beta Pareto I dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir [33].

$$f(x) = \frac{k}{\theta B(\alpha, \beta)} \left\{ 1 - \left(\frac{x}{\theta} \right)^{-k} \right\}^{\alpha-1} \left(\frac{x}{\theta} \right)^{-k\beta-1} x \geq \theta, \quad \alpha, \beta, \theta, k > 0$$

Beta-Pareto II

Beta Pareto II dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir [33].

$$f(x) = \frac{a/C}{B(\alpha, \beta)} \left\{ 1 - \left(1 + \frac{x}{C} \right)^{-\alpha} \right\}^{\alpha-1} \left(1 + \frac{x}{C} \right)^{-\alpha\beta-1}$$

Beta-Pareto III

Beta Pareto III dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir [33].

$$f(x) = \frac{b + a/(x+C)}{B(\alpha, \beta)} \left\{ 1 - \frac{Ce^{-bx}}{(x+C)^a} \right\}^{\alpha-1} \left(\frac{Ce^{-bx}}{(x+C)^a} \right)^{\beta}$$

Beta-Pareto IV

Beta-Pareto IV dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir [33].

$$f(x) = \frac{\xi}{\sigma\lambda B(\alpha, \beta)} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^{1/\lambda-1} \left\{ 1 - \left[1 + \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^{1/\lambda} \right]^{-\xi} \right\}^{\alpha-1} \left\{ 1 + \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^{1/\lambda} \right\}^{-\xi\beta-1}$$

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

3.1. Pareto Dağılımları ve Momentleri

Pareto I dağılımlarının dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonu sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$F(x) = 1 - \left(\frac{x}{\lambda} \right)^{-v}$$

$$f(x) = v\lambda^v x^{-v-1}, \quad x \geq \lambda, v > 0$$

Pareto I dağılımının sıfıra göre r -inci momenti;

$$E(X^r) = \frac{v\lambda^r}{v-r}$$

şeklindedir.

Bu son eşitlikle $r=1$ yazılırsa Pareto I dağılımının ortalaması;

$$\mu = \frac{v\lambda}{v-1}$$

şeklinde elde edilir.

Pareto I dağılımının ortalamaya göre r -inci momenti;

$$E(X - \mu)^r = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} (-1)^{r-i} \left(\frac{v\lambda}{v-1} \right)^{r-i} \frac{v\lambda^i}{(v-i)} \quad (3.1)$$

şeklindedir. Bu son eşitlikte $r=2$ yazılırsa Pareto I dağılımının varyansı;

$$Var(X) = \frac{v\lambda^2}{(v-1)^2(v-2)}, \quad v > 2$$

şeklinde elde edilir [30].

Pareto II dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$f(x) = v\lambda^v (x + \lambda)^{-(v+1)} = \frac{V\lambda^v}{(x + \lambda)^{v+1}}$$

$$F(x) = 1 - \frac{\lambda^v}{(x + \lambda)^v}, \quad x > \lambda, v > 0$$

Pareto II dağılımının sıfıra göre r -inci momenti;

$$E(X^r) = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} (-1)^{r-i} (\lambda)^{r-i} \frac{v\lambda^i}{(v-i)}$$

şeklindedir. Bu son eşitsizlikte $r=1$ yazılırsa Pareto II dağılımının ortalaması;

$$\mu = \frac{\lambda}{v-1}$$

şeklinde elde edilir.

Pareto II dağılımının ortalamaya göre r -inci momenti;

$$E(X - \mu)^r = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} (-1)^{r-i} \left(\frac{\lambda v}{v-1} \right)^{r-i} \frac{v\lambda^i}{(v-i)}$$

şeklindedir. Bu son eşitlikte $r=2$ yazılırsa Pareto II dağılımının varyansı;

$$\text{Var}(X) = \frac{v\lambda^2}{(v-1)^2(v-2)}, \quad v > 2$$

şeklinde elde edilir [30].

Pareto III dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$f(x) = \frac{1}{\lambda\gamma} \left[1 + \left(\frac{x-l}{\lambda} \right)^{\frac{1}{\lambda}} \right]^{-2} \left(\frac{x-l}{\lambda} \right)^{\frac{1}{\lambda}-1}$$

$$F(x) = 1 - \left[1 + \left(\frac{x-l}{\lambda} \right)^{\frac{1}{\lambda}} \right]^{-1} \quad \lambda > 0, \quad \gamma > 0, \quad l \in \mathfrak{R}, \quad x > l$$

Pareto III dağılımının sıfıra göre r -inci momenti;

$$E(X^r) = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \lambda^i l^{r-i} B(\gamma i + 1, 1 - \gamma i) \quad \gamma < 1/r$$

şeklindedir. Bu son eşitlikte $r=1$ yazılırsa Pareto III dağılımının ortalaması:

$$\mu = [lB(1,1) + \lambda B(\gamma + 1, 1 - \gamma)] \quad \gamma < 1/r$$

şeklinde elde edilir. Burada,

$$B(z, w) = \int_0^{\infty} t^{z-1} (1+t)^{-z-w} dt$$

şeklindedir.

Pareto III dağılımının ortalamaya göre r -inci momenti;

$$E[(X - \mu)^r] = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \lambda^i (\ell - \mu)^{r-i} B(\gamma i + 1, 1 - \gamma i) \quad \gamma < 1/r$$

şeklindedir. Bu son eşitsizlikte $r=2$ yazılırsa Pareto II dağılımının varyansı;

$$\text{Var}(X) = [(\ell - \mu)^2 B(1,1)] + [2(\ell - \mu) \lambda B(\gamma + 1, 1 - \gamma)] + [\lambda^2 B(2\gamma + 1, 1 - 2\gamma)]$$

$$\gamma < 1/2$$

şeklinde elde edilir.

