

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

PASTERNAK ZEMİNE OTURAN VE DAİRESEL RİJİT BLOK
ARACILIĞIYLA YÜKLENEN BİRİ FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ
İKİ TABAKANIN TEMAS PROBLEMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Aleyna YAZICIOĞLU

HAZİRAN 2024
TRABZON



KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**PASTERNAK ZEMİNE OTURAN VE DAİRESEL RİJİT BLOK
ARACILIĞIYLA YÜKLENEN BİRİ FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ
İKİ TABAKANIN TEMAS PROBLEMİ**

Aleyna YAZICIOĞLU

**Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
"İNŞAAT YÜKSEK MÜHENDİSİ"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.**

Tezin Enstitüye Verildiği Tarihi : 29 / 05 / 2024

Tezin Savunma Tarihi : 25 / 06 / 2024

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ

Trabzon 2024

ÖNSÖZ

“Pasternak Zemine Oturan ve Dairesel Rijit Blok Aracılığıyla Yüklenen Biri Fonksiyonel Derecelendirilmiş İki Tabakanın Temas Problemi” isimli bu tez Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Programı’nda hazırlanmıştır.

Tez çalışmam boyunca hiçbir desteğini esirgemeyen, tecrübesiyle yolumu aydınlatan ve birlikte çalışmaktan onur duyduğum danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ’ye minnet ve şükranlarımı sunarım. Ayrıca tez yazma sürecim boyunca bilgilerinden faydalandığım ve bana yol gösteren Sayın Dr. Öğr. Üyesi Gökhan ADIYAMAN’ a ve Sayın Prof. Dr. İsa ÇÖMEZ’ e teşekkür etmek isterim.

Tez çalışmamı, Lisansüstü Tez Projesi kapsamında BAP06 kodu ile destekleyen Karadeniz Teknik Üniversitesi Bap Koordinasyon Birimi’ne teşekkür ederim.

Son olarak, doğduğum günden beri hep yanımda olan, hayatım boyunca aldığım tüm kararlarda bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım, maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen ve bugünlere gelmemde en büyük paya sahip olan annem Yeter YAZICIOĞLU ve babam Seyfullah YAZICIOĞLU başta olmak üzere tüm aile fertlerine ve yine desteklerini esirgemeyen arkadaşlarıma sonsuz teşekkür ederim.

Bu tez çalışmasının bundan sonraki çalışmalara katkı sağlamasını temenni ederim.

Aleyna YAZICIOĞLU

Trabzon 2024

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Pasternak Zemin Oturan ve Dairesel Rijit Blok Aracılığıyla Yüklenen Biri Fonksiyonel Derecelendirilmiş İki Tabakanın Temas Problemi” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ’nin sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 25/06/2024

Aleyna YAZICIOĞLU

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET	VII
ŞEKİLLER DİZİNİ	IX
TABLolar DİZİNİ.....	XI
SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ	XII
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1. Temas Problemlerinin Tarihsel Gelişimi	1
1.1.1. Homojen Tabakalı Ortamlara İlişkin Temas Problemleri ile İlgili Yapılan Çalışmalar.....	2
1.1.2. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabakalı Ortamlara İlişkin Temas Problemleri ile İlgili Yapılan Çalışmalar	8
1.2. Çalışmanın Kapsamı.....	16
1.3. Homojen ve FD tabaka için Genel Denklemlerin Elde Edilmesi.....	17
1.3.1. Homojen Tabaka için Genel Denklemlerin Elde Edilmesi	18
1.3.2. FD Tabaka için Genel Denklemlerin Elde Edilmesi.....	23
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	31
2.1. Problemin Tanımı.....	31
2.2. Problemin Çözümü.....	32
2.3. Problemin Çözümünde Kullanılacak Denklemler.....	32
2.3.1. Homojen Tabaka için Kullanılacak Denklemler.....	32
2.3.2. FD Tabaka için Kullanılacak Denklemler	33
2.4. Probleme İlişkin Sınır Şartları.....	33
2.5. Katsayıların Belirlenmesi	35
2.6. İntegral Denklemlerin Elde Edilmesi	38
2.6.1. Birinci İntegral Denklemin Elde Edilmesi.....	38
2.6.2. İkinci İntegral Denklemin Elde Edilmesi.....	40
2.7. İntegral Denklemlerin Boyutsuzlaştırılması.....	45
2.8. İntegral Denklemlerin Sayısal Çözümü	47
3. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	50

3.1. Giriş	50
3.1.1. Temas Uzunlukları ve Temas Gerilmelerine İlişkin Bulgular	50
3.1.2. Pasternak Zemindeki Yer Değiştirmelere İlişkin Bulgular	72
3.1.3. Elde Edilen Sonuçların Literatürdeki Çalışmalar ile Karşılaştırılması	74
4. SONUÇLAR	77
5. KAYNAKLAR	78
ÖZGEÇMİŞ	



Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

PASTERNAK ZEMİNE OTURAN VE DAİRESEL RİJİT BLOK ARACILIĞIYLA YÜKLENEN BİRİ FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ İKİ TABAKANIN TEMAS PROBLEMİ

Aleyna YAZICIOĞLU
Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ
2024, 84 Sayfa

Bu çalışmada, Pasternak temele oturan ve dairesel rijit bir blok aracılığıyla yüklenen iki tabakanın sürtünmesiz temas problemi, elastisite teorisine göre incelenmiştir. Tabakaların malzeme özellikleri ve yükseklikleri farklı olup; üst tabaka homojen, alt tabaka ise fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) özelliktedir. Homojen özellikteki tabakaya üstten dairesel rijit blok yardımıyla tekil yük etki ettirilmiştir. Pasternak zemin üzerinde bulunan tabaka ise FD özelliğe sahiptir. Çözümde her iki tabakanın ağırlıkları ihmal edilmiş olup Poisson oranları sabit tutulmuştur. FD tabakanın kayma modülü yüksekliğe bağlı olarak değişmektedir. Çözümün sürtünmesiz ortamda gerçekleştiği düşünüldüğünden ara yüzeylerde sadece basınç gerilmeleri oluşacağı kabul edilmiştir.

Birinci bölümde, homojen ve fonksiyonel derecelendirilmiş tabakaya ilişkin temas problemlerine ait tarihsel gelişimden söz edilmiştir. Bu bölümde ayrıca homojen tabaka ve FD tabakaya ait genel denklemler, elastisite teorisi ve integral dönüşüm teknikleri kullanılarak elde edilmiştir. İkinci bölümde, problemin tanımı yapılmış ve sınır şartları verilmiştir. Birinci bölümde elde edilen gerilme ve yer değiştirme ifadeleri, ikinci bölümde sınır şartlarında yerlerine yazılarak sekiz bilinmeyenli sekiz cebrik denklem sistemi elde edilmiştir. Bu denklem sisteminin çözümünden, gerilme ve yer değiştirme ifadesindeki katsayılar bilinmeyen temas gerilmelerine bağlı olarak elde edilmiştir. Katsayılar bulunurken kullanılmayan iki sınır şartında, katsayıların yerine yazılması ile problem iki integral denklemden oluşan bir integral denklem sistemine indirgenmiştir. Gauss-Chebshev integrasyon formülasyonu yardımıyla integral denklem sistemi bir cebrik denklem sistemine dönüştürülmüş ve bilinmeyen temas gerilmeleri ile temas mesafeleri elde edilmiştir. Üçüncü bölümde, dairesel rijit blok ile homojen tabaka ve homojen tabaka ile FD tabaka arasındaki temas gerilmeleri ve temas mesafeleri; farklı tabaka yükseklikleri, FD tabakanın rijitlik parametresi, Pasternak zemin özellikleri ve dairesel rijit blok yarıçapları için hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar grafik ve tablolar halinde sunulmuştur. Dördüncü bölümde, elde edilen sonuçlar değerlendirilmiş ve bu bölümün ardından kaynaklar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Temas Problemi, Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme, Pasternak Zemin, Rijit Blok

Master Thesis

SUMMARY

CONTACT PROBLEM OF TWO LAYERS ONE OF FUNCTIONALLY GRADED, LOADED BY CIRCULAR RIGID BLOCK AND RESTING ON A PASTERNAK FOUNDATION

Aleyna YAZICIOĞLU

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Civil Engineering Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ
2024, 84 Pages

In this study, the frictionless contact problem of two layers resting on a Pasternak foundation and loaded by a circular rigid block is investigated according to the theory of elasticity. The material properties and heights of the layers are different; the upper layer is homogeneous and the bottom layer is functionally graded (FG). The homogeneous layer is loaded by means of cylindrical punch that applies a concentrated force. The layer on the Pasternak foundation has functionally grading material properties. In the solution, the weights of both layers are neglected and Poisson's ratios are kept constant. The shear module of the FG layer changes depending thickness. Solution is supposed at frictionless and stresses of pressure is allowed.

First chapter, layers of homogeneous and FG is mentioned historical developments of contact problems. In this chapter, the general equations for the homogeneous layer and the FG layer are obtained using the theory of elasticity and integral transformation techniques. In the second chapter, the problem is defined and boundary conditions are presented. Eight constant coefficients and eight linear algebraic equations are acquired by applying the expression of stresses and displacements to the boundary conditions. Solving the equation system, coefficients are expressed by depending on the unknown contact stresses. The problem is reduced to a system of integral equations consisting of two equations by substituting the coefficients in two boundary conditions not used in finding the coefficients. Gauss-Chebyshev integration formulas are employed to numerically analyze the integral equations and integral equations system is solved. Contact stresses and contact lengths have been determined. In the third chapter, the contact stresses and contact distances are calculated between the circular rigid block and the homogeneous layer, as well as between the homogeneous layer and the FG layer, for various layer thicknesses, the stiffness parameter of the FG layer, Pasternak foundation properties, and radius of the circular rigid blocks. The obtained results are presented with graphs and tables. In the fourth chapter, the results are evaluated, followed by the references chapter.

Key Words: Contact Problem, Functionally Graded Material, Pasternak Foundation,
Circular Rigid Block

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 1.	Problemin geometrisi ve yükleme durumu	31
Şekil 2.	Çeşitli β rijitlik parametresi değerine göre a/h_1 yarı temas uzunluğunun R/h_1 ile değişimi ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_1/\mu_0 = 1$, $k_w = 1$, $k_p = 1$).....	51
Şekil 3.	Çeşitli β rijitlik parametresi değerine göre b/h_1 yarı temas uzunluğunun R/h_1 ile değişimi ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_1/\mu_0 = 1$, $k_w = 1$, $k_p = 1$).....	52
Şekil 4.	FD tabakanın rijitlik parametresi ve μ_1/μ_0 oranına bağlı olarak a/h_1 yarı temas uzunluğunun değişimi($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $h_1/h_2 = 1$, $R/h_1 = 20$, $k_w = 1$, $k_p = 1$).....	53
Şekil 5.	FD tabakanın rijitlik parametresi ve μ_1/μ_0 oranına bağlı olarak b/h_1 yarı temas uzunluğunun değişimi($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $h_1/h_2 = 1$, $R/h_1 = 20$, $k_w = 1$, $k_p = 1$).....	54
Şekil 6.	FD tabakanın rijitlik parametresi ve h_1/h_2 oranına bağlı olarak a/h_1 yarı temas uzunluğunun değişimi($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $\mu_1/\mu_0 = 1$, $R/h_1 = 10$, $k_w = 1$, $k_p = 1$).....	55
Şekil 7.	FD tabakanın rijitlik parametresi ve h_1/h_2 oranına bağlı olarak b/h_1 yarı temas uzunluğunun değişimi($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $\mu_1/\mu_0 = 1$, $R/h_1 = 10$, $k_w = 1$, $k_p = 1$).....	55
Şekil 8.	FD tabakanın rijitlik parametresi ve çeşitli boyutsuz Pasternak zemin parametresi k_p ' ye bağlı olarak a/h_1 yarı temas uzunluğunun değişimi($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $\mu_1/\mu_0 = 1$, $h_1/h_2 = 1$, $R/h_1 = 10$, $k_w = 1$).....	57
Şekil 9.	FD tabakanın rijitlik parametresi ve çeşitli boyutsuz Pasternak zemin parametresi k_p ' ye bağlı olarak b/h_1 yarı temas uzunluğunun değişimi($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $\mu_1/\mu_0 = 1$, $h_1/h_2 = 1$, $R/h_1 = 10$, $k_w = 1$).....	57
Şekil 10.	Rijit blok ve homojen tabaka arasındaki temas yüzeyi boyunca oluşan temas gerilmelerinin, rijit blok yarıçapı ve β 'ya göre değişimi ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_1/\mu_0 = 1$, $k_w = 1$, $k_p = 1$).....	60
Şekil 11.	Homojen tabaka ve FD tabaka arasındaki temas yüzeyi boyunca oluşan temas gerilmelerinin, rijit blok yarıçapı ve β 'ya göre değişimi ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_1/\mu_0 = 1$, $k_w = 1$, $k_p = 1$)	61
Şekil 12.	Rijit blok ve homojen tabaka arasındaki temas yüzeyi boyunca oluşan temas gerilmelerinin, μ_1/μ_0 oranına ve β 'ya göre değişimi ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $h_1/h_2 = 1$, $R/h_1 = 20$, $k_w = 1$, $k_p = 1$)	63

Şekil 13. Homojen tabaka ve FD tabaka arasındaki temas yüzeyi boyunca oluşan temas gerilmelerinin, μ_1/μ_0 oranına ve β 'ya göre değişimi ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $h_1/h_2 = 1$, $R/h_1 = 20$, $k_w = 1$, $k_p = 1$).....	65
Şekil 14. Çeşitli h_1/h_2 tabaka yükseklikleri oranları ve β 'ya bağlı olarak, rijit blok ile homojen tabaka arasındaki temas yüzeyi boyunca oluşan temas gerilmelerinin değişimi ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $\mu_1/\mu_0 = 1$, $R/h_1 = 10$, $k_w = 1$, $k_p = 1$)	67
Şekil 15. Çeşitli h_1/h_2 tabaka yükseklikleri oranları ve β 'ya bağlı olarak, homojen tabaka ile FD tabaka arasındaki temas yüzeyi boyunca oluşan temas gerilmelerinin değişimi ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $\mu_1/\mu_0 = 1$, $R/h_1 = 10$, $k_w = 1$, $k_p = 1$)	68
Şekil 16. Çeşitli Paternak zemin parametresi (k_p) ve β değerine bağlı olarak, rijit blok ile homojen tabaka arasındaki yarı temas yüzeyi boyunca oluşan temas gerilmelerinin değişimi ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $\mu_1/\mu_0 = 1$, $h_1/h_2 = 1$, $R/h_1 = 10$, $k_w = 1$)	70
Şekil 17. Çeşitli Paternak zemin parametresi (k_p) ve β değerine bağlı olarak, homojen tabaka ile FD tabaka arasındaki yarı temas yüzeyi boyunca oluşan temas gerilmelerinin değişimi ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $\mu_1/\mu_0 = 1$, $h_1/h_2 = 1$, $R/h_1 = 10$, $k_w = 1$)	72
Şekil 18. Çeşitli Pasternak zemin parametresi k_w 'ye bağlı olarak, FD tabaka ve Pasternak zemin arasındaki temas yüzeyi boyunca oluşan yer değiştirmelerin değişimi ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $\mu_1/\mu_0 = 1$, $\beta = -1$, $k_p = 0$).....	73
Şekil 19. Çeşitli Pasternak zemin parametresi k_p 'ye bağlı olarak, FD tabaka ve Paternak zemin arasındaki temas yüzeyi boyunca oluşan yer değiştirmelerin değişimi ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $\mu_1/\mu_0 = 1$, $\beta = -1$, $k_w = 1$).....	74

TABLolar DİZİNİ

Sayfa No

Tablo 1. Çeşitli dairesel rijit blok yarıçapı ve β değerlerine bağlı olarak, rijit blok ile homojen tabaka ve homojen tabaka ile FD tabaka arasındaki temas uzunlukları ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_1/\mu_0 = 1$, $k_w = 1$, $k_p = 1$).....	51
Tablo 2. Çeşitli μ_1/μ_0 kayma modülü oranları ve β değerlerine bağlı olarak, rijit blok ile homojen tabaka ve homojen tabaka ile FD tabaka arasındaki yarı temas uzunlukları ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $h_1/h_2 = 1$, $R/h_1 = 20$, $k_w = 1$, $k_p = 1$)	53
Tablo 3. Çeşitli h_1/h_2 tabaka yükseklikleri oranları ve β değerine bağlı olarak, rijit blok ile homojen tabaka ve homojen tabaka ile FD tabaka arasındaki yarı temas uzunlukları ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $\mu_1/\mu_0 = 1$, $R/h_1 = 10$, $k_w = 1$, $k_p = 1$)	54
Tablo 4.Çeşitli boyutsuz Pasternak zemin parametresi k_p ve β değerine bağlı olarak, rijit blok ile homojen tabaka ve homojen tabaka ile FD tabaka arasındaki yarı temas uzunlukları($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $\mu_1/\mu_0 = 1$, $R/h_1 = 10$, $h_1/h_2 = 1$, $k_w = 1$)	56
Tablo 5. Çeşitli boyutsuz zemin parametreleri k_w ve k_p değerine bağlı olarak, rijit blok ile homojen tabaka ve homojen tabaka ile FD tabaka arasındaki yarı temas uzunlukları ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $\mu_1/\mu_0 = 1$, $R/h_1 = 10$, $h_1/h_2 = 1$, $\beta = 0.01$).....	58
Tablo 6.Çeşitli rijit blok yarıçapı değerleri ve $\mu_1/(P/h_1)$ boyutsuz yük parametreleri için temas uzunluklarının (Çömez, 2003) ile karşılaştırması.....	75
Tablo 7. Çeşitli rijit blok yarıçapı değerleri için rijit blok ile homojen tabaka ve homojen tabaka ile FD tabaka arasındaki yarı temas uzunluklarının Eyüboğlu (2019) ile karşılaştırılması ($k_w = 1$).....	75
Tablo 8. Çeşitli yay sabiti değerleri için rijit blok ile homojen tabaka ve homojen tabaka ile FD tabaka arasındaki yarı temas uzunluklarının Eyüboğlu (2019) ile karşılaştırılması	76

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

a	: Rijit blok yarı temas mesafesi uzunluğu
b	: Homojen tabaka ile FD tabaka arasındaki temas uzunluğu
P	: Tekil yük
$p_1(x)$	: Rijit blok altındaki temas gerilmesi
$p_2(x)$	: Homojen tabaka ile FD tabaka arasındaki temas gerilmesi
$F(x)$	: Rijit blok profilini tanımlayan fonksiyon
β	: FD tabakanın rijitlik parametresi
μ_1	: Homojen tabakanın kayma modülü
$\mu_2(y)$	: FD tabakanın kayma modülü
κ_1, κ_2	: Homojen ve FD tabakanın malzeme sabitleri
h_1	: Homojen tabakanın yüksekliği
h_2	: FD tabakanın yüksekliği
h	: Toplam tabaka yüksekliği
R	: Rijit dairesel bloğun yarıçapı
u, v, w	: Sırasıyla x, y, z doğrultularındaki yer değiştirme bileşenleri
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	: x, y, z doğrultularındaki uzama şekil değiştirmeleri
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	: Kayma şekil değiştirme bileşenleri
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	: x, y, z doğrultularındaki normal gerilme bileşenleri
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	: Kayma gerilmesi bileşenleri
ϕ, ψ	: FD tabaka için ters Fourier dönüşüm fonksiyonları
λ	: Lamé sabiti
k	: Pasternak zemin yay sabiti
G	: Pasternak zemin kayma modülü
k_w	: Boyutsuz Pasternak zemin yay sabiti
k_p	: Boyutsuz Pasternak zemin kayma modülü

1. GENEL BİLGİLER

Temas problemleri, uygulamada cisimlerin birbirine teması sonucu oluşan gerilme ve şekil değiştirmeler neticesinde geniş uygulama alanı bulmuştur. Temas halindeki bu cisimler de fiziksel ve mekanik özelliklerden yararlanılarak, çözümlenebilecek ideal problem formatına getirilmiştir. Burada temasın karakteri, cisimlerin temas karşısındaki iç gerilmeleri, birbirlerine uyguladıkları etki tepki kuvvetleri ve cisimlerde meydana gelen şekil değiştirmeler yapının davranışı için önemli hususlardır.

İdealize edilmiş temas problemlerinin çözümü ile temas bölgesindeki temas gerilmelerinin dağılımı ve temasın uzunluğunun tespit edilmesi sayesinde cismin tasarımı ve üretileceği malzeme açısından avantaj sağlamaktadır. Teknolojideki ilerlemeler ve teorik çözümlerin çeşitli programlar ile bilgisayar ortamında uygulanabilmesi de temas problemlerinin çözümde büyük yol kat edilmesini sağlamıştır.

Geçmişten günümüze gelene kadar temas problemleri, inceleme gereği duyulmuş farklı birçok problem için uygulanmıştır. Bu problemlere kara yolları, demiryolları ve havaalanı gibi yapılarda hareketli veya hareketsiz tabakaların yüzey ile oluşturdukları temaslar örnek verilebilir. Bunların yanı sıra sanayi alanında kullanılan silindirik bilyeler, miller ve akaryakıt siloları da temas mekaniğinin uygulama alanında olan konulardır.

Geçmişte temas problemlerinin çözümünde sıkça kullanılan homojen malzemeler günümüzde yetersiz mekanik özellikleri sebebiyle daha az tercih edilmektedir. Bu malzemelerin yerine ihtiyaca uygun olarak tasarlanmış yenilikçi malzemeler tercih edilmektedir. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme (FDM) olarak adlandırılan bu yenilikçi malzemenin içerisinde farklı malzemelerin ihtiyaç duyulan özellikleri bir araya getirilmiş olması, korozyon dirençlerinin yüksek olması ve diğer dokularla yüksek uyumluluk gösterebilmesi tercih edilmesine sebep olmuştur. FDM'nin avantajlı yönlerinin yanında, özel üretim teknikleri gerektirmeleri malzemenin maliyetine yansımaktadır.

1.1. Temas Problemlerinin Tarihsel Gelişimi

Temas mekaniğinin ortaya çıkışından sonra birçok araştırmacı temas problemleri ile günlük hayatta sıkça karşılaşılmasından dolayı inceleme ihtiyacı duymuştur. İlk olarak Heinrich Hertz (1882) tarafından yazılmış ‘‘ On the Contact of Elastic Solids’’ isimli makalede, merceklerin üzerine uygulanan kuvvetin optik özellikleri ile ilişkisi araştırılmıştır.

Hertz, bu çalışmasında iki eğrisel yüzeyin teması ile merceklerde oluşan gerilmeler ve şekil değiştirmeler arasındaki ilişkiyi inceleyerek temas problemlerine öncülük edecek adımı atmıştır. Aradan 100 yılı aşkın bir süre geçmesine rağmen temas problemleri bugün hala dinamikliğini koruyan konular arasındadır.

Temas problemleri ile ilgili çalışmalar Hertz'in araştırmalarından sonra Sneddon'un integral dönüşüm tekniklerini (Sneddon, 1951) temas problemlerinin çözümünde kullanması ile daha ileri bir aşamaya taşınmıştır. Zamanla bilgisayar teknolojisindeki ilerlemeler ve sayısal çözüm tekniklerindeki gelişmeler sayesinde de temas mekaniği çeşitli geometrilerdeki ve mekanik özellikteki malzemeler için araştırma yapılmasına olanak sağlamıştır. Bu çalışmada, farklı malzeme özelliklerinde oluşturulmuş iki tabaka bulunduğundan her iki malzeme için günümüze kadar yapılan çalışmalar iki başlık altında aşağıda özetlenmiştir.

1.1.1. Homojen Tabakalı Ortamlara İlişkin Temas Problemleri ile İlgili Yapılan Çalışmalar

Alblas ve Kuipers (1970) çalışmalarında, sürtünmesiz ve rijit bir dikdörtgen bloğun sonlu kalınlıktaki elastik bir tabakaya yüklenmesini incelemişlerdir. Blok düşey doğrultuda elastik tabakaya bastırılmış ve daha sonra dışardan hafifçe döndürülmüş bir moment yükü uygulanmıştır. Bu iki farklı yükleme altında, tabakanın alt tarafının rijit bir zemine oturtulması ve sürtünme olmadan elastik tabakanın kaymasına izin verilmesi durumları için ayrı ayrı irdelenmiştir. P , bloğun düşey yükü ile M , moment yükünün tabakaya etkisi araştırılmıştır.

Dhaliwal ve Rau (1970), elastik temel üzerine oturan elastik tabakanın farklı blok çeşitlerine göre basit formüllerini çıkarmışlardır. Araştırmacılar, temas sonucu deforme olmuş tabakanın yüzey şekli ve blok basıncını araştırmışlardır. Problem Fredholm integral denklemlerine indirgenerek sayısal yöntemler ve kuvvet serileri ile çözülmüştür.

Dhaliwal (1970), rijit blok ile bastırılan elastik tabaka ile farklı elastik sabite sahip zeminin temas problemini incelemiştir. Sınır değer problemi, ikinci tip Fredholm integral denklemine indirgenmiştir. İntegral denklem sayısal yöntemler ve kuvvet serileri ile çözülmüştür.

Erdoğan ve Gupta (1971), elastik yarım düzeleme oturan farklı mekanik özellikteki elastik tabakanın temas problemini ele almışlardır. Problemin çözümünde integral

denklemler cebirsel denklem sistemine indirgenmiştir. Temas gerilmelerinin tablolar halinde gösterildiği sayısal örnekler verilmiştir.

Keer ve Chantaramungkorn (1972), elastik bir tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki temas problemini ele almışlardır. Tabakada, sonlu uzunlukta bir bölge hariç tüm yüzeye düzgün yayılı yük uygulanmıştır. Çalışmada, homojen olmayan Fredholm integral denklemler sayısal yöntemlerle çözülmüş ve ilgili fiziksel büyüklükler eğriler aracılığıyla sunulmuştur.

Chen ve Engel (1972), elastisite teorisine dayalı olarak çok tabakalı ortamda temas problemini analiz etmişlerdir. Karışık sınır değer problemi, bilgisayar ortamında hesaplamaya uygun bir yaklaşım tekniğiyle formüle edilmiştir. Ayrıca, farklı tabaka kalınlıklarının fiziksel etkisini göstermek için sayısal örnekler sunulmuştur.

Ratwani ve Erdoğan (1973), elastik yarım düzlem üzerindeki elastik bir tabaka için sürtünmesiz temas problemini araştırmışlardır. Tabaka ile yarım düzlem arasında temasın sürtünmesiz olduğu ve aralarında sadece basınç gerilmelerinin olduğu varsayılmıştır. İntegral dönüşüm teknikleri kullanılarak blok ile tabaka arasındaki ve tabaka ile yarım düzlem arasındaki gerilmelerin bilinmeyen olduğu bir integral denklem takımı elde edilmiştir. Tabakaya blok ile bir tekil yük etki ettirilmesi durumunda integral denklemler çözülerek bilinmeyen temas gerilmeleri ve temas uzunlukları elde edilmiştir.

Spence (1975), dikdörtgen veya eğrisel profillerdeki dönel simetrik bir blok tarafından tekil yük olarak uygulanan normal kuvvet altında elastik bir yarım düzlem, temas bölgesindeki μ katsayılı Coulomb sürtünmesi varsayımı altında karışık sınır değer problemi olarak incelemiştir.

Civelek ve Erdoğan (1975), yerçekimini göz önüne alarak düzlem sürtünmesiz temas problemini çözmek için bir alternatif sunmuşlardır. Çalışmada, rijit bir temele oturtulan düzlem elastik tabakanın tekil bir yük ile çekilmesiyle oluşan gerilmeleri incelemiştir. Problemin çözümünde öncelikle sürekli temas problemi ele alınmış ve arayüz ayrımının başlatılmasına karşılık gelen yükün kritik değeri elde edilmiştir. Daha sonra süreksiz temasın karışık sınır değer problemi, çatlak problemleri için kullanılan bir teknik ile tekil integral denklem sistemine indirgenmiştir. Sayısal sonuçlar, temas gerilmesi dağılımlarını ve ayrılma bölgesinin uzunluğunu içermektedir. Çalışma sonucunda elde edilen önemli bulgulardan biri, ayrılma uzunluğu ya da temas gerilmelerinin tabakanın elastik sabitine bağlı olmamasıdır. Yine Civelek ve Erdoğan (1976) tarafından yapılan diğer bir çalışmada ise

tabakanın tekil yük ile çekilmesi durumu yerine yükün basınç olması durumunda temas gerilmeleri ve ayrılma uzunluğu incelenmiştir.

Adams (1978), elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan ve sabit hızla hareket eden bir tekil yük tarafından bastırılan elastik tabakanın temas problemini incelemiştir. Farklı malzeme kombinasyonları ve hız aralığı ile temas bölgesinin kapsamı ve konumu için temas basıncı hesaplanmıştır.

Geçit (1980), elastik yarım düzlem üzerinde bulunan sonsuz elastik bir tabaka için düzlem temas problemini incelemiştir. Elastik tabakaya yayılı yük ve yer çekim kuvvetine ek olarak bir tekil yük etki ettirilmiştir. Çözümde ayrılmayı başlatan kritik yük, tabaka ve yarım düzlem arasındaki temas gerilmeleri dağılımları elde edilmiştir.

Haslinger (1984), Coulomb kanununa uygun olarak sürtünmeli temas probleminin sayısal çözümünü ele almıştır. Problem, varyasyonel eşitsizlik tarafından oluşturulan belli bir operatör için sabit nokta problemi olarak formüle edilmiş ve çözülmüştür.

King ve O'Sullivan (1987), elastik yarım düzlem üzerine oturan elastik bir tabakada birleştirilmiş normal ve kayan silindirik temas altında oluşan yarı statik teması incelenmişlerdir.

Çakıroğlu ve Erdöl (1989), malzeme sabitleri ve yükseklikleri farklı olan iki tabakanın elastik zemine oturması ile oluşan temas problemini ele almışlardır. Ara yüzeylerin sürtünmesiz olduğu varsayılmış ve kütle kuvvetleri ihmal edilerek problem çözülmüştür. Problemin çözümünde, tekil yük ve yayılı yük durumları ayrı ayrı ele alınmıştır.

Dempsey vd. (1990), Winkler zemine oturan homojen ve izotropik bir tabakanın düzlem temas problemini incelemişlerdir. Homojen tabaka sınırlı bir derinliğe fakat sonsuz düzlem içi boyutlara sahiptir. Tabakada yayılı yük ve farklı geometrilerdeki bloklar ile yüklenmesi durumları, elastisite ve kırış teorileri için ayrı ayrı çözülmüş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Çakıroğlu ve Çakıroğlu (1991), elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan, elastik bir tabakanın üzerine uzunlukları $2a$ olan simetrik yayılı yükler etki ettirmiş ve oluşan teması incelemişlerdir. Sürtünmenin olmadığı varsayılarak, sürekli ve süreksiz durumlar için temas problemi çözülmüştür. Sürekli temas durumu için, tabaka boyutlarının farklı oranları ve farklı malzeme özelliklerine göre ilk ayrılma yükü ve temas gerilmeleri elde edilmiştir. Sürekli ve süreksiz temas durumlarında, problem tekil bir integral denkleme indirgenmiştir. İntegral denklem Gauss-Chepyshev integrasyon formülasyonu ile çözülerek, sonuçlar grafikler aracılığıyla sunulmuştur.

Keer ve Kuo (1992), küresel bir blok ile elastik bir yarım düzleme bağlı çok tabakalı bir yapı arasındaki üç boyutlu temas problemini araştırmışlardır. Çalışmada, tabakaların ve yarım düzlemin enine izotropik malzemelerden oluştuğu varsayılmaktadır. Henkel dönüşümleri kullanılarak bu karışık sınır değer problemini çözmek için yöntem geliştirilmiştir. Yöntemde, temas yüzeyi bir dizi Henkel fonksiyonuyla temsil edilmiştir. Bu Henkel fonksiyonları, temas probleminin integral denklemini çözmek için kullanılmıştır. Sonuç olarak, yüzeyde temastan kaynaklı oluşabilecek gerilme bileşenleri çeşitli kaplama kalınlıkları için araştırılmıştır.

Peletier ve Van Den Berg (1996), iki elastik tabaka arasındaki temas problemini araştırmışlardır. Problemden, tabaka kalınlıkları ve elastisite modülleri farklı alınmıştır. Çalışmada, temas problemini çözmek için bir yöntem geliştirilmiştir. Söz konusu yöntem, temas yüzeyini bir dizi elemanla temsil ederek çalışmaktadır. Elemanlar arasındaki bağlantılar, temas kuvvetlerini ve temas deformasyonunu hesaplamak için kullanılmaktadır. Çalışmada, temas mesafesinin elastik tabakadaki deformasyonu ne kadar etkilediği gösterilmiştir.

Birinci ve Erdöl (1999), ağırlıksız iki tabakadan oluşan bileşik tabakanın basit mesnetler üzerine oturması ile oluşan temasını araştırmışlardır. Birleşik tabakanın üstten dairesel ve dikdörtgen rijit blok ile $2P$ büyüklüğünde yük yüklenmesi durumları ayrı ayrı incelenmiştir. Çözümde, temas mesafeleri ve temas gerilmeleri elde edilmiştir.

Özşahin (2000), iki rijit blok üzerine yerleştirilmiş iki elastik tabakadan oluşan bir bileşik tabakanın sürekli ve süreksiz temas durumlarını incelemiştir. Araştırma kapsamında, tabaka üstten $2a$ genişliğinde düzgün yayılı yük etkisi altındadır. Sürekli temas durumunda iki tabaka arasında ilk ayrılmayı oluşturacak yük ve ilk ayrılmanın oluşacağı mesafe araştırılmıştır. Süreksiz temas durumunda ise ilk olarak rijit blok ve tabakalar arasındaki ayrılma irdelenmiştir. Daha sonra iki elastik tabaka arası ayrılma durumu için çözüm üretilmiştir.

Kahya vd. (2001), üst tarafından rijit olarak mesnetlenmiş ve alt tarafından rijit blok ile bastırılmış tabakanın temas problemini elastisite teorisine göre incelemişlerdir. Rijit bloğun dairesel, parabolik ve dikdörtgen olması durumları için çözüm ayrı ayrı yapılmış ve sonuçlar çeşitli boyutsuz parametreler için verilmiştir.

