

T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
EKONOMETRİ ANABİLİM DALI
EKONOMETRİ PROGRAMI
DOKTORA TEZİ

PEARSON DAĞILIMLARININ ANA TİPLERİNE AİT
PARAMETRE TAHMİNLERİNİN DAYANIKLILIK
KRİTERLERİ ÜZERİNDEN KIYASLANMASI

Mustafa ÜNLÜ

Danışman
Prof. Dr. Ali Kemal ŞEHİRLİOĞLU

İZMİR - 2019

TEZ ONAY SAYFASI



YEMİN METNİ

Doktora tezi olarak sunduğum, “Pearson Dağılımlarının Ana Tiplerine Ait Parametre Tahminlerinin Dayanıklılık Kriterleri Üzerinden Kıyaslanması” adlı çalışmanın, tarafımdan, akademik kurallara ve etik değerlere uygun olarak yazıldığını ve yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

../../2019

Mustafa ÜNLÜ

ÖZET

Doktora Tezi

Pearson Dağılımlarının Ana Tiplerine Ait Parametre Tahminlerinin

Dayanıklılık Kriterleri Üzerinden Kıyaslanması

Mustafa ÜNLÜ

Dokuz Eylül Üniversitesi

Sosyal Bilimler Enstitüsü

Ekonometri Anabilim Dalı

Ekonometri Programı

Bu çalışmanın amacı, herhangi bir veri setini tanımlayan bir olasılık fonksiyonu belirlemede kullanılan Pearson diferansiyel denkleminin parametrelerini tahminlemede kullanılabilecek alternatif tahminleyicilerin performanslarının belirli ölçülere göre performanslarının kıyaslanmasıdır.

Pearson diferansiyel denkleminin parametrelerinin tanımladığı dağılımlara Pearson dağılımları adı verilmektedir. Bu dağılım ailesi içerisinde üç adet ana tip ve diğer geçiş tipleri olmak üzere toplamda on üç adet dağılım bulunmaktadır.

Pearson diferansiyel denklem parametreleri veri seti üzerine herhangi bir dönüşüm yapılmadan, veri setinin ortalamasının sıfıra çekilmesi veya veri setinin modunun sıfıra çekilmesi şeklinde tanımlanan dönüşümler ile elde edilen tahminleyiciler ile elde edilebilmektedir. Veri setine dönüşüm uygulanması halinde tahminlenmesi gereken parametre sayısı dörtten üçe indirgenmektedir.

Tanımlanan alternatif tahminleyiciler dayanıklı tahminleyiciler sınıfları içerisinde M-tahminleyici sınıfında yer almaktadırlar. Bu nedenle performans kriterleri, bu tahminleyiciler için yaygın olarak kullanılan hassaslık, sapma, göreceli etkinlik ve etki fonksiyonu olarak belirlenmiştir.

Alternatif tahminleyicilerin büyük ve küçük örnek performanslarını kıyaslamak amacıyla Pearson dağılımlarının ana tipleri olan Tip I, Tip IV ve Tip VI dağılımlarından oluşan üç anakütle ele alınmış ve her birinden 50, 100, 200 ve 800 hacimli 10000 adet örnek iadeli olarak seçilmiştir. Elde edilen

sonuçlara göre tüm kriterlerde en iyi olan bir tahminleyicinin olmadığı görülmektedir. Baz alınan kritere bağlı olarak, tercih edilebilecek olan tahminleyici değişmektedir.

Anahtar Kelimeler: Pearson Diferansiyel Denklemi, Dayanıklılık, Etki Fonksiyonu, Varyans-Kovaryans Matrisi.



ABSTRACT
Doctoral Thesis
Doctor of Philosophy (PhD)
Comparison of The Parameter Estimations of The Main Types of Pearson
Distributions by Robustness Criteria
Mustafa ÜNLÜ

Dokuz Eylül University
Graduate School of Social Sciences
Department of Econometrics
Econometrics Program

The aim of this study is to compare the performance of alternative estimators which can be used to estimate the parameters of Pearson differential equation which is used to determine a probability function that defines any data set according to certain measures.

The distributions defined by the parameters of Pearson differential equation are called Pearson distributions. Within this distribution family, there are thirteen distributions, three main types and other transition types.

Pearson differential equation parameters can be obtained by an estimator without making any transformation on the data set, or an estimator obtained by transforming the mean of the data set to zero or an estimator obtained by transforming converting the mode of the data set to zero. The number of parameters to be estimated is reduced from four to three if the transformation to the data set is applied.

The alternative estimators are in the M-estimator class of the robust estimators classes. For this reason, performance criteria have been determined as the sensitivity, bias, relative efficiency and influence function commonly used for these class of estimators.

In order to compare the big and small sample performances of the alternative estimators, three populations consisting of Type I, Type IV and Type VI distributions, which are the main types of Pearson distributions, were

handled and 10000 samples with 50, 100, 200 and 800 volumes were selected with replacement. According to the results, it is seen that there is no best estimator in all criteria. Depending on the criterion to be based, the estimator to be preferred varies.

Keywords: Pearson Differential Equation, Robustness, Influence Function, Variance-Covariance Matrix.



**PEARSON DAĞILIMLARININ ANA TİPLERİNE AİT PARAMETRE
TAHMİNLERİNİN DAYANIKLILIK KRİTERLERİ ÜZERİNDEN
KIYASLANMASI**

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI	ii
YEMİN METNİ	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	vi
İÇİNDEKİLER	viii
KISALTMALAR	xi
TABLolar LİSTESİ	xii
ŞEKİLLER LİSTESİ	xiv
EKLER LİSTESİ	xiv
GİRİŞ	1

**BİRİNCİ BÖLÜM
PEARSON DAĞILIŞ AİLESİ**

1.1. PEARSON DİFERANSİYEL DENKLEMİ	5
1.2. PEARSON DAĞILIŞLARININ ANA TİPLER	9
1.2.1. Tip I Dağılımı	9
1.2.2. Tip IV Dağılımı	10
1.2.3. Tip VI Dağılımı	10
1.3. PEARSON DAĞILIŞLARINI TANIMLAYAN KARTLAR	11
1.3.1. Pearson Kartı	12
1.3.2. Craig Kartı	12

İKİNCİ BÖLÜM

DAYANIKLI İSTATİSTİKSEL YÖNTEMLER

2.1. DAYANIKLILIK ÖLÇÜLERİ	17
2.1.1. Hassaslık Eğrisi (Sensitivity Curve)	17
2.1.2. Sapma (Bias)	18
2.1.3. Görelî Etkinlik (Relative Efficiency)	18
2.1.4. Etki Fonksiyonu (Influence Function)	19
2.2. İSTATİSTİKSEL UZAKLIKLAR	21
2.2.1. Bhattacharya Uzaklığı	22
2.2.1. Hellinger Uzaklığı	22
2.3. ELİPSOİD YAKLAŞIMI	23

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

MOMENTLER VE MOMENT TAHMİNLEYİCİLERİ

3.1. MOMENTLER TAHMİNLEME YÖNTEMİ	24
3.2. MOMENTLERİN ÖRNEK MOMENTLERİ	25
3.3. CRAMER'İN H-TEOREMİ	26

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

PEARSON DİFERANSİYEL DENKLEM PARAMETRELERİ İÇİN ETKİ FONKSİYONU VE VARYANS-KOVARYANS MATRİSİ

4.1. PEARSON DİFERANSİYEL DENKLEMİ PARAMETRE TAHMİNLEYİCİLERİ İÇİN ETKİ FONKSİYONU	30
4.2. PEARSON DİFERANSİYEL DENKLEMİ PARAMETRE TAHMİNLEYİCİLERİ İÇİN VARYANS-KOVARYANS MATRİSLERİ	49

BEŞİNCİ BÖLÜM

BENZETİM UYGULAMASI

5.1. ANAKÜTLELER	60
5.2. ANAKÜTLELERDEN TÜRETİLEN ÖRNEKLER	65
5.3. ÖRNEKLERDEN ELDE EDİLEN BULGULAR	72

SONUÇ	92
KAYNAKÇA	98
EKLER	

KISALTMALAR

ARE	Asimptotik Görelî Etkinlik
Bkz	Bakınız
MSE	Ortalama Karesel Hata
SD	Standart Sapma



TABLÖLER LİSTESİ

Tablo 1: Anakütlelere Ait Merkezi Momentler	s. 65
Tablo 2: Anakütlelere Ait Momentler	s. 65
Tablo 3: Örnek Merkezi Momentleri	s. 66
Tablo 4: Örnek Momentleri	s. 67
Tablo 5: Örnek Merkezi Momentlerin Varyansları	s. 68
Tablo 6: Örnek Momentlerin Varyansları	s. 59
Tablo 7: Örnek Merkezi Momentlerin Korelasyonları	s. 70
Tablo 8: Örnek Momentlerin Varyansları	s. 71
Tablo 9: Dönüşüm Yapılmayan Tahminleyicinin Bileşenlerinin Varyansları	s. 72
Tablo 10: Ortalaması Sıfırda Olan Tahminleyicinin Bileşenlerinin Varyansları	s. 73
Tablo 11: Modu Sıfırda Olan Tahminleyicinin Bileşenlerinin Varyansları	s. 74
Tablo 12: Ortalaması Sıfırda Olan Tahminleyicinin Korelasyonları	s. 76
Tablo 13: Dönüşüm Yapılmamış Tahminleyicinin Korelasyonları	s. 77
Tablo 14: Modu Sıfırda Olan Tahminleyicinin Korelasyonları	s. 78
Tablo 15: Tahminleyicilerin Korelasyon Matrislerinin Determinantları	s. 80
Tablo 16: Tip I Parametre Tahmin Vektörü Ve Örneklerle Ait Sapma Vektörlerinin Normları	s. 82
Tablo 17: Tip VI Parametre Tahmin Vektörü Ve Örneklerle Ait Sapma Vektörlerinin Normları	s. 83
Tablo 18: Tip IV Parametre Tahmin Vektörü Ve Örneklerle Ait Sapma Vektörlerinin Normları	s. 85
Tablo 19: Tip I Dağılımı İçin Oluşturulan 10000 Örnekten Elde Edilen Bhattacharya Uzaklıkları	s. 86
Tablo 20: Tip VI Dağılımı İçin Oluşturulan 10000 Örnekten Elde Edilen Bhattacharya Uzaklıkları	s. 87
Tablo 21: Tip IV Dağılımı İçin Oluşturulan 10000 Örnekten Elde Edilen Bhattacharya Uzaklıkları	s. 87
Tablo 22: Tahminleyicilerin ARE Kıyaslaması	s. 88
Tablo 23: Tahminleyicilerin Hassaslık Kıyaslaması ($x+3s_i$)	s. 89
Tablo 24: Tahminleyicilerin Hassaslık Kıyaslaması ($x-3s_i$)	s. 90



ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1: Veri Seti Üzerine Yapılan Yer Dönüşümleri	s. 8
Şekil 2: Pearson Kartı	s. 13
Şekil 3: Craig Kartı	s. 14
Şekil 4: Tip I Dağılımı İçin α 'nın Etki Fonksiyonu	s. 34
Şekil 5: Tip I Dağılımı İçin ϕ_0 'ın Etki Fonksiyonu	s. 36
Şekil 6: Tip I Dağılımı İçin ϕ_1 'in Etki Fonksiyonu	s. 38
Şekil 7: Tip I Dağılımı İçin ϕ_2 'nin Etki Fonksiyonu	s. 40
Şekil 8: Tip I Dağılımı İçin α 'nın Etki Fonksiyonu	s. 43
Şekil 9: Tip I Dağılımı İçin φ_0 'ın Etki Fonksiyonu	s. 44
Şekil 10: Tip I Dağılımı İçin φ_2 'nin Etki Fonksiyonu	s. 45
Şekil 11: Tip I Dağılımı İçin λ_0 'ın Etki Fonksiyonu	s. 46
Şekil 12: Tip I Dağılımı İçin λ_1 'in Etki Fonksiyonu	s. 47
Şekil 13: Tip I Dağılımı İçin λ_2 'nin Etki Fonksiyonu	s. 48
Şekil 14: Tip I Dönüşüm Yapılmayan Anakütle (Mavi), Ortalaması Sıfırda Olan Anakütle (Kırmızı), Modu Sıfırda Olan Anakütle (Yeşil).	s. 62
Şekil 15: Tip VI Dönüşüm Yapılmayan Anakütle (Mavi), Ortalaması Sıfırda Olan Anakütle (Kırmızı), Modu Sıfırda Olan Anakütle (Yeşil).	s. 63
Şekil 16: Tip IV Dönüşüm Yapılmayan Anakütle (Mavi), Ortalaması Sıfırda Olan Anakütle (Kırmızı), Modu Sıfırda Olan Anakütle (Yeşil).	s. 64

EKLER LİSTESİ

Ek 1: Küçük ve Büyük O Gösterimi	ek s. 1
Ek 2: Tip I Dağılımından Türetilen Dağılımlar	ek s. 2
Ek 3: Tip VI Dağılımından Türetilen Dağılımlar	ek s. 8
Ek 4: Tip IV Dağılımından Türetilen Dağılımlar	ek s. 14
Ek 5: Tip I Dağılımından Türetilen Verilere Sağdan Eklenen İlave Gözlemin Etkisi	ek s. 20
Ek 6: Tip VI Dağılımından Türetilen Verilere Sağdan Eklenen İlave Gözlemin Etkisi	ek s. 26
Ek 7: Tip IV Dağılımından Türetilen Verilere Sağdan Eklenen İlave Gözlemin Etkisi	ek s. 32
Ek 8: Tip I Dağılımından Türetilen Verilere Soldan Eklenen İlave Gözlemin Etkisi	ek s. 38
Ek 9: Tip IV Dağılımından Türetilen Verilere Soldan Eklenen İlave Gözlemin Etkisi	ek s. 44
Ek 10: Tip VI Dağılımından Türetilen Verilere Sağdan Eklenen İlave Gözlemin Etkisi	ek s. 50
Ek 11: Tahminleyicilerin Etki Fonksiyonları	ek s. 56

GİRİŞ

Gözleme dayalı olarak elde edilen veriler genellikle bir olasılık fonksiyonu ile ifade edilmek istenmektedir. Bu amaçla kullanılan yöntemlerden birisi de parametreleri momentler yöntemiyle tahminlenen Pearson diferansiyel denkleminde elde edilen olasılık yoğunluk fonksiyonlarıdır. Diferansiyel denklemin parametrelerinin ortaya çıkardığı dağılımlara da Pearson Dağılım Ailesi adı verilmektedir. Bu dağılım ailesi içerisinde çeşitli çarpıklık ve basıklık değerlerine sahip 13 adet dağılım yer almaktadır. Tip I, Tip IV ve Tip VI dağılımı olarak adlandırılan ana tiplerin yanı sıra geçiş tipleri bulunmaktadır. Bunlardan bir tanesi de Normal dağılımdır ve Pearson tarafından bu dağılıma herhangi bir numara verilmemiştir.

İstatistiksel modellemede asimetrik ve kalın kuyruklu dağılımlara olan ihtiyaç, Pearson Dağılım Ailesi'ne olan ilgiyi arttırmıştır. Özellikle finansal verilerde ortaya çıkan kalın kuyruklu dağılımlar için bu sistem içerisinde yer alan Tip IV dağılımı yaygın bir biçimde kullanılmaktadır. Bunun dışında astrofizik alanında da Tip IV dağılımı kullanılmaktadır (bkz. Wiśniewski, 2014).

Daha önceki çalışmalarda aşağıda da belirtildiği gibi, Pearson dağılım ailesindeki bazı dağılımların (Tip III, Tip VII gibi) tahminleyicilerinin özellikleri ele alınmıştır. Buna karşın diferansiyel denklemin tahminleyicilerini bir bütün olarak ele alan bir çalışma literatürde yer almamaktadır.

Pearson diferansiyel denkleminin parametre tahminleri momentler tahminleme yöntemine dayanmaktadır. Momentlerle tahminleme aşamasında veri setine yer ve/veya ölçek dönüşümü yapılarak üç farklı tahminleyici tanımlanabilmektedir. Bunlar: veri seti üzerine herhangi bir dönüşüm yapılmayan tahminleyici, veri setinin ortalamasının sıfıra çekilmesiyle (yer dönüşümü) elde edilen tahminleyici ve veri setinin modunun sıfıra çekilmesiyle (yer dönüşümü) elde edilen tahminleyicilerdir.

Bu çalışmanın amacı, dönüşüm yapılmış verilerden elde edilen moment tahminleyicilerini dayanıklılık ölçüleri üzerinden incelemek ve bu tahminleyiciler için özellikle etki fonksiyonlarının ve varyans-kovaryans matrislerinin elde edilmesi

ve Pearson dağılıklarının ana tipleri üzerinden farklı örnek hacimleri için analiz edilmesidir.

Pearson dağılışı ailesiyle ilgili literatürde yer alan bazı çalışmalar aşağıda incelenmiştir:

Matalas ve Wallis (1973) çalışmalarında Pearson Tip III dağılımı için momentler yöntemi ve maksimum olabilirlik yöntemiyle elde edilmiş parametre tahminlerini kıyaslamışlardır. Bu dağılıştan türetilen 25, 50, 100, 250, 500,1000 ve 500000 hacimli örneklerden 10'ar adet türetilerek ortalama ve standart sapma dikkate alınarak kıyaslama yapılmıştır. Amacın sadece dağılışa ait parametre tahmini yapma olduğu durumlarda momentler yönteminin tercih edilmesi gerektiği, amacın öngörümleme yapma olduğu durumlarda da maksimum olabilirlik yönteminin tercih edilmesi gerektiği sonucuna ulaşılmıştır.

Ashkar ve Bobée (1987) çalışmalarında log-Pearson Tip III dağılışı için momentler yönteminin dört farklı versiyonunu kıyaslamışlardır. Bu tahminleyiciler sapma, standart sapma ve kök ortalama karesel hata kriterleri üzerinden değerlendirilmişlerdir. Ayrıca bu dört yöntemden elde edilen tahminler arasındaki ve örnek momentleri arasındaki korelasyon katsayıları incelenmiştir.

Singh ve Singh (1988) çalışmalarında log-Pearson Tip III dağılımı için alternatif bir tahminleme yöntemi olan maksimum entropiyi önermişlerdir. Tip III dağılımı için uyum yapılmak istendiğinde önce verilere logaritmik dönüşüm uygulanmakta, ardından da momentler yöntemiyle dağılışa uyum yapılmaktadır. Tip III dağılışının asimetrisi pozitif olduğunda alttan sınırı, negatif olduğunda da üstten sınırı bulunmaktadır. Dağılışın bu özellikleri dikkate alınarak önerilen yeni yöntem Amerika'da bulunan bazı nehirlerin sel verileri üzerinden, momentler yöntemi ve maksimum olabilirlik yöntemi ile kıyaslanmıştır. Değerlendirme kriteri olarak kullanılan göreceli ortalama hata ve göreceli mutlak hataya göre önerilen yöntem diğerlerine tercih edilmiştir.

Arora ve Singh (1989) çalışmalarında log-Pearson Tip III dağılımı için doğrudan momentler yöntemi, momentler yöntemi, karma momentler yöntemi, maksimum olabilirlik yöntemi ve entropi yöntemini dayanıklılık özellikleri bakımından kıyaslamışlardır. Karşılaştırma kriteri olarak büyük ve küçük örnekler üzerinden sapma, standart sapma ve kök ortalama karesel hatayı kullanmışlardır.

Elde edilen sonuçlara göre doğrudan momentler yöntemi ve karma momentler yönteminin diğerlerine göre daha dayanıklı olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Naghavi ve diğerleri (1990) çalışmalarında Louisiana ve çevresindeki derelere ait verileri kullanarak Tip III dağılımının parametre tahmininde kullanılan doğrudan momentler, logaritmik dönüşümlü momentler ve karma momentler yöntemlerini karşılaştırmışlardır. Performans kriteri olarak kök ortalama karesel sapma ve ortalama mutlak sapma seçilerek en dayanıklı tahminleyicinin hangisi olduğu araştırılmıştır. Elde edilen sonuçlara göre herhangi bir tahminleyicinin diğerlerine göre kesin olarak daha iyi olduğu söylenememektedir. Veri setinin çarpıklığına ve örnek hacmine bağlı olarak alternatifler arasından tercih yapılmaktadır.

Koutrouvelis ve Canavos (1999) çalışmalarında Pearson Tip III dağılımı için momentler yöntemi, basitleştirilmiş koşullu momentler yöntemi ve bu çalışmada önerilen karma momentler yöntemini Monte Carlo simülasyonu ile bu dağılıştan türetilen farklı çarpıklık değerlerine sahip küçük ve büyük örnek verileri üzerinden kıyaslamışlardır. Ayrıca önerilen yeni tahminleyicinin varyansları ve kovaryansları elde edilerek diğer yöntemler ile kıyaslanmıştır. Tahminleyicilerin dayanıklılık özellikleri sapma ve normalize edilmiş kök ortalama karesel hata üzerinden karşılaştırılmıştır.

England ve diğerleri (2003) çalışmalarında log-Pearson Tip III dağılımı için beklenen momentler algoritması ve ağırlıklandırma prosedürü B17H'yi farklı veriler üzerinden kıyaslamışlardır. Tahminleyicilerin performansları sabit eşik değerin aşılması, sabit değerler ve farklı dağılışlardan türetilen değerler üzerinden değerlendirilmiştir. Elde edilen sonuçlara göre sapma ve ortalama karesel hata kriterleri bakımından beklenen momentler algoritması daha iyi sonuçlar vermiştir.

Andreev ve diğerleri (2005) çalışmalarında blok bootstrap yöntemini kullanarak finansal verilere Pearson sistemi içerisinde bir dağılışa uyum yapabilmek için kullanılabilecek alternatif bir dağılış seçim kriteri önermişlerdir. Bu yaklaşıma göre D ve λ olarak tanımlanan yeni parametreler, diferansiyel parametreleri üzerinden tahminlenmekte ve aldıkları değerlere göre sistem içerisinde uygun dağılış belirlenmektedir.

Pearson sistemi içerisinde bir dağılımın tahminlenmesi ile ilgili literatürde birçok çalışma mevcuttur. Bunlardan bazıları (Nagahara, 1999: 251; Nagahara, 2003: 721; Parrish, 1983: 239) şeklinde sıralanabilir.

Çalışmanın ilerleyen kısımları şu şekildedir: Birinci bölümde sırasıyla Pearson diferansiyel denklemi, bu diferansiyel denklemin parametreleri, şans değişkeni üzerine tanımlanan dönüşümler ve diferansiyel denklem üzerine etkileri, dağılım ailesinin ana tiplerine ait olasılık yoğunluk fonksiyonlarının elde edilişleri açıklanmıştır. Veri setinden elde edilen moment tahminleri kullanılarak, veri setinin bu dağılım ailesinden hangi dağılıma ait olabileceğini belirleyen, genel kullanıma sahip iki temel kart bu bölümün sonunda verilmiştir.

Çalışmanın ikinci bölümünde dayanıklı istatistiksel yöntemler genel olarak M, R ve L tahminleyici sınıfları üzerinden tanıtılmış ve bunların içerisinde bu çalışmada kullanılacak olan M-tahminleyicilere ait dayanıklılık ölçüleri kısaca tanıtılmıştır. Ayrıca herhangi iki olasılık dağılımı arasındaki uzaklığı ölçmede kullanılan uzaklık ölçüleri açıklanmıştır.

Üçüncü bölümde önce genel hatlarıyla momentler tahminleme yöntemi tanıtılmış, daha sonra moment tahminleyicilerine ait beklenen değer, varyans ve kovaryans yapıları ele alınmıştır. Bu çalışmanın temellerinden birini oluşturan ve örnek momentlerine ait varyans-kovaryans yapılarını tanımlamakta kullanılan Cramer'in H-teoremi ve bu teorem üzerinden elde edilen sonuç, bu bölüm içerisinde yer almaktadır.

Dördüncü bölümde diferansiyel denklem parametreleri bir vektör olarak ifade edilmiş ve bu vektöre ait etki fonksiyonu ve varyans-kovaryans matrisleri Cramer'in H-teoreminden elde edilen sonuç üzerinden elde edilmiştir.

Beşinci ve son bölümde ise önceki bölümlerde tanıtılan parametre tahmin vektörlerinin dayanıklılık ölçüleri üzerinden değerlendirmeleri, Pearson dağılımlarının ana tipleri olan Tip I, Tip IV ve Tip VI dağılımlarından türetilen $n = 50$, $n = 100$, $n = 200$ ve $n = 800$ hacimli ve 10000 tekrarlı örnekler kullanılarak yapılmıştır.

BİRİNCİ BÖLÜM

PEARSON DAĞILIŞ AİLESİ

1.1 DİFERANSİYEL DENKLEM

Karl Pearson tarafından tanımlanan dağılış sistemi içerisinde yer alan olasılık yoğunluk fonksiyonları, aşağıda belirtilen diferansiyel denklemin çözümünden elde edilir:

$$\frac{df}{dx} = \frac{(x - \alpha) f}{\phi_0 + \phi_1 x + \phi_2 x^2} \quad (1)$$

Dağılışın biçimi, diferansiyel denklemin parametrelerine (α , ϕ_0 , ϕ_1 ve ϕ_2) bağlı olarak ortaya çıkmaktadır (Kendall ve diğerleri, 1987: 210). Sistem içerisindeki tüm dağılışlar için geçerli genel çözüm

$$\begin{aligned} (\phi_0 + \phi_1 x + \phi_2 x^2) df &= (x - \alpha) f dx \\ x^n (\phi_0 + \phi_1 x + \phi_2 x^2) df &= x^n (x - \alpha) f dx \end{aligned}$$

ile elde edilebilir. Bu eşitliğin, dağılışın tanım aralığında integralinin alınmasıyla,

$$\begin{aligned} &\left[x^n (\phi_0 + \phi_1 x + \phi_2 x^2) f \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \left[n\phi_0 x^{n-1} + (n+1)\phi_1 x^n + (n+2)\phi_2 x^{n+1} \right] f dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^{n+1} f dx - \alpha \int_{-\infty}^{\infty} x^n f dx \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Köşeli parantez içerisindeki terim sınır değerlerde sıfır olduğundan ($\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{n+2} f \rightarrow 0$), momentlerle ilgili dönüşüm yapıldığında aşağıdaki ifade elde edilir (Kendal, 1943: 137):

$$n\phi_0 \mu'_{n-1} + [(n+1)\phi_1 - \alpha] \mu'_n + [(n+2)\phi_2 + 1] \mu'_{n+1} = 0 .$$

Bu denklem $n=0,1,2,3$ için çözüldüğünde parametrelerin momentler cinsinden değeri

$$\alpha = - \frac{-12\mu'_4 \mu'^3_1 + 20\mu'_2 \mu'_3 \mu'^2_1 - 9\mu'_1 \mu'^3_2 + 13\mu'_1 \mu'_2 \mu'_4 - 8\mu'_1 \mu'^2_3 - 3\mu'^2_2 \mu'_3 - \mu'_3 \mu'_4}{8\mu'^3_1 \mu'_3 - 6\mu'^2_1 \mu'^2_2 + 10\mu'^2_1 \mu'_4 - 32\mu'_1 \mu'_2 \mu'_3 + 18\mu'^3_2 - 10\mu'_2 \mu'_4 + 12\mu'^2_3} , (2)$$

$$\phi_0 = \frac{-3\mu'_2\mu_1'^2\mu'_4 + 4\mu_1'^2\mu_3'^2 - \mu_2'^2\mu_3'\mu'_1 - \mu'_1\mu'_3\mu'_4 + 4\mu_2'^2\mu'_4 - 3\mu'_2\mu_3'^2}{8\mu_1'^3\mu'_3 - 6\mu_1'^2\mu_2'^2 + 10\mu_1'^2\mu'_4 - 32\mu'_1\mu'_2\mu'_3 + 18\mu_2'^3 - 10\mu'_2\mu'_4 + 12\mu_3'^2}, \quad (3)$$

$$\phi_1 = -\frac{-6\mu'_4\mu_1'^3 + 8\mu'_2\mu'_3\mu_1'^2 - 3\mu'_1\mu_2'^3 + 7\mu'_1\mu'_2\mu'_4 - 2\mu'_1\mu_3'^2 - 3\mu_2'^2\mu'_3 - \mu'_3\mu'_4}{8\mu_1'^3\mu'_3 - 6\mu_1'^2\mu_2'^2 + 10\mu_1'^2\mu'_4 - 32\mu'_1\mu'_2\mu'_3 + 18\mu_2'^3 - 10\mu'_2\mu'_4 + 12\mu_3'^2}, \quad (4)$$

$$\phi_2 = -\frac{4\mu_1'^3\mu'_3 - 3\mu_1'^2\mu_2'^2 + 2\mu_1'^2\mu'_4 - 10\mu'_1\mu'_2\mu'_3 + 6\mu_2'^3 - 2\mu'_2\mu'_4 + 3\mu_3'^2}{8\mu_1'^3\mu'_3 - 6\mu_1'^2\mu_2'^2 + 10\mu_1'^2\mu'_4 - 32\mu'_1\mu'_2\mu'_3 + 18\mu_2'^3 - 10\mu'_2\mu'_4 + 12\mu_3'^2}. \quad (5)$$

Burada X şans değişkeninin dağılışı $X \sim P(\mu'_1, \mu'_2, \mu'_3, \mu'_4)$ şeklinde tanımlanabilir. Bu şans değişkeni üzerinde $Y = X - \mu$ şeklinde bir dönüşüm yapılması durumunda, yeni şans değişkeni $Y \sim P(0, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ olarak ifade edilebilir. Yapılan dönüşüm ile yeni değişkenin ortalaması, orijine çekilmiş olur. Yeni şans değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunun diferansiyel denklem parametreleri üzerinden tahminlenebilmesi için kullanılacak yeni tahminleyiciler, bir önceki adımda $\mu'_1 = 0$ alınarak şu şekilde elde edilebilir:

$$\alpha = \varphi_1 = -\frac{\mu_3(3\mu_2^2 + \mu_4)}{-18\mu_2^3 + 10\mu_2\mu_4 - 12\mu_3^2} \quad (6)$$

$$\varphi_0 = -\frac{\mu_2(4\mu_2\mu_4 - 3\mu_3^2)}{-18\mu_2^3 + 10\mu_2\mu_4 - 12\mu_3^2} \quad (7)$$

$$\varphi_2 = -\frac{-6\mu_2^3 + 2\mu_2\mu_4 - 3\mu_3^2}{-18\mu_2^3 + 10\mu_2\mu_4 - 12\mu_3^2}. \quad (8)$$

Burada $\mu_i = E(X - \mu'_1)^i$ şeklinde tanımlanan ortalamaya göre momentlerdir. Benzer şekilde Y şans değişkeni için $U = Y - \alpha$ şeklinde yeni bir dönüşüm yapılarak, modu orijinde olan şans değişkeni U elde edilebilir (Kendall ve diğerleri, 1987: 212). Modun sıfıra çekilmesiyle elde edilecek olan yeni diferansiyel denklem yapısı şu şekildedir:

$$\frac{df}{du} = \frac{uf}{\lambda_0 + \lambda_1 u + \lambda_2 u^2}. \quad (9)$$

Bu diferansiyel denklem sisteminin tahminlenmesi gereken 3 parametresi mevcuttur. Parametre tahminleyicileri aşağıdaki denklemler ile ifade edilebilir:

$$\hat{\lambda}_0 = -\frac{-4\mu'_3\mu_1'^2 + 3\mu'_1\mu_2'^2 + \mu'_3\mu'_2}{8\mu_1'^3 - 12\mu'_2\mu'_1 + 4\mu_3'} \quad (10)$$

$$\hat{\lambda}_1 = -\frac{\mu'_1(-\mu'_2\mu'_1 + \mu'_3)}{4\mu_1^3 - 6\mu'_2\mu'_1 + 2\mu'_3} \quad (11)$$

$$\hat{\lambda}_2 = -\frac{4\mu_1^3 - 5\mu'_2\mu'_1 + \mu'_3}{8\mu_1^3 - 12\mu'_2\mu'_1 + 4\mu'_3} \quad (12)$$

Parametrelerin eşitlik 6, 7 ve 8 ile verilen orijinal diferansiyel denklem parametreleri cinsinden eşitlikleri aşağıda verilmiştir:

$$\hat{\lambda}_0 = \phi_0 + \alpha^2(1 + \phi_2) , \quad (13)$$

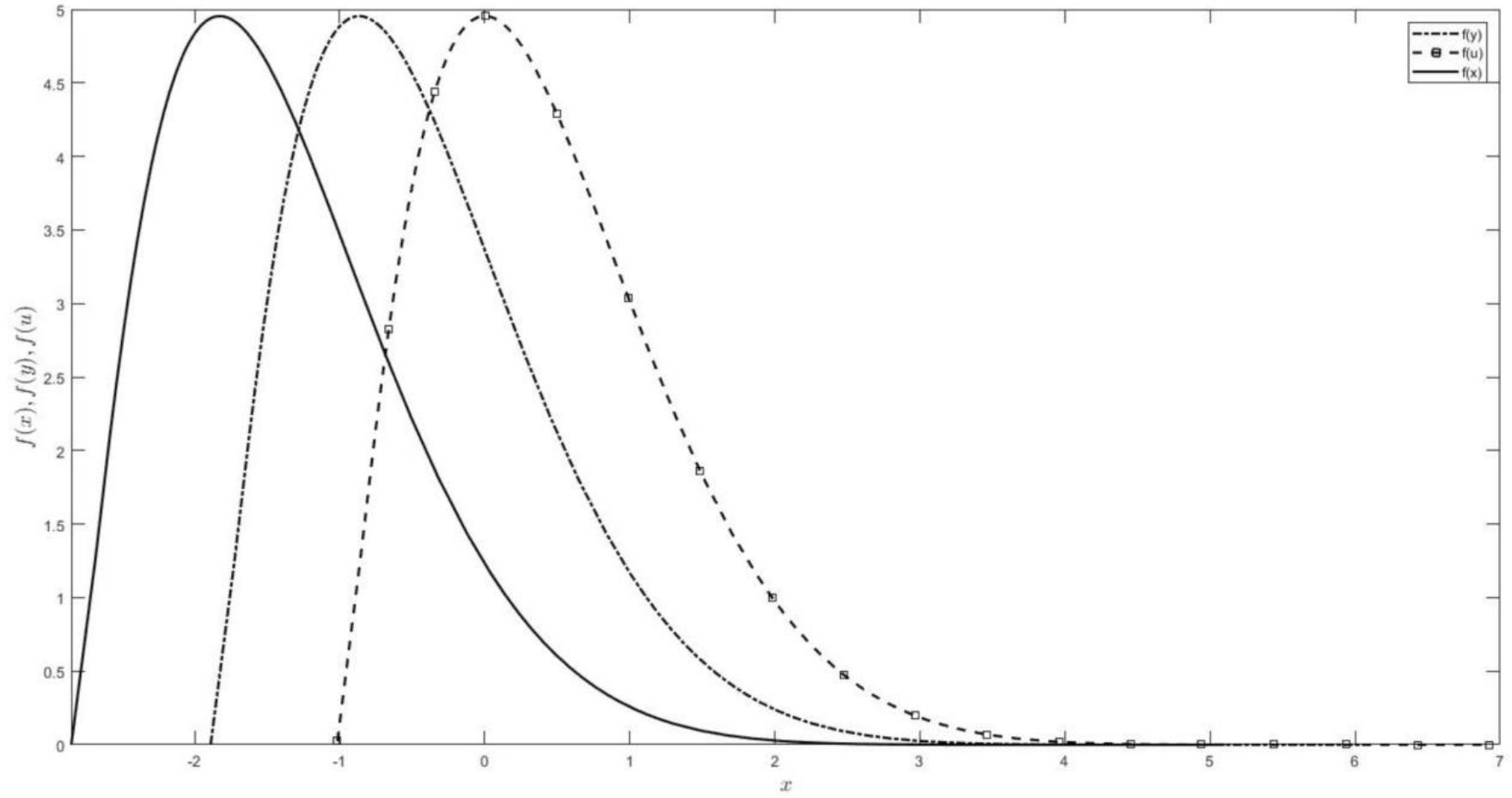
$$\hat{\lambda}_1 = \alpha(1 + 2\phi_2) , \quad (14)$$

$$\hat{\lambda}_2 = \phi_2 . \quad (15)$$

Eşitlik (6), (7), (8) ve (10), (11), (12) ile verilen, şans değişkeni üzerine yer dönüşümü yapılarak elde edilen diferansiyel denklem parametre tahminleri, (1) nolu diferansiyel denklemde 4 olan parametre sayısını 3'e indirmektedir.

Şekil 1'de anakütle ortalaması negatif olan bir veri setine uygulanan dönüşümlerin olasılık yoğunluk fonksiyonları üzerindeki etkileri gösterilmiştir. Uygulanan dönüşümler yer dönüşümü olduğu için, dağılışın çarpıklığı ve basıklığı üzerinde bir etkisi yoktur. Dağılış sağa ötelenmiştir.

Şekil 1: Veri Seti Üzerine Yapılan Yer Dönüşümleri



1.2 ANA TİPLER

Pearson dağılışı sistemi $\phi_0 + \phi_1 x + \phi_2 x^2$ denkleminin köklerinin aldığı değere göre oluşturulmuştur. Bu denklemin kökleri $-r_2 < 0 < r_1$ şeklinde reel ve ters işaretli ise Tip I, $-r_1 < -r_2 < 0$ veya $0 < r_1 < r_2$ şeklinde reel ve aynı işaretli ise Tip VI ve kökler karmaşık ise Tip IV dağılımı ortaya çıkmaktadır (Şehirlioğlu ve Dündar, 2014: 20).

1.2.1. Tip I Dağılımı

Bölüm 1.1’de verilen (1) nolu diferansiyel denklemin paydası çarpanlarına ayrılıp

$$\frac{d \ln f(x)}{dx} = \frac{(x - \alpha)}{\phi_2 (x \pm r_1)(x \pm r_2)}$$

biçiminde yazılabilir. Burada kökler

$$r_1 = \frac{-\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 - 4\phi_0\phi_2}}{2\phi_2} \quad \text{ve} \quad r_2 = \frac{-\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 - 4\phi_0\phi_2}}{2\phi_2}$$

olarak elde edilir. Tip I dağılımı için genel çözüm aşağıdaki adımlar izlenerek elde edilir:

$$\ln f(x) = \frac{1}{\phi_2} \int \left[\frac{A_1}{x - r_1} + \frac{A_2}{x - r_2} \right] dx$$

$$A_1 = \frac{r_1 - a}{r_1 + r_2}, \quad A_2 = \frac{r_2 + a}{r_1 + r_2} \quad \text{olmak üzere,}$$

$$\ln f(x) = \frac{1}{\phi_2} \left[A_1 \ln |x - r_1| + A_2 \ln |x + r_2| \right] + \ln K$$

Mutlak değer işlemi $f(x) > 0$ koşulu dikkate alınarak çözüldüğünde,

$$f(x) = K (r_1 - x)^{\frac{A_1}{\phi_2}} (x + r_2)^{\frac{A_2}{\phi_2}}$$

yazılabilir. Burada $m_1 = \frac{A_1}{\phi_2}$ ve $m_2 = \frac{A_2}{\phi_2}$ olmak üzere Tip I dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = K(r_1 - x)^{m_1} (x + r_2)^{m_2} \quad (16)$$

şeklindedir. Fonksiyonda yer alan K , integral sabitidir ve

$$K = \frac{1}{\text{Beta}(m_1 + 1, m_2 + 1)(r_1 - r_2)^{m_1 + m_2 + 1}} \quad (17)$$

formülü ile hesaplanır (Şehirlioğlu ve Dündar, 2014: 22).

1.2.2. Tip VI Dağılımı

Bölüm 1.1’de verilen (1) nolu diferansiyel denklem üzerinde yapılan kısmi kesirler işlemi ile

$$\ln f(x) = \frac{1}{\phi_2} \int \left[\frac{A_1}{x - r_1} + \frac{A_2}{x - r_2} \right] dx$$

elde edilir. Burada $A_1 = \frac{-r_1 - a}{r_2 - r_1}$ ve $A_2 = \frac{r_2 + a}{r_2 - r_1}$ ’dir. İntegral işlemi alınarak

$$\ln f(x) = \frac{A_1}{\phi_2} \ln|x - r_1| + \frac{A_2}{\phi_2} \ln|x + r_2| + \ln K$$

$$f(x) = K(r_1 + x)^{m_1} (r_2 + x)^{m_2} \quad (18)$$

olasılık yoğunluk fonksiyonu elde edilir. İntegral sabiti K

$$K = \frac{1}{\text{Beta}(-m_1 - m_2 - 1, m_1 + 1)(r_2 - r_1)^{m_1 + m_2 + 1}} \quad (19)$$

formülü ile hesaplanır (Şehirlioğlu ve Dündar, 2014: 108).

1.2.3. Tip IV Dağılımı

Bölüm 1.1’de verilen (1) nolu diferansiyel denklemin paydasındaki $\phi_0 + \phi_1 x + \phi_2 x^2$ denkleminin köklerinin karmaşık olduğu durumda ortaya çıkan dağılış, Tip IV dağılışıdır. Denklemin kökleri $r_1 = -r + is$ ve $r_2 = -r - is$ olmak üzere diferansiyel denklem

$$\frac{1}{f(x)} \frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{\phi_2} \left(\frac{A_1}{(x + r - is)} + \frac{A_2}{(x + r + is)} \right)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $A_1 = \frac{-a-r+is}{2is} = \frac{1}{2} + \frac{(a+r)i}{2s}$ ve

$A_2 = \frac{a+r+is}{2is} = \frac{1}{2} - \frac{(a+r)i}{2s}$ 'dir. $c = (a+r)/s$ alınırsa $A_1 = (1+ci)/2$ ve

$A_2 = (1-ci)/2$ olur. Fonksiyonun integrali alınarak,

$$\ln f(x) = \frac{1}{\phi_2} [A_1 \ln |x+r-is| + A_2 \ln |x+r+is|] + \ln K$$

$$f(x) = K (x+r-is)^{\frac{A_1}{\phi_2}} (x+r+is)^{\frac{A_2}{\phi_2}}$$

elde edilir. Bu dağılımın parametreleri $v = c/\phi_2$ ve $m = 1/2\phi_2$ olarak ifade edilirse

$m_1 = m + \frac{vi}{2}$ ve $m_2 = m - \frac{vi}{2}$ olur. Gerekli düzenlemeler yapıldığında fonksiyon,

$$f(x) = K \left[(x+r)^2 + s^2 \right]^m \left(\frac{x+r-is}{x+r+is} \right)^{\frac{vi}{2}}$$

şeklinde olur. Burada $\theta = \frac{s}{x+r}$ dönüşümü yapıldığında Tip IV dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = K \left[(x+r)^2 + s^2 \right]^m e^{v \cdot \arctan \theta} \quad (20)$$

olarak elde edilir. İntegral sabiti K , $x+r = s \tan \theta$ dönüşümü yapılarak

$$K = \frac{s^{-2m-1}}{\exp\left(\frac{v\pi}{2}\right) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos \theta)^{-2m-2} \exp(-v\theta) d\theta} \quad (21)$$

formülüyle elde edilir (Şehirlioğlu ve Dündar, 2014: 89).

1.3 DAĞILIŞLARI TANIMLAYAN KARTLAR

Bir veri setinin ilk dört momenti kullanılarak elde edilen, eksenlerinde sırasıyla (β_1, β_2) ve (δ, β_2) bulunan Pearson ve Craig kartları bu bölümde incelenmiştir.

1.3.1. Pearson Kartı

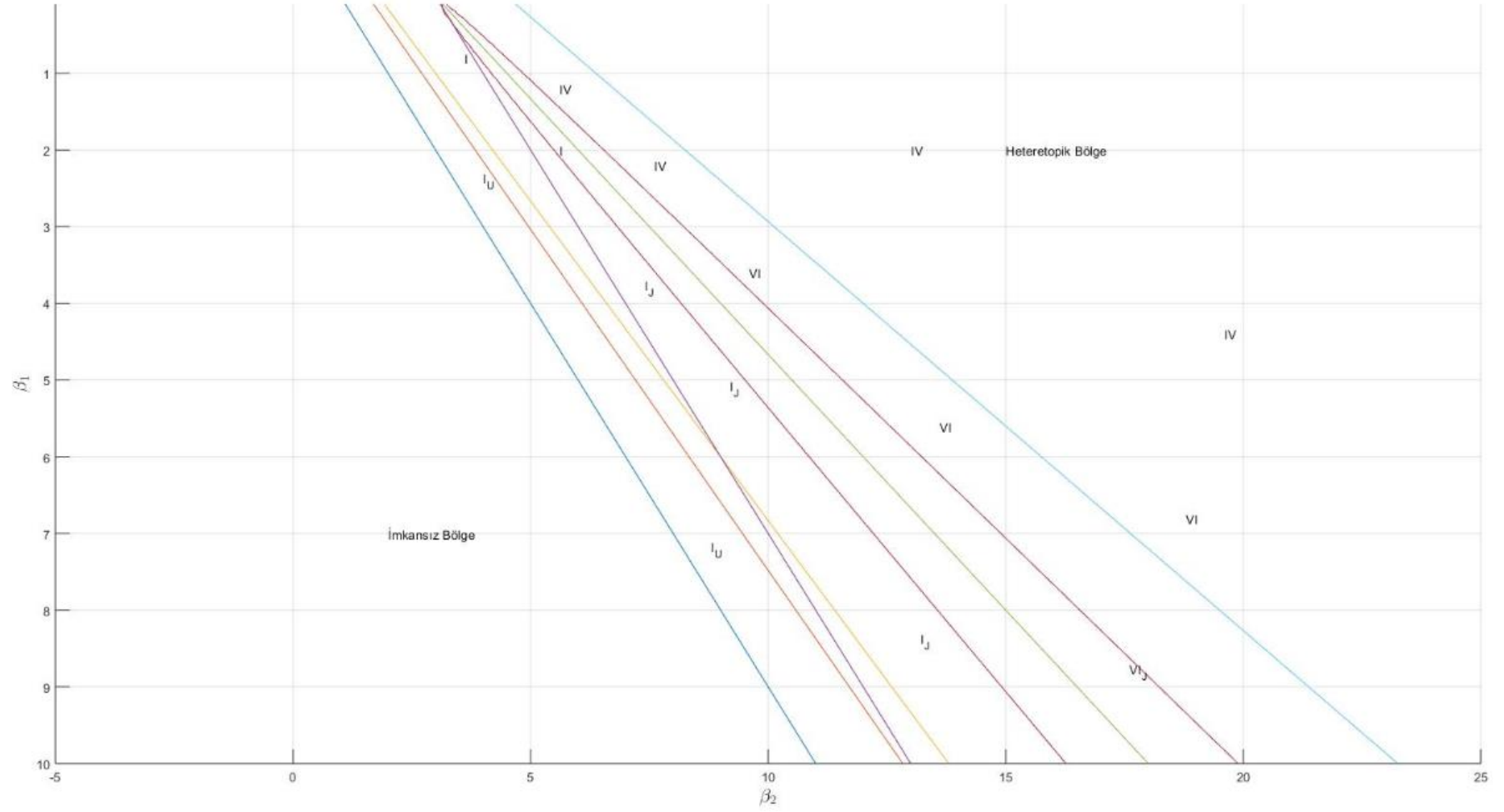
Veri setine uyumlu bir Pearson dağılımı seçmek için kullanılabilecek araçlardan biri Pearson kartıdır. Veri setinin ilk dört momenti kullanılarak bir dağılış belirlenebilmektedir. Bu kartın yatay ekseninde $\beta_1 = \mu_3^2 / \mu_2^3$ ve dikey ekseninde de $\beta_2 = \mu_4 / \mu_2^2$ değerleri yer almaktadır. Pearson dağılış sistemindeki tüm dağılış tipleri β_1 ve β_2 değerlerine bağlı olarak eşsiz bir şekilde belirlenebilir (Şehirlioğlu ve Dündar, 2014: 33). Pearson kartı Şekil 2’de verilmiştir. Bu kart üzerinde yer alan imkansız bölgelerde herhangi bir dağılım ortaya çıkmamaktadır. Heterotipik bölge olarak adlandırılan kısımda ise sekizinci derece ve üzeri momentleri sonsuz olan dağılımlar yer almaktadır.

1.3.2. Craig Kartı

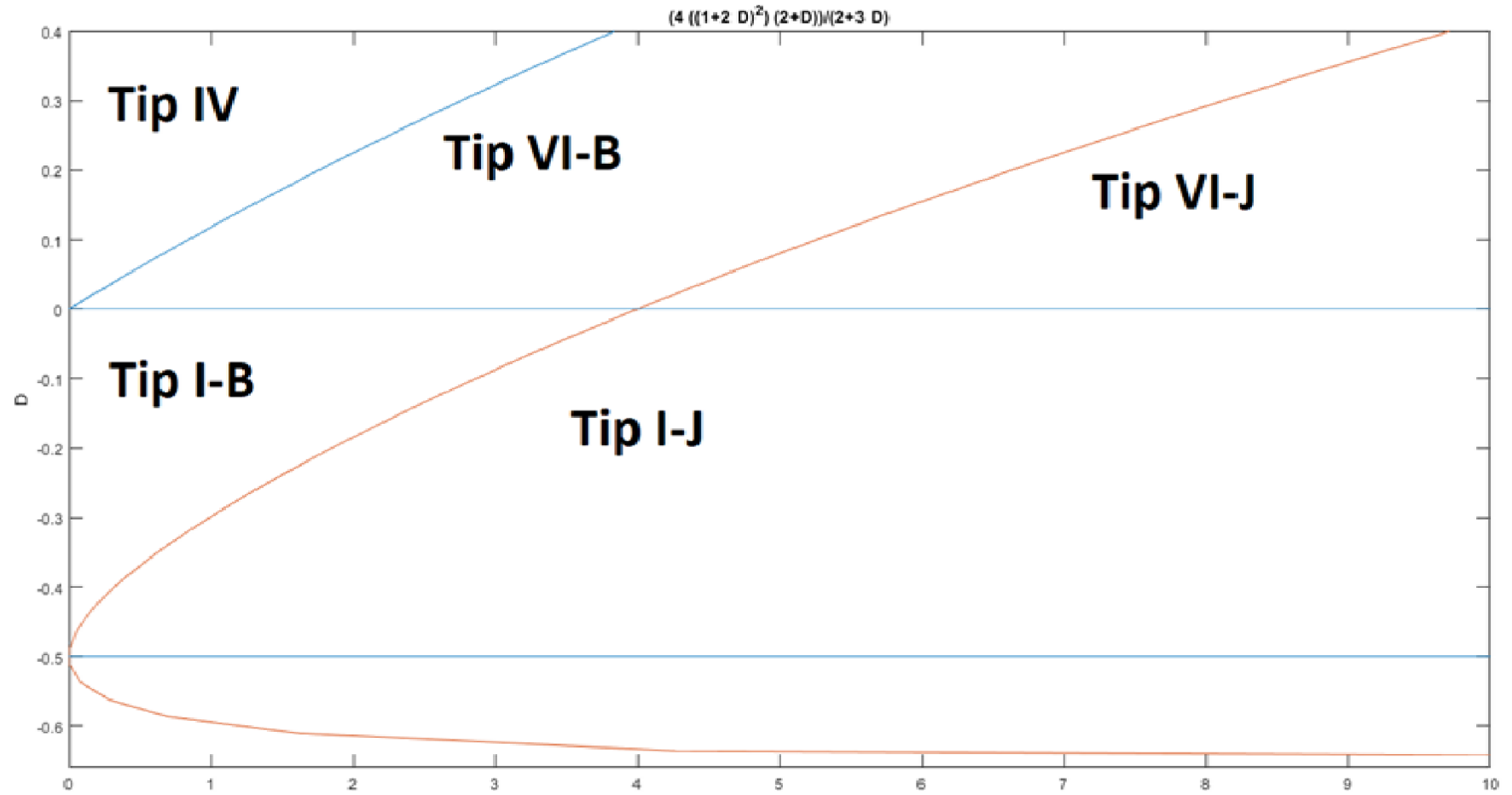
Pearson sisteminin içerisinde veri setine uygun bir dağılış seçmenin bir başka yolu da Craig kartıdır. Pearson dağılışlarının yer aldığı bu kartın $\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$, $\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$ ve $\delta = \frac{2\beta_2 - 3\beta_1 - 6}{\beta_2 + 3}$ olmak üzere, dikey ekseninde δ ve yatay ekseninde β_1 parametreleri yer almaktadır. Craig yaklaşımında $\mu_1' = 0$ ve $\mu_2 = 1$ olduğundan, parametre çözümleri değişmektedir.

Bu kart üzerindeki $\delta = -1$ ekseninin altı imkansız bölgedir, $\delta = 0.4$ ’ün üzerindeki bölge de heterotipik bölge olarak adlandırılmıştır. Heterotipik bölgede ilk sekiz momentinden herhangi biri ya da daha fazlası sonsuz olan dağılışlar yer almaktadır. Kart üzerinde romen rakamlarının yanında yer alan B (çan eğrisi biçimli), J (J-biçimli) ve U (U-biçimli) harfleri dağılışın biçimini tanımlamaktadır (Şehirlioğlu ve Dündar, 2014: 40). Craig Kartı Şekil 3’te verilmiştir.

Şekil 2: Pearson Kartı



Şekil 3: Craig Kartı



İKİNCİ BÖLÜM

DAYANIKLI İSTATİSTİKSEL YÖNTEMLER

Dayanıklı istatistik, ideal modellerden sapmaları ve bu sapmaların kullanılan yöntemlerde meydana getireceği hasarlarla ilgilenmektedir. Nihai amaç, modelden küçük sapmalara karşın (ilgilenilen dağılışın varsayılan modelin komşuluğunda yer alması) hala güvenilir ve etkin yöntemler geliştirmektir. Veri analizi bakış açısıyla dayanıklı istatistiğin temel amaçları; verilerin çoğunluğuna en iyi uyum sağlayan yapının bulunması, sapan veri noktalarının belirlenmesi ve bunlara karşı önlem alınması, yüksek etki noktalarının belirlenmesidir (Hampel ve diğerleri, 1986: 6).

Tüm istatistiksel yöntemler doğrudan ya da dolaylı olarak bir takım varsayımlara dayanmaktadır. Genellikle bu varsayımların amacı araştırmacının veri analizi ya da modelleme problemleri karşısında sanılarının ne olduğunun veya neler bildiğinin şekillendirilmesidir. Aynı zamanda ortaya çıkan modelin hem teorik hem de pratik olarak kullanılabilir olmasını amaçlar. Genellikle kullanılan modeller gerçeğin basitleştirilmiş halidir ve yaklaşık olarak geçerlidir (Maronna ve diğerleri, 2006: 3). En yaygın kullanılan varsayımlardan biri verilerin Normal dağılıma sahip olduğudur. Bu varsayım regresyon analizinde kullanılan klasik yöntemler, varyans analizi ve çok değişkenli istatistiksel analizde bir çerçeve oluşturmaktadır.

Genellikle pratikte varsayılan bir normal dağılım modeli (hataların normal dağıldığı doğrusal regresyon modeli gibi) verilerin tümünü temsil etme anlamında yaklaşık olarak geçerlidir ve bazı gözlemler diğerlerinden farklı davranış gösterebilir. Bu tür gözlemlere sapan gözlem adı verilir. Tek bir sapan gözlem dahi sadece normallik varsayımı ya da doğrusallık varsayımı altında optimal olan klasik yöntemler üzerinde oldukça büyük etkiye sahip olabilir. “Yaklaşık olarak normal” şeklinde adlandırılan ve sapan gözlemlere yol açan dağılış merkez kısımda normal, kuyruklarda ise normale göre daha kalındır (Maronna ve diğerleri, 2006: 3).

Klasik modelleme ve veri analizine dayanıklı yaklaşımın amacı veriler sadece verilen herhangi bir dağılışa tam olarak uyduğunda değil, aynı zamanda yaklaşık olarak bir dağılışa uyduklarında güvenilir parametre tahminleri ve bunlara karşılık gelen hipotez testleri ve güven aralıklarını oluşturacak yöntemler türetmektir (Huber ve Ronchetti, 2009: 5).

Dayanıklı yöntemler ayrıca verilerin çoğunluğuna en iyi uyumu sağlamayı amaçlar. Eğer veri setinde sapan gözlem yoksa, dayanıklı yöntemler klasik yöntemlerle hemen hemen aynı sonuçları verir. Veri setinin çoğunluğuna iyi bir uyumun sonucu olarak dayanıklı yöntemler sapan gözlemlerin belirlenmesi açısından oldukça güvenilirdir.

Dayanıklı istatistiksel yöntemler üç tipteki tahminleyicileri incelemektedir. Bunlar M -tahminleyicileri, L -tahminleyicileri ve R -tahminleyicileridir. Bu tahminleyici sınıflarını açıklamak için $X_1, \dots, X_n$ ortak dağılışıları

$\Pr(X_i < X) = F\left(\frac{X - \theta}{\sigma}\right)$ olan bağımsız şans değişkenleri ele alınsın.

Reel değerli fonksiyon ρ 'nun türevi $\varphi = \rho'$ olmak üzere, $T_n = T_n(X_1, \dots, X_n)$ şeklinde tanımlanan istatistik $\sum_{i \leq n} \varphi(X_i - T_n) = 0$ eşitliğini sağlıyor ve $\varphi(x)$ için

$$\varphi_0(x) = -\frac{f'_0(x)}{f_0(x)}$$

yazılabiliyor ise T_n tahminleyicisi θ 'nın maksimum olabilirlik tahminleyicisidir. Bu durumda T_n tahminleyicisi M -tahminleyici sınıfında yer alır (Huber, 1972: 1049). Bu türdeki tahminleyiciler, parametrik tahminleyiciler olarak değerlendirilmektedir.

Sıralı örnekler $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ ele alınsın. Bir tahminleyici

$$T_n = \sum_{i \leq n} a_i X_{(i)}$$

için $\int_0^1 J(t) dt = 1$ koşulunu sağlayan bir J fonksiyonu ile bu tahminleyicinin ağırlık

fonksiyonu $a_i = \int_{(i-1)/n}^{i/n} J(t) dt$ ile belirleniyor olsun. Bu durumda T_n tahminleyicisi L -

tahminleyici sınıfında yer alır (Huber, 1972: 1049). Bu türdeki tahminleyiciler, parametrik olmayan tahminleyiciler olarak değerlendirilmektedir.

Dağılım fonksiyonları sırasıyla $F(x)$ ve $F(x - \Delta)$ olan iki örnek $Y_1, \dots, Y_n$ ve $Z_1, \dots, Z_n$ için iki örnekli rank testi ele alınsın. $N = 2n$ olan birleştirilmiş örnek için $\Delta = 0$ hipotezine karşın $\Delta > 0$ hipotezi test ediliyor olsun. Test istatistiği

$$W(Y_1, \dots, Y_n; Z_1, \dots, Z_n) = \sum_{i \leq n} J\left(\frac{i}{N+1}\right) V_i$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada birleştirilmiş örnekte en küçük değer Y şans değişkenine ait ise $V_i=1$, değilse $V_i=0$ 'dır. Bu şekilde bir test üzerinden $T_n(X_1, \dots, X_n)$ şeklinde bir tahminleyici

$$W(X_1 - T_n, \dots, X_n - T_n; -(X_1 - T_n), \dots, -(X_n - T_n)) = 0$$

olarak elde edilebilir. Bu durumda T_n tahminleyicisi R -tahminleyici sınıfında yer alır (Huber, 1972: 1050). Bu türdeki tahminleyiciler, dağılıştan bağımsız tahminleyiciler olarak değerlendirilmektedir.

Bu çalışmanın konusunu oluşturan Pearson diferansiyel denklemi parametre tahminleri, yukarıda tanıtılan M -tahminleyicileri sınıfında yer almaktadır. Bu nedenle bölümün ilerleyen kısımlarında M -tahminleyicileri için yaygın olarak kullanılan dayanıklılık ölçülerine yer verilmiştir.