Pareto IV dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$f(x) = \frac{v}{\lambda\gamma} \left[1 + \left(\frac{x-\ell}{\lambda} \right)^{\frac{1}{\lambda}} \right]^{-v-1} \left(\frac{x-\ell}{\lambda} \right)^{\frac{1}{\gamma}-1}$$

$$F(x) = 1 - \left[1 + \left(\frac{x-\ell}{\lambda} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right]^{-v} \quad \lambda > 0, \quad v > 0, \quad \gamma > 0, \quad l \in \Re, \quad x > \ell$$

Pareto IV dağılımının sıfıra göre r -inci momenti;

$$E(X^r) = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \lambda^i v l^{r-i} B(\gamma i + 1, v - \gamma i) \quad v > \gamma r$$

şeklindedir. Bu son eşitsizlikte $r=1$ yazılırsa ParetoIV dağılımının ortalaması;

$$\mu = [lvB(1, v) + \lambda vB(\gamma + 1, v - \gamma)] \quad v > \gamma$$

şeklinde elde edilir.

Pareto IV dağılımının ortalamaya göre r -inci momenti ;

$$E[(X - \mu)^r] = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \lambda^i (l - \mu)^{r-i} vB(\gamma i + 1, v - \gamma i) \quad v > \gamma r$$

şeklindedir. Bu son eşitlikte $r=2$ yazılırsa Pareto IV dağılımının varyansı;

$$\text{Var}(X) = [(l - \mu)^2 vB(1, v)] + [2(l - \mu) \lambda vB(\gamma + 1, v - \gamma)] + [\lambda^2 vB(2\gamma + 1, v - 2\gamma)]$$

$$v > 2\gamma$$

şeklinde elde edilir.

3.2.Pareto II Dağılımının Sıra İstatistikleri

Pareto II dağılımının $X_{r:n}$ sıra istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{r:n}(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \left[1 - \frac{\lambda^v}{(x+\lambda)^v} \right]^{r-1} \frac{V\lambda^v}{(x+\lambda)^{v+1}} \left[\frac{\lambda^v}{(x+\lambda)^v} \right]^{n-r}$$

şeklinde ifade edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$f_{r:n}(x) = \frac{V}{x+\lambda} \sum_{t=0}^{r-1} \frac{n!}{(n-r)!t!(r-1-t)!} (-1)^t \cdot \left(\frac{\lambda}{x+\lambda} \right)^{V(n-r+t+1)}$$

ifadesi elde edilir.

Pareto II dağılımının $X_{r:n}$ sıra istatistiğinin dağılım fonksiyonu,

$$F_{r:n}(x) = \sum_{i=r}^n \binom{n}{i} \left[1 - \frac{\lambda^v}{(x+\lambda)^v} \right]^{n-i} \left[\frac{\lambda^v}{(x+\lambda)^v} \right]^i$$

şeklinde elde edilir. Buradan,

$$F_{r:n}(x) = \sum_{i=r}^n \sum_{t=0}^i \binom{n}{i} \binom{i}{t} (-1)^t \left(\frac{\lambda}{x+\lambda} \right)^{V(n-i+t)}$$

ifadesi elde edilir.

$1 \leq r < s \leq n$ ve $-\infty < x < y < \infty$ olmak üzere Pareto II dağılımının $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$ sıra istatistiklerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{r,s:n}(x, y) = \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} \left[1 - \frac{\lambda^v}{(x+\lambda)^v} \right]^{r-1} \cdot \frac{V\lambda^v}{(x+\lambda)^{v+1}} \cdot \left[1 - \frac{\lambda^v}{(y+\lambda)^v} - \left(1 - \frac{\lambda^v}{(x+\lambda)^v} \right) \right]^{s-r-1} \\ \cdot \frac{V\lambda^v}{(y+\lambda)^{v+1}} \left[\frac{\lambda^v}{(y+\lambda)^v} \right]^{n-s}$$

şeklinde ifade edilir. Buradan ,

$$f_{r,s;n}(x,y) = \sum_{t_1=0}^{r-1} \sum_{t_2=0}^{s-r-1} \frac{n!}{t_1!(r-1-t_1)!t_2!(s-r-1-t_2)!(n-s)!} \cdot (-1)^{t_1+t_2} \cdot \frac{V^2}{(x+\lambda)(y+\lambda)} \cdot \left(\frac{\lambda}{x+\lambda}\right)^{V(s-r+t_1-t_2)} \cdot \left(\frac{\lambda}{y+\lambda}\right)^{V(n-s+1+t_2)}$$

ifadesi elde edilir.

Pareto II dağılımının $X_{r:n}$ r-inci sıra istatistiğinin x 'e eşit olma şartı altında $X_{s:n}$ s-inci sıra istatistiğinin şartlı olasılık yoğunluk fonksiyonu ,

$$f_{X_{s:n} \setminus X_{r:n}=x}(y) = \frac{(n-r)!}{(s-1-r)!(n-s)!} \cdot \left[\frac{\frac{\lambda^v}{(x+\lambda)^v} - \frac{\lambda^v}{(y+\lambda)^v}}{\frac{\lambda^v}{(x+\lambda)^v}} \right]^{s-1-r} \left[\frac{\frac{V\lambda^v}{(y+\lambda)^{v+1}}}{\frac{\lambda^v}{(x+\lambda)^v}} \right] \left[\frac{\frac{\lambda^v}{(y+\lambda)^v}}{\frac{\lambda^v}{(x+\lambda)^v}} \right]^{n-s}$$

şeklinde ifade edilir. Burada gerekli işlemler yapılırsa;

$$f_{X_{s:n} \setminus X_{r:n}=x}(y) = \sum_{t=0}^{s-r-1} \frac{(n-r)!}{t!(s-r-1-t)!(n-s)!} \cdot (-1)^t \frac{V}{y+\lambda} \cdot \left[\frac{x+\lambda}{y+\lambda} \right]^{V(n-s+1+t)}$$

ifadesi elde edilir [17].

3.3.Pareto II Dağılımının Sıra İstatistiklerinin Şartlı Beklenen Değerleri

Pareto II dağılımının $X_{s:n}$ r-inci sıra istatistiğinin x 'e eşit olma şartı altında $X_{s:n}$ s-inci sıra istatistiğinin şartlı beklenen değeri aşağıdaki teoremden ifade edilmiştir.

Theorem 3.3.1.

Pareto II dağılımının sıra istatistiklerinin şartlı beklenen değeri

$$E_{X_{sn} \setminus X_{rn}=x}(y) = \sum_{t=0}^{s-r-1} \frac{(n-r)!}{t!(s-r-1-t)!(n-s)!} (-1)^t V \left[\frac{x+\lambda}{V(n-s+1+t)-1} - \frac{\lambda}{V(n-s+1+t)} \right]$$

şeklindedir. $x < y$ ve $r < s$ 'dir.