Wozniak vd. (2002), rijit bir küre veya rijit düz bir silindir tarafından yüklenen elastik bir tabakanın eksenel simetrik temas problemini incelemişlerdir. Henkel integral

dönüşümleri kullanılarak problem integral denklem sistemlerine indirgenmiştir. Bu denklemler, sayısal yöntemler kullanılarak çözülmüştür.

Birinci ve Erdöl (2003), elastik sabitleri ve yükseklikleri farklı olan iki sonsuz elastik tabaka için düzlem temas problemini incelemişlerdir. Çalışmada, tabakaların üzerine uzunluğu $2a$ olan yayılı yük uygulanmış ve alt tabaka Winkler temel üzerine oturtulmuştur. Kütle kuvvetlerinin de ilave edildiği çalışmada, belirlenen λ_{cr} değerine göre problem sürekli ve süreksiz temas durumları için çözülmüştür.

Özşahin vd. (2004), iki dairesel panç arasındaki elastik tabakada temas uzunluklarını tahmin etmek için bir sinir ağı modeli geliştirmişlerdir. İlk olarak problem elastisite ve integral dönüşüm teknikleri kullanılarak çözülmüş ve buradan elde edilen değerler sinir ağına işlenmiştir. Çalışmanın amacı, sinir ağının temas mekaniği alanında potansiyel kullanımının avantajlarını araştırmaktır. Çalışma sonucunda, sinir ağları teorik çözüm ile uyumlu sonuçlar üretmiştir. Ayrıca çözüm süresini önemli ölçüde azaltmıştır.

Çömez vd. (2004), rijit bir blok ile bastırılmış farklı elastik sabite ve yüksekliklere sahip iki tabakanın temas problemini ele almışlardır. Problemde blok ile üst tabaka arasındaki ve üst tabaka ile alt tabaka arasındaki temasın sürtünmesiz olduğu varsayılmıştır. İntegral dönüşüm teknikleri ve sınır koşulları kullanılarak temas gerilmelerinin bilinmeyen olduğu bir integral denklem elde edilmiştir. İntegral denklemin çözümü yapılarak, temas gerilmeleri ve kayma gerilmeleri ile ilgili sonuçlar çeşitli boyutsuz büyüklükler için verilmiştir.

Özşahin vd. (2007); farklı elastik sabitlere ve yüksekliklere sahip tabakalar, üst kısmından düzgün yayılı yüke maruz bırakılmıştır. Tabakalar iki rijit düz destek üzerindedir. Problemde tabakalar arasındaki sürtünme dikkate alınırken, destekler ile tabaka arasındaki sürtünmeler göz ardı edilmiştir. Çözüm temas gerilmelerinin bilinmeyen fonksiyonlar olduğu tekil bir integral denkleme indirgenerek yapılmıştır.

Kahya vd. (2007), rijit panç aracılığıyla bastırılan iki tabakalı ortotropik elastik tabakanın sürtünmesiz temas problemi incelemişlerdir. Çözümde kütle kuvvetleri dikkate alınmıştır. Rijit blok aracılığıyla uygulanan dış yük kritik değerden küçük veya eşit ise sürekli temasın korunduğu kabul edilmiştir. Kritik ayrılma yükü, ilk ayrılma noktası ve temas gerilmeleri için sayısal sonuçlar verilmiştir.

Çakıroğlu vd. (2011), iki elastik çeyrek düzleme oturan tabakaya üstten panç aracılığıyla tekil yük etki ettirilerek oluşan temas problemini incelemişlerdir. Kütle kuvvetlerinin ihmal edildiği problemde, elastisite teorisi ve integral dönüşüm tekniklerinden

faýdalanılmıştır. Tabaka için Fourier dönüşümleri kullanılırken, çeyrek düzlem için Mellin dönüşümleri kullanılmıştır. Elde edilen integral denklemler Gauss-Jacobi integrasyon formülasyonu ile çözülmüştür. Çeşitli boyutsuz büyüklükler için sonuçlar grafikler yardımı ile sunulmuştur.

Adıyaman ve Birinci (2013), rijit bir blok ile üstten P yükü etki ettirilen ve alttan iki elastik çeyrek düzlem üzerine oturtulan elastik tabakanın temas problemini incelemişlerdir. Literatürdeki diğer çalışmalarla benzer olarak, elastisite ve integral dönüşüm tekniklerinden faydalanılarak temas gerilmelerinin bilinmeyen olduğu bir integral denklem elde edilmiştir. İntegral denklem Gauss-Jacobi integrasyon yöntemi ve Matlab programı yardımıyla çözülmüştür.

Birinci vd. (2015), Winkler temele oturan ve belirli uzunlukta eksenel simetrik yayılı yüke maruz bırakılan elastik, homojen ve izotropik özellikteki tabakaların sürekli ve süreksiz temas problemini incelemişlerdir. Problemde tüm arayüzelerde sürtünme olmadığı ve temas yüzleyenlerinde yalnızca basınç gerilmelerinin iletildiği varsayılmıştır. Çözüm elastisite teorisi ve integral dönüşüm teknikleri kullanılarak analitik ve ANSYS programından faydalanılarak sonlu elamanlar yöntemi ile çözülmüştür.

Öner vd. (2015), yarı sonsuz bir düzleme oturan elastik iki tabaka ve rijit dairesel bir bloğun temas problemini araştırmışlardır. Tüm yüzeylerin sürtünmesiz olduğu ve yüzeyler arasında sadece basınç gerilmelerinin olduğu düşünülmüştür. Problemde, elastisite teorisi ve integral dönüşüm tekniklerinden faydalanılarak analitik çözüm yapılmıştır. Daha sonra problem sonlu elmanlar yöntemi (FEM) yardımıyla da çözümlenerek iki yöntem kıyaslanmıştır.

Kaya vd. (2017); üstten rijit bağlı, sabit yükseklikli homojen ve alttan dairesel rijit bir blok aracılığıyla bastırılan tabakanın temas problemini incelemişlerdir. Oluşan sürekli temas durumu sonlu elemanlar yöntemi ile ANSYS programında analiz edilmiştir. Elde edilen sonuçlar analitik çözüm ile karşılaştırılmıştır. Yaylacı (2017)'de problemi iki tabaka hali için ele almıştır. Üst tabaka dairesel rijit bir blok ile bastırılırken alt tabaka rijit zemine bağlanmıştır. Problem tüm yüzeylerde sürtünme olmadığı varsayılarak ve kütle kuvvetleri ihmal edilerek çözülmüştür. Aynı şekilde elde edilen sonuçlar analitik çözümle kıyaslanmıştır.

Çömez (2019), rijit hareketli bir blok tarafından bastırılan ortotropik bir tabakanın sürtünmeli temas problemini incelemiştir. Rijit blok, ortotrop tabaka üzerinde sabit bir ses altı hızda hareket etmektedir. Tabaka temele tam bağlıdır ve dış yükler rijit blok ile tabakaya aktarılmaktadır. Fourier integral dönüşüm teknikleri kullanılarak temas gerilmelerinin

bilinmeyen olduğu iki integral denklem elde edilmiştir. İntegral denklemler Gauss- Jacobi integrasyon formülasyonu ile çözülmüştür.

Yaylacı ve Avcı (2020); iki homojen, izotropik ve simetrik elastik çeyrek düzlemin üzerine oturan elastik tabakanın dairesel bir rijit blok ile bastırılması sonucu oluşan temasını, sonlu elemanlar yöntemi tabanlı ANSYS ve ABAQUS programlarında analiz etmişlerdir. Problemi düzlem halde inceleyip z eksenini doğrultusundaki genişlik birim olarak kabul edilmiştir. Sonuçlar mevcut literatürdeki analitik sonuçlarla karşılaştırılmış, ayrıca iki yazılımın sonuçları da Ortalama Hataların Karekökü (RMSE) kullanılarak kıyaslanmış ve birbirleri ile uyumlu sonuçlar elde edilmiştir.

Çömez (2021), rijit silindirik panç ile rijit zemine bağlı homojen piezoelektrik tabaka arasındaki sürekli temas problemini, termoelastik sürtünmeli temas için incelemiştir. Bloğun elektriği ve ısıyı düzgün ilettiği varsayılmıştır. Termoelastik piezoelektrik temas problemi için genel denklemler, yer değiştirme ve elektriksel sabitler, termoelastisite teorisi ve Fourier integral dönüşüm tekniklerinden faydalanılarak bulunmuştur. Sınır şartları kullanılarak problem ikinci türden Cauchy tipi tekil bir integral denkleme indirgenir. Tekil integral denklem, Gauss-Jacobi ve Gauss- Chebyshev formülasyonlarından faydalanılarak bir sayısal yöntem ile çözülmüştür.

Chen vd. (2022), çalışmada yapı ve yarım düzlem arasındaki temas problemlerine yenilikçi bir çözüm getirmeyi hedeflemişlerdir. Yer değiştirme akışı değişken olarak alınarak ölçeklendirilmiş sınırlı sonlu eleman denklemleri, eksenel simetrik tabaka ve yarı sonsuz düzlem için sırasıyla sanal iş prensibine göre hesaplanmıştır. Sayısal çözümde, her bir temas noktasındaki temas gerilmeleri, kayma ve temas durumu FEM'e dayalı artırılmış Lagrangian temas algoritmasının sonuçları ile karşılaştırılmıştır.

Üstün vd. (2023), elastisite teorisine göre sürtünmesiz temas ve çatlak problemini homojen yarı sonsuz bir tabakada irdemişlerdir. Çalışmada, temas ve çatlak durumu ayrı ayrı ele alınıp sonuç kısmında birlikte değerlendirilmiştir. Çalışmada, farklı yükleme durumu ve geometrik değişkenler için açılma ve kesme moduna bağlı gerilme dağılımları ve gerilme şiddeti faktörü elde edilmiştir.

1.1.2. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabakalı Ortamlara İlişkin Temas Problemleri ile İlgili Yapılan Çalışmalar

Giannakopoulos ve Suresh (1997), elastik tabakadaki elastisite modülünün üstel bir fonksiyona bağlı olarak değiştiğini kabul etmişleridir ve üzerine eksenel simetrik bir şekilde

bastırılmış tekil kuvvetten kaynaklanan gerilme ve yer değiştirmelerin oluşumunu incelemişlerdir.

Erdoğan ve Wu (1997), elastisite modülünün kalınlığa bağlı olarak sürekli değiştiği homojen olmayan tabakanın içerisinde sınırlarına dik bulunan çatlak problemini elastisite teorisine göre ele almışlardır. Problem; sabit kavrama, membran yükleme ve çatlak bölgesinden uzak bir noktada yükleme olarak üç farklı durum için çözülmüştür. Gerilme şiddeti faktörü; çatlağın boyutuna, konumuna ve malzemenin homojenliğini gösteren parametrenin farklı değerlerine bağlı olarak incelenmiştir.

Giannakopoulos ve Pallot (2000), elastik kademeli bir alt tabaka üzerindeki rijit bir silindirin iki boyutlu temas problemini çözmüşlerdir. Sürtünmesiz temas durumu için yüzeyler arasındaki yapışmanın etkisi incelenmiştir. Alt tabaka derinliğe göre değişen elastik modül ve yerel olarak izotropik özellikte olacak şekilde modellenmiştir. Sonuçlar aşınmaya karşı dirençli yüzeylerin tasarımında elastik derecelendirmenin faydalı olacağını göstermiştir.

Güler ve Erdoğan (2004), kayan temas yükleme durumunda fonksiyonel derecelendirilmiş tabakalarda kırılma başlangıcını araştırmışlardır. Tabakanın en alt kısmı metal en üst kısmı seramik özellikte davranacak şekilde üstel bir fonksiyona bağlanmış ve Poisson oranı sabit tutulmuştur. Temas alanında Coulomb sürtünme koşulları geçerlidir. Çalışmada malzemede homojenlik kat sayısının yorulma ve kırılmaya etkisi ele alınmıştır.

Gökay (2005), yüksek lisans tezinde fonksiyonel olarak derecelendirilmiş bir yüzeyin temas mekanizmasını incelemiştir. Çalışmada fonksiyonel derecelendirilmiş yüzey, rijit düz bir blok ile kayan sürtünmeli temasa maruz bırakılmıştır. Poisson oranını sabit kabul etmiştir. Elastisite teorisi ve fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka için yarı sonsuz düzlem yaklaşımı kullanılarak, problem ikinci türden tekil bir integral denkleme indirgenmiştir. Jacobi polinomları yardımıyla tekil integral denklem sayısal olarak çözülmüştür. Çalışmanın sonucunda seramik malzemelerin temas eden yüzeylerinin fonksiyonel olarak derecelendirilmesi, hasara karşı dirençlerinin artacağını doğrulamıştır.

El-Borgi vd. (2006), fonksiyonel olarak derecelendirilmiş bir tabaka ile homojen yarı sonsuz düzlem arasındaki sürtünmesiz temas problemini incelemiştir. Fonksiyonel derecelendirmiş tabakanın üst yüzeyinden $2a$ uzunluğunda bir yayılı yük etki ettirilmiştir. Çalışmanın amacı homojen olmayan tabakalarda temas gerilmelerini ve temas mesafelerini incelemektir.

Ke ve Wang (2006); keyfi bir eğriye bir dizi sürekli fakat parçalı doğru eğri ile yaklaşılabileceği teorisine dayanarak, FDM'yi birkaç alt tabakaya bölmüşlerdir. Her tabakada elastisite modülünün doğrusal fonksiyon olduğu varsayılmış ve Poisson oranı sabit tutulmuştur. Transfer matrisi ve Fourier dönüşüm teknikleri kullanılarak problem bir Cauchy tekil integral denklemine indirgenmiştir. Denklemin sayısal olarak çözülmesiyle temas basıncı ve temas bölgesi hesaplanmıştır. Liu vd. (2008) ise, aynı yaklaşımdan faydalananarak FDM eksenel simetrik ve sürtünmesiz temas probleminin çözümüne yeni yöntem geliştirmeyi hedeflemişlerdir. Henkel integral dönüşüm tekniği uygulanarak problem yine Cauchy tekil integral denklemine indirgenmiştir. Denklem sayısal olarak çözülerek temas basıncı ve bölgesi elde edilmiştir.

Güler ve Erdoğan (2007), parabolik ve silindir şeklindeki blok ile fonksiyonel derecelendirilmiş tabakada arasındaki temas problemini incelemişlerdir. Çalışmada malzemenin fonksiyonel derecelendirme katsayısı, sürtünme katsayısı ve çeşitli uzunluk parametrelerine bağlı olarak yorulma ve kırılma durumu analitik yöntemle çözümlenmiştir.

Rhimi vd. (2009), elastik fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ile homojen yarı sonsuz düzlem arasındaki sürtünmesiz eksenel simetrik temas problemini ele almışlardır. Problemden fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın bir kısmı için yük uygulanırken diğer kısımlarında yük yoktur. Sürtünmesiz temas probleminde Henkel dönüşümleri kullanılarak problemin çözümü temas gerilmelerinin ve uzunluklarının bilinmeyen olduğu tekil integral denkleme indirgenmiştir. Gauss-Chebychev integrasyon formülasyonu ve denge şartı kullanılarak denklem çözülmüştür.

Choi (2009), alttan rijit olarak bağlanmış ve kayma modülü kademeli değişen tabakanın üzerine sürtünmeli kayan düz blok ile yük yüklemiştir. Tabaka ile blok arasında sürtünme katsayısının sabit olduğu varsayılmıştır. Düzlem elastisite denklemleri ve Fourier integral dönüşüm teknikleri kullanılarak blok ile tabaka arasındaki temas, analitik yöntemle çözülmüştür.

Rhimi vd. (2011), fonksiyonel derecelendirilmiş bir tabaka ile homojen yarı düzlem arasındaki eksenel simetrik temas problemini ele almışlardır. Fonksiyonel derecelendirilmiş tabakaya üstten rijit bir blok yardımıyla P şiddetinde yük yüklenmiştir. Tabaka ile blok ve homojen yarı düzlem ile tabaka arasındaki temasın sürtünmesiz olduğu varsayılarak problem uygun integral dönüşümleri ile tekil integral denklem sistemine indirgenmiştir. İntegral denklemde Gauss-Chebychev integrasyon formülasyonu ile çözülmüştür.

Chen ve Chen (2012), derecelendirilmiş bir tabakanın homojen yarım düzlem ile rijit bir zımba arasındaki temas problemini araştırmışlardır. Yer değiştirmeler ve tabaka yüzeylerindeki gerilmeler Fourier dönüşüm teknikleri ve transfer matrisi yöntemi ile elde edilmiştir. Rijit zımbanın düz veya silindirik olması durumları için çözümler yapılmıştır. Sonuçlar aşınmaya dayanıklı kaplama yüzeylerinin tasarımı için FD malzemenin faydalı olduğunu göstermiştir.

Çömez (2013), Winkler temele oturmuş fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın temas problemini ele almıştır. Derecelendirilmiş malzemeye rijit dairesel bir panç aracılığıyla P yükü yüklenmektedir. Problemde tabakanın Poisson oranı sabit tutulmuş ve elastisite modülünün kalınlığa bağlı olarak değiştiği kabul edilmiştir. Fourier integral dönüşüm teknikleri ve sınır koşulları kullanılarak problem tekil integral denkleme indirgenmiştir. İntegral denklem Gauss-Chebyshev integrasyon formülasyonu kullanılarak çözülmüştür. Çözümde Winkler temelin etkisi FD tabakada incelenmiştir.

El-Borgi vd. (2014), FD tabakanın üstel bir fonksiyona bağlı olarak değişen kayma modülüne sahip olduğu ve Poisson oranının sabit kabul edildiği temas problemini incelemişlerdir. Problemde, tabaka alt yüzeyinden homojen yarı sonsuz düzlem ile tutuluyken üst yüzeyinden ise belli bir aralıkta normal basınç kuvveti uygulanmıştır. Coulomb yasasına göre normal basınç kuvveti altındaki temas bölgesinin, kayan temas koşulları altında olduğu varsayılarak çözüm aranmıştır. Ayrıca çözüme normal kuvvetin sebep olduğu sürtünme katsayısı da eklenmiştir. Çözümde homojen olmama faktörünün ve sürtünme katsayısının temas gerilmelerine ve dağılımına etkisi incelenmiştir.

Çömez (2015), bu çalışmada rijit silindirik bir panç ile fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın hareketli temas problemini ele almıştır. Tabakanın Poisson oranı sabit tutularak elastisite modülünün tabaka derinliği boyunca üstel bir fonksiyona göre değiştiği kabul edilmiştir. Panç ise normal bir kuvvete maruzdur ve sabit bir hızla hareket etmektedir. Çalışma hareketli yüke maruz bırakılan fonksiyonel derecelendirilmiş tabakalar için temas problemlerinin çözümündeki ilk çalışmalardandır.

Yan ve Li (2015), izotropik ve kayma modülün bir fonksiyonla değiştiği varsayılan fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ile elastik tabaka arasındaki temas problemini ele almışlardır. Fourier integral dönüşüm teknikleri ve sınır koşulları kullanılarak çözüme gidilmiştir. Daha önceki çalışmalara benzer olarak çözüm, tekil integral denkleme indirgendikten sonra Gauss-Chebyshev integrasyon formülleri ile basınç gerilmeleri ve uzunlukları elde edilmiştir. Sonuçlar çeşitli boyutsuz büyüklükler için sunulmuştur.

Ke vd. (2016); düz dairesel zımba, konik zımba ve küresel zımba ile yüklenmiş fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın eksenel simetrik ve sürtünmesiz temas problemini araştırmışlardır. FD tabaka, piezoelektrik homojen yarı sonsuz düzlemin üzerindedir. Zımbanın sabit elektrik potansiyeline sahip iyi bir iletken olduğu varsayılmaktadır. Henkel integral dönüşüm teknikleri kullanılarak problem tekil bir integral denkleme indirgenmiştir. Daha sonra integral denklem bilinmeyen temas gerilmelerini ve elektrik yükünü belirlemek için çözülmüştür.

Adıyaman vd. (2016), iki homojen çeyrek düzlem üzerindeki elastik fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın temas problemini ele almışlardır. FD tabakaya üstten sonlu bir aralık boyunca yayılı yük, eksenel simetrik olarak uygulanmaktadır. FD tabaka sabit Poisson oranına ve üstel bir fonksiyona göre değişim gösteren kayma modülüne sahiptir. Problem integral dönüşüm teknikleri kullanılarak temas basıncının ve temas gerilmelerinin bilinmeyen olduğu bir Cauchy tipi integral denkleme dönüştürülmüştür. Denklem Gauss-Jacobi integrasyon formülasyonu kullanılarak çözülmüştür. Homojen olmama parametresi değerinin sonuçlar üzerindeki etkisi araştırılmıştır.

Güler vd. (2017), ortotropik fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın üzerindeki silindirik zımba ile olan sürtünmeli temas problemini incelemişlerdir. Temas gerilmelerine ulaşmak için hem analitik hem de hesaplamalı çözüme başvurmuşlardır. Elastik modülün üstel fonksiyonla değiştiği ve ortotropiğin ana eksenlerinin kutupsal koordinatlarda bulunduğu varsayılmıştır. Analitik çözümde düzlem elastisite ve Fourier integral dönüşüm teknikleri kullanılarak problem ikinci tip Cauchy integral denkleme dönüştürülmüştür. Hesaplamalı modelde ise her bir sonlu elaman için elastisite modülü önceden belirlenen fonksiyonlar ile elemanın ağırlık merkezinde verilir. İki çözüm için sonuçlar karşılaştırılarak, doğruluğu ispatlanmıştır.

El-Borgi ve Çömez (2017), elastik derecelendirilmiş bir tabaka ile homojen bir yarım düzlem arasındaki doğrusal olmayan temasın azalması durumunda oluşan düzlem temas problemini incelemişlerdir. Denge şartının sağlanması koşulunun göz önünde bulundurulduğu bu problemde küresel kuvvet ve moment etkisi çözümlere eklenmiştir. Temas bölgesinin uzunlukları ve ilgili temas basınçlarını elde etmek için yeni geliştirilen tekrarlı bir algoritma ile çözüm aramışlardır.

Vasu ve Bhandakkar (2018); kayma modülünün yüzeye dik yön boyunca değiştiği kabul edilen bir FD yarım düzleme, tam silindirik bir panç aracılığıyla yük etki ettirilmesi sonucu oluşan temas problemini ele almışlardır. Düzlem gerilme koşulları altında çözüm

aranırken yüzey basıncını, yüzey yer değiştirmeleri ile ifade etmek için Green fonksiyonu, Airy gerilme fonksiyonları ve Fourier dönüşüm tekniklerinden faydalanmışlardır.

Adıyaman ve Birinci (2018), Winkler temele oturan fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka için genel bir çözüm aramışlardır. FD tabakada kayma modülünün kalınlığa bağlı olarak değiştiği ve Poisson oranının sabit olduğu varsayılmıştır. Üstten hem dairesel hem de dikdörtgen şeklinde bloklar ile tabakaya yük uygulanmaktadır. Blokların çeşitli konumlarına bağlı olarak elde edilen sonuçlar grafikler yardımıyla sunulmuştur.

Polat vd. (2018), elastik yarı sonsuz bir düzlem üzerine oturan fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın sürekli temas durumu incelemişlerdir. FD tabaka iki farklı rijit bloklar ile yüklenmiş durumdadır. Elastik yarı sonsuz homojen düzlemin izotropik olduğu ve tüm yüzeyler de sürtünme olmadığı varsayılmıştır. Çözüm diğer çalışmalara benzer olarak elastisite teorisi ve integral dönüşüm teknikleri kullanılarak elde edilmiştir.

Abanoz vd. (2019), rijit zemine oturtulan FD tabakaya üzerinden rijit bir blok ile yük etki ettirilmesi sonucu oluşan sürtünmesiz temas problemini ele almışlardır. Problemden söz konusu tabaka ağırlığı ihmal edilmiştir ve Poisson oranı sabit tutulmuştur. Çeşitli materyal özellikleri ve yükleme durumlarına göre sonuçlar verilmiştir.

Polat vd. (2019), iki rijit blok ile yüklenen fonksiyonel tabakanın sonlu elemanlar yöntemi ile sürekli temas problemini incelemişlerdir. FD tabakanın iki boyutlu modeli ANSYS programı ile modellenmiştir. Programda kullanılan yazılım, küçük değişiklikler ile tüm temas problemleri için uygun hale getirilebilir. Ayrıca yazılımın doğruluğu mevcut çalışmaların analitik sonuçları ile karşılaştırılarak kanıtlanmıştır.

Balcı ve Dağ (2019), rijit hareketli silindirik bir zımbanın fonksiyonel derecelendirilmiş bir tabakaya üstten bir yük ile yüklenmesi sonucu oluşan dinamik sürtünmeli temas durumunu ele almışlardır. Elastodinamiğin kullandığı kısmi diferansiyel denklemleri, Galilean ve Fourier integral dönüşüm teknikleri ile çözmüşlerdir. Literatürdeki çalışmalarla sonuçlar kıyaslanmıştır ve elastodinamik teoriye göre çözümün daha gerçekçi temas gerilmeleri ürettiği sonucuna varılmıştır. Balcı ve Dağ (2020), bu çalışmalarında rastgele bir zımba şeklinin fonksiyonel derecelendirilmiş tabakada oluşturacağı dinamik teması incelemişlerdir. Coulumb'un sürtünme yasasına göre çözülen problem de teğetsel kuvvetin, sürtünme katsayısı ve uygulanan normal kuvvet etkisiyle orantılı olduğu kabul edilmiştir. Sonuçlar da çeşitli zımba hızları, sürtünme katsayısı ve malzemenin fonksiyonellik katsayısına göre temas gerilmeleri ve temas mesafeleri verilmiştir.

Birinci ve Eyüpoğlu (2020), biri fonksiyonel derecelendirilmiş diğeri homojen olan iki tabakanın Winkler zemin üzerine oturtulması ve üstten rijit dairesel blok ile yüklenmesi sonucu oluşan temas problemini ele almışlardır. Tüm yüzeylerin sürtünmesiz olduğu kabul edilmiş ve tabaka ağırlıkları ihmal edilmiştir. Çalışmada, Winkler zemin türünün temas problemlerindeki etkisi araştırılmıştır.

Arslan (2020), çift yönlü fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme (BFGM), yarı sonsuz düzlem ve rastgele şekillendirilmiş rijit zımba arasındaki kayan sürtünmeli temas problemi için analitik ve hesaplamalı çözümler yapmıştır. Problem düzlem-gerilme problemi olarak ele alınmıştır. Derecelendirilmiş tabakaya yanal ve kalınlık yönleri boyunca bağımsız kayma modülü değişimleri uygulanmıştır. Fourier integral dönüşüm tekniklerinden ve dördüncü dereceden karakteristik denklemi çözmek için Ferrari metodu kullanılmıştır. Elastik bir malzemede çift yönlü derecelendirme ile temas tepkilerinin önemli ölçüde kontrol edilebildiğini göstermiştir.

Yaylacı vd. (2021); sürtünmesiz temas problemini analitik yöntem, sonlu elemanlar yöntemi (FEM) ve çok katmanlı algılayıcı (MLP) gibi farklı metotlarla analiz ederek karşılaştırmalı çözüm yapmışlardır. Problem Winkler temele oturan iki tabakadan oluşmaktadır. Üst tabaka fonksiyonel derecelendirilmiş, alt tabaka ise homojendir. Tüm ara yüzeylerde sürtünme olmadığı kabul edilmiştir. Öncelikle elastisite teorisi ve integral dönüşüm tekniklerini kullanarak analitik çözüm yapılmış, ANSYS programında modelleme yapılarak sonlu elemanlar yöntemi ile çözüm gerçekleştirilmiş ve son olarak yapay sinir ağının farklı problemler için kullandığı MLP yöntemi kullanılarak problem çözülmüştür.

Polat (2021), fonksiyonel derecelendirilmiş bir blok ile bastırılan ve elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın sonlu elemanlar yöntemi ile çözümünü ele almıştır. Tabaka ve bloğun kayma modüllerinin yüksekliğe bağlı olarak değiştiği varsayılmıştır. FD tabakanın ağırlığı çözümde göz önünde bulundurulmuştur. Problemden önce bloğun kayma modülünün rijit olduğu kabul edilerek çözüm yapılmış ve sonrasında FD blok ve FD tabaka arasındaki fonksiyonellik parametresine göre çözüm elde edilip kıyaslama yapılmıştır. Sonuçlarda gerilme birikmelerinin fazla olduğu blok kenarlarında, fonksiyonel olarak derecelendirildiğinde gerilmelerin azaldığı görülmüştür.

Çömez ve Omurtag (2021), fonksiyonel derecelendirilmiş ortotropik tabakanın Pasternak temele oturtulması ve üstten rijit bir blok ile yük uygulanması sonucu oluşan temas problemini incelemişlerdir. Pasternak temel ile yapılan öncü çalışmalardandır. Pasternak

temel parametrelerinin, fonksiyonellik katsayısının, dış yükün ve rijit blok yarıçapının sonuçlara etkisi gözlemlenmiştir.

Öner vd. (2022), fonksiyonel derecelendirilmiş iki tabakaya üstten düzgün dağılmış eksenel simetrik yayılı yük uygulanması sonucu oluşan sürtünmesiz temas problemini incelemişlerdir. FD tabakalar homojen yarı sonsuz düzlem üzerindedir. Tabakaların Poisson oranı sabit tutulup, fonksiyonellik derecesi yüksekliğe bağlı olarak değişmektedir. Tabakalar arası ya da homojen yarı sonsuz düzlem ile FD tabaka arasında yapışma yoktur. Problem analitik yöntem, sonlu elemanlar yöntemi (FEM) ve son olarak bir yapay sinir ağı olan çok katmanlı algılayıcı (MLP) ile çözülmüştür. Elastisite teorisine dayalı analitik yöntemden elde edilen sonuçlar, FEM ve MLP yöntem sonucunda elde edilen değerlerle karşılaştırılmış ve büyük oranda uyum elde edilmiştir. Yaylacı vd. (2022), fonksiyonel derecelendirilmiş tek tabakanın rijit bir temele bağlanması ve dairesel rijit blok ile yüklenmesi sonucu oluşan temas problemini incelemişlerdir. Öner vd. (2022)'deki çalışmaya benzer olarak çözüm üç farklı yöntemle elde edilmiştir. Yöntemler kıyaslandığında önemli oranda uyum elde edilmiştir.

Yan ve Wang (2022); rijit dikdörtgen şeklindeki blok ile yüklenen, fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzeme ile kaplı homojen tabaka ve homojen yarım düzleme bağlanmış fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın temas problemini ele almışlardır. Elastisite teorisi ve Fourier integral dönüşüm teknikleri kullanılarak elde edilen integral denklemler, Gauss- Chebyshev integrasyon formülasyonu ile iki tekil integral denklem sistemine indirgenmiştir. Çözümde, temas gerilmelerinin ve temas uzunluğunun derecelendirilmiş malzemeler sayesinde daha kontrol edilebilir olduğu anlaşılmıştır.

Kaya ve Polat (2023), elastik iki çeyrek düzleme oturan fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın temas problemini sonlu elemanlar yöntemi ile çözmüşlerdir. FD tabaka iki rijit blok yardımıyla P ve Q yüklerine maruz bırakılmıştır. Çözüm de tüm yüzeylerde sürtünme olmadığı ve ağırlıkların ihmal edildiği kabul edilmiştir. FEM tabanlı ANSYS paket programında temas problemi iki boyutlu olarak modellenmiştir. Modelde çeyrek düzlem ve blokların modelleri ANSYS menüleri ile yapılırken FD tabaka için malzeme özelliklerinin tanımlanması ve sonlu elemanlara bölünmesi ANSYS'in standart menüleri ile modellenemediğinden, bu kısım için programa özel bir eklenti yapılarak FD tabaka modellenmiştir. Bulgularda çeşitli boyutsuz büyüklükler için temas gerilmeleri ve temas uzunlukları incelenmiştir.

Karabulut ve Çömez (2023), ortotropik fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın sürekli ve süreksiz temas problemini analitik ve sonlu elemanlar yöntemi ile çözmüşlerdir. Ortotrop FD tabaka, alttan homojen ve izotrop tabakaya rijit şekilde bağlıdır. Analitik çözümde cisimlerin yer değiştirme ve gerilme ifadeleri sınır koşulları kullanılarak tekil integral denkleme indirgenmiştir. Tekil integral denklem, Gauss- Chebyshev integrasyon formülasyonu ile çözülmüştür. Daha sonra, sonlu elemanlar yöntemiyle çözümü yapılarak iki yöntemle de sayısal sonuçlar elde edilmiştir.

Balcı ve Arslan (2023), ortotropik derecelendirilmiş bir yarım düzlem ile düz profilli ve hareketli rijit blok arasındaki dinamik sürtünmeli temas problemi için genel bir teori geliştirmeye çalışmışlardır. Rijit blok ses altı hızda fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka üzerinde hareket etmektedir. Karışık sınır değer probleminde çözüm, Galilean ve Fourier integral dönüşümlerinden faydalanarak ve elastodinamiğin ilkelerine dayanarak yapılmıştır.

1.2. Çalışmanın Kapsamı

Bu çalışmada, rijit bir blok aracılığıyla yüklenen ve Pasternak zemine oturan biri fonksiyonel derecelendirilmiş iki tabakanın temas problemi ele alınmıştır. Tabakaların kütle kuvveti ihmal edilirken tüm ara yüzeylerde sürtünme olmadığı kabul edilmiş ve elastisite teorisin göre çözüm yapılmıştır.

Çalışmanın amacı; Pasternak zemine oturan biri fonksiyonel derecelendirilmiş iki tabakaya ilişkin temas probleminde, Pasternak zemin yay sabiti ve kayma modülünün temas gerilmeleri, temas uzunlukları ve yer değiştirmeler üzerindeki etkilerini araştırmaktır.

Çalışmanın ilk bölümünde, homojen tabaka ve fonksiyonel derecelendirilmiş tabakaya ilişkin temas problemleri ile ilgili literatürdeki geçmişten günümüze kadar yapılmış çalışmaların özeti verilmiştir. Daha sonra elastisite teorisinin genel denklemleri ve integral dönüşüm teknikleri kullanılarak homojen ve FD tabakaya ait gerilme ve yer değiştirmeleri ifadeleri elde edilmiştir.