2.1. DAYANIKLILIK ÖLÇÜLERİ

Tahminleyicilerin dayanıklılık özelliklerini belirlemede kullanılan bazı araçlar aşağıda tanımlanmıştır.

2.1.1. Hassaslık Eğrisi (Sensitivity Curve)

Herhangi bir şans değişkeni X 'in gözlenen değerleri $x_1, \dots, x_n$ olsun. Sapan gözlem olduğu düşünülen bir x_0 noktasının bu veri setine eklenmesinin herhangi bir tahminleyici olan $\hat{\theta}$ üzerindeki etkisi

$$SC = \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n, x_0) - \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) \quad (22)$$

hassaslık eğrisi olarak adlandırılır (Maronna ve diğerleri, 2006: 51).

Bu eğri, veri setine bir gözlemin ilave edilmesi veya veri setindeki bir gözlemin değerinin değiştirilmesi şeklinde iki farklı biçimde elde edilebilir. Eğer tahminleyici bir fonksiyonel ise herhangi bir n için $\hat{\theta}_n(x_1, \dots, x_n) = \hat{\theta}(F_n)$ 'dir ve

$$SC = \left[\hat{\theta} \left(\left(1 - \frac{1}{n} \right) F_{n-1} + \frac{1}{n} \Delta_x \right) - \hat{\theta}(F_{n-1}) \right] / \frac{1}{n} \quad (23)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $F_{n-1}, x_1, \dots, x_{n-1}$ gözlemlerinin ampirik dağılım fonksiyonudur (Madalla ve Rao, 1997: 546)

2.1.2. Sapma (Bias)

Bilinmeyen parametre θ 'nın gözlem değerleri $x_1, \dots, x_n$ 'den elde edilen parametre tahmin değeri $\hat{\theta}_n$ olsun. Bu tahminleyicinin sahip olması beklenen etkinlik, yeterlilik, tutarlılık ve sapmasızlık gibi özellikler mevcuttur. Bir tahminleyici eğer sapmasız ise $E(\hat{\theta}_n) = \theta$ olmalıdır. Bu bakış açısıyla tahminleyicinin sapması,

$$\text{Bias} = E(\hat{\theta}_n - \theta) \quad (24)$$

şeklinde tanımlanabilir (Quenouille, 1956: 354).

2.1.3. Göreli Etkinlik (Relative Efficiency)

Herhangi bir parametre θ 'nın alternatif iki sapmasız tahminleyicisi $\hat{\theta}_1$ ve $\hat{\theta}_2$ olsun. Bu tahminleyicilere ait varyanslar da sırasıyla $\text{var}(\hat{\theta}_1)$ ve $\text{var}(\hat{\theta}_2)$ olmak üzere, $\hat{\theta}_2$ 'nin $\hat{\theta}_1$ 'e göreli etkinliği

$$\text{eff}(\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_1) = \frac{\text{var}(\hat{\theta}_1)}{\text{var}(\hat{\theta}_2)} \quad (25)$$

şeklinde tanımlanır (Serfling, 1980: 51).

Sapmasız tahminleyiciler $\hat{\theta}_1$ ve $\hat{\theta}_2$ için göreli etkinlik değeri sadece ve sadece $\text{var}(\hat{\theta}_1) > \text{var}(\hat{\theta}_2)$ ise 1'den büyüktür (Wackerly ve diğerleri, 2008: 445).

$\mathbb{R}^k$ uzayında tanımlı θ parametre vektörü için alternatif iki sapmasız tahminleyici vektörleri $\hat{\theta}_1$ ve $\hat{\theta}_2$ 'nin kovaryans matrisleri Σ_1 ve Σ_2 olmak üzere bu tahminleyicilerin asimptotik göreli etkinlikleri

$$ARE(\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_1) = \left(\frac{|\Sigma_1|}{|\Sigma_2|} \right)^{1/k} \quad (26)$$

olarak tanımlanır (Serfling, 2011: 2).

2.1.4. Etki Fonksiyonu (Influence Function)

Reel sayı uzayı R 'nin tüm olasılık ölçülerinin bir alt kümesinde tanımlı reel değerli bir fonksiyonel T ve F ise R 'de tanımlı bir olasılık ölçüsü olsun. Herhangi bir $x \in R$ noktası için kütlesi 1 olan olasılık ölçüsü de Δ_x ile gösterilsin. Tanımlanan F ve Δ_x 'in bir birleşimi $0 < \varepsilon < 1$ için $(1-\varepsilon)F + \varepsilon\Delta_x$ şeklinde ifade edilebilir. Tahminleyici T 'nin F dağılımı altında etki eğrisi,

$$IC_{T,F}(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left\{ T[(1-\varepsilon)F + \varepsilon\Delta_x] - T(F) \right\} / \varepsilon \quad (27)$$

şeklinde ifade edilir (Hampel, 1974: 383).

Tahminleyici T 'nin tanım kümesinin bir örnek uzayındaki tüm sonlu olasılık ölçülerinin konveks bir alt kümesi olduğu varsayılın. Eğer G 'nin tanım kümesindeki tüm değerleri için aşağıdaki koşulu sağlayan bir reel a_1 fonksiyonu mevcut ise T tanım kümesinde F dağılışı altında Gateaux-türevlenebilirdir:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{T((1-\varepsilon)F + \varepsilon G) - T(F)}{\varepsilon} = \int a_1(x) dG(x) . \quad (28)$$

Bu koşul aynı zamanda

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[T((1-\varepsilon)F + \varepsilon G) \right]_{\varepsilon=0} = \int a_1(x) dG(x) \quad (29)$$

şeklinde de ifade edilebilir. Eğer $\Delta_x = G$ ise $a_1(x) = IF_{T,F}(x)$ olur. Eğer $F=G$ alınır ve $\varepsilon = 1/\sqrt{n}$ şeklinde bir dönüşüm yapılırsa yukarıdaki ifade

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T(F_n) - T(F)}{1/\sqrt{n}} \quad (30)$$

biçimine dönüşür. Elde edilen yeni terim için Taylor açılımı yapılırsa,

$$\begin{aligned} T(F_n) &= T(F) + \int IF_{T,F}(x) dF_n(x) + o_p(n^{-1/2}) \\ &= T(F) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n IF_{T,F}(x_i) + o_p(n^{-1/2}) \end{aligned} \quad (31)$$

elde edilir (Madalla ve Rao, 1997: 544). $o_p(n^{-1/2})$ ile ifade edilen terim küçük o notasyonudur (bkz. Ek 1).

Herhangi bir p -değişkenli dağılış F 'nin ortalama vektörü $\boldsymbol{\mu}' = [\mu_1, \dots, \mu_p]$ ve varyans-kovaryans matrisi $\Sigma = (\sigma_{ij})$ ($i, j = 1, \dots, p$ için) olsun. Herhangi bir $\mathbf{X}^T = [X_1, \dots, X_p]$ vektörünün ortalama vektörü ve varyans-kovaryans matrisi üzerindeki etkisini gösteren etki fonksiyonları

$$IF(\mathbf{X}; \boldsymbol{\mu}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\boldsymbol{\mu}(\tilde{F}) - \boldsymbol{\mu}(F)}{\varepsilon} = \mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}, \quad (32)$$

$$IF(\mathbf{X}; \Sigma) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Sigma(\tilde{F}) - \Sigma(F)}{\varepsilon} = (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T - \Sigma \quad (33)$$

şeklinde. Burada $0 \leq \varepsilon \leq 1$ olmak üzere, $\tilde{F} = (1 - \varepsilon)F + \varepsilon\delta_x$ olarak tanımlanan karma dağılıştır (Isogai, 1988:170).

Herhangi bir $W = (1 - \varepsilon)F + \varepsilon\delta_x$, $0 \leq \varepsilon \leq 1$ dağılımı için $\mu'(W)$ bozuluma uğramış dağılımın ortalaması olmak üzere, orijine göre moment için

$$\mu'_r(W) = (1 - \varepsilon)\mu'_r(F) + \varepsilon x^r, \quad (34)$$

ortalamaya göre momentler için de

$$\mu_s(W) = (1 - \varepsilon) \int_{-\infty}^{\infty} [t - \mu'(W)] dF(t) + \varepsilon [x - \mu'(W)]^s \quad (35)$$

yazılabilir. Eşitlik (34) ile belirtilen ifade eşitlik (35)'te yerine yazılarak

$$\begin{aligned} \mu_s(W) = & (1 - \varepsilon) \int_{-\infty}^{\infty} [t - \mu'(F)] dF(t) - \varepsilon [x - \mu'(F)]^s dF(t) \\ & + \varepsilon \left\{ (1 - \varepsilon) [x - \mu'(F)] \right\}^s \end{aligned} \quad (36)$$

ifadesi elde dileyebilir (Fiori ve Zenga, 2005: 141).

Eşitlik (36) ile genel yapısı verilen ortalamaya göre momentin W dağılımındaki görüntüsünden hareketle, ortalamaya göre ikinci momentin görüntüsü

$$\mu_2(W) = (1 - \varepsilon) \left\{ \mu_2(F) + \varepsilon^2 [x - \mu'(F)]^2 \right\} + \varepsilon (1 - \varepsilon)^2 [x - \mu'(F)]^2$$

şeklinde elde edilebilir.

Eşitlik (34) ile genel yapısı verilen orijine göre momentin W dağılımındaki görüntüsünden yararlanılarak, $\mu'_s \mu'_r$ ve $\mu'_s \mu'_r \mu'_u$ gibi çarpım halinde bulunan orijine göre momentlerin W dağılımındaki görüntüleri sırasıyla

$$\begin{aligned} \mu'_s(W) \mu'_r(W) &= (1-\varepsilon)^2 \mu'_s(F) \mu'_r(F) + \varepsilon(1-\varepsilon) \mu'_s(F) x^r + \varepsilon(1-\varepsilon) \mu'_r(F) x^s \\ &\quad + \varepsilon^2 x^s x^r \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \mu'_s(W) \mu'_r(W) \mu'_u(W) &= (1-\varepsilon)^3 \mu'_s(F) \mu'_r(F) \mu'_u(F) \\ &\quad + \varepsilon(1-\varepsilon)^2 [\mu'_s(F) \mu'_u(F) x^r + \mu'_r(F) \mu'_u(F) x^s + \mu'_s(F) \mu'_r(F) x^u] \\ &\quad + \varepsilon^2 (1-\varepsilon) [\mu'_u(F) x^{r+s} + \mu'_s(F) x^{r+u} + \mu'_r(F) x^{s+u}] + \varepsilon^2 x^{s+r+u} \end{aligned} \quad (38)$$

biçiminde elde edilir.

2.2 İSTATİSTİKSEL UZAKLIKLAR

İki olasılık dağılımı arasındaki uzaklığı ölçmek için kullanılan bazı mesafe ölçüleri bu kısımda incelenmiştir.

Bir metrik (uzaklık) uzayındaki elemanlar arasındaki uzaklık bir reel sayı ile ölçülebilir olmalıdır. Bu amaçla M bir küme, d ise $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+$ şeklinde tanımlanan ve $M \times M$ kartezyen çarpımını pozitif reel sayılara atayan bir fonksiyon olmak üzere (M, d) ikilileri ele alınsın. Eğer $d(x, y)$ şeklinde tanımlanan ifade $x, y \in M$ olan iki nokta arasındaki uzaklığı tanımlıyorsa, her bir $x, y \in M$ için d 'nin aşağıdaki koşulları sağlıyor olması gerekir:

- i. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- ii. $d(x, y) = d(y, x)$.

Bu varsayımları sağlayan (M, d) ikililerine yarı-metrik uzay denir (Khamsi ve Kirk, 2001: 13). Eğer bu varsayımlara ek olarak bir yarı-metrik uzay

- iii. Her bir $x, y, z \in M$ için, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (üçgen eşitsizliği)

eşitsizliğini de sağlıyorsa (M, d) ikililerine metrik uzay denir (Khamsi ve Kirk, 2001: 14).

İstatistikte sık kullanılan bazı uzaklık ölçüleri

- Kullback-Leibler uzaklığı,
- Hellinger uzaklığı,
- Rényi ıraksaklığı,
- Jensen-Shannon ıraksaklığı,
- Lévy-Prokhorov metriği,
- Bhattacharya uzaklığı,
- Wasserstein metriği,
- Kolmogorov-Smirnov istatistiği,
- Mahalanobis uzaklığı

şeklinde sıralanabilir. Bu çalışma kapsamında Bhattacharya uzaklığı ile çalışılmıştır.

2.2.1. Bhattacharya Uzaklığı

İki olasılık yoğunluk fonksiyonu $p(x)$ ve $q(x)$ arasındaki Bhattacharya katsayısı

$$BC = \int \sqrt{p(x)q(x)} dx \quad (39)$$

olarak ifade edilir (Dubuisson, 2010: 2). Elde edilen bu katsayı, sıfır ile sonsuz aralığında değer almaktadır. Bu katsayıdan hareketle kullanılabilecek mesafe ölçüsü de

$$DB = -\ln(BC) \quad (40)$$

olarak tanımlanan Bhattacharya uzaklığıdır (You ve diğerleri, 2008: 50). Bu uzaklık üçgen eşitsizliğini sağlamasa da $\sqrt{1-BC}$ olarak tanımlanan Hellinger uzaklığı üçgen eşitsizliğini sağlamaktadır (Kailath, 1967: 53).

2.2.2. Hellinger Uzaklığı

Sonlu bir örnek uzayı olan Ω 'da tanımlı iki olasılık dağılımı P ve Q olsun. P ve Q 'nun Ω 'daki veri çiftleri $(p_1, p_2, \dots, p_N)$ ve $(q_1, q_2, \dots, q_N)$ olmak üzere, $p_\alpha \geq 0$, $q_\alpha \geq 0$, $\sum_\alpha p_\alpha = 1$ ve $\sum_\alpha q_\alpha = 1$ eşitsizlikleri sağlanıyor olsun. Bu durumda P ve Q arasındaki Hellinger uzaklığı

$$d_H^2(P, Q) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N (\sqrt{p_\alpha} - \sqrt{q_\alpha})^2 \quad (41)$$

şeklinde hesaplanır. Bu uzaklık $0 \leq d_H^2 \leq 1$ eşitsizliğini sağlamaktadır (Sengar ve diğerleri, 2008: 797).

2.3. ELİPSOİD YAKLAŞIMI

Tek bir değişken ile ilgilenildiğinde, bu değişkene ait değişkenlik ölçüsü olarak varyans kullanılabilir. Fakat p adet değişken ele alındığında değişkenlik ölçüsü olarak varyans-kovaryans matrisi kullanılmalıdır. Gözlemlenen değişkenler üzerinden örnek varyans-kovaryans matrisi

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{1p} & s_{2p} & \cdots & s_{pp} \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Bu matrisin i -inci satır ve k -ıncı sütunundaki elemanı ise

$$s_{ik} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_{ji} - \bar{x}_i)(x_{jk} - \bar{x}_k)$$

ifadesi ile elde edilir. Örnek varyans-kovaryans matrisinin determinantına da genelleştirilmiş varyans adı verilir (Johnson ve Wichern, 2014: 123).

Genelleştirilmiş varyansı yorumlamanın bir yolu, örnek ortalama vektörü etrafındaki yayılımı dikkate almaktır. Bu amaçla anakütle ortalaması yerine $\bar{\mathbf{x}}$ örnek ortalama vektörü, anakütle kovaryans matrisi yerine de $\mathbf{S}$ örnek varyans-kovaryans matrisi kullanılarak gözlemlerin $\bar{\mathbf{x}}$ vektörüne olan uzaklığı

$$(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) = c^2 \quad (42)$$

olarak tanımlanabilir. Bu ifade ile tanımlanan, merkezi $\bar{\mathbf{x}}$ olan bir hiper-elipsoidtir (Johnson ve Wichern, 2014: 126).

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

MOMENTLER VE MOMENT TAHMİNLEYİCİLERİ

Eşitlik (1) ve eşitlik (9) ile Pearson diferansiyel denklemlerinin parametre tahminleri, tekrarlı (recursive) moment denklemlerinin moment tahminleme yöntemi ile yapılmaktadır.

3.1. MOMENTLER TAHMİNLEME YÖNTEMİ

Bilinmeyen parametreleri tahminleme kullanılan yöntemlerden bir tanesi momentler tahminleme yöntemidir.

Olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x|\theta_1, \dots, \theta_k)$ olan $X_1, \dots, X_n$ şans örnekleri ele alınsın. Momentler tahminleme yöntemine ait tahminleyiciler, ilk k adet örnek momentinin bunlara karşılık gelen k adet populasyon momentine eşitlenmesiyle oluşturulan denklem sisteminin çözülmesiyle elde edilir. $m_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$ ve $\mu'_k = E(X^k)$ olmak üzere, populasyon momenti μ'_j genellikle $\mu'_j(\theta_1, \dots, \theta_k)$ ile gösterilen $\theta_1, \dots, \theta_k$ 'nin bir fonksiyonudur. Momentler yöntemi tahminleyicileri $(\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_k)$, aşağıdaki denklem sisteminde $(\theta_1, \dots, \theta_k)$ 'nin $(m_1, \dots, m_k)$ cinsinden çözümünü elde edilir:

$$\begin{aligned} m_1 &= \mu'_1(\theta_1, \dots, \theta_k) \\ &\vdots \\ m_k &= \mu'_k(\theta_1, \dots, \theta_k) \end{aligned}$$

(Casella ve Berger, 2002: 313).

Pearson diferansiyel denkleminin parametre tahminleyicileri de popülasyon parametrelerinin birer fonksiyonu oldukları için momentler tahminleme yöntemi ile tahminlenirler.

3.2. MOMENTLERİN ÖRNEK MOMENTLERİ

Dağılım fonksiyonu $F(X)$ olan X şans değişkeni için gözlemlenmiş n adet değer $x_1, x_2, \dots, x_n$ olsun. Örneğe ait dağılım fonksiyonu $F_n(x)$, her bir x_i noktasına $1/n$ kadar ağırlık verilerek elde edilmektedir. Örneğe ait momentler, bu dağılımın karakteristikleri olarak adlandırılmaktadır (Cramer, 1946: 341). Parametre ve örnek istatistiği ayrımı yapabilmek için parametreler Yunan harfleriyle ve örnek istatistikleri de Latin harfleriyle ifade edilecektir. Bu bağlamda r -inci moment istatistiği m'_r ve buna karşılık gelen moment parametresi μ'_r ile gösterilmek üzere,

$$m'_r = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^r \quad (43)$$

ve ortalamaya göre örnek momenti

$$m_r = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - m'_1)^r \quad (44)$$

şeklinde ifade edilebilir. Gözlem değerleri x_i 'ler birbirinden bağımsız oldukları için örnek momentlerinin beklenen değerleri,

$$E(m'_r) = \frac{1}{n} \sum E(x^r) = E(x^r) = \mu'_r \quad (45)$$

şeklinde elde edilir (Kendall, 1943: 205).

Ortalamaya göre momentler için orijin sıfır noktasında olduğundan $m_1 = 0$ olur. İlk terim göz ardı edilmek üzere,

$$E(m_r) = \mu_r + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (46)$$

olarak elde edilebilir (Cramer, 1946: 350). $O\left(\frac{1}{n}\right)$ ile ifade edilen terim büyük O notasyonudur (bkz. Ek 1).

Orijine göre örnek momentlerinin varyansları,

$$Var(m'_r) = \frac{1}{n^2} [n\mu'_{2r} + n(n-1)\mu'^2_r] - \mu'^2_r = \frac{1}{n} (\mu'_{2r} - \mu'^2_r) \quad (47)$$

şeklinde iken (Kendall, 1943: 205), ortalamaya göre momentler için

$$Var(m_r) = \frac{\mu_{2r} - 2r\mu_{r-1}\mu_{r+1} - \mu_r^2 + r^2\mu_2\mu_{r-1}^2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (48)$$

olarak ifade edilebilir (Cramer, 1946: 350). İki orijine göre moment tahminleyicisi m'_ρ ve m'_r olmak üzere, bu tahminleyicilerin kovaryansları;

$$\begin{aligned} Cov(m'_\rho, m'_r) &= E\left[(m'_\rho - \mu'_\rho)(m'_r - \mu'_r)\right] = E\left[\left(\frac{1}{n}\sum x^\rho - \mu'_\rho\right)\left(\frac{1}{n}\sum x^r - \mu'_r\right)\right] \\ &= \frac{1}{n}(\mu'_{\rho+r} - \mu'_\rho\mu'_r) \end{aligned} \quad (49)$$

ile ifade edilebilir (Kendall, 1943: 206). Benzer bir yaklaşımla ortalamaya göre iki moment tahminleyicisi m_ρ ve m_r olmak üzere, bu tahminleyiciler arasındaki kovaryans;

$$Cov(m_\rho, m_r) = \frac{\mu_{\rho+r} - \rho\mu_{\rho-1}\mu_{r+1} - r\mu_{\rho+1}\mu_{r-1} - \mu_\rho\mu_r + \rho r\mu_2\mu_{\rho-1}\mu_{r-1}}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (50)$$

şeklindedir (Cramer, 1946: 350).

3.3. CRAMER'İN H-TEOREMİ

Moment tahminleyicilerinin doğrusal fonksiyonlarına ait varyans-kovaryans yapıları araştırılırken, yukarıda belirtilen yaklaşımlar kullanılabilir. Fakat ilgilenilen fonksiyon, moment tahminleyicilerinin doğrusal olmayan bir fonksiyonu şeklinde ortaya çıkıyorsa (örneğin; korelasyon katsayısı, çarpıklık ve basıklık ölçüleri gibi), belirtilen yaklaşımlar kullanılamaz. Belirli momentlerin kuvvetlerinin oranlarını içeren fonksiyonların varyans-kovaryans yapılarının incelenebilmesi için Cramer (1946) tarafından önerilen yaklaşım, aşağıdaki teorem ile açıklanmıştır. Bu teoreme göre iki merkezi moment tahminleyicisi m_ν ve m_ρ 'nun bir fonksiyonu $H(m_\nu, m_\rho)$ ile ifade edilmektedir. Bu fonksiyon m_ν ve m_ρ 'nun bir fonksiyonu olarak ifade edilebileceği gibi $x_1, x_2, \dots, x_n$ ile gösterilen n adet gözlemin bir fonksiyonu olarak da ifade edilebilmektedir. Ayrıca bu teorem çok boyutlu örnek uzayları için de geçerlidir (Cramer, 1946: 353).

Teorem 1: Herhangi bir H fonksiyonu için aşağıdaki koşullar sağlanıyor olsun:

- 1) H fonksiyonu $m_v = \mu_v$ ve $m_\rho = \mu_\rho$ noktalarının bazı komşuluklarında sürekli ve m_v ile m_ρ noktalarında birinci ve ikinci dereceden türevleri mevcuttur,
- 2) x_i 'nin tüm olası değerleri için C ve p negatif olmayan sabitler olmak üzere, $|H| < Cn^p$ eşitsizliği sağlanır.

Yukarıdaki koşullar altında şans değişkeni $H(m_v, m_\rho)$ 'nun beklenen değer ve varyansı;

$$E(H) = H_0 + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (51)$$

$$\begin{aligned} Var(H) = & Var(m_v) \left(\frac{\partial H}{\partial m_v} \right)^2 + 2Cov(m_v, m_\rho) \left(\frac{\partial H}{\partial m_v} \right) \left(\frac{\partial H}{\partial m_\rho} \right) + Var(m_\rho) \left(\frac{\partial H}{\partial m_\rho} \right)^2 \\ & + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \end{aligned} \quad (52)$$

şeklindedir. Burada H_0 , H fonksiyonunun $m_v = \mu_v$ ve $m_\rho = \mu_\rho$ noktalarındaki değeridir (Cramer, 1946: 354).

Cramer tarafından elde edilen bu ifade iki değişkenli bir fonksiyonun Taylor açılımı ile ifade edilebilir. f fonksiyonu, $(x, y) = (a, b)$ noktası etrafındaki açık aralıkta türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonu

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(a, b) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial x} (x - a) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y} (y - b) \\ & + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x^2} (x - a)^2 + 2 \frac{\partial f(a, b)}{\partial x} \frac{\partial f(a, b)}{\partial y} (x - a)(y - b) \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial y^2} (y - b)^2 \right] + \dots \end{aligned}$$

şeklinde seri açılımı ile ifade edilebilir (Thomas ve diğerleri, 2009: 823). Cramer'in tanımladığı H fonksiyonu da benzer yaklaşımla iki değişkenli Taylor açılımı ile ifade edilebilir. Böylece $m_v = \mu_v$ ve $m_\rho = \mu_\rho$ noktalarında H fonksiyonu

$$\begin{aligned}
H(m_v, m_\rho) = & H(\mu_v, \mu_\rho) + \frac{\partial H(m_v, m_\rho)}{\partial \mu_v} (m_v - \mu_v) + \frac{\partial H(m_v, m_\rho)}{\partial \mu_\rho} (m_\rho - \mu_\rho) \\
& + \frac{1}{2!} \left[\begin{aligned} & \frac{\partial^2 H(m_v, m_\rho)}{\partial \mu_v^2} (m_v - \mu_v)^2 \\ & + 2 \frac{\partial H(m_v, m_\rho)}{\partial \mu_v} \frac{\partial H(m_v, m_\rho)}{\partial \mu_\rho} (m_v - \mu_v) (m_\rho - \mu_\rho) \\ & + \frac{\partial^2 H(m_v, m_\rho)}{\partial \mu_\rho^2} (m_\rho - \mu_\rho)^2 \end{aligned} \right] + \dots
\end{aligned} \tag{53}$$

olarak ifade edilebilir ve eşitliğin her iki tarafının beklenen değeri ve varyansı alınarak sırasıyla (51) ve (52) nolu eşitlikler elde edilebilir.

Gözlemlenen değerlere Pearson dağılışı ailesinden bir dağılım için uyum yapılmak istendiğinde, diferansiyel denklemin momentler yöntemiyle parametrelerini tahminlemede kullanılabilecek, şans değişkenlerinin transformasyonuna dayanan alternatif tahminleyiciler mevcuttur. Bu tahminleyiciler 3 kategoride ele alınabilir. Bunlar: veriler üzerinde herhangi bir dönüşüm yapılmadan orijine göre momentler üzerinden hareket eden tahminleyiciler, veri setinin ortalamasının sıfıra çekilmesiyle elde edilen ve ortalamaya göre momentleri kullanan tahminleyiciler ve veri setinin modunun sıfıra çekilmesiyle elde edilen tahminleyicilerdir. Pearson dağılışı ailesinden bir dağılışa uyum yapılabilmesi için, diferansiyel denklemin parametrelerinin tamamının tahminlenmesi gerekmektedir. Dolayısıyla tahminleyicilerin bileşenlerini bireysel olarak incelemek yerine bunları bir tahminleyici vektörü ile ifade ederek bir bütün olarak incelemek, daha doğru bir yaklaşım olabilecektir.

Belirli bir parametreye ait farklı tahminleyicileri kıyaslamada kullanılan çeşitli performans ölçüleri mevcuttur (sapma, SD, MSE, ARE gibi). Bu kriterlerden özellikle asimtotik özellikleri dikkate alanlar için tahminleyicilerin varyans-kovaryans yapılarının incelenmesi gerekmektedir. Pearson'un tanımladığı diferansiyel denklemin parametre tahminleyicileri, belirli momentlerin kuvvetlerinin oranları şeklinde ortaya çıkmaktadır (bkz. Bölüm 1.1.). Tek boyutta yapılacak bir inceleme için yukarıda belirtilen H fonksiyonuna ait teoremin kullanılması yararlı olacaktır. Fakat yukarıda da belirtildiği gibi, tahminleyicilerin bileşenlerinin teker

teker incelenmesi yerine bir vektör olarak ele alınması durumunda H teoremi yetersiz kalmaktadır. ARE gibi tahminleyicilerin varyans-kovaryans yapılarını dikkate alan bir ölçü için 2 farklı H fonksiyonu arasındaki kovaryans yapısının elde edilmesi gerekmektedir. Bu doğrultuda Cramer (1946)'ın H teoreminden faydalanılarak aşağıdaki sonuç (corollary) elde edilmiştir.

Sonuç: H_1 ve H_2 Teorem 1'de verilen koşulları sağlayan, m_v ile m_ρ 'nin birer fonksiyonu olsun. Bu iki fonksiyon arasındaki kovaryans,

$$\begin{aligned} Cov(H_1, H_2) = & Var(m_v) \left(\frac{\partial H_1}{\partial m_v} \right) \left(\frac{\partial H_2}{\partial m_v} \right) + Cov(m_v, m_\rho) \left(\frac{\partial H_1}{\partial m_v} \right) \left(\frac{\partial H_2}{\partial m_\rho} \right) \\ & + Cov(m_v, m_\rho) \left(\frac{\partial H_1}{\partial m_\rho} \right) \left(\frac{\partial H_2}{\partial m_v} \right) + Var(m_\rho) \left(\frac{\partial H_1}{\partial m_\rho} \right) \left(\frac{\partial H_2}{\partial m_\rho} \right) \end{aligned} \quad (54)$$

şeklinde elde edilebilir. Bu teorem H fonksiyonunun üç ya da daha fazla bileşene sahip olduğu durumlar için de genellenebilir (bkz. Bölüm 4.2.).

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

PEARSON DİFERANSİYEL DENKLEM PARAMETRELERİ İÇİN ETKİ FONKSİYONU VE VARYANS-KOVARYANS MATRİSİ

Pearson diferansiyel denkleminin ait parametre tahminleyicilerinin, şans değişkeni üzerine yapılan yer dönüşümüne bağlı olarak değişeceği Bölüm 1.1’de belirtilmişti. Bu alternatif tahminleyicilerden ilki

$$\theta_x = \begin{bmatrix} \alpha \\ \phi_0 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \quad (55)$$

şeklinde ifade edilen ve şans değişkeni üzerine dönüşüm yapılmayan tahminleyici, ikincisi

$$\theta_y = \begin{bmatrix} \alpha \\ \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (56)$$

olarak ifade edilen ve şans değişkeninin ortalamasının sıfıra çekilmesiyle elde edilen tahminleyici ve üçüncüsü de

$$\theta_u = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (57)$$

şeklinde ifade edilen ve şans değişkeninin modunun sıfıra çekilmesiyle elde edilen tahminleyicidir. Bölümün ilerleyen kısmında bu tahminleyiciler için etki fonksiyonları ve varyans-kovaryans matrisleri elde edilecektir.

4.1. PEARSON DİFERANSİYEL DENKLEMİ PARAMETRE TAHMİNLEYİCİLERİ İÇİN ETKİ FONKSİYONU

Bölüm 1.1’de verilen diferansiyel denklem parametre tahminleyicileri, örnek momentlerinin doğrusal olmayan fonksiyonları şeklinde ortaya çıkmaktadır. Şans değişkeni üzerine dönüşüm yapılmayan tahminleyicinin bileşenleri $\alpha = f(\mu'_1, \mu'_2, \mu'_3, \mu'_4)$, $\phi_0 = f(\mu'_1, \mu'_2, \mu'_3, \mu'_4)$, $\phi_1 = f(\mu'_1, \mu'_2, \mu'_3, \mu'_4)$ ve

$\phi_2 = f(\mu'_1, \mu'_2, \mu'_3, \mu'_4)$ şeklinde ifade edilebilir. Bu fonksiyonlar momentlere bağlı oldukları için, aynı zamanda şans değişkeninin birer fonksiyonu olarak da ifade edilebilirler. Buradan hareketle incelenen parametre tahmin vektörlerinin etki fonksiyonları genel olarak

$$IF(\theta, F; x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\theta(W) - \theta(F)}{\varepsilon} \quad (58)$$

yapısında ortaya çıkmaktadır.

Eşitlik (55) ile ifade edilen tahminleyici için etki fonksiyonu oluşturulmak istendiğinde

$$IF(\theta_x, F; x) = \frac{d}{d\varepsilon} \theta_x(W) \Big|_{\varepsilon=0} = \begin{bmatrix} IF(\alpha, F; x) \\ IF(\phi_0, F; x) \\ IF(\phi_1, F; x) \\ IF(\phi_2, F; x) \end{bmatrix} \quad (59)$$

olarak elde edilebilir. Eşitlik (59) ile belirtilen etki fonksiyonunun ilk bileşeni

$$IF(\alpha, F; x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[-\frac{-12\mu'_4(W)\mu_1'^3(W) + 20\mu'_2(W)\mu'_3(W)\mu_1'^2(W)}{8\mu_1'^3(W)\mu'_3(W) - 6\mu_1'^2(W)\mu_2'^2(W) + 10\mu_1'^2(W)\mu'_4(W)} \dots \right. \\ \dots \frac{-9\mu'_1(W)\mu_2'^3(W) + 13\mu'_1(W)\mu'_2(W)\mu'_4(W) - 8\mu'_1(W)\mu_3'^2(W) - 3\mu_2'^2(W)\mu'_3(W)}{-32\mu'_1(W)\mu'_2(W)\mu'_3(W) + 18\mu_2'^3(W) - 10\mu'_2(W)\mu'_4(W)} \dots \\ \dots \frac{-\mu'_3(W)\mu'_4(W)}{+12\mu_3'^2(W)} - \frac{-12\mu'_4(F)\mu_1'^3(F) + 20\mu'_2(F)\mu'_3(F)\mu_1'^2(F) - 9\mu'_1(F)\mu_2'^3(F)}{8\mu_1'^3(F) - 6\mu_1'^2(F)\mu_2'^2(F) + 10\mu_1'^2(F)\mu'_4(F)} \dots \\ \left. \dots \frac{+13\mu'_1(F)\mu'_2(F)\mu'_4(F) - 8\mu'_1(F)\mu_3'^2(F) - 3\mu_2'^2(F)\mu'_3(F) - \mu'_3(F)\mu'_4(F)}{-32\mu'_1(F)\mu'_2(F)\mu'_3(F) + 18\mu_2'^3(F) - 10\mu'_2(F)\mu'_4(F) + 12\mu_3'^2(F)} \right]$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu tahminleyici orijine göre momentlerin bir fonksiyonu olduğu için W dağılışındaki görüntüleri eşitlik (34), (37) ve (38) dikkate alınarak elde edilebilir. Teorik yapısı eşitlik (58) ile verilen ifade α için aşağıdaki biçimde oluşturulabilir:

$$\begin{aligned}
IF(\alpha, F; x) = & \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[-\frac{[9\mu'_1(F)(1-\varepsilon) - 9\varepsilon x][-\varepsilon x^2 - \mu'_2(F)(1-\varepsilon)]^3}{8[\varepsilon x - \mu'_1(F)(1-\varepsilon)]^3[-\varepsilon x^3 - \mu'_3(F)(1-\varepsilon)]} \dots \right. \\
& \dots \frac{-[8\mu'_1(F)(1-\varepsilon) - 8\varepsilon x][\varepsilon x^3 - \mu'_3(F)(1-\varepsilon)]^3 - [\varepsilon x^3 - \mu'_3(F)(1-\varepsilon)]}{+10[\mu'_1(F)(1-\varepsilon) - \varepsilon x]^2[\varepsilon x^4 - \mu'_4(F)(1-\varepsilon)]} \dots \\
& \dots \frac{[\varepsilon x^4 - \mu'_4(F)(1-\varepsilon)] + [\mu'_1(F)(1-\varepsilon) - \varepsilon x]^4[12\varepsilon x^4 - 12\mu'_4(F)(1-\varepsilon)]}{+[\varepsilon x^4 - \mu'_4(F)(1-\varepsilon)][10\varepsilon x^2 - 10\mu'_2(F)(1-\varepsilon)] + 6[\varepsilon x - \mu'_1(F)(1-\varepsilon)]} \dots \\
& \dots \frac{+3[\varepsilon x^2 - \mu'_2(F)(1-\varepsilon)]^2[\varepsilon x^3 - \mu'_3(F)(1-\varepsilon)] + [\mu'_1(F)(1-\varepsilon) - \varepsilon x]^2}{[\varepsilon x^2 - \mu'_2(F)(1-\varepsilon)]^2 + 18[\varepsilon x^2 - \mu'_2(F)(1-\varepsilon)]^3 - 12[\varepsilon x^3 - \mu'_3(F)(1-\varepsilon)]^2} \dots \\
& \dots \frac{[\varepsilon x^3 - \mu'_3(F)(1-\varepsilon)][20\varepsilon x^2 - 20\mu'_2(F)(1-\varepsilon)] + [12\mu'_1(F)(1-\varepsilon) - 12\varepsilon x]}{[32\mu'_1(F)(1-\varepsilon) - 32\varepsilon x]} \dots \\
& \dots \frac{[\varepsilon x^2 - \mu'_2(F)(1-\varepsilon)][\varepsilon x^3 - \mu'_3(F)(1-\varepsilon)]}{[\varepsilon x^2 - \mu'_2(F)(1-\varepsilon)][\varepsilon x^3 - \mu'_3(F)(1-\varepsilon)]} - \frac{-12\mu'_4(F)\mu_1'^3(F)}{8\mu_1'^3\mu_3' - 6\mu_1'^2\mu_2'^2 + 10\mu_1'^2\mu_4'} \dots \\
& \dots \frac{+20\mu'_2(F)\mu_3'(F)\mu_1'^2(F) - 9\mu_1'(F)\mu_2'^3(F) + 13\mu_1'(F)\mu_2'(F)\mu_4'(F)}{-32\mu_1'(F)\mu_2'(F)\mu_3'(F) + 18\mu_2'^3(F)} \\
& \dots \frac{-8\mu_1'(F)\mu_3'^2(F) - 3\mu_2'^2(F)\mu_3'(F) - \mu_3'(F)\mu_4'(F)}{-10\mu_2'(F)\mu_4'(F) + 12\mu_3'^2(F)} \Big]
\end{aligned}$$

Bu ifadenin ε 'a göre türevi alınıp gerekli işlemler yapılırsa,

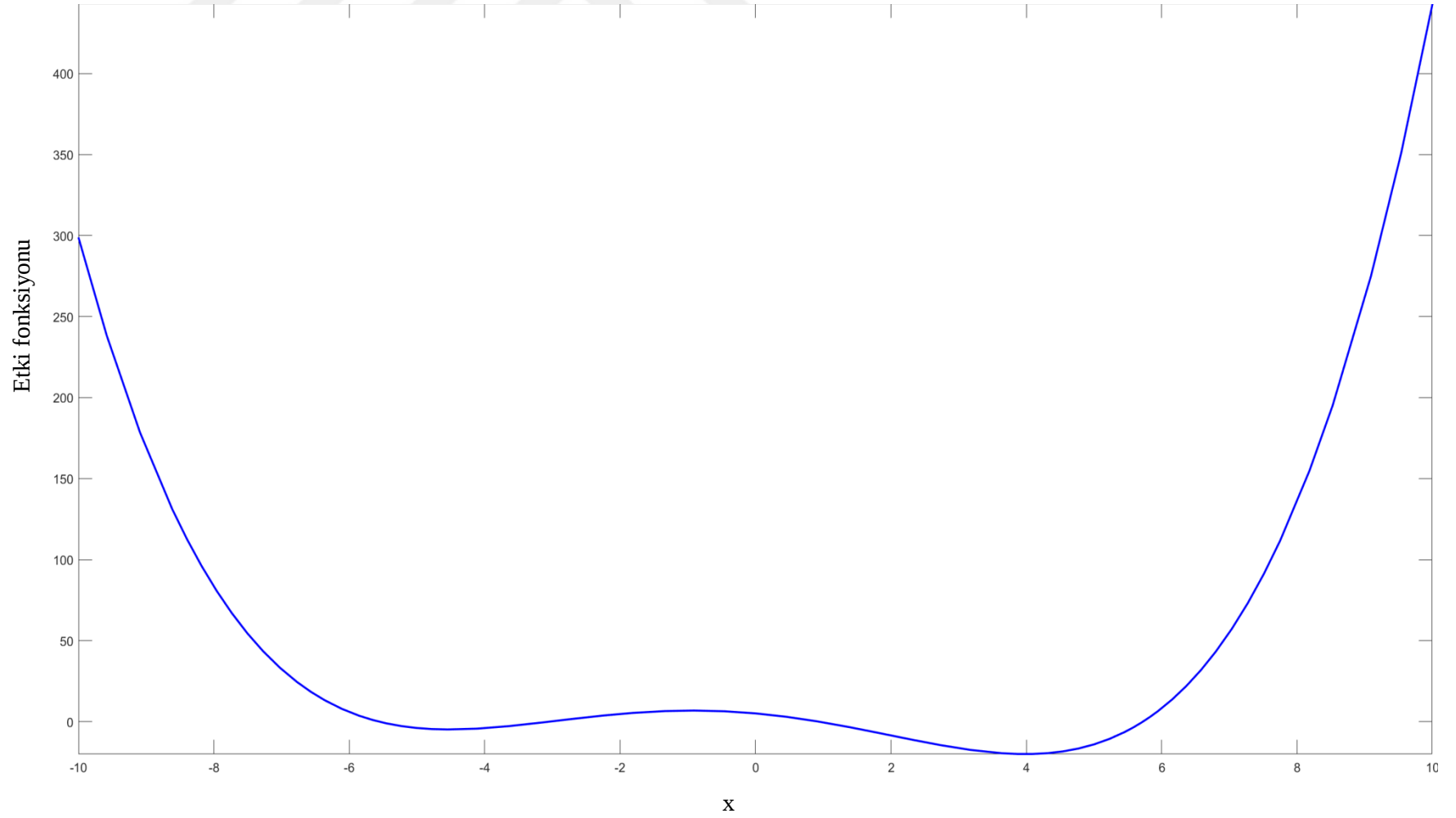
$$\begin{aligned}
IF(\alpha, F; x) = & -\frac{\mu_3'^2(8\mu_1' - 8x) + \mu_2'^3(9\mu_1' - 9x) + 3\mu_2'^2(\mu_3' - x^3) + \mu_1'^3(12\mu_4' - 12x^4)}{A} \dots \\
& \dots \frac{+\mu_4'(\mu_3' - x^3) + \mu_3'(\mu_4' - x^4) - \mu_2'\mu_4'(13\mu_1' - 13x) + 36\mu_1'^2\mu_4'(\mu_1' - x)}{A} \dots \\
& \dots \frac{-13\mu_1'\mu_4'(\mu_2' - x^2) + 6\mu_2'\mu_3'(\mu_2' - x^2) + 16\mu_1'\mu_3'(\mu_3' - x^3) - 13\mu_1'\mu_2'(\mu_4' - x^4)}{A} \dots \\
& \dots \frac{+27\mu_1'\mu_2'^2(\mu_2' - x^2) - 20\mu_1'^2\mu_2'(\mu_3' - x^3) - \mu_1'^2\mu_3'(20\mu_2' - 20x^2)}{A} \dots \\
& \dots \frac{-40\mu_1'\mu_2'\mu_3'(\mu_1' - x)}{A} - \frac{(12\mu_4'\mu_1'^3 - 20\mu_1'^2\mu_2'\mu_3' + 9\mu_1'\mu_2'^3 - 13\mu_4'\mu_1'\mu_2' + 8\mu_1'\mu_3'^2 + 3\mu_2'^2\mu_3' \dots}{A^2} \dots \\
& \dots \frac{+\mu_3'\mu_4')[\mu_4'(10\mu_2' - 10x^2) - 54\mu_2'^2(\mu_2' - x^2) - 8\mu_1'^3(\mu_3' - x^3) - 10\mu_1'^2(\mu_4' - x^4)]}{A^2} \dots \\
& \dots \frac{-24\mu_3'(\mu_3' - x^3) + 10\mu_2'(\mu_4' - x^4) + \mu_2'\mu_3'(32\mu_1' - 32x) + 12\mu_1'\mu_2'^2(\mu_1' - x)}{A^2} \dots \\
& \dots \frac{-24\mu_1'^2\mu_3'(\mu_1' - x) + 32\mu_1'\mu_3'(\mu_2' - x^2) + 32\mu_1'\mu_2'(\mu_3' - x^3) + 12\mu_1'^2\mu_2'(\mu_2' - x^2)}{A^2} \dots \\
& \dots \frac{-20\mu_1'\mu_4'(\mu_1' - x)}{A^2} \dots
\end{aligned} \tag{60}$$

şeklinde etki fonksiyonu elde edilir. Burada

$$A = 8\mu_1'^2\mu_3' - 6\mu_1'^2\mu_2'^2 + 10\mu_4'\mu_1'^2 - 32\mu_1'\mu_2'\mu_3' + 18\mu_2'^3 - 10\mu_4'\mu_2' + 12\mu_3'^2$$

olarak tanımlanmıştır.

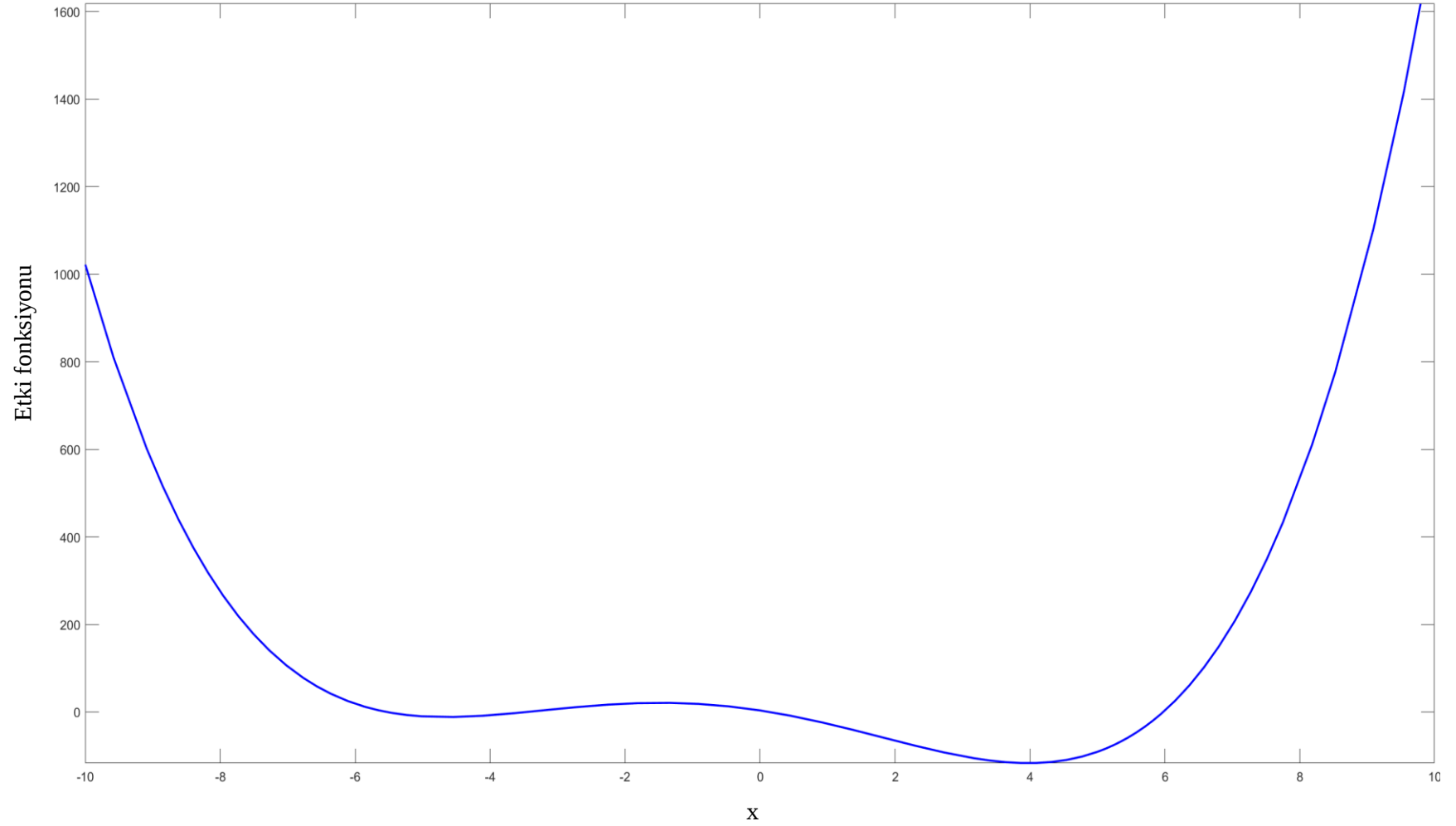
Şekil 4: Tip I Dağılımı İçin α 'nın Etki Fonksiyonu



Benzer işlemler eşitlik (58)'de tanımlanan etki fonksiyonunun diğer bileşenleri için de uygulanabilir. Böylelikle ϕ_0 için etki fonksiyonu

$$\begin{aligned}
 IF(\phi_0, F; x) = & \frac{\mu_3'^2(3\mu_2' - 3x^2) - 4\mu_2'^2(\mu_4' - x^4) - 8\mu_1'\mu_3'^2(\mu_1' - x) + \mu_2'^2\mu_3'(\mu_1' - x)}{A} \dots \\
 & \dots \frac{-8\mu_2'\mu_4'(\mu_2' - x^2) + \mu_1'\mu_4'(\mu_3' - x^3) + 6\mu_2'\mu_3'(\mu_3' - x^3) + \mu_1'\mu_3'(\mu_4' - x^4)}{A} \dots \\
 & \dots \frac{+\mu_4'\mu_1'^2(3\mu_2' - 3x^2) + 6\mu_1'\mu_2'\mu_4'(\mu_1' - x) + 2\mu_1'\mu_2'\mu_3'(\mu_2' - x^2)}{A} + \frac{(3\mu_4'\mu_1'^2\mu_2' - 4\mu_1'^2\mu_3'^2)}{A^2} \dots \\
 & \dots \frac{+\mu_1'\mu_2'^2\mu_3' + \mu_4'\mu_1'\mu_3' - 4\mu_4'\mu_2'^2 + 3\mu_2'\mu_3'^2}{A^2} [\mu_4'(10\mu_2' - 10x^2) - 54\mu_2'^2(\mu_2' - x^2)] \dots \\
 & \dots \frac{-8\mu_1'^3(\mu_3' - x^3) - 10\mu_1'^2(\mu_4' - x^4) - 24\mu_3'(\mu_3' - x^3) + 10\mu_2'(\mu_4' - x^4)}{A^2} \dots \\
 & \dots \frac{+\mu_2'\mu_3'(32\mu_1' - 32x) + 12\mu_1'\mu_2'^2(\mu_1' - x) - 24\mu_1'^2\mu_3'(\mu_1' - x) + 32\mu_1'\mu_3'(\mu_2' - x^2)}{A^2} \dots \\
 & \dots \frac{+32\mu_1'\mu_2'(\mu_3' - x^3) + 12\mu_1'^2\mu_2'(\mu_2' - x^2) - 20\mu_1'\mu_4'(\mu_1' - x)}{A^2}
 \end{aligned}
 \tag{61}$$

Şekil 5: Tip I Dağılımı İçin ϕ_0 'ın Etki Fonksiyonu

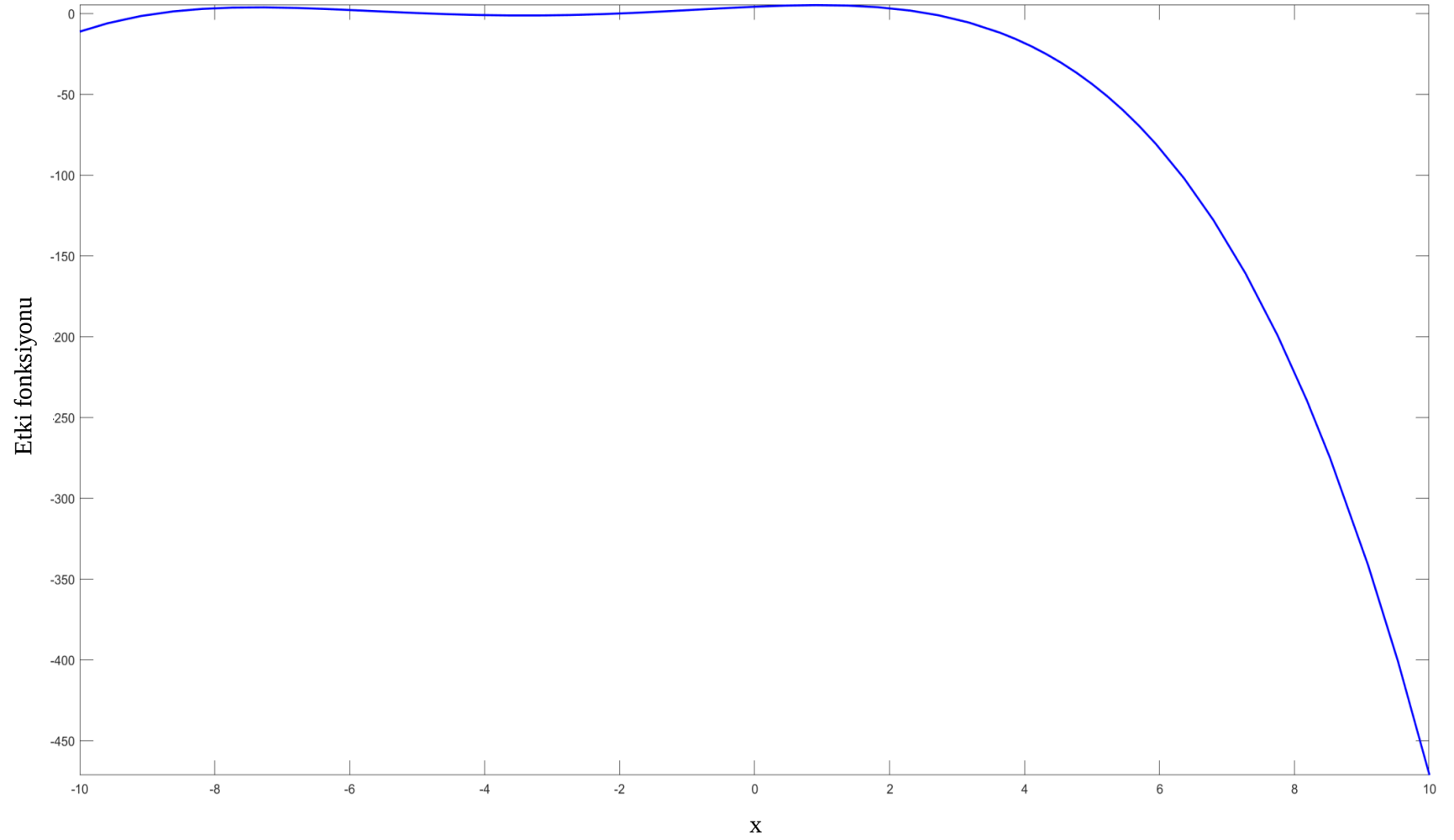


şeklinde, ϕ_1 için benzer işlemlerle

$$\begin{aligned}
IF(\phi_1, F; x) = & -\frac{\mu_3'^2(2\mu_2' - 2x^2) + \mu_2'^3(3\mu_1' - 3x) + 2\mu_2'^2(\mu_3' - x^3) + \mu_1'^3(6\mu_4' - 6x^4)}{A} \dots \\
& \dots \frac{+\mu_4'(\mu_3' - x^3) + \mu_3'(\mu_4' - x^4) - \mu_2'\mu_4'(7\mu_1' - 7x) + 18\mu_1'^2\mu_4'(\mu_1' - x) - 7\mu_1'\mu_4'(\mu_2' - x^2)}{A} \dots \\
& \dots \frac{+6\mu_2'\mu_3'(\mu_2' - x^2) + 4\mu_1'\mu_3'(\mu_3' - x^3) - 7\mu_1'\mu_2'(\mu_4' - x^4) + 9\mu_1'\mu_2'^2(\mu_2' - x^2)}{A} \dots \\
& \dots \frac{-8\mu_1'^2\mu_2'(\mu_3' - x^3) - \mu_1'^3\mu_3'(8\mu_2' - x^2) - 16\mu_1'\mu_2'\mu_3'(\mu_1' - x)}{A} - \frac{(6\mu_4'\mu_1'^3 - 8\mu_1'^2\mu_2'\mu_3' \dots}{A^2} \dots \\
& \dots \frac{+3\mu_1'\mu_2'^3 - 7\mu_4'\mu_1'\mu_2' + 2\mu_1'\mu_3'^2 + 3\mu_2'^2\mu_3' + \mu_4'\mu_3')[\mu_4'(10\mu_2' - 10x^2) - 54\mu_2'^2(\mu_2' - x^2)}{A^2} \dots \\
& \dots \frac{-8\mu_1'^3(\mu_3' - x^3) - 10\mu_1'^2(\mu_4' - x^4) - 24\mu_3'(\mu_3' - x^3) + 10\mu_2'(\mu_4' - x^4)}{A^2} \dots \\
& \dots \frac{+\mu_2'\mu_3'(32\mu_1' - 32x) + 12\mu_1'\mu_2'^2(\mu_1' - x) - 24\mu_1'^2\mu_3'(\mu_1' - x) + 32\mu_1'\mu_2'(\mu_3' - x^3)}{A^2} \dots \\
& \dots \frac{+32\mu_1'\mu_3'(\mu_2' - x^2) + 12\mu_1'^2\mu_2'(\mu_2' - x^2) - 20\mu_1'\mu_4'(\mu_1' - x)}{A^2}
\end{aligned}$$

(62)

Şekil 6: Tip I Dağılımı İçin ϕ_1 'in Etki Fonksiyonu

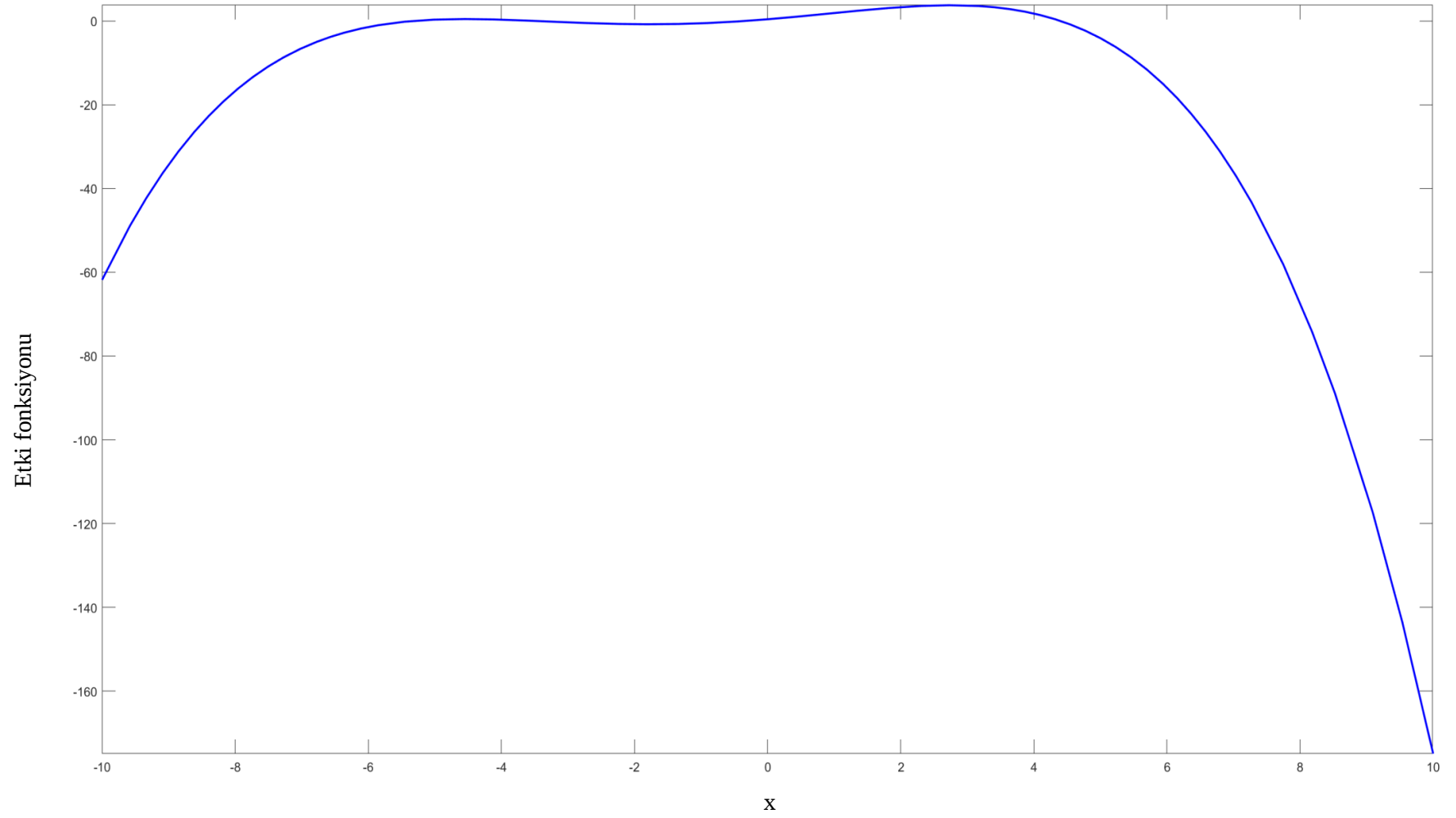


şeklinde ve son olarak ϕ_2 için

$$\begin{aligned}
 IF(\phi_2, F; x) = & -\frac{\mu'_4(2\mu'_2 - 2x^2) - 18\mu'^2_2(\mu'_2 - x^2) - 4\mu'^3_1(\mu'_3 - x^3) - 2\mu'^2_1(\mu'_4 - x^4)}{A} \dots \\
 & \dots \frac{-6\mu'_3(\mu'_3 - x^3) + 2\mu'_2(\mu'_4 - x^4) - \mu'_2\mu'_3(10\mu'_1 - 10x) + 6\mu'_1\mu'^2_2(\mu'_1 - x)}{A} \dots \\
 & \dots \frac{-12\mu'^3_1\mu'_3(\mu'_1 - x) + 10\mu'_1\mu'_3(\mu'_2 - x^2) + 10\mu'_1\mu'_2(\mu'_3 - x^3) + 6\mu'^2_1\mu'_2(\mu'_2 - x^2)}{A} \dots \\
 & \dots \frac{-4\mu'_1\mu'_4(\mu'_1 - x)}{A} + \frac{(4\mu'_3\mu'^3_1 - 3\mu'^2_1\mu'^2_2 + 2\mu'_4\mu'^2_1 - 10\mu'_1\mu'_2\mu'_3 + 6\mu'^3_2 - 2\mu'_4\mu'_2 + 3\mu'^2_3)}{A^2} \dots \\
 & \dots \frac{[\mu'_4(10\mu'_2 - 10x^2) - 54\mu'^2_2(\mu'_2 - x^2) - 8\mu'^3_1(\mu'_3 - x^3) - 10\mu'^2_1(\mu'_4 - x^4)]}{A^2} \dots \\
 & \dots \frac{-24\mu'_3(\mu'_3 - x^3) + 10\mu'_2(\mu'_4 - x^4) + \mu'_2\mu'_3(32\mu'_1 - 32x) + 12\mu'_1\mu'^2_2(\mu'_1 - x)}{A^2} \dots \\
 & \dots \frac{-24\mu'^2_1\mu'_3(\mu'_1 - x) + 32\mu'_1\mu'_2(\mu'_3 - x^3) + 32\mu'_1\mu'_3(\mu'_2 - x^2) + 12\mu'^2_1\mu'_2(\mu'_2 - x^2)}{A^2} \dots \\
 & \dots \frac{-20\mu'_1\mu'_4(\mu'_1 - x)}{A^2}
 \end{aligned} \tag{63}$$

olarak elde edilebilir.