İspat

Sürekli rassal değişkenin şartlı beklenen değeri

$$E(Y / X) = \int_x^{\infty} y f(y / x) dy$$

şeklindedir. Bu son ifade sıra istatistiklerinde ele alınırsa;

$$E_{X_{sn} \setminus X_{rn}=x}(y) = \int_x^{\infty} y f_{X_{sn} \setminus X_{rn}=x}(y) dy$$

ifadesi yazılabilir. Yukarıda ifadede şartlı olasılık yoğunluk fonksiyonu yerine yazılırsa,

$$E_{X_{sn} \setminus X_{rn}=x}(y) = \int_x^{\infty} y \sum_{t=0}^{s-r-1} \frac{(n-r)!}{t!(s-r-1-t)!(n-s)!} (-1)^t \frac{V}{y+\lambda} \left[\frac{x+\lambda}{y+\lambda} \right]^{V(n-s+1+t)} dy$$

ifadesi elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$E_{X_{sn} \setminus X_{rn}=x}(y) = \sum_{t=0}^{s-r-1} \frac{(n-r)!}{t!(s-r-1-t)!(n-s)!} (-1)^t V(x+\lambda)^{V(n-s+1+t)} \int_x^{\infty} \frac{y}{[y+\lambda]^{V(n-s+1+t)+1}} dy$$

eşitliği elde edilir. Bu ifadeye λ eklenip, çıkarılıp ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$E_{X_{sn} \setminus X_{rn}=x}(y) = \sum_{t=0}^{s-r-1} \frac{(n-r)!}{t!(s-r-1-t)!(n-s)!} (-1)^t V(x+\lambda)^{V(n-s+1+t)} \int_x^{\infty} \frac{(y+\lambda-\lambda)}{[y+\lambda]^{V(n-s+1+t)+1}} dy$$

$$E_{X_{sn} \setminus X_{rn}=x}(y) = \sum_{t=0}^{s-r-1} \frac{(n-r)!}{t!(s-r-1-t)!(n-s)!} (-1)^t V(x+\lambda)^{V(n-s+1+t)}$$

$$\cdot \left[\int_x^\infty \frac{y + \lambda}{[y + \lambda]^{V(n-s+1+t)+1}} - \frac{\lambda}{[y + \lambda]^{V(n-s+1+t)+1}} \right] d_y$$

$$E_{X_{sn} \setminus X_{rn}=x}(y) = \sum_{t=0}^{s-r-1} \frac{(n-r)!}{t!(s-r-1-t)!(n-s)!} (-1)^t V(x + \lambda)^{V(n-s+1+t)} \\ \cdot \left[\int_x^\infty \frac{1}{[y + \lambda]^{V(n-s+1+t)+1}} dy - \lambda \int_x^\infty \frac{1}{[y + \lambda]^{V(n-s+1+t)+1}} dy \right]$$

ifadesi elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte integraller alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$E_{X_{sn} \setminus X_{rn}=x}(y) = \sum_{t=0}^{s-r-1} \frac{(n-r)!}{t!(s-r-1-t)!(n-s)!} (-1)^t V(x + \lambda)^{V(n-s+1+t)} \\ \cdot \left[\left. \frac{[y + \lambda]^{-V(n-s+1+t)+1}}{-V(n-s+1+t)+1} \right|_x^\infty - \lambda \left. \frac{[y + \lambda]^{-V(n-s+1+t)}}{V(n-s+1+t)} \right|_x^\infty \right]$$

$$E_{X_{sn} \setminus X_{rn}=x}(y) = \sum_{t=0}^{s-r-1} \frac{(n-r)!}{t!(s-r-1-t)!(n-s)!} (-1)^t V(x + \lambda)^{V(n-s+1+t)} \\ \cdot \left[\frac{[x + \lambda]^{-V(n-s+1+t)+1}}{V(n-s+1+t)-1} - \lambda \frac{[x + \lambda]^{-V(n-s+1+t)}}{V(n-s+1+t)} \right]$$

$$E_{X_{sn} \setminus X_{rn}=x}(y) = \sum_{t=0}^{s-r-1} \frac{(n-r)!}{t!(s-r-1-t)!(n-s)!} (-1)^t V \left[\frac{x + \lambda}{V(n-s+1+t)-1} - \frac{\lambda}{V(n-s+1+t)} \right]$$

ifadesi elde edilir. Buda ispatı tamamlar.

4. SONUÇ

Pareto II dağılımındaki ardışık ilk iki'nin sıra istatistiğinin şartlı beklenen değerlerini hesaplamak için R programı kullanıldı ve ilgili program kodu Ek-1'de verilmiştir. R programından faydalanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edildi.

Sonuç 4.1.

Pareto II dağılımındaki ardışık ilk iki istatistiğinin şartlı beklenen değerinin elde edilebilmesi için

$$E_{X_{sn} \setminus X_{rn}=x}(y) = \sum_{t=0}^{s-r-1} \frac{(n-r)!}{t!(s-r-1-t)!(n-s)!} (-1)^t V \left[\frac{x+\lambda}{V(n-s+1+t)-1} - \frac{\lambda}{V(n-s+1+t)} \right]$$

Pareto II dağılımının sıra istatistiklerinin şartlı beklenen değerinde $r=1$ ve $s=2$ alınır;

$$E_{X_{2n} \setminus X_{1n}=x}(y) = (n-1) V \left[\frac{x+\lambda}{V(n-1)-1} - \frac{\lambda}{V(n-1)} \right]$$

şeklinde elde edilir. Çizelge 4.1'de Pareto II dağılımındaki sıra istatistiklerinin bazı şartlı beklenen değerleri elde edilmiştir.