İkinci bölümde, problem geometrisiyle birlikte tanıtılarak sınır şartları verilmiştir. Problemin geometrik ve yükleme durumlarına göre toplam on sınır şartı göz önüne alınmıştır. Sınır şartlarının sekiz tanesinde, bir önceki bölümde elde edilen homojen ve FD tabakanın gerilme ve yer değiştirme ifadeleri yerlerine yazılarak temas gerilmelerinin bilinmeyen olduğu sekiz bilinmeyenli sekiz cebrik denklem elde edilmiştir. Bu denklemlerin çözümü sonucu gerilme ve yer değiştirme ifadelerindeki katsayılar bilinmeyen temas

gerilmeleri cinsinden elde edilmiştir. Geri kalan iki sınır şartında bu katsayılar yerine konularak problemin çözümü temas gerilmelerinin bilinmeyen olduğu iki integral denklemden oluşan bir integral denklem sistemine indirgenmiştir. İntegral denklemlerin çözümünde kullanılan Gauss-Chebyshev integrasyon formülasyonundan faydalanılarak, integral denklem sistemi cebirsel bir denklem sistemine dönüştürülmüştür. Bu yöntem, integral denklemlerin çözüm sürecinde kolaylık sağlamaktadır. Cebirsel denklem sisteminin çözümü ile de bilinmeyen temas uzunlukları ve temas gerilmeleri elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde, rijit blok ile homojen tabaka ve homojen tabaka ile FD tabaka arasındaki temas gerilmeleri ve temas mesafeleri incelenmiştir. Bu incelenen büyüklükler; farklı tabaka yükseklikleri, fonksiyonel derecelendirme parametresi, rijit blok yarıçapları, malzeme özellikleri ve Pasternak zemin parametrelerinin değişimine göre hesaplanmış ve bu bölümde grafik ve tablolar yardımı ile sunulmuştur. Ayrıca Pasternak zemin parametrelerinin etkisini gözlemlemek için çeşitli boyutsuz Pasternak zemin yay sabiti ve kayma modülü değerlerine göre FD tabakada oluşan yer değiştirmeler grafikler ile sunulmuştur. Yine bu bölümde tezin doğruluğunu kanıtlamak için önceki yıllarda yapılan çalışmalar ile sonuçlar kıyaslanmış ve tablolar yardımıyla sunulmuştur.

Dördüncü bölümde, üçüncü bölümde elde edilen sayısal değerler ve çizilen grafikler dikkate alınarak değerlendirmeler yapılmıştır. Burada özellikle, Pasternak zemin parametrelerinin ortaya çıkardığı sonuçlar üzerinde durulmuş ve değerlendirilmiştir. Bu değerlendirmeler, elde edilen verilerin pratikteki anlamını ve önemini vurgulamaktadır. Bu bölümün sonunda yapılan çalışmanın temelini oluşturan kaynaklar kısmı verilmiştir.

1.3. Homojen ve FD tabaka İçin Genel Denklemlerin Elde Edilmesi

Bu bölümde, homojen ve FD tabaka için gerilme ve yer değiştirmelerin genel ifadeleri elastisite teorisinden yararlanılarak elde edilecektir. İlk olarak bünye denklemleri ve yer değiştirme-şekil değiştirme bağıntıları kullanılarak yer-değiştirmeler cinsinden ifade edilen denge denklemleri ya da diğer ismi ile Navier denklemleri bulunacaktır. Navier denklemlerindeki yer değiştirme bileşenlerinin gerekli türevleri alınıp denklemlerde yerine konulduğunda adi diferansiyel denklem takımı elde edilecektir. Bu denklem takımının çözümü ile yer değiştirme ifadelerinin genel denklemleri bulunacaktır. Bu ifadelerin bünye denklemlerinde yerine yazılması ile de gerilme ve yer değiştirme denklemlerinin genel ifadeleri bulunacaktır.

1.3.1. Homojen Tabaka İçin Genel Denklemlerin Elde Edilmesi

Homojen tabaka için kütle kuvvetlerinin ihmal edilmesi halinde, denge denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{\partial \sigma_{x_1}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy_1}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy_1}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{y_1}}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

Burada σ_{x_1} , σ_{y_1} ve τ_{xy_1} homojen tabakanın gerilme bileşenlerini, 1 indisi ise homojen tabakayı ifade etmektedir. Düzlem şekil değiştirme hali için homojen tabakaya ilişkin bünye denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\varepsilon_{x_1} = \frac{1}{E_1} [\sigma_{x_1} - \nu_1(\sigma_{y_1} + \sigma_{z_1})] \quad (3)$$

$$\varepsilon_{y_1} = \frac{1}{E_1} [\sigma_{y_1} - \nu_1(\sigma_{x_1} + \sigma_{z_1})] \quad (4)$$

$$\gamma_{xy_1} = \frac{\tau_{xy_1}}{\mu_1} \quad (5)$$

Burada, $\sigma_{z_1} = \nu_1(\sigma_{x_1} + \sigma_{y_1})$ olarak ifade edilebilir. Ayrıca denklemlerde geçen E_1 , μ_1 ve ν_1 sırası ile homojen tabakanın elastisite modülünü, kayma modülünü ve Poisson oranını göstermektedir. ε_{x_1} , ε_{y_1} ve γ_{xy_1} ise homojen tabakanın şekil değiştirme bileşenlerini ifade etmektedir.

Homojen tabakada şekil değiştirme ve yer değiştirme ifadelerini birbirine bağlayan denklemler ise aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\varepsilon_{x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x} \quad (6)$$

$$\varepsilon_{y_1} = \frac{\partial v_1}{\partial y} \quad (7)$$

$$\gamma_{xy_1} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \quad (8)$$

Bu ifadelerde geçen u_1 ve v_1 homojen tabakaya ait sırasıyla yatay ve düşey yer değiştirmeleri göstermektedir.

(6-8) numaralı denklemlerde geçen yer değiştirme-şekil değiştirme bağlantıları (3-5) numaralı bünye denklemlerinde yerlerine yazılırsa, gerilme bileşenlerinin ifadeleri yer değiştirmeler cinsinden aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\sigma_{x_1} = \lambda e + 2\mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \quad (9)$$

$$\sigma_{y_1} = \lambda e + 2\mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} \quad (10)$$

$$\tau_{xy_1} = \mu_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \quad (11)$$

Bu ifadelerde geçen;

$$e = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \quad (12)$$

$$\lambda = \frac{\nu_1 E_1}{(1 + \nu_1)(1 - 2\nu_1)} \quad (13)$$

$$\mu_1 = \frac{E_1}{2(1 + \nu_1)} \quad (14)$$

olarak tanımlanabilir. Yukarıdaki ifadelerde geçen e hacim değiştirme oranını, λ Lamé sabitini göstermektedir. (9-11) numaralı denklemlerin gerekli türevleri alınıp 1 ve 2 numaralı denge denklemlerinde yerlerine yazılırsa, Navier denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$(\lambda + \mu_1) \frac{\partial e}{\partial x} + \mu_1 \nabla^2 u_1 = 0 \quad (15)$$

$$(\lambda + \mu_1) \frac{\partial e}{\partial y} + \mu_1 \nabla^2 v_1 = 0 \quad (16)$$

Denklemlerde geçen ∇^2 Laplace operatörü olup, aşağıdaki denklem ile ifade edilir.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (17)$$

Homojen tabaka y eksenine göre malzeme özellikleri, geometrisi ve yükleme durumu bakımından simetrik olduğundan, u_1 ve v_1 aşağıdaki ifadeleri sağlar.

$$u_1(x, y) = -u_1(-x, y) \quad (18)$$

$$v_1(x, y) = v_1(-x, y) \quad (19)$$

Navier denklemlerinin kısmi türevli diferansiyel denklemler olması, denklemlerin çözümünü zorlaştırmaktadır. Bu nedenle bilinmeyen u_1 ve v_1 fonksiyonlarının Fourier sinüs ve Fourier kosinüs dönüşümleri alınabilir. $\phi_1(\xi, y)$ ve $\psi_1(\xi, y)$ dönüşüm fonksiyonları olmak üzere aşağıdaki ifadeler tanımlanabilir.

$$u_1(x, y) = F_s[\phi(\xi, y); \xi \rightarrow x] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \phi(\xi, y) \sin(\xi x) d\xi \quad (20)$$

$$v_1(x, y) = F_s[\psi(\xi, y); \xi \rightarrow x] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \psi(\xi, y) \cos(\xi x) d\xi \quad (21)$$

Bu ifadelerin ters Fourier sinüs dönüşümleri alınırsa;

$$\phi_1(\xi, y) = F_s^{-1}[u_1(x, y); x \rightarrow \xi] = \int_0^{\infty} u_1(x, y) \sin(\xi x) d\xi \quad (22)$$

$$\psi_1(\xi, y) = F_s^{-1}[v_1(x, y); x \rightarrow \xi] = \int_0^{\infty} v_1(x, y) \cos(\xi x) d\xi \quad (23)$$

olarak elde edilir. $u_1(x, y)$ ve $v_1(x, y)$ 'nin bazı türevlerinin Fourier sinüs dönüşümleri ise aşağıdaki gibidir;

$$F_s \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}; x \rightarrow \xi \right] = -\xi^2 \phi_1 \quad (24)$$

$$F_s \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}; x \rightarrow \xi \right] = \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} \quad (25)$$

$$F_s \left[\frac{\partial^2 v_1(x, y)}{\partial x \partial y}; x \rightarrow \xi \right] = -\xi \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \quad (26)$$

$$F_s \left[\frac{\partial^2 u_1(x, y)}{\partial x \partial y}; x \rightarrow \xi \right] = \xi \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \quad (27)$$

$$F_s \left[\frac{\partial^2 v_1(x, y)}{\partial x^2}; x \rightarrow \xi \right] = -\xi^2 \psi_1 \quad (28)$$

$$F_s \left[\frac{\partial^2 v_1(x, y)}{\partial y^2}; x \rightarrow \xi \right] = \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} \quad (29)$$

Kısmi integrasyon kullanılarak elde edilen (24-29) numaralı ifadeler aşağıdaki sınır şartlarını sağlarlar.

$$u_1(0, y) = u_1(\infty, y) = v_1(\infty, y) = \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=\infty} = \frac{\partial v_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial v_1}{\partial x} \Big|_{x=\infty} = 0 \quad (30)$$

Ayrıca (24-29) numaralı ifadeler 15 ve 16 numaralı Navier denklemlerinde yerine yazılırsa,

$$-(\lambda + 2\mu_1)\xi^2 \phi_1 + \mu_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} - (\lambda + \mu_1)\xi \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = 0 \quad (31)$$

$$(\lambda + 2\mu_1) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} - \xi^2 \mu_1 \psi_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} - (\lambda + \mu_1)\xi \frac{\partial \phi_1}{\partial y} = 0 \quad (32)$$

biçiminde adi diferansiyel denklem takımı elde edilir. $\phi_1(\xi, y)$ 'i elde etmek için, sırasıyla (32) numaralı denklemin y 'ye göre bir kez türevi alınırsa:

$$(\lambda + 2\mu_1) \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial y^3} - \xi^2 \mu_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + (\lambda + \mu_1)\xi \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} = 0 \quad (33)$$

ifadesi elde edilir. (31) denkleminden $\frac{\partial \psi_1}{\partial y}$ çekilir ve y 'ye göre bu ifade iki kez türevlenirse,

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial y} = \frac{\mu_1}{\xi(\lambda + \mu_1)} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} - \frac{\xi(\lambda + 2\mu_1)}{(\lambda + \mu_1)} \phi_1 \quad (34)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} = \frac{\mu_1}{\xi(\lambda + \mu_1)} \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial y^3} - \frac{\xi(\lambda + 2\mu_1)}{(\lambda + \mu_1)} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \quad (35)$$

$$\frac{\partial^3 \psi_1}{\partial y^3} = \frac{\mu_1}{\xi(\lambda + \mu_1)} \frac{\partial^4 \phi_1}{\partial y^4} - \frac{\xi(\lambda + 2\mu_1)}{(\lambda + \mu_1)} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} \quad (36)$$

olarak elde edilen (34-36) numaralı ifadeler, (33) numaralı denklemde yerine yazılırsa;

$$\frac{\partial^4 \phi_1}{\partial y^4} - 2\xi^2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} + \xi^4 \phi_1 = 0 \quad (37)$$

olarak elde edilir. (37) numaralı denklem, ϕ_1 'ye göre dördüncü mertebeden sabit katsayılı, lineer, homojen bir diferansiyel denklem olarak elde edilir. Bu diferansiyel denklemin çözümü aşağıdaki gibi aranabilir:

$$\phi_1 = e^{\lambda y} \quad (38)$$

(38) numaralı eşitlik (37) numaralı diferansiyel denklemde yerine yazılırsa;

$$\lambda^4 - 2\xi^2 \lambda^2 + \xi^4 = 0 \quad (39)$$

karakteristik denklem elde edilir. Bu denklemin kökleri aşağıdaki gibidir.

$$\lambda_{1,2} = \xi \quad (40)$$

$$\lambda_{3,4} = -\xi \quad (41)$$

Buna göre, (37) ifadesiyle verilen diferansiyel denklemin çözümü,

$$\phi_1(\xi, y) = (A_1 + A_2 y) e^{-\xi y} + (A_3 + A_4) e^{\xi y} \quad (42)$$

olarak elde edilir. $\psi_1(\xi, y)$ 'yi elde etmek için; (32) nolu ifadenin y 'ye göre türevi alınır, $\partial^2 \psi_1 / \partial y^2$ ifadesi yalnız bırakılır ve (33) nolu denklemde yerine yazılırsa, $\psi_1(\xi, y)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\psi_1(\xi, y) = \left[A_1 + \left(\frac{\kappa_1}{\xi} + y \right) A_2 \right] e^{-\xi y} + \left[-A_3 + \left(\frac{\kappa_1}{\xi} - y \right) A_4 \right] e^{\xi y} \quad (43)$$

(42) ve (43) ifadelerindeki $A_i (i = 1,2,3,4)$ katsayıları, homojen tabakaya ait katsayılar olup, problemin sınır şartlarından belirlenecektir.

(42) ve (43) ifadeleri (20) ve (21) numaralı denklemlerde yerine yazılırsa, homojen tabakaya ait yer değiştirme ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$u_1(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [(A_1 + A_2 y) e^{-\xi y} + (A_3 + A_4) e^{\xi y}] \sin(\xi x) d\xi \quad (44)$$

$$v_1(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[A_1 + \left(\frac{\kappa_1}{\xi} + y \right) A_2 \right] e^{-\xi y} + \left[-A_3 + \left(\frac{\kappa_1}{\xi} - y \right) A_4 \right] e^{\xi y} \right\} \cos(\xi x) d\xi \quad (45)$$

$u_1(x, y)$ ve $v_1(x, y)$ yer değiştirme ifadelerinin gerekli türevleri alınıp (9-11) numaralı denklemlerde yerine yazılırsa, homojen tabakaya ilişkin gerilme bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{1}{2\mu_1} \sigma_{x_1}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[\xi (A_1 + A_2 y) - \frac{3 - \kappa_1}{2} A_2 \right] e^{-\xi y} + \left[\xi (A_3 + A_4 y) + \frac{3 - \kappa_1}{2} A_4 \right] e^{\xi y} \right\} \cos(\xi x) d\xi \quad (46)$$

$$\frac{1}{2\mu_1} \sigma_{y_1}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ - \left[\xi (A_1 + A_2 y) + \frac{1 + \kappa_1}{2} A_2 \right] e^{-\xi y} + \left[-\xi (A_3 + A_4 y) + \frac{1 + \kappa_1}{2} A_4 \right] e^{\xi y} \right\} \cos(\xi x) d\xi \quad (47)$$

$$\frac{1}{2\mu_1} \tau_{xy_1}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ - \left[\xi (A_1 + A_2 y) + \frac{\kappa_1 - 1}{2} A_2 \right] e^{-\xi y} + \left[\xi (A_3 + A_4 y) - \frac{\kappa_1 - 1}{2} A_4 \right] e^{\xi y} \right\} \sin(\xi x) d\xi \quad (48)$$

1.3.2. FD Tabaka İçin Genel Denklemlerin Elde Edilmesi

Fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) tabakada ağırlıkların ihmal edildiği halde denge denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{\partial \sigma_{x_2}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy_2}}{\partial y} = 0 \quad (49)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy_2}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{y_2}}{\partial y} = 0 \quad (50)$$

Denklemlerdeki σ_{x_2} , σ_{y_2} ve τ_{xy_2} fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın gerilme bileşenlerini, 2 indisi ise FD tabakayı ifade etmektedir. (49-50) ifadelerindeki gerilme bileşenleri; yer değiştirme-şekil değiştirme bağıntıları ve bünye denklemleri kullanılarak, (51-53) deki gibi ifade edilebilir.

$$\sigma_{x_2} = \frac{\mu_2(y)}{\kappa_2 - 1} \left[(\kappa_2 + 1) \frac{\partial u_2}{\partial x} + (3 - \kappa_2) \frac{\partial v_2}{\partial y} \right] \quad (51)$$

$$\sigma_{y_2} = \frac{\mu_2(y)}{\kappa_2 - 1} \left[(3 - \kappa_2) \frac{\partial u_2}{\partial x} + (\kappa_2 + 1) \frac{\partial v_2}{\partial y} \right] \quad (52)$$

$$\tau_{xy_2} = \mu_2(y) \left[\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right] \quad (53)$$

Yukarıdaki denklemlerde geçen u_2 , v_2 ve κ_2 sırasıyla FD tabakanın; x ve y doğrultularındaki yer değiştirme bileşenlerini ve Kolosov sabitini göstermektedir. $\mu_2(y)$ ise FD tabakanın kayma modülünü göstermekte olup, üstel bir fonksiyona bağlı olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\mu_2(y) = \mu_0 e^{\beta y} \quad (54)$$

Burada μ_0 , FD tabakanın en üst yüzeyindeki ($y = 0$) kayma modülünün değerini, β ise sıfırdan farklı değerler alarak değişimi belirleyen rijitlik parametresidir.

Poisson oranı ν_2 'nin gerilme dağılımları üzerinde etkisinin fazla olmadığı bilindiğinden değişmediği kabul edilmiş ve sabit bir değer alınmıştır. Düzlem şekil değiştirme hali için Kolosov sabitinin değeri $\kappa_2 = 3 - 4\nu_2$ olduğu bilinmektedir. Bu ifadede, Poisson oranı sabit olduğundan κ_2 'de sabit değer almaktadır.

(51-53) numaralı denklemlerin gerekli türevleri alınıp (49) ve (50) numaralı denge denklemlerinde yerine yazılırsa, FD tabaka için Navier denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$(\kappa_2 + 1) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + (\kappa_2 - 1) \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial y} + \beta(\kappa_2 - 1) \frac{\partial u_2}{\partial y} + \beta(\kappa_2 - 1) \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0 \quad (55)$$

$$(\kappa_2 - 1) \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + (\kappa_2 + 1) \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + \beta(3 - \kappa_2) \frac{\partial u_2}{\partial x} + \beta(\kappa_2 + 1) \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0 \quad (56)$$

FD tabakada, y eksenine göre malzeme özellikleri, geometri ve yükleme durumu simetrik olduğundan u_2 ve v_2 aşağıdaki denklemleri sağlarlar.

$$u_2(x, y) = -u_2(-x, y) \quad (57)$$

$$v_2(x, y) = v_2(-x, y) \quad (58)$$

Kısmi türevli diferansiyel denklem içeren Navier denklemleri, problemin çözümünü zorlaştırmaktadır. Çözümü kolaylaştırmak için Navier denklemleri adi diferansiyel denklem takımına dönüştürülür. Bunun için $u_2(x, y)$ ve $v_2(x, y)$ yer değiştirme bileşenleri, bilinmeyen $\phi_2(\xi, y)$ ve $\psi_2(\xi, y)$ fonksiyonlarının Fourier sinüs ve Fourier kosinüs dönüşümleri olarak tanımlanırsa;

$$u_2(x, y) = F_s[\phi_2(\xi, y); \xi \rightarrow x] = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \phi_2(\xi, y) \sin(\xi x) d\xi \quad (59)$$

$$v_2(x, y) = F_s[\psi_2(\xi, y); \xi \rightarrow x] = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \psi_2(\xi, y) \cos(\xi x) d\xi \quad (60)$$

olarak yazılabilir.

(59-60) ifadelerinin ters Fourier sinüs dönüşümleri ise;

$$\phi_2(\xi, y) = F_s^{-1}[u_2(x, y); x \rightarrow \xi] = \int_0^\infty u_2(x, y) \sin(\xi x) d\xi \quad (61)$$

$$\psi_2(\xi, y) = F_s^{-1}[v_2(x, y); x \rightarrow \xi] = \int_0^\infty v_2(x, y) \cos(\xi x) d\xi \quad (62)$$

biçiminde elde edilir. Bu ifadelerdeki ξ dönüşüm değişkeni, $\phi_2(\xi, y)$ ve $\psi_2(\xi, y)$ fonksiyonları ise $u_2(x, y)$ ve $v_2(x, y)$ yer değiştirme bileşenlerinin ters Fourier sinüs dönüşümleri olduğu bilinmektedir. Bu bileşenlerin belirlenebilmesi için (55) numaralı denklemin $\sin(\xi x)dx$ ve (56) numaralı denklemin $\cos(\xi x)dx$ ile çarpılarak $(0, +\infty)$ aralığında integrali alınırsa;

$$\int_0^\infty \left[(\kappa_2 + 1) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + (\kappa_2 - 1) \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial y} + \beta(\kappa_2 - 1) \frac{\partial u_2}{\partial y} + \beta(\kappa_2 - 1) \frac{\partial v_2}{\partial x} \right] \sin(\xi x) dx = 0 \quad (63)$$

$$\int_0^\infty \left[(\kappa_2 - 1) \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + (\kappa_2 + 1) \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + \beta(3 - \kappa_2) \frac{\partial u_2}{\partial x} + \beta(\kappa_2 + 1) \frac{\partial v_2}{\partial y} \right] \cos(\xi x) dx = 0 \quad (64)$$

ifadeleri elde edilir.

Bu ifadelerdeki $u_2(x, y)$ ve $v_2(x, y)$ 'in bazı türevleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$F_s \left[\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}; x \rightarrow \xi \right] = -\xi^2 \phi_2 \quad (65)$$

$$F_s \left[\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}; x \rightarrow \xi \right] = \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} \quad (66)$$

$$F_s \left[\frac{\partial^2 v_2(x, y)}{\partial x \partial y}; x \rightarrow \xi \right] = -\xi \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \quad (67)$$

$$F_s \left[\frac{\partial^2 u_2(x, y)}{\partial x \partial y}; x \rightarrow \xi \right] = \xi \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \quad (68)$$

$$F_s \left[\frac{\partial^2 v_2(x, y)}{\partial x^2}; x \rightarrow \xi \right] = -\xi^2 \psi_2 \quad (69)$$

$$F_s \left[\frac{\partial^2 v_2(x, y)}{\partial y^2}; x \rightarrow \xi \right] = \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} \quad (70)$$

Kısmi integrasyon kullanılarak elde edilen (65-70) numaralı denklemler aşağıdaki sınır şartlarını sağlarlar.

$$u_2(0, y) = u_2(\infty, y) = v_2(\infty, y) = \frac{\partial u_2(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=\infty} = \frac{\partial v_2(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=\infty} = \frac{\partial v_2(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (71)$$

(65-70) ifadeleri (63) ve (64) numaralı denklemlerde yerlerine yazılıp gerekli ara işlemler uygulanırsa;

$$-(\kappa_2 + 1)\xi^2\phi_2 + (\kappa_2 - 1)\frac{\partial^2\phi_2}{\partial y^2} - 2\xi\frac{\partial\psi_2}{\partial y} + \beta(\kappa_2 - 1)\left[\frac{\partial\phi_2}{\partial y} - \xi\psi_2\right] = 0 \quad (72)$$

$$-(\kappa_2 + 1)\xi^2\psi_2 + (\kappa_2 + 1)\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2} + 2\xi\frac{\partial\phi_2}{\partial y} + \beta\left[(3 - \kappa_2)\xi\phi_2 + (\kappa_2 + 1)\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right] = 0 \quad (73)$$

adi diferansiyel denklem takımı elde edilir. (72) ve (73) numaralı denklemler $\dot{y} = \mathcal{U}\dot{y} + ky$ şeklinde bir diferansiyel denklem takımıdır (Apatay, 2010). Denklem takımının çözümü;

$$\phi_2 = y_1, \quad \frac{d\phi_2}{dy} = y_3 \quad (74)$$

$$\psi_2 = y_2, \quad \frac{d\psi_2}{dy} = y_4 \quad (75)$$

tanımları yapılarak $\dot{y} = \mathcal{U}y$ şeklinde bir diferansiyel denklem formatına getirilebilir. Bu denklemler matris formatında aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \xi^2 \frac{\kappa_2 + 1}{\kappa_2 - 1} & \beta\xi & -\beta & \frac{2\xi}{\kappa_2 - 1} \\ -\beta\xi \frac{(3 - \kappa_2)}{\kappa_2 + 1} & \xi^2 \frac{\kappa_2 - 1}{\kappa_2 + 1} & -\frac{2\xi}{\kappa_2 + 1} & -\beta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \quad (76)$$

Burada;

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \xi^2 \frac{\kappa_2 + 1}{\kappa_2 - 1} & \beta \xi & -\beta & \frac{2\xi}{\kappa_2 - 1} \\ -\beta \xi \frac{(3 - \kappa_2)}{\kappa_2 + 1} & \xi^2 \frac{\kappa_2 - 1}{\kappa_2 + 1} & -\frac{2\xi}{\kappa_2 + 1} & -\beta \end{bmatrix} \quad (77)$$

olarak ifade edilir ve $|\mathcal{U} - sl| = 0$ yazılırsa,

$$s^4 + 2\beta s^3 + (\beta^2 - 2\xi^2)s^2 - 2\xi^2\beta s + \frac{\xi^2(3\beta^2 + \xi^2 + (\xi^2 - \beta^2)\kappa_2)}{\kappa_2 + 1} = 0 \quad (78)$$

şeklinde karakteristik bir denklem elde edilir. Bu diferansiyel denklem takımında çözüm e^{sy} ifadesi ile aranır;

$$\phi_2 = \sum_{j=1}^4 B_j e^{s_j y} \quad (79)$$

$$\psi_2 = \sum_{j=1}^4 B_j m_j e^{s_j y} \quad (80)$$

şeklinde elde edilir. (79) ve (80) ifadeleri (72) ve (73) ifadelerinde yerine yazılırsa;

$$m_j = \frac{(3\beta + 2s_j - \beta\kappa_2)[s_j(\beta + s_j)(\kappa_2 + 1) - \xi^2(\kappa_2 + 3)]}{\xi[4\xi^2 - \beta^2(\kappa_2 - 3)(\kappa_2 + 1)]}, (j = 1, \dots, 4) \quad (81)$$

olarak elde edilir. Karakteristik denklemin kökleri ise,

$$s_1 = -\frac{1}{2} \left(\beta + \sqrt{4\xi^2 + \beta^2 - 4\xi\beta i \sqrt{\frac{3 - \kappa_2}{\kappa_2 + 1}}} \right) \quad (82)$$

$$s_2 = -\frac{1}{2} \left(\beta - \sqrt{4\xi^2 + \beta^2 - 4\xi\beta i \sqrt{\frac{3 - \kappa_2}{\kappa_2 + 1}}} \right) \quad (83)$$

$$s_3 = -\frac{1}{2} \left(\beta + \sqrt{4\xi^2 + \beta^2 + 4\xi\beta i \sqrt{\frac{3-\kappa_2}{\kappa_2+1}}} \right) \quad (84)$$

$$s_4 = -\frac{1}{2} \left(\beta - \sqrt{4\xi^2 + \beta^2 + 4\xi\beta i \sqrt{\frac{3-\kappa_2}{\kappa_2+1}}} \right) \quad (85)$$

biçiminde elde edilir. (79) ve (80) numaralı denklemlerdeki $\phi_2(\xi, y)$ ve $\psi_2(\xi, y)$ fonksiyonları sırasıyla (59) ve (60) numaralı denklemlerde yerine yazılarak FD tabakaya ilişkin yer değiştirme bağıntıları tabakanın kütle kuvvetinin ihmal edilmesi hali için aşağıdaki gibi elde edilir.

$$u_2(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 B_j e^{s_j y} \sin(\xi x) d\xi \quad (86)$$

$$v_2(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 B_j m_j e^{s_j y} \cos(\xi x) d\xi \quad (87)$$

Bu denklemlerde geçen $B_j (j = 1, 2, 3, 4)$ büyüklükleri, FD tabakaya ait bilinmeyen katsayılar olup problemin sınır şartlarından elde edilecektir.

(86-87) numaralı denklemler (51-53) ifadelerinde yerlerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa, FD tabakaya ait gerilme bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\sigma_{x_2} = \frac{2\mu_2(y)}{\pi(\kappa_2 - 1)} \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 B_j [(\kappa_2 + 1)\xi + (3 - \kappa_2)m_j n_j] e^{s_j y} \cos(\xi x) d\xi \quad (88)$$

$$\sigma_{y_2} = \frac{2\mu_2(y)}{\pi(\kappa_2 - 1)} \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 B_j C_j e^{s_j y} \cos(\xi x) d\xi \quad (89)$$

$$\tau_{xy_2} = \frac{2\mu_2(y)}{\pi} \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 B_j D_j e^{s_j y} \sin(\xi x) d\xi \quad (90)$$

Bu denklemlerde geçen C_j ve D_j aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$C_j = [(\kappa_2 + 1)m_j s_j + \xi(3 - \kappa_2)] \quad (j = 1, 2, 3, 4) \quad (91)$$

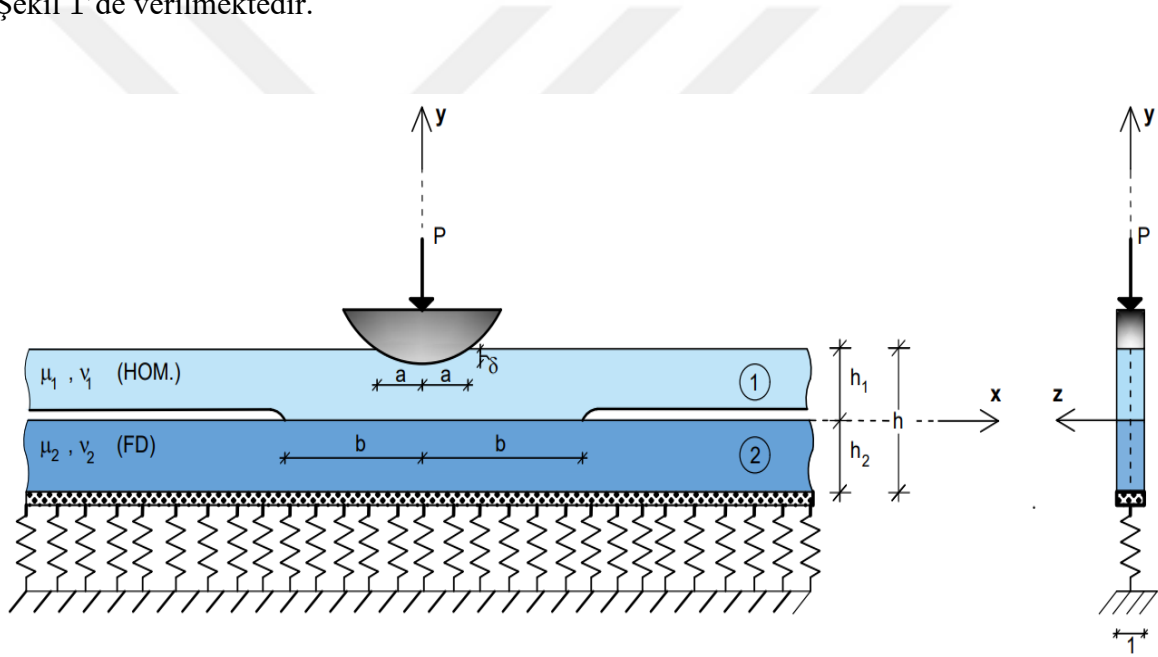
$$D_j = [s_j - \xi m_j] \quad (j = 1, 2, 3, 4) \quad (92)$$



2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Problemin Tanımı

Bu bölümde, biri fonksiyonel derecelendirilmiş iki tabakanın Pasternak zemin üzerine oturması ile oluşan sürtünmesiz temas problemi elastisite teorisine göre incelenecektir. Üst tabaka homojen özellikte olup dairesel rijit bir blok aracılığıyla yüklenmiştir. Alt tabakanın kayma modülü üstel bir fonksiyon ile yüksekliğe bağlı olarak değişik değerler alarak fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka haline getirilmiştir. Tabakaların ağırlıklarının ihmal edildiği ve sürtünmenin olmadığı varsayıldığı problemde, geometri ve yükleme durumu Şekil 1’de verilmektedir.



Şekil 1. Problemin geometrisi ve yükleme durumu

Şekilde görüldüğü gibi, dairesel rijit blok ile homojen tabaka arasındaki temas $(-a, a)$ ve homojen tabaka ile FD tabaka arasındaki temas $(-b, b)$ aralığındadır. Problemde 1 ve 2 numaralı tabakalar sırasıyla homojen ve FD tabakayı ifade etmektedir. Problemin geometrisi ve yükleme durumu y eksenine göre simetrik olduğu için çözümü $[0, \infty)$ aralığında aramak yeterli olacaktır.

2.2. Problemin Çözümü

Problemin çözümü elastisite teorisi ve integral dönüşüm tekniklerinden faydalanılarak yapılmıştır. Sınır şartları kullanılarak, problem iki integral denklemden oluşan bir integral denklem sistemine indirgenmiştir. Bu integral denklemin Gauss-Jacobi integrasyon formülasyonu yardımıyla çözülerek, temas gerilmeleri ve temas uzunlukları elde edilmiştir.

2.3. Problemin Çözümünde Kullanılacak Denklemler

Problemde üst tabaka homojen olduğu için kayma modülü sabit olup μ_1 ’ dir. Alt tabaka FD özellikte olup, aşağıda gösterildiği gibi kayma modülü üstel fonksiyona bağlı olarak değişmektedir.

$$\mu_2(y) = \mu_0 e^{\beta y} \quad (93)$$

Denklemde μ_0 , (2) nolu FD tabakanın üst yüzeyindeki kayma modülünü, β ise sıfırdan farklı bir değer olmak üzere rijitlik parametresini ifade etmektedir. Eğer β ’nın değeri sıfır alınırsa tabaka homojen tabakaya dönüşecektir.