Şekil 7: Tip I Dağılımı İçin ϕ_2 'nin Etki Fonksiyonu



Ortalamanın sıfırda olduğu tahminleyici benzer bir yaklaşımla, $\alpha = f(\mu_2, \mu_3, \mu_4)$, $\varphi_0 = f(\mu_2, \mu_3, \mu_4)$ ve $\varphi_2 = f(\mu_2, \mu_3, \mu_4)$ olarak ifade edilebilir. Bu tahminleyici vektörünün elemanları ortalamaya göre momentlerin birer fonksiyonu oldukları için etki fonksiyonlarının elde edilmesinde Eşitlik (36)'dan yararlanılabilir. Momentlerin W dağılımındaki görüntülerinin elde edilip, F dağılımındaki görüntülerinden farklarının ε 'a göre türevleri alınarak,

$$\begin{aligned}
 IF(\alpha, F; x) &= \frac{\mu_3(3\mu_2^2 + \mu_4)[24\mu_3(-x^3 + 3\mu_2x + \mu_3) + 54\mu_2^2(\mu_2 - x^2)]}{(18\mu_2^3 - 10\mu_2\mu_4 + 12\mu_3^2)^2} \dots \\
 &\dots \frac{-\mu_2(-10x^4 + 40\mu_3x + 10\mu_4) - 10\mu_4(\mu_2 - x^2)]}{(18\mu_2^3 - 10\mu_2\mu_4 + 12\mu_3^2)^2} - \frac{(3\mu_2^2 + \mu_4)(-x^3 + 3\mu_2x + \mu_3)}{18\mu_2^3 - 10\mu_2\mu_4 + 12\mu_3^2} \dots \\
 &\dots \frac{-\mu_3[\mu_4 + 4\mu_3x + 6\mu_2(\mu_2 - x^2) - x^4]}{18\mu_2^3 - 10\mu_2\mu_4 + 12\mu_3^2}
 \end{aligned} \tag{64}$$

$$\begin{aligned}
 IF(\varphi_0, F; x) &= \frac{\mu_2(4\mu_2\mu_4 - 3\mu_3^2)[24\mu_3(-x^3 + 3\mu_2x + \mu_3) + 54\mu_2^2(\mu_2 - x^2)]}{(18\mu_2^3 - 10\mu_2\mu_4 + 12\mu_3^2)^2} \dots \\
 &\dots \frac{-\mu_2(-10x^4 + 40\mu_3x + 10\mu_4) - 10\mu_4(\mu_2 - x^2)]}{(18\mu_2^3 - 10\mu_2\mu_4 + 12\mu_3^2)^2} - \frac{\mu_2[\mu_2(-4x^4 + 16\mu_3x + 4\mu_4)]}{18\mu_2^3 - 10\mu_2\mu_4 + 12\mu_3^2} \dots \\
 &\dots \frac{-6\mu_3(-x^3 + 3\mu_2x + \mu_3) + 4\mu_4(\mu_2 - x^2) - (\mu_2 - x^2)(4\mu_2\mu_4 - 3\mu_3^2)}{18\mu_2^3 - 10\mu_2\mu_4 + 12\mu_3^2}
 \end{aligned} \tag{65}$$

$$\begin{aligned}
IF(\varphi_2, F; x) = & \frac{(6\mu_2^3 - 2\mu_2\mu_4 + 3\mu_3^2)[24\mu_3(-x^3 + 3\mu_2x + \mu_3) + 54\mu_2^2(\mu_2 - x^2)]}{(18\mu_2^3 - 10\mu_2\mu_4 + 12\mu_3^2)^2} \dots \\
& \dots \frac{-\mu_2(-10x^4 + 40\mu_3x + 10\mu_4) - 10\mu_4(\mu_2 - x^2)]}{(18\mu_2^3 - 10\mu_2\mu_4 + 12\mu_3^2)^2} - \frac{6\mu_3(-x^3 + 3\mu_2x + \mu_3)}{18\mu_2^3 - 10\mu_2\mu_4 + 12\mu_3^2} \dots \\
& \dots \frac{+18\mu_2^2(\mu_2 - x^2) - \mu_2(-2x^4 + 8\mu_3x + 2\mu_4) - 2\mu_4(\mu_2 - x^2)}{18\mu_2^3 - 10\mu_2\mu_4 + 12\mu_3^2}
\end{aligned} \tag{66}$$

bu etki fonksiyonları elde edilebilir.

Modun sıfırda olduğu tahminleyici, $\lambda_0 = f(\mu'_1, \mu'_2, \mu'_3)$, $\lambda_1 = f(\mu'_1, \mu'_2, \mu'_3)$ ve $\lambda_2 = f(\mu'_1, \mu'_2, \mu'_3)$ olarak ifade edilebilir. Böylelikle şans değişkeninin birer fonksiyonu olarak bu tahminleyicilerin etki fonksiyonları ise aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
IF(\lambda_0, F; x) = & \frac{\mu_2'^2(3\mu_1' - 3x) - \mu_1'^2(4\mu_3' - 4x^3) + \mu_3'(\mu_2' - x^2) - \mu_2'(\mu_3' - x^3)}{B} \dots \\
& \dots \frac{+6\mu_1'\mu_2'(\mu_2' - x^2) - 8\mu_1'\mu_3'(\mu_1' - x)}{B} + \frac{(-4\mu_1'^2\mu_3' + 3\mu_1'\mu_2'^2 + \mu_2'\mu_3')}{B^2} \dots \\
& \dots \frac{[\mu_1'(12\mu_2' - 12x^2) - 4\mu_3' + 12\mu_2'(\mu_1' - x) - 24\mu_1'^2(\mu_1' - x) + 4x^3]}{B^2}
\end{aligned} \tag{67}$$

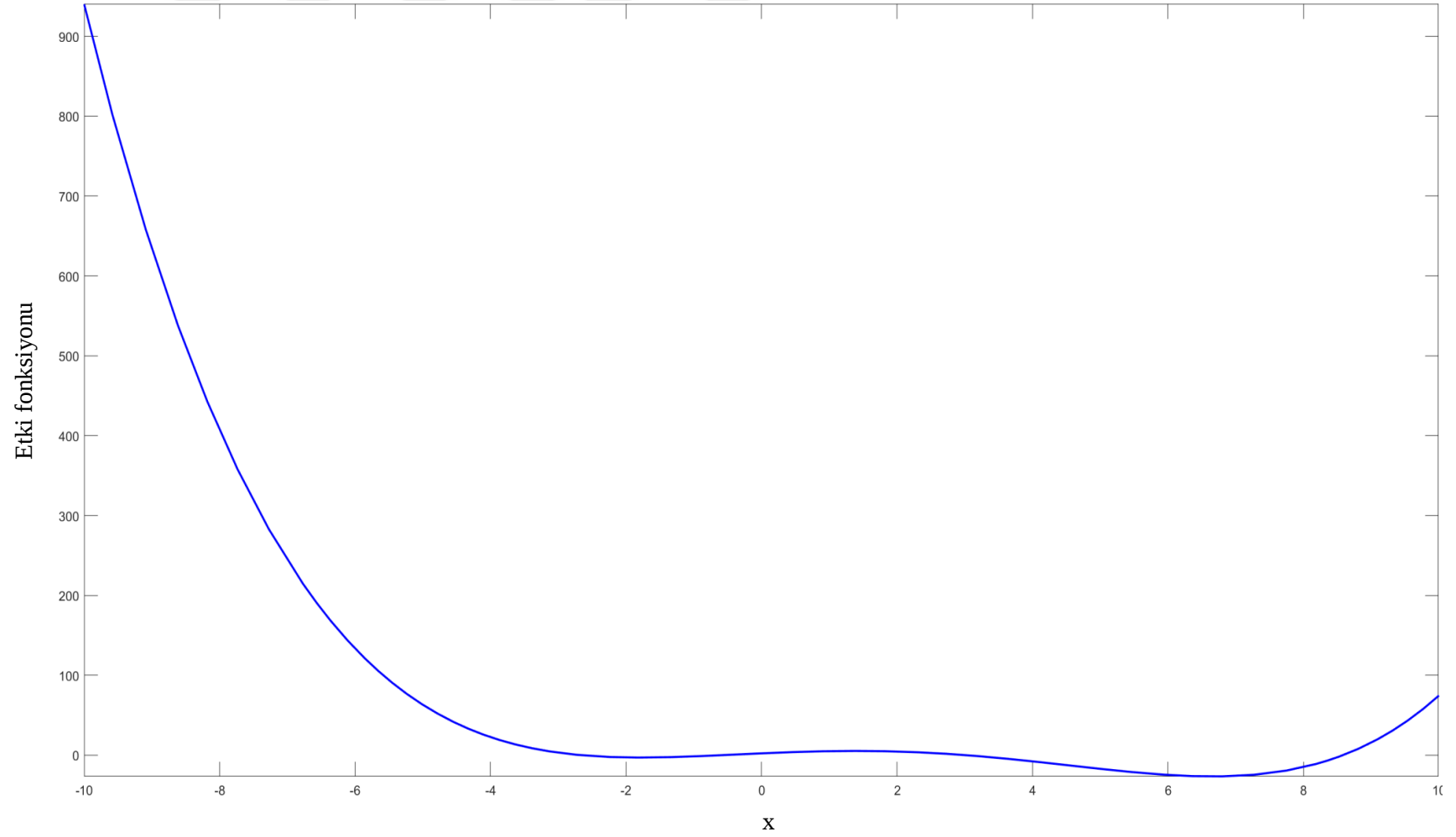
Burada $B = 8\mu_1'^3 - 12\mu_1'\mu_2' + 4\mu_3'$ şeklinde tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned}
IF(\lambda_1, F; x) = & \frac{(\mu_3' - \mu_1'\mu_2')(\mu_1' - x) - \mu_1'[\mu_2'(\mu_1' - x) - \mu_3' + \mu_1'(\mu_2' - x^2) + x^3]}{C} \\
& + \frac{\mu_1'(\mu_1' - \mu_1'\mu_2')[\mu_1'(6\mu_2' - x^2) - 2\mu_3' + 6\mu_2'(\mu_1' - x) - 12\mu_1'^2(\mu_1' - x) + 2x^3]}{C^2}
\end{aligned} \tag{68}$$

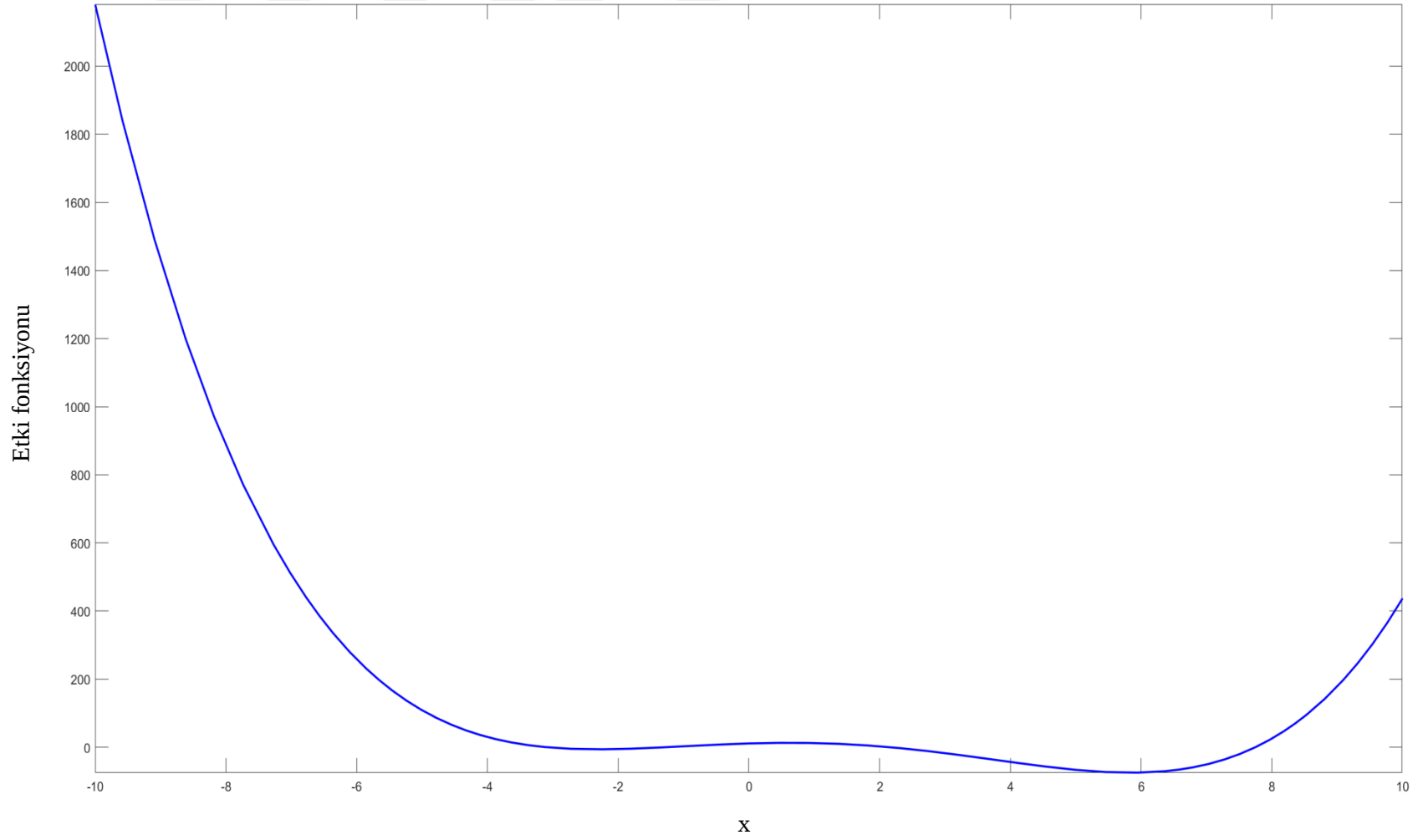
Burada $C = 4\mu_1'^3 - 6\mu_1'\mu_2' + 2\mu_3'$ şeklinde tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned}
IF(\lambda_2, F; x) = & \frac{(4\mu_1'^3 - 5\mu_1'\mu_2' + \mu_3')[\mu_1'(12\mu_2' - x^2) - 4\mu_3' + 12\mu_2'(\mu_1' - x) + 4x^3]}{B} \dots \\
& \dots \frac{-24\mu_1'^2(\mu_1' - x)}{B} - \frac{\mu_1'(5\mu_2' - 5x^2) - \mu_3' + 5\mu_2'(\mu_1' - x) - 12\mu_1'^2(\mu_1' - x) + x^3}{B^2}
\end{aligned} \tag{69}$$

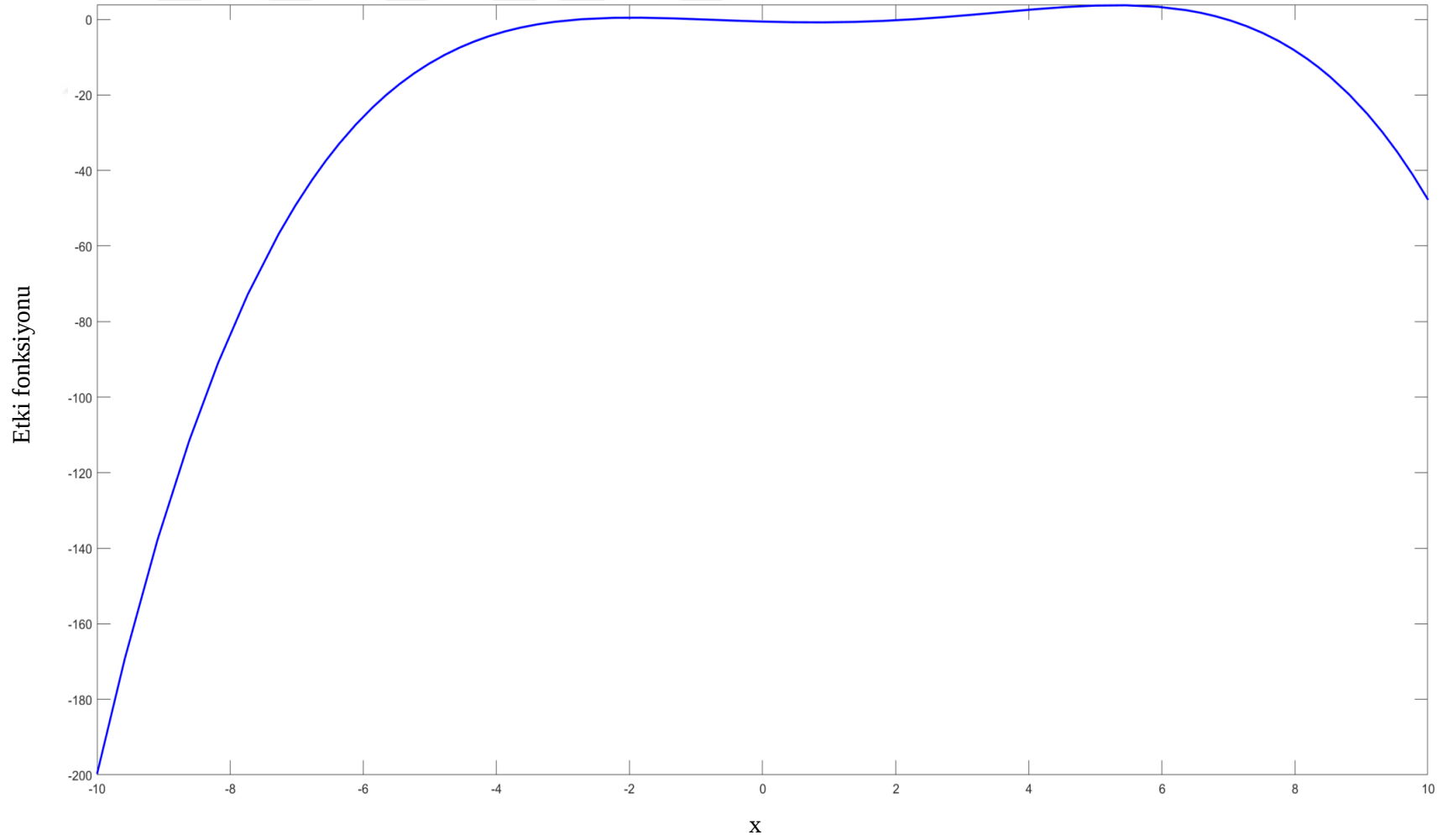
Şekil 8: Tip I Dağılımı İçin α 'nın Etki Fonksiyonu



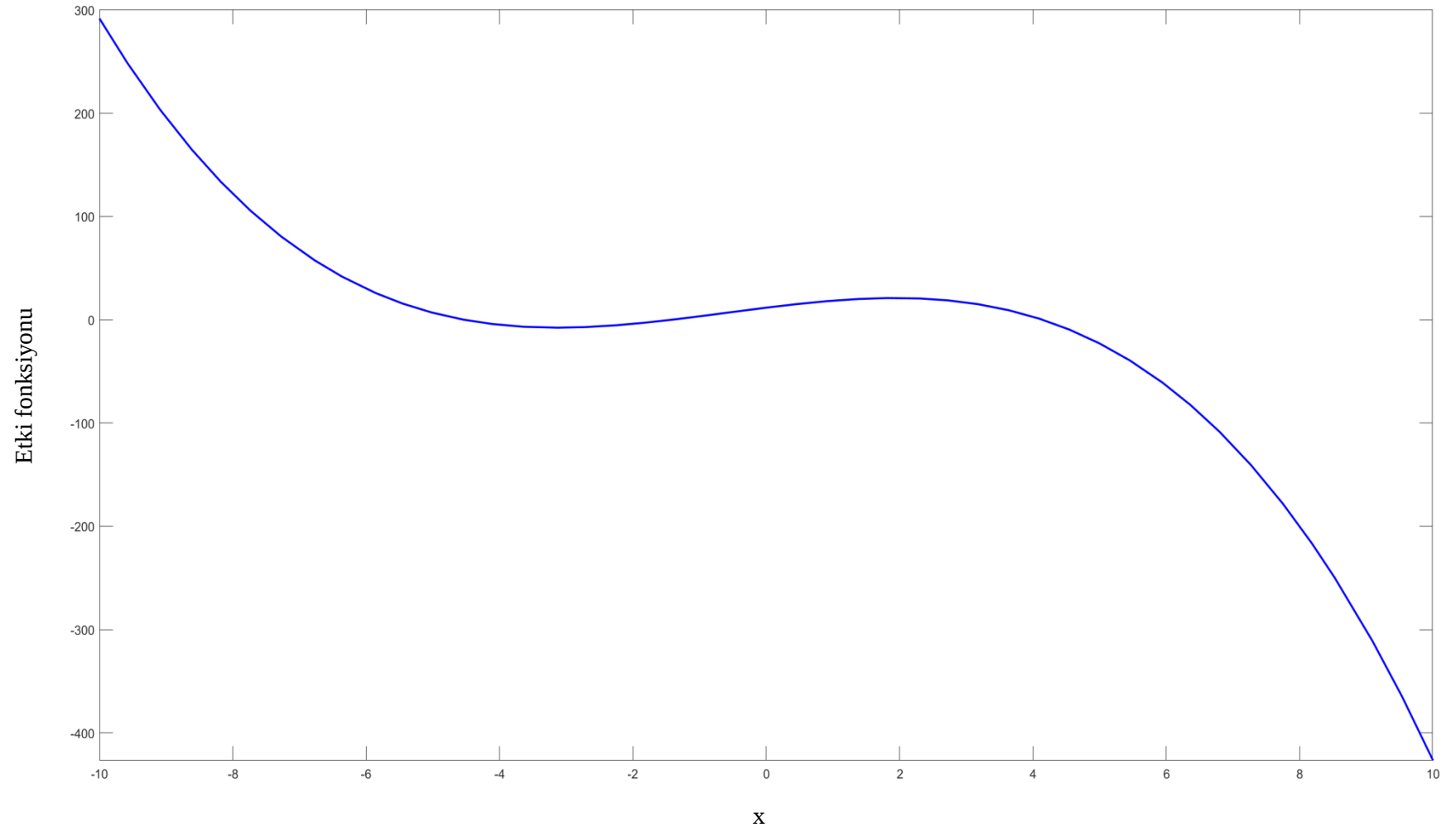
Şekil 9: Tip I Dağılımı İçin φ_0 'ın Etki Fonksiyonu



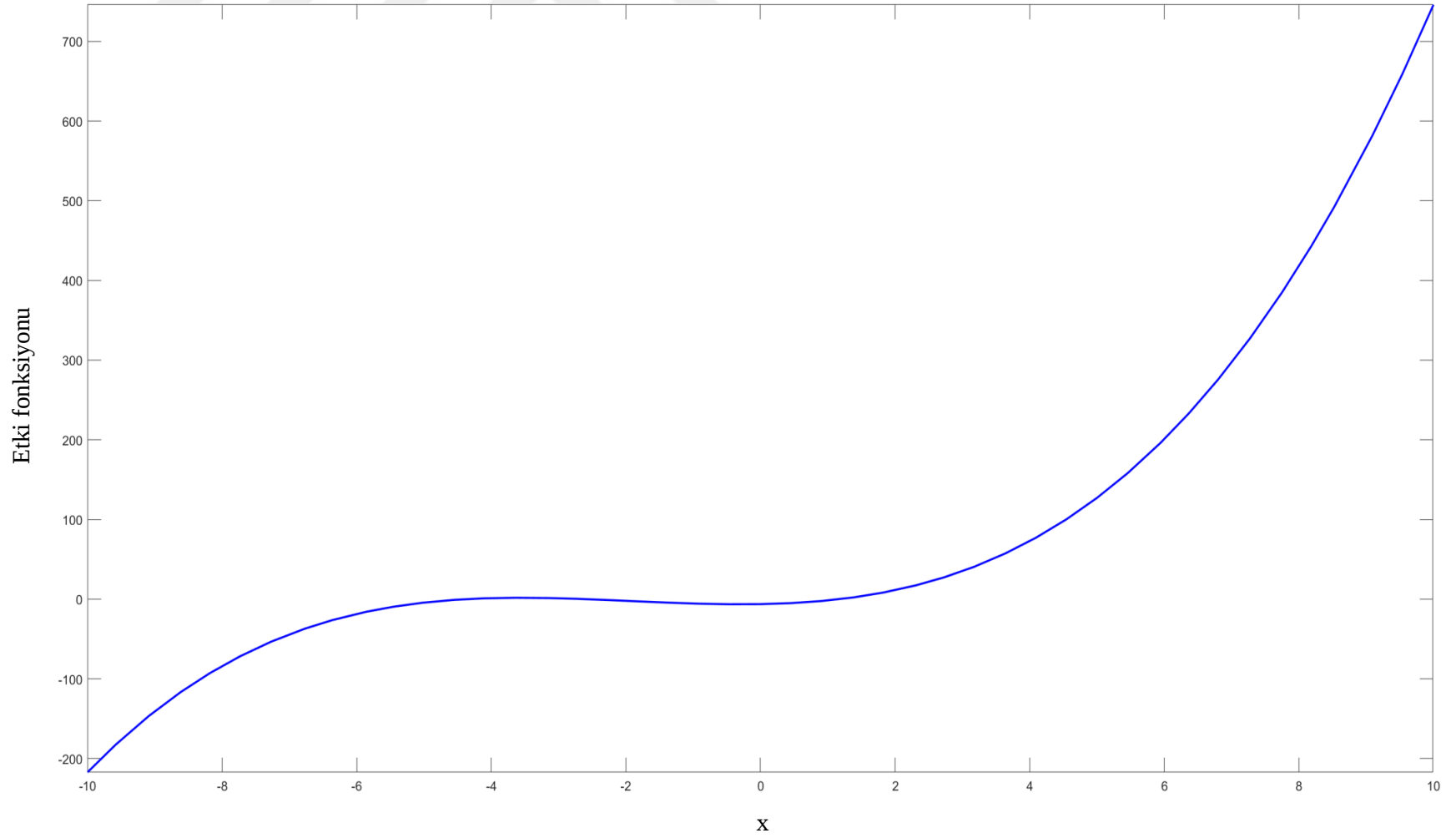
Şekil 10: Tip I Dağılımı İçin φ_2 'nin Etki Fonksiyonu



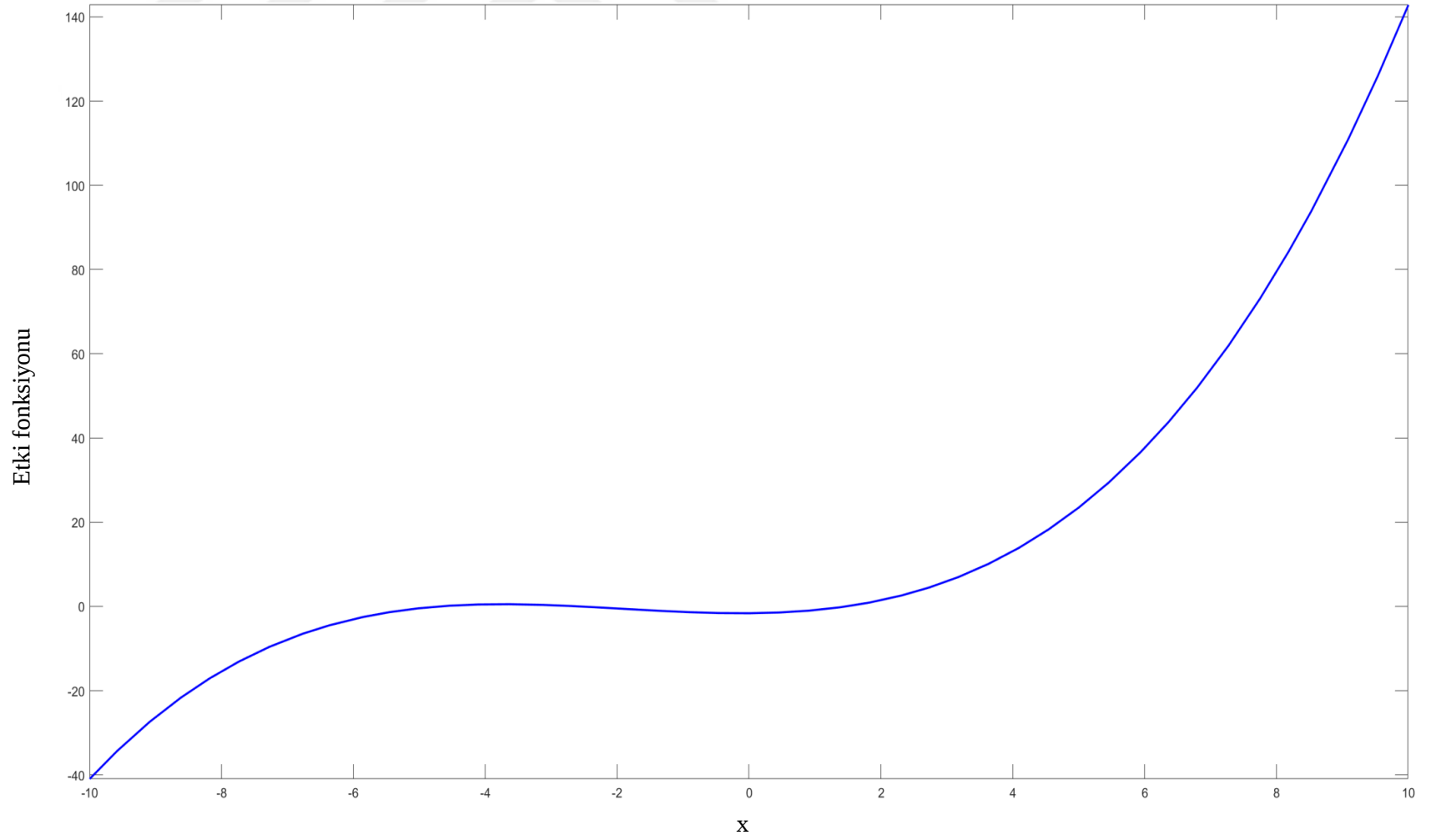
Şekil 11: Tip I Dağılımı İçin λ_0 'ın Etki Fonksiyonu



Şekil 12: Tip I Dağılımı İçin λ_1 'in Etki Fonksiyonu



Şekil 13: Tip I Dağılımı İçin λ_2 'nin Etki Fonksiyonu



Yukarıda elde edilen etki fonksiyonları incelendiğinde, her üç alternatif tahminleyicinin de etki fonksiyonlarının sınırsız olduğu görülmektedir. Bir tahminleyicinin dayanıklı olup olmadığına dair önemli bir veri sağlayan etki fonksiyonları açısından bu tahminleyiciler arasında bir fark olduğu söylenememektedir. Ayrıca ϕ_0 ve λ_0 haricindeki tüm tahminleyicilerin etki fonksiyonlarının fonksiyonel yapılarının dağılımdan etkilenmedikleri görülebilmektedir (bkz. Ek 11). Dağılımın tipi değiştikçe, bir gözlemin tahminleyici üzerindeki etkisi değişmektedir. Tüm tahminleyiciler için bir gözlemin etkisi en az Tip I dağılımında görülürken, en yüksek etki Tip IV dağılımında ortaya çıkmaktadır.

4.2. PEARSON DİFERANSİYEL DENKLEMİ PARAMETRE TAHMİNLEYİCİLERİ İÇİN VARYANS-KOVARYANS MATRİSLERİ

Bölüm 1.1’de tanıtilan ve şans değişkeni üzerine yer dönüşümü yapılmasıyla elde edilen alternatif tahminleyicilerin özellikle değişkenliklerini dikkate alan performans kriterlerinin elde edilmesinde bu tahminleyicilerin varyans-kovaryans matrislerinin elde edilmesi önem taşımaktadır. Bu bakış açısıyla her bir tahminleyiciye ait varyans-kovaryans matrisleri Bölüm 3.3’te verilen Cramer’in H-teoremi ve bu teoremden elde edilen sonuç dikkate alınarak bu bölümde elde edilecektir.

Eşitlik (55) ile verilen tahminleyici vektörü θ_x ’e ait varyans-kovaryans matrisi

$$\Sigma_x = \begin{bmatrix} \text{Var}(\alpha) & \text{Cov}(\alpha, \phi_0) & \text{Cov}(\alpha, \phi_1) & \text{Cov}(\alpha, \phi_2) \\ \text{Cov}(\alpha, \phi_0) & \text{Var}(\phi_0) & \text{Cov}(\phi_0, \phi_1) & \text{Cov}(\phi_0, \phi_2) \\ \text{Cov}(\alpha, \phi_1) & \text{Cov}(\phi_0, \phi_1) & \text{Var}(\phi_1) & \text{Cov}(\phi_1, \phi_2) \\ \text{Cov}(\alpha, \phi_2) & \text{Cov}(\phi_0, \phi_2) & \text{Cov}(\phi_1, \phi_2) & \text{Var}(\phi_2) \end{bmatrix} \quad (70)$$

olarak ifade edilir. Bu matrisin köşegen elemanları, Bölüm 3.3’te verilen H-teoremi ile aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
Var(\phi_2) = & Var(m'_1) \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial m'_1} \right)^2 + Var(m'_2) \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial m'_2} \right)^2 + Var(m'_3) \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial m'_3} \right)^2 \\
& + Var(m'_4) \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial m'_4} \right)^2 + 2Cov(m'_1, m'_2) \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial m'_1} \right) \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial m'_2} \right) \\
& + 2Cov(m'_1, m'_3) \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial m'_1} \right) \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial m'_3} \right) + 2Cov(m'_1, m'_4) \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial m'_1} \right) \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial m'_4} \right) \\
& + 2Cov(m'_2, m'_4) \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial m'_2} \right) \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial m'_4} \right) + 2Cov(m'_2, m'_3) \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial m'_2} \right) \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial m'_3} \right) \\
& + 2Cov(m'_3, m'_4) \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial m'_3} \right) \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial m'_4} \right)
\end{aligned}$$

Eşitlik (70) ile verilen varyans-kovaryans matrisinin köşegen dışı elemanları ise Bölüm 3.3'te verilen sonuç göz önüne alınarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
Cov(\alpha, \phi_0) = & Var(m'_1) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m'_1} \right) \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial m'_1} \right) + Cov(m'_1, m'_2) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m'_1} \right) \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial m'_2} \right) \\
& + Cov(m'_1, m'_2) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m'_2} \right) \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial m'_1} \right) + Var(m'_2) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m'_2} \right) \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial m'_2} \right) \\
& + Cov(m'_1, m'_3) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m'_1} \right) \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial m'_3} \right) + Cov(m'_1, m'_3) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m'_3} \right) \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial m'_1} \right) \\
& + Var(m'_3) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m'_3} \right) \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial m'_3} \right) + Cov(m'_1, m'_4) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m'_1} \right) \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial m'_4} \right) \\
& + Cov(m'_1, m'_4) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m'_4} \right) \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial m'_1} \right) + Var(m'_4) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m'_4} \right) \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial m'_4} \right) \\
& + Cov(m'_2, m'_3) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m'_2} \right) \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial m'_3} \right) + Cov(m'_2, m'_3) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m'_3} \right) \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial m'_2} \right) \\
& + Cov(m'_2, m'_4) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m'_2} \right) \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial m'_4} \right) + Cov(m'_2, m'_4) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m'_4} \right) \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial m'_2} \right) \\
& + Cov(m'_3, m'_4) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m'_3} \right) \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial m'_4} \right) + Cov(m'_3, m'_4) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m'_4} \right) \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial m'_3} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Cov(\phi_1, \phi_2) = & Var(m'_1) \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial m'_1} \right) \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial m'_1} \right) + Cov(m'_1, m'_2) \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial m'_1} \right) \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial m'_2} \right) \\
& + Cov(m'_1, m'_2) \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial m'_2} \right) \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial m'_1} \right) + Var(m'_2) \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial m'_2} \right) \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial m'_2} \right) \\
& + Cov(m'_1, m'_3) \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial m'_1} \right) \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial m'_3} \right) + Cov(m'_1, m'_3) \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial m'_3} \right) \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial m'_1} \right) \\
& + Var(m'_3) \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial m'_3} \right) \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial m'_3} \right) + Cov(m'_1, m'_4) \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial m'_1} \right) \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial m'_4} \right) \\
& + Cov(m'_1, m'_4) \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial m'_4} \right) \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial m'_1} \right) + Var(m'_4) \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial m'_4} \right) \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial m'_4} \right) \\
& + Cov(m'_2, m'_3) \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial m'_2} \right) \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial m'_3} \right) + Cov(m'_2, m'_3) \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial m'_3} \right) \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial m'_2} \right) \\
& + Cov(m'_2, m'_4) \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial m'_2} \right) \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial m'_4} \right) + Cov(m'_2, m'_4) \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial m'_4} \right) \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial m'_2} \right) \\
& + Cov(m'_3, m'_4) \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial m'_3} \right) \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial m'_4} \right) + Cov(m'_3, m'_4) \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial m'_4} \right) \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial m'_3} \right)
\end{aligned}$$

Şans değişkeninin ortalamasının sıfıra çekilmesiyle elde edilen tahminleyici vektörü

$$\boldsymbol{\theta}_y = \begin{bmatrix} \alpha \\ \varphi_0 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$$

şeklinde ortaya çıkmaktadır. Yapılan dönüşüm ile $\alpha = \varphi_1$ olduğu için, bu iki bileşenden φ_1 tahminleyici vektörüne dahil edilmemiştir. Tahminleyici vektörünün boyutu 3×1 olduğu için varyans-kovaryans matrisinin boyutu 3×3 'tür.

$$\Sigma_y = \begin{bmatrix} Var(\alpha) & Cov(\alpha, \varphi_0) & Cov(\alpha, \varphi_1) \\ Cov(\alpha, \varphi_0) & Var(\varphi_0) & Cov(\varphi_0, \varphi_1) \\ Cov(\alpha, \varphi_1) & Cov(\varphi_0, \varphi_1) & Var(\varphi_1) \end{bmatrix} \quad (71)$$

Varyans-kovaryans matrisinin bileşenleri, bir önceki tahminleyici vektöründe olduğu gibi H -teoreminden ve sonucundan yararlanılarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} Var(\alpha) = & Var(m_2) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m_2} \right)^2 + Var(m_3) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m_3} \right)^2 + Var(m_4) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m_4} \right)^2 \\ & + 2Cov(m_2, m_3) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m_2} \right) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m_3} \right) + 2Cov(m_2, m_4) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m_2} \right) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m_4} \right) \\ & + 2Cov(m_3, m_4) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m_3} \right) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m_4} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(\varphi_0) = & Var(m_2) \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial m_2} \right)^2 + Var(m_3) \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial m_3} \right)^2 + Var(m_4) \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial m_4} \right)^2 \\ & + 2Cov(m_2, m_3) \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial m_2} \right) \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial m_3} \right) + 2Cov(m_2, m_4) \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial m_2} \right) \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial m_4} \right) \\ & + 2Cov(m_3, m_4) \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial m_3} \right) \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial m_4} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(\varphi_2) = & Var(m_2) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial m_2} \right)^2 + Var(m_3) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial m_3} \right)^2 + Var(m_4) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial m_4} \right)^2 \\ & + 2Cov(m_2, m_3) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial m_2} \right) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial m_3} \right) + 2Cov(m_2, m_4) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial m_2} \right) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial m_4} \right) \\ & + 2Cov(m_3, m_4) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial m_3} \right) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial m_4} \right) \end{aligned}$$

Eşitlik (71) ile verilen varyans-kovaryans matrisinin köşegen dışı elemanları ise Bölüm 3.3'te verilen sonuç göz önüne alınarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} Cov(\alpha, \varphi_0) = & Var(m_2) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m_2} \right) \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial m_2} \right) + Var(m_3) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m_3} \right) \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial m_3} \right) \\ & + Var(m_4) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m_4} \right) \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial m_4} \right) + Cov(m_2, m_3) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m_2} \right) \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial m_3} \right) \\ & + Cov(m_2, m_3) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m_3} \right) \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial m_2} \right) + Cov(m_2, m_4) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m_2} \right) \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial m_4} \right) \\ & + Cov(m_2, m_4) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m_4} \right) \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial m_2} \right) + Cov(m_3, m_4) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m_3} \right) \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial m_4} \right) \\ & + Cov(m_3, m_4) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m_4} \right) \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial m_3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Cov(\alpha, \varphi_2) = & Var(m_2) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m_2} \right) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial m_2} \right) + Var(m_3) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m_3} \right) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial m_3} \right) \\
& + Var(m_4) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m_4} \right) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial m_4} \right) + Cov(m_2, m_3) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m_2} \right) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial m_3} \right) \\
& + Cov(m_2, m_3) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m_3} \right) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial m_2} \right) + Cov(m_2, m_4) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m_2} \right) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial m_4} \right) \\
& + Cov(m_2, m_4) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m_4} \right) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial m_2} \right) + Cov(m_3, m_4) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m_3} \right) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial m_4} \right) \\
& + Cov(m_3, m_4) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m_4} \right) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial m_3} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Cov(\varphi_1, \varphi_2) = & Var(m_2) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial m_2} \right) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial m_2} \right) + Var(m_3) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial m_3} \right) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial m_3} \right) \\
& + Var(m_4) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial m_4} \right) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial m_4} \right) + Cov(m_2, m_3) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial m_2} \right) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial m_3} \right) \\
& + Cov(m_2, m_3) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial m_3} \right) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial m_2} \right) + Cov(m_2, m_4) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial m_2} \right) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial m_4} \right) \\
& + Cov(m_2, m_4) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial m_4} \right) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial m_2} \right) + Cov(m_3, m_4) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial m_3} \right) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial m_4} \right) \\
& + Cov(m_3, m_4) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial m_4} \right) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial m_3} \right)
\end{aligned}$$

Eşitlik (57) ile verilen tahminleyicinin varyans-kovaryans matrisi aşağıdaki gibidir:

$$\Sigma_u = \begin{bmatrix} Var(\lambda_0) & Cov(\lambda_0, \lambda_1) & Cov(\lambda_0, \lambda_2) \\ Cov(\lambda_0, \lambda_1) & Var(\lambda_1) & Cov(\lambda_1, \lambda_2) \\ Cov(\lambda_0, \lambda_2) & Cov(\lambda_1, \lambda_2) & Var(\lambda_2) \end{bmatrix} \quad (72)$$

Varyans-kovaryans matrisinin bileşenleri, bir önceki tahminleyici vektöründe olduğu gibi H -teoreminden ve sonucundan yararlanılarak aşağıdaki gibi elde edilir.

Eşitlik (72) ile verilen varyans-kovaryans matrisinin köşegen dışı elemanları ise Bölüm 3.3'te verilen sonuç göz önüne alınarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
Cov(\lambda_0, \lambda_1) = & Var(m'_1) \left(\frac{\partial \lambda_0}{\partial m'_1} \right) \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial m'_1} \right) + Cov(m'_1, m'_2) \left(\frac{\partial \lambda_0}{\partial m'_1} \right) \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial m'_2} \right) \\
& + Cov(m'_1, m'_2) \left(\frac{\partial \lambda_0}{\partial m'_2} \right) \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial m'_1} \right) + Var(m'_2) \left(\frac{\partial \lambda_0}{\partial m'_2} \right) \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial m'_2} \right) \\
& + Cov(m'_1, m'_3) \left(\frac{\partial \lambda_0}{\partial m'_1} \right) \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial m'_3} \right) + Cov(m'_1, m'_3) \left(\frac{\partial \lambda_0}{\partial m'_3} \right) \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial m'_1} \right) \\
& + Var(m'_3) \left(\frac{\partial \lambda_0}{\partial m'_3} \right) \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial m'_3} \right) + Cov(m'_1, m'_4) \left(\frac{\partial \lambda_0}{\partial m'_1} \right) \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial m'_4} \right) \\
& + Cov(m'_1, m'_4) \left(\frac{\partial \lambda_0}{\partial m'_4} \right) \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial m'_1} \right) + Var(m'_4) \left(\frac{\partial \lambda_0}{\partial m'_4} \right) \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial m'_4} \right) \\
& + Cov(m'_2, m'_3) \left(\frac{\partial \lambda_0}{\partial m'_2} \right) \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial m'_3} \right) + Cov(m'_2, m'_3) \left(\frac{\partial \lambda_0}{\partial m'_3} \right) \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial m'_2} \right) \\
& + Cov(m'_2, m'_4) \left(\frac{\partial \lambda_0}{\partial m'_2} \right) \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial m'_4} \right) + Cov(m'_2, m'_4) \left(\frac{\partial \lambda_0}{\partial m'_4} \right) \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial m'_2} \right) \\
& + Cov(m'_3, m'_4) \left(\frac{\partial \lambda_0}{\partial m'_3} \right) \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial m'_4} \right) + Cov(m'_3, m'_4) \left(\frac{\partial \lambda_0}{\partial m'_4} \right) \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial m'_3} \right)
\end{aligned}$$

Böylelikle Bölüm 3.3.'te tanıtılan Cramer'in H -Teoremi ve bu teoremden yararlanılarak oluşturulan sonuç kullanılarak, her üç tahminleyicinin varyans-kovaryans matrisleri teorik olarak elde edilmiştir.



BEŞİNCİ BÖLÜM

BENZETİM UYGULAMASI

5.1 ANAKÜTLELER

Önceki bölümlerde tanıtılan Pearson diferansiyel denkleminin alternatif moment tahminleyicilerinin belirlenen performans kriterleri altındaki davranışlarını incelemek amacıyla Pearson dağılış ailesi içerisinde 3 farklı dağılış seçilmiş ve bu dağılışlardan $N=1000$ adet veri Matlab paket programı içerisinde yer alan “pearsrnd” komutu kullanılarak türetilmiştir. Seçilen dağılışlar ana tipler olan Tip I, Tip IV ve Tip VI dağılışlarıdır. Belirlenen her üç dağılış da B-biçimli olabilmektedir. Diferansiyel denklemin kökleri r_1 ve r_2 olmak üzere bu dağılışlara ait olasılık yoğunluk fonksiyonları ve şans değişkeninin tanım aralıkları şu şekildedir:

Tip I dağılımı:

$$f(x) = K (r_1 - x)^{m_1} (r_2 + x)^{m_2}, \quad -r_2 < x < r_1$$

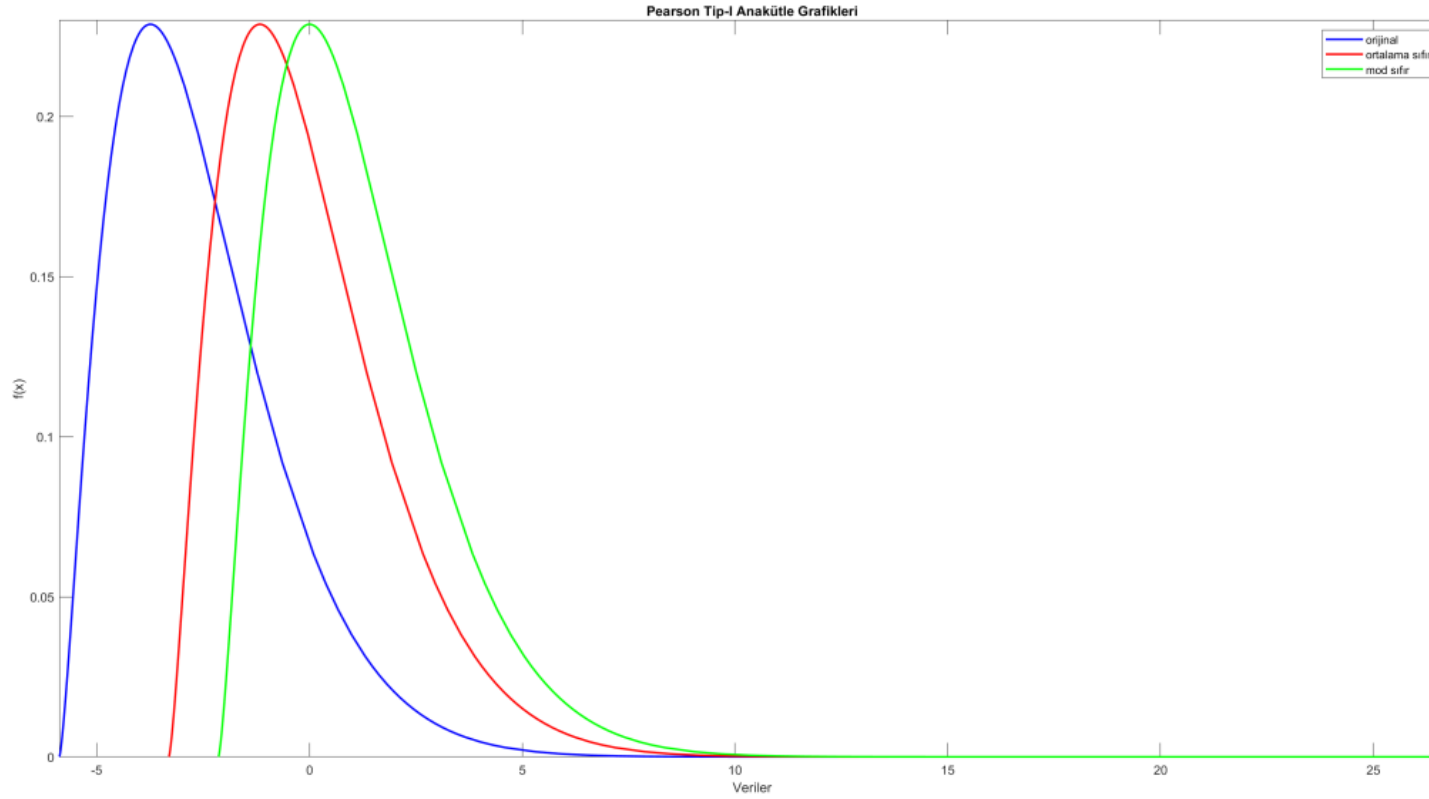
Tip IV dağılımı:

$$f(x) = K \left[(x+r)^2 + s^2 \right]^m \exp(v \cdot \arctan \theta), \quad -\infty < x < \infty$$

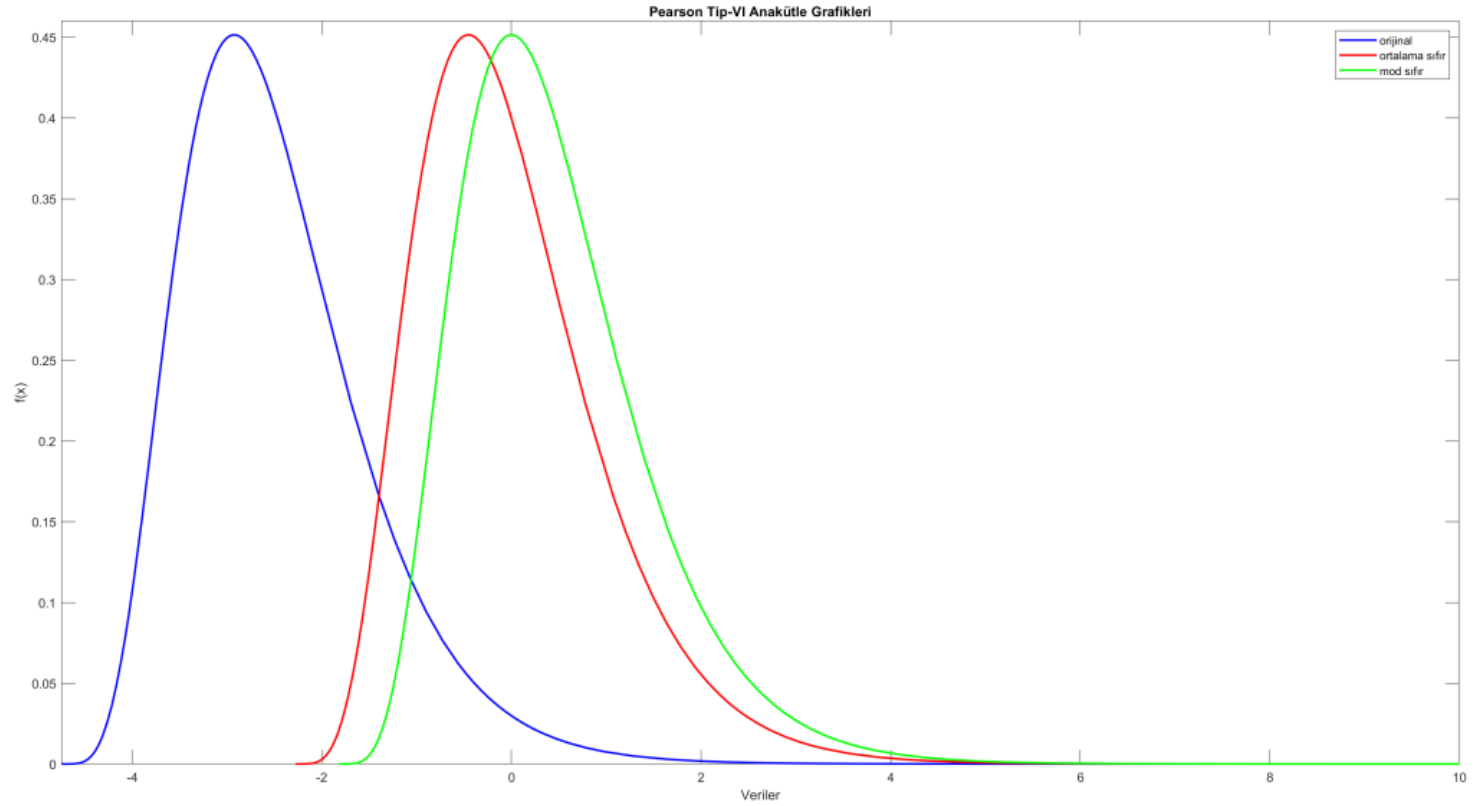
Tip VI dağılımı:

$$f(x) = K (x - r_1)^{m_1} (x - r_2)^{m_2}, \quad -r_2 < x < \infty$$

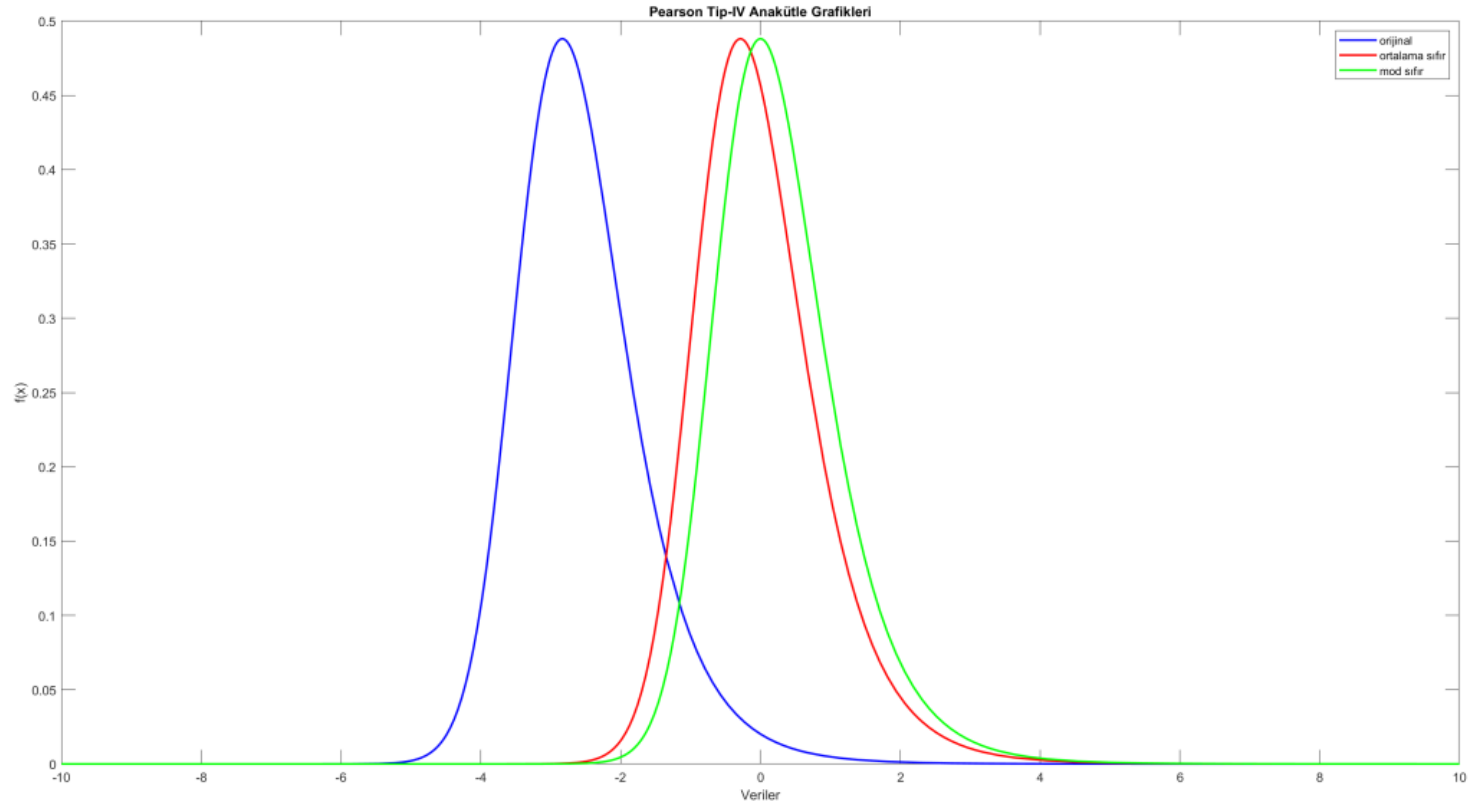
Şekil 14: Tip I Dönüşüm Yapılmayan Anakütle (Mavi), Ortalaması Sıfırda Olan Anakütle (Kırmızı), Modu Sıfırda Olan Anakütle (Yeşil).