Çizelge 4. 1. $x=2$ için Pareto II dağılımındaki sıra istatistiklerinin bazı şartlı beklenen değerleri

			$\lambda=1,2$				$\lambda=1,3$				$\lambda=1,4$			
n	r	s	$v=2,1$	$v=2,2$	$v=2,3$	$v=2,4$	$v=2,1$	$v=2,2$	$v=2,3$	$v=2,4$	$v=2,1$	$v=2,2$	$v=2,3$	$v=2,4$
10	1	2	2,178771	2,170213	2,162437	2,15534	2,184358	2,175532	2,167513	2,160194	2,189944	2,180851	2,172589	2,165049
20	1	2	2,082262	2,078431	2,074941	2,071749	2,084833	2,080882	2,077283	2,073991	2,087404	2,083333	2,079625	2,076233
30	1	2	2,053422	2,050955	2,048706	2,046647	2,055092	2,052548	2,050228	2,048105	2,056761	2,05414	2,05175	2,049563
40	1	2	2,039555	2,037736	2,036077	2,034557	2,040791	2,038915	2,037204	2,035637	2,042027	2,040094	2,038331	2,036717
50	1	2	2,031403	2,029963	2,028648	2,027444	2,032385	2,030899	2,029543	2,028302	2,033366	2,031835	2,030439	2,02916
60	1	2	2,026037	2,024845	2,023756	2,02276	2,026851	2,025621	2,024499	2,023471	2,027665	2,026398	2,025241	2,024182
70	1	2	2,022238	2,02122	2,020292	2,019441	2,022933	2,021883	2,020926	2,020049	2,023628	2,022546	2,02156	2,020656
80	1	2	2,019406	2,018519	2,017709	2,016967	2,020012	2,019097	2,018262	2,017497	2,020619	2,019676	2,018816	2,018028
90	1	2	2,017214	2,016427	2,015709	2,015052	2,017751	2,01694	2,0162	2,015522	2,018289	2,017454	2,016691	2,015992
100	1	2	2,015466	2,01476	2,014116	2,013525	2,01595	2,015221	2,014557	2,013948	2,016433	2,015683	2,014998	2,01437

Sonuç 4.2.

Pareto II dağılımının sıra istatistiklerinin şartlı beklenen değerinde $r=n-1$ ve $s=n$ alınarak Pareto II dağılımındaki ardışık son iki sıra istatistiklerinin şartlı beklenen değeri

$$E_{X_{nn}/X_{n-1n}=x}(y) = V \left[\frac{x+\lambda}{V-1} - \frac{\lambda}{V} \right]$$

şeklinde elde edilir. Çizelge 4.2’de Pareto II dağılımındaki sıra istatistiklerinin bazı şartlı beklenen değerleri elde edilmiştir.

Çizelge 4.3 - 6’dan Pareto II dağılımının sıra istatistiklerinin şartlı beklenen değerlerinin sırasıyla n, λ, v ve x ’den nasıl etkilendiğini göstermiştir. Çizelge 4.3’de n değeri 10’ar artırıldığında şartlı beklenen değerin azaldığı gözlenmektedir. Çizelge 4.4’de λ değeri 0,1’er artırıldığında şartlı beklenen değerin arttığı gözlenmektedir. Çizelge 4.5’de v değeri 0,1’er artırıldığında şartlı beklenen değerin azaldığı gözlenmektedir. Çizelge 4.6’de x değeri 0,1’er artırıldığında şartlı beklenen değerin arttığı gözlenmektedir.

Çizelge 4. 2. $x=2$ için Pareto II dağılımındaki sıra istatistiklerinin bazı şartlı beklenen değerleri

			$\lambda=1,2$				$\lambda=1,3$				$\lambda=1,4$			
n	r	S	$v=2,1$	$v=2,2$	$v=2,3$	$v=2,4$	$v=2,1$	$v=2,2$	$v=2,3$	$v=2,4$	$v=2,1$	$v=2,2$	$v=2,3$	$v=2,4$
10	9	10	4,909091	4,666667	4,461538	4,285714	5	4,75	4,538462	4,357143	5,090909	4,833333	4,615385	4,428571
20	19	20	4,909091	4,666667	4,461538	4,285714	5	4,75	4,538462	4,357143	5,090909	4,833333	4,615385	4,428571
30	29	30	4,909091	4,666667	4,461538	4,285714	5	4,75	4,538462	4,357143	5,090909	4,833333	4,615385	4,428571
40	39	40	4,909091	4,666667	4,461538	4,285714	5	4,75	4,538462	4,357143	5,090909	4,833333	4,615385	4,428571
50	49	50	4,909091	4,666667	4,461538	4,285714	5	4,75	4,538462	4,357143	5,090909	4,833333	4,615385	4,428571
60	59	60	4,909091	4,666667	4,461538	4,285714	5	4,75	4,538462	4,357143	5,090909	4,833333	4,615385	4,428571
70	69	70	4,909091	4,666667	4,461538	4,285714	5	4,75	4,538462	4,357143	5,090909	4,833333	4,615385	4,428571
80	79	80	4,909091	4,666667	4,461538	4,285714	5	4,75	4,538462	4,357143	5,090909	4,833333	4,615385	4,428571
90	89	90	4,909091	4,666667	4,461538	4,285714	5	4,75	4,538462	4,357143	5,090909	4,833333	4,615385	4,428571
100	99	100	4,909091	4,666667	4,461538	4,285714	5	4,75	4,538462	4,357143	5,090909	4,833333	4,615385	4,428571

Çizelge 4. 3. $\lambda=2$, $\nu=4$ ve $x=5$ için Pareto II dağılımının bazı sıra istatistiklerinin şartlı beklenen değerleri