2.3.1. Homojen Tabaka İçin Kullanılacak Denklemler

Problemin çözümünde homojen tabaka için kullanılacak yer değiştirme ve gerilme bağıntıları aşağıdaki gibidir.

$$u_1(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [(A_1 + A_2 y)^{-\xi y} + (A_3 + A_4 y)^{\xi y} \sin(\xi x)] d\xi \quad (94)$$

$$v_1(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ [A_1 + (\frac{\kappa_1}{\xi} + y)A_2] e^{-\xi y} + [-A_3 + (\frac{\kappa_1}{\xi} - y)A_4] e^{\xi y} \right\} \cos(\xi x) d\xi \quad (95)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu_1} \sigma_{x_1}(x, y) = & \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[\xi(A_1 + A_2 y) - \frac{3 - \kappa_1}{2} A_2 \right] e^{-\xi y} \right. \\ & \left. + \left[\xi(A_3 + A_4 y) + \frac{3 - \kappa_1}{2} A_4 \right] e^{\xi y} \right\} \cos(\xi x) d\xi \end{aligned} \quad (96)$$

$$\frac{1}{2\mu_1} \sigma_{y_1}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ - \left[\xi(A_1 + A_2 y) + \frac{1 + \kappa_1}{2} A_2 \right] e^{-\xi y} + \left[-\xi(A_3 + A_4 y) + \frac{1 + \kappa_1}{2} A_4 \right] e^{\xi y} \right\} \cos(\xi x) d\xi \quad (97)$$

$$\frac{1}{2\mu_1} \tau_{xy_1}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ - \left[\xi(A_1 + A_2 y) + \frac{\kappa_1 - 1}{2} A_2 \right] e^{-\xi y} + \left[\xi(A_3 + A_4 y) - \frac{\kappa_1 - 1}{2} A_4 \right] e^{\xi y} \right\} \sin(\xi x) d\xi \quad (98)$$

2.3.2. FD Tabaka İçin Kullanılacak Denklemler

Problemin çözümünde FD tabaka için kullanılacak yer değiştirme ve gerilme bağıntıları aşağıdaki gibidir.

$$u_2(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 B_j e^{s_j y} \sin(\xi x) d\xi \quad (99)$$

$$v_2(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 B_j m_j e^{s_j y} \cos(\xi x) d\xi \quad (100)$$

$$\sigma_{x_2} = \frac{2\mu_2(y)}{\pi(\kappa_2 - 1)} \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 B_j [(\kappa_2 + 1)\xi + (3 - \kappa_2)m_j n_j] e^{s_j y} \cos(\xi x) d\xi \quad (101)$$

$$\sigma_{y_2} = \frac{2\mu_2(y)}{\pi(\kappa_2 - 1)} \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 B_j C_j e^{s_j y} \cos(\xi x) d\xi \quad (102)$$

$$\tau_{xy_2} = \frac{2\mu_2(y)}{\pi} \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 B_j D_j e^{s_j y} \sin(\xi x) d\xi \quad (103)$$

2.4. Probleme İlişkin Sınır Şartları

$u_i(x, y)$ ve $v_i(x, y)$ yer değiştirme bileşenlerini, $\sigma_{x_i}(x, y)$, $\sigma_{y_i}(x, y)$ ve $\tau_{xy_i}(x, y)$ ($i = 1, 2$) gerilme bileşenlerini göstermek üzere, probleme ilişkin sınır şartları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\sigma_{y_1}(x, h_1) = \begin{cases} -p_1(x) & ; & (0 \leq x < a) \\ 0 & ; & (a \leq x < \infty) \end{cases} \quad (104)$$

$$\tau_{xy_1}(x, h_1) = 0, \quad (0 \leq x < \infty) \quad (105)$$

$$\sigma_{y_2}(x, 0) = \begin{cases} -p_2(x) & ; & (0 \leq x < b) \\ 0 & ; & (b \leq x < \infty) \end{cases} \quad (106)$$

$$\sigma_{y_1}(x, 0) = \sigma_{y_2}(x, 0), \quad (0 \leq x < \infty) \quad (107)$$

$$\tau_{xy_1}(x, 0) = 0, \quad (0 \leq x < \infty) \quad (108)$$

$$\tau_{xy_2}(x, 0) = 0, \quad (0 \leq x < \infty) \quad (109)$$

$$\sigma_{y_2}(x, -h_2) = k v_2(x, -h_2) - G \frac{\partial^2 v_2(x, -h_2)}{\partial x^2}, \quad (0 \leq x < \infty) \quad (110)$$

$$\tau_{xy_2}(x, -h_2) = 0, \quad (0 \leq x < \infty) \quad (111)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, h_1)] = \frac{\partial F(x)}{\partial x}, \quad (0 \leq x < a) \quad (112)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, 0) - v_2(x, 0)] = 0, \quad (0 \leq x < b) \quad (113)$$

Problemin denge şartları ise;

$$\int_{-a}^a p_1(x) dx = P \quad (114)$$

$$\int_{-b}^b p_2(x) dx = P \quad (115)$$

ifadeleri ile tanımlanabilir.

Yukarıdaki sınır şartlarında geçen $p_1(x)$ homojen tabaka ile dairesel rijit blok, $p_2(x)$ ise homojen tabaka ile FD tabaka arasındaki temas gerilmelerini ifade eden bilinmeyenlerdir. a ve b sırasıyla, dairesel rijit bir blok ile homojen tabaka arasındaki ve homojen tabaka ile FD tabaka arasındaki temas uzunluklarıdır. P , k ve G ise sırası ile dairesel rijit blok

aracılığıyla yüklenen tekil yükü, Pasternak temele ilişkin yay sabitini ve kayma modülünü göstermektedir.

Dairesel rijit bloğun profiline ilişkin fonksiyon:

$$F(x) = [(R^2 - x^2)^{0.5} - R] \quad (116)$$

şeklinde ifade edilebilir. (112) numaralı denklemde geçen bu fonksiyonun x 'e göre türevi ise aşağıdaki gibidir.

$$f(x) = \frac{\partial}{\partial x} [F(x)] = \frac{x}{(R^2 - x^2)^{0.5}} \cong \frac{x}{R} \quad (R \gg x) \quad (117)$$

Sınır şartlarının verildiği denklemler arasından (104-111) arası denklemler gerilme ve yer değiştirme ifadelerinde geçen bilinmeyen katsayıların bulunmasında, (112) ve (113) numaralı denklemler ise integral denklemlerin elde edilmesinde kullanılacaktır.

2.5. Katsayıların Belirlenmesi

(94-103) ifadeleriyle verilen gerilme ve yer değiştirme bağıntılarının, (104-111) sınır şartlarında yerine yazılması ve ters Fourier dönüşümlerinin alınması ile bilinmeyen temas gerilmelerinin ve katsayılarının olduğu 8 bilinmeyenli 8 cebrik denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} (-2\xi)e^{-\xi h_1}A_1 + (-2\xi h_1 - (\kappa_1 + 1))e^{-\xi h_1}A_2 + (-2\xi)e^{\xi h_1}A_3 \\ + (-2\xi h_1 + (\kappa_1 + 1))e^{\xi h_1}A_4 = -\frac{1}{\mu_1}p_1(\xi) \end{aligned} \quad (118)$$

$$\begin{aligned} (-2\xi)e^{-\xi h_1}A_1 + (-2\xi h_1 - (\kappa_1 - 1))e^{-\xi h_1}A_2 + 2\xi e^{\xi h_1}A_3 \\ + (2\xi h_1 - (\kappa_1 - 1))e^{\xi h_1}A_4 = 0 \end{aligned} \quad (119)$$

$$\sum_{j=1}^4 B_j C_j = -\frac{(\kappa_2 - 1)}{\mu_0} p_2(\xi) \quad (120)$$

$$\mu_1 \{-2\xi A_1 - (\kappa_1 + 1)A_2 - 2\xi A_3 + (\kappa_1 + 1)A_4\} = \frac{\mu_0}{(\kappa_2 - 1)} \sum_{j=1}^4 B_j C_j \quad (121)$$

$$-2\xi A_1 - (\kappa_1 - 1)A_2 + 2\xi A_3 - (\kappa_1 - 1)A_4 = 0 \quad (122)$$

$$\sum_{j=1}^4 B_j D_j = 0 \quad (123)$$

$$\sum_{j=1}^4 B_j C_j e^{-s_j h_2} = \frac{k(\kappa_2 - 1)}{\mu_0 e^{-\beta h_2}} \sum_{j=1}^4 B_j m_j e^{-s_j h_2} - \frac{G(\kappa_2 - 1)}{\mu_0 e^{-\beta h_2}} \sum_{j=1}^4 (-\xi^2 B_j m_j e^{-s_j h_2}) \quad (124)$$

$$\sum_{j=1}^4 B_j D_j e^{-s_j h_2} = 0 \quad (125)$$

Yukarıdaki ifadelerde geçen $k/\mu_0 = k_w$ ve $G/\mu_0 = k_p$ şeklinde boyutsuz büyüklükler olarak tanımlanır. Bu denklem sisteminin ortak çözümünden $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4$ katsayıları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$A_1 = \left\{ \begin{array}{l} -p_1 e^{\xi h_1} [\kappa_1 + e^{2\xi h_1} + 2\xi h_1 - \kappa_1 e^{2\xi h_1} - 2\kappa_1 \xi h_1 e^{2\xi h_1} - 1] \\ -p_2 e^{2\xi h_1} [1 - e^{2\xi h_1} - \kappa_1 + 4\xi^2 h_1^2 - 2\xi h_1 + \kappa_1 e^{2\xi h_1} + 2\xi \kappa_1 h_1] \end{array} \right\} / 4\mu_1 \xi \Delta_1 \quad (126)$$

$$A_2 = \left\{ \begin{array}{l} -p_1 e^{\xi h_1} [e^{2\xi h_1} + 2\xi h_1 e^{2\xi h_1} - 1] \\ +p_2 e^{2\xi h_1} [e^{2\xi h_1} + 2\xi h_1 - 1] \end{array} \right\} / 2\mu_1 \Delta_1 \quad (127)$$

$$A_3 = \left\{ \begin{array}{l} p_1 e^{\xi h_1} [\kappa_1 + e^{2\xi h_1} - \kappa_1 e^{2\xi h_1} - 2\kappa_1 \xi h_1 + 2\xi h_1 e^{2\xi h_1} - 1] - p_2 \\ [e^{2\xi h_1} - 1 + \kappa_1 - \kappa_1 e^{2\xi h_1} + 4\xi^2 h_1^2 e^{2\xi h_1} + 2\xi h_1 e^{2\xi h_1} - 2\xi \kappa_1 h_1 e^{2\xi h_1}] \end{array} \right\} / 4\mu_1 \xi \Delta_1 \quad (128)$$

$$A_4 = \left\{ \begin{array}{l} -p_1 e^{\xi h_1} [e^{2\xi h_1} + 2\xi h_1 - 1] \\ +p_2 [e^{2\xi h_1} + 2\xi h_1 e^{2\xi h_1} - 1] \end{array} \right\} / 2\mu_1 \Delta_1 \quad (129)$$

$$B_1 = \left\{ -p_2(\kappa_2 - 1)e^{h_2 s_1} [\mu_0 e^{h_2 s_2} (C_3 D_2 D_4 - C_4 D_2 D_3) + \mu_0 e^{h_2 s_3} (C_4 D_2 D_3 - C_2 D_3 D_4) + \mu_0 e^{h_2 s_4} (C_2 D_3 D_4 - C_3 D_2 D_4) + (e^{h_2(s_1+\beta)} (D_2 D_4 m_3 - D_2 D_3 m_4) + e^{h_2(s_1+\beta)} (D_2 D_3 m_4 - D_3 D_4 m_2) + e^{h_2(s_1+\beta)} (D_3 D_4 m_2 - D_2 D_4 m_3)) (1 - \kappa_2) (k_w + \xi^2 k_p)] \right\} / \Delta_2 \quad (130)$$

$$B_2 = \{p_2(\kappa_2 - 1)e^{h_2s_2}[\mu_0 e^{h_2s_1}(C_3D_1D_4 - C_4D_1D_3) + \mu_0 e^{h_2s_3}(C_4D_1D_3 - C_1D_3D_4) + \mu_0 e^{h_2s_4}(C_1D_3D_4 - C_3D_1D_4) + (e^{h_2(s_1+\beta)}(D_1D_4m_3 - D_1D_3m_4) + e^{h_2(s_3+\beta)}(D_1D_3m_4 - D_3D_4m_1) + e^{h_2(s_4+\beta)}(D_3D_4m_1 - D_1D_4m_3))(1 - \kappa_2)(k_w + \xi^2k_p)]\}/\Delta_2 \quad (131)$$

$$B_3 = \{-p_2(\kappa_2 - 1)e^{h_2s_3}[\mu_0 e^{h_2s_1}(C_2D_1D_4 - C_4D_1D_2) + \mu_0 e^{h_2s_2}(C_4D_1D_2 - C_1D_2D_4) + \mu_0 e^{h_2s_4}(C_1D_2D_4 - C_2D_1D_4) + (e^{h_2(s_1+\beta)}(D_1D_4m_2 - D_1D_2m_4) + e^{h_2(s_2+\beta)}(D_1D_2m_4 - D_2D_4m_1) + e^{h_2(s_4+\beta)}(D_2D_4m_1 - D_1D_4m_2))(1 - \kappa_2)(k_w + \xi^2k_p)]\}/\Delta_2 \quad (132)$$

$$B_4 = \{p_2(\kappa_2 - 1)e^{h_2s_4}[\mu_0 e^{h_2s_1}(C_2D_1D_3 - C_3D_1D_2) + \mu_0 e^{h_2s_2}(C_3D_1D_2 - C_1D_2D_3) + \mu_0 e^{h_2s_3}(C_1D_2D_3 - C_2D_1D_3) + (e^{h_2(s_1+\beta)}(D_1D_3m_2 - D_1D_2m_3) + e^{h_2(s_2+\beta)}(D_1D_2m_3 - D_2D_3m_1) + e^{h_2(s_4+\beta)}(D_2D_3m_1 - D_1D_3m_2))(1 - \kappa_2)(k_w + \xi^2k_p)]\}/\Delta_2 \quad (133)$$

Bu ifadelerde geçen p_1, p_2, Δ_1 ve Δ_2 büyüklükleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$p_1 = \int_0^a p_1(t_1) \cos(\xi t_1) d\xi \quad (134)$$

$$p_2 = \int_0^b p_2(t_2) \cos(\xi t_2) d\xi \quad (135)$$

$$\Delta_1 = (1 - 2e^{2\xi h_1} + e^{4\xi h_1} - 4\xi^2 h_1^2 e^{2\xi h_1}) \quad (136)$$

$$\Delta_2 = \mu_0 \left[\begin{aligned} &(\mu_0)(e^{h_2(s_1+s_2)}(C_1C_3D_2D_4 - C_1C_4D_2D_3 - C_2C_3D_1D_4 + C_2C_4D_1D_3) \\ &+ e^{h_2(s_1+s_3)}(C_1C_4D_2D_3 - C_1C_2D_3D_4 - C_3C_4D_1D_2 + C_2C_3D_1D_4) \\ &+ e^{h_2(s_1+s_4)}(C_1C_2D_3D_4 - C_1C_3D_2D_4 - C_2C_4D_1D_3 + C_3C_4D_1D_2) \\ &+ e^{h_2(s_2+s_3)}(C_1C_2D_3D_4 - C_1C_3D_2D_4 - C_2C_4D_1D_3 + C_3C_4D_1D_2) \\ &+ e^{h_2(s_2+s_4)}(C_1C_4D_2D_3 - C_1C_2D_3D_4 - C_3C_4D_1D_2 + C_2C_3D_1D_4) \\ &+ e^{h_2(s_3+s_4)}(C_1C_3D_2D_4 - C_1C_4D_2D_3 - C_2C_3D_1D_4 + C_2C_4D_1D_3)) \\ &+ (e^{h_2(s_1+s_2+\beta)}(C_1D_2D_4m_3 - C_1D_2D_3m_4 - C_2D_1D_4m_3 + C_2D_1D_3m_4) \\ &+ e^{h_2(s_1+s_3+\beta)}(C_1D_2D_3m_4 - C_1D_3D_4m_2 - C_3D_1D_2m_4 + C_3D_1D_4m_2) \\ &+ e^{h_2(s_1+s_4+\beta)}(C_1D_3D_4m_2 - C_1D_2D_4m_3 - C_4D_1D_3m_2 + C_4D_1D_2m_3) \\ &+ e^{h_2(s_2+s_3+\beta)}(C_2D_3D_4m_1 - C_2D_1D_3m_4 - C_3D_2D_4m_1 + C_3D_1D_2m_4) \\ &+ e^{h_2(s_2+s_4+\beta)}(C_2D_1D_4m_3 - C_2D_3D_4m_1 - C_4D_1D_2m_3 + C_4D_2D_3m_1) \\ &+ e^{h_2(s_3+s_4+\beta)}(C_3D_2D_4m_1 - C_3D_1D_4m_2 - C_4D_2D_3m_1 + C_4D_1D_3m_2)) \\ &(1 - \kappa_2)(k_w + \xi^2k_p) \end{aligned} \right] \quad (137)$$

2.6. İntegral Denklemlerin Elde Edilmesi

$p_1(x)$ ve $p_2(x)$ bilinmeyen temas gerilmelerini elde etmek amacıyla, (112) ve (113) numaralı sınır şartları kullanılarak iki integral denklemden oluşan bir integral denklem sistemi elde edilecektir.

2.6.1. Birinci İntegral Denklemin Elde Edilmesi

Birinci integral denklem, (112) numaralı sınır şartından elde edilecektir.

Bu sınır şartı;

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, h_1)] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [(-\xi A_1 - (\kappa_1 + y\xi)A_2)e^{-\xi y} \\ + (\xi A_3 - (\kappa_1 - y\xi)A_4)e^{\xi y}] \sin(\xi x) d\xi = f(x) \end{aligned} \quad (138)$$

biçiminde ifade edilir. Daha önce hesaplanan A_1, A_2, A_3 ve A_4 katsayıları burada yerlerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\frac{2}{\pi} \int_0^a p_1(t_1) R_1(x_1, t_1) dt_1 + \frac{2}{\pi} \int_0^b p_2(t_2) R_2(x_1, t_2) dt_2 = f(x) \quad (139)$$

ifadesi elde edilir. Burada,

$$R_1(x_1, t_1) = \int_0^{\infty} \frac{(\kappa_1 + 1)(e^{4\xi h_1} + 4\xi h_1 e^{2\xi h_1} - 1)}{4\Delta_1 \mu_1} \cos(\xi t_1) \sin(\xi x_1) d\xi \quad (140)$$

$$R_2(x_1, t_2) = \int_0^{\infty} \frac{-e^{\xi h_1}(\kappa_1 + 1)(e^{2\xi h_1} + \xi h_1 + \xi h_1 e^{2\xi h_1} - 1)}{2\Delta_1 \mu_1} \cos(\xi t_2) \sin(\xi x_1) d\xi \quad (141)$$

olarak ifade edilir.

$y \rightarrow h_1$ limitine geçildiğinde, (140) numaralı denklemdeki $R_1(x_1, t_1)$ integralinin çekirdeğinin yakınsaması bozulmaktadır. Bu durumda ξ 'nin büyük değerleri için integral

denklem sıfıra yakınsamamaktadır. İntegralin çekirdeğin yakınmasını bozan singüler terim aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$ST_1 = \frac{1}{\mu_1} \int_0^{\infty} \frac{\kappa_1 + 1}{4} \cos(\xi t_1) \sin(\xi x_1) d\xi \quad (142)$$

Singüler terimin kapalı integrali, integral dönüşüm tabloları kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$ST_1 = \frac{1}{\mu_1} \int_0^{\infty} \frac{\kappa_1 + 1}{4} \cos(\xi t_1) \sin(\xi x_1) d\xi = \frac{1}{\mu_1} \frac{\kappa_1 + 1}{8} \left[\frac{1}{t_1 + x_1} - \frac{1}{t_1 - x_1} \right] \quad (143)$$

Singüler terim $R_1(x_1, t_1)$ çekirdeğinden çıkartılır ve buna karşılık kapalı integrali eklenirse, (139) ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^a p_1(t_1) \left\{ R_1^*(x_1, t_1) + \frac{1}{\mu_1} \frac{\kappa_1 + 1}{8} \left[\frac{1}{t_1 + x_1} - \frac{1}{t_1 - x_1} \right] \right\} dt_1 \\ + \frac{2}{\pi} \int_0^b p_2(t_2) R_2(x_1, t_2) dt_2 = f(x) \end{aligned} \quad (144)$$

Burada,

$$R_1^*(x_1, t_1) = \int_0^{\infty} \left[\frac{(\kappa_1 + 1)(e^{4\xi h_1} + 4\xi h_1 e^{2\xi h_1} - 1)}{4\Delta_1 \mu_1} - \frac{\kappa_1 + 1}{4\mu_1} \right] \cos(\xi t_1) \sin(\xi x_1) d\xi \quad (145)$$

olarak tanımlanabilir.

Simetri nedeniyle;

$$p_1(t_1) = p_1(-t_1) \quad (146)$$

$$p_2(t_2) = p_2(-t_2) \quad (147)$$

olduğundan, (144) ifadesindeki $(0, +a]$ ve $(0, +b]$ integral aralığı $[-a, +a]$ ve $[-b, +b]$ aralığına dönüştürülebilir. Bu dönüşüm uygulanıp gerekli ara işlemler yapıldıktan sonra birinci integral denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{2}{\pi} \int_{-a}^a p_1(t_1) \left\{ R_1^*(x_1, t_1) - \frac{\kappa_1 + 1}{8\mu_1} \left[\frac{1}{t_1 - x_1} \right] \right\} dt_1 + \frac{2}{\pi} \int_{-b}^b p_2(t_2) R_2(x_1, t_2) dt_2 = \frac{X}{R} \quad (148)$$

Burada;

$$R_1^*(x_1, t_1) = \int_0^\infty \left[-\frac{(\kappa_1 + 1)(e^{4\xi h_1} + 4\xi h_1 e^{2\xi h_1} - 1)}{8\Delta_1 \mu_1} + \frac{\kappa_1 + 1}{8\mu_1} \right] \sin \xi (t_1 - x_1) d\xi \quad (149)$$

$$R_2(x_1, t_2) = \int_0^\infty \left[\frac{e^{\xi h_1} (\kappa_1 + 1)(e^{2\xi h_1} + \xi h_1 + \xi h_1 e^{2\xi h_1} - 1)}{4\Delta_1 \mu_1} \right] \sin \xi (t_2 - x_1) d\xi \quad (150)$$

şeklinde ifade edilir.

2.6.2. İkinci İntegral Denklemin Elde Edilmesi

İkinci integral denklem, (113) numaralı ifade ile verilen sınır şartından elde edilecektir. Bu ifade;

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, 0) - v_2(x, 0)] = 0 \quad (151)$$

şeklindedir.

(151) numaralı denklem kendi içerisinde parçalara ayrılarak çözüm elde edilmiştir. İlk kısım (95) numaralı denklemden faydalanılarak aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, 0)] = \frac{2}{\pi} \int_0^a p_1(t_1) V_1(x_2, t_1) dt_1 + \frac{2}{\pi} \int_0^b p_2(t_2) V_2(x_2, t_2) dt_2 \quad (152)$$

Burada;

$$V_1(x_2, t_1) = \int_0^{\infty} \frac{e^{\xi h_1} (\kappa_1 + 1) (e^{2\xi h_1} + \xi h_1 + \xi h_1 e^{2\xi h_1} - 1)}{2\Delta_1 \mu_1} \cos(\xi t_1) \sin(\xi x_2) d\xi \quad (153)$$

$$V_2(x_2, t_2) = \int_0^{\infty} -\frac{(\kappa_1 + 1) (e^{4\xi h_1} + 4\xi h_1 e^{2\xi h_1} - 1)}{4\Delta_1 \mu_1} \cos(\xi t_2) \sin(\xi x_2) d\xi \quad (154)$$

biçiminde ifade edilebilir.

$y \rightarrow h_2$ limitine geçildiğinde (154) numaralı denklemdeki $V_2(x_2, t_2)$ integralinin çekirdeğinin yakınsaması bozulmaktadır. İntegralin çekirdeğin yakınmasını bozan singüler terim aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$ST_2 = \frac{1}{\mu_1} \int_0^{\infty} -\frac{\kappa_1 + 1}{4} \cos(\xi t_2) \sin(\xi x_2) d\xi \quad (155)$$

Singüler terimin kapalı integrali, integral dönüşüm tabloları kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$ST_2 = \frac{1}{\mu_1} \int_0^{\infty} -\frac{\kappa_1 + 1}{4} \cos(\xi t_2) \sin(\xi x_2) d\xi = -\frac{1}{\mu_1} \frac{\kappa_1 + 1}{8} \left[\frac{1}{t_2 + x_2} - \frac{1}{t_2 - x_2} \right] \quad (156)$$

Singüler terim $V_2(x_2, t_2)$ çekirdeğinden çıkarılır ve kapalı integrali eklenirse, (152) numaralı ifade aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, 0)] &= \frac{2}{\pi} \int_0^a p_1(t_1) V_1(x_2, t_1) dt_1 \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_0^b p_2(t_2) \left\{ V_2^*(x_2, t_2) - \frac{1}{\mu_1} \frac{\kappa_1 + 1}{8} \left[\frac{1}{t_2 + x_2} - \frac{1}{t_2 - x_2} \right] \right\} dt_2 \end{aligned} \quad (157)$$

Burada, $V_2^*(x_2, t_2)$ integral çekirdeği aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$V_2^*(x_2, t_2) = \int_0^\infty \left[-\frac{(\kappa_1 + 1)(e^{4\xi h_1} + 4\xi h_1 e^{2\xi h_1} - 1)}{4\Delta_1 \mu_1} - \left(-\frac{\kappa_1 + 1}{4\mu_1} \right) \right] \cos(\xi t_2) \sin(\xi x_2) d\xi \quad (158)$$

Simetri özelliği kullanılarak (157) numaralı denklemdeki $(0, +a]$ ve $(0, +b]$ integral aralığı $[-a, +a]$ ve $[-b, +b]$ aralığına dönüştürülebilir. Bu dönüşüm uygulanıp gerekli ara işlemler yapıldıktan sonra, ikinci integral denklemin birinci kısmı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, 0)] &= \frac{2}{\pi} \int_{-a}^a p_1(t_1) V_1(x_2, t_1) dt_1 \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_{-b}^b p_2(t_2) \left\{ V_2^*(x_2, t_2) + \frac{\kappa_1 + 1}{8\mu_1} \left[\frac{1}{t_2 - x_2} \right] \right\} dt_2 \end{aligned} \quad (159)$$

Burada;

$$V_1(x_2, t_1) = \int_0^\infty \left[-\frac{e^{\xi h_1} (\kappa_1 + 1) (e^{2\xi h_1} + \xi h_1 + \xi h_1 e^{2\xi h_1} - 1)}{4\Delta_1 \mu_1} \right] \sin \xi (t_1 - x_2) d\xi \quad (160)$$

$$V_2^*(x_2, t_2) = \int_0^\infty \left[\frac{(\kappa_1 + 1) (e^{4\xi h_1} + 4\xi h_1 e^{2\xi h_1} - 1)}{8\Delta_1 \mu_1} - \frac{\kappa_1 + 1}{8\mu_1} \right] \sin \xi (t_2 - x_2) d\xi \quad (161)$$

şeklindedir.

İkinci integral denklemin ikinci kısmı ise, (100) numaralı denklemden faydalanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_2(x, 0)] = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \sum_{j=1}^4 (-\xi B_j m_j) \right\} \sin(\xi x) d\xi \quad (162)$$

Bu ifadede B_1, B_2, B_3 ve B_4 katsayıları yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_2(x, 0)] = \frac{2}{\pi} \int_0^b p_2(t_2) Z_1(x_2, t_2) dt_2 \quad (163)$$

ifadesi elde edilir. Burada;

$$Z_1(x_2, t_2) = \int_0^\infty -\frac{\xi}{\Delta_2} \sum_{j=1}^4 B_j m_j \cos(\xi t_2) \sin(\xi x_2) d\xi \quad (164)$$

şeklinde tanımlanabilir

$y \rightarrow h_2$ limitine geçildiğinde (164) numaralı denklemdeki $Z_1(x_2, t_2)$ integralinin çekirdeğinin yakınsaması bozulmaktadır. İntegral çekirdeğinin yakınmasını bozan singüler terim aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$ST_3 = \frac{1}{\mu_0} \int_0^\infty \frac{\kappa_2 + 1}{4} \cos(\xi t_2) \sin(\xi x_2) d\xi \quad (165)$$

Singüler terimin kapalı integrali, integral dönüşüm tabloları kullanılarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$ST_2 = \frac{1}{\mu_0} \int_0^\infty \frac{\kappa_1 + 1}{4} \cos(\xi t_2) \sin(\xi x_2) d\xi = \frac{1}{\mu_0} \frac{\kappa_2 + 1}{8} \left[\frac{1}{t_2 + x_2} - \frac{1}{t_2 - x_2} \right] \quad (166)$$

Singüler terim $Z_1(x_2, t_2)$ çekirdeğinden çıkarılır ve kapalı integrali eklenirse, (163) numaralı ifade aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_2(x, 0)] = \frac{2}{\pi} \int_0^b p_2(t_2) \left\{ Z_1^*(x_2, t_2) + \frac{1}{\mu_0} \frac{\kappa_2 + 1}{8} \left[\frac{1}{t_2 + x_2} - \frac{1}{t_2 - x_2} \right] \right\} dt_2 \quad (167)$$

Burada;

$$Z_1^*(x_2, t_2) = \int_0^\infty \left[-\frac{\xi}{\Delta_2} \sum_{j=1}^4 B_j m_j - \frac{\kappa_2 + 1}{4\mu_0} \right] \cos(\xi t_2) \sin(\xi x_2) d\xi \quad (168)$$

biçiminde tanımlanabilir.

Simetri özelliği kullanılarak (167) numaralı denklemdeki $(0, +b]$ integral aralığı $[-b, +b]$ aralığına dönüştürülebilir. Bu dönüşüm uygulanıp gerekli ara işlemler yapıldıktan sonra ikinci integral denklemin ikinci kısmı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_2(x, 0)] = \frac{2}{\pi} \int_{-b}^b p_2(t_2) \left\{ Z_1^*(x_2, t_2) - \frac{\kappa_2 + 1}{8\mu_0} \left[\frac{1}{t_2 - x_2} \right] \right\} dt_2 \quad (169)$$

Burada;

$$Z_1^*(x_2, t_2) = \int_0^\infty \left[\frac{\xi}{2\Delta_2} \sum_{j=1}^4 B_j m_j + \frac{\kappa_2 + 1}{8\mu_0} \right] \sin \xi(t_2 - x_2) d\xi \quad (170)$$

şeklindedir.

Elde edilen $\partial v_1(x, 0)/\partial x$ ve $\partial v_2(x, 0)/\partial x$ türev ifadeleri (151) ifadesinde yerlerine yazılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa, ikinci integral denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_{-a}^a p_1(t_1) V_1(x_2, t_1) dt_1 + \frac{2}{\pi} \int_{-b}^b p_2(t_2) \{ V_2^*(x_2, t_2) - Z_1^*(x_2, t_2) \\ + \left(\frac{\kappa_1 + 1}{8\mu_1} + \frac{\kappa_2 + 1}{8\mu_0} \right) \left(\frac{1}{t_2 - x_2} \right) \} dt_2 = 0 \end{aligned} \quad (171)$$

Burada $V_1(x_2, t_1)$, $V_2^*(x_2, t_2)$ ve $Z_1^*(x_2, t_2)$ büyüklükleri, aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$V_1(x_2, t_1) = \int_0^\infty \left[-\frac{e^{\xi h_1} (\kappa_1 + 1) (e^{2\xi h_1} + \xi h_1 + \xi h_1 e^{2\xi h_1} - 1)}{4\Delta_1 \mu_1} \right] \sin \xi(t_1 - x_2) d\xi \quad (172)$$

$$V_2^*(x_2, t_2) = \int_0^\infty \left[\frac{(\kappa_1 + 1) (e^{4\xi h_1} + 4\xi h_1 e^{2\xi h_1} - 1)}{8\Delta_1 \mu_1} - \frac{\kappa_1 + 1}{8\mu_1} \right] \sin \xi(t_2 - x_2) d\xi \quad (173)$$

$$Z_1^*(x_2, t_2) = \int_0^\infty \left[\frac{\xi}{2\Delta_2} \sum_{j=1}^4 B_j m_j + \frac{\kappa_2 + 1}{8\mu_0} \right] \sin \xi(t_2 - x_2) d\xi \quad (174)$$

2.7. İntegral Denklemlerin Boyutsuzlaştırılması

Sayısal çözümün yapılabilmesi için değişken dönüşümleri yapılarak aşağıdaki boyutsuz büyüklükler tanımlanabilir.

$$x_1 = an_1 \quad x_2 = bn_2 \quad (175)$$

$$t_1 = ar_1 \quad t_2 = br_2 \quad (176)$$

$$dt_1 = adr_1 \quad dt_2 = bdr_2 \quad (177)$$

$$\xi = z/h_1 \quad d\xi = dz/h_1 \quad (178)$$

$$p_1(t_1) = \frac{P}{h_1} G_1(r_1) \quad (179)$$

$$p_2(t_2) = \frac{P}{h_1} G_2(r_2) \quad (180)$$

Bu ifadelerde geçen $G_1(r_1)$ ve $G_2(r_2)$ sırasıyla, rijit dairesel blok ile homojen tabaka ve homojen tabaka ile FD tabaka arasındaki bilinmeyen boyutsuz temas gerilmelerini göstermektedir.