Şekil 15: Tip VI Dönüşüm Yapılmayan Anakütle (Mavi), Ortalaması Sıfırda Olan Anakütle (Kırmızı), Modu Sıfırda Olan Anakütle (Yeşil).



Şekil 16: Tip IV Dönüşüm Yapılmayan Anakütle (Mavi), Ortalaması Sıfırda Olan Anakütle (Kırmızı), Modu Sıfırda Olan Anakütle (Yeşil).



5.2 ANAKÜTLELERDEN TÜRETİLEN ÖRNEKLER

Belirlenen bu dağılışların büyük-küçük örnek performanslarını kıyaslamak amacıyla her bir $N=1000$ elemanlı anakütleden iadeli olarak 10000 adet örnek $n=50$, $n=100$, $n=200$ ve $n=800$ hacimler için seçilmiştir. Böylelikle 50×10000 , 100×10000 , 200×10000 ve 800×10000 boyutlu matrisler ile çalışmıştır.

Tablo 1: Anakütlelere Ait Merkezi Momentler

	Tip I	Tip VI	Tip IV
μ_2	3.8241	0.9868	0.8739
μ_3	7.3677	0.9746	0.7640
μ_4	60.6332	4.5307	4.1369

Kullanılan anakütlelerin merkezi moment parametre değerleri Tablo 1’de verilmiştir.

Tablo 2: Anakütlelere Ait Orijine Göre Momentler

	Tip I	Tip VI	Tip IV
μ'_1	-2.5742	-2.4702	-2.5479
μ'_2	10.4506	7.0884	7.3657
μ'_3	-39.2223	-21.4099	-22.4562
μ'_4	180.7231	68.2570	72.5329

Kullanılan anakütlelerin orijine göre moment parametre değerleri Tablo 2’de verilmiştir.

Tablo 3: Örnek merkezi momentleri

$n=50$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$E(m_2)$	3.6029	0.9704	0.8545
$E(m_3)$	6.1534	0.9212	0.7200
$E(m_4)$	52.5905	4.2874	3.8939
$n=100$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$E(m_2)$	3.7577	0.9791	0.8634
$E(m_3)$	6.9811	0.9341	0.7386
$E(m_4)$	58.0568	4.3078	4.0080
$n=200$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$E(m_2)$	3.8031	0.9832	0.8693
$E(m_3)$	7.2678	0.9439	0.7517
$E(m_4)$	59.9638	4.3177	4.0641
$n=800$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$E(m_2)$	3.8225	0.9887	0.8727
$E(m_3)$	7.3607	0.9719	0.7600
$E(m_4)$	60.5889	4.4839	4.1228

Anakütlelerden iadeli olarak seçilen 10000 örneğe ait örnek merkezi momentlerinin beklenen değerleri Tablo 3’te verilmiştir. Bölüm 3.2’de eşitlik (46) ile verilen beklenen değer yapısı kullanılarak elde edilen bu değerler Tablo 1’de verilen anakütle merkezi momentleri ile kıyaslandığında, $n = 200$ örnek hacminden itibaren örnek momentlerinin anakütle moment değerine oldukça yaklaştığı görülmektedir. Örnek momentlerinin sapma değerleri, tüm dağılımlar için benzerdir.

Tablo 4: Örnek momentleri

$n=50$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$E(m'_1)$	-2.5656	-2.4709	-2.5465
$E(m'_2)$	10.2603	7.0962	7.3571
$E(m'_3)$	-38.6098	-21.4495	-22.4087
$E(m'_4)$	176.6533	68.4066	72.3166
$n=100$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$E(m'_1)$	-2.5730	-2.4722	-2.5474
$E(m'_2)$	10.3997	7.1020	7.3640
$E(m'_3)$	-39.0675	-21.4831	-22.4475
$E(m'_4)$	179.5919	68.5195	72.4917
$n=200$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$E(m'_1)$	-2.5725	-2.4702	-2.5471
$E(m'_2)$	10.4452	7.0898	7.3619
$E(m'_3)$	-39.2102	-21.4320	-22.4420
$E(m'_4)$	180.6453	68.2981	72.4825
$n=800$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$E(m'_1)$	-2.5742	-2.4692	-2.5481
$E(m'_2)$	10.4522	7.0879	7.3653
$E(m'_3)$	-39.2269	-21.4192	-22.4550
$E(m'_4)$	180.7753	68.2861	72.5218

Anakütlelerden iadeli olarak seçilen 10000 örneğe ait örnek orijine göre momentlerin beklenen değerleri Tablo 4'te verilmiştir. Eşitlik (45) ile verilen orijine göre örnek momentlerinin beklenen değer formülünden yararlanılarak elde edilen bu değerler Tablo 2'de verilen anakütle merkezi momentleri ile kıyaslandığında, merkezi örnek momentlerinde olduğu gibi $n = 200$ örnek hacminden itibaren örnek

momentlerinin anakütle moment değerine oldukça yaklaştığı görülmektedir. Benzer şekilde moment tahminlerine ait sapma değerleri tüm dağılımlarda aynı yapıdadır.

Tablo 5: Örnek Merkezi Momentlerin Varyansları

$n=50$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$\text{Var}(m_2)$	0.7922	0.0669	0.0633
$\text{Var}(m_3)$	18.8420	0.6419	0.5824
$\text{Var}(m_4)$	1269.8	16.2057	13.1265
$n=100$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$\text{Var}(m_2)$	0.4394	0.0335	0.0326
$\text{Var}(m_3)$	10.7664	0.3108	0.3081
$\text{Var}(m_4)$	738.3362	7.7418	7.0684
$n=200$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$\text{Var}(m_2)$	0.2275	0.0168	0.0165
$\text{Var}(m_3)$	5.6660	0.1498	0.1567
$\text{Var}(m_4)$	391.9696	3.6291	3.6128
$n=800$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$\text{Var}(m_2)$	0.0575	0.0044	0.0042
$\text{Var}(m_3)$	1.4363	0.0420	0.0404
$\text{Var}(m_4)$	99.5721	1.0575	0.9391

Tablo 5’te örnek merkezi momentlerin varyansları verilmiştir. Bölüm 3.2’de eşitlik (48) ile verilen varyans formülü kullanılarak elde edilen sonuçlara göre, örnek hacmi ile varyans değeri arasında doğrusal bir ilişki olduğu görülmüştür. Örnek hacmi iki katına çıktığında, varyans değeri yarıya inmektedir. Ayrıca tüm moment tahminleyicilerinin değişkenliğinin en yüksek olduğu dağılımın Tip I, en düşük olduğu dağılımın da Tip IV dağılımı olduğu görülmektedir. Özellikle yüksek dereceden örnek momentleri üzerinde bu fark oldukça fazladır.

Tablo 6: Örnek Momentlerin Varyansları

$n=50$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$Var(m'_1)$	0.0736	0.0198	0.0174
$Var(m'_2)$	1.4276	0.3610	0.3638
$Var(m'_3)$	43.1330	5.9854	6.9250
$Var(m'_4)$	1038.5	90.3959	123.0671
$n=100$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$Var(m'_1)$	0.0378	0.0099	0.0087
$Var(m'_2)$	0.7144	0.1808	0.1826
$Var(m'_3)$	21.7584	2.9983	3.4779
$Var(m'_4)$	518.5276	45.3807	61.8428
$n=200$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$Var(m'_1)$	0.0191	0.0049	0.0044
$Var(m'_2)$	0.3577	0.0902	0.0914
$Var(m'_3)$	10.9425	1.4932	1.7415
$Var(m'_4)$	260.2137	22.5909	30.9869
$n=800$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$Var(m'_1)$	0.0048	0.0012	0.0011
$Var(m'_2)$	0.0894	0.0226	0.0228
$Var(m'_3)$	2.7363	0.3743	0.4351
$Var(m'_4)$	65.0013	5.6605	7.7437

Tablo 6’da örnek orijine göre momentlerin varyansları verilmiştir. Eşitlik (47) ile elde edilen sonuçlara göre, ortalamaya göre örnek momentlerinde olduğu gibi, örnek hacmi ile varyans değeri arasında doğrusal bir ilişki olduğu görülmüştür. Benzer şekilde, örnek hacmi iki katına çıktığında varyans değeri yarıya inmektedir. Örnek momentleri dağılım bazlı incelendiğinde, varyans değerlerinin en düşük

olduğu dağılım Tip IV dağılımıdır. Örnek momentinin derecesi arttıkça, varyansların dağılımlar altındaki görüntüsü ($\sigma^2(F)$) arasındaki fark da artmaktadır.

Tablo 7: Örnek Merkezi Momentlerin Korelasyonları

n=50	Tip I	Tip VI	Tip IV
Corr(m_2, m_3)	0.8177	0.8243	0.8162
Corr(m_2, m_4)	0.8544	0.8091	0.8468
Corr(m_3, m_4)	0.9754	0.9756	0.9671
n=100	Tip I	Tip VI	Tip IV
Corr(m_2, m_3)	0.8253	0.8232	0.8183
Corr(m_2, m_4)	0.8571	0.8071	0.8472
Corr(m_3, m_4)	0.9784	0.9748	0.9679
n=200	Tip I	Tip VI	Tip IV
Corr(m_2, m_3)	0.8285	0.8247	0.8191
Corr(m_2, m_4)	0.8577	0.8103	0.8466
Corr(m_3, m_4)	0.9796	0.9744	0.9683
n=800	Tip I	Tip VI	Tip IV
Corr(m_2, m_3)	0.8294	0.8310	0.8210
Corr(m_2, m_4)	0.8579	0.8127	0.8479
Corr(m_3, m_4)	0.9800	0.9762	0.9691

Tablo 7’de örnek merkezi momentler arasındaki korelasyon değerleri verilmiştir. Bölüm 3.2’de eşitlik (50) ile verilen örnek merkezi momentler arasındaki kovaryans yapısı kullanılarak elde edilen sonuçlara göre, örnek hacminin korelasyon değeri üzerinde bir etkisi olmadığı söylenebilir. İki örnek merkezi moment arasındaki korelasyon değeri tüm örnek hacimlerinde yaklaşık aynıdır. Dağılımın örnek merkezi momentleri arasındaki korelasyon değeri üzerinde etkisinin olmadığı söylenebilir. Tüm dağılım ve örnek hacimlerinde doğrusal ilişkinin yönü ve derecesi aynıdır. Örnek momentlerinin dereceleri arttıkça, aralarındaki doğrusal ilişkinin derecesi de artmaktadır.

Tablo 8: Örnek Momentlerin Korelasyonları

n=50	Tip I	Tip VI	Tip IV
$Corr(m'_1, m'_2)$	-0.7583	-0.9259	-0.9222
$Corr(m'_1, m'_3)$	0.8712	0.8947	0.8776
$Corr(m'_1, m'_4)$	-0.6585	-0.8283	-0.8002
$Corr(m'_2, m'_3)$	-0.8789	-0.9829	-0.9819
$Corr(m'_2, m'_4)$	0.9531	0.9590	0.9456
$Corr(m'_3, m'_4)$	-0.8779	-0.9879	-0.9865
n=100	Tip I	Tip VI	Tip IV
$Corr(m'_1, m'_2)$	-0.7491	-0.9277	-0.9228
$Corr(m'_1, m'_3)$	0.8720	0.8943	0.8777
$Corr(m'_1, m'_4)$	-0.6506	-0.8294	-0.8008
$Corr(m'_2, m'_3)$	-0.8720	-0.9836	-0.9820
$Corr(m'_2, m'_4)$	0.9531	0.8071	0.9458
$Corr(m'_3, m'_4)$	-0.8705	-0.9885	-0.9867
n=200	Tip I	Tip VI	Tip IV
$Corr(m'_1, m'_2)$	-0.7457	-0.9284	-0.9263
$Corr(m'_1, m'_3)$	0.8717	0.8941	0.8779
$Corr(m'_1, m'_4)$	-0.6479	-0.8299	-0.8010
$Corr(m'_2, m'_3)$	-0.8720	-0.9840	-0.9819
$Corr(m'_2, m'_4)$	0.9531	0.9590	0.9457
$Corr(m'_3, m'_4)$	-0.8689	-0.9887	-0.9866
n=800	Tip I	Tip VI	Tip IV
$Corr(m'_1, m'_2)$	-0.7448	-0.9264	-0.9235
$Corr(m'_1, m'_3)$	0.8720	0.8939	0.8781
$Corr(m'_1, m'_4)$	-0.6472	-0.8285	-0.8014

$Corr(m'_2, m'_3)$	-0.8693	-0.9835	-0.9820
$Corr(m'_2, m'_4)$	0.9532	0.9591	0.9457
$Corr(m'_3, m'_4)$	-0.8679	-0.9883	-0.9867

Tablo 8’de örnek orijine göre momentler arasındaki korelasyon değerleri verilmiştir. Eşitlik (49) kullanılarak elde edilen sonuçlara göre merkezi momentlere benzer olarak, örnek hacminin korelasyon değeri üzerinde bir etkisinin olmadığı söylenebilir. İki örnek momentleri arasındaki korelasyon değeri tüm örnek hacimlerinde yaklaşık aynıdır. Örnek merkezi momentlerinden farklı olarak, orijine göre örnek momentleri arasındaki doğrusal ilişkide dağılımın bir etkisi olduğu söylenebilir. Genel olarak Tip I dağılımında örnek momentleri arasındaki korelasyon daha düşük iken, Tip IV ve Tip VI dağılımlarında daha yüksektir.

5.3. ÖRNEKLERDEN ELDE EDİLEN BULGULAR

Bölüm 5.1’de tanımlanan anakütlelerden elde edilen ve Bölüm 5.2’de bazı istatistikleri verilen örnekler kullanılarak, Bölüm 2’de tanıtılan dayanıklılık ölçüleri üzerinden değerlendirmeler bu kısımda yapılmıştır.

Tablo 9: Dönüşüm Yapılmayan Tahminleyicinin Bileşenlerinin Varyansları

$n=50$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$Var(\hat{\alpha})$	0.3582	0.0828	0.0507
$Var(\hat{\phi}_0)$	6.3323	0.6781	0.5182
$Var(\hat{\phi}_1)$	0.3518	0.4445	0.1142
$Var(\hat{\phi}_2)$	0.0141	0.0225	0.0034
$n=100$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$Var(\hat{\alpha})$	0.2157	0.0432	0.0251
$Var(\hat{\phi}_0)$	3.9784	0.3364	0.2574
$Var(\hat{\phi}_1)$	0.1787	0.2219	0.0579

$\text{Var}(\hat{\phi}_2)$	0.0081	0.0116	0.0017
$n=200$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$\text{Var}(\hat{\alpha})$	0.1165	0.0218	0.0125
$\text{Var}(\hat{\phi}_0)$	2.1902	0.1671	0.1287
$\text{Var}(\hat{\phi}_1)$	0.0900	0.1073	0.0296
$\text{Var}(\hat{\phi}_2)$	0.0043	0.0057	0.0008
$n=800$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$\text{Var}(\hat{\alpha})$	0.0292	0.0053	0.0031
$\text{Var}(\hat{\phi}_0)$	0.5487	0.0421	0.0320
$\text{Var}(\hat{\phi}_1)$	0.0223	0.0260	0.0074
$\text{Var}(\hat{\phi}_2)$	0.0011	0.0013	0.0002

Tablo 9’da şans değişkeni üzerine herhangi bir dönüşüm tanımlanmayan ve Eşitlik (55) ile tanımlanan parametre tahmin vektörünün bileşenlerinin bireysel varyansları verilmiştir. Bu varyansların her biri, Eşitlik (52)’den yararlanılarak elde edilmiştir. Bu bileşenler momentlerin doğrusal fonksiyonu olmamalarına rağmen tıpkı örnek merkezi ve orijine göre momentlerde olduğu gibi, örnek hacmi ile varyans değerleri arasında negatif yönlü doğrusal bir ilişki mevcuttur. Tüm örnek hacimleri incelendiğinde, dönüşüm yapılmayan tahminleyicinin tüm bileşenlerinin varyansı Tip IV dağılımında en küçüktür. Tüm dağılımlar ve tüm örnek hacimleri için bileşenler içerisinde değişkenliği en yüksek olan $\hat{\phi}_0$ iken, en düşük olan ise $\hat{\phi}_2$ ‘dir.

Tablo 10: Ortalaması Sıfırda Olan Tahminleyicinin Bileşenlerinin Varyansları

$n=50$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$\text{Var}(\hat{\alpha})$	0.2929	0.0679	0.0516
$\text{Var}(\hat{\phi}_0)$	3.0491	0.2202	0.0649
$\text{Var}(\hat{\phi}_2)$	0.0137	0.0214	0.0036
$n=100$	Tip I	Tip VI	Tip IV

$\text{Var}(\hat{\alpha})$	0.1961	0.0367	0.0265
$\text{Var}(\hat{\phi}_0)$	2.0073	0.1225	0.0331
$\text{Var}(\hat{\phi}_2)$	0.0079	0.0116	0.0018
$n=200$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$\text{Var}(\hat{\alpha})$	0.1076	0.0196	0.0135
$\text{Var}(\hat{\phi}_0)$	1.0888	0.0632	0.0171
$\text{Var}(\hat{\phi}_2)$	0.0041	0.0057	0.0008
$n=800$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$\text{Var}(\hat{\alpha})$	0.0278	0.0048	0.0034
$\text{Var}(\hat{\phi}_0)$	0.2823	0.0148	0.0043
$\text{Var}(\hat{\phi}_2)$	0.0011	0.0013	0.0002

Tablo 10’da şans değişkeninin ortalamasının sıfıra çekilmesi ve Eşitlik (56) ile tanımlanan parametre tahmin vektörünün bileşenlerinin bireysel varyansları verilmiştir. Varyans yapıları, Eşitlik (52) ile verilen ifade ile elde edilmiştir. Bu bileşenler dönüşüm yapılmayan tahminleyicide olduğu gibi, momentlerin doğrusal fonksiyonu olmamalarına rağmen örnek hacmi ile varyans değerleri arasında negatif yönlü doğrusal bir ilişki mevcuttur. Elde edilen sonuçlara göre, tahminleyicinin tüm bileşenleri için değişkenliğin en az olduğu dağılım Tip IV dağılımıdır. Tahminleyici içerisindeki fonksiyonlar bireysel olarak ele alındığında, tüm dağılımlar ve tüm örnek hacimlerinde varyansı en yüksek olanı $\hat{\phi}_0$, en düşük olanı ise $\hat{\phi}_2$ ’dir.

Tablo 11: Modu Sıfırda Olan Tahminleyicinin Bileşenlerinin Varyansları

$n=50$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$\text{Var}(\hat{\lambda}_0)$	2.3626	20.4056	29.7875
$\text{Var}(\hat{\lambda}_1)$	0.5206	148.3669	0.0136
$\text{Var}(\hat{\lambda}_2)$	0.0415	0.0000007	0.00004
$n=100$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$\text{Var}(\hat{\lambda}_0)$	0.9525	6.6615	0.0538

$\text{Var}(\hat{\lambda}_1)$	0.2353	1.2813	0.0116
$\text{Var}(\hat{\lambda}_2)$	0.0170	0.8928	0.0103
$n=200$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$\text{Var}(\hat{\lambda}_0)$	0.4902	0.0330	0.0214
$\text{Var}(\hat{\lambda}_1)$	0.0778	0.0184	0.0063
$\text{Var}(\hat{\lambda}_2)$	0.0068	0.0078	0.0051
$n=800$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$\text{Var}(\hat{\lambda}_0)$	0.0917	0.0070	0.0049
$\text{Var}(\hat{\lambda}_1)$	0.0196	0.0035	0.0014
$\text{Var}(\hat{\lambda}_2)$	0.0015	0.0016	0.0012

Tablo 11’de şans değişkeninin modunun sıfıra çekilmesi ve Eşitlik (57) ile tanımlanan parametre tahmin vektörünün bileşenlerinin bireysel varyansları verilmiştir. Bu bileşenler dönüşüm yapılmayan tahminleyicide olduğu gibi, momentlerin doğrusal fonksiyonu olmamalarına rağmen örnek hacmi ile varyans değerleri arasında negatif yönlü doğrusal bir ilişki mevcuttur. Diğer iki tahminleyicide olduğu gibi, modu sıfırda olan tahminleyicinin bileşenlerinin en düşük varyans değeri Tip IV dağılımda ortaya çıkmaktadır. Benzer şekilde tahminleyici içerisindeki fonksiyonlar diğer iki tahminleyicide olduğu gibi bireysel olarak ele alındığında, $n = 50$ örnek haricindeki tüm örnek hacimlerinde ve dağılımlarda değişkenliği en az olan $\hat{\lambda}_2$ iken, en yüksek olan $\hat{\lambda}_0$ ’dır. Tip VI dağılımının küçük örnek hacimlerinde ($n = 50, n = 100$) ve Tip IV dağılımının küçük örnek hacminde ($n = 50$) bu tahminleyicinin bileşenlerine ait varyans değerleri, diğer dağılımlar ve örnek hacimleriyle kıyaslandığında oldukça fazladır. Bu nedenle modu sıfırda olan tahminleyicinin, varyans kriteri göz önüne alındığında belirtilen örnek hacmi ve dağılımlarda tercih edilmemesi daha uygun olabilir.

Tablo 12: Ortalaması Sıfırda Olan Tahminleyicinin Korelasyonları

$n=50$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$Corr(\hat{\alpha}, \hat{\phi}_0)$	0.7557	0.7126	0.6530
$Corr(\hat{\alpha}, \hat{\phi}_2)$	-0.4862	-0.4123	-0.1756
$Corr(\hat{\phi}_0, \hat{\phi}_2)$	-0.8447	-0.8563	-0.6847
$n=100$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$Corr(\hat{\alpha}, \hat{\phi}_0)$	0.7975	0.7379	0.6563
$Corr(\hat{\alpha}, \hat{\phi}_2)$	-0.5735	-0.4607	-0.1760
$Corr(\hat{\phi}_0, \hat{\phi}_2)$	-0.8622	-0.8650	-0.6825
$n=200$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$Corr(\hat{\alpha}, \hat{\phi}_0)$	0.8089	0.7542	0.6610
$Corr(\hat{\alpha}, \hat{\phi}_2)$	-0.5960	-0.4846	-0.1878
$Corr(\hat{\phi}_0, \hat{\phi}_2)$	-0.8669	-0.8645	-0.6878
$n=800$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$Corr(\hat{\alpha}, \hat{\phi}_0)$	0.8127	0.7431	0.6640
$Corr(\hat{\alpha}, \hat{\phi}_2)$	-0.6037	-0.4494	-0.1864
$Corr(\hat{\phi}_0, \hat{\phi}_2)$	-0.8690	-0.8553	-0.6847

Tablo 12’de şans değişkeninin ortalamasının sıfıra çekilmesiyle elde edilen tahminleyicinin bileşenleri arasındaki korelasyon değerleri verilmiştir. Tablo içerisindeki değerler, Bölüm 3.3’te verilen sonuçtan elde edilen kovaryans değerlerinin Tablo 10’daki varyansların kareköklerinin çarpımlarına oranlanmasıyla elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar incelendiğinde, momentlerin doğrusal olmayan fonksiyonu şeklinde ortaya çıkan bu bileşenler arasındaki korelasyon değerlerinin örnek hacminden bağımsız olduğu görülmektedir. İncelenen bu tahminleyicinin bileşenleri arasındaki doğrusal ilişki, tüm dağılımlar ve tüm örnek hacimleri için Tip I ve Tip VI dağılımları için benzer yapıdadır. Elde edilen sonuçlara göre $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\phi}_0$

arasında pozitif yönlü ve güçlü bir ilişki, $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\phi}_1$ arasında negatif yönlü zayıf bir ilişki ve $\hat{\phi}_0$ ile $\hat{\phi}_1$ arasında negatif yönlü güçlü bir ilişki olduğu söylenebilir. Belirtilen ilişkilerin dereceleri dağılımlara bağlı olarak değişmektedir. Buna göre bileşenler arasında en kuvvetli ilişki Tip I dağılımında ortaya çıkarken, en zayıf ilişki Tip IV dağılımında ortaya çıkmaktadır.

Tablo 13: Dönüşüm Yapılmamış Tahminleyicinin Korelasyonları

n=50	Tip I	Tip VI	Tip IV
$Corr(\hat{\alpha}, \hat{\phi}_0)$	0.8295	0.6254	0.8391
$Corr(\hat{\alpha}, \hat{\phi}_1)$	0.4034	-0.1010	0.5090
$Corr(\hat{\alpha}, \hat{\phi}_2)$	-0.4343	-0.4168	-0.1048
$Corr(\hat{\phi}_0, \hat{\phi}_1)$	0.3421	0.5732	0.7473
$Corr(\hat{\phi}_0, \hat{\phi}_2)$	-0.5823	0.2375	0.1288
$Corr(\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2)$	0.5470	0.9300	0.7455
n=100	Tip I	Tip VI	Tip IV
$Corr(\hat{\alpha}, \hat{\phi}_0)$	0.8482	0.6276	0.8356
$Corr(\hat{\alpha}, \hat{\phi}_1)$	0.4082	-0.1338	0.4987
$Corr(\hat{\alpha}, \hat{\phi}_2)$	-0.5034	-0.4481	-0.1062
$Corr(\hat{\phi}_0, \hat{\phi}_1)$	0.3449	0.5422	0.7428
$Corr(\hat{\phi}_0, \hat{\phi}_2)$	-0.6442	0.1991	0.1326
$Corr(\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2)$	0.4774	0.9292	0.7526
n=200	Tip I	Tip VI	Tip IV
$Corr(\hat{\alpha}, \hat{\phi}_0)$	0.8545	0.6371	0.8332
$Corr(\hat{\alpha}, \hat{\phi}_1)$	0.4058	-0.1317	0.5000

$Corr(\hat{\alpha}, \hat{\phi}_2)$	-0.5310	-0.4523	-0.0932
$Corr(\hat{\phi}_0, \hat{\phi}_1)$	.03394	0.5312	0.7477
$Corr(\hat{\phi}_0, \hat{\phi}_2)$	-0.6701	0.1789	0.1518
$Corr(\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2)$	0.4522	0.9264	0.7605
$n=800$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$Corr(\hat{\alpha}, \hat{\phi}_0)$	0.8557	0.6458	0.8316
$Corr(\hat{\alpha}, \hat{\phi}_1)$	0.4135	-0.0961	0.4963
$Corr(\hat{\alpha}, \hat{\phi}_2)$	-0.5324	-0.4259	-0.1864
$Corr(\hat{\phi}_0, \hat{\phi}_1)$	0.3483	0.5512	0.7414
$Corr(\hat{\phi}_0, \hat{\phi}_2)$	-0.6710	0.1955	-0.0922
$Corr(\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2)$	0.4427	0.9237	0.7640

Tablo 13'te şans değişkeni üzerine herhangi bir dönüşüm yapılmayan tahminleyicinin bileşenleri arasındaki korelasyon değerleri verilmiştir. Bölüm 3.3'teki sonuçtan yararlanılarak elde edilen sonuçlar incelendiğinde, momentlerin doğrusal olmayan fonksiyonu şeklinde ortaya çıkan bu bileşenler arasındaki korelasyon değerlerinin örnek hacminden bağımsız olduğu görülmektedir. Bileşenler arasında en yüksek dereceden ilişkiye sahip olanlar $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\phi}_0$ iken en düşük dereceden ilişkili olanlar $\hat{\phi}_0$ ve $\hat{\phi}_1$ 'dir. Diğer tahminleyicilerden farklı olarak herhangi bir dönüşüm yapılmayan tahminleyicinin bileşenleri arasındaki korelasyonun yönü, dağılıma bağlı olarak değişebilmektedir. Örneğin, $\hat{\phi}_0$ ile $\hat{\phi}_2$ arasında Tip I dağılımında negatif yönlü iken Tip VI ve Tip IV dağılımlarında pozitif yönlüdür. Ayrıca bileşenler arasındaki doğrusal ilişkinin derecesi de dağılıma bağlı olarak değişebilmektedir. Genel olarak en yüksek dereceden ilişki Tip I dağılımında görülürken, en düşük dereceden ilişki Tip IV dağılımında görülmektedir.

Tablo 14: Modu Sıfırda Olan Tahminleyicinin Korelasyonları

$n=50$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$Corr(\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1)$	0.7402	-0.9955	0.7446
$Corr(\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_2)$	-0.8162	-0.9956	0.9719
$Corr(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2)$	-0.8856	1.0000	0.6038
$n=100$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$Corr(\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1)$	0.7394	0.9893	0.7776
$Corr(\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_2)$	-0.7959	-0.9934	-0.8997
$Corr(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2)$	-0.8817	-0.9972	-0.7404
$n=200$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$Corr(\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1)$	0.8228	0.7954	0.7239
$Corr(\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_2)$	-0.8528	-0.8680	-0.8673
$Corr(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2)$	-0.8675	-0.8492	-0.7200
$n=800$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$Corr(\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1)$	0.8033	0.8101	0.7337
$Corr(\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_2)$	-0.8199	-0.8733	-0.8655
$Corr(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2)$	-0.8686	-0.8312	-0.7156

Tablo 14’te şans değişkeninin modunun sıfıra çekilmesiyle elde edilen tahminleyicinin bileşenleri arasındaki korelasyon değerleri verilmiştir. Diğer tahminleyicilerde olduğu gibi, Bölüm 3.3’ten verilen sonuçtan yararlanılarak elde edilen sonuçlar incelendiğinde, momentlerin doğrusal olmayan fonksiyonu şeklinde ortaya çıkan bu bileşenler arasındaki korelasyon değerlerinin örnek hacminden bağımsız olduğu görülmektedir. Bileşenlerden $\hat{\lambda}_0$ ile $\hat{\lambda}_1$ arasında pozitif yönlü güçlü, $\hat{\lambda}_0$ ile $\hat{\lambda}_2$ ve $\hat{\lambda}_1$ ile $\hat{\lambda}_2$ arasında ise negatif yönlü ve kuvvetli bir doğrusal ilişkinin

mevcut olduğu tüm dağılımlar üzerinden görülebilmektedir. Özellikle Tip VI dağılımının küçük örnek hacimlerinde bu bileşenler arasında tam doğrusal ilişki olduğundan, modu sıfırda olan tahminleyicinin belirtilen dağılım ve örnek hacminde tercih edilmemesi daha uygun olabilir.

Tablo 15: Tahminleyicilerin Korelasyon Matrislerinin Determinantları

$n=50$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$\det \left \Sigma_{\hat{\theta}_x} \right $	0.0055	0.0006	0.0027
$\det \left \Sigma_{\hat{\theta}_y} \right $	0.0998	0.0922	0.2310
$\det \left \Sigma_{\hat{\theta}_u} \right $	0.0717	7.8201e-08	0.0103
$n=100$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$\det \left \Sigma_{\hat{\theta}_x} \right $	0.0048	0.0006	0.0027
$\det \left \Sigma_{\hat{\theta}_y} \right $	0.0804	0.0831	0.2302
$\det \left \Sigma_{\hat{\theta}_u} \right $	0.0802	0.00007	0.0737
$n=200$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$\det \left \Sigma_{\hat{\theta}_x} \right $	0.0045	0.0007	0.0026
$\det \left \Sigma_{\hat{\theta}_y} \right $	0.0749	0.0809	0.2255
$\det \left \Sigma_{\hat{\theta}_u} \right $	0.0606	0.0653	0.1095
$n=800$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$\det \left \Sigma_{\hat{\theta}_x} \right $	0.0045	0.0007	0.0026
$\det \left \Sigma_{\hat{\theta}_y} \right $	0.0726	0.0856	0.2250
$\det \left \Sigma_{\hat{\theta}_u} \right $	0.0722	0.0663	0.1094

Tablo 15'te her üç tipteki tahminleyicinin verilen örnek hacimlerindeki korelasyon matrislerinin determinantları verilmiştir. Tablo 12, Tablo 13 ve Tablo

14'te bileşenler arasında bireysel olarak incelenen korelasyon yapıları bu tabloda bütün olarak ele alınmıştır. Elde edilen sonuçlara göre, korelasyon matrisinin determinanı örnek hacminden bağımsızdır. Tip VI dağılımının $n = 50$ örnek hacmi haricindeki tüm dağılımlar ve tüm örnek hacimlerinde dönüşüm yapılmayan tahminleyiciden elde edilen determinant değeri diğerlerine göre daha düşüktür. Her üç tahminleyici için de korelasyon matrisinin determinantının en yüksek olduğu dağılım Tip IV dağılımıdır.

Tablo 16: Tip I Parametre Tahmin Vektörü Ve Örneklerle Ait Sapma Vektörlerinin Normları

n	$\hat{\theta}_x / \text{norm}(\theta_x - \hat{\theta}_x)$	$\hat{\theta}_y / \text{norm}(\theta_y - \hat{\theta}_y)$	$\hat{\theta}_u / \text{norm}(\theta_u - \hat{\theta}_u)$
50	$\begin{bmatrix} -3.8969 \\ -7.8696 \\ -0.0471 \\ 0.2489 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1.3320 \\ -6.1002 \\ -1.3320 \\ 0.2428 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3.3517 \\ -2.0882 \\ 0.2457 \end{bmatrix}$
	1.1870	1.7015	0.8968
100	$\begin{bmatrix} -3.9066 \\ -7.8260 \\ -0.5473 \\ 0.1526 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1.3446 \\ -5.4541 \\ -1.3446 \\ 0.1532 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3.0089 \\ -1.8390 \\ 0.1559 \end{bmatrix}$
	0.8474	1.0638	0.5610
200	$\begin{bmatrix} -3.8532 \\ -7.5951 \\ -0.7575 \\ 0.1019 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1.2776 \\ -4.9422 \\ -1.2776 \\ 0.0991 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.9013 \\ -1.3218 \\ 0.0627 \end{bmatrix}$
	0.5490	0.5421	0.1016
800	$\begin{bmatrix} -3.7664 \\ -7.1981 \\ -0.8716 \\ 0.0624 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1.1943 \\ -4.5458 \\ -1.1943 \\ 0.0625 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.9807 \\ -1.2955 \\ 0.0551 \end{bmatrix}$

	0.1254	0.1271	0.0177
--	--------	--------	--------

Tablo 16’da her iki uçtan da sınırlı olan Tip I dağılımı için üç tahminleyicinin verilen örnek hacimlerinden 10000 örnek üzerinden elde edilen ortalama tahmin vektörleri ve bu tahminlerin anakütle parametrelerinden farkını tanımlayan fark vektörlerinin normları verilmiştir. Anakütleden elde edilen parametre vektörleri

$$\boldsymbol{\theta}_x = \begin{bmatrix} \alpha = -3.7396 \\ \phi_0 = -7.0784 \\ \phi_1 = -0.8954 \\ \phi_2 = 0.0525 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\theta}_y = \begin{bmatrix} \alpha = -1.1654 \\ \phi_0 = -4.4259 \\ \phi_1 = -1.1654 \\ \phi_2 = 0.0525 \end{bmatrix} \text{ ve } \boldsymbol{\theta}_u = \begin{bmatrix} \lambda_0 = -2.9964 \\ \lambda_1 = -1.2877 \\ \lambda_2 = 0.0525 \end{bmatrix}$$

şeklinde dir. Elde edilen sonuçlara göre, tüm örnek hacimlerinde modun sıfırda olduğu tahminleyiciden elde edilen ortalama vektörlerinin parametre vektörüne daha yakın olduğu görülmüştür. Her üç tahminleyici için de örnek hacmi arttıkça sapma vektörünün normu azalmaktadır.

Tablo 17: Tip VI parametre tahmin vektörü ve örneklere ait sapma vektörlerinin normları

n	$\hat{\boldsymbol{\theta}}_x / \text{norm}(\boldsymbol{\theta}_x - \hat{\boldsymbol{\theta}}_x)$	$\hat{\boldsymbol{\theta}}_y / \text{norm}(\boldsymbol{\theta}_y - \hat{\boldsymbol{\theta}}_y)$	$\hat{\boldsymbol{\theta}}_u / \text{norm}(\boldsymbol{\theta}_u - \hat{\boldsymbol{\theta}}_u)$
50	$\begin{bmatrix} -3.3553 \\ -2.3180 \\ 0.4480 \\ 0.2712 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.9660 \\ -2.2426 \\ -0.9960 \\ 0.4048 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3.7215e + 08 \\ -4.3968e + 04 \\ -1.1720 \end{bmatrix}$
	0.6925	0.3765	33.1934
100	$\begin{bmatrix} -3.0816 \\ -2.0326 \\ 0.0460 \\ 0.1317 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.6021 \\ -1.3371 \\ -0.6021 \\ 0.1298 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.0454 \\ -1.0972 \\ 0.1269 \end{bmatrix}$
	0.2907	0.1670	0.4583

200	$\begin{bmatrix} -3.0051 \\ -2.1299 \\ -0.2776 \\ 0.0519 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.5356 \\ -1.1335 \\ -0.5356 \\ 0.0531 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.8012 \\ -0.6043 \\ 0.0540 \end{bmatrix}$
	0.1442	0.0829	0.0621
800	$\begin{bmatrix} -2.9502 \\ -2.1747 \\ -0.4796 \\ 0.0002 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.4803 \\ -1.9871 \\ -0.4803 \\ -0.00002 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.7514 \\ -0.4813 \\ -0.00003 \end{bmatrix}$
	0.0343	0.0170	0.0138

Tablo 17’de tek uçtan da sınırlı olan Tip VI dağılımı için üç tahminleyicinin, verilen örnek hacimlerinden 10000 örnek üzerinden elde edilen ortalama tahmin vektörleri ve bu tahminlerin anakütle parametrelerinden farkını tanımlayan fark vektörlerinin normları verilmiştir. Anakütleden elde edilen parametre vektörleri

$$\theta_x = \begin{bmatrix} \alpha = -0.4236 \\ \phi_0 = -0.9127 \\ \phi_1 = -0.4522 \\ \phi_2 = -0.0204 \end{bmatrix}, \theta_y = \begin{bmatrix} \alpha = -0.4535 \\ \varphi_0 = -0.9263 \\ \varphi_1 = -0.4535 \\ \varphi_2 = -0.0204 \end{bmatrix}, \theta_u = \begin{bmatrix} \lambda_0 = -0.7248 \\ \lambda_1 = -0.4349 \\ \lambda_2 = -0.0204 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Elde edilen sonuçlara göre, küçük örnek hacimlerinde ortalamanın sıfırda olduğu tahminleyiciden elde edilen ortalama vektörlerini parametre vektörüne daha yakın iken örnek hacmi arttıkça modun sıfırda olduğu tahminleyici daha küçük sapma değerine sahip olduğu görülmüştür. Benzer şekilde örnek hacmi ile sapma vektörünün normu arasında negatif yönlü bir ilişki olduğu görülmektedir.

Tablo 18: Tip IV Parametre Tahmin Vektörü Ve Örneklerle Ait Sapma Vektörlerinin Normları

n	$\hat{\theta}_x / \text{norm}(\theta_x - \hat{\theta}_x)$	$\hat{\theta}_y / \text{norm}(\theta_y - \hat{\theta}_y)$	$\hat{\theta}_u / \text{norm}(\theta_u - \hat{\theta}_u)$
50	$\begin{bmatrix} -2.9415 \\ -1.6280 \\ -0.1308 \\ 0.0516 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.3877 \\ -0.9694 \\ -0.3877 \\ 0.0485 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 32.5803 \\ -1.7067 \\ 0.6163 \end{bmatrix}$
	1.1400	1.5617	3.7215e+08
100	$\begin{bmatrix} -2.8806 \\ -1.8137 \\ -0.4729 \\ -0.0274 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.3297 \\ -0.7917 \\ -0.3297 \\ -0.0264 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.9199 \\ -0.4394 \\ 0.1349 \end{bmatrix}$
	0.6541	0.4854	2.8521
200	$\begin{bmatrix} -2.8555 \\ -1.8746 \\ -0.6004 \\ -0.0573 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.3090 \\ -0.7191 \\ -0.3090 \\ -0.0572 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.6121 \\ -0.2760 \\ -0.0572 \end{bmatrix}$
	0.3004	0.2488	0.2002
800	$\begin{bmatrix} -2.8389 \\ -1.9208 \\ -0.6963 \\ -0.0795 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.2908 \\ -0.6629 \\ -0.2908 \\ -0.0802 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.5822 \\ -0.2458 \\ -0.0802 \end{bmatrix}$
	0.0822	0.0746	0.0572

Tablo 18’de iki uçtan da sınırsız olan Tip IV dağılımı için üç tahminleyicinin, verilen örnek hacimlerinden 10000 örnek üzerinden elde edilen ortalama tahmin vektörleri ve bu tahminlerin anakütle parametrelerinden farkını tanımlayan fark

vektörlerinin normları verilmiştir. Anakütleden elde edilen parametre vektörleri

$$\theta_x = \begin{bmatrix} \alpha = -2.8345 \\ \phi_0 = -1.9372 \\ \phi_1 = -0.7253 \\ \phi_2 = -0.0861 \end{bmatrix}, \theta_y = \begin{bmatrix} \alpha = -0.2866 \\ \phi_0 = -0.6482 \\ \phi_1 = -0.2866 \\ \phi_2 = -0.0861 \end{bmatrix}, \theta_u = \begin{bmatrix} \lambda_0 = -0.5731 \\ \lambda_1 = -0.2372 \\ \lambda_2 = -0.0861 \end{bmatrix}$$

şeklinde. Elde edilen sonuçlara göre Tip VI dağılımında olduğu gibi, küçük örnek hacimlerinde ortalamanın sıfırda olduğu tahminleyiciden elde edilen ortalama vektörleri parametre vektörüne daha yakın iken örnek hacmi arttıkça modun sıfırda olduğu tahminleyici daha küçük sapma değerine sahip olduğu görülmüştür. Tüm tahminleyiciler için, örnek hacmi arttıkça, fark vektörünün normunun azaldığı görülmektedir.

Tablo 19: Tip I Dağılımı İçin Oluşturulan 10000 Örnekten Elde Edilen Bhattacharya Uzaklıkları

	θ_x		θ_y		θ_z	
n	Min.	Maks.	Min.	Maks.	Min.	Maks.
50	0.1862	0.8200	0.0051	0.1964	0.5857	3.9875
100	0.2350	0.6468	0.0049	0.1177	0.1881	3.6515
200	0.2527	0.5372	0.0049	0.0942	0.3835	3.6127
800	0.3096	0.4830	0.0049	0.0393	0.8544	3.5610

Tablo 19’da her iki uçtan sınırlı Tip I dağılımından, belirlenen her bir örnek hacmi için tekrarlı 10000 örnek üzerinden elde edilen olasılık yoğunluk fonksiyonlarının, anakütle olasılık yoğunluk fonksiyonu ile arasındaki uzaklıklar verilmiştir. Bu uzaklıklar Bölüm 2.3’te verilen elipsoid yaklaşımı kullanılarak elde edilen sınır değerler içerisinde yer alan dağılımlar üzerinden Eşitlik (39) ve Eşitlik (40) ile tanımlanan Bhattacharya uzaklığı kullanılarak elde edilmiştir. Tablodaki sonuçlara göre, ortalamanın sıfırda olduğu tahminleyiciden elde edilen maksimum uzaklık değerleri, diğer tahminleyicilere göre tüm örnek hacimleri için daha düşüktür. Modun sıfırda olduğu tahminleyici için elde edilen sonuçlar incelendiğinde, tüm örnek hacimleri için anakütleyi tanımlayan dağılıma en uzak olan dağılımın uzaklık değerlerinin benzer olduğu görülebilmektedir. Her ne kadar

modu sıfıra çeken dönüşümden elde edilen dağılımların tamamını dikkate alarak elde edilen tahminleyici fark vektörünün normu ile ifade edilen kritere göre daha uygun gibi görünse de, dağılımların anakütleyi tanımlayan olasılık yoğunluk fonksiyonuna olan bireysel uzaklıkları bakımından en az tercih edilebilecek olan tahminleyicidir.

Tablo 20: Tip VI Dağılımı için oluşturulan 10000 örnekten elde edilen Bhattacharya Uzaklıkları

	θ_x		θ_y		θ_z	
n	Min.	Maks.	Min.	Maks.	Min.	Maks.
50	0.0002	0.1806	0.00002	0.1120	0.00005	0.2351
100	0.00005	0.0801	0.00001	0.1162	0.000006	0.2264
200	0.000008	0.0521	0.00001	0.0668	0.00002	0.1586
800	0.00001	0.0115	0.00001	0.0139	0.00002	0.0509

Tablo 20’de tek uçtan sınırlı Tip VI dağılımından, belirlenen her bir örnek hacmi için tekrarlı 10000 örnek üzerinden elde edilen olasılık yoğunluk fonksiyonlarının, anakütle olasılık yoğunluk fonksiyonu ile arasındaki uzaklıklar Eşitlik (39) ve Eşitlik (40) ile tanımlanan Bhattacharya uzaklığı olarak verilmiştir. Bu uzaklıklar Bölüm 2.3’te verilen elipsoid yaklaşımı kullanılarak elde edilen sınır değerler içerisinde yer alan dağılımlar üzerinden elde edilmiştir. Tablodaki sonuçlara göre, küçük örnek hacimlerinde ($n = 50$ ve $n = 100$) ortalamanın sıfırda olduğu tahminleyiciden elde edilen dağılımlar anakütleye daha yakınken, büyük örnek hacimleri için modun sıfırda olduğu tahminleyiciden elde edilen dağılımlar daha yakındır.

Tablo 21: Tip IV Dağılımı için oluşturulan 10000 örnekten elde edilen Bhattacharya Uzaklıkları

	θ_x		θ_y		θ_z	
n	Min.	Maks.	Min.	Maks.	Min.	Maks.
50	0.00005	0.0533	0.000004	0.4251	0.00002	0.2554
100	0.00004	0.0299	0.000006	1.6522	0.00002	0.0442

200	0.00002	0.0243	0.000009	0.0204	0.000002	0.0258
800	0.000003	0.0067	0.0000007	0.0058	0.0000005	0.0144

Tablo 21’de iki uçtan da sınırsız olan Tip IV dağılımından, belirlenen her bir örnek hacmi için tekrarlı 10000 örnek üzerinden elde edilen olasılık yoğunluk fonksiyonlarının, anakütle olasılık yoğunluk fonksiyonu ile arasındaki uzaklıklar verilmiştir. Bu uzaklıklar Bölüm 2.3’te verilen elipsoid yaklaşımı kullanılarak elde edilen sınır değerler içerisinde yer alan dağılımlar üzerinden elde edilmiştir. Tablodaki sonuçlara göre, tüm örnek hacimlerinde dönüşüm yapılmayan tahminleyiciden elde edilen dağılımlar anakütleyle daha yakındır.

Tablo 22: Tahminleyicilerin ARE Kıyaslaması

n=50	Tip I	Tip VI	Tip IV
I/II	0.4746	0.3361	0.3143
I/III	0.3605	0.0493	0.6094
II/III	0.6932	0.0773	2.4180
n=100	Tip I	Tip VI	Tip IV
I/II	0.3920	0.2783	0.2647
I/III	0.3732	0.0832	0.2465
II/III	0.9364	0.1998	0.9089
n=200	Tip I	Tip VI	Tip IV
I/II	0.3340	0.2310	0.2202
I/III	0.4115	0.2685	0.1949
II/III	1.3211	1.2224	0.8495
n=800	Tip I	Tip VI	Tip IV
I/II	0.2307	0.1630	0.1566
I/III	0.3045	0.2140	0.1471
II/III	1.4480	1.4378	0.9201

Tablo 22’de alternatif tahminleyicilerin Tip I, Tip IV ve Tip VI dağılımlarında, büyük ve küçük örnekler üzerinden Eşitlik (25)’ten yararlanılarak

asimptotik görelî etkinlikleri kıyaslanmıştır. Şans değişkeni üzerine dönüşüm yapılmayan tahminleyici I, ortalamanın sıfıra çekilmesiyle elde edilen tahminleyici II ve modun sıfıra çekilmesiyle elde edilen tahminleyici III ile gösterilmiştir. Elde edilen sonuçlar dönüşüm yapılmayan ve ortalamanın sıfırda olduğu tahminleyiciler üzerinden değerlendirildiğinde, tüm dağılışlarda ve tüm örnek hacimlerinde ortalamanın sıfırda olduğu tahminleyicinin değişkenliği daha azdır. Benzer şekilde ortalamanın sıfırda olduğu ve modun sıfırda olduğu tahminleyiciler kıyaslandığında, ortalamanın sıfırda olduğu tahminleyiciye ait değişkenliğin daha düşük olduğu görölmektedir. Modu sıfıra çeken dönüşümle elde edilen tahminleyicinin değişkenliği, Tip I ve Tip VI dağılımlarının büyük örnek hacimleri hariç dönüşüm yapılmayan tahminleyiciden daha azdır.

Tablo 23: Tahminleyicilerin Hassaslık Kıyaslaması ($x+3s_i$)

$n=50$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$\hat{\theta}_x$	0.2335	0.4384	0.4563
$\hat{\theta}_y$	0.1048	0.2588	0.2344
$\hat{\theta}_u$	0.0772	0.1121	0.0951
$n=100$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$\hat{\theta}_x$	0.0805	0.2712	0.0021
$\hat{\theta}_y$	0.0668	0.0456	0.1456
$\hat{\theta}_u$	0.0435	0.0819	0.0885
$n=200$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$\hat{\theta}_x$	0.0801	0.4014	0.1283
$\hat{\theta}_y$	0.0248	0.0774	0.0671
$\hat{\theta}_u$	0.0408	0.0686	0.0647
$n=800$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$\hat{\theta}_x$	0.0023	0.0118	0.0153
$\hat{\theta}_y$	0.0118	0.0193	0.0053
$\hat{\theta}_u$	0.0079	0.0102	0.0088

Tablo 23'te tahminleyicilerin, veri setine ilave bir gözlem dahil edilmesi durumuna karşı ne kadar hassas oldukları gösterilmiştir. Eşitlik (22) ile tanımlanan hassaslık ölçümünün yapılabilmesi için her bir veri setine, o veri setine ait standart sapma değerinin üç katı eklenip (Tablo 23) çıkarılmıştır (Tablo 24). Böylece her bir örnek hacmi için gözlem sayısı bir arttırılarak parametre tahmin değerleri elde edilmiştir. Tablo 23'teki sonuçlara göre, modun sıfırda oluşu tahminleyici (Tip IV dağılımının $n = 100$ örnek hacmi hariç) tüm dağılımlar ve tüm örnek hacimlerinde dağılışın sağ ucuna ilave edilen sapan gözleme karşı en az hassas olan tahminleyicidir. Ayrıca tahminleyiciler aynı örnek hacmi için dağılış bazlı incelendiğinde, tahminleyiciler her iki uçtan da sınırlı olan Tip I dağılımında, dağılışın sağ ucuna ilave edilen ek bir gözleme karşı daha az hassastır.

Tablo 24: Tahminleyicilerin Hassaslık Kıyaslaması ($x-3s_i$)

$n=50$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$\hat{\theta}_x$	0.0749	0.0821	0.3048
$\hat{\theta}_y$	0.0410	0.0534	0.0644
$\hat{\theta}_u$	0.0887	0.0658	0.0712
$n=100$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$\hat{\theta}_x$	0.0611	0.0775	0.0298
$\hat{\theta}_y$	0.0693	0.0522	0.0415
$\hat{\theta}_u$	0.0594	0.0712	0.0699
$n=200$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$\hat{\theta}_x$	0.0540	0.0361	0.1023
$\hat{\theta}_y$	0.0177	0.0252	0.0145
$\hat{\theta}_u$	0.0634	0.0647	0.0760
$n=800$	Tip I	Tip VI	Tip IV
$\hat{\theta}_x$	0.0068	0.0159	0.0059
$\hat{\theta}_y$	0.0033	0.0052	0.0057
$\hat{\theta}_u$	0.0078	0.0100	0.0115

Tablo 24’te tahminleyicilerin, dağılışın sol ucuna ilave edilen ek bir gözleme karşı olan hassaslık ölçüleri verilmiştir. Elde edilen sonuçlara göre (Tip I ve Tip IV dağılımlarında $n = 100$ örnek hacmi hariç) tüm dağılımlar ve tüm örnek hacimlerinde ortalamanın sıfırda olduğu tahminleyici diğer tahminleyicilere göre daha az hassastır. Dağılışa sağdan ilave edilen gözlemin incelendiği duruma benzer olarak burada da tahminleyiciler dağılış bazlı incelendiğinde her iki uçtan da sınırlı olan Tip I dağılımında tahminleyiciler daha az hassastır.



SONUÇ

Bir veri setine ait olasılık fonksiyonunun elde edilmesinde kullanılabilecek yöntemlerden birisi, Karl Pearson tarafından tanımlanan diferansiyel denklemdir. Bu diferansiyel denklemin parametreleri momentler tahminleme yöntemi ile belirlenmekte ve bir olasılık yoğunluk fonksiyonu elde edilmektedir. Diferansiyel denklem parametrelerinin ortaya çıkardığı dağılışlara da Pearson dağılış ailesi denilmektedir. Dağılış ailesi içerisinde bir çok farklı dağılış (Gama, Beta, Normal gibi) yer almaktadır.

Pearson tarafından tanımlanan diferansiyel denkleme ait parametreleri şans değişkeni üzerine herhangi bir dönüşüm yapmadan tekrarlı moment denklemleri üzerinden tahminlemek mümkün olduğu gibi aynı zamanda şans değişkeni üzerine tanımlanan yer dönüşümleri ile de tahminlemek mümkündür. Şans değişkeninin ortalamasının sıfıra çekilmesi şeklinde tanımlanan yer dönüşümü ile diferansiyel denklemin parametre sayısı ($\alpha = \varphi_1$ olduğundan) dörtten üçe indirilmektedir. Benzer şekilde şans değişkeninin modunun sıfıra çekilmesi şeklinde tanımlanan yer dönüşümü ile diferansiyel denklemin pay kısmında yer alan mod parametresi sıfıra eşitlenir ve parametre sayısı üçe indirgenir. Bu çalışma kapsamında, yapılan bu dönüşümlerin etkileri araştırılmıştır.

İstatistik literatüründe önemli bir yeri olan dayanıklılık, bir tahminleyici için önemli kriterlerdendir. Dayanıklı tahminleyiciler genel olarak üç sınıfta yer almaktadır. Bunlar: *M*-tahminleyici, *L*-tahminleyici ve *R*-tahminleyici sınıfıdır. Pearson diferansiyel denkleminin parametre tahminleyicileri de *M*-tahminleyici sınıfında yer almaktadır. Bu nedenle yukarıda tanıtılan tahminleyicilere ait özellikler dayanıklılık kriteri üzerinden değerlendirilmek istendiğinde, *M*-tahminleyiciler için kullanılan performans kriterleri dikkate alınmalıdır. Bu bakış açısıyla diferansiyel denklemin alternatif üç tahminleyicisi, hassaslık, sapma, görelî etkinlik gibi kriterler üzerinden değerlendirilmiştir.

Daha önceki çalışmalarda herhangi bir Pearson dağılışı parametreleri için elde edilen tahminleyiciler bireysel olarak ele alınırken, bu çalışmada diferansiyel denklem parametre tahminleyicileri bir vektör olarak ele alınmış ve değerlendirmeler bu tahminleyici vektörü üzerinden gerçekleştirilmiştir.

Tahminleyicilere ait performans kıyaslamasında kullanılan kriterlerden birisi, tahminleyicinin değişkenliğini bir ölçü olarak kullanan asimptotik görelî etkinliktir. Tek boyutlu uzayda değişkenlik ölçüsü olarak varyans kullanılabilir. Fakat çok boyutlu uzayda çalışıldığında değişkenlik ölçüsü olarak varyans-kovaryans matrisleri kullanılmaktadır.

Momentlerin doğrusal fonksiyonlarına ait varyans-kovaryans matrislerinin elde edilmesinde klasik yöntemlerin kullanılması yeterli olabilecektir. Fakat Pearson diferansiyel denkleminin alternatif tahminleyicilerinden her biri, ortalamaya ya da orijine göre momentlerin doğrusal olmayan birer fonksiyonu olarak ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle varyans kovaryans matrisinin bileşenlerinin klasik yöntemlerle elde edilmesi olanaksız hale gelmektedir. Bu problemin üstesinden gelebilmek için Cramer tarafından tanımlanan *H*-teoremi kullanılmıştır. *H*-teoremi ile varyans-kovaryans matrisinin köşegen elemanlarını elde etmek mümkündür. Köşegen dışı elemanların bulunmasında ise yetersizdir. Varyans-kovaryans matrisinin köşegen dışı elemanlarını (kovaryanslar) elde edebilmek için, bu çalışma kapsamında *H*-teoreminden elde edilen sonuç kullanılmıştır. Böylelikle momentlerin doğrusal olmayan iki fonksiyonu arasındaki kovaryans yapısı elde edilebilmektedir.

Dayanıklılık ölçüleri içerisinde en yaygın kullanıma sahip olanlardan birisi de etki fonksiyonlarıdır. Bir tahminleyicinin, veri seti içerisindeki çok küçük değişimlere karşı tepkisini gösteren bu fonksiyon genellikle tek boyutlu tahminleyiciler için incelenmiştir. Bu çalışmada Pearson diferansiyel denklemi parametre tahminleyicileri ise üç veya dört boyutlu tahminleyiciler şeklinde ele alınmıştır. Alternatif tahminleyiciler için teorik olarak elde edilen etki fonksiyonlarının Tip I, Tip IV ve Tip VI dağılımlarındaki görüntüleri ele alınmış ve elde edilen sonuçlara göre bu dağılımlarda tüm tahminleyicilerin etki fonksiyonlarının sınırlı olmadığı sonucuna ulaşılmıştır.

Çalışma kapsamında belirlenen kriterler üzerinden alternatif tahminleyicilerin performans kıyaslamaları, Pearson dağılımlarının ana tiplerini oluşturan Tip I, Tip IV ve Tip VI dağılımları üzerinden gerçekleştirilmiştir. Bu anakütller üzerinden büyük ve küçük örnek performanslarını kıyaslamak amacıyla 50, 100, 200 ve 800 hacimli iadeli 10000'er adet örnek seçilmiştir. Tahminleyiciler momentlere bağlı fonksiyonlar oldukları için öncelikle her bir örnek hacmi için anakütle momentlerinin

tahminleyicilerinin performansları incelenmiştir. Elde edilen sonuçlara göre, bir anakütle momenti örnek üzerinden sapmanın minimum olacağı şekilde tahminlenmek istendiğinde kullanılacak örnek hacmi, incelenen örnek hacimleri içerisinde en az 200 olmalıdır. Örnek momentlerine ait değişkenlik ölçüsü olarak varyans ele alınmıştır. Beklentilere paralel olarak, örnek hacmi arttıkça örnek varyansı bu oran kadar azalmaktadır. Dolayısıyla örnek hacmi ile örnek momentinin varyansı arasında negatif yönlü ve doğrusal bir ilişki olduğu görülmüştür. Benzer dağılım ve örnek hacmi için örnek merkezi momentlere ait değişkenliğin, örnek orijine göre momentlere göre daha az olduğu görülmüştür. Örnek momentleri üzerinden yapılan bir başka değerlendirme de korelasyon yapılarının elde edilmesidir. Elde edilen sonuçlar değerlendirildiğinde yine beklentilere uygun olarak, korelasyon katsayılarının örnek hacminden bağımsız olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Varyans için yapılan değerlendirmelere benzer olarak, orijine göre örnek momentleri arasındaki doğrusal ilişkinin örnek merkezi momentlere kıyasla daha güçlü olduğu söylenebilmektedir.