r	$s \backslash n$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
1	2	5,2	5,093333	5,06087	5,045161	5,035897	5,029787	5,025455	5,022222	5,019718	5,017722
	3	5,432258	5,193239	5,124481	5,091818	5,072735	5,060219	5,051379	5,044802	5,039718	5,03567
	4	5,707527	5,300601	5,191065	5,140062	5,110557	5,091322	5,077788	5,067749	5,060005	5,05385
	5	6,042637	5,416484	5,260881	5,189992	5,149412	5,123121	5,1047	5,091075	5,080588	5,072267
	6	6,465933	5,542187	5,334223	5,241719	5,189353	2,155647	5,132131	5,114791	5,101475	5,090927
	7	7,030329	5,679318	5,411426	5,295361	5,230435	5,188929	5,160101	5,138908	5,122673	5,109837
	8	7,851268	5,829892	5,49287	5,351051	5,272718	5,223	5,188629	5,163438	5,144182	5,129004
	9	9,258592	5,996486	5,578995	5,408933	5,31627	5,257897	5,21769	5,188425	5,165806	5,148438
2	3	5,225806	5,098592	5,063063	5,046358	5,036649	5,030303	5,02583	5,022508	5,019943	5,017903
	4	5,493429	5,204541	5,129073	5,094292	5,074278	5,061274	5,052144	5,045383	5,040173	5,036037
	5	5,81923	5,318898	5,198287	5,143902	5,112936	5,092938	5,078958	5,068635	5,060699	5,054408
	6	6,230769	5,442948	5,270997	5,195297	5,152673	5,125326	5,10629	5,092276	5,081527	5,073021
	7	6,779487	5,578274	5,347534	5,248596	5,193545	5,158467	5,134158	5,116317	5,102666	5,091882
	8	7,577622	5,726868	5,428276	5,303929	5,235613	5,192394	5,162581	5,140772	5,124124	5,110998
	9	8,945853	5,891269	5,513659	5,36144	5,27894	5,22714	5,191578	5,165655	5,145902	5,130404
3	4	5,259259	5,104478	5,065421	5,047619	5,037433	5,030837	5,026217	5,022801	5,020173	5,018088
	5	5,574879	5,217247	5,134017	5,096903	5,075889	5,062365	5,052933	5,045979	5,04064	5,036412
	6	5,973557	5,339573	5,206078	5,14796	5,115419	5,094614	5,080164	5,069544	5,061409	5,054978
	7	6,505128	5,47302	5,281931	5,200908	5,156079	5,127612	5,10793	5,093509	5,082488	5,073791

Çizelge 4. 3. (Devamı)											
3	8	7,278321	5,61955	5,361952	5,255877	5,197927	5,161392	5,136248	5,117885	5,103885	5,092858
	9	8,603795	5,781668	5,446572	5,313009	5,241029	5,195988	5,16514	5,142686	5,125609	5,112185
4	5	5,304348	5,111111	5,067961	5,048951	5,038251	5,03139	5,026616	5,023102	5,020408	5,018277
	6	5,688787	5,231638	5,139355	5,099663	5,077571	5,063497	5,053746	5,046591	5,041117	5,036795
	7	6,201373	5,363123	5,214506	5,152253	5,118014	5,09635	5,081408	5,070478	5,062136	5,055559
	8	6,946952	5,507498	5,293786	5,20685	5,15964	5,129982	5,10962	5,094775	5,083471	5,074577
	9	8,225088	5,667232	5,377623	5,263597	5,202512	5,164427	5,138404	5,119495	5,105133	5,093854
5	6	5,368421	5,118644	5,070707	5,05036	5,039106	5,031963	5,027027	5,023411	5,020649	5,01847
	7	5,859649	5,248074	5,145136	5,102585	5,07933	5,06467	5,054584	5,04722	5,041606	5,037186
	8	6,574163	5,390193	5,223654	5,156803	5,120729	5,098152	5,08269	5,071437	5,06288	5,056154
	9	7,799043	5,547431	5,306684	5,213156	5,163368	5,132443	5,111365	5,096076	5,084479	5,07538
6	7	5,466667	5,127273	5,073684	5,051852	5,04	5,032558	5,027451	5,023729	5,020896	5,018667
	8	6,145455	5,267023	5,151417	5,105683	5,08117	5,065888	5,055449	5,047865	5,042107	5,037585
	9	7,309091	5,421641	5,233617	5,161633	5,123572	5,100023	5,084013	5,072422	5,063642	5,056761
7	8	5,636364	5,137255	5,076923	5,053435	5,040936	5,033175	5,027888	5,024055	5,021148	5,018868
	9	6,727273	5,289111	5,158267	5,108974	5,083097	5,067152	5,056341	5,02439	5,042619	5,037993
8	9	6	5,148936	5,08046	5,055118	5,041916	5,033816	5,02834	5,02439	5,021407	5,019074

Çizelge 4. 4. $n=100$, $v=4$ ve $x=5$ için Pareto II dağılımının bazı sıra istatistiklerinin şartlı beklenen değerleri

r	$s \backslash \lambda$	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3
1	2	5,017975	5,018228	5,018481	5,018734	5,018987	5,019241	5,019494	5,019747	5,02	5,020253
	3	5,036179	5,036689	5,037198	5,037708	5,038217	5,038727	5,039237	5,039746	5,040256	5,040765
	4	5,054619	5,055388	5,056158	5,056927	5,057696	5,058465	5,059235	5,060004	5,060773	5,061542
	5	5,073299	5,074332	5,075364	5,076397	5,077429	5,078461	5,079494	5,080526	5,081559	5,082591
	6	5,092226	5,093525	5,094824	5,096123	5,097422	5,098721	5,10002	5,101319	5,102618	5,103917
	7	5,111406	5,112976	5,114544	5,116113	5,117681	5,119252	5,12082	5,122389	5,123958	5,125528
	8	5,130859	5,132666	5,134514	5,13638	5,138247	5,140049	5,141919	5,143752	5,145599	5,147436
	9	5,150497	5,153397	5,155762	5,157547	5,159058	5,162003	5,163605	5,165543	5,167328	5,169586
2	3	5,018159	5,018605	5,01867	5,018926	5,019182	5,019437	5,019693	5,019949	5,020205	5,02046
	4	5,036552	5,037067	5,037581	5,038096	5,038611	5,039126	5,039641	5,040155	5,04067	5,041185
	5	5,055185	5,055962	5,05674	5,057517	5,058294	5,059071	5,059849	5,060626	5,061403	5,06218
	6	5,074064	5,075107	5,07615	5,077194	5,078237	5,07928	5,080323	5,081366	5,082409	5,083453
	7	5,093195	5,094508	5,09582	5,097133	5,098445	5,099758	5,101071	5,102383	5,103696	5,105008
	8	5,112584	5,114169	5,115754	5,11734	5,118926	5,120511	5,122098	5,123683	5,125269	5,126855
	9	5,132243	5,134141	5,135989	5,137865	5,139689	5,141577	5,143435	5,145287	5,147136	5,149021
3	4	5,018346	5,018605	5,018863	5,019121	5,01938	5,019638	5,019897	5,020155	5,020413	5,020672
	5	0,036932	5,037452	5,037972	5,038493	5,039013	5,039533	5,040053	5,040573	5,041093	5,041614
	6	5,055763	5,056548	5,057334	5,058119	5,058905	5,05969	5,060475	5,061261	5,062046	5,062832
	7	5,074845	5,075899	5,076953	5,078007	5,079062	5,080116	5,08117	5,082224	5,083278	5,084332