(175-180) ifadeleriyle tanımlanan boyutsuz büyüklükler (148) numaralı birinci integral denklemde yerlerine koyulup, düzenlenirse denklem aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 G_1(r_1) \left\{ \frac{a}{h_1} R_1^*(n_1, r_1) - \frac{\kappa_1 + 1}{8} \left[\frac{1}{r_1 - n_1} \right] \right\} dr_1 \\ + \frac{b}{h_1} \int_{-1}^1 G_2(r_2) R_2(n_1, r_2) dr_2 = \frac{\pi}{2} \frac{\mu_1}{P/h_1} \frac{a/h_1}{R/h_1} n_1 \end{aligned} \quad (181)$$

Burada; $R_1^*(n_1, r_1)$, $R_2(n_1, r_2)$ ve Δ_1 büyüklükleri aşağıdaki biçimde tanımlanır.

$$R_1^*(n_1, r_1) = \int_0^\infty \left[-\frac{(\kappa_1 + 1)(e^{4z} + 4ze^{2z} - 1)}{8\Delta_1} + \frac{\kappa_1 + 1}{8} \right] \sin \left(z \left(\frac{ar_1}{h_1} - \frac{an_1}{h_1} \right) \right) dz \quad (182)$$

$$R_2(n_1, r_2) = \int_0^\infty \left[\frac{e^z(\kappa_1 + 1)(e^{2z} + z + ze^{2z} - 1)}{4\Delta_1} \right] \sin \left(z \left(\frac{br_2}{h_1} - \frac{an_1}{h_1} \right) \right) dz \quad (183)$$

$$\Delta_1 = (1 - 2e^{2z} + e^{4z} - 4z^2 e^{2z}) \quad (184)$$

Boyutsuz büyüklükler (171) numaralı ikinci integral denklemde yerlerine yazılıp, denklem düzenlenirse aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{a}{h_1} \int_{-1}^1 G_1(r_1) V_1(n_2, r_1) dr_1 + \int_{-b}^b G_2(r_2) \left\{ \frac{b}{h_1} V_2^*(n_2, r_2) - \frac{b}{h_1} Z_1^*(n_2, r_2) \right. \\ \left. + \left(\frac{\kappa_1 + 1}{8\mu_1} + \frac{\kappa_2 + 1}{8\mu_0} \right) \left(\frac{1}{r_2 - n_2} \right) \right\} dr_2 = 0 \end{aligned} \quad (185)$$

Burada; $V_1(n_2, t_1)$, $V_2^*(n_2, t_2)$, $Z_1^*(n_2, t_2)$ ve Δ_2 büyüklükleri aşağıdaki biçimde tanımlanır.

$$V_1(n_2, t_1) = \int_0^\infty \left[-\frac{e^z(\kappa_1 + 1)(e^{2z} + z + ze^{2z} - 1)}{4\Delta_1\mu_1} \right] \sin \left(z \left(\frac{ar_1}{h_1} - \frac{bn_2}{h_1} \right) \right) dz \quad (186)$$

$$V_2^*(n_2, t_2) = \int_0^\infty \left[\frac{(\kappa_1 + 1)(e^{4z} + 4ze^{2z} - 1)}{8\Delta_1\mu_1} - \frac{\kappa_1 + 1}{8\mu_1} \right] \sin \left(z \left(\frac{br_2}{h_1} - \frac{bn_2}{h_1} \right) \right) dz \quad (187)$$

$$Z_1^*(n_2, t_2) = \int_0^\infty \left[\frac{(z/h_1)}{2\Delta_2} \sum_{j=1}^4 B_j m_j + \frac{\kappa_2 + 1}{8\mu_0} \right] \sin \left(z \left(\frac{br_2}{h_1} - \frac{bn_2}{h_1} \right) \right) dz \quad (188)$$

$$\Delta_2 = \mu_0 \left[\begin{aligned} &(\mu_0)(e^{h_2(s_1+s_2)}(C_1C_3D_2D_4 - C_1C_4D_2D_3 - C_2C_3D_1D_4 + C_2C_4D_1D_3)) \\ &+ e^{h_2(s_1+s_3)}(C_1C_4D_2D_3 - C_1C_2D_3D_4 - C_3C_4D_1D_2 + C_2C_3D_1D_4) \\ &+ e^{h_2(s_1+s_4)}(C_1C_2D_3D_4 - C_1C_3D_2D_4 - C_2C_4D_1D_3 + C_3C_4D_1D_2) \\ &+ e^{h_2(s_2+s_3)}(C_1C_2D_3D_4 - C_1C_3D_2D_4 - C_2C_4D_1D_3 + C_3C_4D_1D_2) \\ &+ e^{h_2(s_2+s_4)}(C_1C_4D_2D_3 - C_1C_2D_3D_4 - C_3C_4D_1D_2 + C_2C_3D_1D_4) \\ &+ e^{h_2(s_3+s_4)}(C_1C_3D_2D_4 - C_1C_4D_2D_3 - C_2C_3D_1D_4 + C_2C_4D_1D_3) \\ &+ (e^{h_2(s_1+s_2+\beta)}(C_1D_2D_4m_3 - C_1D_2D_3m_4 - C_2D_1D_4m_3 + C_2D_1D_3m_4) \\ &+ e^{h_2(s_1+s_3+\beta)}(C_1D_2D_3m_4 - C_1D_3D_4m_2 - C_3D_1D_2m_4 + C_3D_1D_4m_2) \\ &+ e^{h_2(s_1+s_4+\beta)}(C_1D_3D_4m_2 - C_1D_2D_4m_3 - C_4D_1D_3m_2 + C_4D_1D_2m_3) \\ &+ e^{h_2(s_2+s_3+\beta)}(C_2D_3D_4m_1 - C_2D_1D_3m_4 - C_3D_2D_4m_1 + C_3D_1D_2m_4) \\ &+ e^{h_2(s_2+s_4+\beta)}(C_2D_1D_4m_3 - C_2D_3D_4m_1 - C_4D_1D_2m_3 + C_4D_2D_3m_1) \\ &+ e^{h_2(s_3+s_4+\beta)}(C_3D_2D_4m_1 - C_3D_1D_4m_2 - C_4D_2D_3m_1 + C_4D_1D_3m_2)) \\ &(1 - \kappa_2)(k_w + (z/h_1)^2 k_p) \end{aligned} \right] \quad (189)$$

Boyutsuz büyüklükler, denge şartlarında yerine yazılıp düzenlenirse;

$$\frac{a}{h_1} \int_{-1}^1 G_1(r_1) dr_1 = 1 \quad (190)$$

$$\frac{b}{h_1} \int_{-1}^1 G_2(r_2) dr_2 = 1 \quad (191)$$

olarak elde edilir.

2.8. İntegral Denklemlerin Sayısal Çözümü

Boyutsuz olarak ifade edilen (181) ve (185) numaralı denklemler, Gauss-Jacobi integrasyon formülasyonu yardımıyla aşağıdaki gibi çözülecektir.

Bu iki integral denklemden oluşan integral denklem sisteminin çözümü,

$$G_i(r_i) = w_i(r_i)g_i(r_i), \quad (i = 1,2) \quad (192)$$

$$w_i(r_i) = (1 - r_i)^\alpha(1 + r_i)^\beta, \quad (-1 \leq r \leq 1) \quad (193)$$

şeklinde aranabilir.

Bilinmeyen $p_1(x)$ ve $p_2(x)$ temas gerilmeleri; temasın başlangıç ve bitiş noktalarında sıfır olduğundan, söz konusu integral denklemlerin indisi (-1)'dir. Bu nedenle Gauss-Jacobi integrasyon formülasyonu, Gauss-Chebyshev integrasyon formülasyonuna dönüşür. Bu durumda $\alpha = \beta = 0.5$ olur. (192) ve (193) numaralı denklemler iki integral denklem için yeniden düzenlenirse;

$$G_1(r_{1i}) = w_1(r_{1i})g_1(r_{1i}), \quad (i = 1, \dots, N) \quad (194)$$

$$w_1(r_{1i}) = (1 - r_{1i}^2)^{0.5}, \quad (i = 1, \dots, N) \quad (195)$$

$$G_2(r_{2i}) = w_2(r_{2i})g_2(r_{2i}), \quad (i = 1, \dots, N) \quad (196)$$

$$w_2(r_{2i}) = (1 - r_{2i}^2)^{0.5}, \quad (i = 1, \dots, N) \quad (197)$$

biçiminde elde edilir.

Bilinmeyen temas gerilmeleri için tanımlanan bu ifadeler integral denklemlerde ve denge şartlarında yerlerine yazılırsa, integral denklemler temas gerilmelerinin ve temas uzunluklarının bilinmeyen olduğu aşağıdaki denklem takımına indirgenmiş olur.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N w_{1i} g_{1i}(r_{1i}) \left\{ \frac{a}{h_1} R_1^*(n_{1k}, r_{1i}) - \frac{\kappa_1 + 1}{8} \left[\frac{1}{r_{1i} - n_{1k}} \right] \right\} \\ + \frac{b}{h_1} \sum_{i=1}^N w_{2i} g_{2i}(r_{2i}) R_2(n_{1k}, r_{2i}) = \frac{\pi}{2} \frac{\mu_1}{P/h_1} \frac{a/h_1}{R/h_1} n_{1k} \end{aligned} \quad (198)$$

($i = 1, \dots, N + 1$)

$$\begin{aligned} \frac{a}{h_1} \sum_{i=1}^N w_{1i} g_{1i}(r_{1i}) V_1(n_{2k}, r_{1i}) \\ + \sum_{i=1}^N w_{2i} g_{2i}(r_{2i}) \left\{ \frac{b}{h_1} V_2^*(n_{2k}, r_{2i}) - \frac{b}{h_1} Z_1^*(n_{2k}, r_{2i}) \right. \\ \left. + \left(\frac{\kappa_1 + 1}{8\mu_1} + \frac{\kappa_2 + 1}{8\mu_0} \right) \left(\frac{1}{r_{2i} - n_{2k}} \right) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (199)$$

($i = 1, \dots, N + 1$)

$$\frac{a}{h_1} \sum_{i=1}^N w_{1i} g_{1i}(r_{1i}) = 1 \quad (i = 1, \dots, N) \quad (200)$$

$$\frac{b}{h_1} \sum_{i=1}^N w_{2i} g_{2i}(r_{2i}) = 1 \quad (i = 1, \dots, N) \quad (201)$$

Bu ifadelerde;

$$r_i = \cos \left(\frac{i\pi}{N+1} \right), \quad (i = 1, \dots, N) \quad (202)$$

$$n_k = \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{2k-1}{N+1} \right), \quad (k = 1, \dots, N+1) \quad (203)$$

$$W_i^N = \pi \left(\frac{1 - r_i^2}{N+1} \right), \quad (i = 1, \dots, N) \quad (204)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Elde edilen lineer denklem sisteminde bilinmeyen temas gerilmelerini ifade eden $g_1(r_{1i})$ ve $g_2(r_{2i})$, $2N + 2$ tanedir. Bu lineer denklem sisteminde de $2N + 2$ tane lineer denklem elde edilmektedir. Böylece $2N + 2$ bilinmeyenli $2N + 2$ tane denklemden oluşan bir lineer denklem sistemi elde edilmiştir. Bu denklem sisteminin çözümü sonucu bilinmeyen temas gerilmeleri ve temas uzunlukları bulunur. (200) ve (201) numaralı ifadelerdeki denge şartlarını elde edilen temas gerilmeleri ve temas mesafelerinin sağlaması gerekir. Bu şart sağlanana kadar interpolasyon işlemine devam edilir. Bu denklemlerin sağlatılması sonucunda elde edilecek temas gerilmeleri ve temas uzunlukları gerçek değerler olarak elde edilmiş olacaktır.



3. BULGULAR VE TARTIŞMA

3.1. Giriş

Bu bölümde, bir önceki bölümden elde edilen denklemler ile hazırlanmış bir Matlab programından faydalanılarak çeşitli rijitlik parametresi değerlerine, tabaka yükseklikleri oranına, yay sabitine, Pasternak zemin kayma modülüne ve tabakaların kayma modülü oranlarına göre, temas gerilmelerinin ve temas uzunluklarının değişimi incelenmiştir. Ayrıca, Pasternak zeminde y eksenli doğrultusunda oluşan yer değiştirmeler hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar tablolar ve grafikler yardımıyla sunulmuştur.

Tablo ve grafiklerde ifade edilen boyutsuz büyüklükler, çalışmanın Semboller Dizini bölümünde verilmiş olmakla birlikte bir kez daha aşağıda bahsedilmektedir.

a/h_1 : Rijit dairesel blok ile homojen tabaka arasındaki boyutsuz yarı temas uzunluğu

b/h_1 : Homojen tabaka ile FD tabaka arasındaki boyutsuz yarı temas uzunluğu

R/h_1 : Dairesel rijit bloğun yarıçapının homojen tabaka yüksekliğine oranı

β : FD tabakaya ilişkin rijitlik parametresi

μ_1/μ_0 : Homojen tabakanın kayma modülünün FD tabaka üst yüzeyindeki kayma modülüne oranı

$k_w = k_0/\mu_0$: Elastik yay sabitinin FD tabaka üst yüzeyindeki kayma modülüne oranı

$k_p = G/\mu_0$: Pasternak zemin kayma modülünün FD tabaka üst yüzeyindeki kayma modülüne oranı

3.1.1. Temas Uzunlukları ve Temas Gerilmelerine İlişkin Bulgular

Yukarıda ifade edilen çeşitli boyutsuz büyüklüklere göre rijit blok ile homojen tabaka (a/h_1) ve homojen tabaka ile FD tabaka arasındaki (b/h_1) yarı temas uzunluklarının değişimleri tablo ve grafikler halinde aşağıda verilmektedir.

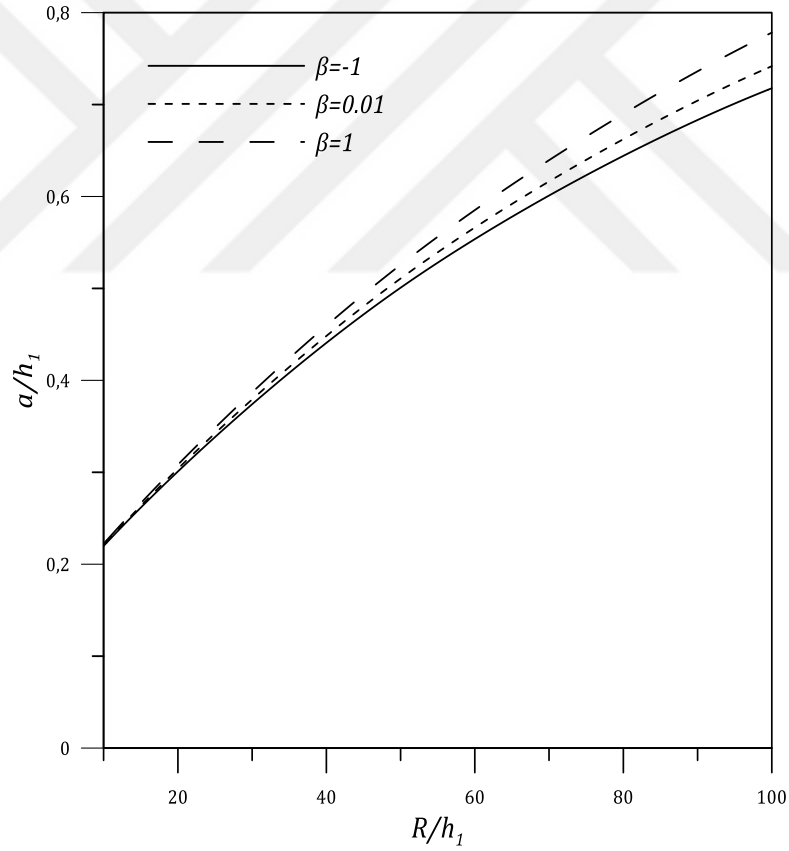
Tablo 1’de, β ve dairesel rijit blok yarıçapının (R/h_1) çeşitli boyutsuz değerlerine bağlı olarak yarı temas uzunluklarının aldığı değerler verilmiştir. Şekil 2 ve Şekil 3’de ise değerler grafikler aracılığıyla sunulmuştur.

Tablo 1, Şekil 2 ve Şekil 3 göstermektedir ki dairesel rijit blok yarıçapı arttıkça iki temas yüzeyi arasındaki temas mesafeleri artmaktadır. Diğer yandan, FD tabakanın

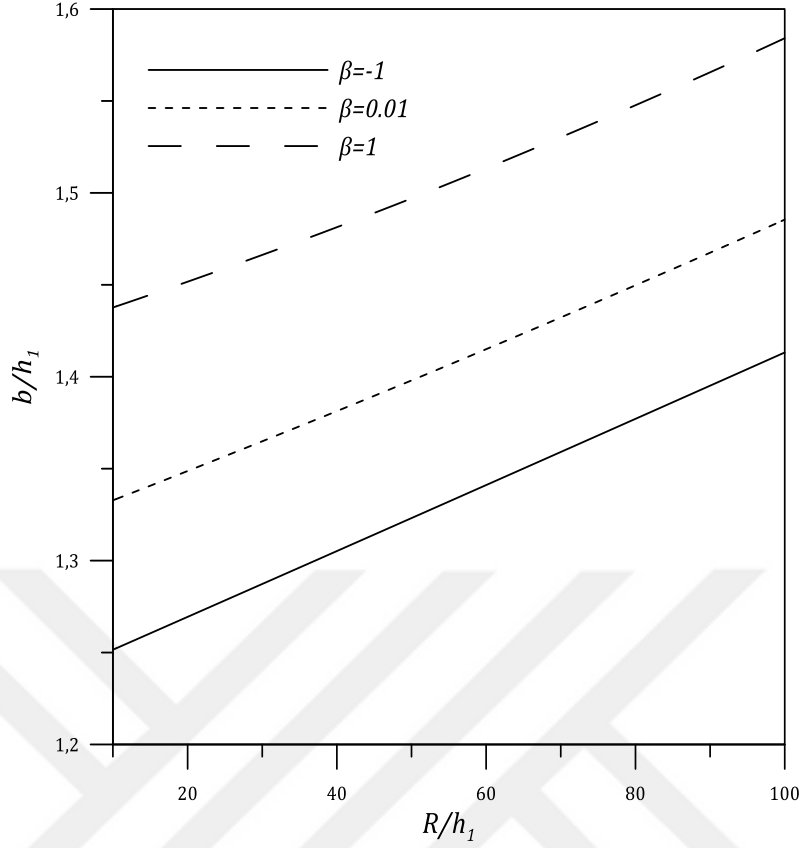
rijitliğin artması durumunda, rijit blok ile homojen tabaka ve homojen tabaka ile FD tabaka arasındaki temas uzunlukları da artmaktadır.

Tablo 1. Çeşitli dairesel rijit blok yarıçapı ve β değerlerine bağlı olarak, rijit blok ile homojen tabaka ve homojen tabaka ile FD tabaka arasındaki temas uzunlukları ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_1/\mu_0 = 1$, $k_w = 1$, $k_p = 1$)

β	$R/h_1 = 10$		$R/h_1 = 50$		$R/h_1 = 100$	
	a/h_1	b/h_1	a/h_1	b/h_1	a/h_1	b/h_1
-1	0.219854	1.251549	0.500749	1.323122	0.717755	1.413195
0.01	0.220851	1.332804	0.510805	1.397999	0.741781	1.485439
1	0.222252	1.437649	0.525736	1.496970	0.778251	1.584113



Şekil 2. Çeşitli β rijitlik parametresi değerine göre a/h_1 yarı temas uzunluğunun R/h_1 ile değişimi ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_1/\mu_0 = 1$, $k_w = 1$, $k_p = 1$)



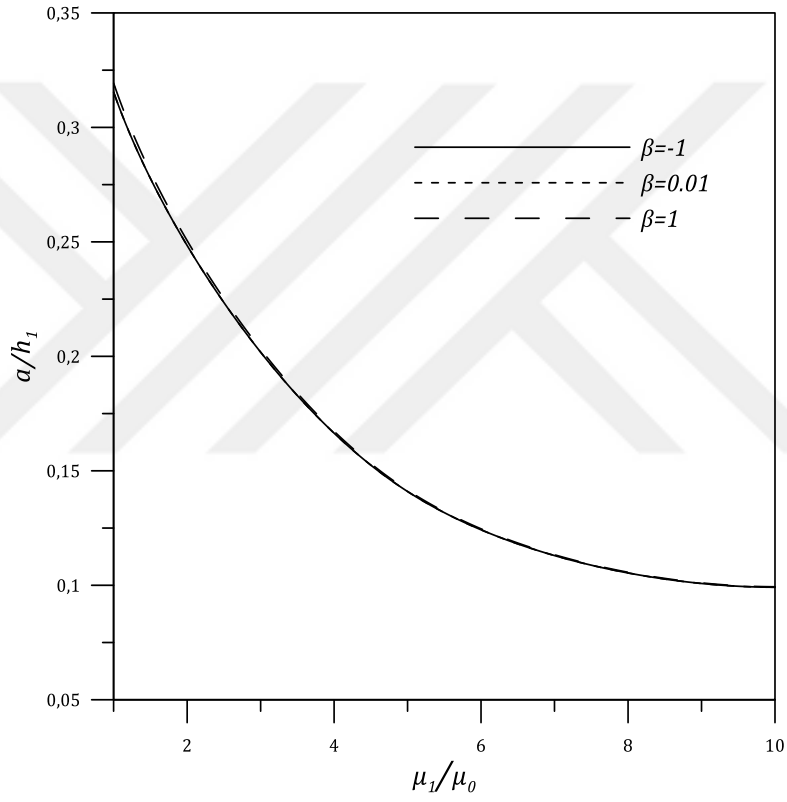
Şekil 3. Çeşitli β rijitlik parametresi değerine göre b/h_1 yarı temas uzunluğunun R/h_1 ile değişimi ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_1/\mu_0 = 1$, $k_w = 1$, $k_p = 1$)

Tablo 2’ de, homojen tabaka kayma modülünün FD tabakanın üst yüzeyindeki kayma modülüne oranı μ_1/μ_0 ve β ’nın çeşitli değerlerine bağlı olarak, yarı temas uzunluklarının aldığı değerler verilmiştir. Şekil 4 ve Şekil 5’de bu değerler grafikler yardımıyla sunulmuştur.

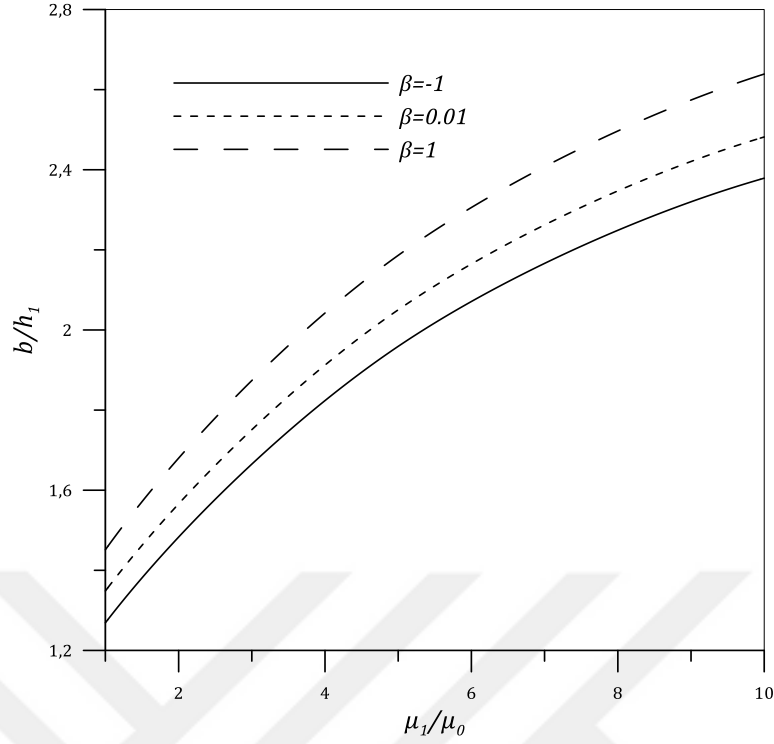
Tablo 2, Şekil 4 ve Şekil 5’te görüldüğü gibi, FD tabakaya ait rijitlik parametresinin artışı, rijit blok ile homojen tabaka arasındaki yarı temas uzunluğuna çok az etki etmektedir. Bununla birlikte, homojen tabaka ile FD tabaka arasındaki temas uzunluğu, rijitlik parametresi arttıkça belirgin bir şekilde artmaktadır. Ayrıca, homojen tabakanın kayma modülünün FD tabakanın üst yüzeyindeki kayma modülüne oranı arttıkça, rijit blok ile homojen tabaka arasındaki temas mesafeleri azalırken, homojen tabaka ile FD tabaka arasındaki temas mesafeleri artmaktadır.

Tablo 2. Çeşitli μ_1/μ_0 kayma modülü oranları ve β değerlerine bağlı olarak, rijit blok ile homojen tabaka ve homojen tabaka ile FD tabaka arasındaki yarı temas uzunlukları ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $h_1/h_2 = 1$, $R/h_1 = 20$, $k_w = 1$, $k_p = 1$)

β	$\mu_1/\mu_0 = 1$		$\mu_1/\mu_0 = 5$		$\mu_1/\mu_0 = 10$	
	a/h_1	b/h_1	a/h_1	b/h_1	a/h_1	b/h_1
-1	0.312623	1.269190	0.140481	1.959161	0.098964	2.378954
0.01	0.315382	1.348468	0.140931	2.050513	0.099133	2.481791
1	0.319330	1.451335	0.141499	2.186269	0.099348	2.639031



Şekil 4. FD tabakanın rijitlik parametresi ve μ_1/μ_0 oranına bağlı olarak, a/h_1 yarı temas uzunluğunun değişimi ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $h_1/h_2 = 1$, $R/h_1 = 20$, $k_w = 1$, $k_p = 1$)



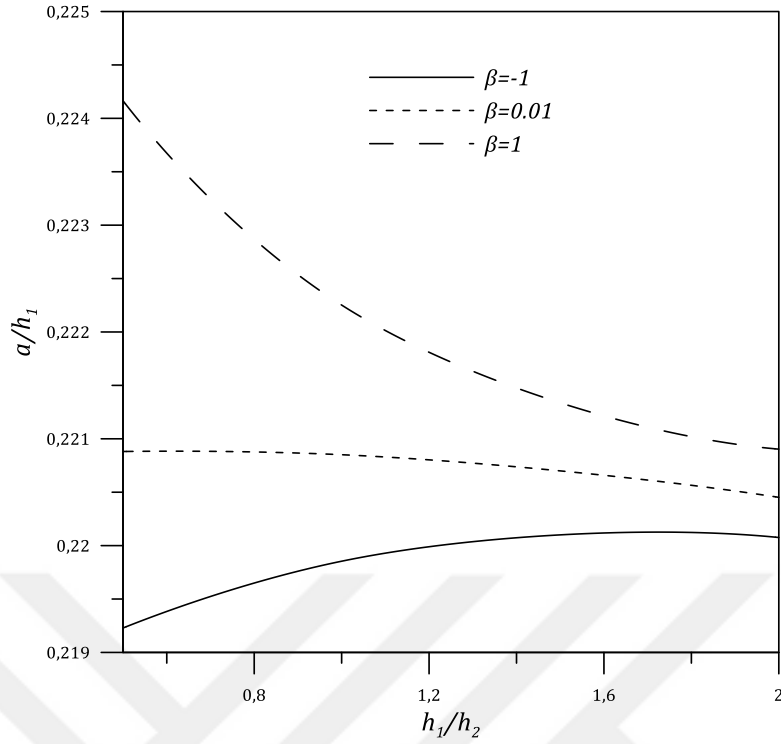
Şekil 5. FD tabakanın rijitlik parametresi ve μ_1/μ_0 oranına bağlı olarak, b/h_1 yarı temas uzunluğunun değişimi ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $h_1/h_2 = 1$, $R/h_1 = 20$, $k_w = 1$, $k_p = 1$)

Tablo 3’te, homojen tabaka yüksekliğinin FD tabakanın yüksekliğine oranı (h_1/h_2) ve β ’nın çeşitli değerlerine bağlı olarak yarı temas uzunluklarının değişimi verilmiştir. Şekil 6 ve Şekil 7’de bu değişimler grafikler yardımıyla sunulmuştur.

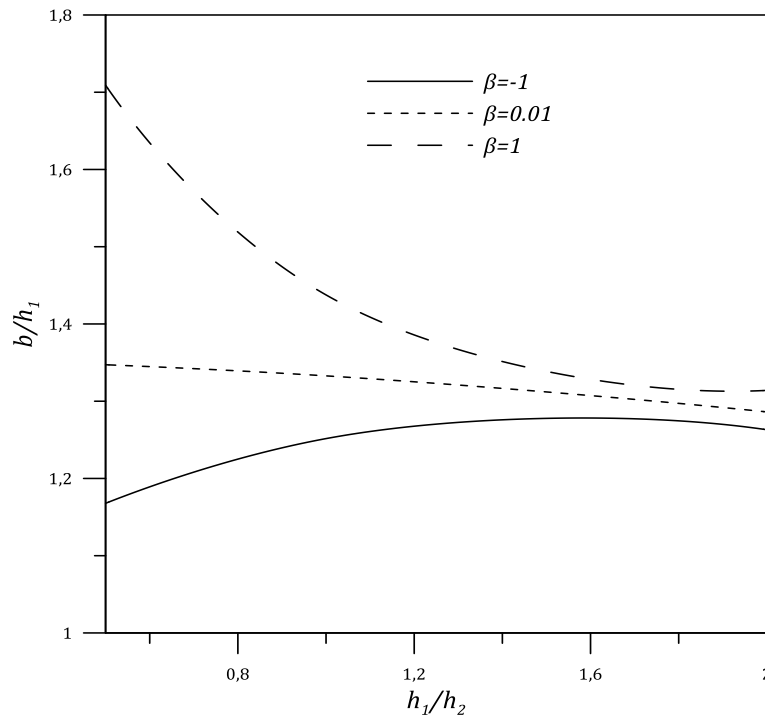
Tablo 3, Şekil 6 ve Şekil 7’de görüldüğü gibi, homojen tabakanın yüksekliği arttıkça, rijit blok ile homojen tabaka arasındaki temas mesafeleri çok az miktarda değişirken, homojen tabaka ile FD tabaka arası temas mesafeleri belirgin bir şekilde artmaktadır. Rijitlik parametresi β ’nın artmasıyla, her iki temas yüzeyinde de temas uzunlukları artmıştır.

Tablo 3. Çeşitli h_1/h_2 tabaka yükseklikleri oranları ve β değerlerine bağlı olarak, rijit blok ile homojen tabaka ve homojen tabaka ile FD tabaka arasındaki yarı temas uzunlukları ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $\mu_1/\mu_0 = 1$, $R/h_1 = 10$, $k_w = 1$, $k_p = 1$)

β	$h_1/h_2 = 0.5$		$h_1/h_2 = 1$		$h_1/h_2 = 2$	
	a/h_1	b/h_1	a/h_1	b/h_1	a/h_1	b/h_1
-1	0.219229	1.167801	0.219854	1.251549	0.220076	1.263036
0.01	0.220881	1.347160	0.220851	1.332804	0.220452	1.286194
1	0.224164	1.708948	0.222252	1.437649	0.220903	1.313936



Şekil 6. FD tabakanın rijitlik parametresi ve h_1/h_2 oranına bağlı olarak, a/h_1 yarı temas uzunluğunun değişimi ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $\mu_1/\mu_0 = 1$, $R/h_1 = 10$, $k_w = 1$, $k_p = 1$)



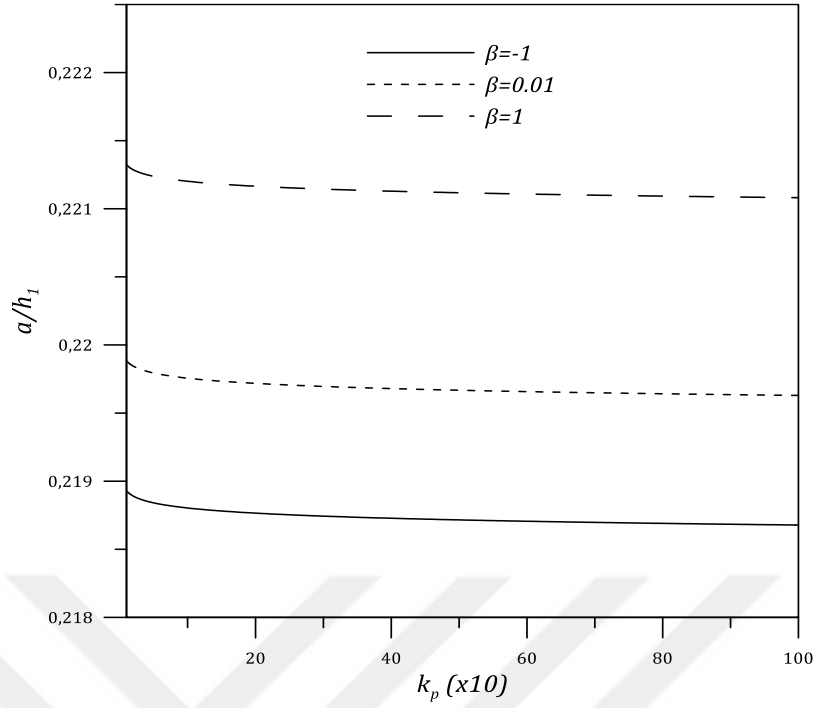
Şekil 7. FD tabakanın rijitlik parametresi ve h_1/h_2 oranına bağlı olarak, b/h_1 yarı temas uzunluğunun değişimi ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $\mu_1/\mu_0 = 1$, $R/h_1 = 10$, $k_w = 1$, $k_p = 1$)

Tablo 4'te, Pasternak zemin kayma modülünün boyutsuz parametresi k_p ve β 'nin çeşitli değerlerine bağlı olarak yarı temas uzunluklarının değişimi verilmiştir. Şekil 8 ve Şekil 9'da bu değişimler grafikler yardımıyla sunulmaktadır.