Çalışmanın temellerinden birini oluşturan H -teoremi ve bu teoremden elde edilen sonuç, tahminleyici vektörlerinin değişkenlik ölçüsü olarak kullanılan varyans-kovaryans matrislerinin elde edilmesinde kullanılmıştır. Kullanılan alternatif tahminleyiciler her ne kadar momentlerin doğrusal olmayan fonksiyonları şeklinde ortaya çıksalar da, H -teoreminden elde edilen varyans yapıları incelendiğinde örnek hacmi ile negatif yönlü doğrusal ilişkili oldukları görülmektedir. Benzer sonuçlar korelasyon yapıları incelendiğinde de ortaya çıkmaktadır. Tahminleyici vektörlerinin bileşenleri açısından değerlendirme yapıldığında, şans değişkeni üzerine dönüşüm yapılmayan tahminleyici içerisinde varyansı en düşük bileşenin $\hat{\phi}_2$, ortalamanın sıfırda olduğu tahminleyici için $\hat{\phi}_2$ ve modun sıfırda olduğu tahminleyici için de $\hat{\lambda}_2$ 'nin en düşük varyansa sahip bileşen olduğu görülmektedir. Ayrıca bu bileşenlere ait varyansların minimum olduğu dağılımın Tip IV dağılımı olduğu söylenebilir.

H -teoreminin sonucundan yararlanılarak elde edilen tahminleyicilerin bileşenleri arasındaki korelasyonlar üzerinden hesaplanan korelasyon matrisinin determinantı ne kadar büyükse, değişkenler arasındaki doğrusal ilişki o kadar zayıftır. Bu bakış açısıyla alternatif tahminleyiciler değerlendirildiğinde tahminleyici

vektörlerinin bileşenleri arasındaki en zayıf ilişki, Tip IV dağılımında ortaya çıkmaktadır.

Değerlendirme kriteri olarak tahminleyicilerin sapmaları baz alındığında, Tip I dağılımında modun sıfırda olduğu tahminleyiciye ait sapma değerinin daha düşük olduğu söylenebilir. Tip VI dağılımında $n=50$ ve $n=100$ örnek hacimlerinde en düşük sapma ortalamasının sıfırda olduğu tahminleyicide iken diğer örnek hacimlerinde modun sıfırda olduğu tahminleyicidedir. Tip IV dağılımının $n=50$ örnek hacmi için dönüşüm yapılmayan tahminleyici, $n=100$ için ortalamasının sıfırda olduğu tahminleyici ve diğer örnek hacimlerinde de modun sıfırda olduğu tahminleyici tercih edilebilir.

Bir diğer kriter olan asimptotik görelî etkinlik bakımından bu tahminleyiciler değerlendirilmiş ve ortalamasının sıfırda olduğu tahminleyicinin değişkenliğinin tüm dağılışı ve tüm örnek hacimlerinde diğerlerine göre daha az olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Tahminleyicilerin veri setine ilave edilen tek bir gözleme karşı ne kadar hassas olduklarını gösteren hassaslık ölçüsü bakımından değerlendirme yapılabilmesi için veri setlerine potansiyel olarak sapan gözlem olduğu düşünülen, o veri setinin kendi standart sapmasının üç katı ilave edilmiştir. Bu ekleme işlemi incelenen dağılışların farklı sınır değerlere sahip olmaları nedeniyle, her bir dağılışın sağından ve solundan gerçekleştirilmiştir. İncelenen dağılışlardan biri olan ve her iki uçtan sınırlı olan Tip I dağılışı için beklentiler hem sağdan hem de soldan eklenen ilave gözleme karşı tahminleyicilerin diğer dağılışlara kıyasla daha hassas olması yönünde iken elde edilen sonuçlar incelendiğinde, tahminleyicilerin sağdan ilave edilen gözleme karşı tek uçtan sınırlı olan Tip VI dağılımına ilave edilen gözleme karşı daha hassas olduğu görülmüştür. Benzer şekilde sağdan ilave edilen gözleme karşı her iki uçtan da sınırsız olan Tip IV dağılımı, Tip I dağılımına göre daha hassastır. Ayrıca örnek hacmi arttırıldığında, beklentilere uygun olarak, tüm dağılımlar için ilave gözleme karşı hassaslık azalmaktadır. Benzer sonuçlar ilave gözlem dağılışın solunda olduğu durum için de geçerlidir. Tahminleyicilere ait hassaslık kıyaslaması örnek hacmi ve dağılım sabit tutularak yapıldığında ise kesin bir örüntü görülememektedir. Söz gelimi Tip I dağılımı için tahminleyiciler kıyaslandığında, sağdan ilave edilen gözleme karşı en az hassas olan tahminleyici modun sıfırda

olduğu tahminleyici iken ilave gözlem solda olduğunda örnek hacmine bağlı olarak bazı durumlarda ($n = 50$, $n = 200$) ortalamanın sıfırda olduğu tahminleyici diğerlerine göre daha az hassastır. Tip VI dağılımında örnek hacimleri için sağdan ilave edilen gözleme karşı en az hassas olan tahminleyici modun sıfırda olduğu tahminleyici iken, ilave gözlem soldan eklendiğinde en az hassas olan ortalamanın sıfırda olduğu tahminleyicidir. Tip IV dağılımı için elde edilen sonuçlara göre ilave gözlem sağdan eklendiğinde en az hassas olan tahminleyici modun sıfırda olduğu tahminleyici iken, soldan ekleme yapıldığında en az hassas olan tahminleyici ortalamanın sıfırda olduğu tahminleyicidir.

Tablo 25: Genel Değerlendirme

Tip I	$n=50$	$n=100$	$n=200$	$n=800$
Sapma	θ_u	θ_u	θ_u	θ_u
Uzaklık	θ_y	θ_y	θ_y	θ_y
ARE	θ_y	θ_y	θ_y	θ_y
Hassaslık	θ_u, θ_y	θ_u	θ_u, θ_y	θ_x, θ_y
Tip VI	$n=50$	$n=100$	$n=200$	$n=800$
Sapma	θ_y	θ_y	θ_u	θ_u
Uzaklık	θ_y	θ_x	θ_x	θ_x
ARE	θ_y	θ_y	θ_y	θ_y
Hassaslık	θ_u, θ_y	θ_y	θ_u, θ_y	θ_u, θ_y
Tip IV	$n=50$	$n=100$	$n=200$	$n=800$
Sapma	θ_x	θ_y	θ_u	θ_u
Uzaklık	θ_x	θ_u	θ_y	θ_y
ARE	θ_y	θ_y	θ_y	θ_y
Hassaslık	θ_u, θ_y	θ_x	θ_u, θ_y	θ_y

Belirlenen kriterlere göre Tip I, Tip VI ve Tip IV dağılımlarının belirlenen örnek hacimlerinin hangilerinde hangi tahminleyicinin tercih edilebileceği Tablo 25’te gösterilmiştir. Elde edilen sonuçlara göre, herhangi bir tahminleyicinin, tüm dağılımlar ve örnek hacimleri üzerinden diğerlerine göre tercih edilebilir olduğu söylenememektedir. Genel olarak büyük örnek hacimlerinde ortalamanın sıfırda olduğu tahminleyici, belirtilen kriterlerin birçoğunda diğer tahminleyicilere kıyasla daha tercih edilebilirdir. Bu tahminleyiciler arasında tercih yapmak isteyen bir araştırmacı, kararını incelediği veri setinin dağılımına ve örnek hacmine bağlı olarak vermelidir.



KAYNAKÇA

Andreev, A., Kanto, A., & Malo, P. (2005). Simple approach for distribution selection in the Pearson system. *Helsinki School of Economics Working Papers*, 1-22.

Arora, K., & Singh, V. P. (1989). A comparative evaluation of the estimators of the log Pearson type (LP) 3 distribution. *Journal of Hydrology*, 105(1-2), 19-37.

Ashkar, F., & Bobée, B. (1987). The generalized method of moments as applied to problems of flood frequency analysis: some practical results for the log-Pearson type 3 distribution. *Journal of Hydrology*, 90(3-4), 199-217.

Casella, G., & Berger, R. L. (2002). *Statistical inference* (Vol. 2). Pacific Grove, CA: Duxbury.

Cramér, H. (1946). *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton University Press.

Dubuisson, S. (2010, July). The computation of the Bhattacharyya distance between histograms without histograms. In *2010 2nd International Conference on Image Processing Theory, Tools and Applications* (pp. 373-378). IEEE.

England, J. F., Salas, J. D., & Jarrett, R. D. (2003). Comparisons of two moments-based estimators that utilize historical and paleoflood data for the log Pearson type III distribution. *Water resources research*, 39(9).

Fiori, A. M., & Zenga, M. (2005). The meaning of kurtosis, the influence function and an early intuition by L. Faleschini. *Statistica*, 65(2), 135-144.

Hampel, F. R. (1974). The influence curve and its role in robust estimation. *Journal of the american statistical association*, 69(346), 383-393.

Hampel, F. R., Ronchetti, E. M., Rousseeuw, P. J., & Stahel, W. A. (1986). *Robust statistics*. New York: Wiley.

Huber, P. J. (1972). The 1972 wald lecture robust statistics: A review. *The Annals of Mathematical Statistics*, 43(4), 1041-1067.

Huber, P. J., Ronchetti, E. M., (2009). "*Robust Statistics*". New York: John Wiley & Sons.

Isogai, T., (1989). On using influence functions for testing multivariate normality. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 41(1), 169-186.

Johnson, R. A., & Wichern, D. W. (2014). *Applied multivariate statistical analysis* (Vol. 5, No. 8). Upper Saddle River, NJ: Prentice hall.

Kailath, T. (1967). The divergence and Bhattacharyya distance measures in signal selection. *IEEE transactions on communication technology*, 15(1), 52-60.

Kendall, M. G. (1943). *Advanced Theory Of Statistics Vol-I*. Charles Griffin: London.

Kendall, M. G., Stuart, A., Ord, J. K., Arnold, S. F., O'Hagan, A., & Forster, J. (1987). *Kendall's advanced theory of statistics* (Vol. 1). London: Griffin.

Khamsi, M. A., & Kirk, W. A. (2001). *An introduction to metric spaces and fixed point theory* (Vol. 53). John Wiley & Sons.

Koutrouvelis, I. A., & Canavos, G. C. (1999). Estimation in the Pearson type 3 distribution. *Water resources research*, 35(9), 2693-2704.

Maddala, G. S., & Rao, C. R. (1997). Handbook of Statistics 15: Robust Inference. Elsevier Science B. V.

Maronna, R. A., Martin, R. D., Yohai V. J., (2006). *Robust Statistics: Theory and Methods*. John Wiley & Sons: England.

Matalas, N. C., & Wallis, J. R. (1973). Eureka! It fits a Pearson type: 3 distribution. *Water Resources Research*, 9(2), 281-289.

Nagahara, Y. (1999). The PDF and CF of Pearson type IV distributions and the ML estimation of the parameters. *Statistics & probability letters*, 43(3), 251-264.

Nagahara, Y. (2003). Non-Gaussian Filter and Smoother Based on the Pearson Distribution System. *Journal of Time Series Analysis*, 24(6), 721-738.

Naghavi, B., Cruise, J., & Arora, K. (1990). A Comparative Evaluation of Three Estimators of Log Pearson Type 3 Distribution. *Transportation Research Record*, 1279.

Parrish, R. S. (1983). On an integrated approach to member selection and parameter estimation for Pearson distributions. *Computational Statistics & Data Analysis*, 1, 239-255.

Pearson, K. (1916). IX. Mathematical contributions to the theory of evolution.—XIX. Second supplement to a memoir on skew variation. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 216(538-548), 429-457.

Quenouille, M. H. (1956). Notes on bias in estimation. *Biometrika*, 43(3/4), 353-360.

Sengar, H., Wang, H., Wijesekera, D., & Jajodia, S. (2008). Detecting VoIP floods using the Hellinger distance. *IEEE transactions on parallel and distributed systems*, 19(6), 794-805.

Serfling, R. (2011). Asymptotic relative efficiency in estimation. *International encyclopedia of statistical science*, 68-72.

Serfling, R. J. (1980). *Approximation theorems of mathematical statistics* (Vol. 162). John Wiley & Sons.

Singh, V. P., & Singh, K. (1988). Parameter estimation for log-Pearson type III distribution by POME. *Journal of Hydraulic Engineering*, 114(1), 112-122.

Şehirlioğlu, A. K., Dünder, S. (2014). *Pearson Dağılışı Ailesi*. İzmir: Ege Üniversitesi Basımevi.

Thomas, G. B., Weir, M. D., Hass, (2009). *Thomas' Calculus: Multivariable*. Boston: Pearson.

Thomas, G. B., Weir, M. D., Hass, (2009). *Thomas' Calculus: Single Variable*. Boston: Pearson.

Wackerly, D., Mendenhall, W., & Scheaffer, R. L. (2008). *Mathematical statistics with applications*. Cengage Learning.

Wiśniewski, Z. (2014). M-estimation with probabilistic models of geodetic observations. *Journal of Geodesy*, 88(10), 941-957.

You, C. H., Lee, K. A., & Li, H. (2008). An SVM kernel with GMM-supervector based on the Bhattacharyya distance for speaker recognition. *IEEE Signal processing letters*, 16(1), 49-52.



EKLER

Ek 1: Küçük ve Büyük O Gösterimi

Küçük o Gösterimi

Bir f fonksiyonu $x \rightarrow \infty$ için eğer $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ise g fonksiyonundan daha

küçük mertebededir. Bu durum $f = o(g)$ şeklinde ifade edilir ve $x \rightarrow \infty$ için f 'nin g 'den daha yavaş arttığını ifade eder (Thomas ve diğerleri 2009, 426).

Büyük O Gösterimi

$f(x)$ ve $g(x)$, yeterince büyük olan x için pozitif iki fonksiyon olsun.

$x \rightarrow \infty$ için eğer aşağıdaki eşitsizliği sağlayan bir pozitif M tamsayısı var ise,

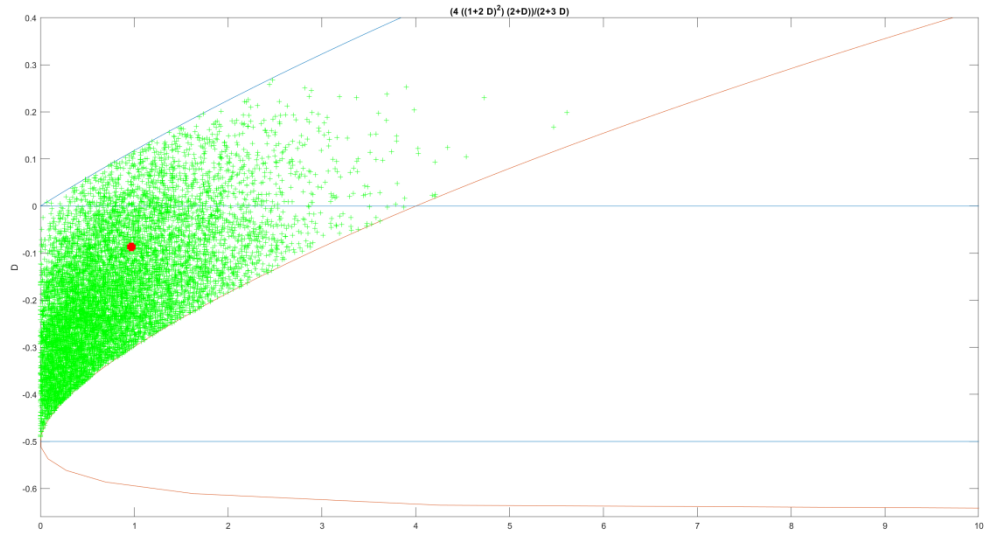
$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq M$$

f fonksiyonu en fazla g 'nin mertebesinde. Bu durum $f = O(g)$ şeklinde ifade edilir (Thomas ve diğerleri 2009, 427).

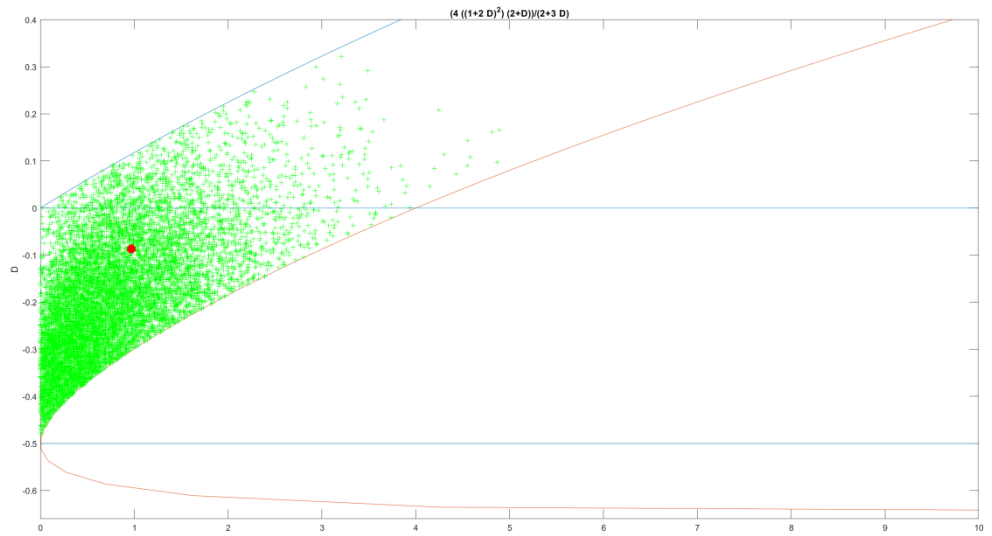
Ek 2: Tip I Dağılımından Türetilen Dağılımlar

Bu kısımda verilen grafikler, örnek verilerinden elde edilen dağılımların Craig kartı üzerindeki görüntüleridir. Kalın nokta ile belirtilen, anakütle olasılık yoğunluk fonksiyonunun kart üzerindeki yeridir.

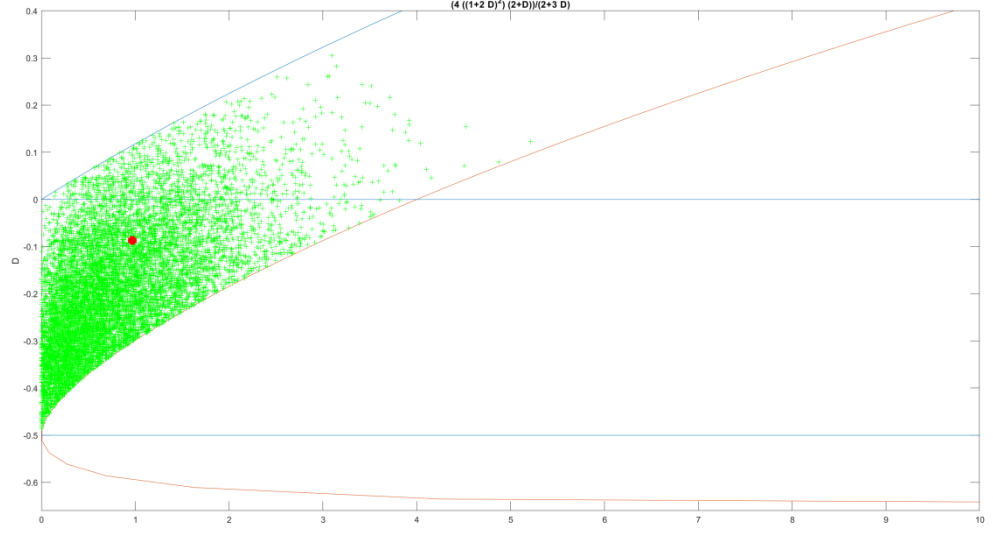
Şekil 17: Tip I Dağılımından $n=50$ İçin Türetilen Örnek Dağılışlar, Dönüşüm Yapılmayan Tahminleyici



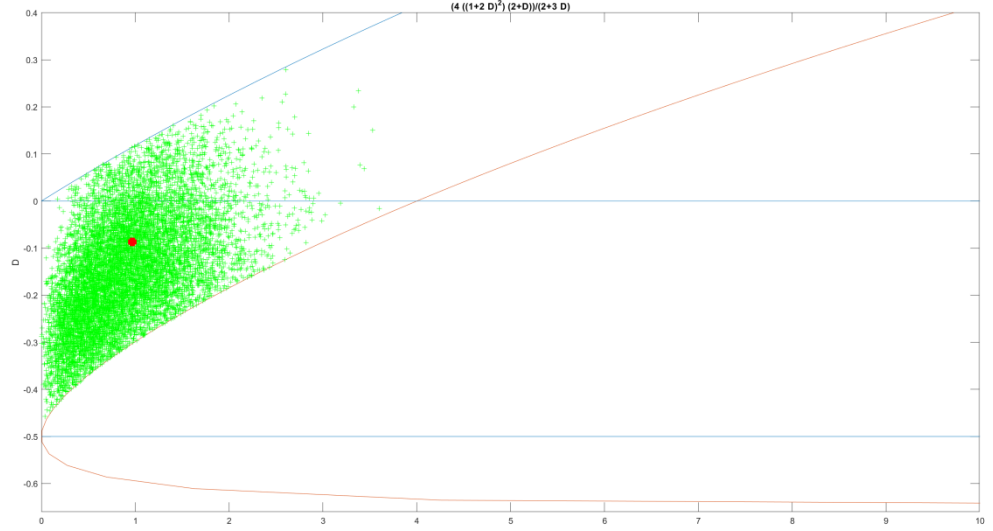
Şekil 18: Tip I Dağılımından $n=50$ İçin Türetilen Örnek Dağılışlar, Ortalaması Sıfırda Olan Tahminleyici



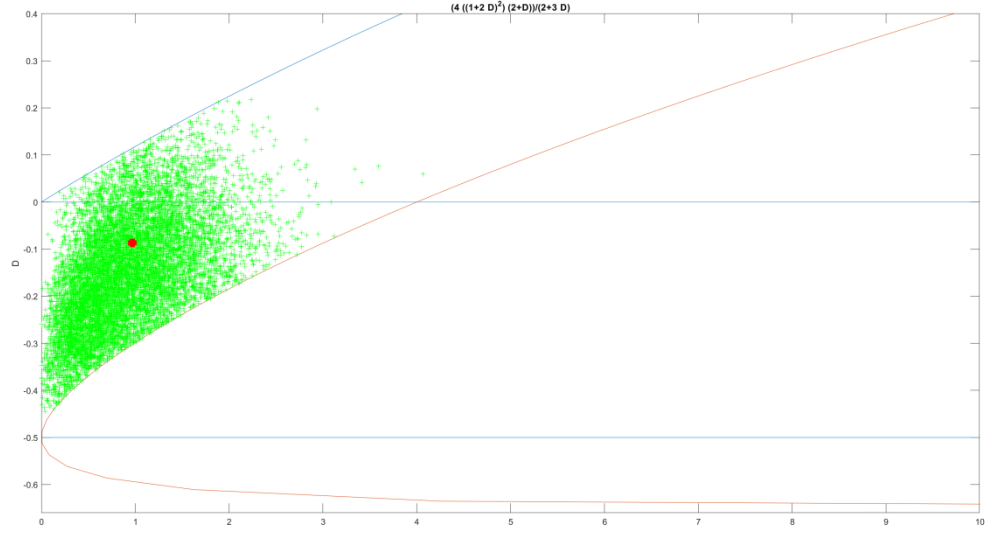
Şekil 19: Tip I Dağılımından $n=50$ İçin Türetilen Örnek Dağılışlar, Modu Sıfır Olan Tahminleyici



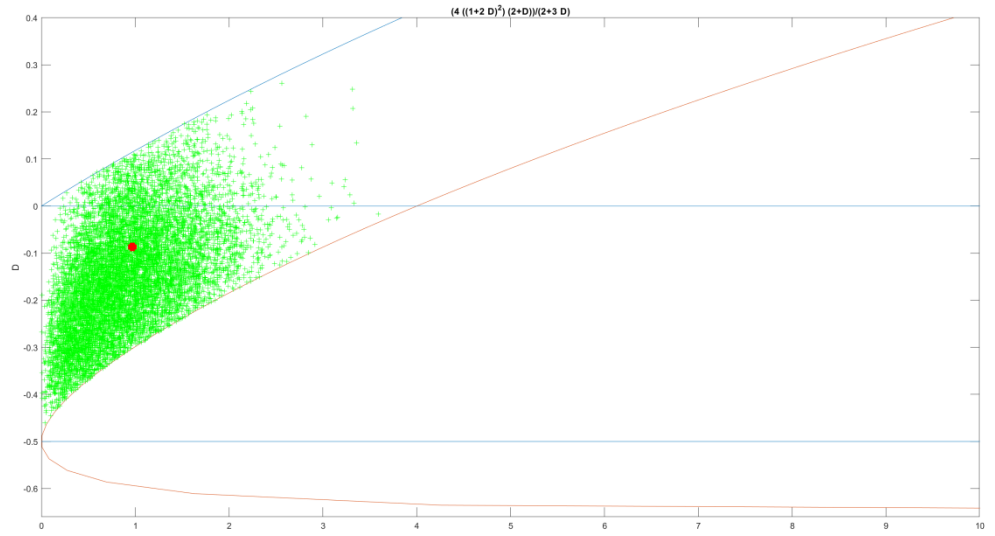
Şekil 20: Tip I Dağılımından $n=100$ İçin Türetilen Örnek Dağılışlar, Dönüşüm Yapılmayan Tahminleyici



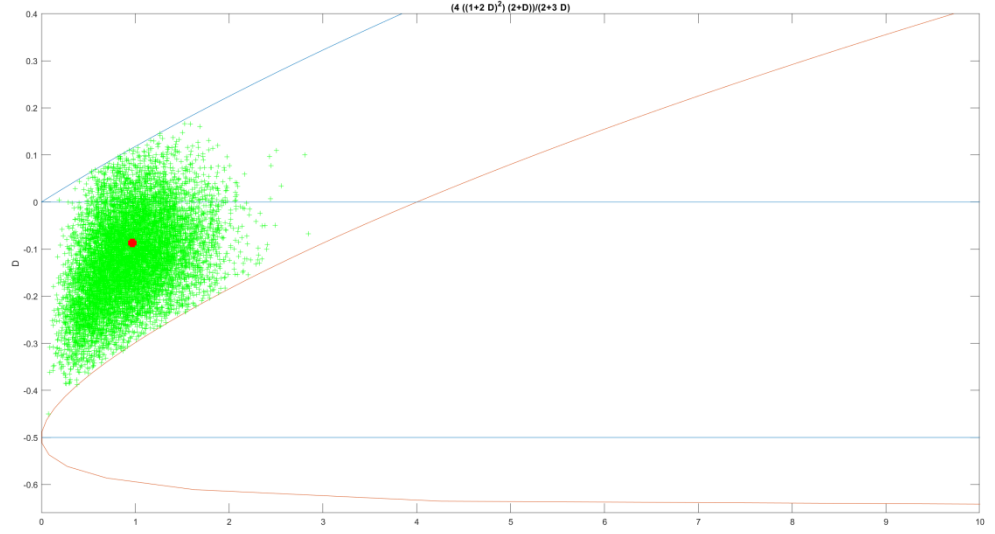
Şekil 21: Tip I Dağılımından $n=100$ İçin Türetilen Örnek Dağılışlar, Ortalaması Sıfırda Olan Tahminleyici



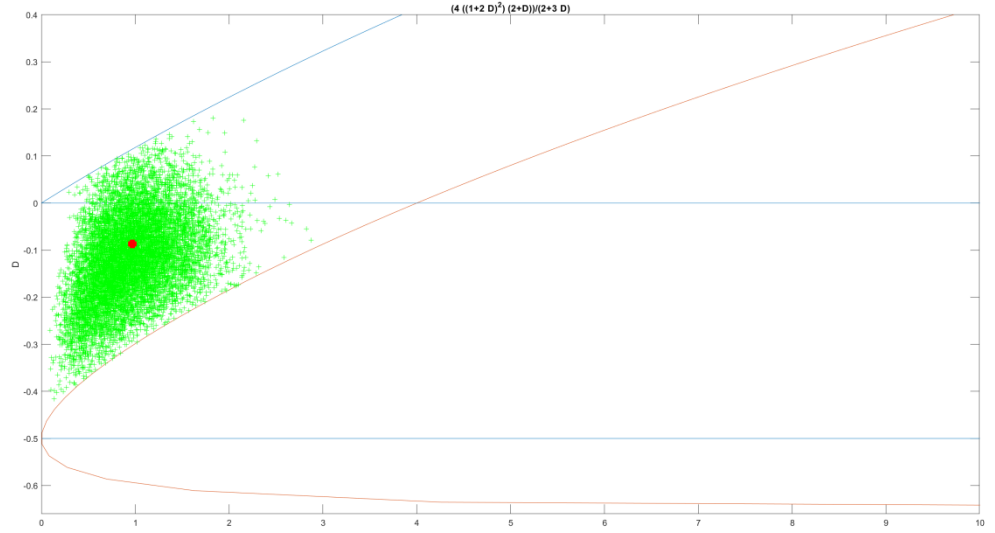
Şekil 22: Tip I Dağılımından $n=100$ İçin Türetilen Örnek Dağılışlar, Modu Sıfır Olan Tahminleyici



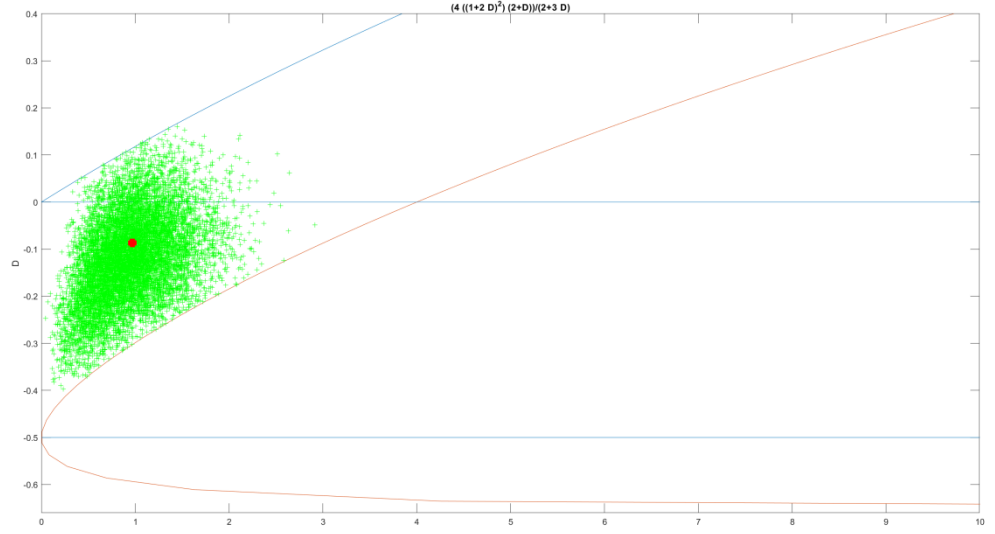
Şekil 23: Tip I Dağılımından $n=200$ İçin Türetilen Örnek Dağılışlar, Dönüşüm Yapılmayan Tahminleyici



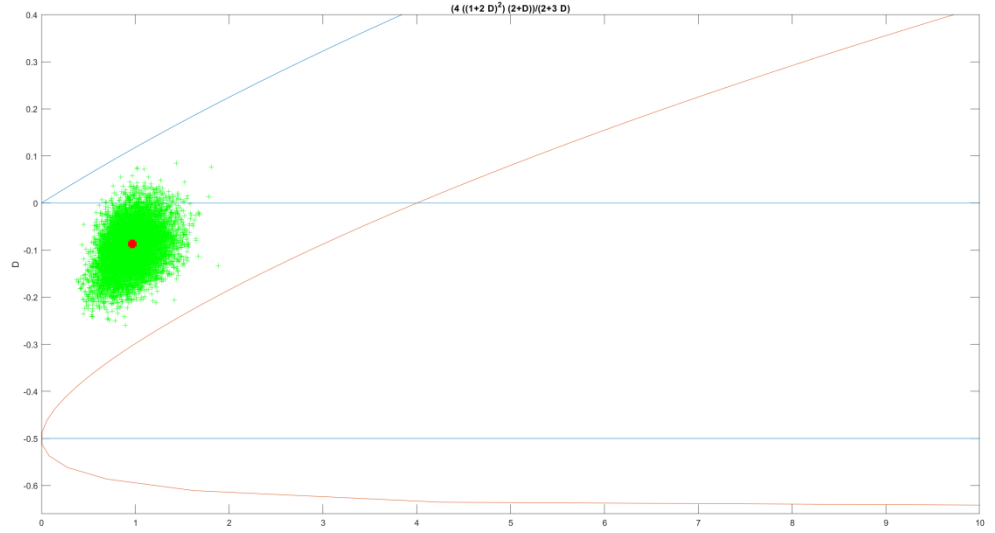
Şekil 24: Tip I Dağılımından $n=200$ İçin Türetilen Örnek Dağılışlar, Ortalaması Sıfırda Olan Tahminleyici



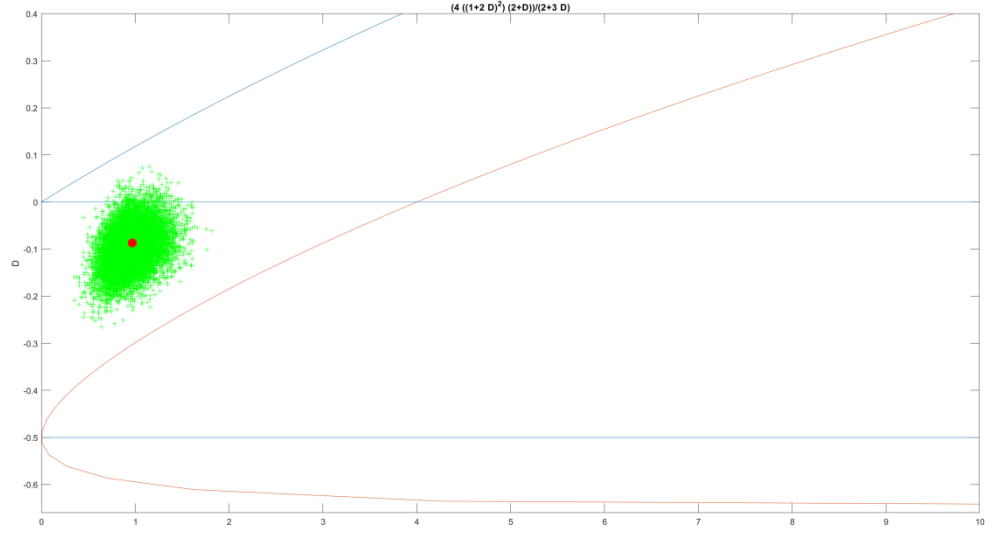
Şekil 25: Tip I Dağılımından $n=200$ İçin Türetilen Örnek Dağılışlar, Modu Sıfır Olan Tahminleyici



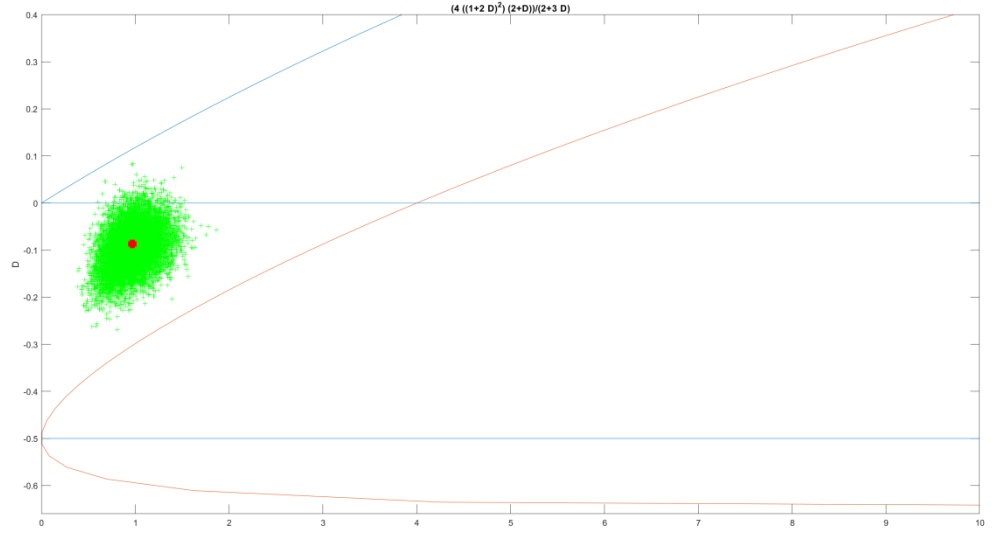
Şekil 26: Tip I Dağılımından $n=800$ İçin Türetilen Örnek Dağılışlar, Dönüşüm Yapılmayan Tahminleyici



Şekil 27: Tip I Dağılımından $n=800$ İçin Türetilen Örnek Dağılışlar, Ortalaması Sıfırda Olan Tahminleyici



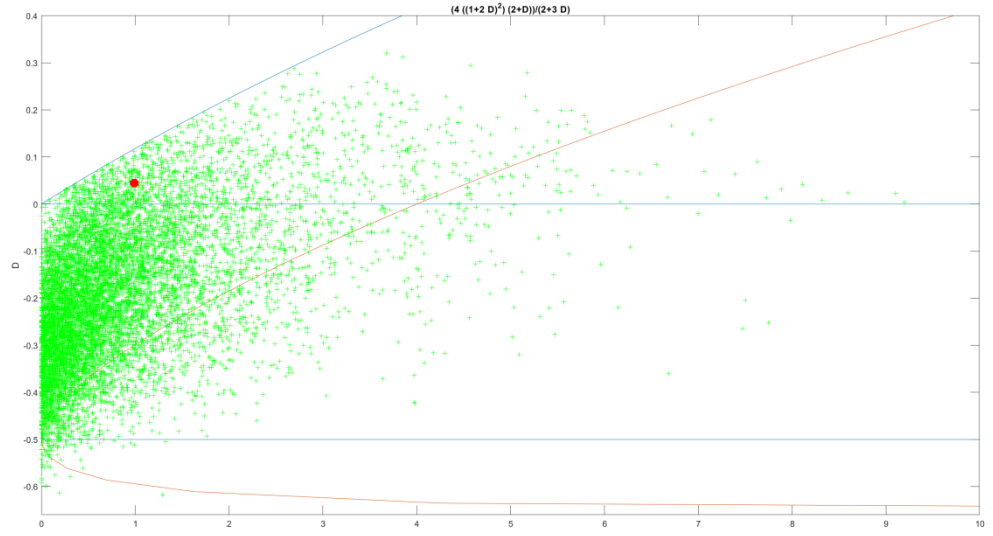
Şekil 28: Tip I Dağılımından $n=800$ İçin Türetilen Örnek Dağılışlar, Modu Sıfır Olan Tahminleyici



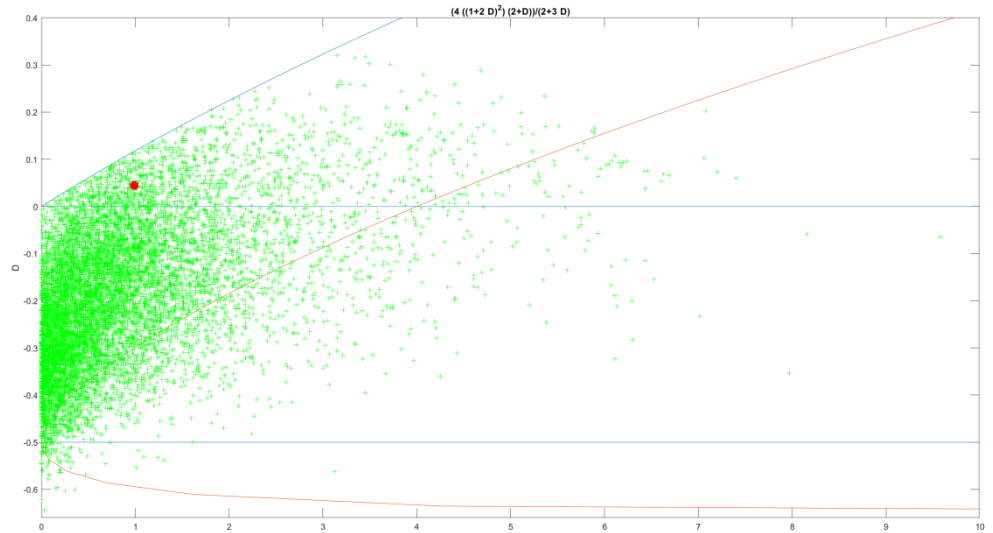
Ek 3: Tip VI Dağılımından Türetilen Dağılımlar

Bu kısımda verilen grafikler, örnek verilerinden elde edilen dağılımların Craig kartı üzerindeki görüntüleridir. Kalın nokta ile belirtilen, anakütle olasılık yoğunluk fonksiyonunun kart üzerindeki yeridir.

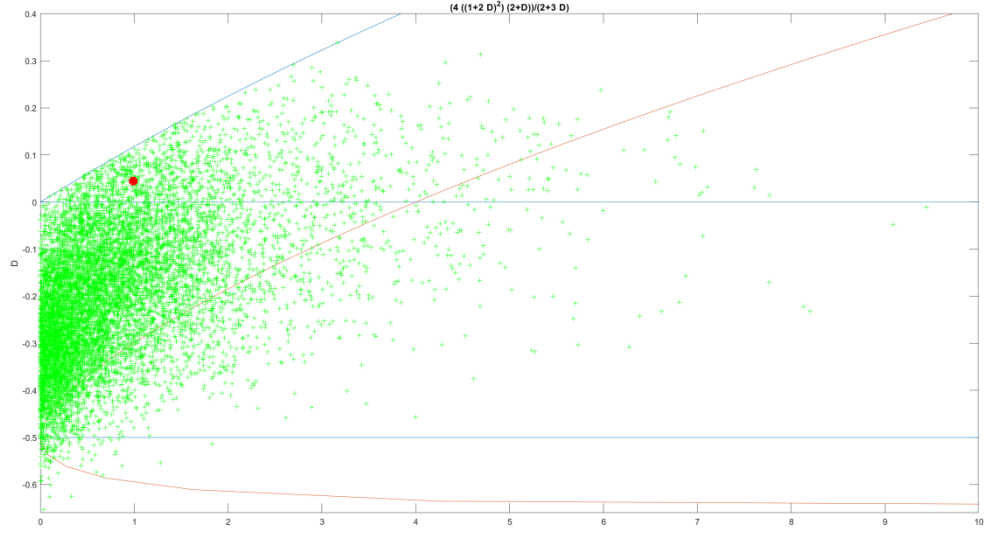
Şekil 29: Tip VI Dağılımından $n=50$ İçin Türetilen Örnek Dağılışlar, Dönüşüm Yapılmayan Tahminleyici



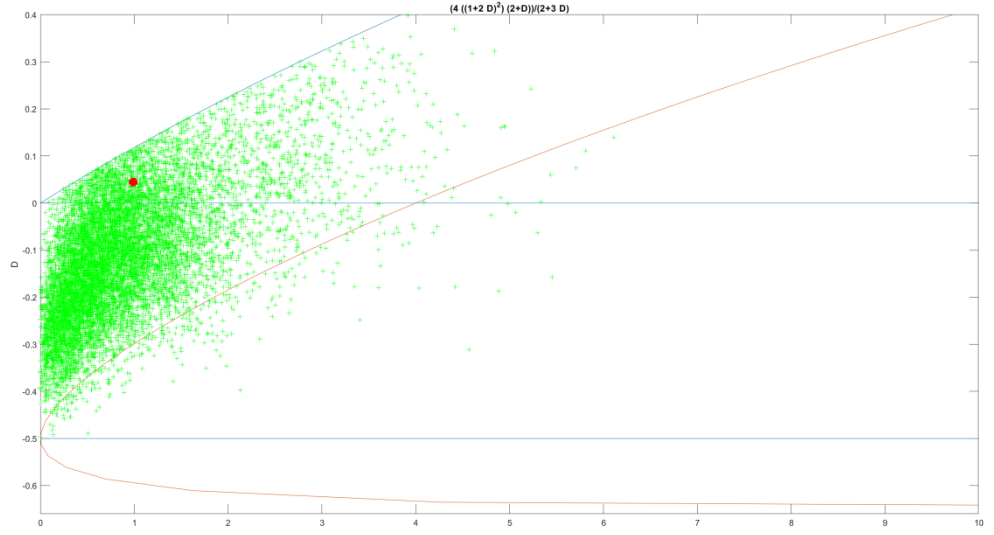
Şekil 30: Tip VI Dağılımından $n=50$ İçin Türetilen Örnek Dağılışlar, Ortalaması Sıfırda Olan Tahminleyici



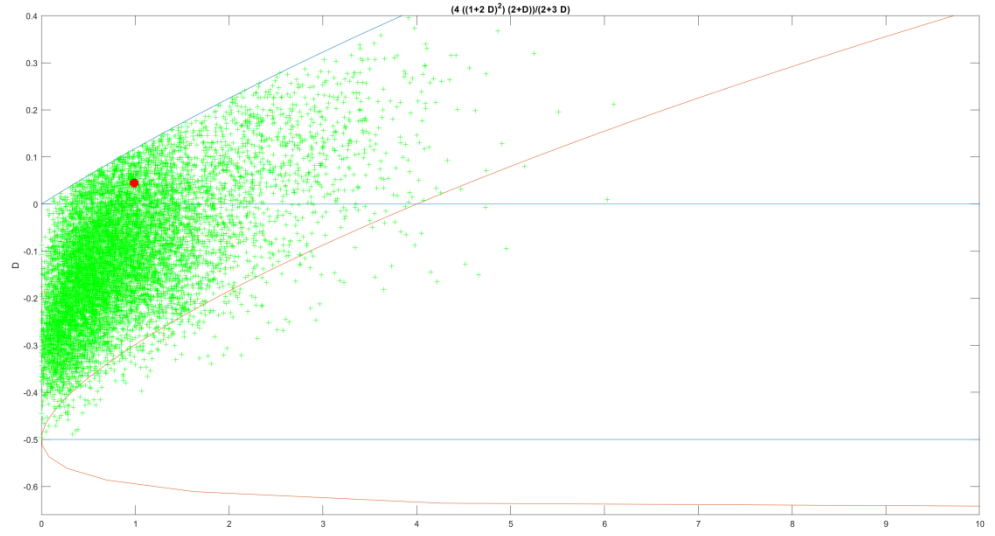
Şekil 31: Tip VI Dağılımından $n=50$ İçin Türetilen Örnek Dağılışlar, Modu Sıfır Olan Tahminleyici



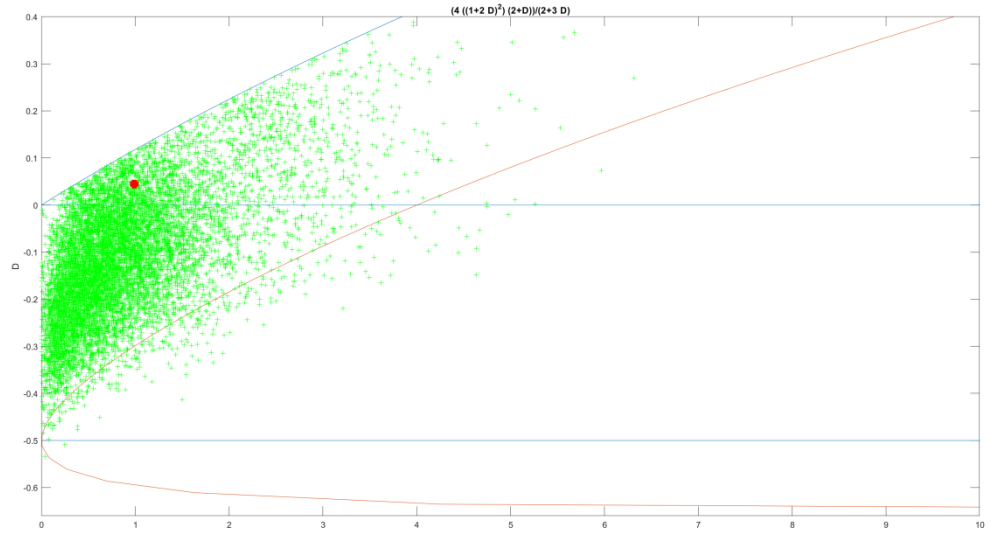
Şekil 32: Tip VI Dağılımından $n=100$ İçin Türetilen Örnek Dağılışlar, Dönüşüm Yapılmayan Tahminleyici



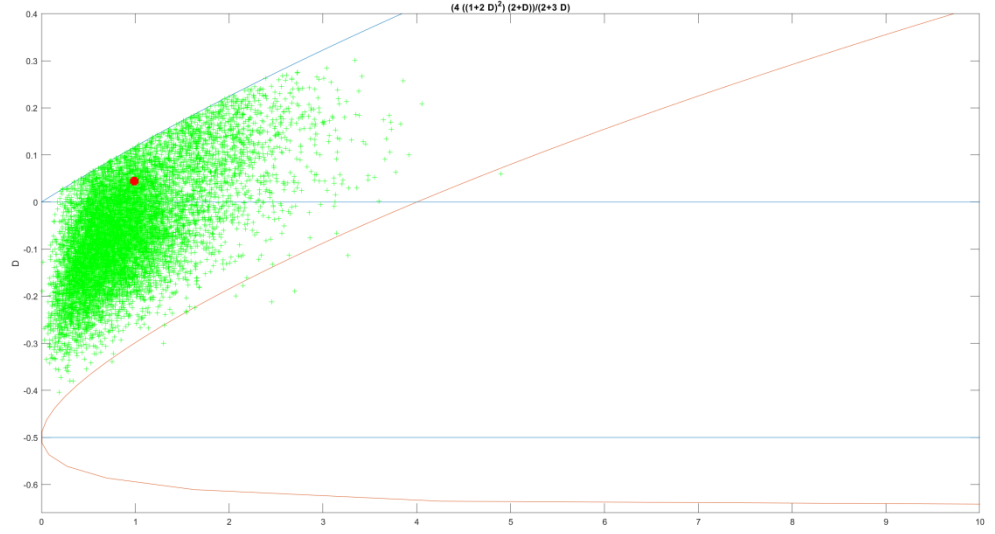
Şekil 33: Tip VI Dağılımından $n=100$ İçin Türetilen Örnek Dağılışlar, Ortalaması Sıfırda Olan Tahminleyici



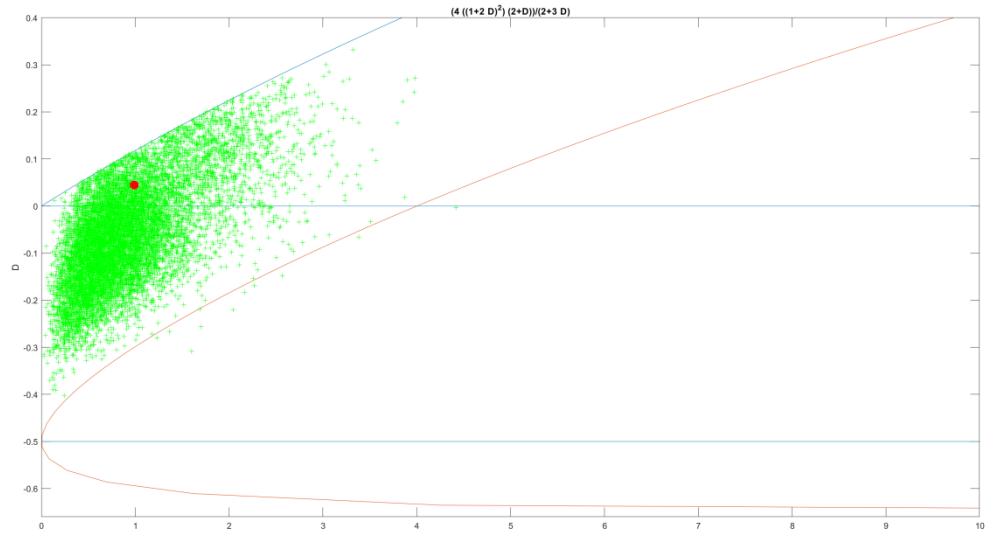
Şekil 34: Tip VI Dağılımından $n=100$ İçin Türetilen Örnek Dağılışlar, Modu Sıfır Olan Tahminleyici



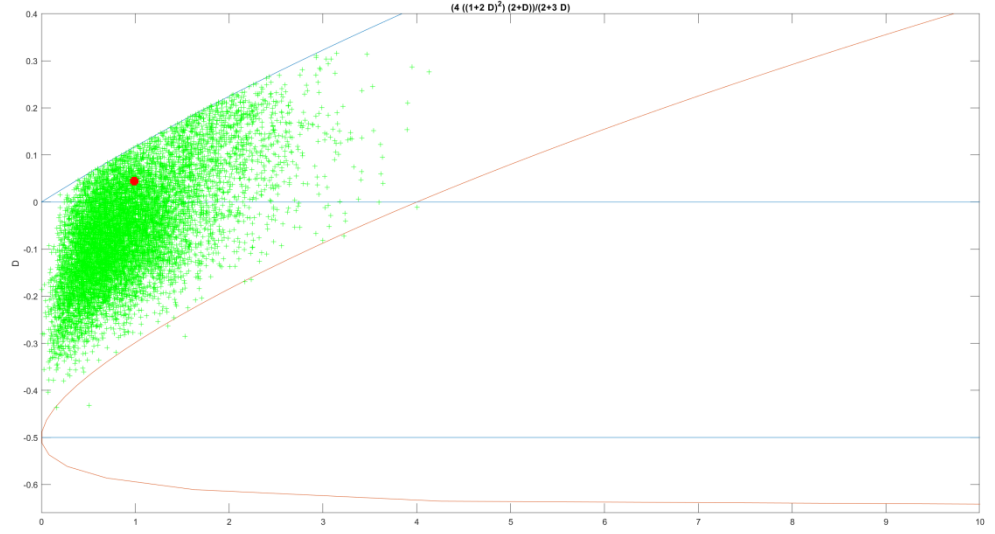
Şekil 35: Tip VI Dağılımından $n=100$ İçin Türetilen Örnek Dağılışlar, Dönüşüm Yapılmayan Tahminleyici



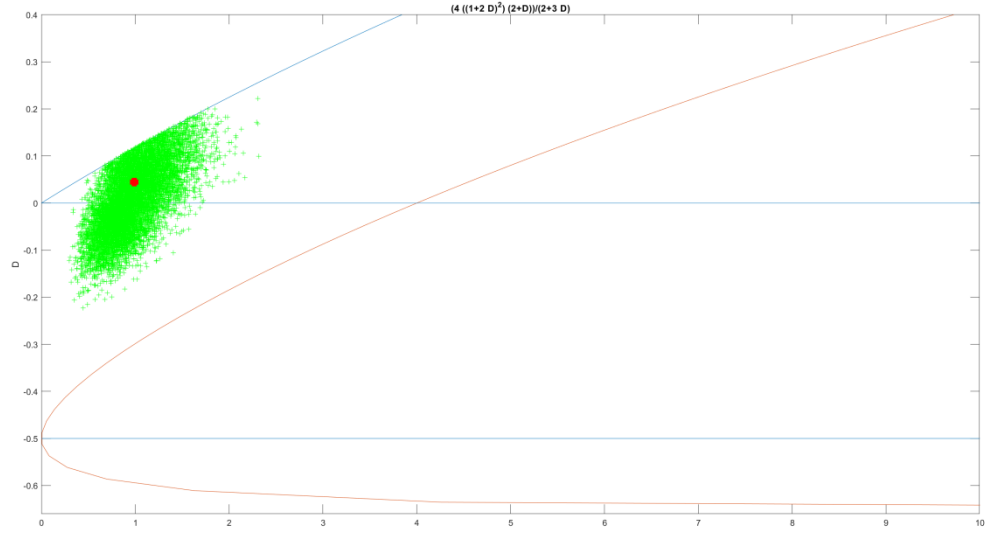
Şekil 36: Tip VI Dağılımından $n=200$ İçin Türetilen Örnek Dağılışlar, Ortalaması Sıfırda Olan Tahminleyici



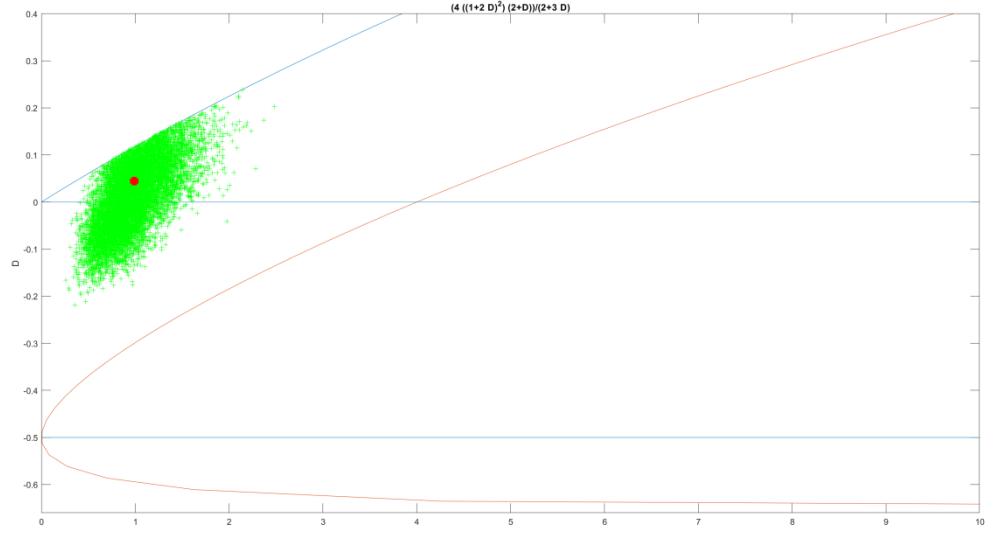
Şekil 37: Tip VI Dağılımından $n=200$ İçin Türetilen Örnek Dağılışlar, Modu Sıfır Olan Tahminleyici



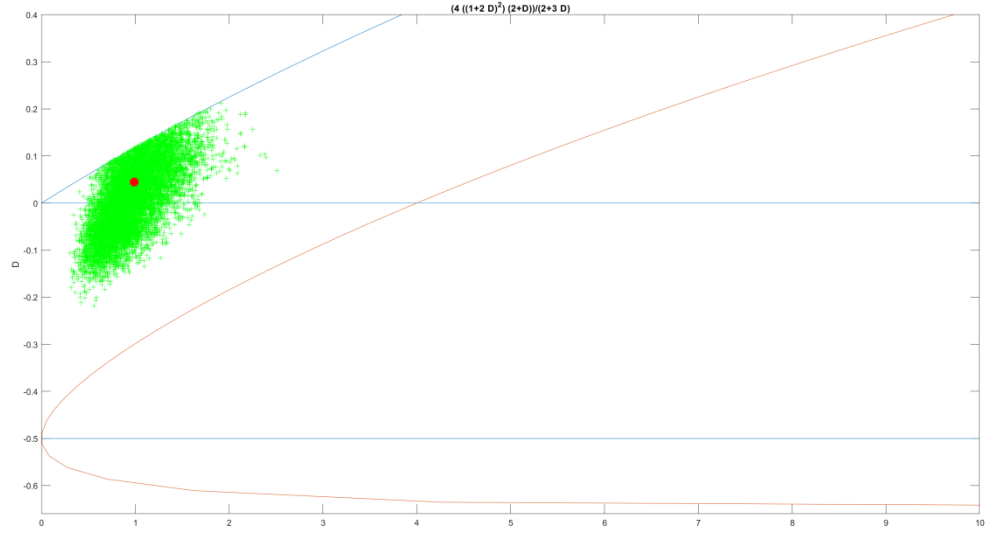
Şekil 38: Tip VI Dağılımından $n=800$ İçin Türetilen Örnek Dağılışlar, Dönüşüm Yapılmayan Tahminleyici



Şekil 39: Tip VI Dağılımından $n=800$ İçin Türetilen Örnek Dağılışlar, Ortalaması Sıfırda Olan Tahminleyici



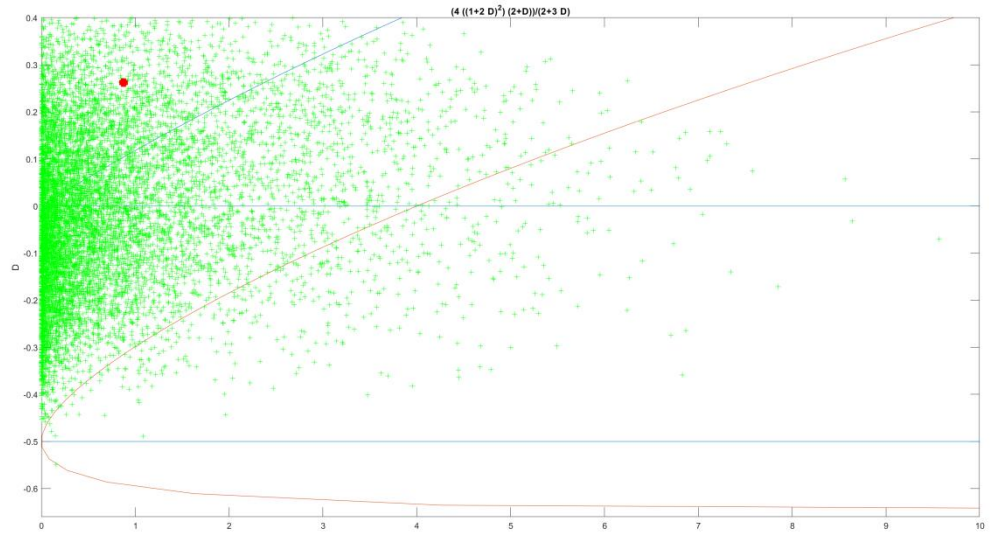
Şekil 40: Tip VI Dağılımından $n=800$ İçin Türetilen Örnek Dağılışlar, Modu Sıfır Olan Tahminleyici



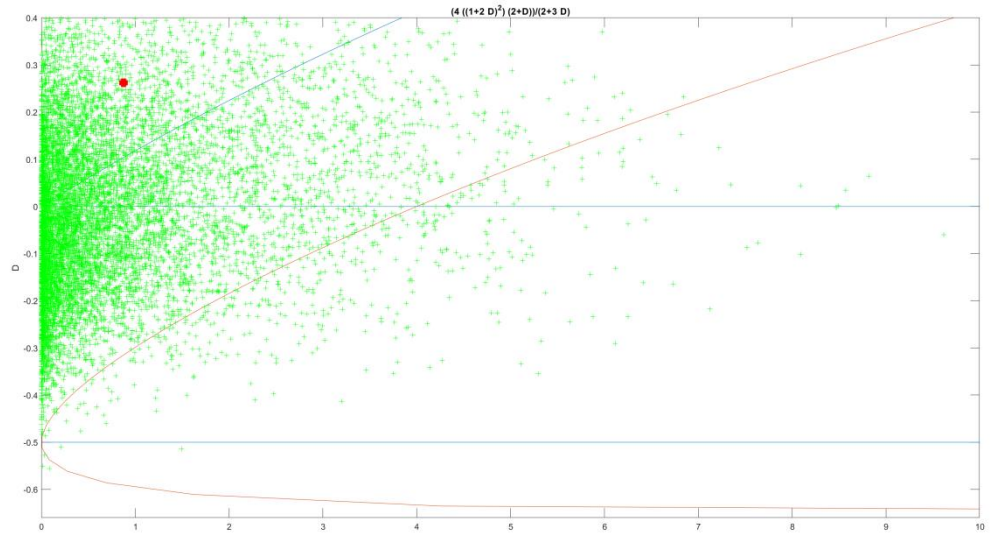
Ek 4: Tip IV Dağılımından Türetilen Dağılımlar

Bu kısımda verilen grafikler, örnek verilerinden elde edilen dağılımların Craig kartı üzerindeki görüntüleridir. Kalın nokta ile belirtilen, anakütle olasılık yoğunluk fonksiyonunun kart üzerindeki yeridir.