Çizelge 4. 4. (Devamı)											
3	8	5,094184	5,095511	5,096837	5,098164	5,09949	5,100817	5,102143	5,10347	5,104797	5,106123
	9	5,113787	5,115391	5,116993	5,118595	5,120198	5,1218	5,123403	5,125005	5,126608	5,128211
4	5	5,018538	5,018799	5,01906	5,019321	5,019582	5,019843	5,020104	5,020366	5,020627	5,020888
	6	5,03732	5,037846	5,038372	5,038897	5,039423	5,039948	5,040474	5,041	5,041525	5,042051
	7	5,056353	5,057147	5,057941	5,058734	5,059528	5,060322	5,061115	5,061909	5,062703	5,063496
	8	5,075642	5,076708	5,077773	5,078839	5,079904	5,080969	5,082035	5,0831	5,084166	5,085231
	9	5,095195	5,096535	5,097876	5,099217	5,100558	5,101899	5,103239	5,10458	5,105921	5,107262
5	6	5,018734	5,018997	5,019261	5,019525	5,019789	5,020053	5,020317	5,020058	5,020844	5,021108
	7	5,037717	5,038248	5,038779	5,03931	5,039842	5,040373	5,040904	5,041435	5,041967	5,042498
	8	5,056956	5,057758	5,05856	5,059363	5,060165	5,060967	5,061769	5,062571	5,063373	5,064176
	9	5,076457	5,077534	5,078611	5,079688	5,080765	5,081841	5,082918	5,083995	5,085072	5,086149
6	7	5,018933	5,0192	5,019467	5,019733	5,02	5,020267	5,020533	5,0208	5,021067	5,021333
	8	5,038122	5,038659	5,039196	5,039733	5,04027	5,040806	5,041343	5,04188	5,042417	5,042954
	9	5,057572	5,058383	5,059193	5,060004	5,060815	5,061626	5,062437	5,063248	5,064059	5,06487
7	8	5,019137	5,019619	5,019677	5,019946	5,020216	5,020485	5,020755	5,021024	5,021294	5,021563
	9	5,038536	5,039078	5,039621	5,040164	5,040707	5,041249	5,041792	5,042335	5,042878	5,04342
8	9	5,019346	5,019619	5,019891	5,020163	5,020436	5,020708	5,020981	5,021253	5,021526	5,021798

Çizelge 4. 5. $n=100$ $\lambda=2$ ve $x=5$ için Pareto II dağılımının bazı sıra istatistiklerinin şartlı beklenen değerleri

r	$s \backslash v$	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5
1	2	5,017288	5,016876	5,016482	5,016107	5,015748	5,015405	5,015076	5,014762	5,01446	5,01417
	3	5,034796	5,033965	5,033172	5,032416	5,031693	5,031002	5,03034	5,029706	5,029098	5,028514
	4	5,05253	5,051273	5,050075	5,048931	5,047839	5,046795	5,045795	5,044836	5,043918	5,043036
	5	5,070493	5,068805	5,067195	5,065659	5,064191	5,062788	5,061445	5,060158	5,058924	5,057739
	6	5,088693	5,086565	5,084538	5,082603	5,080755	5,078987	5,077296	5,075675	5,074121	5,072629
	7	5,107135	5,104562	5,102107	5,099769	5,097534	5,095397	5,093351	5,091391	5,089513	5,087708
	8	5,125859	5,122287	5,119988	5,11718	5,114561	5,112031	5,109668	5,107362	5,105132	5,103045
	9	5,143875	5,141205	5,136703	5,135147	5,131607	5,12944	5,125336	5,122879	5,121063	5,117386
2	3	5,017465	5,017048	5,016651	5,016272	5,015909	5,015562	5,015231	5,014913	5,014608	5,014315
	4	5,035155	5,034315	5,033514	5,032749	5,032019	5,031321	5,030652	5,030011	5,029397	5,028807
	5	5,053074	5,051804	5,050594	5,049438	5,048335	5,047279	5,046269	5,045301	5,044372	5,043481
	6	5,071229	5,069522	5,067896	5,066343	5,064861	5,063443	5,062085	5,060785	5,059538	5,058341
	7	5,089624	5,087474	5,085425	5,08347	5,081602	5,079816	5,078106	5,076469	5,074898	5,073391
	8	5,108267	5,105666	5,103189	5,100823	5,098564	5,096403	5,094338	5,092357	5,090457	5,088636
	9	5,127151	5,124099	5,12117	5,118413	5,115741	5,113259	5,110791	5,108433	5,106221	5,104063
3	4	5,017646	5,017224	5,016823	5,01644	5,016073	5,015723	5,015388	5,015067	5,014759	5,014463
	5	5,03552	5,034672	5,033862	5,03309	5,032352	5,031646	5,030971	5,030324	5,029703	5,029107
	6	5,05363	5,052347	5,051123	5,049956	5,048841	5,047774	5,046753	5,045775	5,044837	5,043936
	7	5,07198	5,070255	5,068611	5,067043	5,065544	5,064111	5,062739	5,061425	5,060165	5,058955