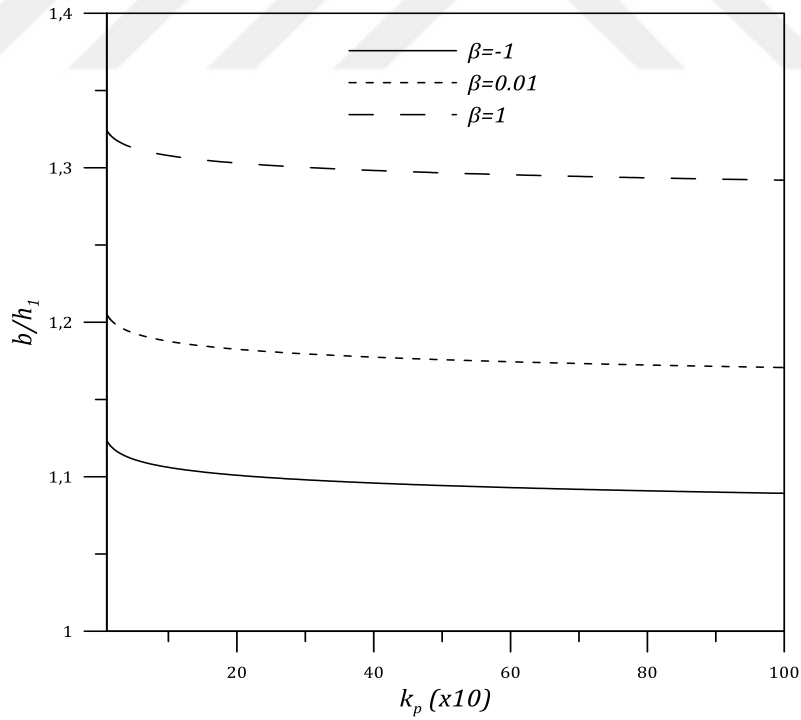
Pasternak zemin katsayısı k_p arttıkça, zeminin düşey doğrultuda yer değiştirmesi azalır ve dolayısıyla da temel daha rijit bir davranış sergiler. Bu durum, zemin ile üzerindeki tabakalar arasında beklenen temas mesafelerinin azalmasına yol açar. Tablo 4'ten görülebileceği gibi, k_p değeri arttıkça, β 'nın tüm değerleri için temas mesafeleri giderek azalır ve buna bağlı olarak temas gerilmeleri artar. Ayrıca k_p değerinin tüm aralıklarında FD tabakanın aşağı yönde rijitliği arttıkça, rijit blok ile homojen tabaka arasındaki temas uzunluklarında çok büyük değişiklikler görülmezken, homojen tabaka ile FD tabaka arasında temas uzunlukları giderek artmakta ve buna bağlı olarak temas gerilmeleri azalmaktadır. Şekil 8 ve Şekil 9'daki grafiklerde k_p 'yi sonsuza yaklaştırmak için 10^7 büyüklüğünde bir değer olarak alınmıştır.

Tablo 4. Çeşitli boyutsuz Pasternak zemin parametresi k_p ve β değerlerine bağlı olarak, rijit blok ile homojen tabaka ve homojen tabaka ile FD tabaka arasındaki yarı temas uzunlukları ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $\mu_1/\mu_0=1$, $R/h_1=10$, $h_1/h_2 = 1$, $k_w = 1$)

β	$k_p = 10$		$k_p = 100$		$k_p \rightarrow \infty$	
	a/h_1	b/h_1	a/h_1	b/h_1	a/h_1	b/h_1
-1	0.218959	1.127381	0.218741	1.097739	0.218709	1.093404
0.01	0.219914	1.209245	0.219693	1.179251	0.219661	1.174866
1	0.221352	1.327986	0.221142	1.300038	0.221111	1.295839



Şekil 8. FD tabakanın rijitlik parametresi ve çeşitli boyutsuz Pasternak zemin parametresi k_p 'ye bağlı olarak, a/h_1 yarı temas uzunluğunun değişimi ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $\mu_1/\mu_0=1$, $R/h_1=10$, $h_1/h_2=1$, $k_w=1$)



Şekil 9. FD tabakanın rijitlik parametresi ve çeşitli boyutsuz Pasternak zemin parametresi k_p 'ye bağlı olarak, b/h_1 yarı temas uzunluğunun değişimi ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $\mu_1/\mu_0=1$, $R/h_1=10$, $h_1/h_2=1$, $k_w=1$)

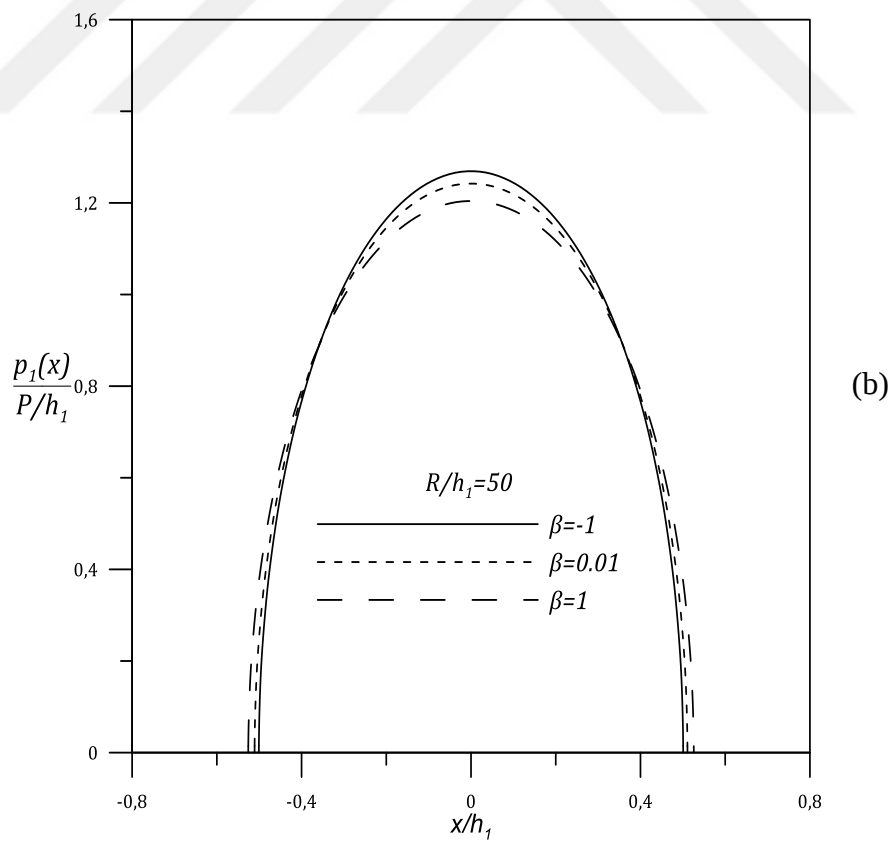
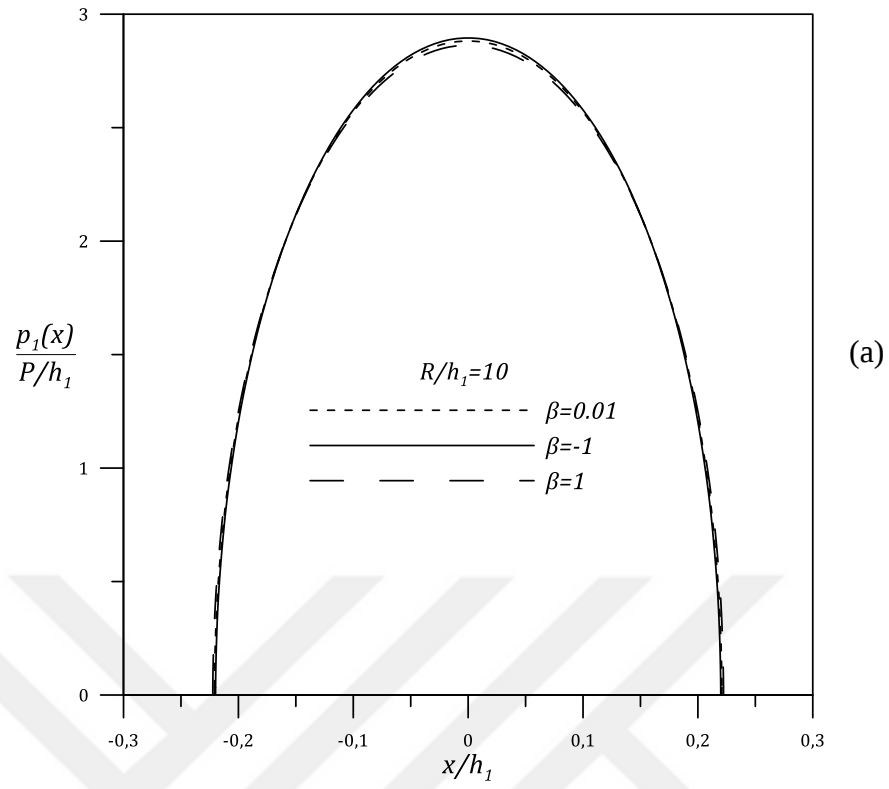
Tablo 5'ten görülebileceği üzere, boyutsuz Pasternak zemin parametreleri k_w ve k_p arttıkça, rijit tabaka ile homojen tabaka arasında oluşan temas uzunluklarında belirgin bir değişiklik olmamaktadır. Ancak, homojen tabaka ile FD tabaka arasındaki temas uzunlukları azalmakta ve buna bağlı olarak temas gerilmeleri artmaktadır.

Tablo 5. Çeşitli boyutsuz zemin parametreleri k_w ve k_p değerlerine bağlı olarak, rijit blok ile homojen tabaka ve homojen tabaka ile FD tabaka arasındaki yarı temas uzunlukları ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $\mu_1/\mu_0=1$, $R/h_1=10$, $h_1/h_2=1$, $\beta = 0.01$)

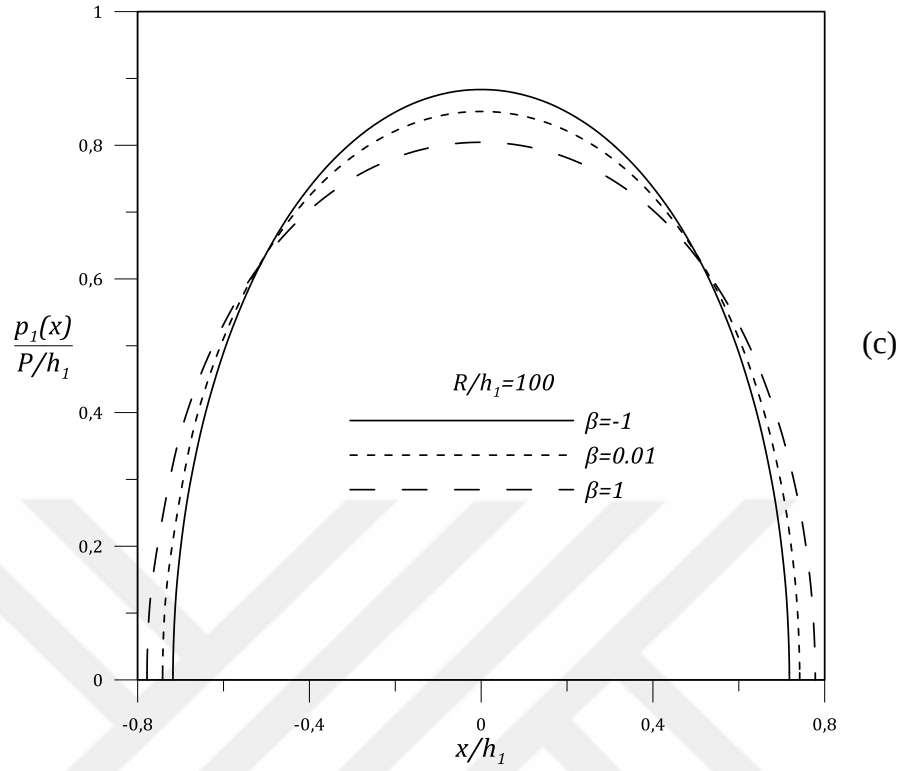
k_p	$k_w = 1$		$k_w = 5$		$k_w = 10$	
	a/h_1	b/h_1	a/h_1	b/h_1	a/h_1	b/h_1
10	0.219914	1.209245	0.219833	1.196974	0.219794	1.191304
100	0.219693	1.179251	0.219689	1.178665	0.219687	1.178266
∞	0.219661	1.174866	0.219661	1.174865	0.219661	1.174868

Şekil 10 ve Şekil 17'de, dairesel rijit blok ile homojen tabaka ve homojen tabaka ile FD tabaka arasındaki temas gerilme dağılımları iki temas yüzeyi için grafiklerle verilmiştir.

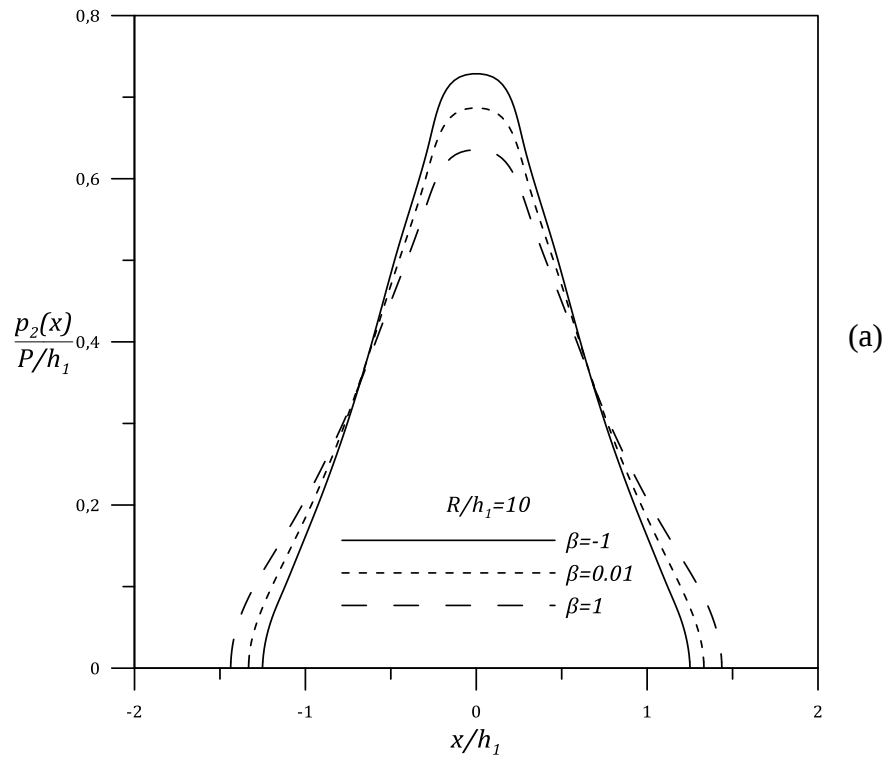
Şekil 10 ve Şekil 11; farklı rijit blok yarıçapları ve FD tabakanın rijitlik parametresine (β) bağlı olarak rijit blok ile homojen tabaka ve homojen tabaka ile FD tabaka arasındaki temas yüzeyi boyunca oluşan gerilme dağılımını göstermektedir. Rijit blok ve tabaka arasındaki temas uzunlukları, rijit bloğun yarıçapının artmasıyla birlikte artış göstermektedir. Bu artış, maksimum temas gerilmelerinin azalmasına neden olmaktadır. Rijit bloğun yarıçapı arttıkça, homojen tabaka ile FD tabaka arasındaki temas uzunlukları da artmaktadır. Bu durum, maksimum temas gerilmelerinin azalmasına sebep olmaktadır. FD tabakanın rijitlik parametresi β 'nın artması durumunda, rijit blok ile homojen tabaka arasındaki temas uzunlukları az bir artış göstermekte ve buna bağlı olarak maksimum temas gerilmelerinin değerleri azalmaktadır. Benzer şekilde, homojen tabaka ile FD tabaka arasında da rijitlik parametresinin değeri arttıkça temas uzunlukları artmakta ve maksimum temas gerilmeleri azalmaktadır. Rijitlik parametresinin azalması durumunda, temas mesafeleri azalmakta ve minimum temas gerilmelerinin değerleri artmaktadır.



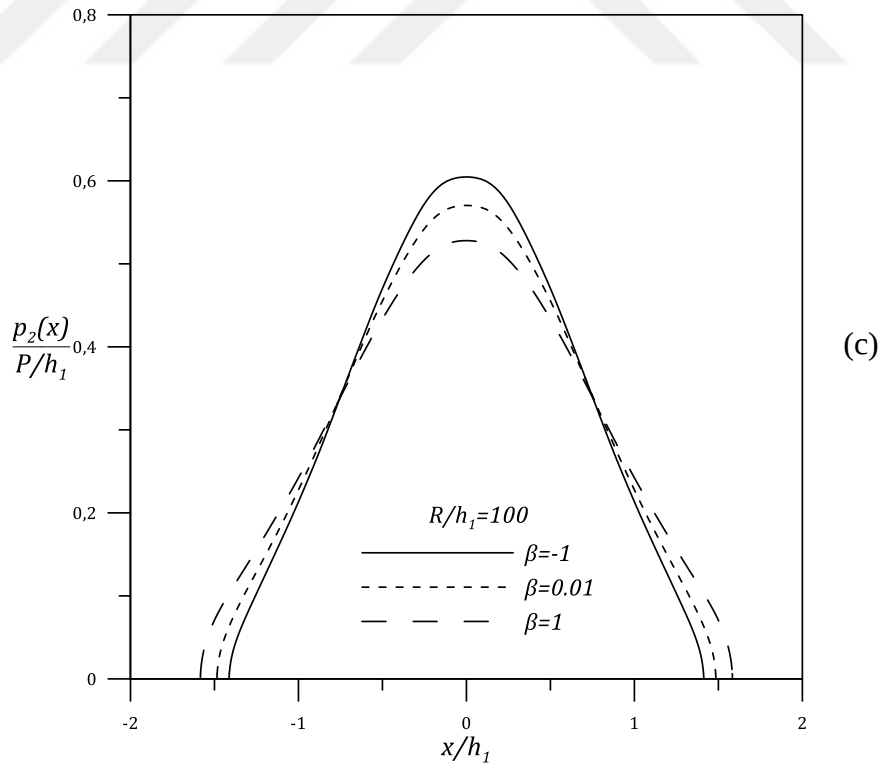
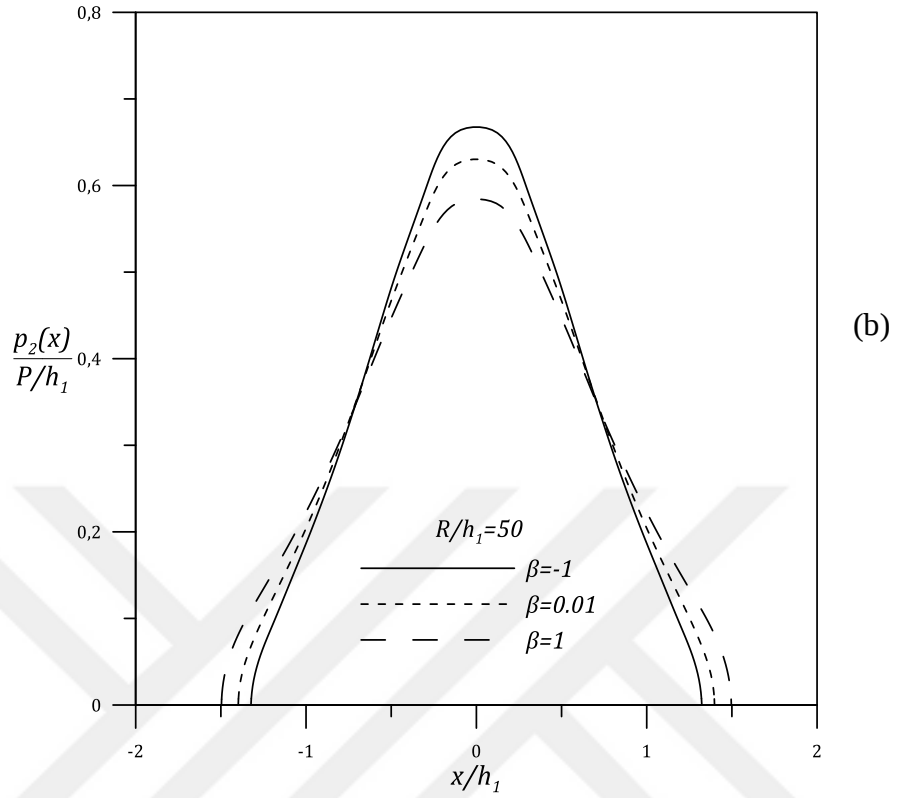
Şekil 10'un devamı



Şekil 10. Rijit blok ve homojen tabaka arasındaki temas yüzeyi boyunca oluşan temas gerilmelerinin, rijit blok yarıçapı ve β 'ya göre değişimi ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_1/\mu_0 = 1$, $k_w = 1$, $k_p = 1$)

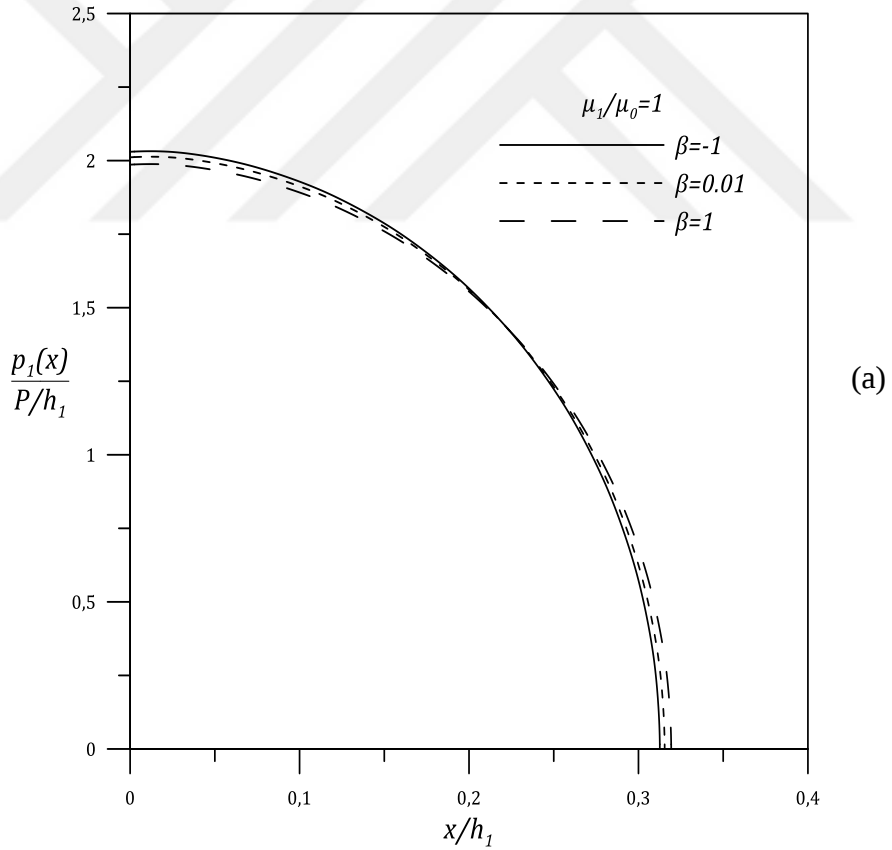


Şekil 11'in devamı

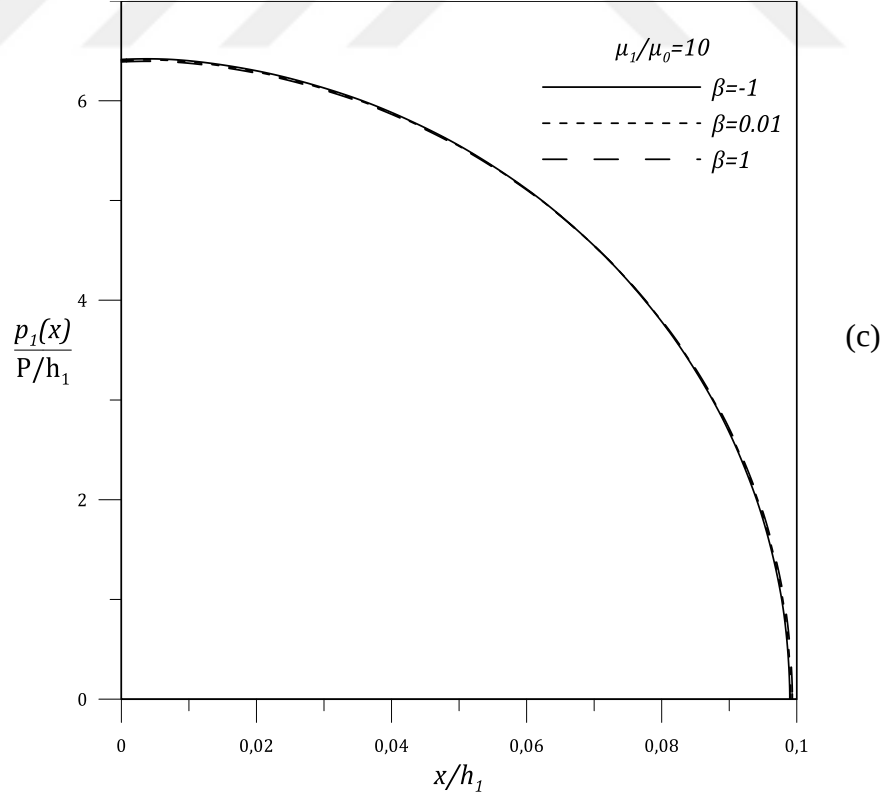
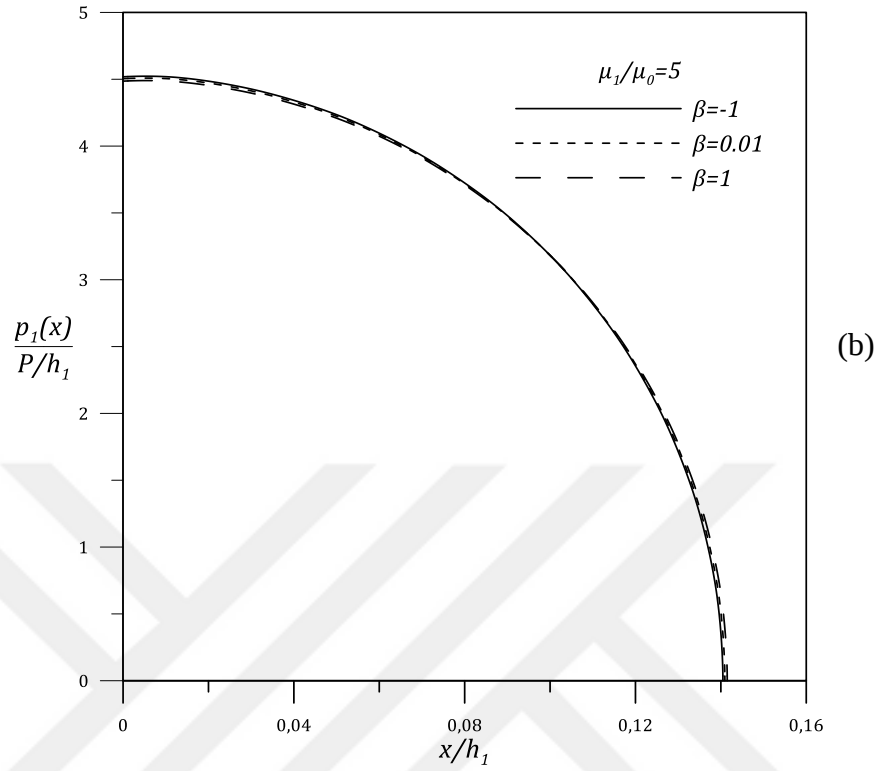


Şekil 11. Homojen tabaka ve FD tabaka arasındaki temas yüzeyi boyunca oluşan temas gerilmelerinin, rijit blok yarıçapı ve β 'ya göre değişimi ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_1/\mu_0 = 1$, $k_w = 1$, $k_p = 1$)

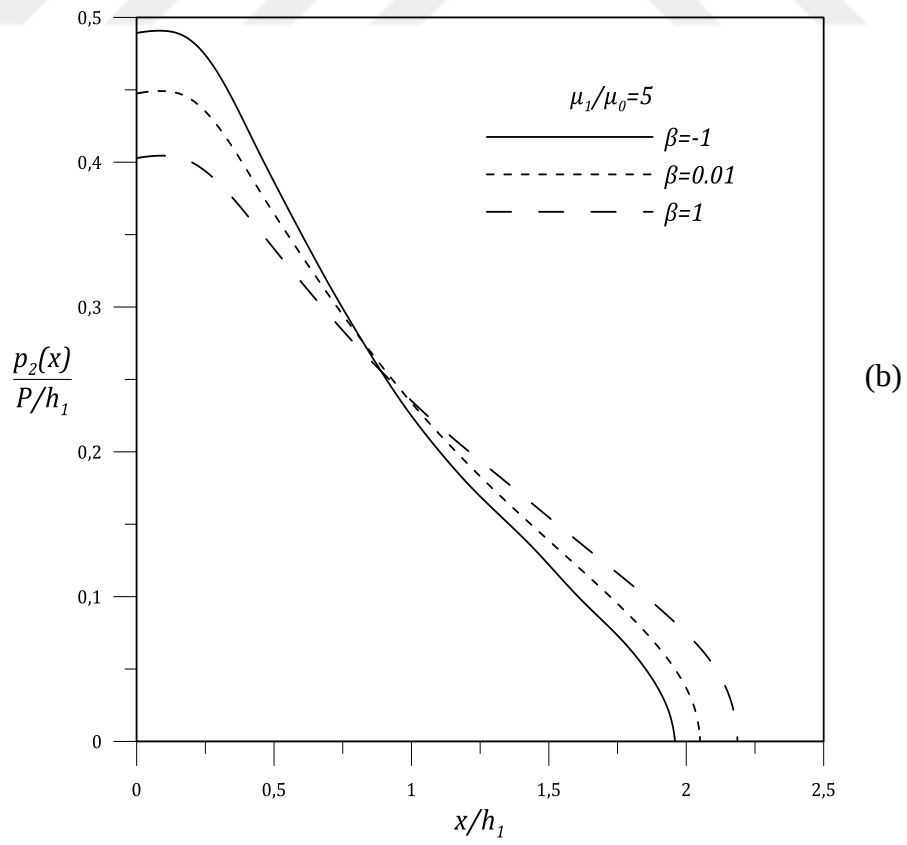
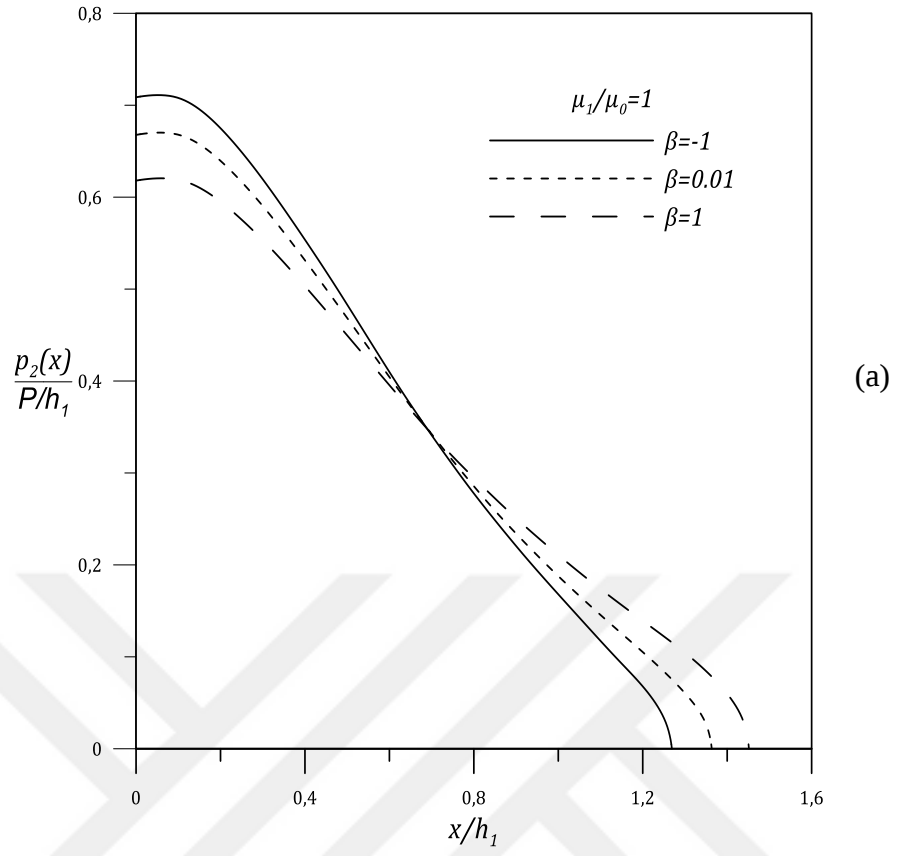
Şekil 12 ve Şekil 13'te, farklı β değerleri ve homojen tabakanın kayma modülünün FD tabakanın üst yüzeyinin kayma modülüne oranına göre rijit blok ile homojen tabaka ve homojen tabaka ile FD tabaka arasındaki yarı temas yüzeylerinde oluşan gerilme dağılışı verilmektedir. μ_1/μ_0 oranı arttıkça, rijit blok ile homojen tabaka arasındaki temas mesafeleri azalmakta buna bağlı olarak temas gerilmeleri artmaktadır. Bu durum beklenen bir sonuçtur. Çünkü μ_1 'in değeri arttıkça, homojen tabakanın rijitliği artmaktadır. Buna bağlı olarak da temas gerilmelerinin değerleri artmaktadır. Homojen tabaka ile FD tabaka arasında ise temas gerilmeleri azalırken, temas mesafeleri artmaktadır. Rijitlik parametresi β 'nın artışının, rijit blok ile homojen tabaka arasındaki temas mesafeleri ve temas gerilmelerine çok az bir etkisinin olduğu gözlenmektedir. Ancak, homojen tabaka ile FD tabaka arasındaki temas gerilmelerine ve mesafelerine β 'nın etkisinin daha belirgin olduğu görülmektedir. β 'nın artmasıyla birlikte, temas mesafeleri artmakta ve maksimum temas gerilmeleri azalmaktadır.