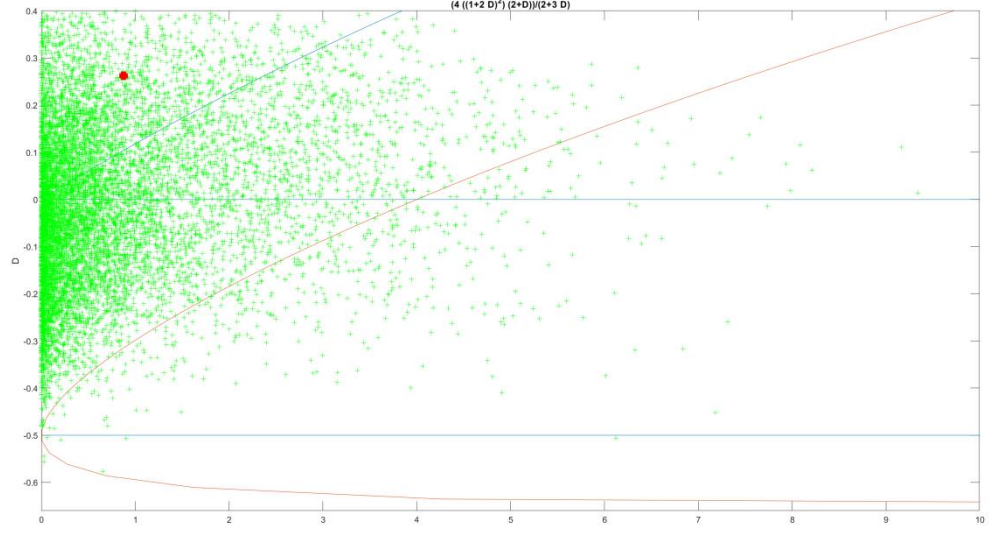
Şekil 41: Tip IV Dağılımından $n=50$ İçin Türetilen Örnek Dağılışlar, Dönüşüm Yapılmayan Tahminleyici



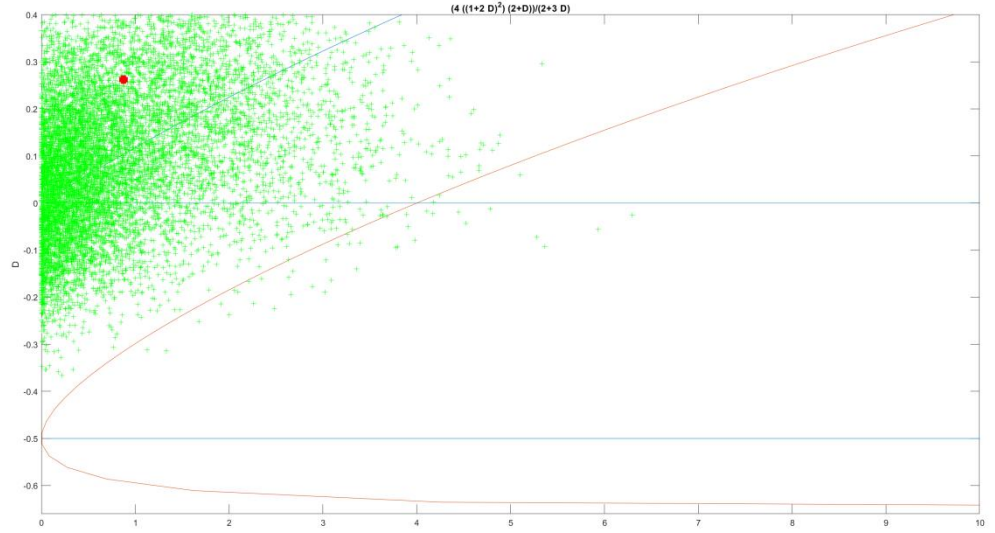
Şekil 42: Tip IV Dağılımından $n=50$ İçin Türetilen Örnek Dağılışlar, Ortalaması Sıfırda Olan Tahminleyici



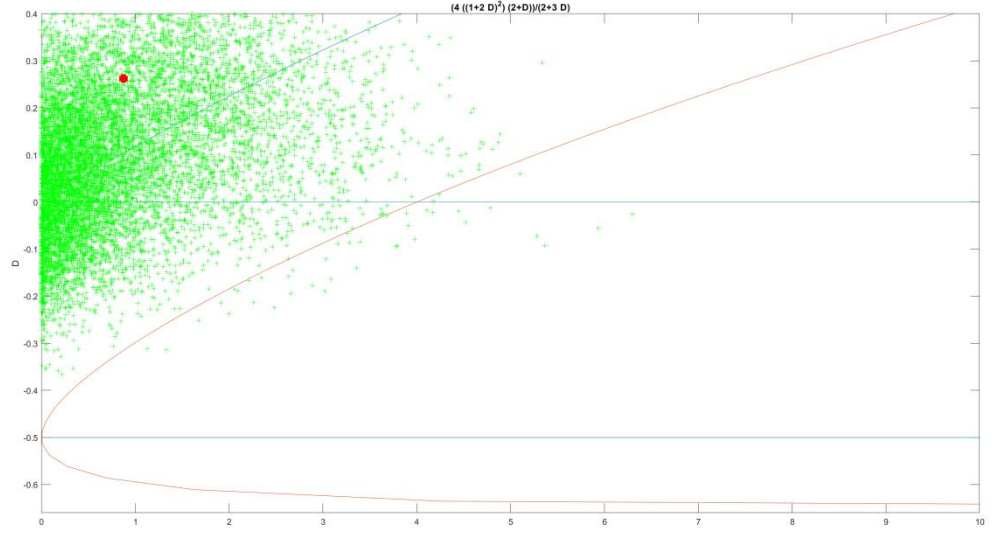
Şekil 43: Tip IV Dağılımından $n=50$ İçin Türetilen Örnek Dağılışlar, Modu Sıfır Olan Tahminleyici



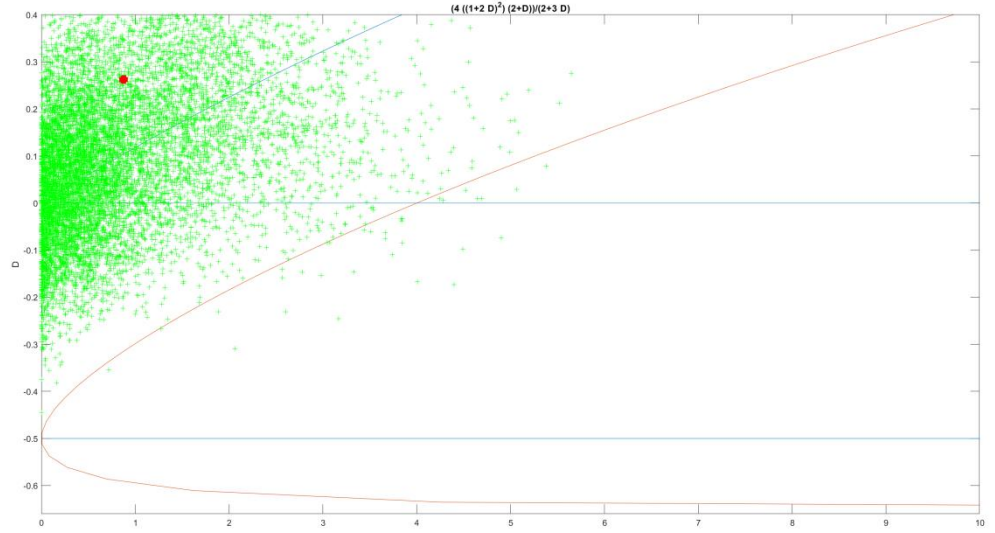
Şekil 44: Tip IV Dağılımından $n=100$ İçin Türetilen Örnek Dağılışlar, Dönüşüm Yapılmayan Tahminleyici



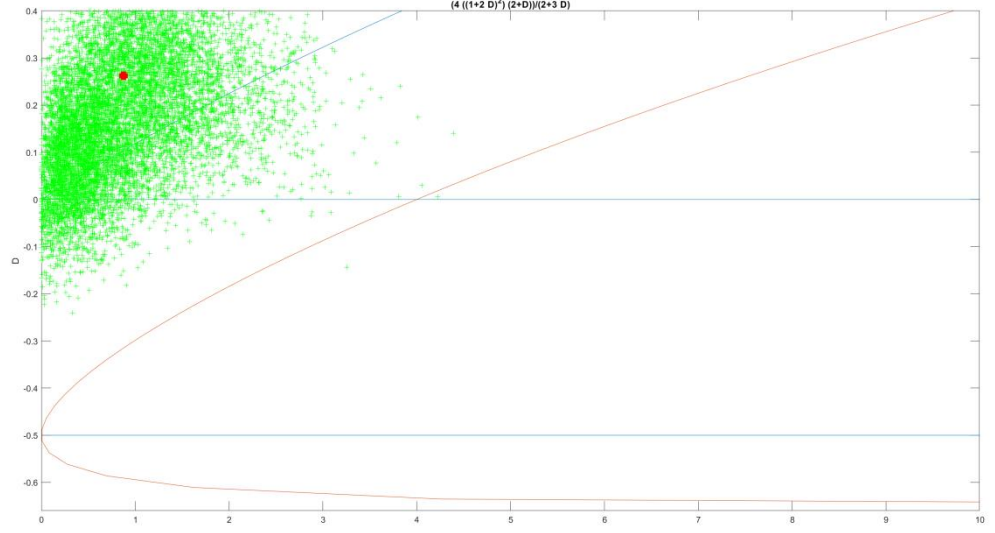
Şekil 45: Tip IV Dağılımından $n=100$ İçin Türetilen Örnek Dağılışlar, Ortalaması Sıfırda Olan Tahminleyici



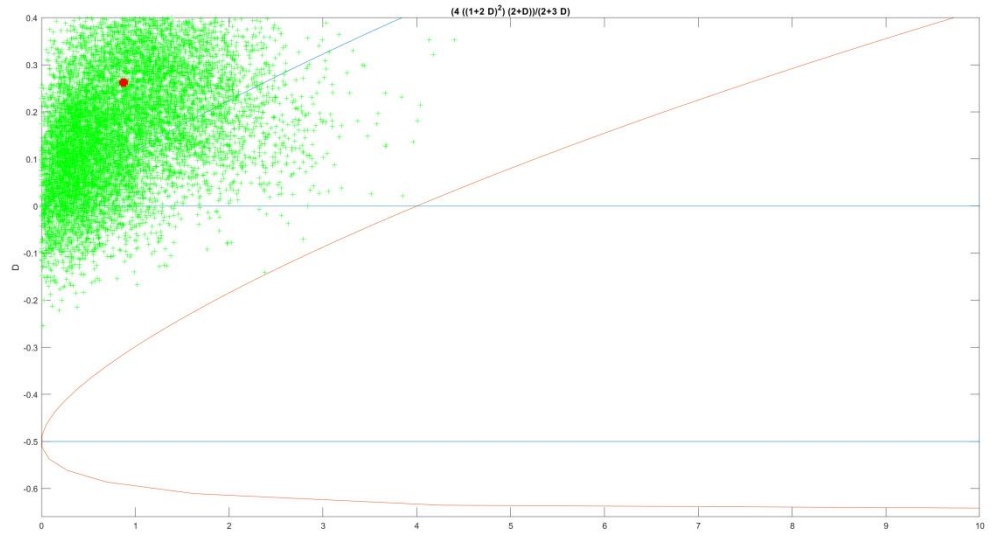
Şekil 46: Tip IV Dağılımından $n=100$ İçin Türetilen Örnek Dağılışlar, Modu Sıfır Olan Tahminleyici



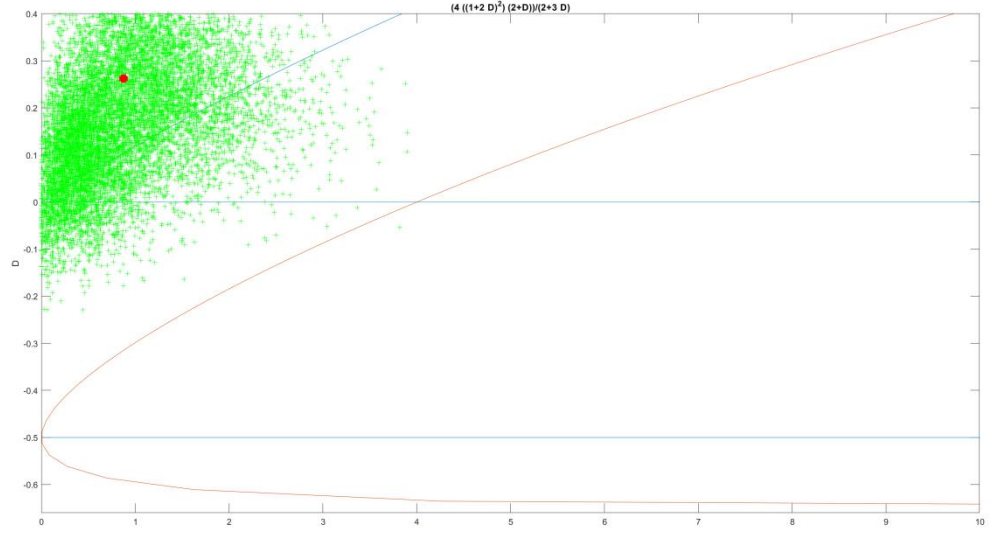
Şekil 47: Tip IV Dağılımından $n=200$ İçin Türetilen Örnek Dağılışlar, Dönüşüm Yapılmayan Tahminleyici



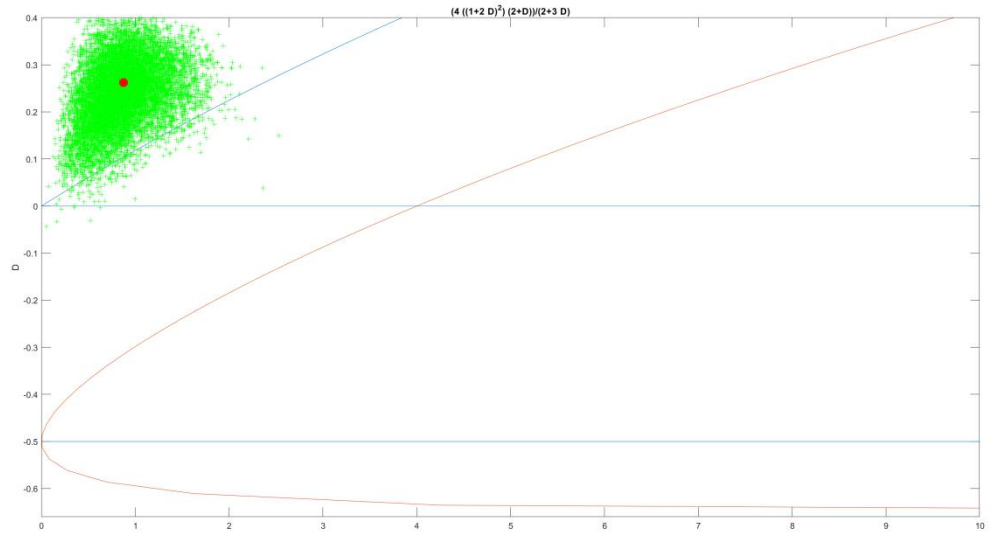
Şekil 48: Tip IV Dağılımından $n=200$ İçin Türetilen Örnek Dağılışlar, Ortalaması Sıfırda Olan Tahminleyici



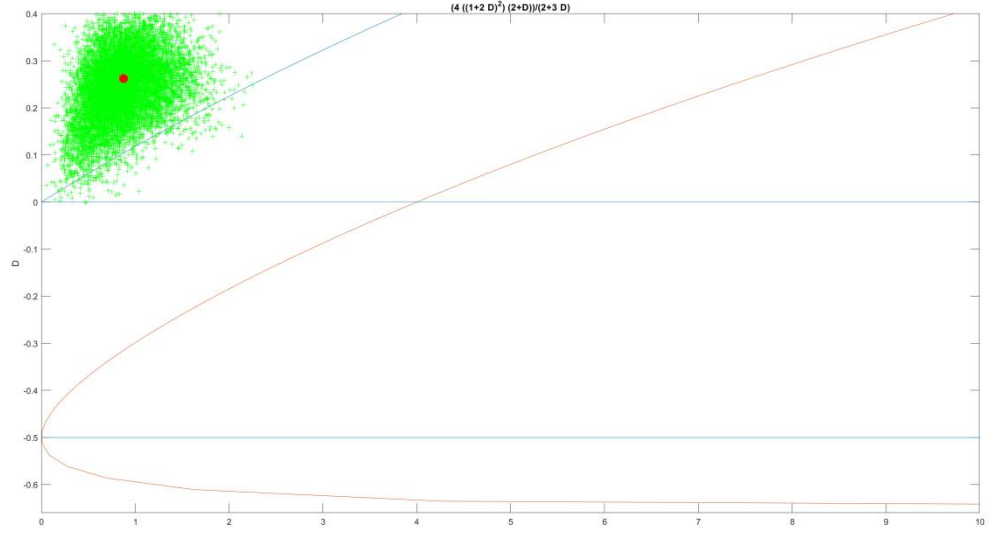
Şekil 49: Tip IV Dağılımından $n=200$ İçin Türetilen Örnek Dağılışlar, Modu Sıfır Olan Tahminleyici



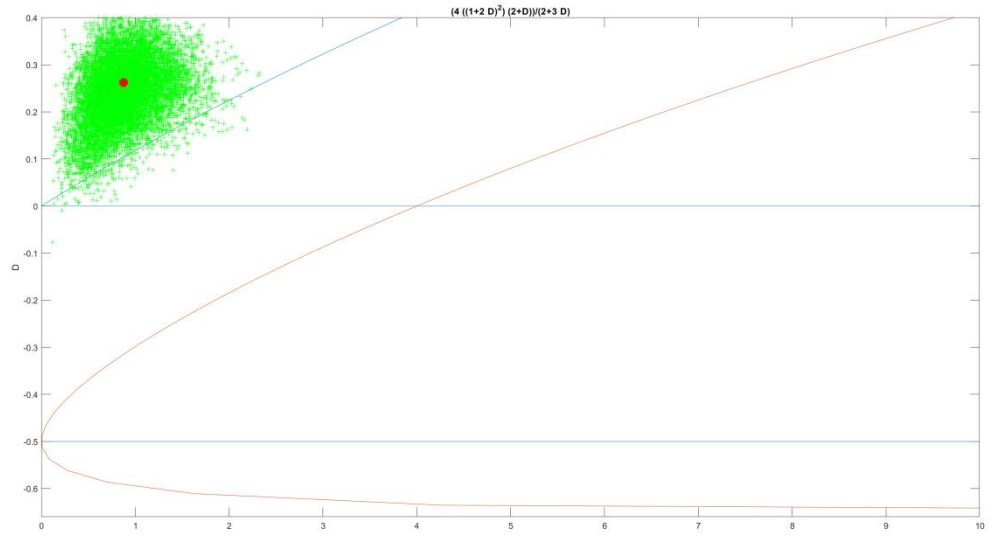
Şekil 50: Tip IV Dağılımından $n=800$ İçin Türetilen Örnek Dağılışlar, Dönüşüm Yapılmayan Tahminleyici



Şekil 51: Tip IV Dağılımından $n=800$ İçin Türetilen Örnek Dağılışlar, Ortalaması Sıfırda Olan Tahminleyici



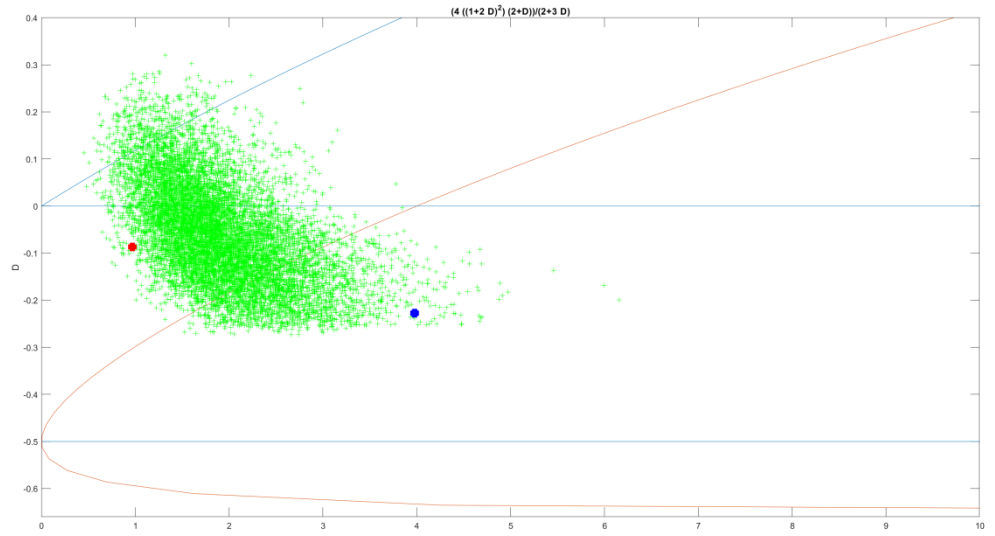
Şekil 52: Tip IV Dağılımından $n=800$ İçin Türetilen Örnek Dağılışlar, Modu Sıfır Olan Tahminleyici



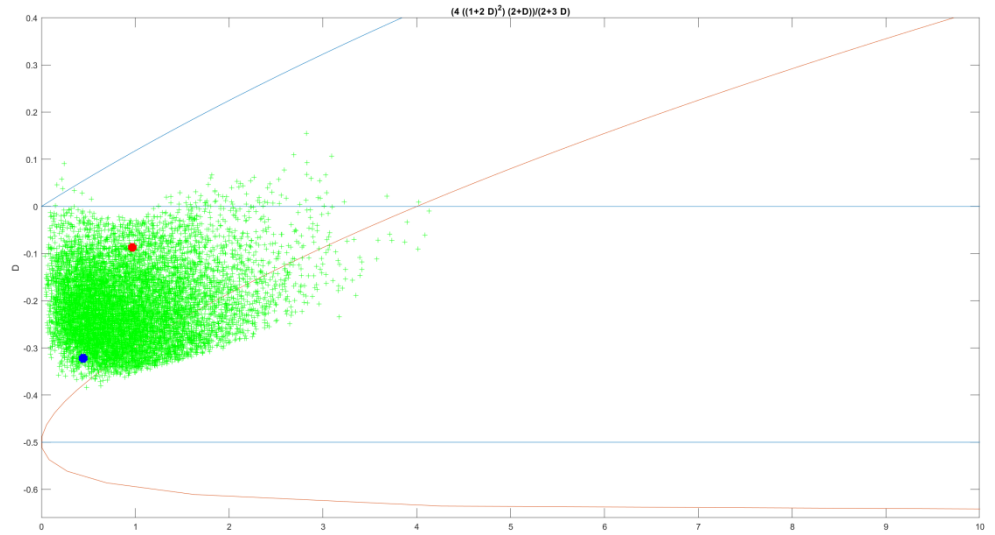
Ek 5: Tip I Dağılımından Türetilen Verilere Sağdan Eklenen İlave Gözlemin Etkisi

Bu kısımda verilen grafikler, örnek verilerinden elde edilen dağılımların Craig kartı üzerindeki görüntüleridir. Kırmızı nokta ile belirtilen anakütle olasılık yoğunluk fonksiyonu, mavi ile belirtilen en uzakta yer alan dağılımdır.

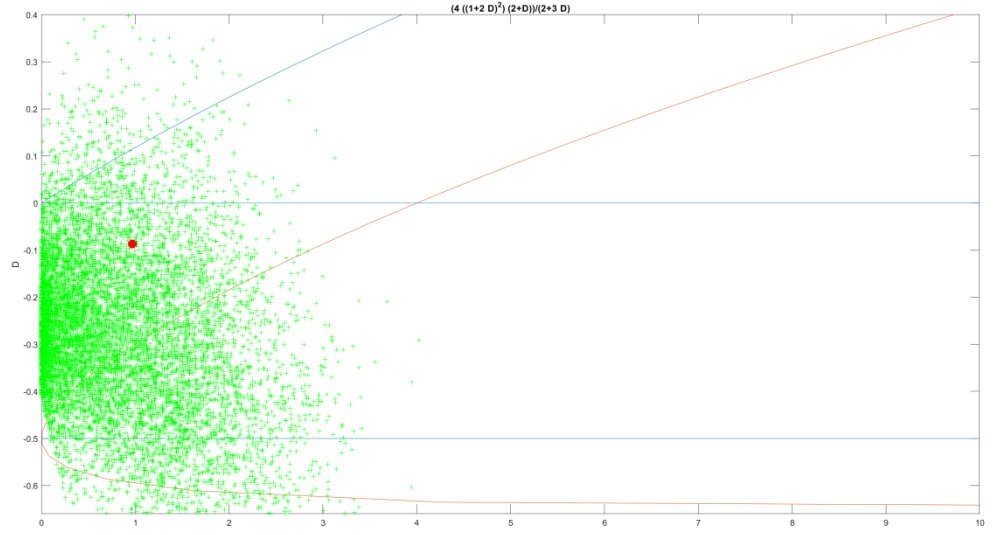
Şekil 53: Tip I Dağılımı ($n=51$), Dönüşüm Yapılmayan Tahminleyici



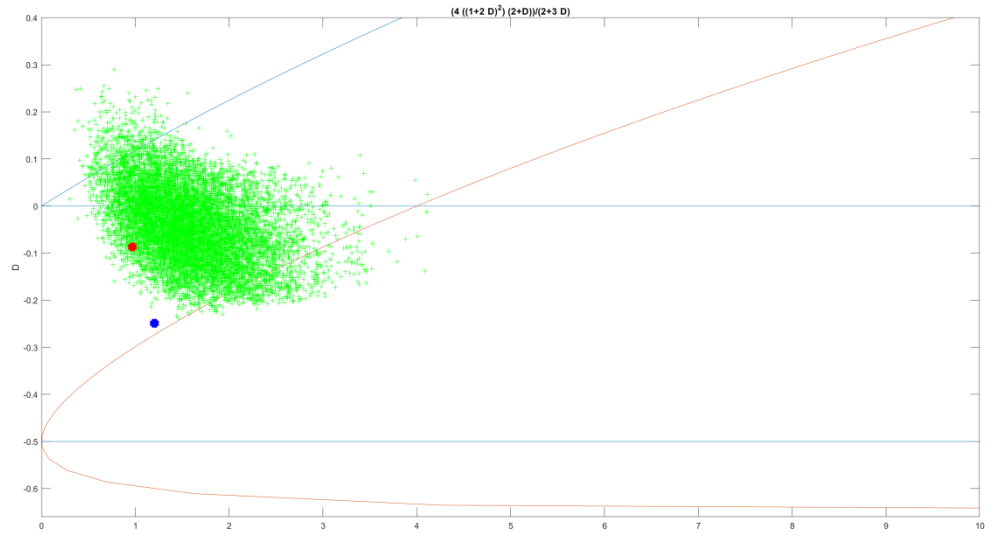
Şekil 54: Tip I Dağılımı ($n=51$), Ortalaması Sıfır Olan Tahminleyici



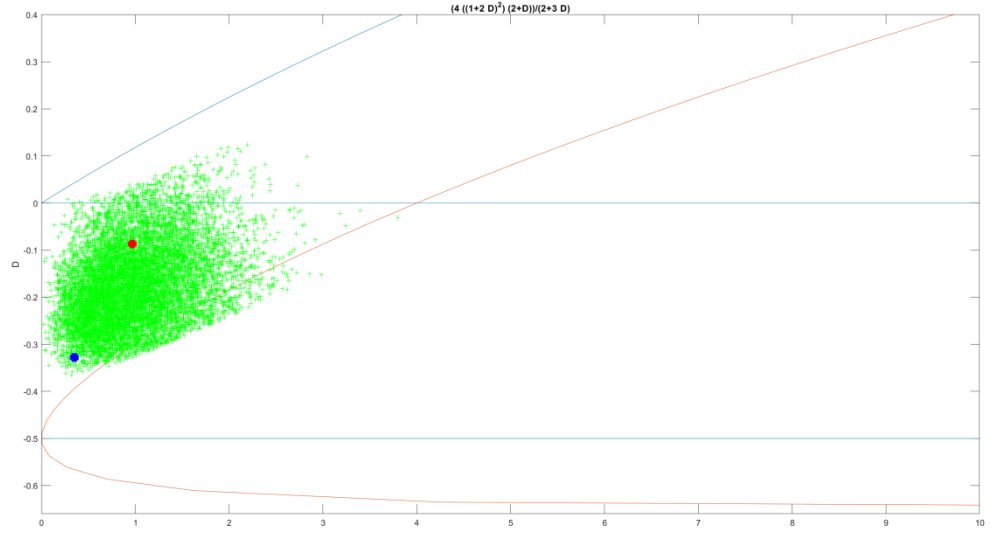
Şekil 55: Tip I Dağılımı ($n=51$), Modu Sıfır Olan Tahminleyici



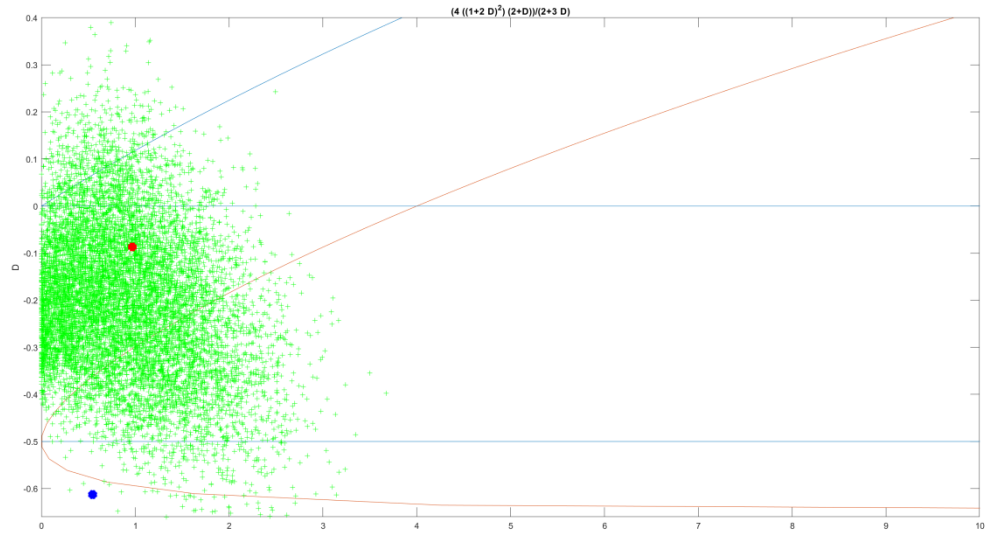
Şekil 56: Tip I Dağılımı ($n=101$), Dönüşüm Yapılmayan Tahminleyici



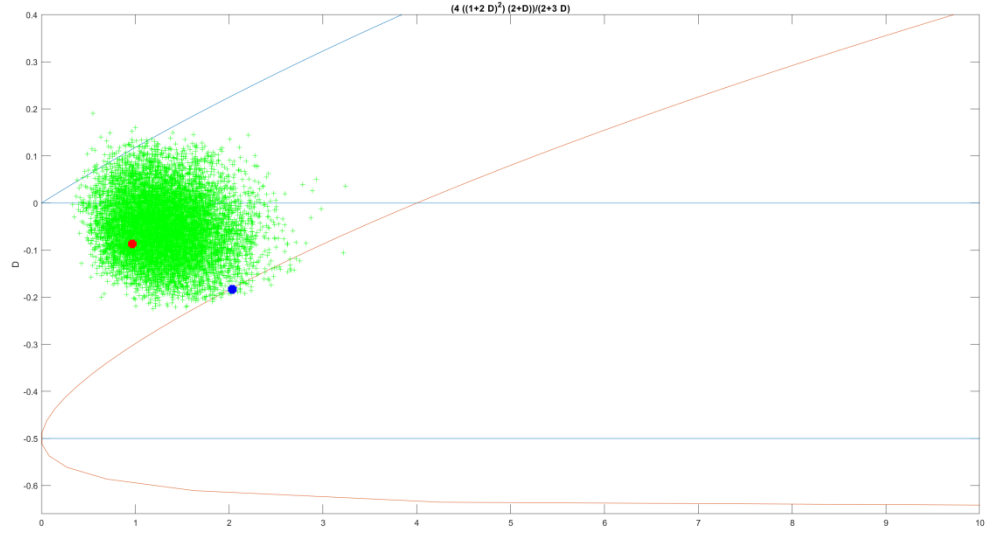
Şekil 57: Tip I Dağılımı ($n=101$), Ortalaması Sıfır Olan Tahminleyici



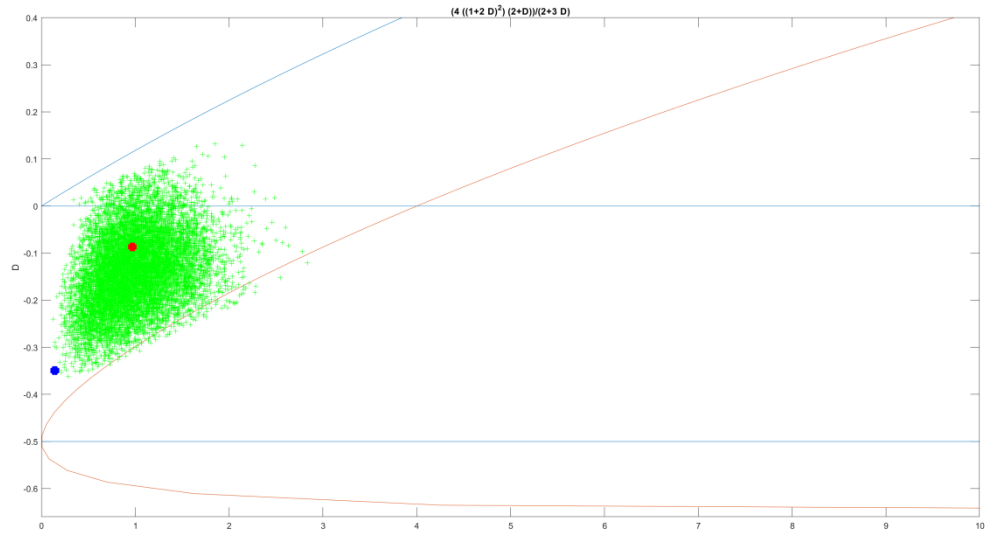
Şekil 58: Tip I Dağılımı ($n=101$), Modu Sıfır Olan Tahminleyici



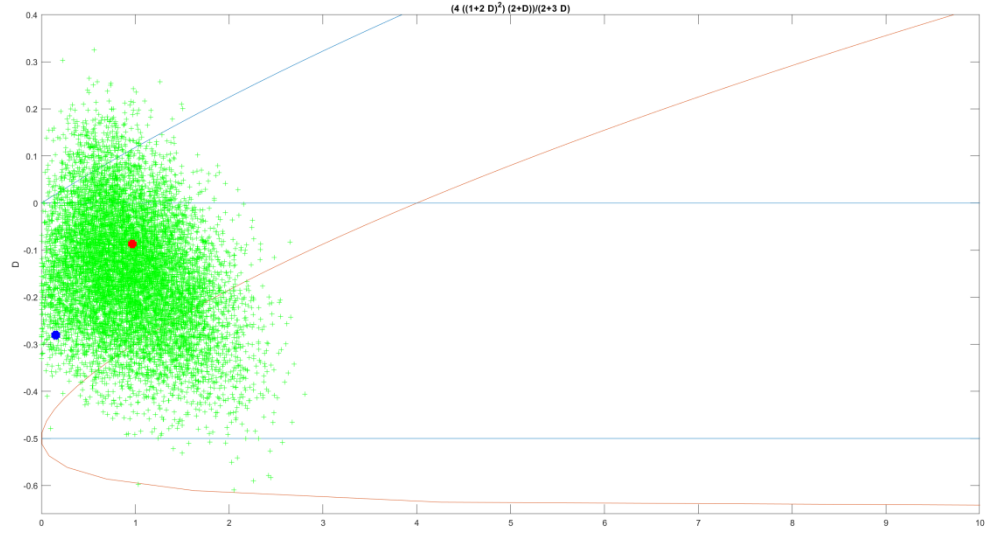
Şekil 59: Tip I Dağılımı ($n=201$), Dönüşüm Yapılmayan Tahminleyici



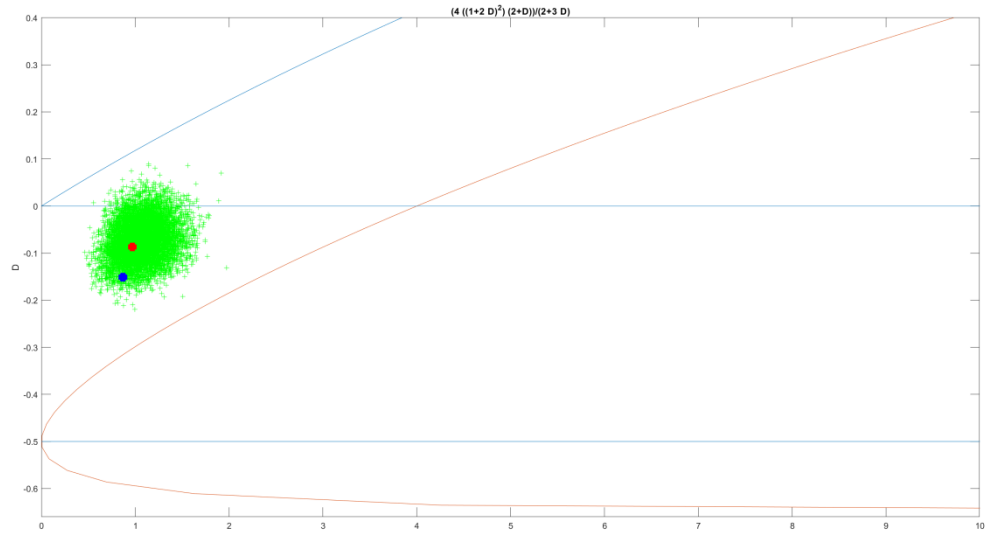
Şekil 60: Tip I Dağılımı ($n=201$), Ortalaması Sıfır Olan Tahminleyici



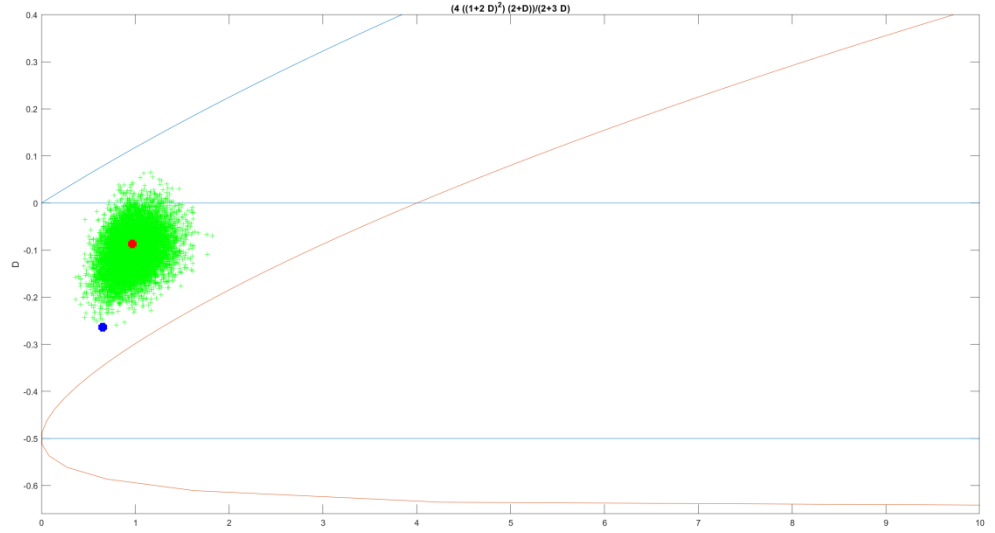
Şekil 61: Tip I Dağılımı ($n=201$), Modu Sıfır Olan Tahminleyici



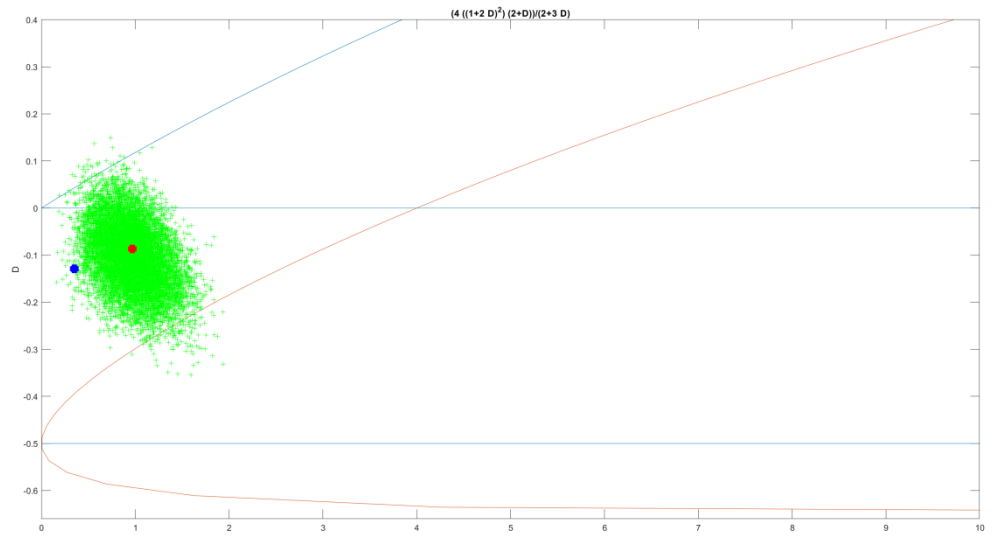
Şekil 62: Tip I Dağılımı ($n=801$), Dönüşüm Yapılmayan Tahminleyici



Şekil 63: Tip I Dağılımı ($n=801$), Ortalaması Sıfır Olan Tahminleyici



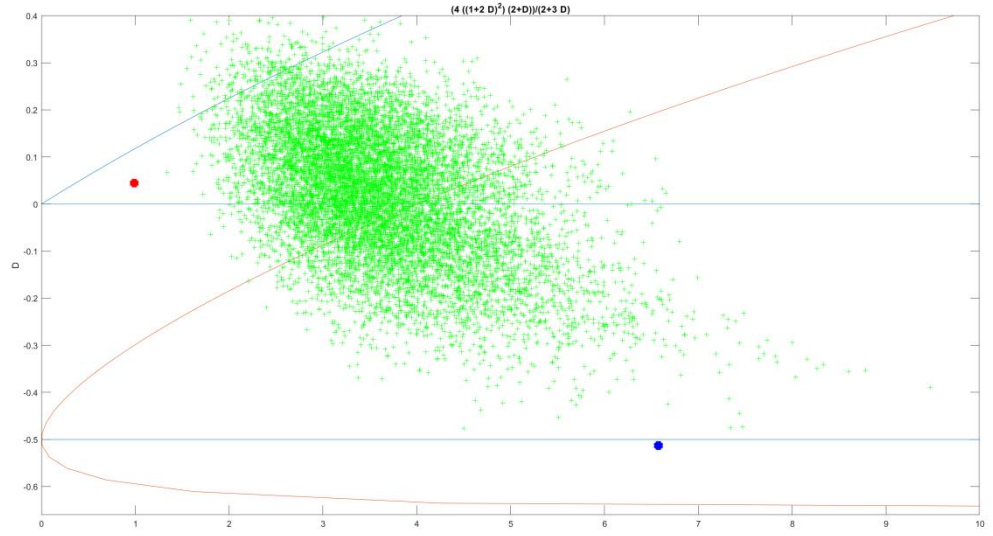
Şekil 64: Tip I Dağılımı ($n=801$), Modu Sıfır Olan Tahminleyici



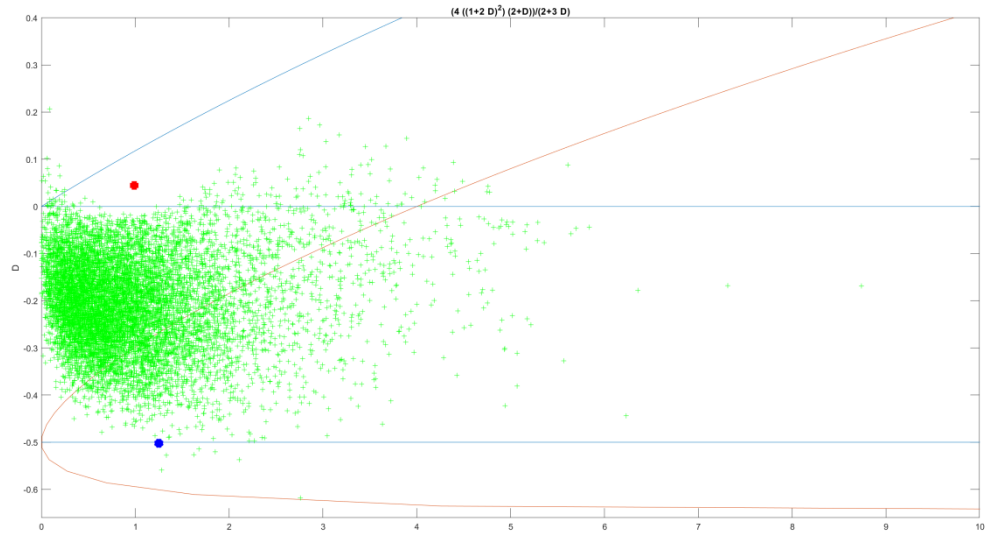
Ek 6: Tip VI Dağılımından Türetilen Verilere Sağdan Eklenen İlave Gözlemin Etkisi

Bu kısımda verilen grafikler, örnek verilerinden elde edilen dağılımların Craig kartı üzerindeki görüntüleridir. Kırmızı nokta ile belirtilen anakütle olasılık yoğunluk fonksiyonu, mavi ile belirtilen en uzakta yer alan dağılımdır.

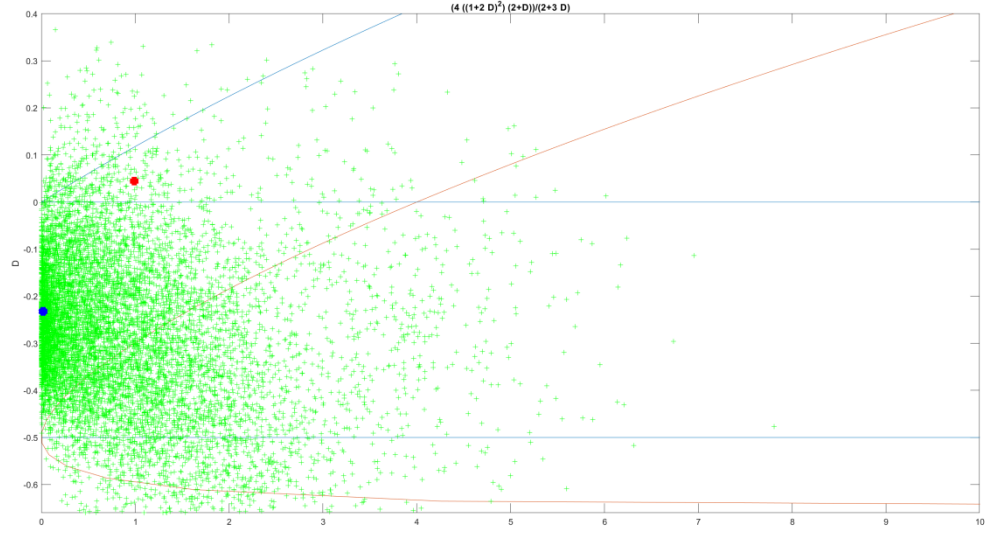
Şekil 65: Tip VI Dağılımı ($n=51$), Dönüşüm Yapılmayan Tahminleyici



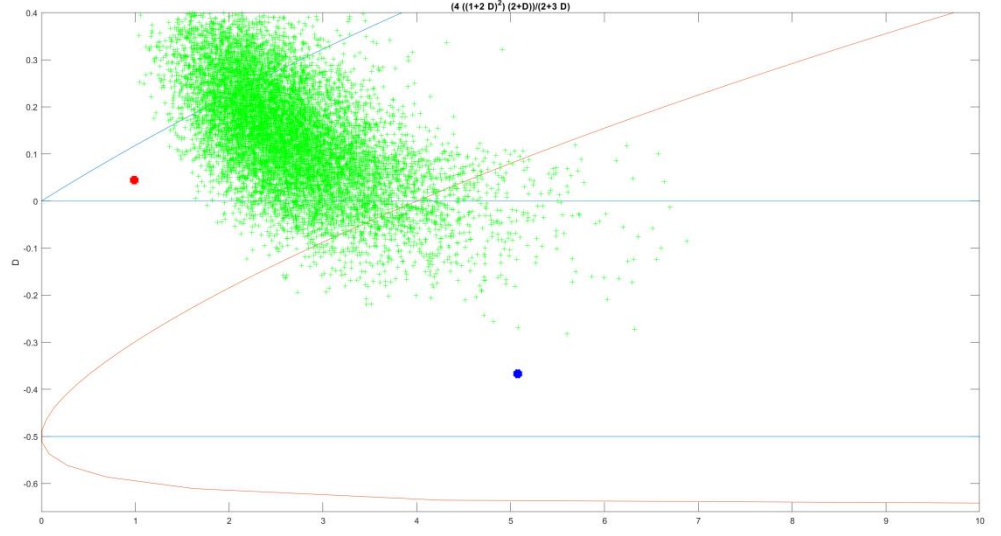
Şekil 66: Tip VI Dağılımı ($n=51$), Ortalaması Sıfır Olan Tahminleyici



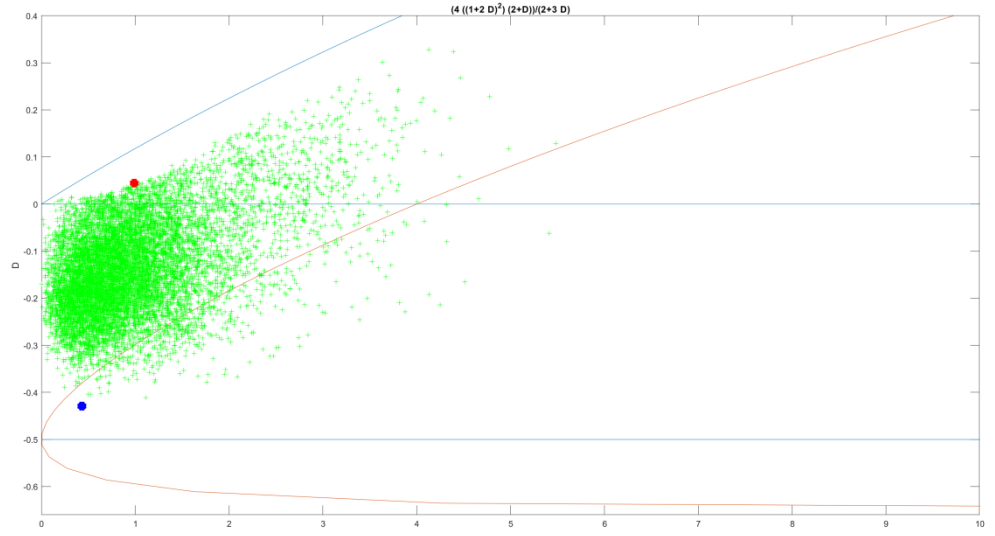
Şekil 67: Tip VI Dağılımı ($n=51$), Modu Sıfır Olan Tahminleyici



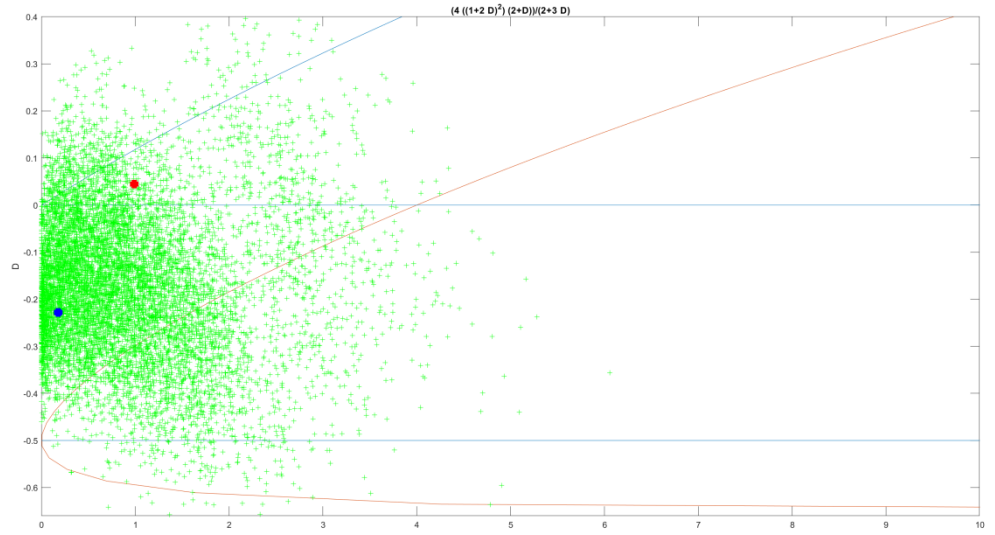
Şekil 68: Tip VI Dağılımı ($n=101$), Dönüşüm Yapılmayan Tahminleyici



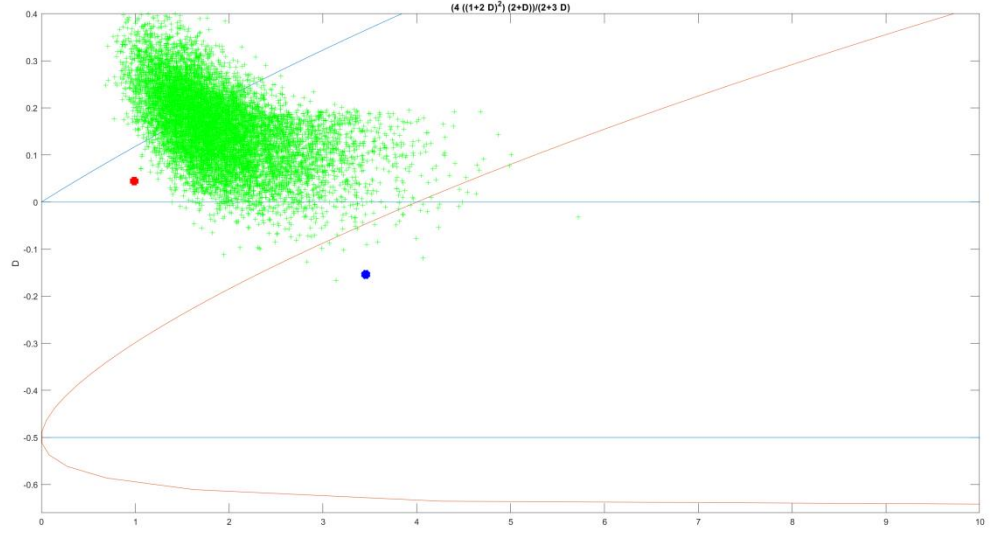
Şekil 69: Tip VI Dağılımı ($n=101$), Ortalaması Sıfır Olan Tahminleyici