Çizelge 4. 5. (Devamı)											
3	8	5,090575	5,088402	5,086331	5,084355	5,082467	5,080662	5,078935	5,077279	5,075692	5,074168
	9	5,109422	5,106794	5,104289	5,1019	5,099616	5,097434	5,095343	5,093342	5,091422	5,08958
4	5	5,01783	5,017404	5,016999	5,016611	5,016241	5,015887	5,015549	5,015224	5,014913	5,014614
	6	5,035894	5,035036	5,034218	5,033438	5,032692	5,031979	5,031296	5,030642	5,030015	5,029413
	7	5,054197	5,0529	5,051664	5,050484	5,049357	5,048279	5,047247	5,046259	5,045311	5,044401
	8	5,072746	5,071003	5,069342	5,067756	5,066242	5,064794	5,063407	5,062079	5,060805	5,059583
	9	5,091547	5,089351	5,087257	5,08526	5,083351	5,081527	5,07978	5,078107	5,076503	5,074963
5	6	5,018018	5,017588	5,017178	5,016787	5,016413	5,016055	5,015713	5,015385	5,01507	5,014768
	7	5,036275	5,035408	5,034582	5,033793	5,033039	5,032319	5,031629	5,030967	5,030333	5,029725
	8	5,054777	5,053466	5,052217	5,051024	5,049885	5,048795	5,047752	5,046753	5,045795	5,044875
	9	5,07353	5,071768	5,070088	5,068486	5,066955	5,065491	5,064089	5,062747	5,061459	5,060223
6	7	5,01821	5,017776	5,017361	5,016966	5,016588	5,016226	5,01588	5,015549	5,015231	5,014925
	8	5,036665	5,035788	5,034953	5,034156	5,033394	5,032665	5,031968	5,0313	5,030659	5,030044
	9	5,055369	5,054044	5,052781	5,051576	5,050424	5,049323	5,048268	5,047258	5,04629	5,04536
7	8	5,018407	5,017967	5,017548	5,017148	5,016766	5,016401	5,016051	5,015716	5,015395	5,015086
	9	5,037063	5,036177	5,035332	5,034526	5,033756	5,03302	5,032315	5,031639	5,030991	5,03037
8	9	5,018607	5,018163	5,017739	5,017335	5,016949	5,01658	5,016226	5,015887	5,015562	5,015251

Çizelge 4. 6. $n=100$ $\lambda=2$ ve $\nu=4$ için Pareto II dağılımının bazı sıra istatistiklerinin şartlı beklenen değerleri

r	$s \backslash x$	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6
1	2	5,117975	5,218228	5,318481	5,418734	5,518987	5,619241	5,719494	5,819747	5,92	6,020253
	3	5,136179	5,236689	5,337198	5,437708	5,538217	5,638727	5,739237	5,839746	5,940256	6,040765
	4	5,154619	5,255388	5,356158	5,456927	0,557696	5,658465	5,759235	5,860004	5,960773	6,061542
	5	5,173299	5,274332	5,375364	5,476397	0,577429	5,678461	5,779494	5,880526	5,981559	6,082591
	6	5,192226	5,293525	5,394824	5,496123	0,597422	5,698721	5,80002	5,901319	6,002618	6,103917
	7	5,211406	5,312975	5,414544	5,516113	0,617682	5,719251	5,82082	5,922389	6,023959	6,125528
	8	5,230862	5,332689	5,43453	5,536388	5,63823	5,740073	5,841914	5,943758	6,045613	6,147456
	9	5,250717	5,353333	5,454681	5,557037	5,6586	5,761444	5,863739	5,964905	6,067947	6,169617
2	3	5,118159	5,218414	5,31867	5,418926	5,519182	5,619437	5,719693	5,819949	5,920205	6,02046
	4	5,136552	5,237067	5,337581	5,438096	5,538611	5,639126	5,739641	5,840155	5,94067	6,041185
	5	5,155185	5,255962	5,35674	5,457517	5,558294	5,659071	5,759849	5,860626	5,961403	6,06218
	6	5,174064	5,257107	5,37615	5,477194	5,578237	5,67928	5,780323	5,881366	5,982409	6,083453
	7	5,193195	5,294508	5,39582	5,497133	5,598445	5,699758	5,801071	5,902383	6,003696	6,105008
	8	5,212583	5,314169	5,415755	5,517341	5,618926	5,720512	5,822098	5,923683	6,025269	6,126855
	9	5,23224	5,334138	5,435985	5,537839	5,639708	5,741564	5,843437	5,945258	6,047172	6,148996
3	4	5,118346	5,218605	5,318863	5,419121	5,51938	5,619638	5,719897	5,820155	5,920413	6,020672
	5	5,136932	5,237452	5,337972	5,438493	5,539013	5,639533	5,740053	5,840573	5,941093	6,041614
	6	5,155763	5,256548	5,357334	5,458119	5,558905	5,65969	5,760475	5,861261	5,962046	6,062832
	7	5,174845	5,275899	5,376953	5,478007	5,579062	5,680116	5,78117	5,882224	5,983278	6,084332

Çizelge 4. 6. (Devamı)											
3	8	5,194184	5,295511	5,396837	5,498164	5,59949	5,700817	5,802143	5,90347	6,004797	6,106123
	9	5,213787	5,31539	5,416993	5,518595	5,620197	5,7218	5,823403	5,925004	6,026608	6,128211
4	5	5,118538	5,218799	5,31906	5,419321	5,519582	5,619843	5,720104	5,820366	5,920627	6,020888
	6	5,13732	5,237846	5,338372	5,438897	5,539423	5,639948	5,740474	5,841	5,941525	6,042051
	7	5,156353	5,257147	5,357941	5,458734	5,559528	5,660322	5,761115	5,861909	5,962703	6,063496
	8	5,175642	5,276708	5,377773	5,478839	5,579904	5,680969	5,782035	5,8831	5,984166	6,085231
	9	5,195195	5,296535	5,397876	5,499217	5,600558	5,701899	5,803239	5,90458	6,005921	6,107262
5	6	5,118734	5,218997	5,319261	5,419525	5,519789	5,620053	5,720317	5,82058	5,920844	6,021108
	7	5,137717	5,238248	5,338779	5,43931	5,539842	5,640373	5,740904	5,841435	5,941967	6,042498
	8	5,156956	5,257758	5,35856	5,459363	5,560165	5,660967	5,761769	5,862571	5,963373	6,064176
	9	5,176457	5,277534	5,378611	5,479688	5,580765	5,681841	5,782918	5,883995	5,985072	6,086149
6	7	5,118933	5,2192	5,319467	5,419733	5,52	5,620267	5,720533	5,8208	5,921067	6,021333
	8	5,138122	5,238659	5,339196	5,439733	5,54027	5,640806	5,741343	5,84188	5,942417	6,042954
	9	5,157572	5,258383	5,359193	5,460004	5,560815	5,661626	5,762437	5,863248	5,964059	6,06487
7	8	5,119137	5,219407	5,319677	5,419946	5,520216	5,620485	5,720755	5,821024	5,921294	6,021563
	9	5,138536	5,239078	5,339621	5,440164	5,540707	5,641249	5,741792	5,842335	5,942878	6,04342
8	9	5,119346	5,219619	5,319891	5,420163	5,520436	5,620708	5,720981	5,821253	5,921526	6,021798