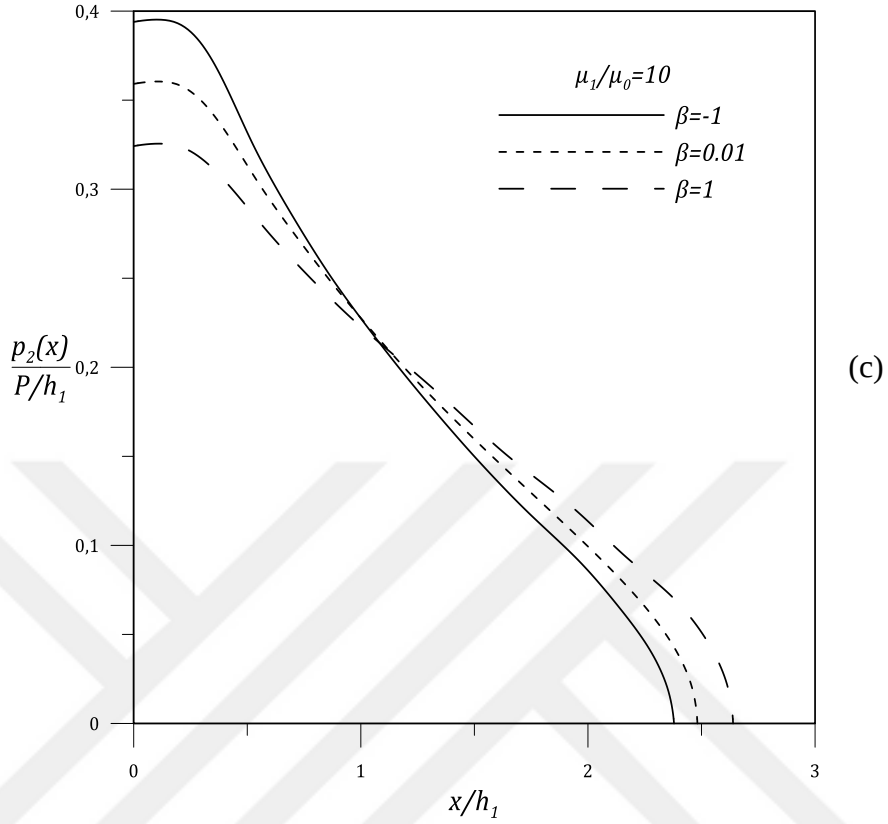
Şekil 12'nin devamı



Şekil 12. Rijit blok ve homojen tabaka arasındaki temas yüzeyi boyunca oluşan temas gerilmelerinin, μ_1/μ_0 oranına ve β 'ya göre değişimi ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $h_1/h_2 = 1$, $R/h_1 = 20$, $k_w = 1$, $k_p = 1$)

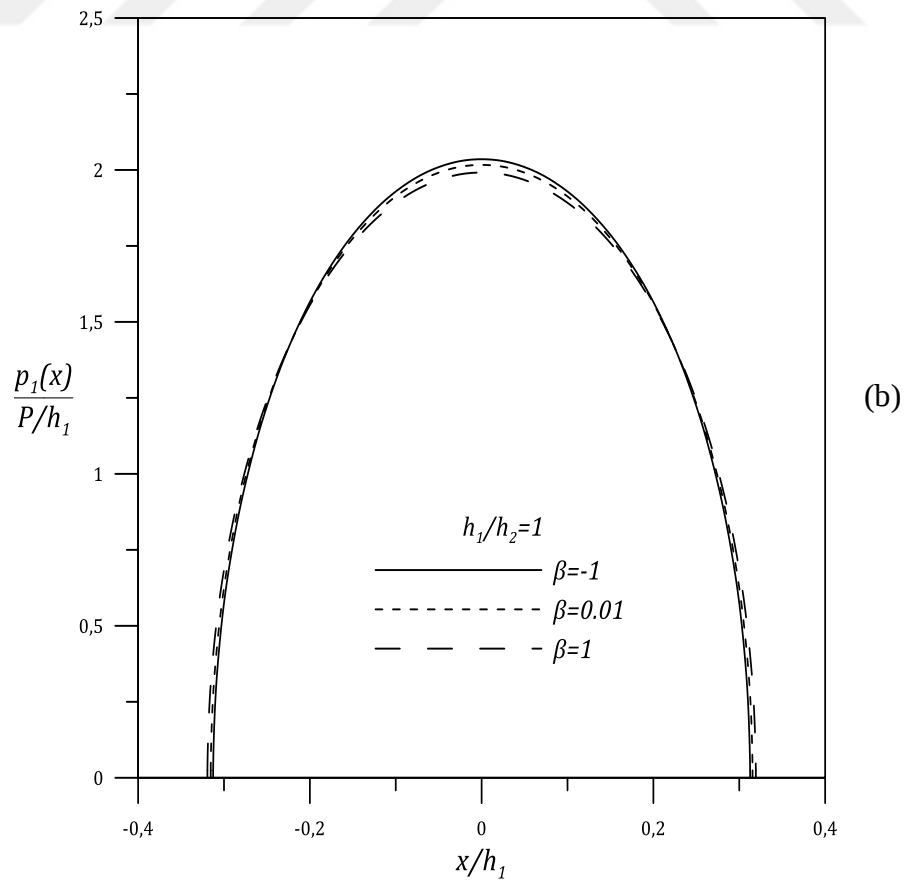
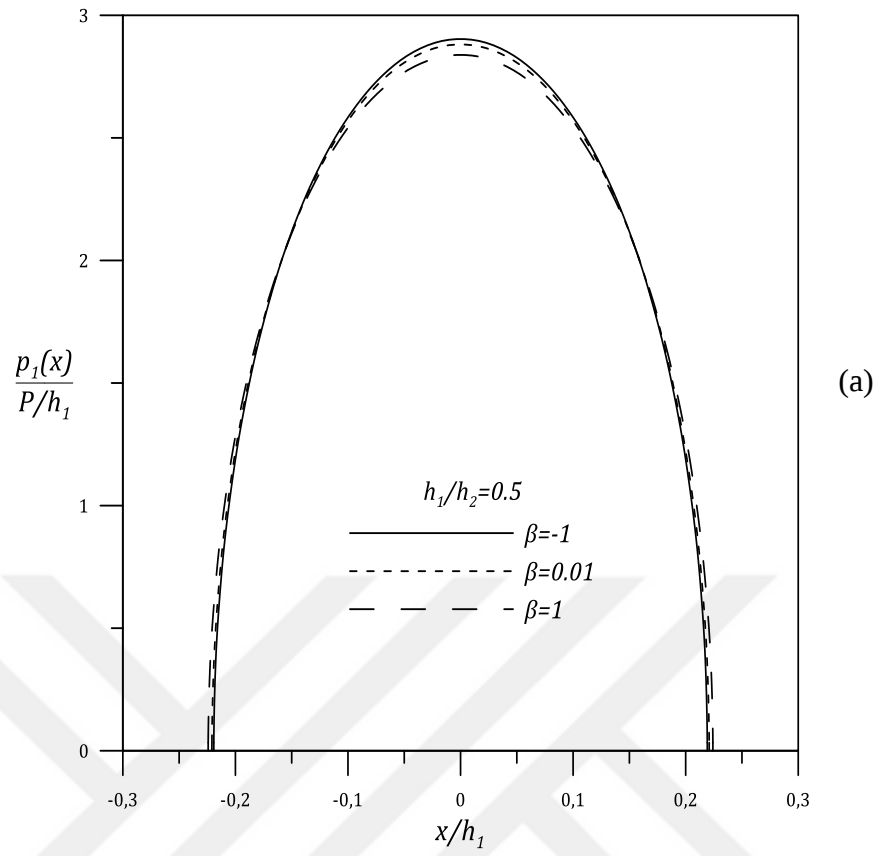


Şekil 13'ün devamı

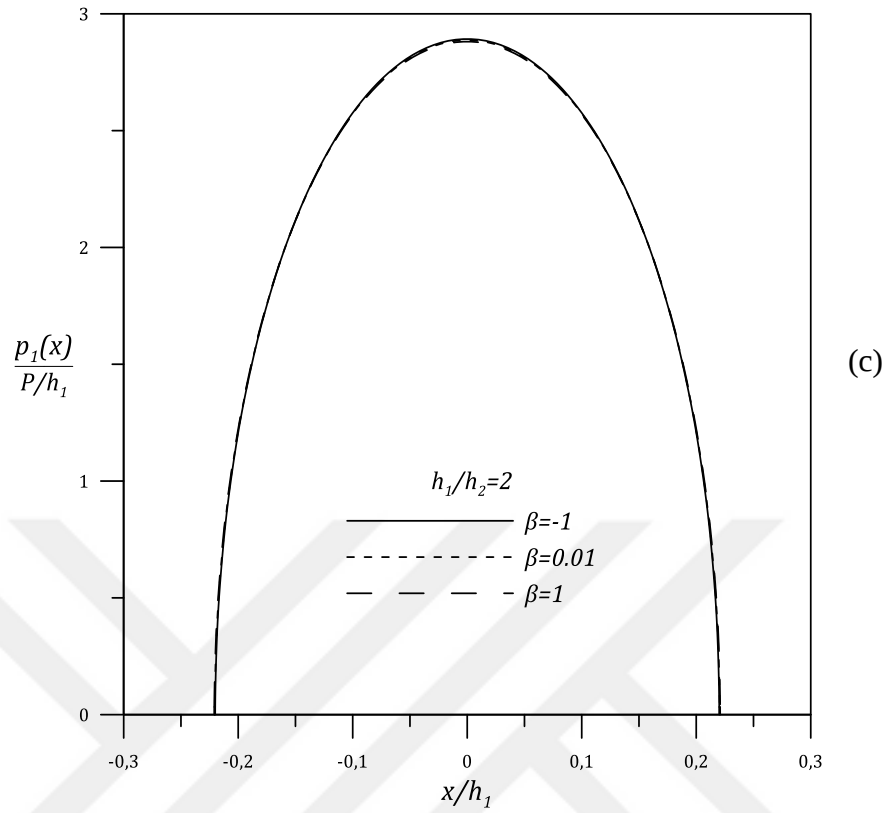


Şekil 13. Homojen tabaka ile FD tabaka arasındaki temas yüzeyi boyunca oluşan temas gerilmelerinin, μ_1/μ_0 oranına ve β 'ya göre değişimi ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $h_1/h_2 = 1$, $R/h_1 = 20$, $k_w = 1$, $k_p = 1$)

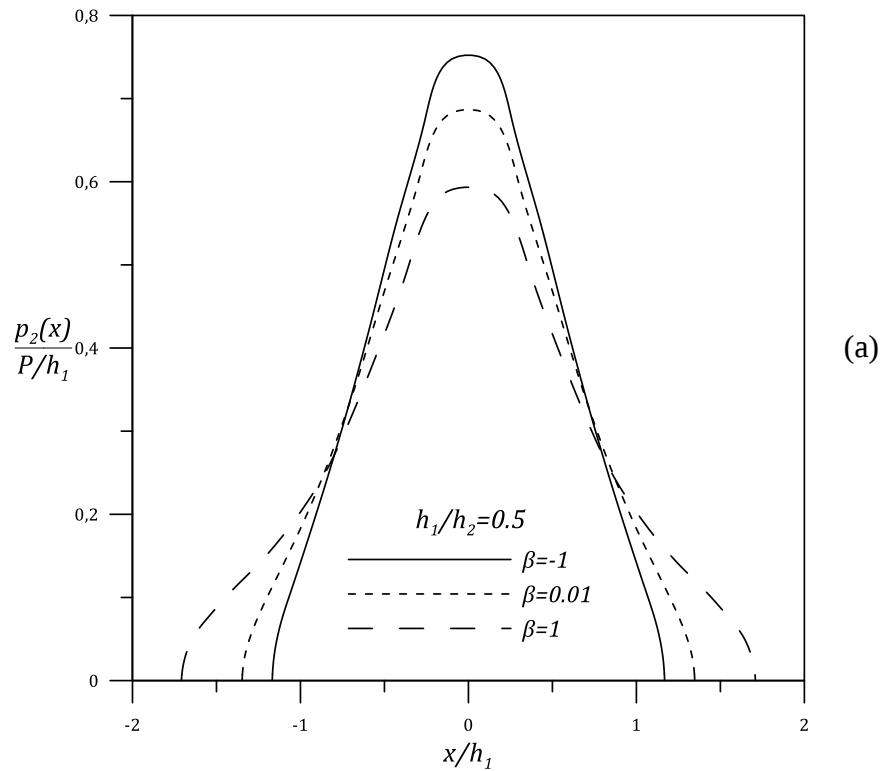
Şekil 14 ve Şekil 15'te, farklı β değerleri ve homojen tabakanın yüksekliğinin FD tabakanın yüksekliğine oranına bağlı olarak, rijit blok ile homojen tabaka ve homojen tabaka ile FD tabaka arasındaki temas yüzeyleri boyunca oluşan gerilmelerin değişimi sunulmaktadır. Şekil 14'ten görülebileceği üzere, rijit blok ile homojen tabaka arasındaki temas yüzeyindeki en küçük temas gerilmesi $h_1/h_2 = 1$ oranında elde edilmiştir. Bu, temas mesafesinin en fazla olduğu orana karşılık gelmektedir. FD tabakanın rijitlik parametresinin artmasıyla, temas mesafeleri boyunca oluşan temas gerilmelerinde belirgin bir değişiklik gözlemlenememiştir. Şekil 15'te görüldüğü gibi, homojen tabaka ile FD tabaka arasındaki temas yüzeylerinde en küçük temas gerilmesi yine $h_1/h_2 = 1$ oranında elde edilmiştir. FD tabakanın rijitlik parametresinin artmasıyla, temas mesafeleri boyunca oluşan temas gerilmelerinde ise belirgin bir değişim gözlemlenmiştir. FD tabakanın rijitlik parametresi arttıkça, çeşitli h_1/h_2 oranlarında temas gerilmeleri azalmakta ve buna bağlı olarak temas mesafeleri artmaktadır.



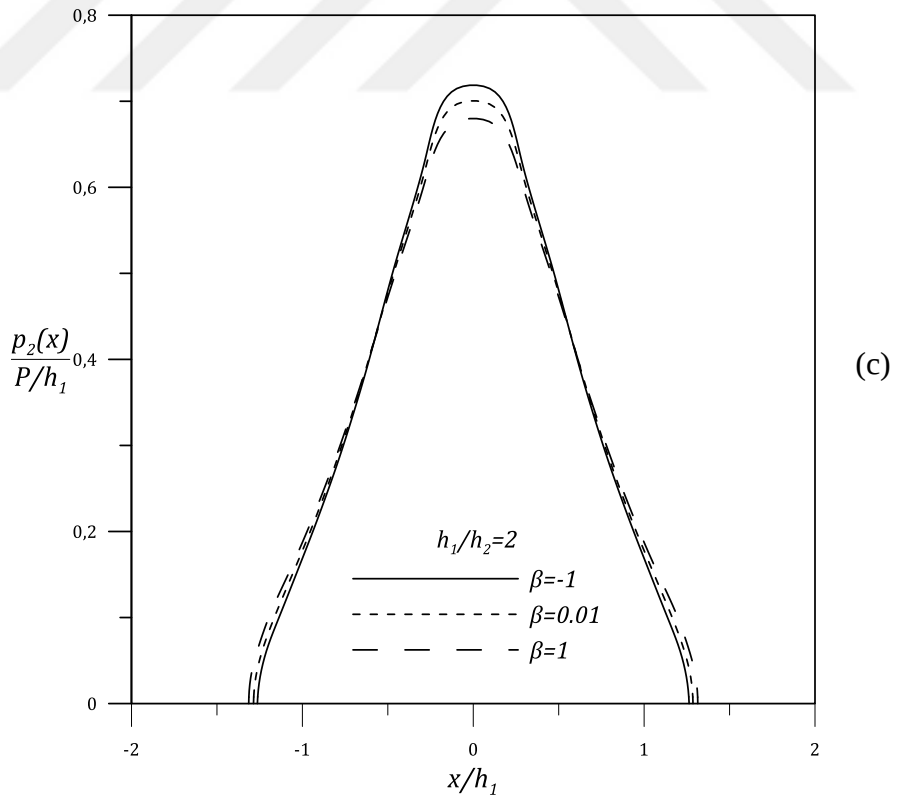
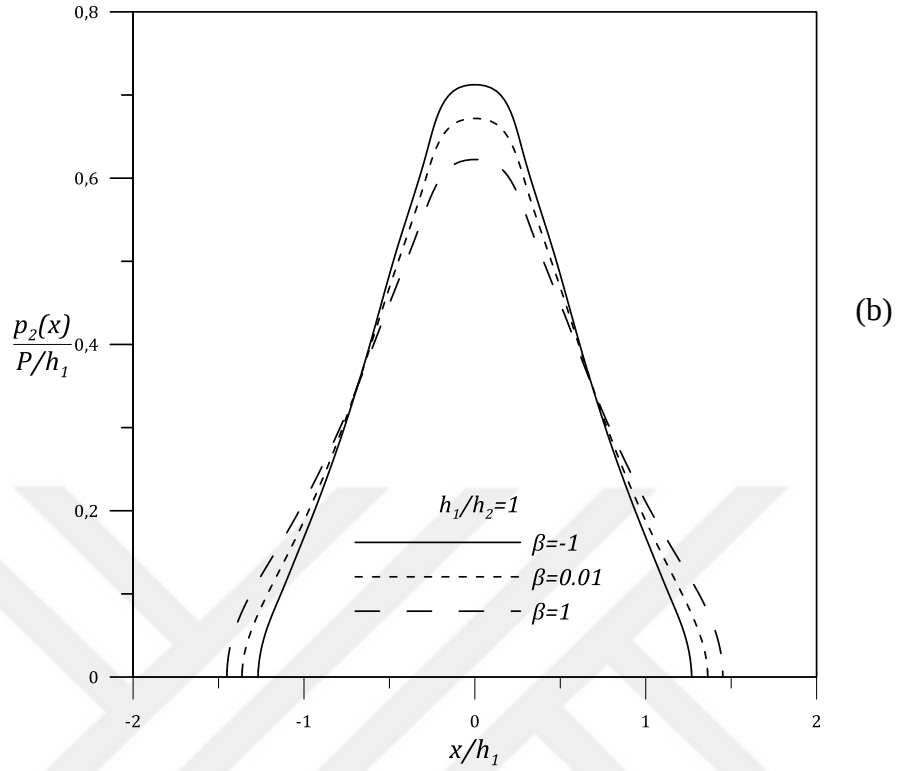
Şekil 14'ün devamı



Şekil 14. Çeşitli h_1/h_2 tabaka yükseklikleri oranları ve β 'ya bağlı olarak, rijit blok ile homojen tabaka arasındaki temas yüzeyi boyunca oluşan temas gerilmelerinin değişimi ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $\mu_1/\mu_0 = 1$, $R/h_1=10$, $k_w = 1$, $k_p = 1$)

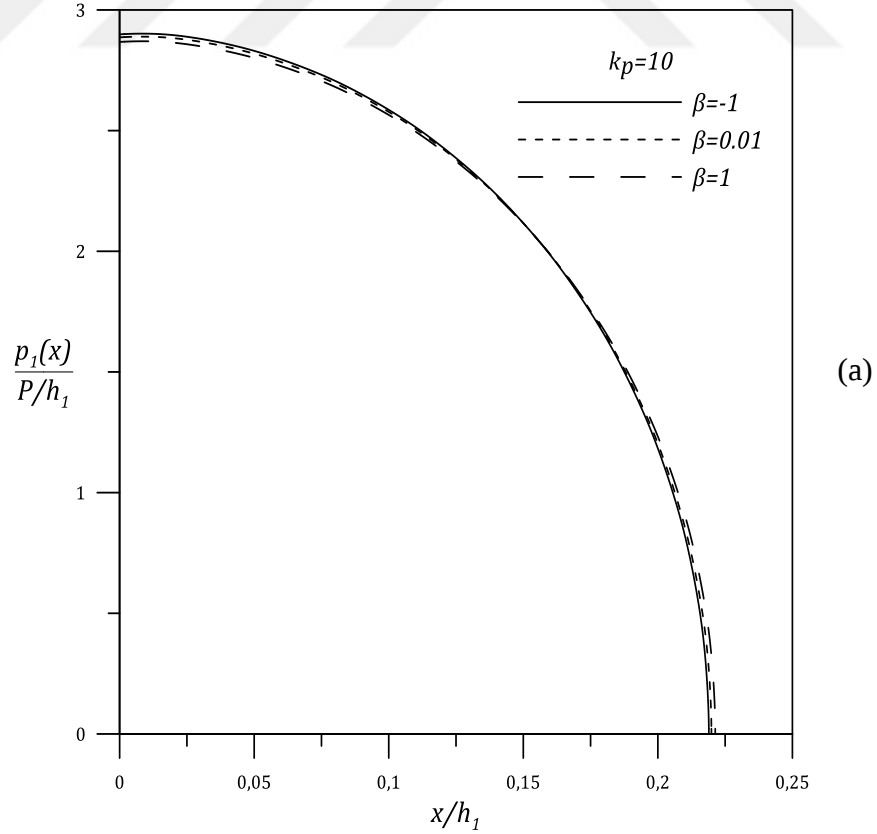


Şekil 15'in devamı

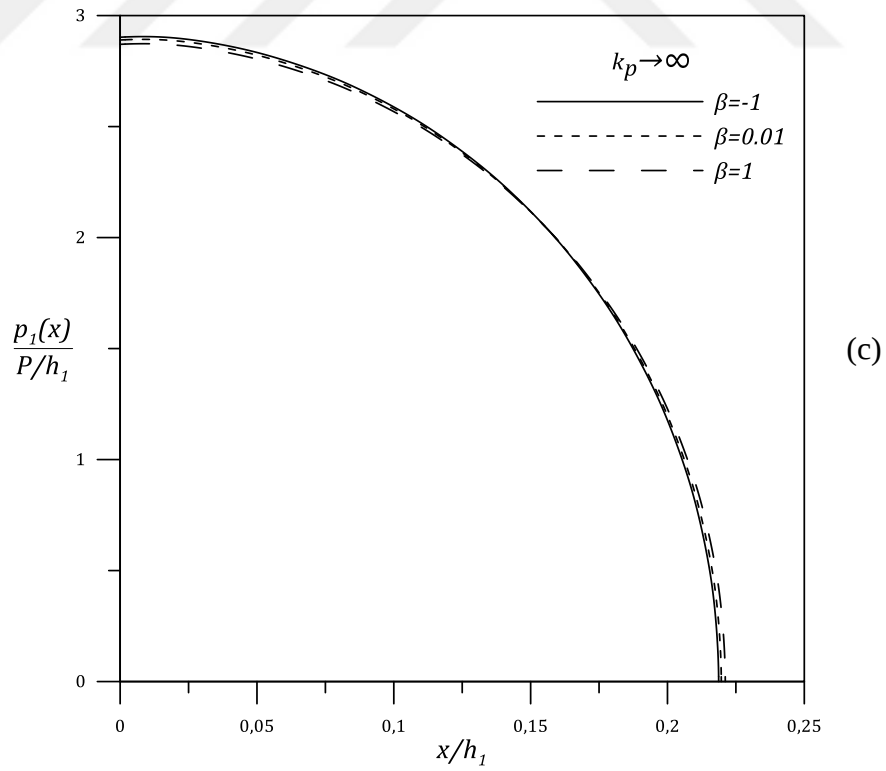
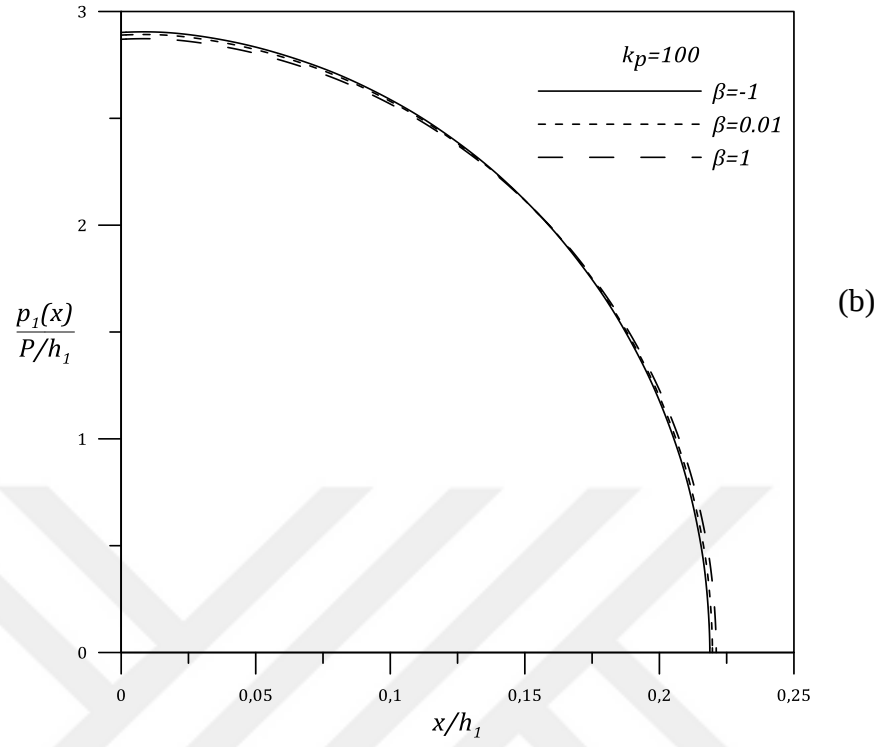


Şekil 15. Çeşitli h_1/h_2 tabaka yükseklikleri oranları ve β 'ya bağlı olarak, homojen tabaka ile FD tabaka arasındaki temas yüzeyi boyunca oluşan temas gerilmelerinin değişimi ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $\mu_1/\mu_0 = 1$, $R/h_1=10$, $k_w = 1$, $k_p = 1$)

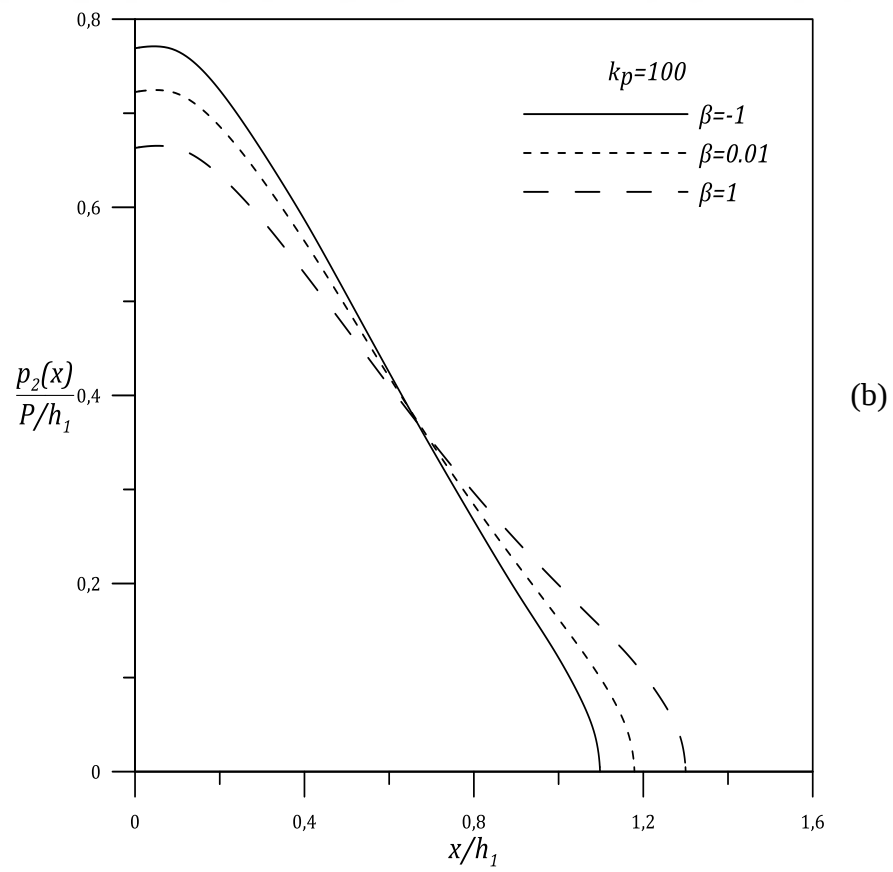
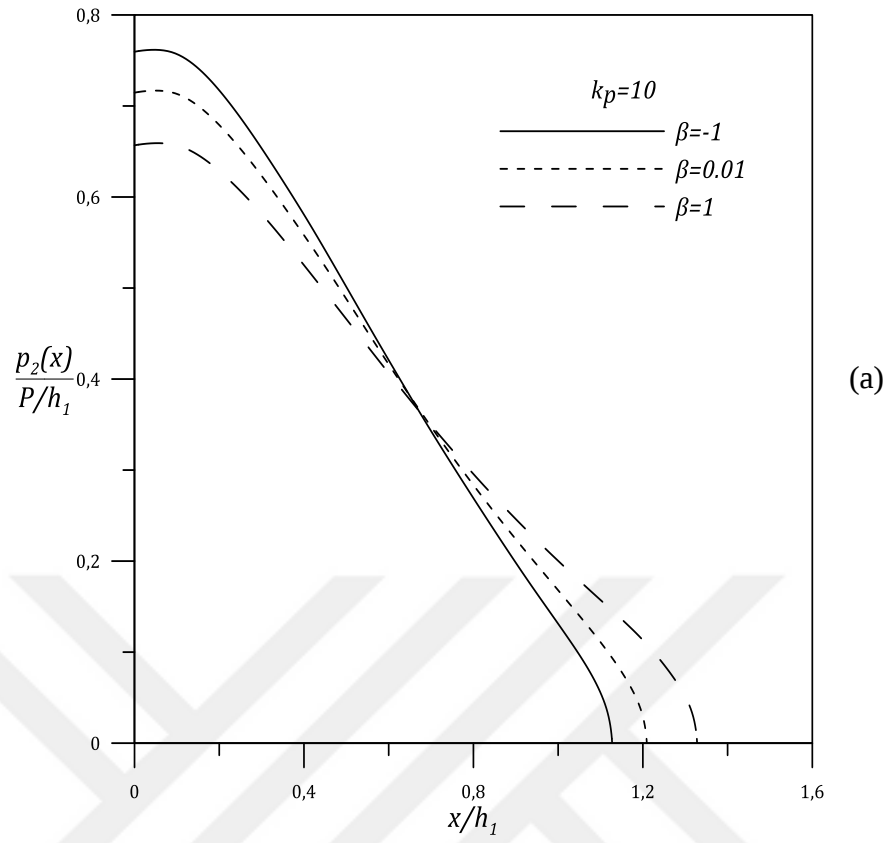
Şekil 16 ve Şekil 17’de, farklı Pasternak zemin parametresi k_p ’nin çeşitli değerleri ve β değerine bağlı olarak, rijit blok ile homojen tabaka ve homojen tabaka ile FD tabaka arasındaki yarı temas yüzeyleri boyunca oluşan gerilmelerin dağılımını sunmaktadır. Şekil 16’dan gözlemlenebileceği gibi, Pasternak zemin parametresinin artmasıyla birlikte, rijit blok ile homojen tabaka arasındaki temas mesafeleri ve temas gerilmelerinde belirgin değişiklikler meydana gelmemektedir. Bu durumun temel nedeni, homojen tabakanın doğrudan zemine oturmasıdır. Zemin ile homojen tabaka arasında FD tabakanın bulunmasıdır. FD tabakasının rijitliğinin artmasıyla da benzer sonuçlar elde edilmiştir. FD tabakasının x ekseninin altında yer alması nedeniyle, rijitliği azaldıkça temas mesafelerinde çok az bir azalma meydana gelmekte ve bu duruma bağlı olarak temas gerilmelerinde artış gözlemlenmektedir. Şekil 17’de ise; k_p ’nin artışıyla birlikte, zeminin düşey doğrultuda yer değişmesi azalacağı için daha rijit bir yapıya sahip olacağı öngörülmektedir. Bu durumda, homojen tabaka ve FD tabaka arasında temas mesafeleri azalmakta ve temas gerilmeleri artmaktadır. FD tabakanın rijitliğinin azalması durumunda da temas gerilmeleri üzerinde aynı etkiler söz konusu olmaktadır.