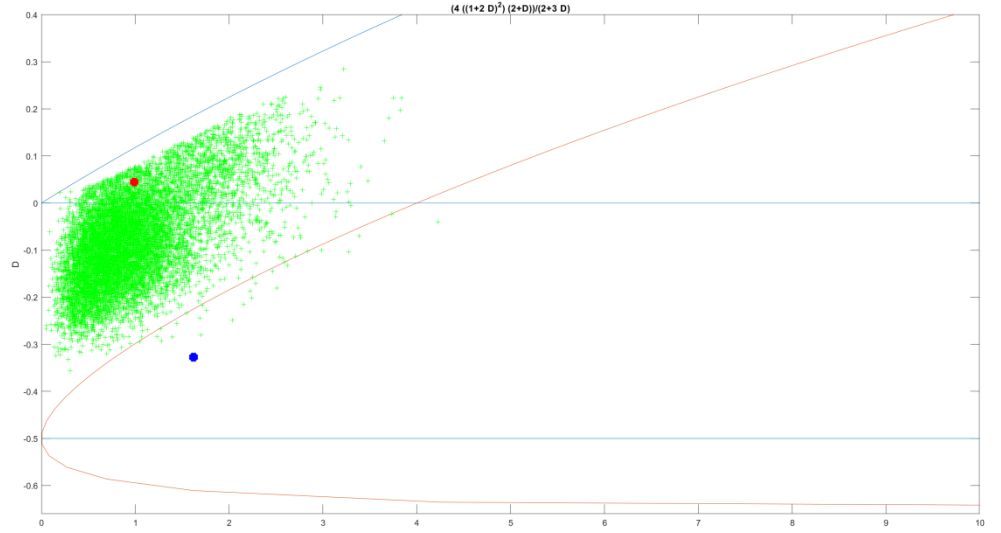
Şekil 70: Tip VI Dağılımı ($n=101$), Modu Sıfır Olan Tahminleyici



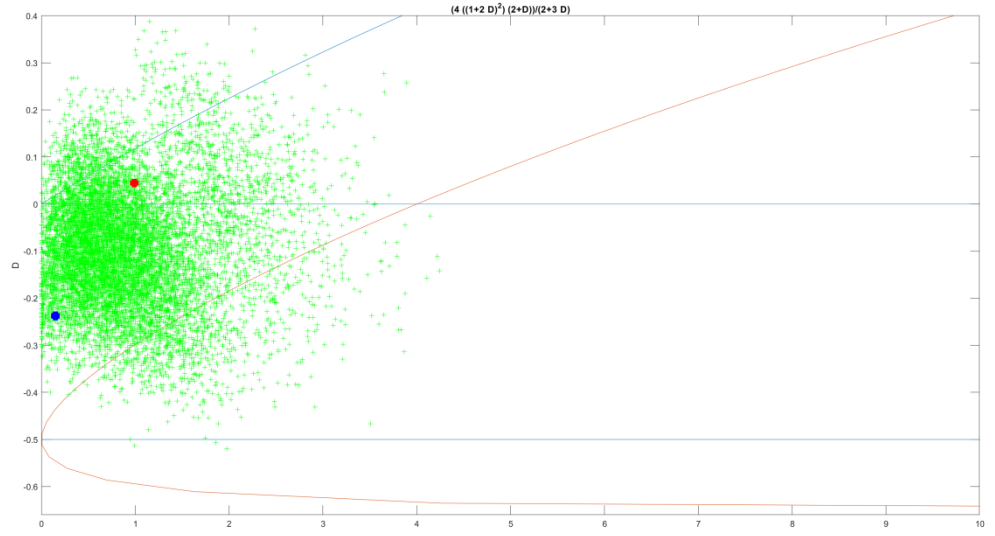
Şekil 71: Tip VI Dağılımı ($n=201$), Dönüşüm Yapılmayan Tahminleyici



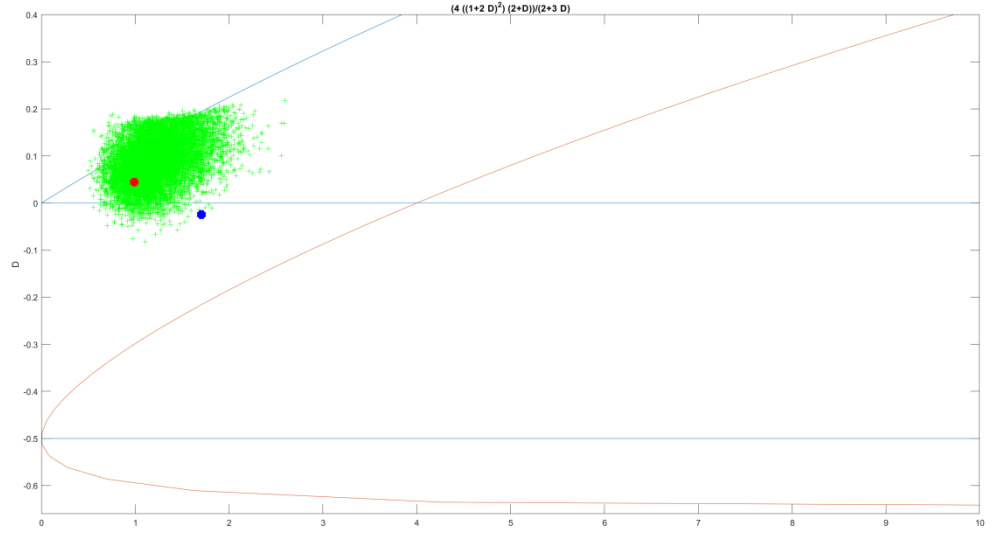
Şekil 72: Tip VI Dağılımı ($n=201$), Ortalaması Sıfır Olan Tahminleyici



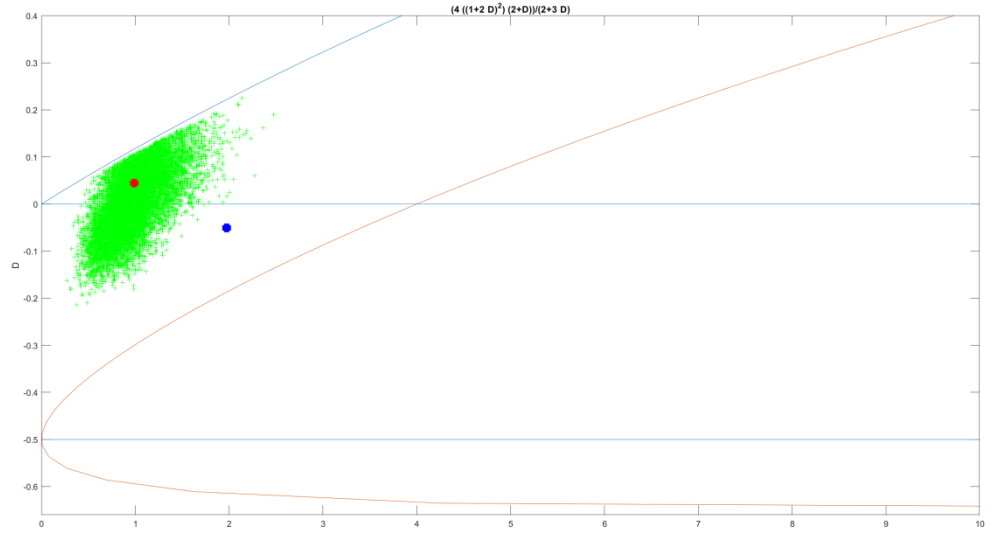
Şekil 73: Tip VI Dağılımı ($n=201$), Modu Sıfır Olan Tahminleyici



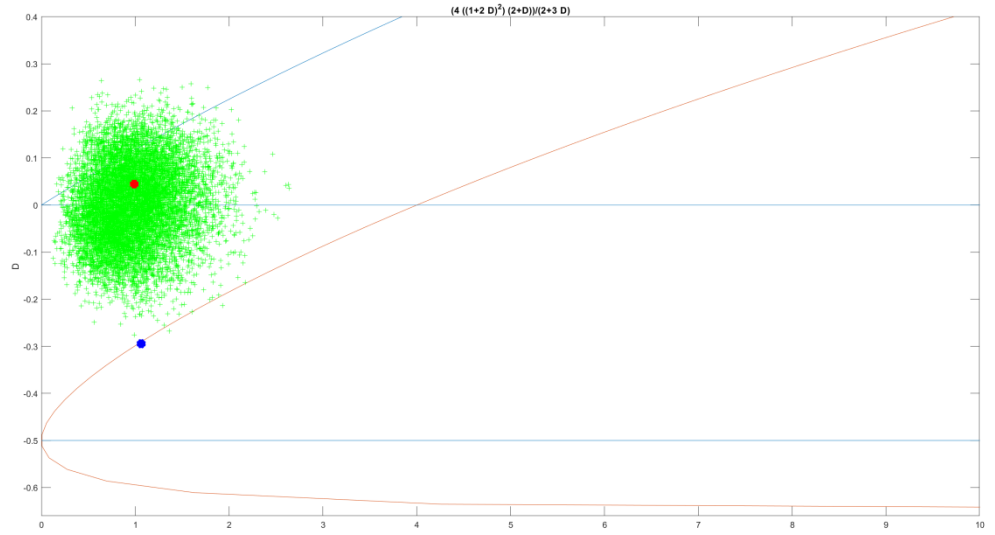
Şekil 74: Tip VI Dağılımı ($n=801$), Dönüşüm Yapılmayan Tahminleyici



Şekil 75: Tip VI Dağılımı ($n=801$), Ortalaması Sıfır Olan Tahminleyici



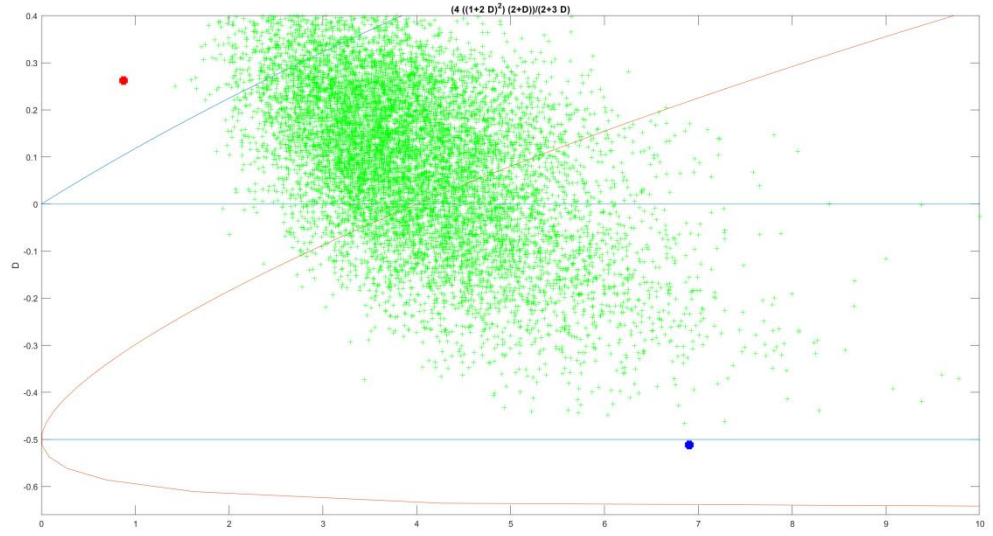
Şekil 76: Tip VI Dağılımı ($n=801$), Modu Sıfır Olan Tahminleyici



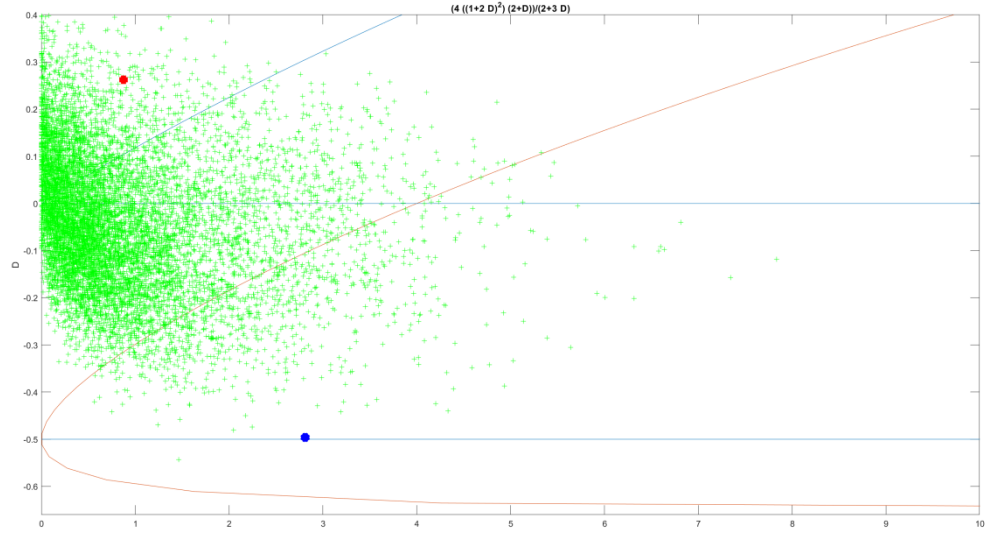
Ek 7: Tip IV Dağılımından Türetilen Verilere Sağdan Eklenen İlave Gözlemin Etkisi

Bu kısımda verilen grafikler, örnek verilerinden elde edilen dağılımların Craig kartı üzerindeki görüntüleridir. Kırmızı nokta ile belirtilen anakütle olasılık yoğunluk fonksiyonu, mavi ile belirtilen en uzakta yer alan dağılımdır.

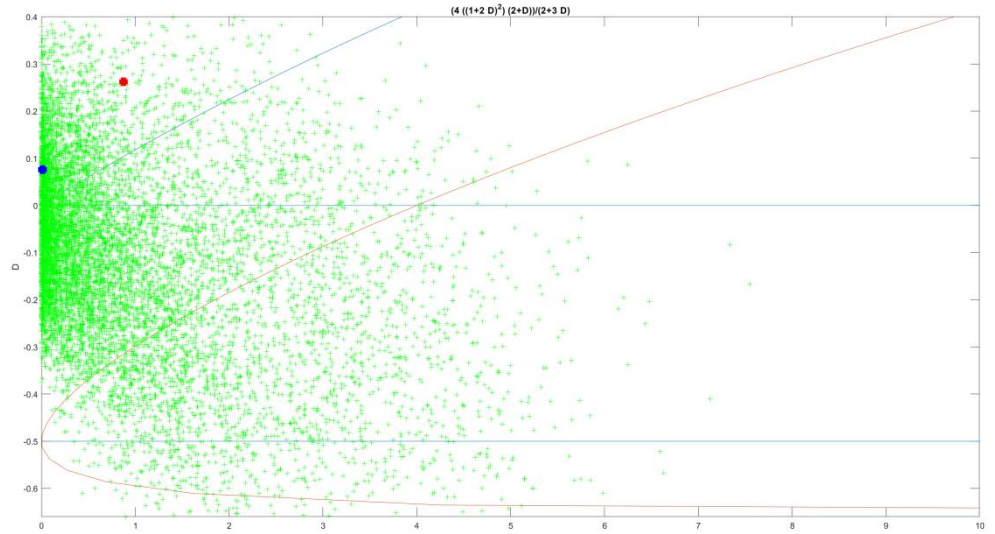
Şekil 77: Tip IV Dağılımı ($n=51$), Dönüşüm Yapılmayan Tahminleyici



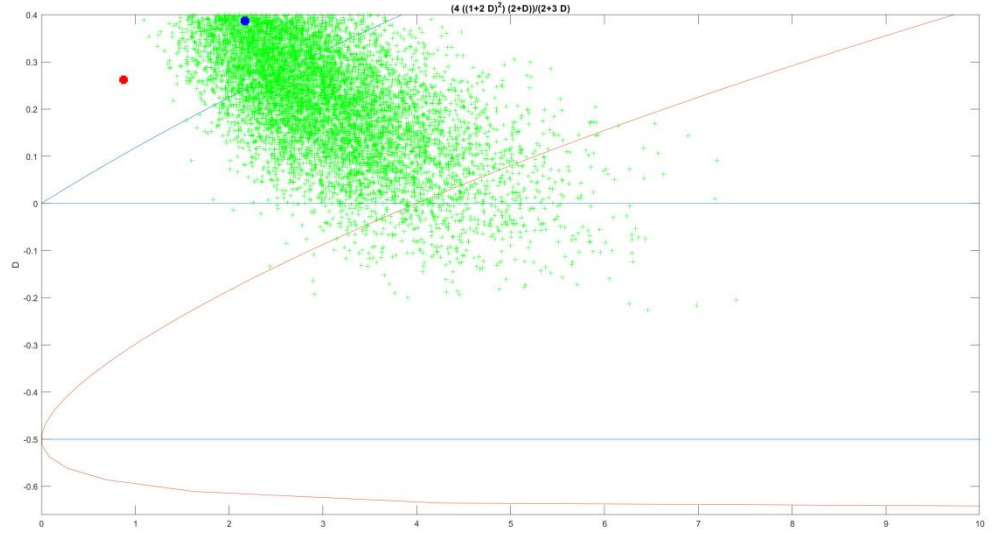
Şekil 78: Tip IV Dağılımı ($n=51$), Ortalaması Sıfır Olan Tahminleyici



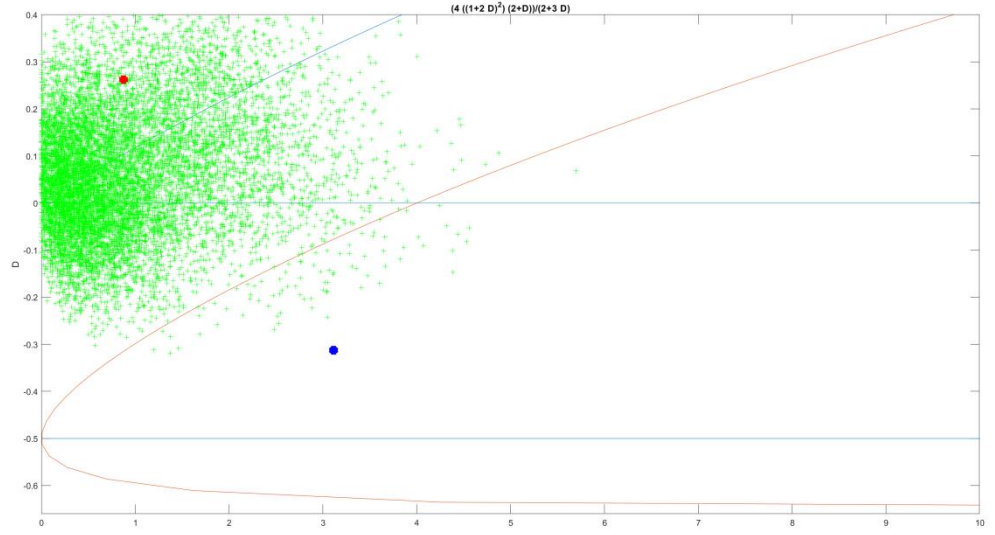
Şekil 79: Tip IV Dağılımı ($n=51$), Modu Sıfır Olan Tahminleyici



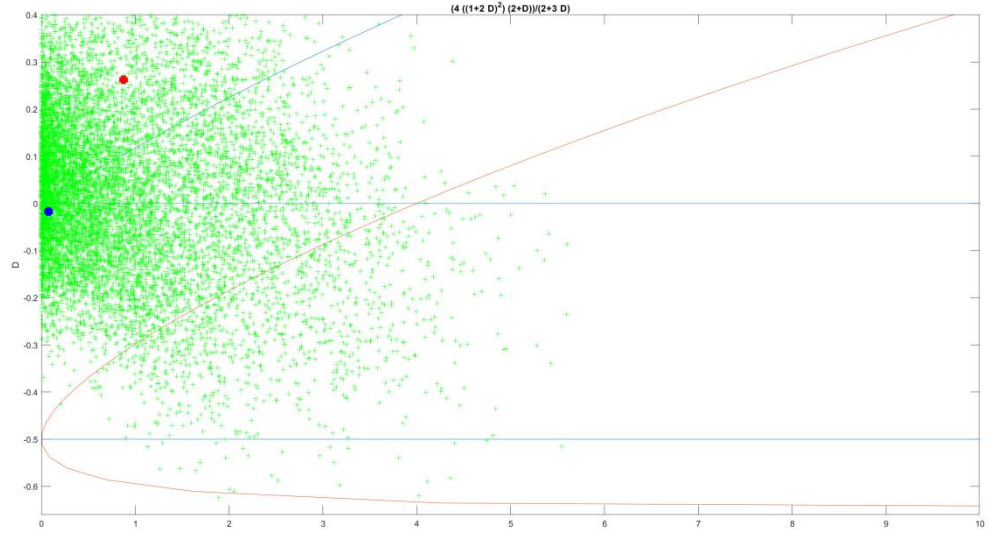
Şekil 80: Tip IV Dağılımı ($n=101$), Dönüşüm Yapılmayan Tahminleyici



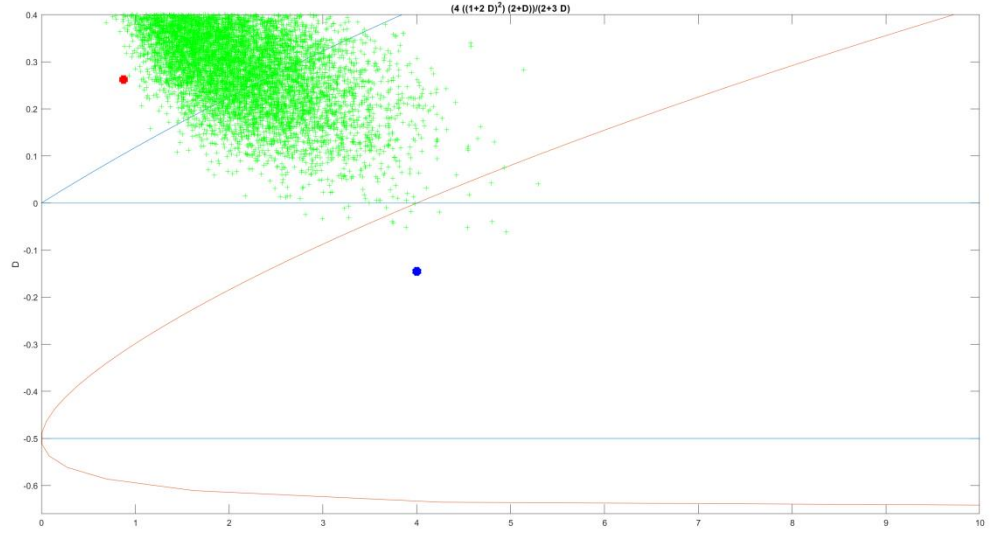
Şekil 81: Tip IV Dağılımı ($n=101$), Ortalaması Sıfır Olan Tahminleyici



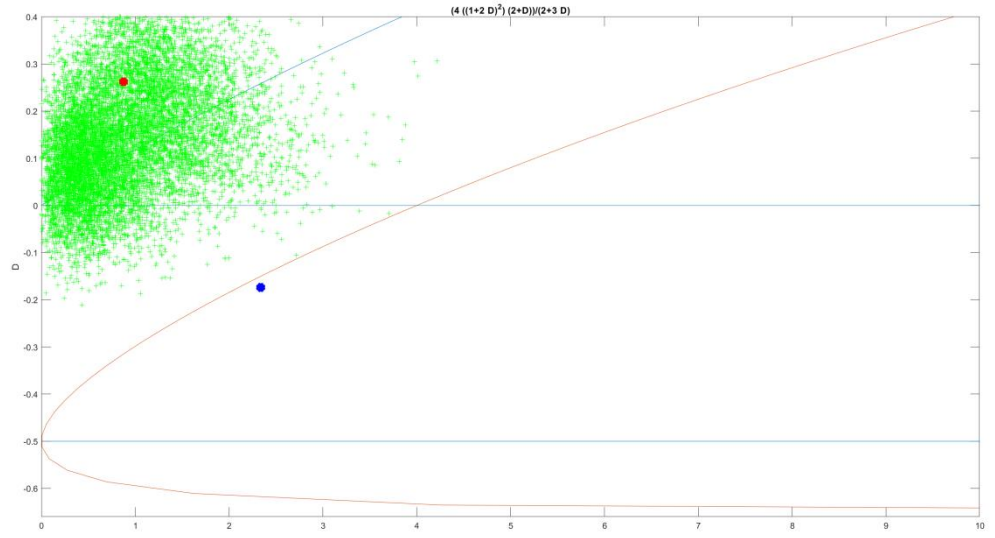
Şekil 82: Tip IV Dağılımı ($n=101$), Modu Sıfır Olan Tahminleyici



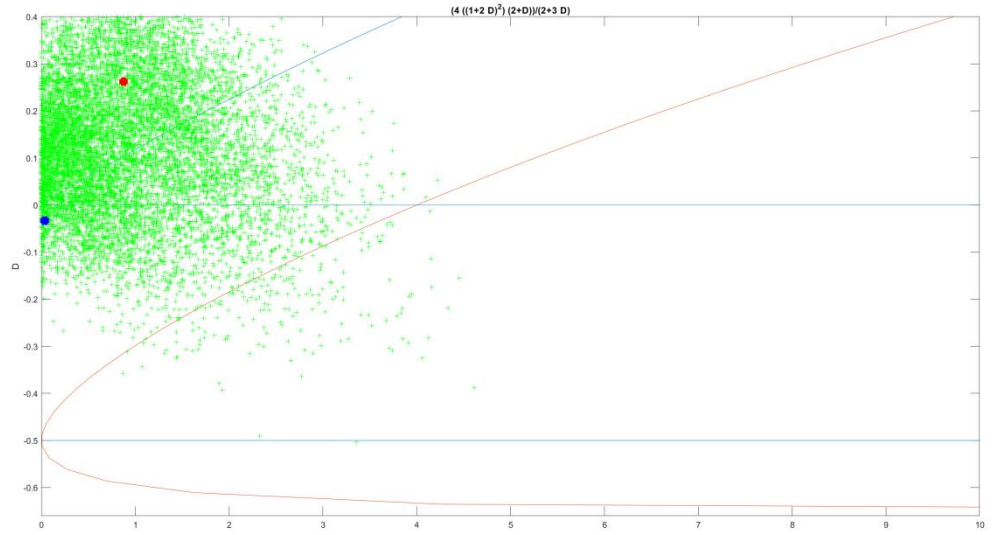
Şekil 83: Tip IV Dağılımı ($n=201$), Dönüşüm Yapılmayan Tahminleyici



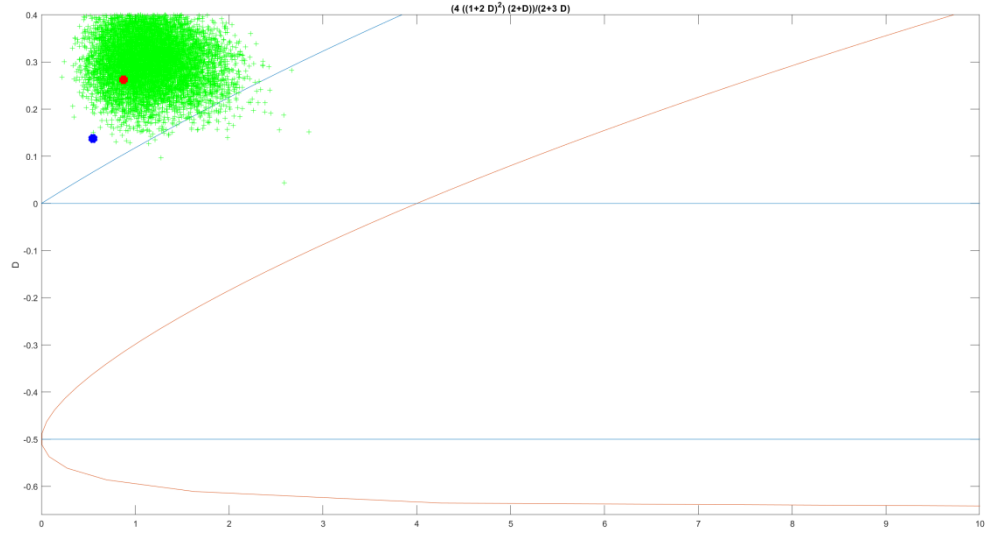
Şekil 84: Tip IV Dağılımı ($n=201$), Ortalaması Sıfır Olan Tahminleyici



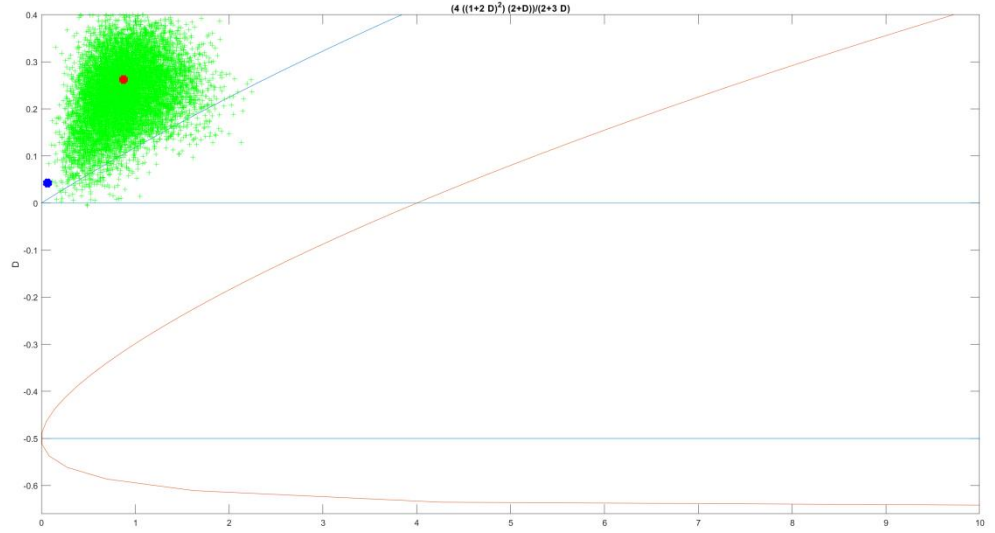
Şekil 85: Tip IV Dağılımı ($n=201$), Modu Sıfır Olan Tahminleyici



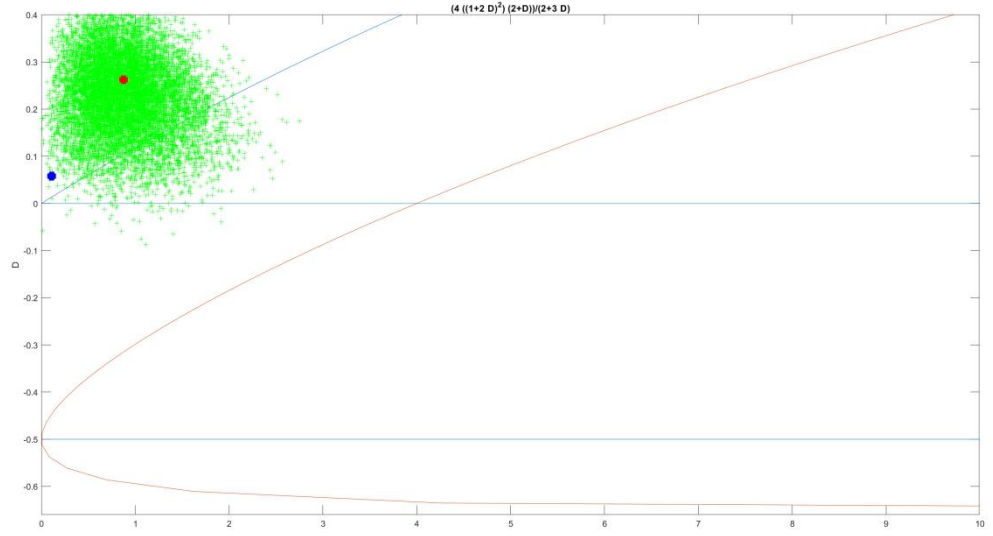
Şekil 86: Tip IV Dağılımı ($n=801$), Dönüşüm Yapılmayan Tahminleyici



Şekil 87: Tip IV Dağılımı ($n=801$), Ortalaması Sıfır Olan Tahminleyici



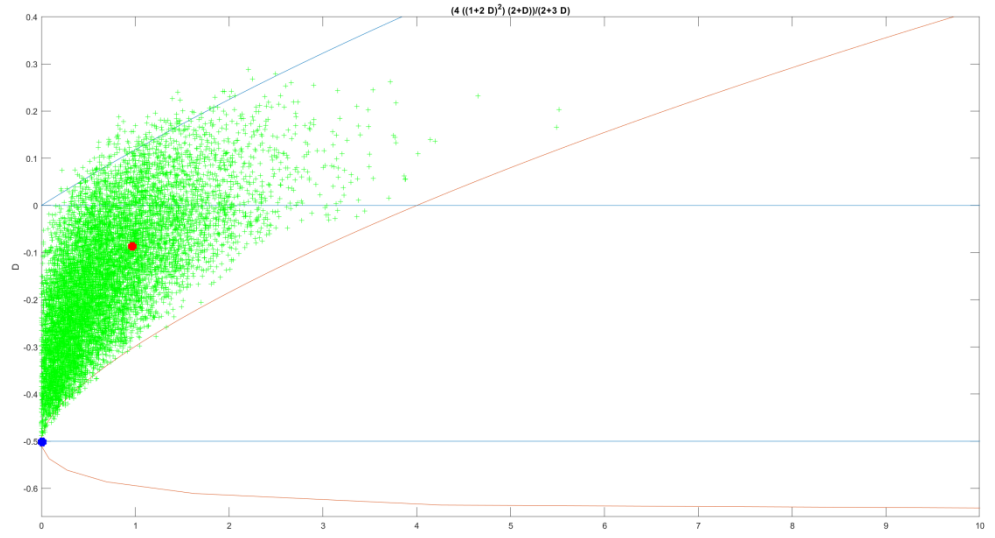
Şekil 88: Tip IV Dağılımı ($n=801$), Modu Sıfır Olan Tahminleyici



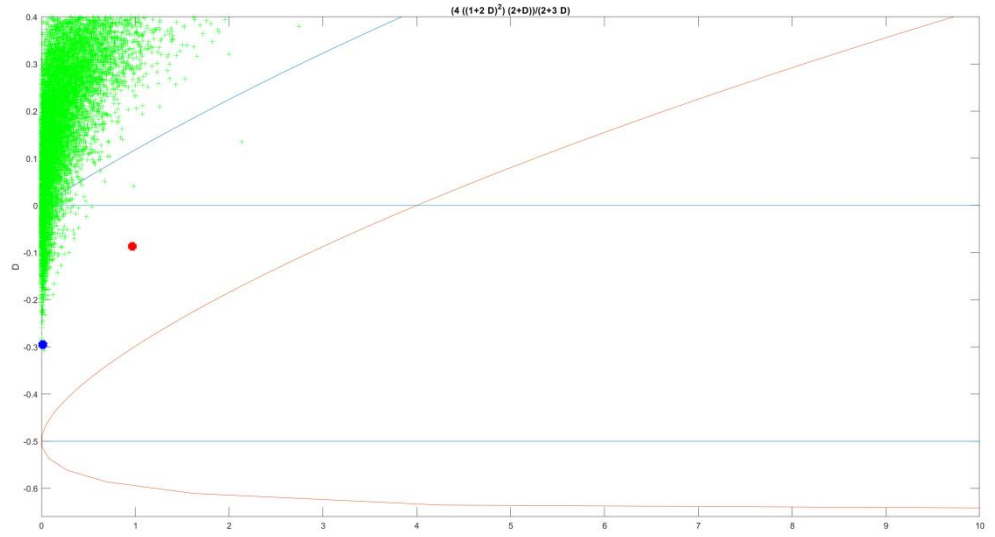
Ek 8: Tip I Dağılımından Türetilen Verilere Soldan Eklenen İlave Gözlemin Etkisi

Bu kısımda verilen grafikler, örnek verilerinden elde edilen dağılımların Craig kartı üzerindeki görüntüleridir. Kırmızı nokta ile belirtilen anakütle olasılık yoğunluk fonksiyonu, mavi ile belirtilen en uzakta yer alan dağılımdır

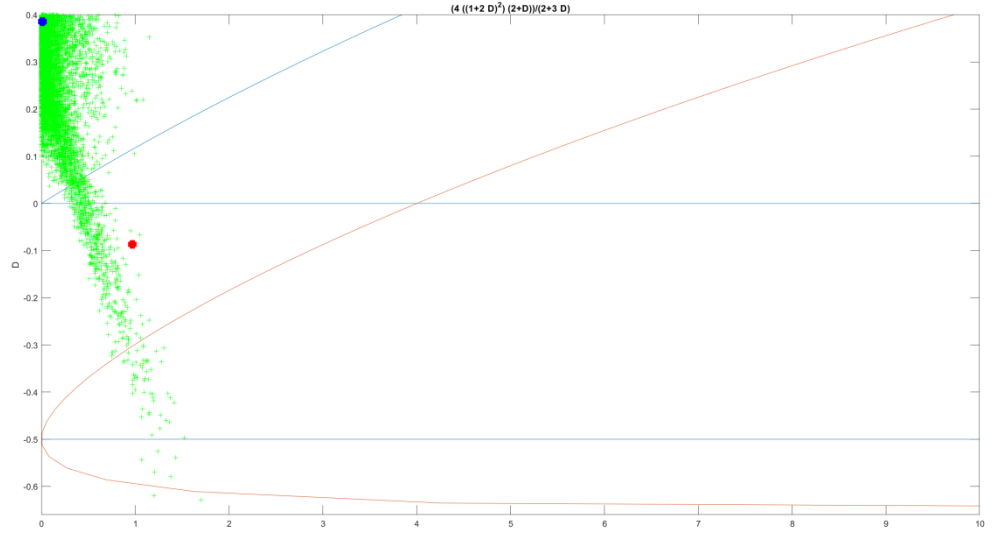
Şekil 89: Tip I Dağılımı ($n=51$), Dönüşüm Yapılmayan Tahminleyici



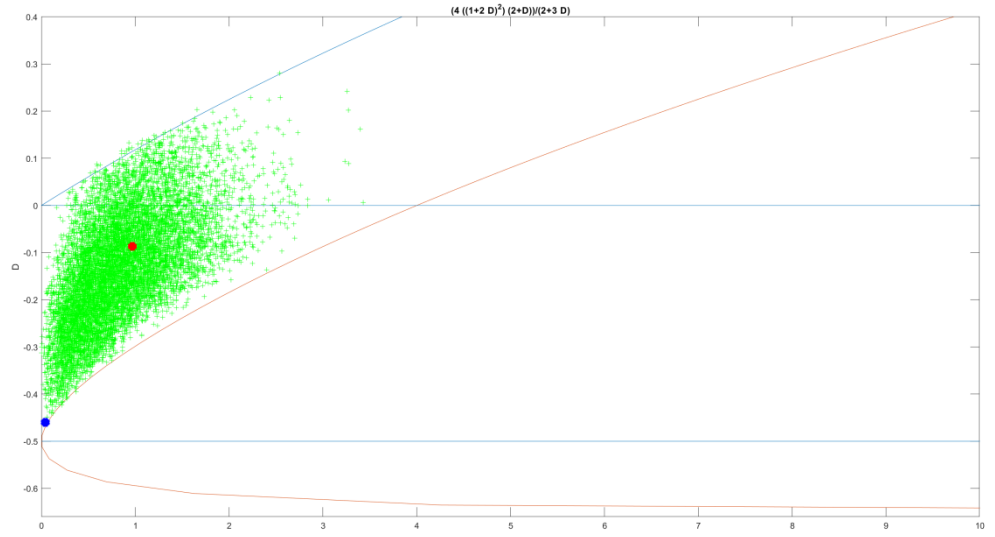
Şekil 90: Tip I Dağılımı ($n=51$), Ortalaması Sıfır Olan Tahminleyici



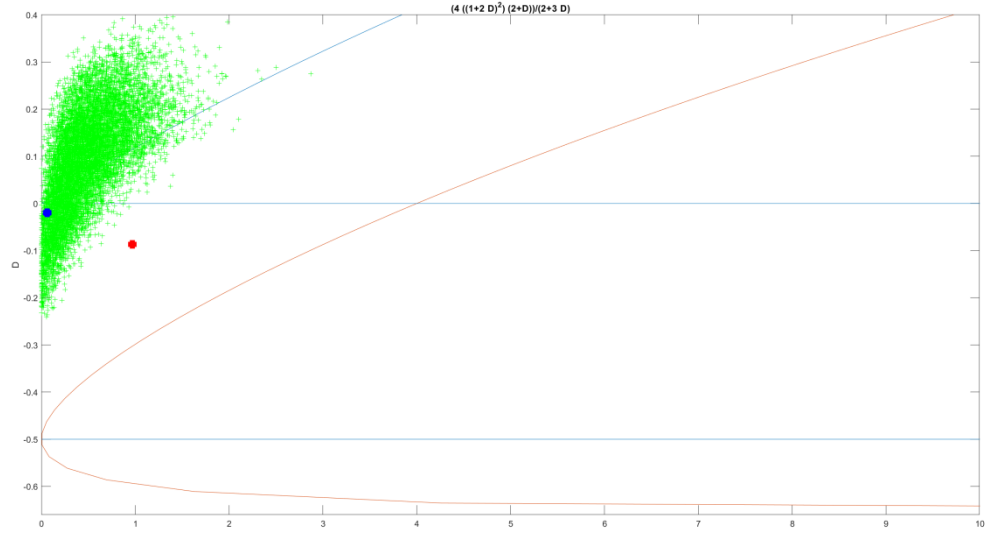
Şekil 91: Tip I Dağılımı ($n=51$), Modu Sıfır Olan Tahminleyici



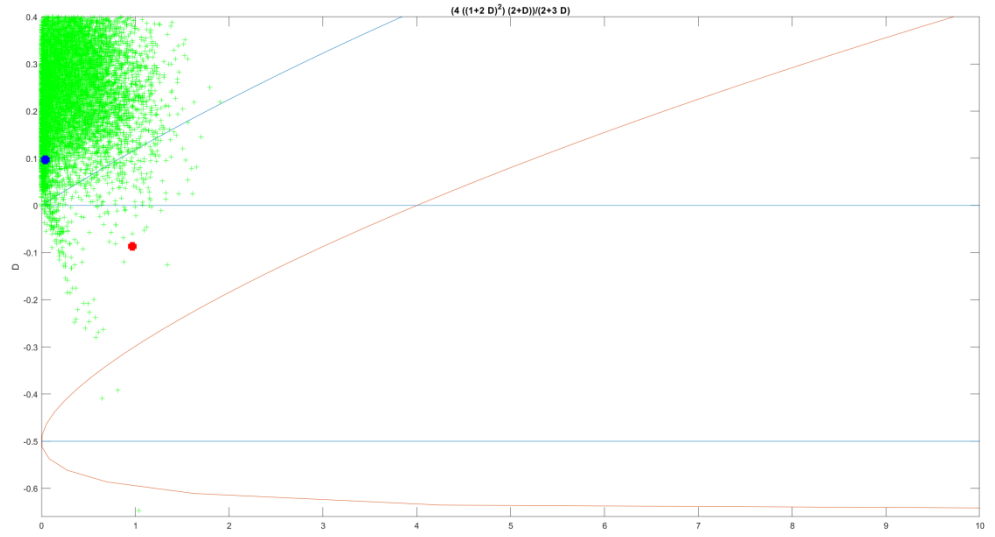
Şekil 92: Tip I Dağılımı ($n=101$), Dönüşüm Yapılmayan Tahminleyici



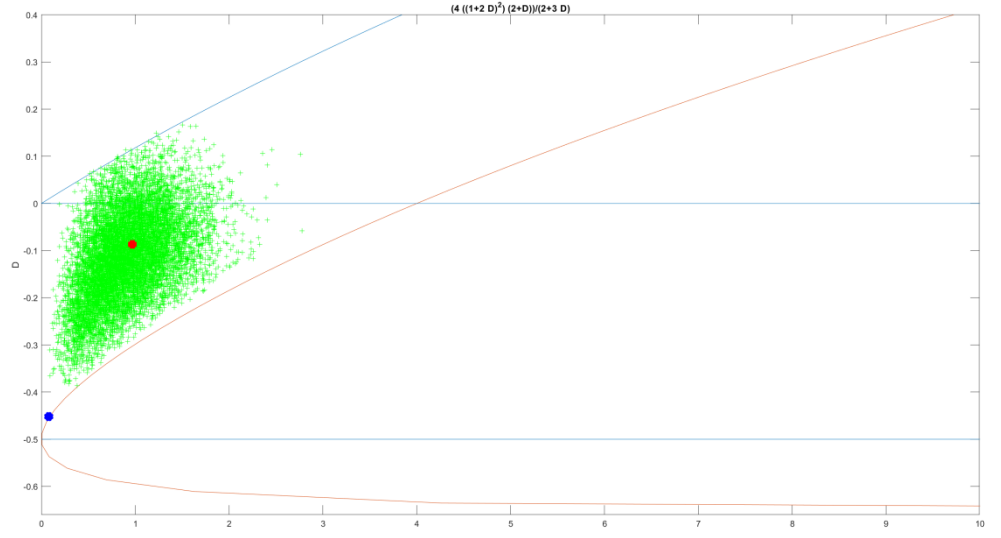
Şekil 93: Tip I Dağılımı ($n=101$), Ortalaması Sıfır Olan Tahminleyici



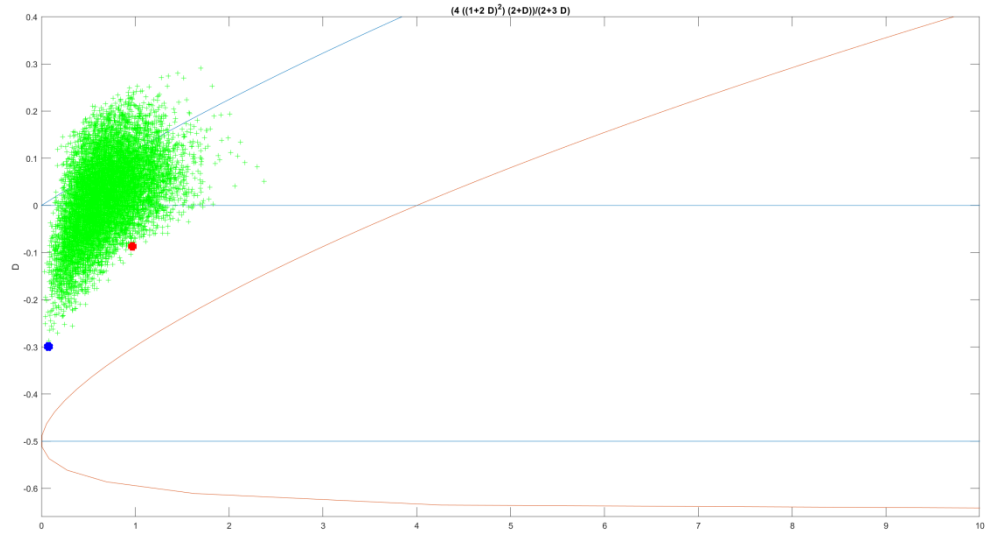
Şekil 94: Tip I Dağılımı ($n=101$), Modu Sıfır Olan Tahminleyici



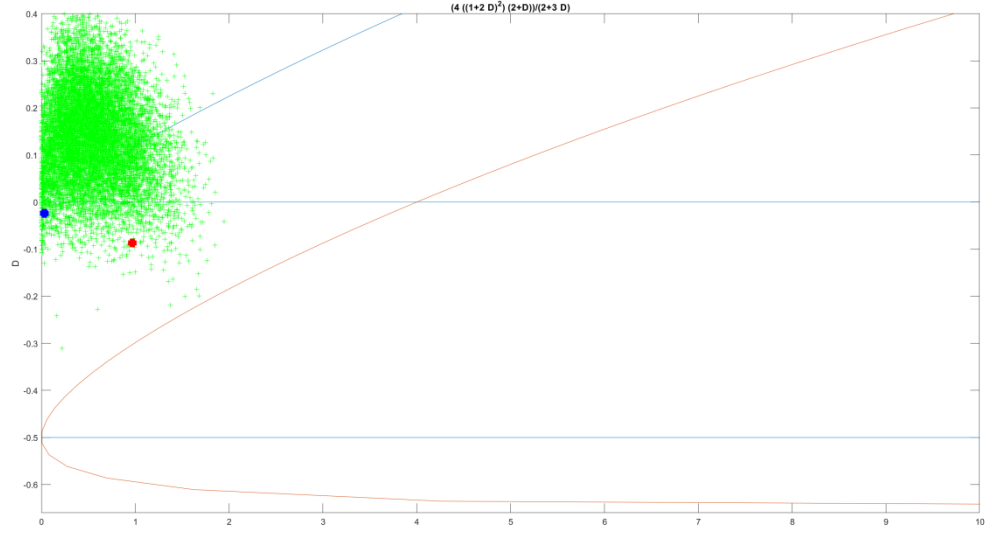
Şekil 95: Tip I Dağılımı ($n=201$), Dönüşüm Yapılmayan Tahminleyici



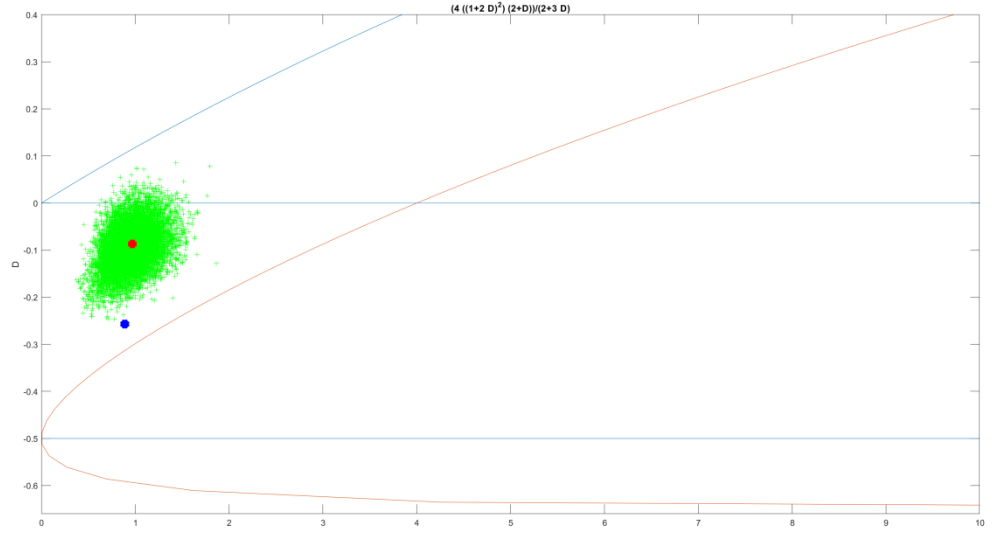
Şekil 96: Tip I Dağılımı ($n=201$), Ortalaması Sıfır Olan Tahminleyici



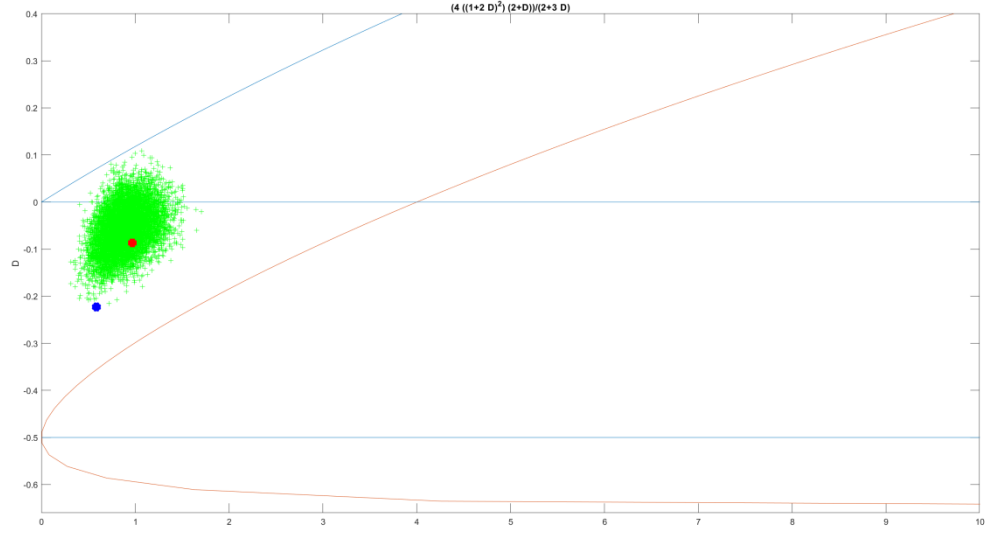
Şekil 97: Tip I Dağılımı ($n=201$), Modu Sıfır Olan Tahminleyici



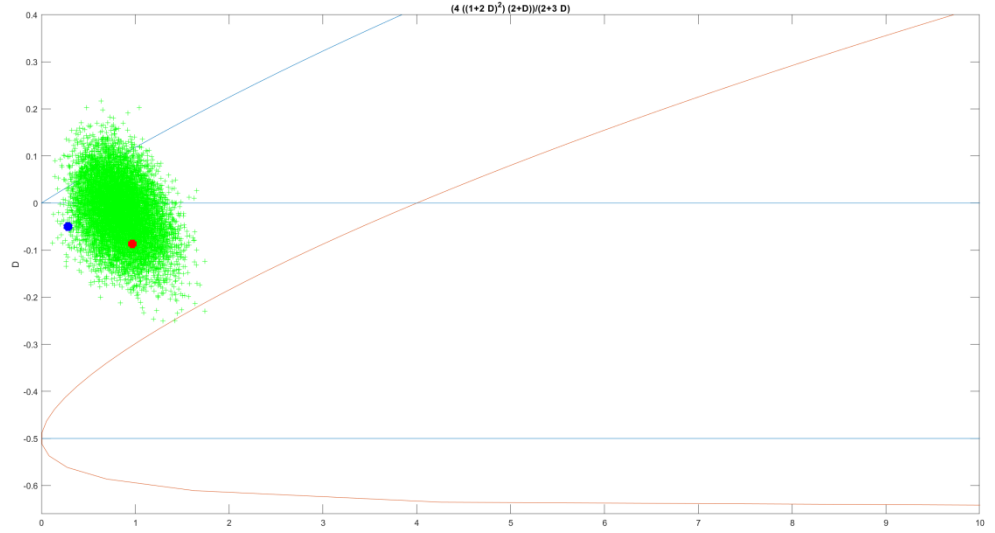
Şekil 98: Tip I Dağılımı ($n=801$), Dönüşüm Yapılmayan Tahminleyici



Şekil 99: Tip I Dağılımı ($n=801$), Ortalaması Sıfır Olan Tahminleyici



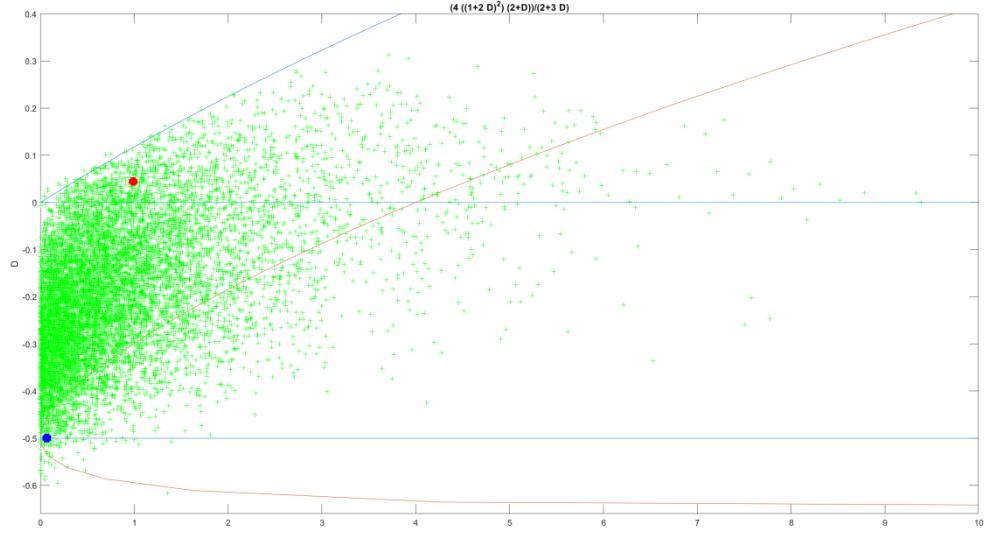
Şekil 100: Tip I Dağılımı ($n=801$), Modu Sıfır Olan Tahminleyici



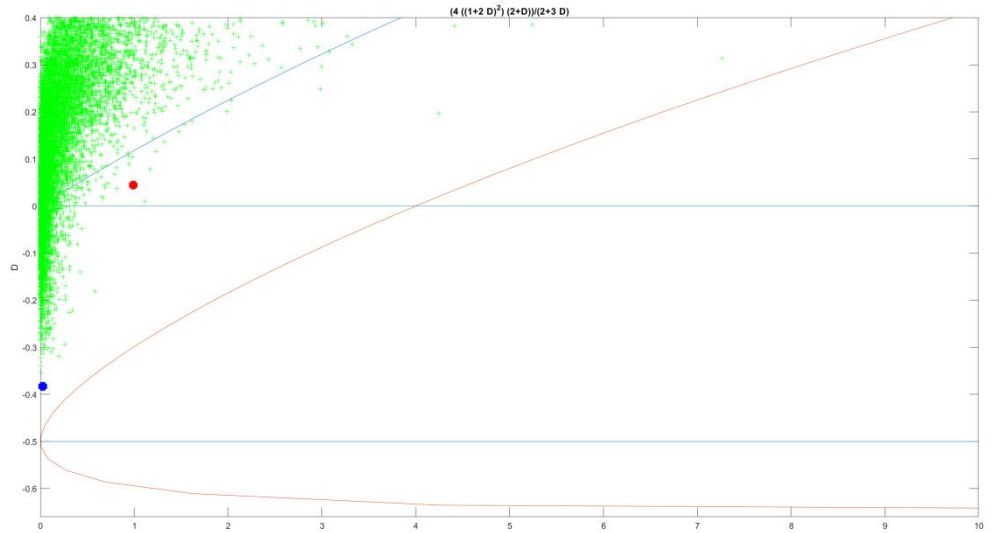
Ek 9: Tip VI Dağılımından Türetilen Verilere Soldan Eklenen İlave Gözlemin Etkisi

Bu kısımda verilen grafikler, örnek verilerinden elde edilen dağılımların Craig kartı üzerindeki görüntüleridir. Kırmızı nokta ile belirtilen anakütle olasılık yoğunluk fonksiyonu, mavi ile belirtilen en uzakta yer alan dağılımdır

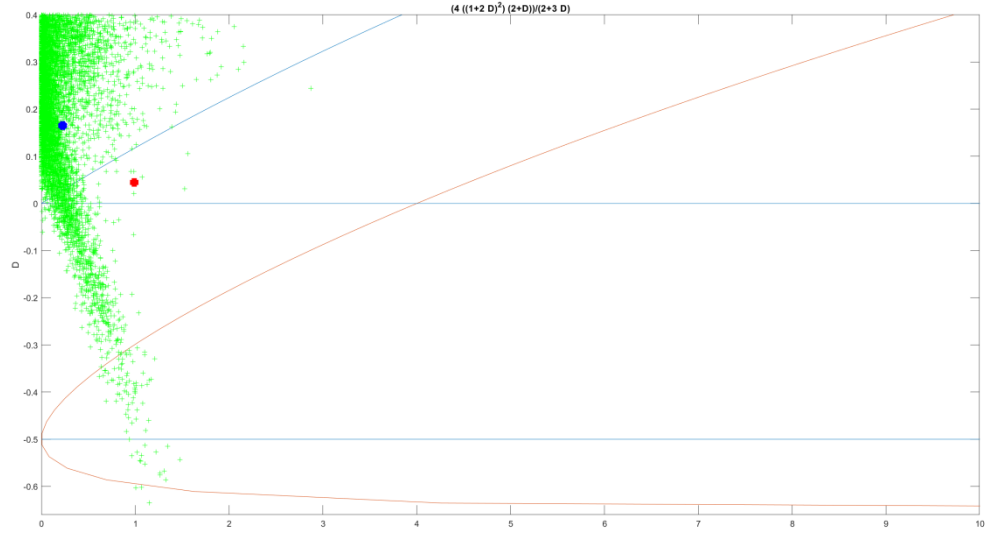
Şekil 101: Tip VI Dağılımı ($n=51$), Dönüşüm Yapılmayan Tahminleyici