5. KAYNAKLAR

- [1] David HA, 2006. Advances in Distribution Theory Order Statistics and Inference. 157-172, in: Topics in the History of Order Statistics (eds:Balakrishnan N, Castillo E, Sarabia JM). Birkhauser, Boston.
- [2] Laplace PS, 1818. Theorie Analytiquedes Probabilites Deuxieme Supplement. Imprimerie Royale, Paris.
- [3] Wilks SS, 1948. Order Statistics. Bulletin of the American Mathematical Society, 5: 6-50.
- [4] Arnold BC, Balakrishnan N, Nagaraja HN, 1992. A First Course in Order Statistics. John Wiley and Sons Inc. New York.
- [5] Bapat RB, Beg MI, 1989. Order Statistics for Nonidentically Distributed Variables and Permanents.Sankhyā, Ser. A, 51: 79-93.
- [6] Barakat HM, Abdelkader YH, 2004. Computing the Moments of Order Statistics from Nonidentical Random Variables. Statistical Methods & Applications, 13: 13-24.
- [7] Nagaraja HN, 1992. Order Statistics from Discrete Distributions. Statistics, 23: 189-216.
- [8] Vaughan RJ, Venables WN, 1972. Permanent Expressions for Order Statistics Densities. Journal of the Royal Statistical Society, Ser.B, 34: 308-310.
- [9] Corley HW, 1984. Multivariate Order Statistics. Communications in Statistics-Theory and Methods, 13: 1299-1304.
- [10] Afify EE, 2006. Order Statistics from Pareto Distribution. Journal of Applied Sciences,6: 2151-2157.

- [11] Malik HJ, 2011. Exact Moments of Order Statistics from the Pareto Distribution. Scandinavian Actuarial Journal, 1966: 144-157.
- [12] Nadarajah S, Jiang X, Chu J, 2017. Comparisons of Smallest Order Statistics from Pareto Distributions with Different Scale and Shape Parameters. Annals of Operations Research, 254: 191-209.
- [13] Samir KS, Rehab HASA, 2017. Distributions of Generalized Order Statistics and Parameters Estimation of Pareto Distribution in Statistical Explicit Forms. Journal of Natural and Engineering Studies, 22: 21-29.
- [14] Jay LD, Kenneth NB, 2012. Modern Mathematical Statistics with Applications. Springer Science Business Media LLC. New York.
- [15] Akdeniz F, 2002. Olasılık ve İstatistik. Baki Kitapevi. Adana.
- [16] Miller I, Miller M, 2002. John G. Freund'dan Matematiksel İstatistik. Literatür Yayıncılık. İstanbul.
- [17] David HA, 1981. Order Statistics. John Wiley and Sons Inc. New York.
- [18] Schutz RR, 1951. On the Measurement of Income Inequality. American Economic Review, 41: 107–122.
- [19] Arnold BC, Austin K, 1987. Truncated Pareto Distributions: Flexible, Tractable and Familiar. Technical Report 150, Department of Statistics, University of California, Riverside.
- [20] Pillai RN, 1991. Semi-Pareto Processes. Journal of Applied Probability, 28: 461-465.
- [21] Feller W, 1971. An Introduction to Probability Theory and its Applications II. Wiley, New York.

- [22] Hurlimann W, 2009. From the General Affine Transform Family to a Pareto Type IV Model. *Journal of Probability and Statistics*, 364901: 1-10.
- [23] Kalbfleisc JD, Prentice RL, 1980. *The Statistical Analysis of Failure Time Data*. Wiley, New York.
- [24] Zandonatti A, 2001. *Distribuzioni de Pareto Generalizzate*. Tesi di Laurea. University of Trento, Trento.
- [25] Maguire BA, Pearson ES, Wynn AHA, 1952. The Time Intervals Between Industrial Accidents. *Biometrika*, 39: 168–180.
- [26] Keiding N, Kvist K, Hartvig H, Tvede M, Juul S, 2002. Estimating Time to Pregnancy From Current Durations in a Cross-Sectional Sample. *Biostatistics*, 3: 565–578.
- [27] Fisk PR, 1961. The Graduation of Income Distributions. *Econometrica*, 29: 171–185.
- [28] Fisk PR, 1961. Estimation of Location and Scale Parameters in a Truncated Grouped Sech-Square Distribution. *Journal of the American Statistical Association*, 56: 692–702.
- [29] Dubey SD, 1968. A Compound Weibull Distribution. *Naval Research Logistics Quarterly*, 15:179-188.
- [30] Alzaatreh A,Famoye F, Lee C,2012. Gamma-Pareto Distribution and its Applications. *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, 11: 78-94.
- [31] Alzaatreh A,Ghosh I, 2016. A study of the Gamma-Pareto (IV) Distribution and its Applications. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 45: 636-654.
- [32] Alzaatreh A,Famoye F, Lee C, 2013. Weibull-Pareto Distribution and its Applications. *Communications in Statistics—Theory and Methods*,42: 1673-1691.

- [33] Akinsete A, Famoye F, Lee C, 2008. The Beta- Pareto Distribution. *Statistics*, 42 (6):547-563.



6. EKLER

EK 1. R Programı Kodları

```
n<-50
r<-3
s<-8
lmd<-0
v<-2.1
x<-1
ust=s-r-1
t<-0:ust;
BD<-function (y) {
  ((factorial(n-r))/(factorial(t)*factorial(s-r-1-t)* factorial(n-s)))*((-1)^t)*
  v* (((x+lmd)/((v*(n-s+1+t))-((lmd)/(v*(n-s+1+t))))
}
sum(BD(t))
```

ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında Mersin’de doğdu. İlköğretimi Mersin Selçuklar İlköğretim Okulu’nda ve liseyi ise Cemile Hamdi Ogun Lisesi’nde tamamladı. 2010 yılında kazandığı Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü’nden 2014 yılında mezun oldu. Daha sonra 2016 yılının şubat ayında Bitlis Eren Üniversitesi ve Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı Uygulamalı İstatistik Programında yüksek lisansa başladı ve lisansüstü eğitimine devam etmektedir.

Bilge EROL