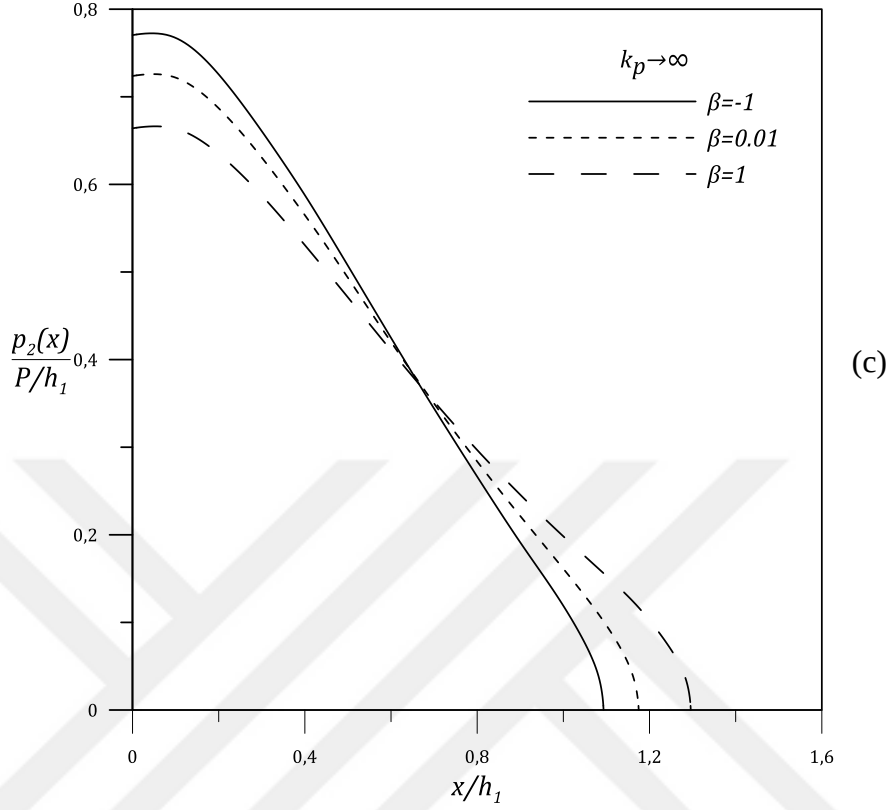
Şekil 16'nın devamı



Şekil 16. Çeşitli Paternak zemin parametresi (k_p) ve β değerine bağlı olarak, rijit blok ile homojen tabaka arasındaki yarı temas yüzeyi boyunca oluşan temas gerilmelerinin değişimi ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $\mu_1/\mu_0 = 1$, $h_1/h_2 = 1$, $R/h_1 = 10$, $k_w = 1$)



Şekil 17'nin devamı

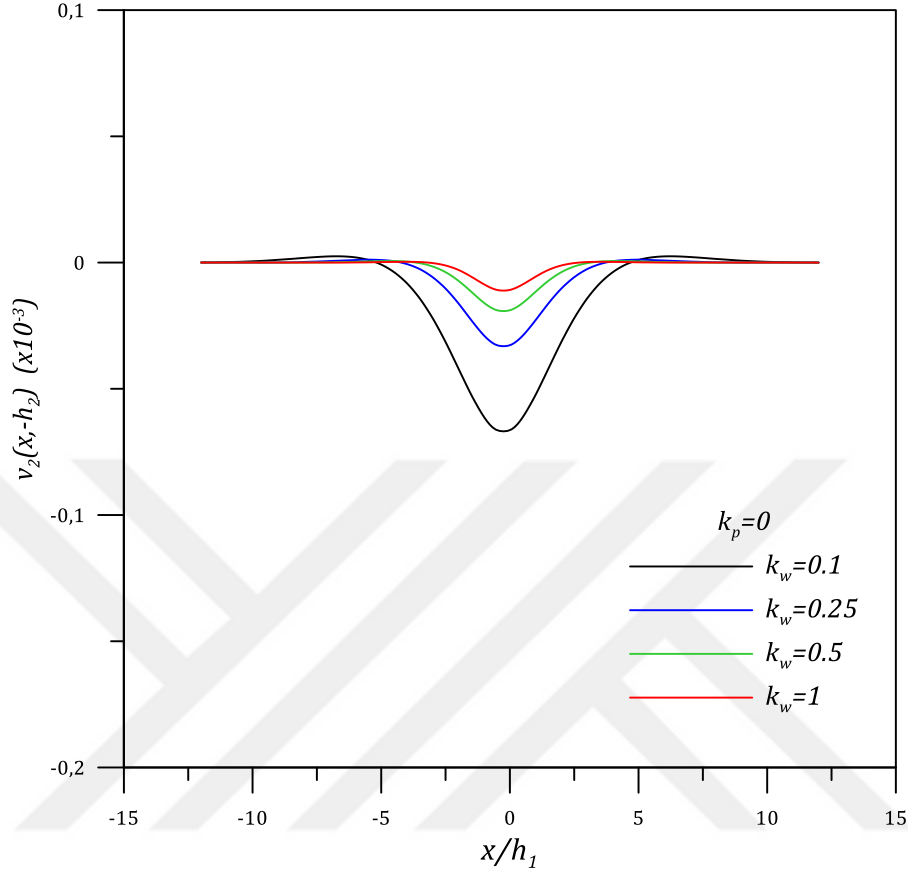


Şekil 17. Çeşitli Pasternak zemin parametresi (k_p) ve β değerine bağlı olarak, homojen tabaka ile FD tabaka arasındaki yarı temas yüzeyi boyunca oluşan temas gerilmelerinin değişimi ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $\mu_1/\mu_0 = 1$, $h_1/h_2 = 1$, $R/h_1 = 10$, $k_w = 1$)

3.1.2. Pasternak Zemindeki Yer Değiştirmelere İlişkin Bulgular

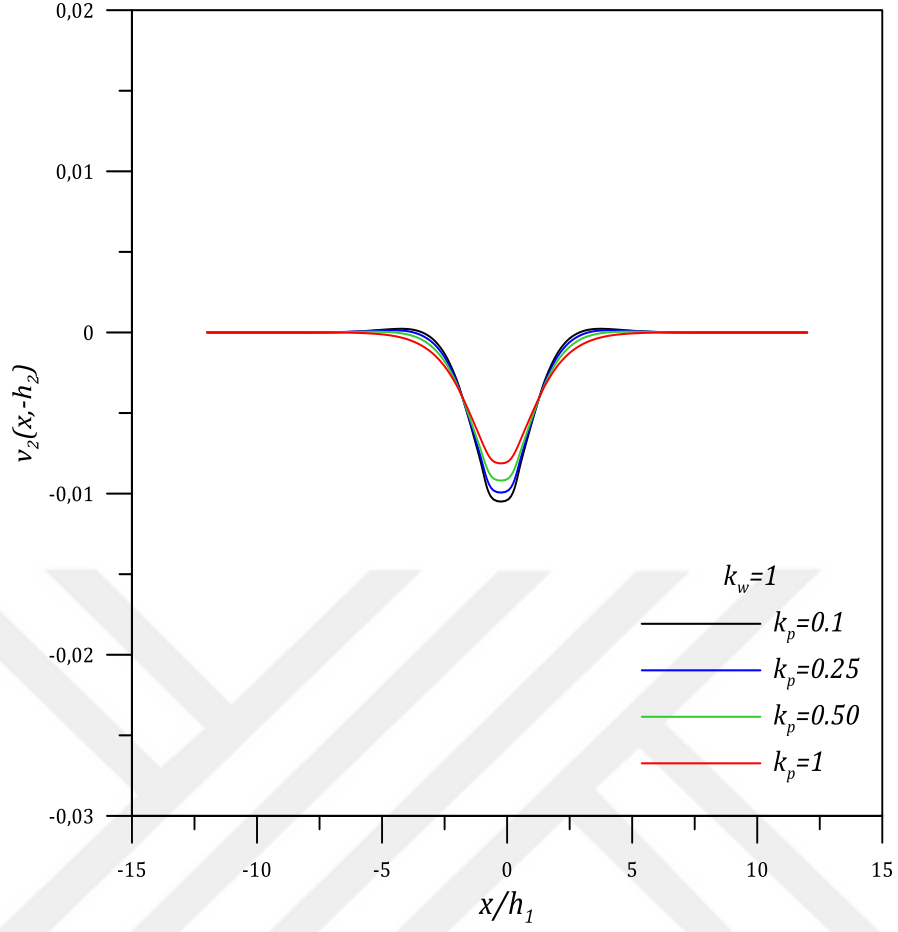
Pasternak zemin, iki parametrelili bir zemin modelidir ve Winkler zemin bu modelin özel bir halidir. Winkler zeminde yüklenen yük, zeminin her noktasına eşit şekilde dağıtılır ve zemin elastik davranış gösterir. Ancak, Pasternak zeminde yük altında düşey doğrultudaki yer değiştirmeler kısıtlanırken yatay yönde yer değiştirmelere izin verilir. Bu nedenle, Pasternak zemini, Winkler zeminiyle karşılaştırıldığında daha rijit davranır ve yer değiştirmeler daha küçük olur. Belirtilen durumu göstermek için öncelikle zeminin kayma modülü sıfır alınarak Winkler hale getirilmiştir. Çeşitli boyutsuz büyüklüklere göre, Winkler zeminin yay sabiti parametresi k_w 'nin değeri artırılarak, temas mesafesi boyunca oluşan yer değişimleri Şekil 18'de grafik yardımıyla sunulmaktadır. Daha sonra, zemin modeline düşey doğrultudaki hareketini kısıtlayan bir kayma modülü eklenerek (k_p), Pasternak zemin modeli elde edilmiştir. Pasternak zemin modelinde; kayma modülü parametresinin değeri

artırılarak, zemindeki düşey yer değiştirmeler Şekil 19'daki grafik yardımıyla gösterilmektedir.



Şekil 18. Çeşitli Pasternak zemin parametresi k_w 'ye bağlı olarak, FD tabaka ile Pasternak zemin arasındaki temas yüzeyi boyunca oluşan yer değiştirmelerin değişimi ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $\mu_1/\mu_0 = 1$, $\beta = -1$, $k_p = 0$)

Şekil 18'de, Pasternak zemin kayma modülü k_p 'nin değeri sıfır alınarak zeminin düşey doğrultuda yer değiştirmesine izin verilmiştir. Böylece zemin her noktada elastik özellik gösteren Winkler zemine dönüşmektedir. Winkler zeminin elastik davranışında belirleyici olan yay sabiti k_w 'nin değeri arttıkça, zemin içerisinde modellenen yaylar daha rijit hale gelmekte ve zemin rijitleşmektedir. Bu durumda k_w 'nin artışına bağlı olarak yer değiştirmeler azalmaktadır. Beklenildiği gibi zemin rijitleştikçe, yer değiştirmeler azalmaktadır.



Şekil 19. Çeşitli Pasternak zemin parametresi k_p 'ye bağlı olarak, FD tabaka ve Pasternak zemin arasındaki temas yüzeyi boyunca oluşan yer değişmelerin değişimi ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $\mu_1/\mu_0 = 1$, $\beta = -1$, $k_w = 1$)

Şekil 19'daki grafikte, Pasternak zeminin yay sabiti (k_w) sabit tutulurken, zeminin kayma modülü kademeli olarak artırılarak zeminin kayma modülünün etkisi ortaya konmuştur. Zemin kayma modülü k_p , zeminin düşey doğrultudaki hareketini kısıtlayarak yatay doğrultudaki hareketine izin vermektedir. Bu nedenle k_p değerinin artmasıyla birlikte zemin daha rijit hale gelmekte ve sönümleyici davranış kazanmaktadır. Şekilden de anlaşılacağı üzere, k_p 'nin artışıyla birlikte zemin daha rijit gelmekte ve düşey doğrultudaki yer değiştirmeler azalmaktadır.

3.1.3. Elde Edilen Sonuçların Literatürdeki Çalışmalar ile Karşılaştırılması

Problemde belli parametreler değiştirilerek literatürde daha önce çözülmüş problemlerin çözümüne indirgenmiştir.

Elde edilen sonuçlar, literatürdeki karşılıkları ile kıyaslanarak elde edilen değerler tablolar halinde sunulmaktadır.

Tablo 6’da, Pasternak zemin kayma modülü k_p ’nin değeri sıfır kabul edilerek ve Pasternak zemin yay sabiti k_w ’ye çok büyük değerler verilerek ($k_p \rightarrow \infty$) zemin rijit hale getirilmiştir. Bu yaklaşım, Çömez’in (2003) çalışması ile aynı özelliklere sahiptir ve elde edilen sonuçlar büyük ölçüde uyum göstermektedir.

Tablo 6. Çeşitli rijit blok yarıçapı değerleri ve $\mu_1/(P/h_1)$ boyutsuz yük parametreleri için temas uzunluklarının (Çömez, 2003) ile karşılaştırması

$\frac{\mu_1}{P/h_1}$	$R/h_1 = 10$				$R/h_1 = 500$				$R/h_1 = 1000$			
	Bu çalışma		Çömez (2003)		Bu çalışma		Çömez (2003)		Bu çalışma		Çömez (2003)	
	a/h_1	b/h_1	a/h_1	b/h_1	a/h_1	b/h_1	a/h_1	b/h_1	a/h_1	b/h_1	a/h_1	b/h_1
100	0.2241	1.2691	0.2202	1.2534	1.6111	1.9847	1.5873	1.9547	2.1746	2.4549	2.1352	2.4081
250	0.1386	1.2599	0.1386	1.2446	1.0405	1.5825	1.0312	1.5626	1.4548	1.8647	1.4354	1.8379
500	0.0978	1.2568	0.0978	1.2421	0.7282	1.4181	0.7243	1.4025	1.0405	1.5825	1.0312	1.5641
750	0.0798	1.2558	0.0798	1.2407	0.5884	1.3617	0.5862	1.3457	0.8460	1.4742	0.8484	1.4559
1000	0.0691	1.2553	0.0690	1.2395	0.5058	1.3337	0.5044	1.3172	0.7282	1.4181	0.7243	1.4024

Tablo 7 ve Tablo 8’de ise Pasternak zemin kayma modülü k_p ’nin değeri sıfır kabul edilerek zemin Winkler hale getirilmiştir. Eyüboğlu’nun (2019) çalışmasında belirtilen Winkler zemin yay sabiti ve $\beta = 0.01$ değeri kullanılarak yapılan çalışma ile karşılaştırıldığında, sonuçların büyük ölçüde uyumlu olduğu görülmüştür.

Tablo 7. Çeşitli rijit blok yarıçapı değerleri için rijit blok ile homojen tabaka ve homojen tabaka ile FD tabaka arasındaki yarı temas uzunluklarının Eyüboğlu (2019) ile karşılaştırılması ($k_w = 1$)

$\beta = 0.01$	$R/h_1 = 10$		$R/h_1 = 500$		$R/h_1 = 1000$	
	a/h_1	b/h_1	a/h_1	b/h_1	a/h_1	b/h_1
Eyüboğlu(2019)	0.0975	1.4454	0.2210	1.4553	0.3173	1.4684
Bu çalışma	0.0980	1.4450	0.2219	1.4550	0.3186	1.4681

Tablo 8. Çeşitli yay sabiti değerleri için rijit blok ile homojen tabaka ve homojen tabaka ile FD tabaka arasındaki yarı temas uzunluklarının Eyüboğlu (2019) ile karşılaştırılması

$\beta = 0.01$	$k_w = 0.02$		$k_w = 0.1$		$k_w = 0.2$	
	a/h_1	b/h_1	a/h_1	b/h_1	a/h_1	b/h_1
Eyüboğlu(2019)	0.3626	3.3217	0.3356	2.3422	0.3282	2.0025
Bu çalışma	0.3641	3.3181	0.3369	2.3399	0.3295	2.0009

Yukarıdaki tablolardan da görüleceği üzere, gerek Çömez (2003) ve gerek ise de Eyüpoğlu (2019) çalışmaları ile mevcut çalışmanın özel hallerinden elde edilen sonuçlar oldukça uyumludur.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada, dairesel rijit bir blok aracılığıyla yüklenen ve Pasternak zemine oturan biri fonksiyonel derecelendirilmiş iki tabakanın ayrılmalı temas problemi incelenmiştir. Problemin çözümünde kütle kuvvetleri ihmal edilmiş ve bütün ara yüzeylerde sürtünme olmadığı varsayılmıştır. Problemin çözümünde elde edilen integral denklemler, elastisite teorisi ve integral dönüşüm teknikleri yardımıyla bulunmuştur. İntegral denklem sistemi Gauss-Chebyshev integrasyon formülasyonu kullanılarak cebrik denklem sistemine dönüştürülmüştür. Problemin sayısal çözümü, çeşitli boyutsuz parametrelere bağlı olarak geliştirilen bir Matlab programı yardımıyla yapılmıştır. Çeşitli durumlar için elde edilen sonuçlar aşağıda maddeler halinde verilmiştir.

- Dairesel rijit blok yarıçapı arttıkça, her iki temas yüzeyinde de temas uzunlukları artmakta, bu durum temas gerilmelerinin azalmasına neden olmaktadır.
- FD tabakanın rijitlik parametresi (β) arttıkça tabaka aşağı yönde rijitleşmekte, bu nedenle temas mesafeleri azalmakta ve temas gerilmelerinin artmaktadır.
- Homojen tabakanın kayma modülü (μ_1) arttıkça tabaka rijit hale gelmektedir. Buna bağlı olarak dairesel rijit blok ile homojen tabaka arasındaki temas uzunlukları azalırken, homojen tabaka ile FD tabaka arasındaki temas uzunlukları ise artmaktadır.
- Homojen tabaka yüksekliği arttıkça, dairesel rijit blok ile homojen tabaka arasındaki temas mesafelerinde küçük değişiklikler gözlenirken, homojen tabaka ile FD tabaka arasındaki temas mesafelerinde artış görülmekte ve buna bağlı olarak temas gerilmelerinde azalma meydana gelmektedir.
- Boyutsuz Pasternak zemin parametresi k_p 'nin artışına bağlı olarak her iki temas yüzeyindeki temas uzunlukları azalmakta, temas gerilmeleri ise artmaktadır.
- Boyutsuz Pasternak zemin parametreleri k_w ve k_p 'nin artışına bağlı olarak zemin rijitleşmektedir. Bu da temas mesafelerinin azalmasına, temas gerilmelerinin ise artmasına neden olmaktadır.

Sonuç olarak; FD tabaka rijitlik parametresi, Pasternak zemin parametreleri, dairesel rijit blok yarıçapı ve kayma modülleri temas gerilmelerini buna bağlı olarak da temas uzunluklarını önemli ölçüde etkilemektedir.

5. KAYNAKLAR

- Abanoz, M., Yaylacı, M., & Birinci, A. (2019). Contact Problems between a Functionally Graded Layer and a Rigid Support. *Journal of Structural Engineering & Applied Mechanics*, 2(1), s. 25-35. doi:10.31462/jseam.2019.01025035
- Adams, G. G. (1978). An Elastic Strip Pressed Against an Elastic Half Plane by a Steadily Moving Force. *Journal of Applied Mechanics*, 45, s. 89-98.
- Adıyaman, G., & Birinci, A. (2013). İki Çeyrek Düzlem Üzerine Oturan Elastik Bir Tabakanın Sürtünmesiz ve Ayrılmalı Temas Problemi. *XVIII. Ulusal Mekanik Kongresi*. Manisa: Teorik ve Uygulamalı Mekanik Türk Milli Komitesi.
- Adıyaman, G., Birinci, A., Öner, E., & Yaylacı, M. (2016). A Receding Contact Problem Between A Functionally Graded Layer And Two Homogeneous Quarter Planes. *Acta Mechanica*, 227(6), s. 1753-1766.
- Adıyaman, G., & Birinci, A. (2018). A General Solution For The Receding Contact Problem Of A Functionally Graded Layer Resting On A Winkler Foundation. *Journal of Structural Engineering & Applied Mechanics*, 1(3), s. 136-146.
- Alblas, J., & Kuipers, M. (1970). Contact Problems of a Rectangular Block on an Elastic Layer of Finite Thickness: Part II: The Thick Layer. *Acta Mechanica*, 9(1-2), s. 1-12.
- Apatay, T. (2010). Fonksiyonel Derecelendirilmiş Kaplamalarda Çatlak ve Temas Problemi, Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, Türkiye.
- Arslan, O. (2020). Plane Contact Problem between a Rigid Punch and a Bidirectional Functionally Graded Medium. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 80(103925).
- Balcı, M. N., & Dağ, S. (2019). Solution of the Dynamic Frictional Contact Problem Between a Functionally Graded Coating and a Moving Cylindrical Punch. *International Journal of Solids and Structures*, 161, s. 267-281.
- Balcı, M. N., & Dağ, S. (2020). Moving Contact Problems Involving a Rigid Punch and a Functionally Graded Coating. *Applied Mathematical Modelling*, 81, s. 855-886.
- Balcı, M. N., & Arslan, O. (2023). Dynamic Frictional Contact Mechanics Between a Functionally Graded Orthotropic Medium and a Moving Flat Punch. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*, 237(1), s. 53-75.
- Berg, A. A., & Peletier, M. A. (1996). The Influence of Contact Area on the Deformation of Elastic Layers. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 44(4), s. 821-843.
- Birinci, A., & Erdöl, R. (1999). Frictionless Contact Between a Rigid Stamp and an Elastic Layered Composite Resting on Simple Supports. *Mathematical & Computational Applications*, 4(3), s. 261-272.

- Birinci, A., & Erdöl, R. (2003). A Frictionless Contact Problem for Two Elastic Layers Supported by a Winkler Foundation. *Structural Engineering and Mechanics*, 15(3), s. 331-344.
- Birinci, A., Adıyman, G., Yaylacı, M., & Öner, E. (2015). Analysis of Continuous and Discontinuous Cases of a Contact Problem Using Analytical Method and FEM. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 12, s. 1771-1789.
- Birinci, A., & Eyüpoğlu, A. (2020). A Double Receding Contact Problem of a Functionally Graded Layer and a Homogeneous Elastic Layer Resting on a Winkler Foundation. *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, 38(2), s. 667-686.
- Chen, W., & Engel, P. (1972). Impact and Contact Stress Analysis in Multilayer Media. 8(11), s. 1257-1281. doi:10.1016/0020
- Chen, P., & Chen, S. (2012). Contact Behaviors of a Rigid Punch and a Homogeneous Half-Space Coated with a Graded Layer. *Acta Mechanica*, 223(3), s. 563-577.
- Chen, C., Lin, G., & Hu, Z. (2022). An Innovative and Efficient Solution for Axisymmetric Contact Problem between Structure and Half-Space. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 142, s. 10-27. doi:10.1016/j.enganabound.2022.05.012
- Choi, H. J. (2009). On the Plane Contact Problem of a Functionally Graded Elastic Layer Loaded by a Frictional Sliding Flat Punch. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 23(10), s. 2703-2713. doi:10.1007/s12206-009-0734-4
- Civelek, M., & Erdoğan, F. (1975). The Frictionless Contact Problem for an Elastic Layer Under Gravity. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 42(1), s. 136-140. doi:10.1115/1
- Civelek, M. B., & Erdogan, F. (1976). Interface Separation in a Frictionless Contact Problem for an Elastic Layer. *Journal of Applied Mechanics*, 43(98), s. 175-177.
- Çakıroğlu, F. L., & Erdöl, R. (1989). Elastik Zemin Oturan Bileşik Şeritte Sürekli Temas Problemi. *Ulusal Mekanik Kongresi, Bildiriler Kitabı*, 1, s. 243-248.
- Çakıroğlu, A. O., & Çakıroğlu, F. L. (1991). Continuous and Discontinuous Contact Problems for Strips on an Elastic Semi-Infinite Plane. *International Journal of Engineering Science*, 23(1), s. 99-111. doi:10.1016/0020
- Çakıroğlu, E., Çömez, İ., & Erdöl, R. (2011). İki Elastik Çeyrek Düzleme Oturan ve Dairesel Rijit Bir Panç ile Bastırılan Elastik Tabaka Problemi. Teorik ve Uygulamalı Mekanik Türk Milli Komitesi.
- Çömez, İ. (2003). Rijit bir Panç ile Bastırılmış ve Tabanda Tam Olarak Bağlı Ağırlıksız Çift Şerit Problemi, Yüksek Lisan Tezi, K.T.Ü. Trabzon.
- Çömez, İ., Birinci, A., & Erdöl, R. (2004). Double Receding Contact Problem for a Rigid Stamp and Two Elastic Layers. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 23(2), s. 301-309.

- Çömez, İ. (2013). Contact Problem of a Functionally Graded Layer Resting on a Winkler Foundation. *Acta Mechanica*, 224(11), s. 2833-2843.
- Çömez, İ. (2015). Contact Problem for a Functionally Graded layer Indented by a Moving Punch. *International Journal of Mechanical Sciences*, 100, s. 339-344.
- Çömez, İ. (2019). Frictional Moving Contact Problem of an Orthotropic Layer Indented by a Rigid Cylindrical Punch. *Mechanics of Materials*, 133, s. 120-127.
- Çömez, İ. (2021). An Effective Method for the Frictional Thermoelastic Contact of a Cylindrical Punch on a Piezoelectric Layer. *Journal of Thermal Stresses*, 44(8), s. 1030-1051. doi:10.1080/01495739.2021.1937419
- Çömez, İ., & Omurtag, M. H. (2021). Contact Problem Between a Rigid Punch and a Functionally Graded Orthotropic Layer Resting on a Pasternak Foundation. *Archive of Applied Mechanics*, 91(9), s. 3937-3958.
- Dempsey, J., Zhao, Z., Minnetyan, L., & Li, H. (1990). Plane Contact of an Elastic Layer Supported by a Winkler Foundation., (s. 974-980).
- Dhaliwal, R. S. (1970). Punch Problem for an Elastic Layer Overlying an Elastic Foundation. *International Journal of Engineering Science*, 8(4), s. 273-288.
- Dhaliwal, R. S., & Rau, I. S. (1970). The Axisymmetric Boussinesq Problem for a Thick Elastic Layer Under a Punch of Arbitrary Profile. *International Journal of Engineering Science*, 8(10), s. 843-856.
- El-Borgi, S., Abdelmoula, R., & Keer, L. (2006). A Receding Contact Plane Problem Between a Functionally Graded Layer and a Homogeneous Substrate. *International Journal of Solids and Structures*, 43(3-4), s. 658-674. doi:10.1016/j.ijsolstr.2005.04.017
- El-Borgi, S., Usman, S., & Güler, M. A. (2014). A Frictional Receding Contact Plane Problem Between a Functionally Graded Layer and a Homogeneous Substrate. *International Journal of Solids and Structures*, 51(25-26), s. 4462-4476.
- El-Borgi, S., & Çömez, İ. (2017). A Receding Frictional Contact Problem Between a Graded Layer and a Homogeneous Substrate Pressed by a Rigid Punch. *Mechanics of Materials*, 114, s. 201-214.
- Erdogan, F., & Gupta, G. D. (1971). The Problem of an Elastic Stiffener Bonded to a Half Plane. *Journal Of Applied Mechanics*, s. 937-941. doi:10.1115/1
- Erdoğan, F., & Wu, B. (1997). The Surface Crack Problem for a Plate With Functionally Graded Properties. *Journal of Applied Mechanics*, 64(3), s. 449-456. doi:10.1115/1.2788914
- Eyüboğlu, A. (2019). Winkler Temele Oturan ve Rijit Dairesel Blok Aracılığıyla Yüklenen Biri Fonksiyonel Derecelendirilmiş İki Tabakanın Temas Problemi. *Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü. Trabzon*.

- Gecit, M. R. (1980). A Tensionless Contact Without Friction Between an Elastic Layer and an Elastic Foundation. *International Journal of Solids and Structures*, 16(5), s. 387-396.
- Giannakopoulos, A., & Suresh, S. (1997). Indentation of Solids with Gradients in Elastic Properties: Part II. Axisymmetric Indentors. *International Journal of Solids and Structures*, 34(19), s. 2393-2428.
- Giannakopoulos, A., & Pallot, P. (2000). Two-dimensional Contact Analysis of Elastic Graded Materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(8), s. 1597-1631.
- Gökay, K. (2005). Contact Mechanics Of Graded Materials With Two-Dimensional Material Property Variations, Master's Thesis, Middle East Technical University. Ankara.
- Güler, M. A., & Erdoğan, F. (2004). Contact Mechanics of Graded Coatings. *International Journal of Solids and Structures*, 41(14), s. 3865-3889. doi:10.1016/j.ijsolstr.2004.02.025
- Güler, M. A., & Erdoğan, F. (2007). The Frictional Sliding Contact Problems of Rigid Parabolic and Cylindrical Stamps on Graded Coatings. *International Journal of Mechanical Sciences*, 49(2), s. 161-182.
- Güler, M. A., Küçüksucu, A., Yılmaz, K. B., & Yıldırım, B. (2017). On The Analytical And Finite Element Solution Of Plane Contact Problem Of A Rigid Cylindrical Punch Sliding Over A Functionally Graded Orthotropic Medium. *International Journal of Mechanical Sciences*, 120, s. 12-29.
- Haslinger, J. (1984). Least Square Method for Solving Contact Problems with Friction Obeying the Coulomb Law. *Aplikace matematiky*, 29(3), s. 212-224.
- Kahya, V., Birinci, A., & Erdöl, R. (2001). Frictionless Contact Problem between an Elastic Layer Bonded to a Rigid Support and a Rigid Stamp. *Mathematical and Computational Applications*, 6(1), s. 13-22. doi:/10.3390/mca6010013
- Kahya, V., Birinci, A., & Erdöl, R. (2007). Frictionless Contact Problem Between Two Orthotropic Elastic Layers. *International Journal of Computational and Mathematical Sciences*, 1(1), s. 121-127.
- Karabulut, P. M., & Çömez, İ. (2023). Continuous And Discontinuous Contact Problem Of A Functionally Graded Orthotropic Layer Indented By A Rigid Cylindrical Punch: Analytical And Finite Element Approaches. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, s. e202200427.
- Kaya, F., & Polat, A. (2023). Stress Analysis Of The Contact Problem In A Functionally Graded Layer Loaded With A Distributed Load And Two Rigid Circular Punches Resting On An Elastic Two Quarter Planes. *Forces in Mechanics*, 11, s. 100203.

- Kaya, Y., Polat, A., & Özşahin, T. Ş. (2017). Rijit Olarak Mesnetlenmiş Homojen Tabakada Sürekli Temas Probleminin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Analizi. *II. International Conference on Advanced Engineering Technologies*, s. 1037-1042.
- Ke, L.-L., & Wang, Y.-S. (2006). Two-Dimensional Contact Mechanics Of Functionally Graded Materials With Arbitrary Spatial Variations Of Material Properties. *International Journal of Solids and Structures*, 43(18-19), s. 5779-5798.
- Ke, L.-L., Jie, S., & Yue-Sheng, W. (2016). Axisymmetric Frictionless Contact Of A Functionally Graded Piezoelectric Layered Half-Space Under A Conducting Punch. *International Journal of Solids and Structures*, 90, s. 45-59. doi:10.1016/j.ijsolstr.2016.04.011
- Keer, L. M., & Chantaramungkorn, K. (1972). Loss of Contact Between an Elastic Layer and Half-Space. *Journal of Elasticity*, 2(3), s. 191-197.
- Keer, L., & Kuo, C. (1992). Contact Stress Analysis of a Layered Transversely Isotropic Half-Space. s. 253-261.
- King, R., & O'Sullivan, T. (1987). Sliding Contact Stresses in a Two-Dimensional Layered Elastic Half-Space. *International Journal of Solids and Structures*, 23(5), s. 581-597.
- Liu, T.-J., Wang, Y.-S., & Zhang, C. (2008). Axisymmetric Frictionless Contact Of Functionally Graded Materials. *Archive of Applied Mechanics*, 78, s. 267-282.
- Öner, E., Yaylacı, M., & Birinci, A. (2015). Analytical Solution of a Contact Problem and Comparison with the Results from FEM. *Structural Engineering and Mechanics*, 54(4), s. 607-622.
- Öner, E., Şenbanoma, B. Ş., Yaylacı, E. U., Yaylacı, M., Adıyaman, G., & Birinci, A. (2022). On The Plane Receding Contact Between Two Functionally Graded Layers Using Computational, Finite Element And Artificial Neural Network Methods. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 102(2), s. e202100287.
- Özşahin, T. Ş. (2000). Rijit İki Düz Blok Üzerine Oturan Bileşik Tabakada Sürekli ve Süreksiz Temas Problemi, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Özşahin, T. Ş., Birinci, A., & Çakıroğlu, A. O. (2004). Prediction of Contact Lengths Between an Elastic Layer and Two Elastic Circular Punches with Neural Networks. *Structural Engineering and Mechanics*, 18(4), s. 441-459. doi:10.12989/sem.2004.18.4.441
- Özşahin, T. Ş., Kahya, V., Birinci, A., & Çakıroğlu, A. O. (2007). Contact Problem for an Elastic Layered Composite Resting on Rigid Flat Supports. *International Journal of Civil and Environmental Engineering*, 1(1), s. 21-26.
- Peletier, L. A., & Berg, V. D. (1996). Two-Dimensional Contact Problems With Friction Between Elastic Bodies Of Different Materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 44(12), 2207-2222.

- Polat, A., Kaya Y., & Özşahin, T. Ş. (2018). Analytical Solution To Continuous Contact Problem For A Functionally Graded Layer Loaded Through Two Dissimilar Rigid Punches. *Meccanica*, 53, s. 3565-3577.
- Polat, A., Kaya, Y., Bendide, K., & Özşahin, T. Ş. (2019). Frictionless Contact Problem for a Functionally Graded Layer Loaded Through Two Rigid Punches Using Finite Element Method. *Journal of Mechanics*, 35(5), s. 591-600.
- Polat, A. (2021). Examination of Contact Problem between Functionally Graded Punch and Functionally Graded Layer Resting on Elastic Plane. *Structural Engineering and Mechanics, An Int'l Journal*, 78(2), s. 135-143.
- Ratwani, M., & Erdoğan, F. (1973). On The Plane Contact Problem for a Frictionless Elastic Layer. *International Journal of Solids and Structures*, 9(8), s. 921-936.
- Rhimi, M., El-Borgi, S., Said, W. B., & Jemaa, F. B. (2009). A Receding Contact Axisymmetric Problem Between a Functionally Graded Layer and a Homogeneous Substrate. *International Journal of Solids and Structures*, 46(20), s. 3633-3642.
- Rhimi, M., Lajnef, N., & El-Borgi, S. (2011). A Double Receding Contact Axisymmetric Problem between a Functionally Graded Layer and a Homogeneous Substrate. *Mechanics of Materials*, 43(12), s. 787-798.
- Sneddon, I. N. (1951). Fourier transforms, Mc. Grow-Hill Book Company.
- Spence, S. (1975). The Hertz Contact Problem with Finite Friction. *Journal of Elasticity*, 5, s. 297-319.
- Üstün, A., Adıyaman, G., & Özşahin, T. Ş. (2023). Analytical Solution for Contact and Crack Problem in Homogeneous Half-Plane. *Archive of Applied Mechanics*, 93, s. 4399-4423. doi:10.1007/s00419-023-02500-6
- Vasu, T. S., & Bhandakkar, T. K. (2018). Plane Strain Cylindrical Indentation Of Functionally Graded Half-Plane With Exponentially Varying Shear Modulus In The Presence Of Residual Surface Tension. *International Journal of Mechanical Sciences*, 135, s. 158-167.
- Woźniak, M., Hummel, A., & Pauk, V. (2002). Axisymmetric contact Problems for an Elastic Layer Resting on a Rigid Base with a Winkler Type Excavitation. *International Journal of Solids and Structures*, 39(15), s. 4117-4131. doi:10.1016/S0020-7683(02)00229-9
- Yan, J., & Li, X. (2015). Double Receding Contact Plane Problem Between A Functionally Graded Layer And An Elastic Layer. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 53, s. 143-150.
- Yan, J., & Wang, C. (2022). Receding Contact Problem of Multi-Layered Elastic Structures Involving Functionally Graded Materials. *Crystals*, 12(3), s. 354.

- Yaylacı, M. (2017). Comparison Between Numerical and Analytical Solutions for the Reding Contact Problem. *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, 35(2), s. 333-346.
- Yaylacı, M., & Avcar, M. (2020). Finite Element Modeling of Contact Between an Elastic Layer and Two Elastic Quarter Planes. *Computers and Concrete, An International Journal*, 26(2), s. 107-114.
- Yaylacı, M., Eyüpoğlu, A., Adıyaman, G., Yaylacı, E. U., Öner, E., & Birinci, A. (2021). Assessment of Different Solution Methods for Receding Contact Problems in Functionally Graded Layered Mediums. *Mechanics of Materials*, 154, s. 103730.
- Yaylacı, M., Abanoz, M., Yaylacı, E. U., Ölmez, H., Sekban, D. M., & Birinci, A. (2022). Evaluation of the Contact Problem of Functionally Graded Layer Resting on Rigid Foundation Pressed Via Rigid Punch by Analytical and Numerical (FEM and MLP) methods. *Archive of Applied Mechanics*, 92(6), s. 1953-1971.

ÖZGEÇMİŞ

Aleyna YAZICIOĞLU, İlköğrenimini Şehit Mete Okur İlköğretim Okulu'nda bitirdikten sonra lise eğitimini 2016 yılında Bayburt Rekabet Kurumu Anadolu Öğretmen (RKAÖL) Lisesi'nde tamamladı. Aynı yılda, Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği bölümünü kazanarak lisans eğitimine başladı. 2020 yılında bu bölümden Fakülte ve Bölüm ikinciliği ile mezun oldu. Mezun olduğu yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği Anabilim dalında tezli yüksek lisans programına başlayıp halen devam etmektedir.