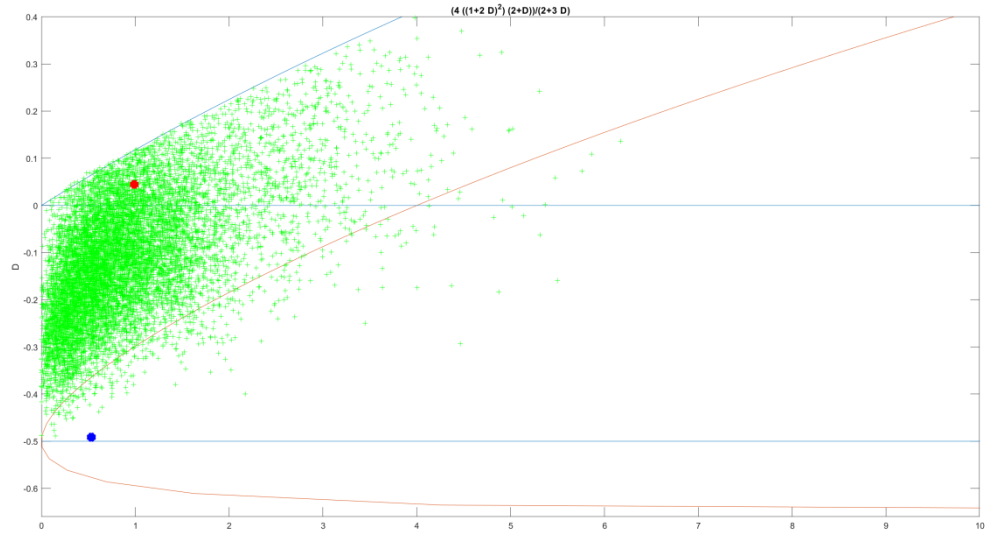
Şekil 102: Tip VI Dağılımı ($n=51$), Ortalaması Sıfır Olan Tahminleyici



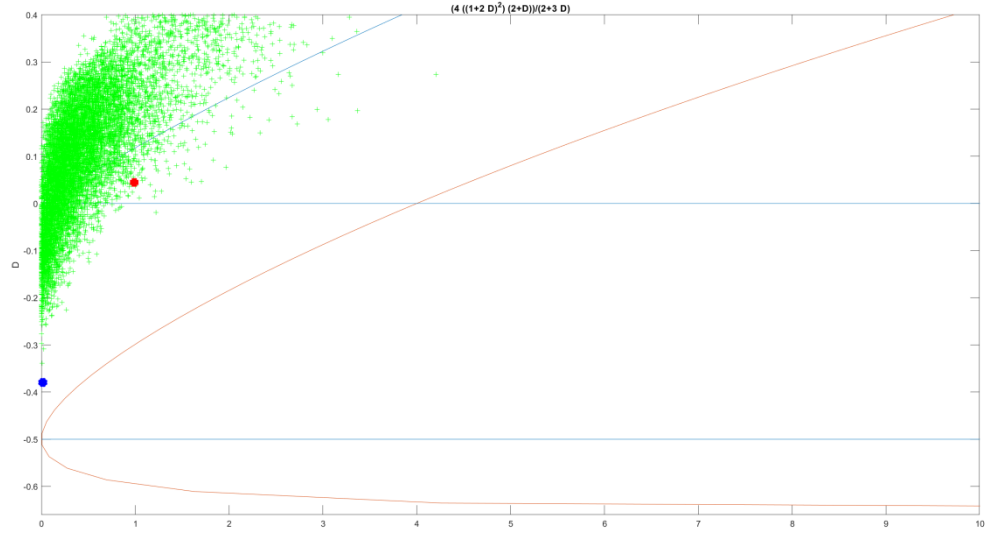
Şekil 103: Tip VI Dağılımı ($n=51$), Modu Sıfır Olan Tahminleyici



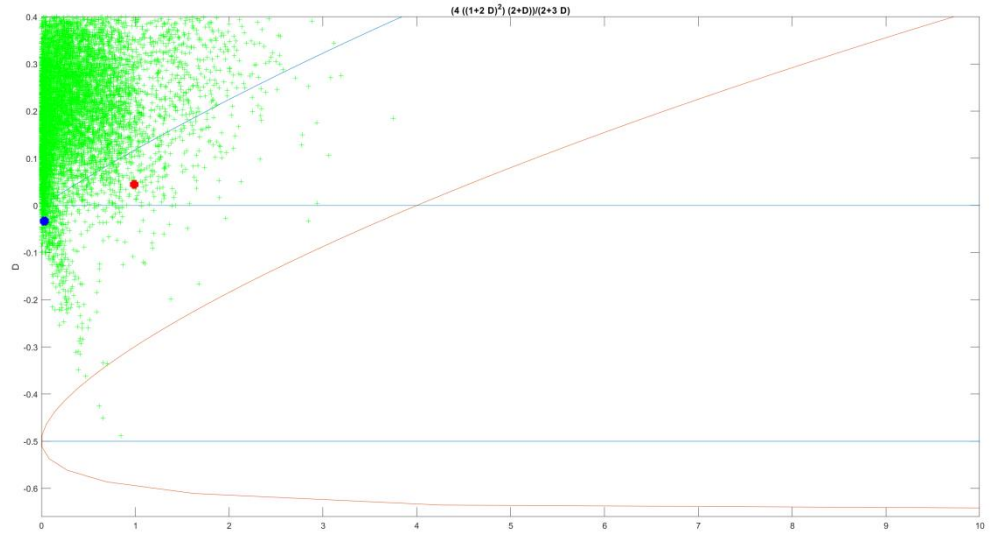
Şekil 104: Tip VI Dağılımı ($n=101$), Dönüşüm Yapılmayan Tahminleyici



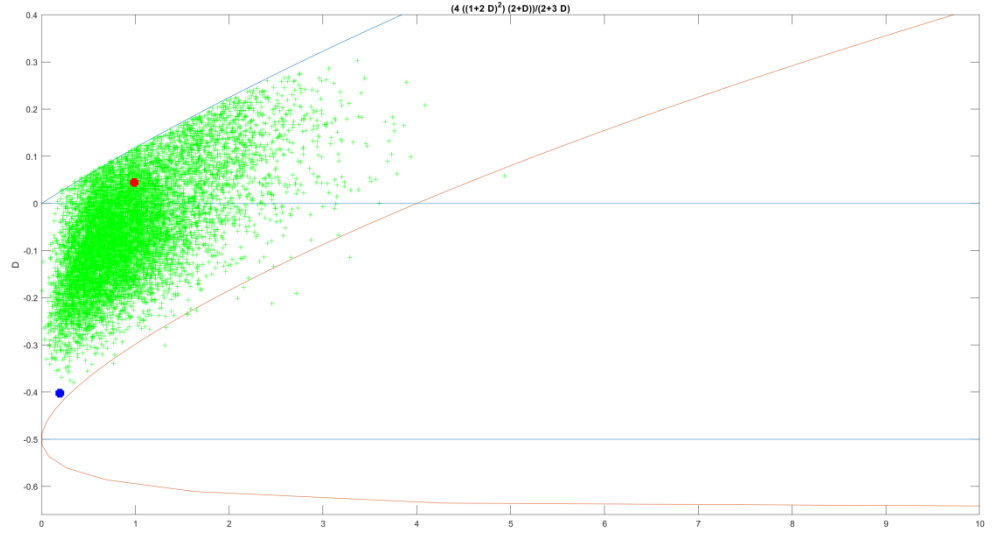
Şekil 105: Tip VI Dağılımı ($n=101$), Ortalaması Sıfır Olan Tahminleyici



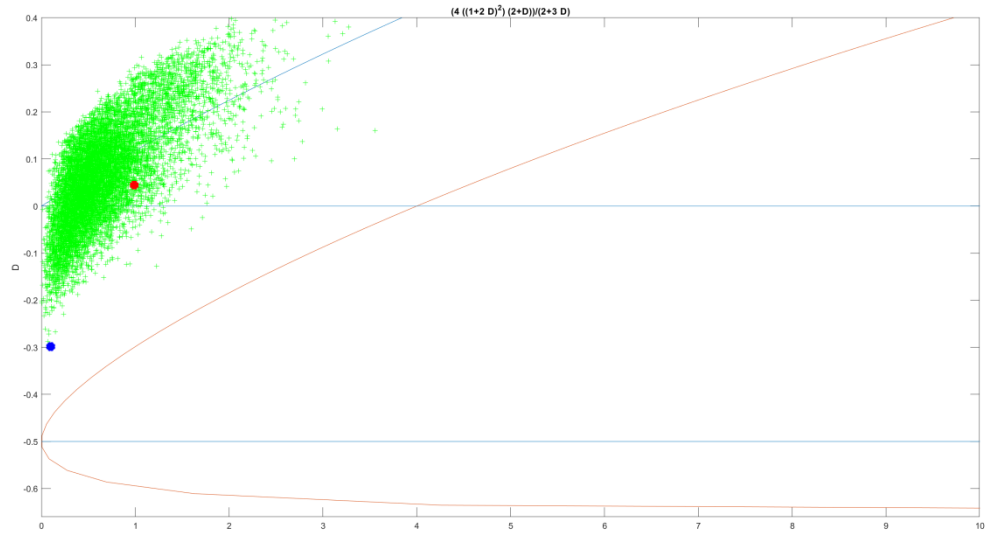
Şekil 106: Tip VI Dağılımı ($n=101$), Modu Sıfır Olan Tahminleyici



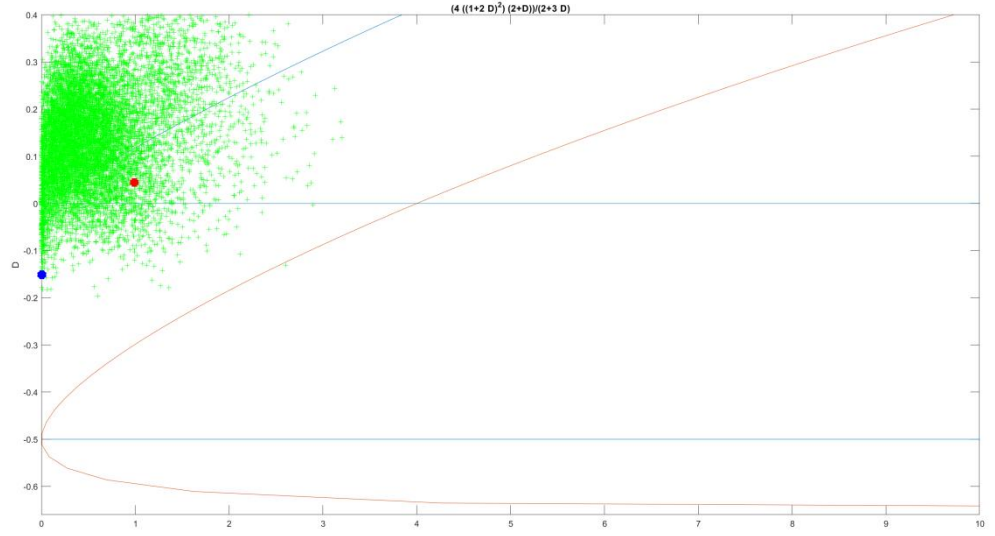
Şekil 107: Tip VI Dağılımı ($n=201$), Dönüşüm Yapılmayan Tahminleyici



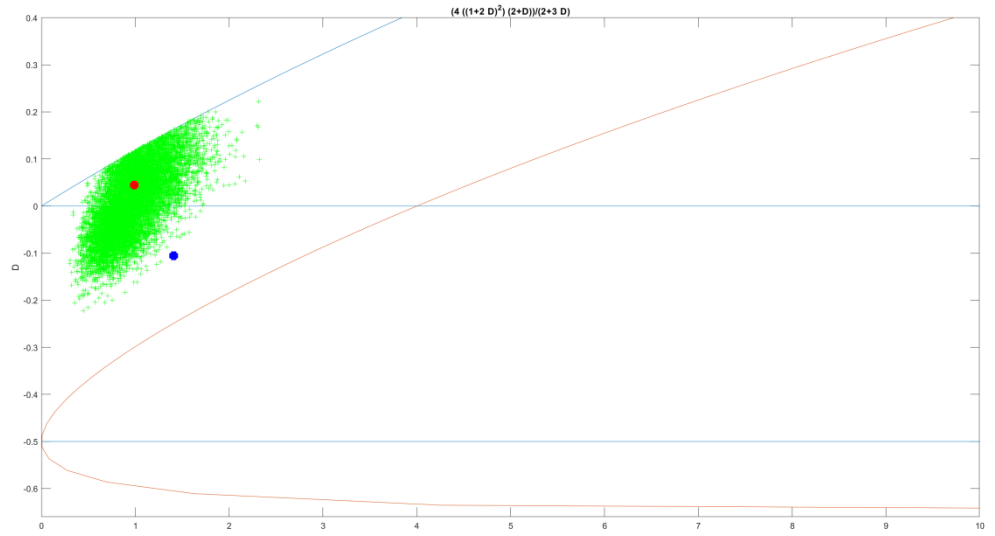
Şekil 108: Tip VI Dağılımı ($n=201$), Ortalaması Sıfır Olan Tahminleyici



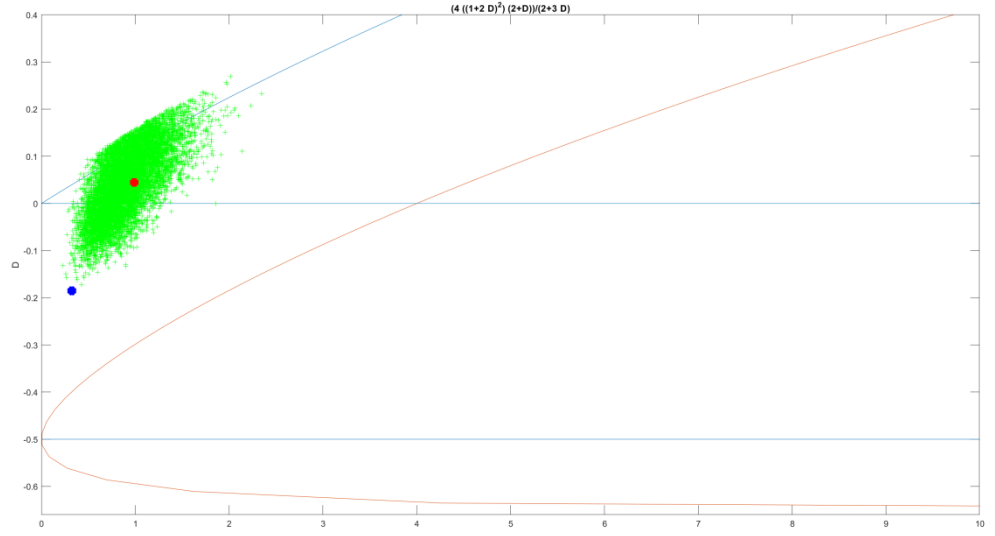
Şekil 109: Tip VI Dağılımı ($n=201$) Modu Sıfır Olan Tahminleyici



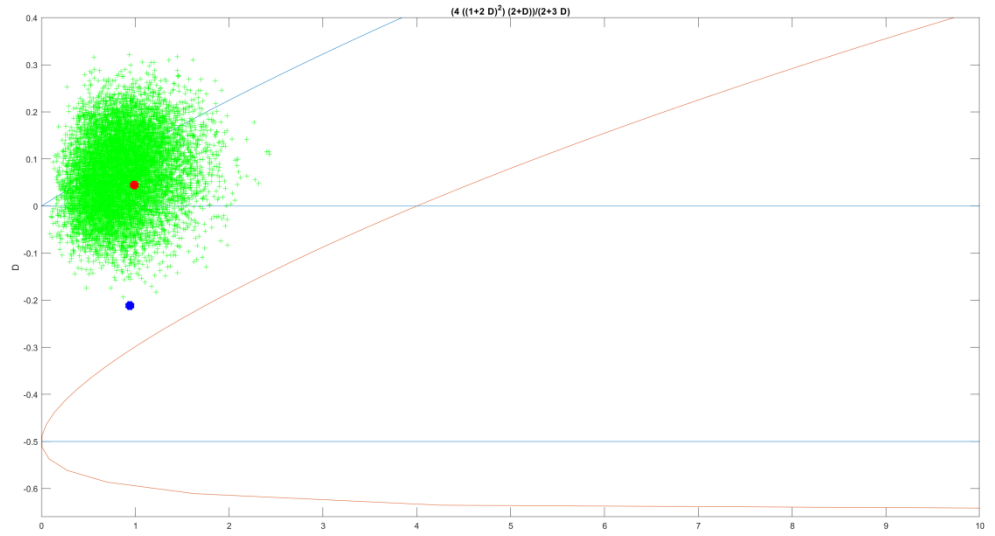
Şekil 110: Tip VI Dağılımı ($n=801$), Dönüşüm Yapılmayan Tahminleyici



Şekil 111: Tip VI Dağılımı ($n=801$), Ortalaması Sıfır Olan Tahminleyici



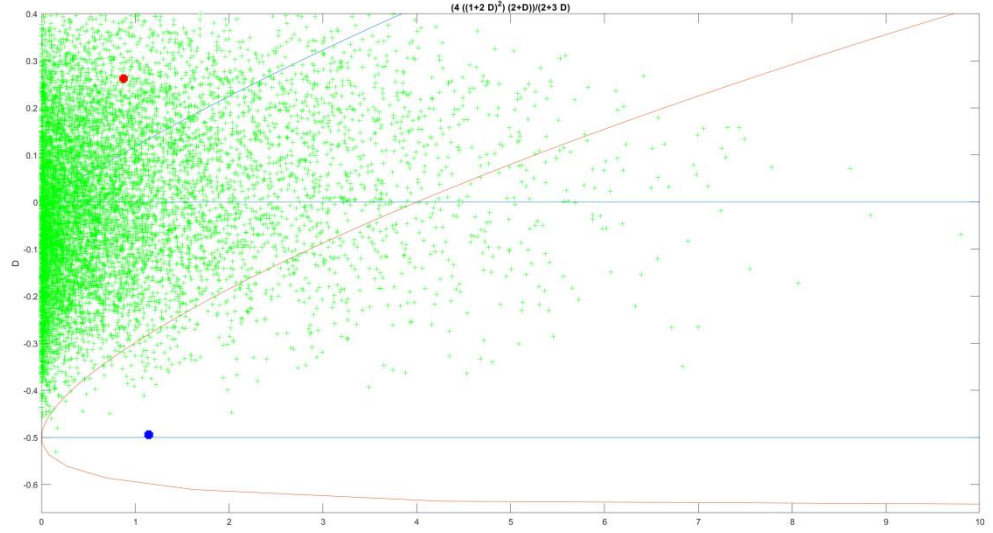
Şekil 112: Tip VI Dağılımı ($n=801$), Modu Sıfır Olan Tahminleyici



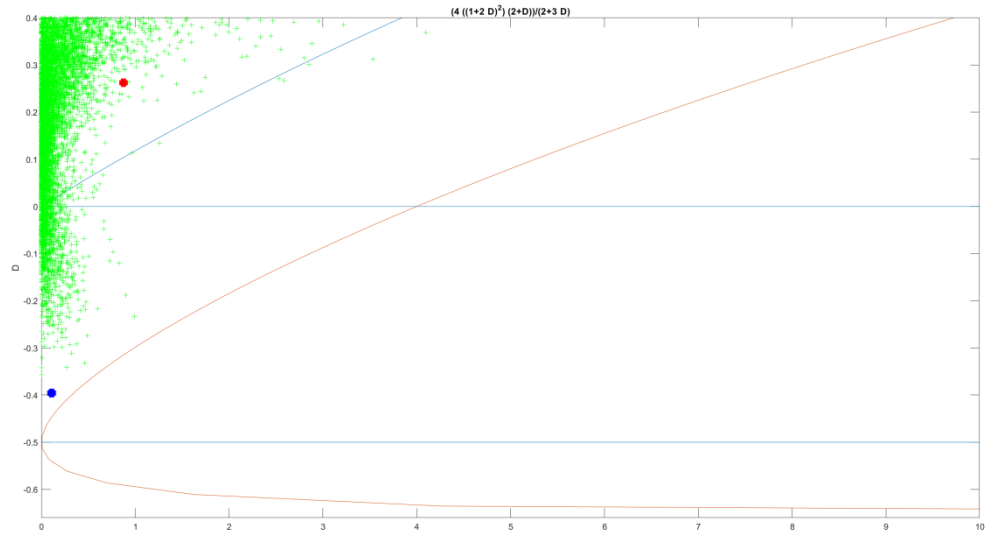
Ek 10: Tip IV Dağılımından Türetilen Verilere Soldan Eklenen İlave Gözlemin Etkisi

Bu kısımda verilen grafikler, örnek verilerinden elde edilen dağılımların Craig kartı üzerindeki görüntüleridir. Kırmızı nokta ile belirtilen anakütle olasılık yoğunluk fonksiyonu, mavi ile belirtilen en uzakta yer alan dağılımdır

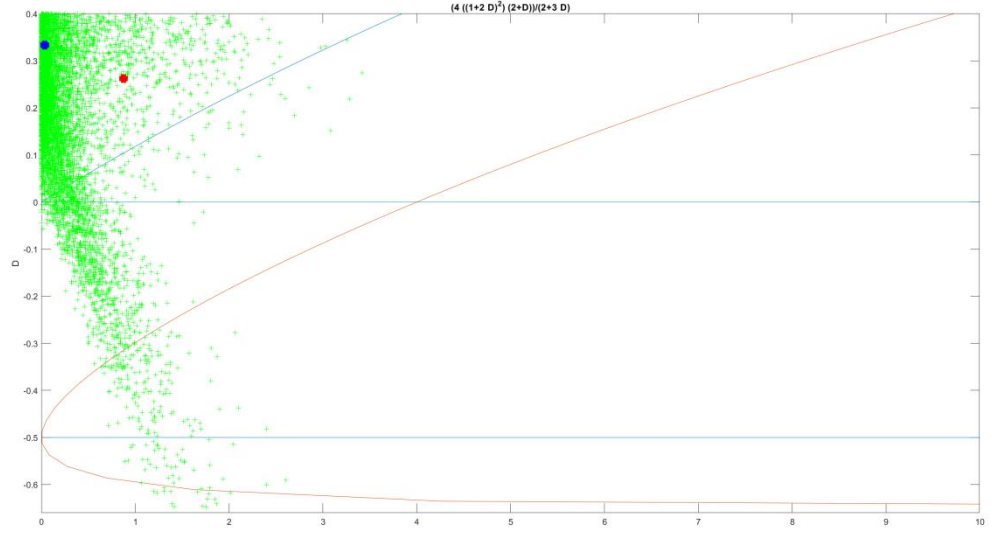
Şekil 113: Tip IV Dağılımı ($n=51$), Dönüşüm Yapılmayan Tahminleyici



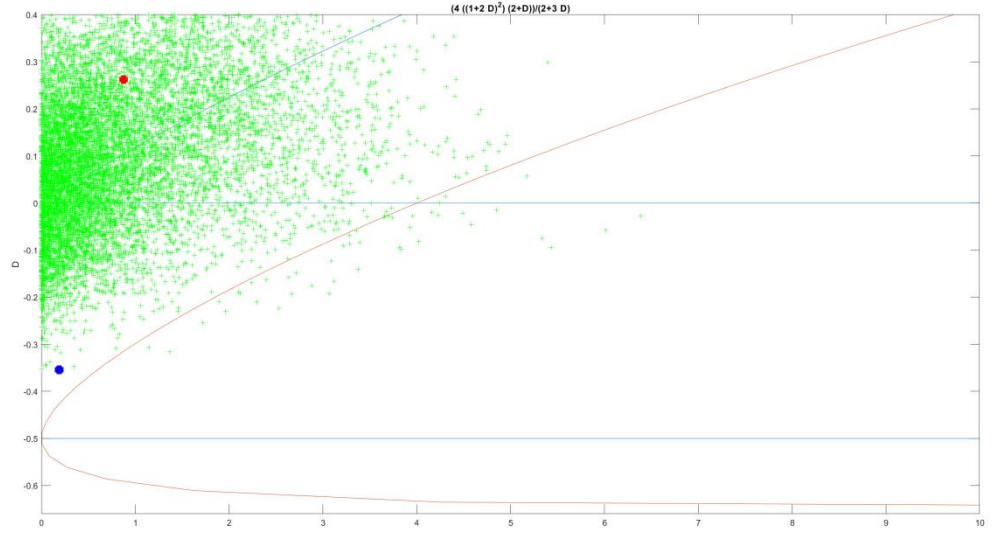
Şekil 114: Tip IV Dağılımı ($n=51$), Ortalaması Sıfır Olan Tahminleyici



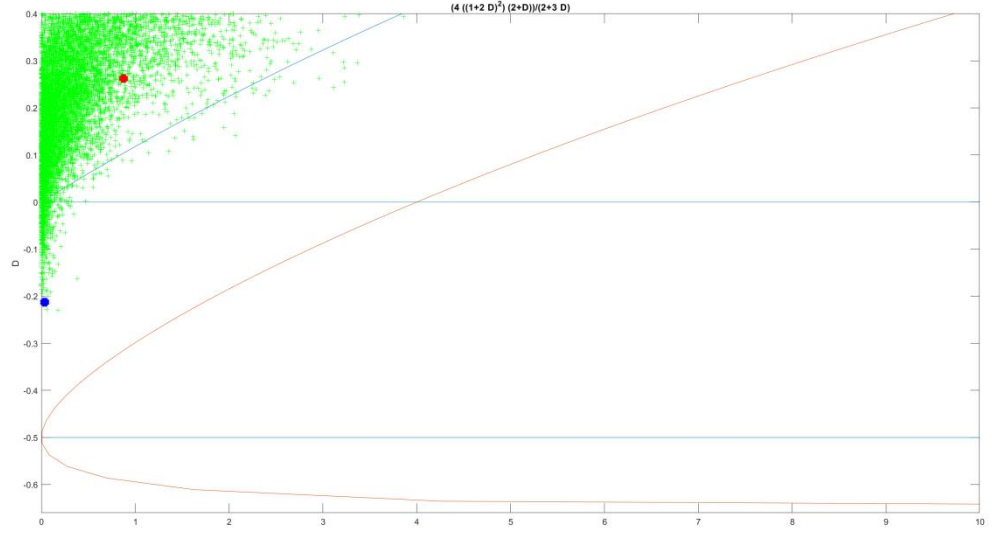
Şekil 115: Tip IV Dağılımı ($n=51$), Modu Sıfır Olan Tahminleyici



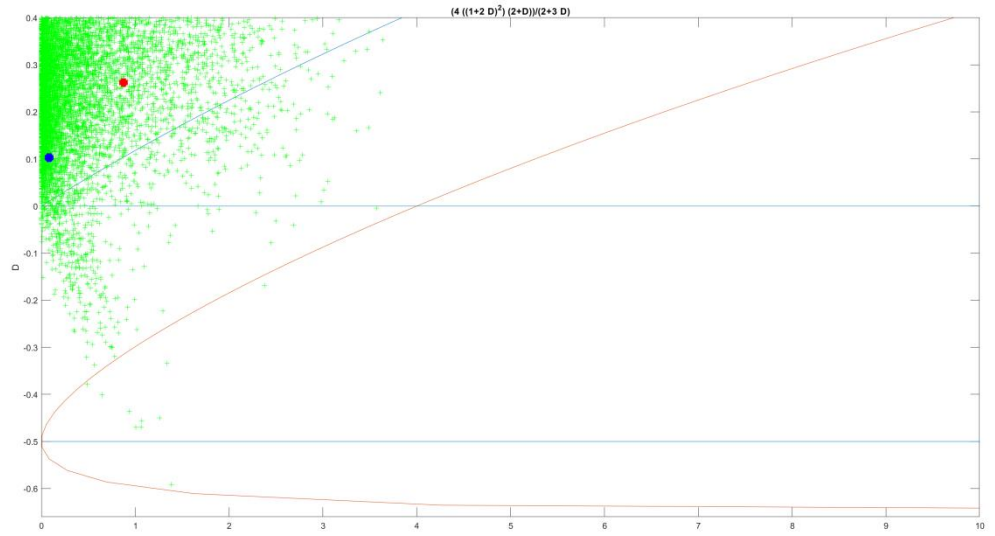
Şekil 116: Tip IV Dağılımı ($n=101$), Dönüşüm Yapılmayan Tahminleyici



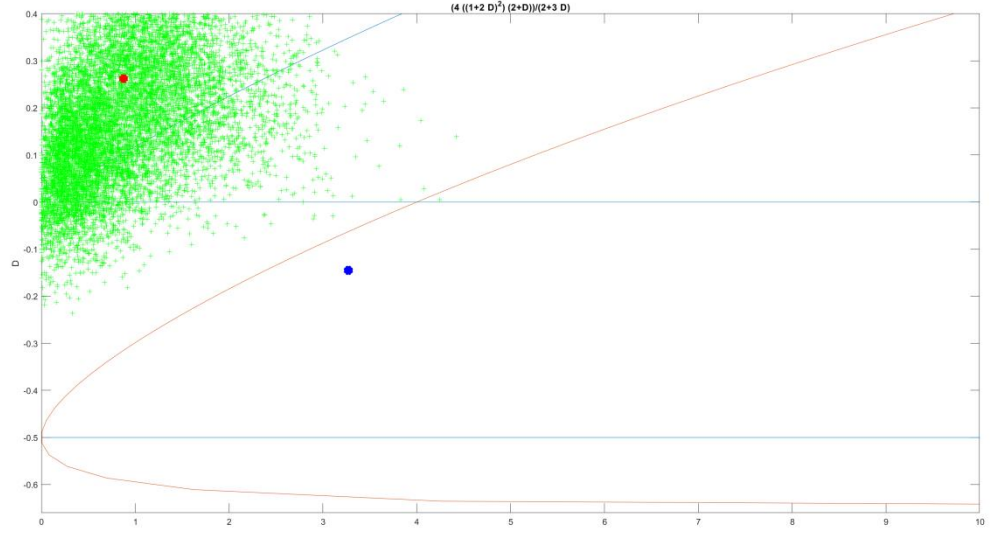
Şekil 117: Tip IV Dağılımı ($n=101$), Ortalaması Sıfır Olan Tahminleyici



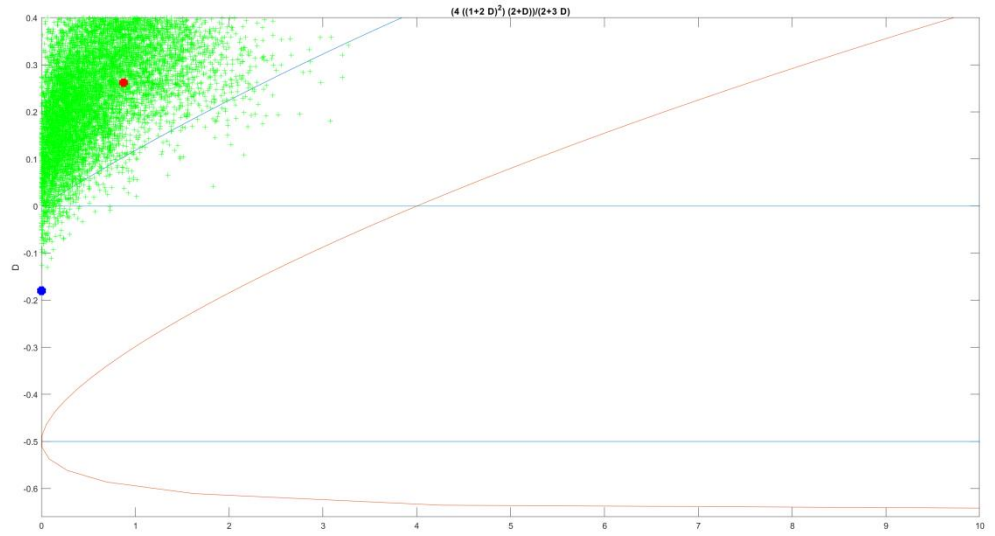
Şekil 118: Tip IV Dağılımı ($n=101$), Modu Sıfır Olan Tahminleyici



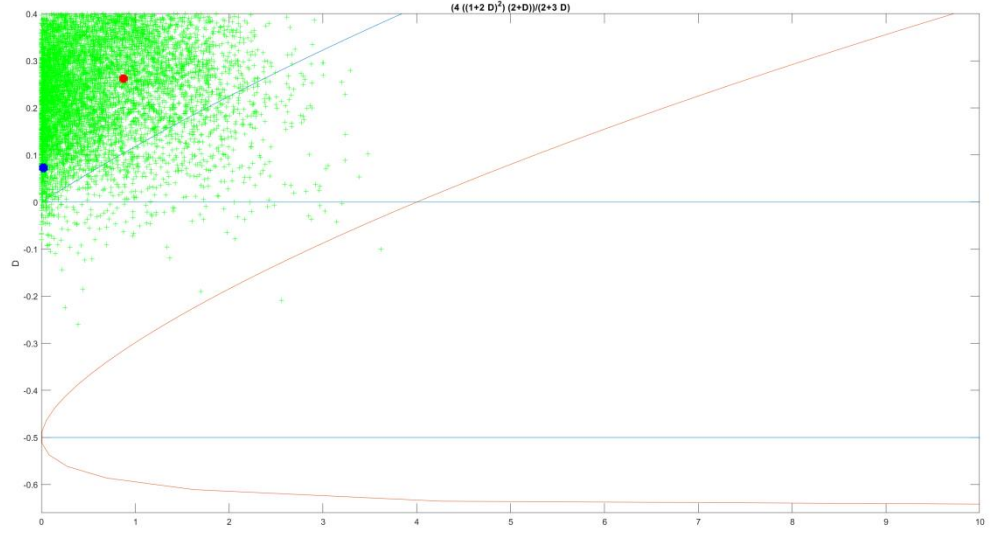
Şekil 119: Tip IV Dağılımı ($n=201$), Dönüşüm Yapılmayan Tahminleyici



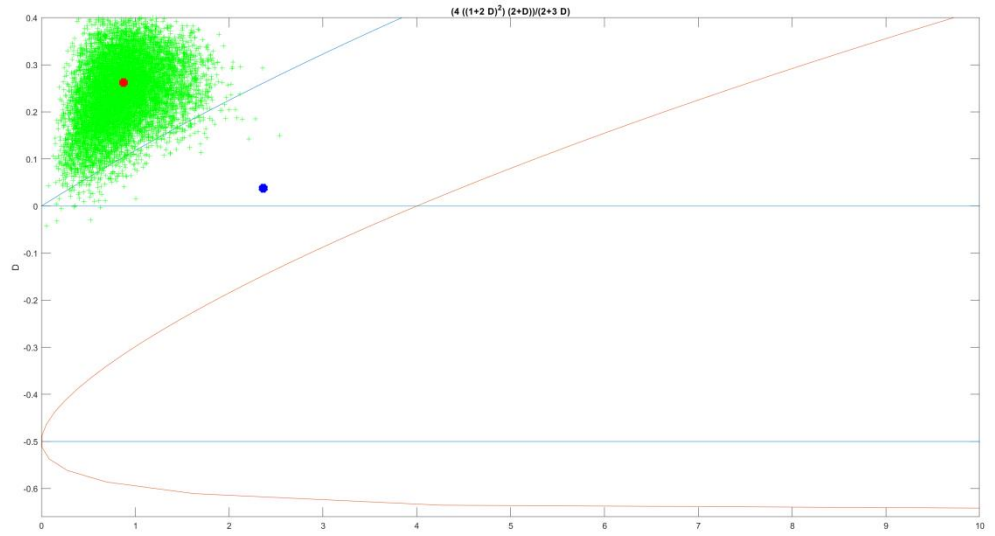
Şekil 120: Tip IV Dağılımı ($n=201$), Ortalaması Sıfır Olan Tahminleyici



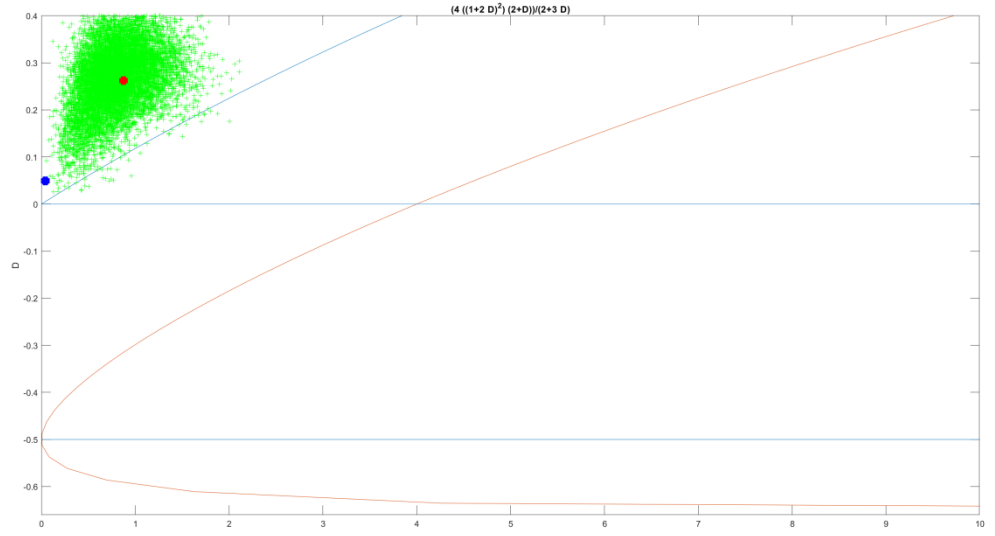
Şekil 121: Tip IV Dağılımı ($n=201$), Modu Sıfır Olan Tahminleyici



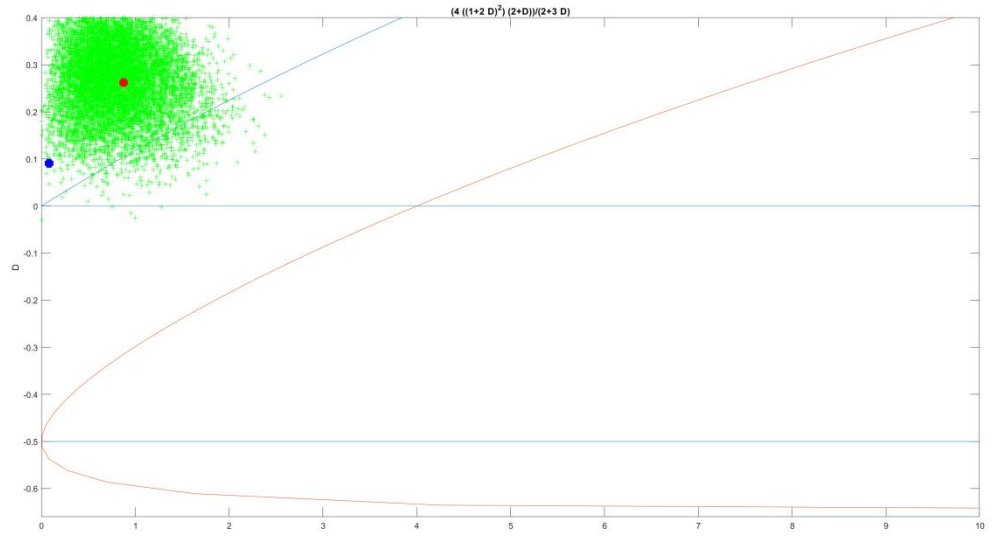
Şekil 122: Tip IV Dağılımı ($n=801$), Dönüşüm Yapılmayan Tahminleyici



Şekil 123: Tip IV Dağılımı ($n=801$), Ortalaması Sıfır Olan Tahminleyici



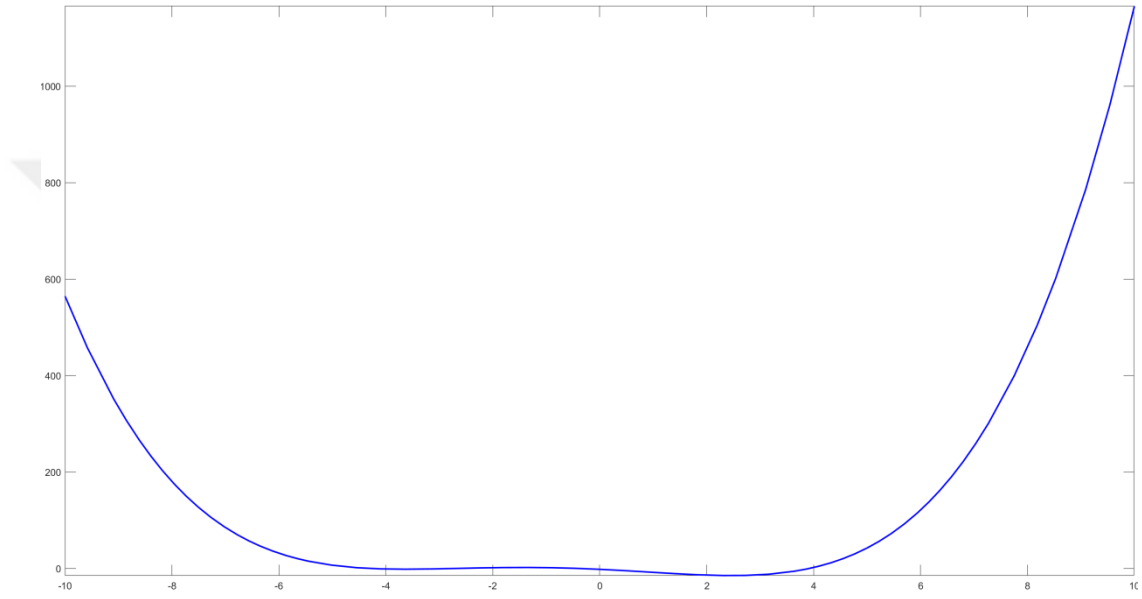
Şekil 124: Tip IV Dağılımı ($n=801$), Modu Sıfır Olan Tahminleyici



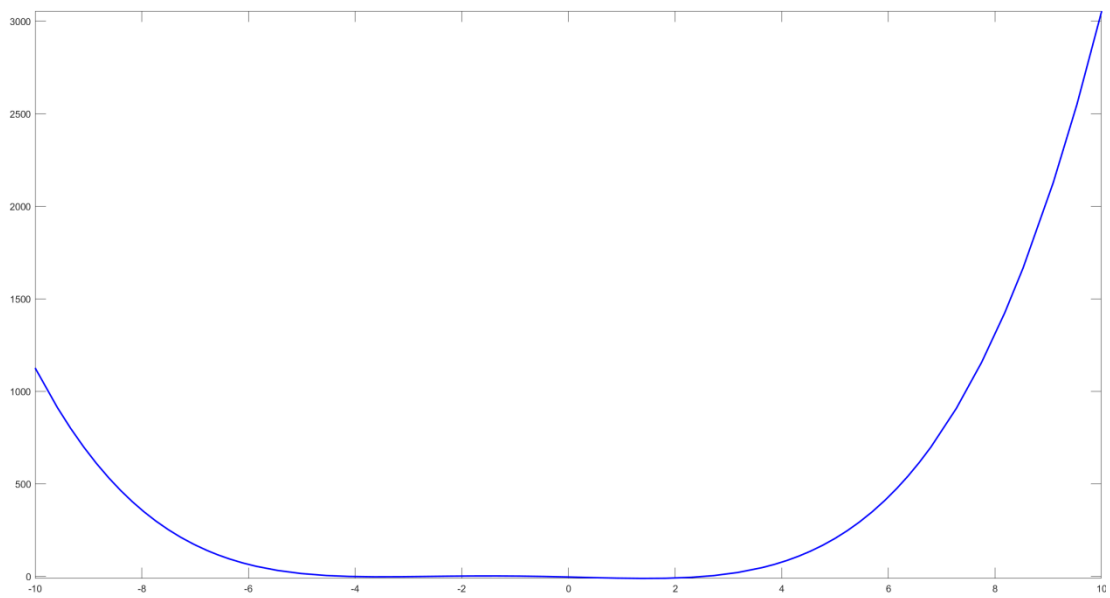
Ek 11: Tahminleyicilerin Etki Fonksiyonları

Bu kısımda verilen grafikler, kullanılan alternatif tahminleyicilerin incelenen dağılımlar altındaki görüntüleridir. Yatay eksen şans değişkeninin değeri, dikey eksen ise etki fonksiyonunun değerini göstermektedir.

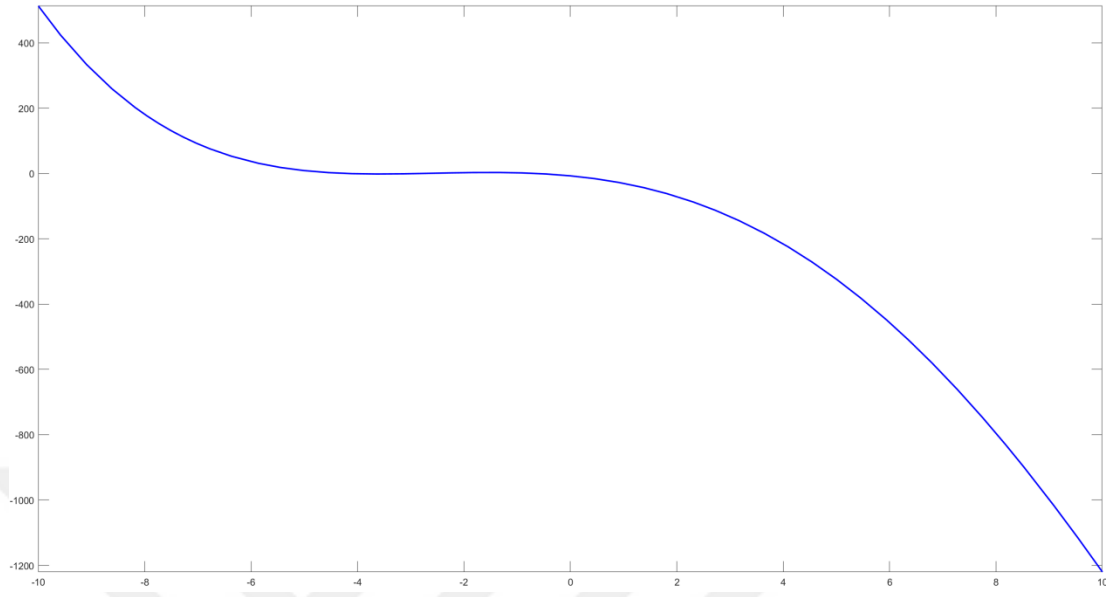
Şekil 125: Tip IV Dağılımı İçin α 'nın Etki Fonksiyonu



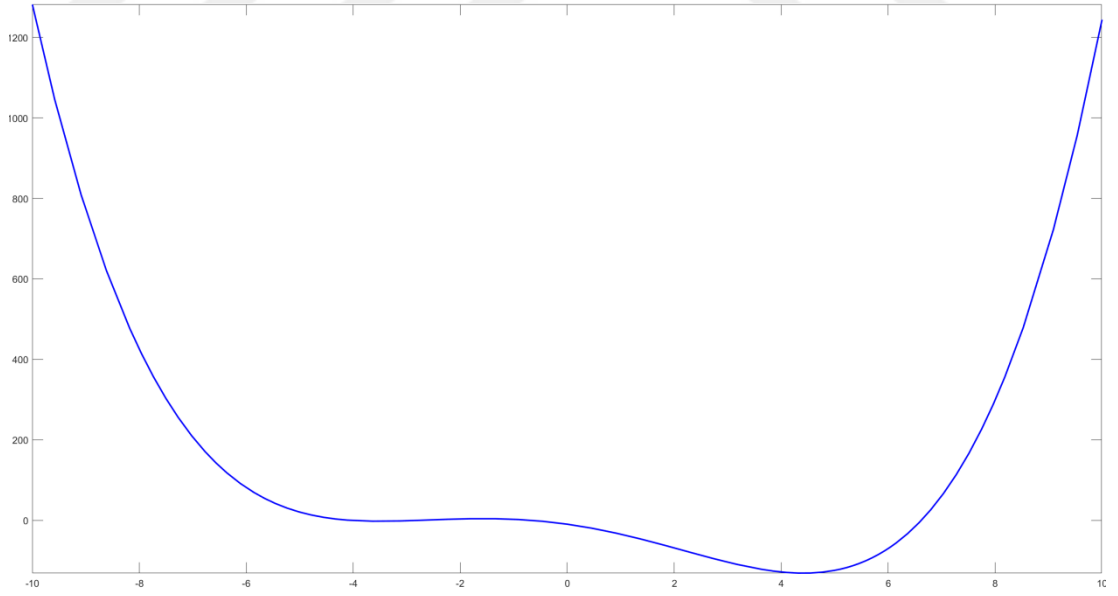
Şekil 126: Tip VI Dağılımı İçin α 'nın Etki Fonksiyonu



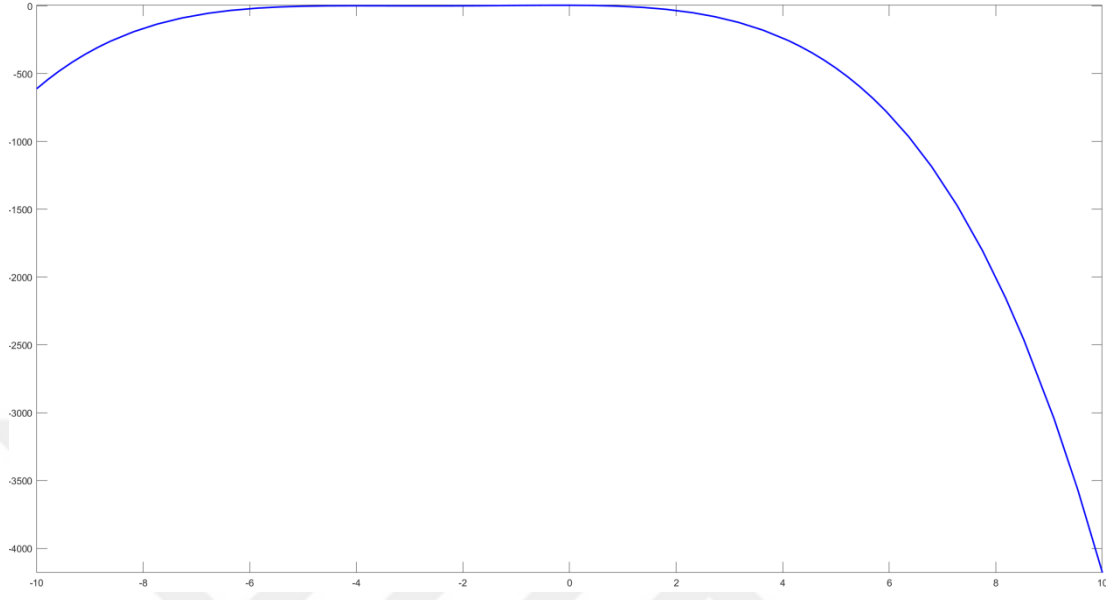
Şekil 127: Tip IV Dağılımı İçin ϕ_0 'ın Etki Fonksiyonu



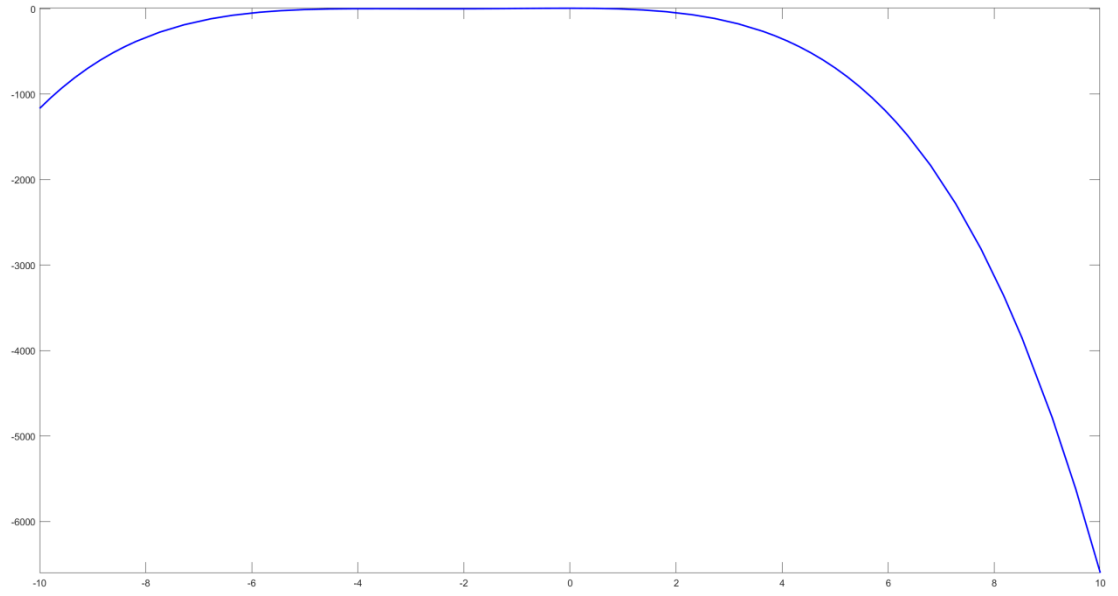
Şekil 128: Tip VI Dağılımı İçin ϕ_0 'ın Etki Fonksiyonu



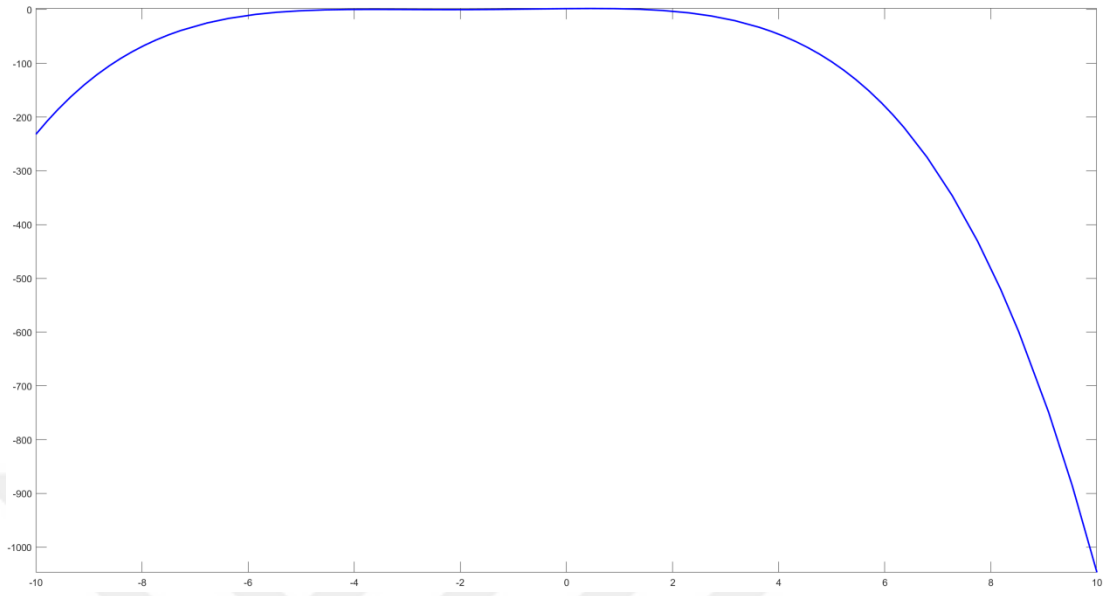
Şekil 129: Tip IV Dağılımı İçin ϕ_I 'in Etki Fonksiyonu



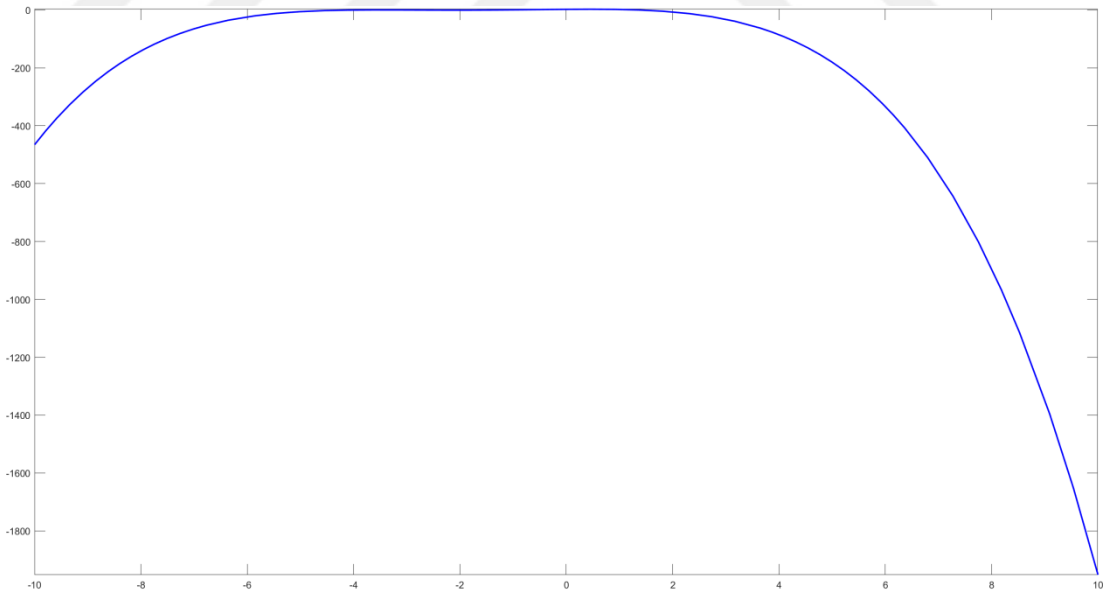
Şekil 130: Tip VI Dağılımı İçin ϕ_I 'in Etki Fonksiyonu



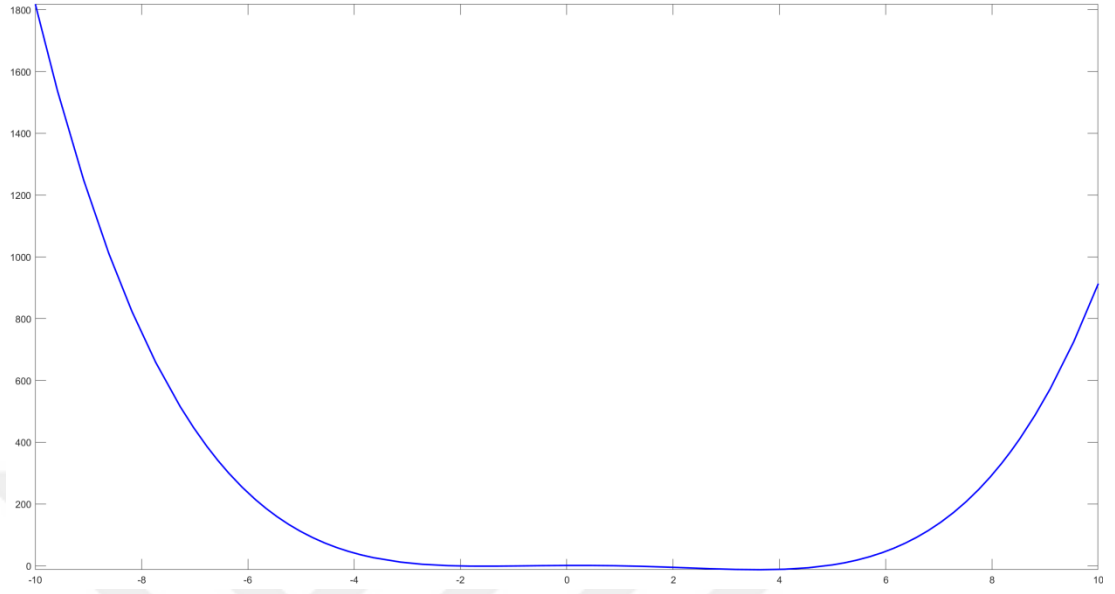
Şekil 131: Tip IV Dağılımı İçin ϕ_2 'nin Etki Fonksiyonu



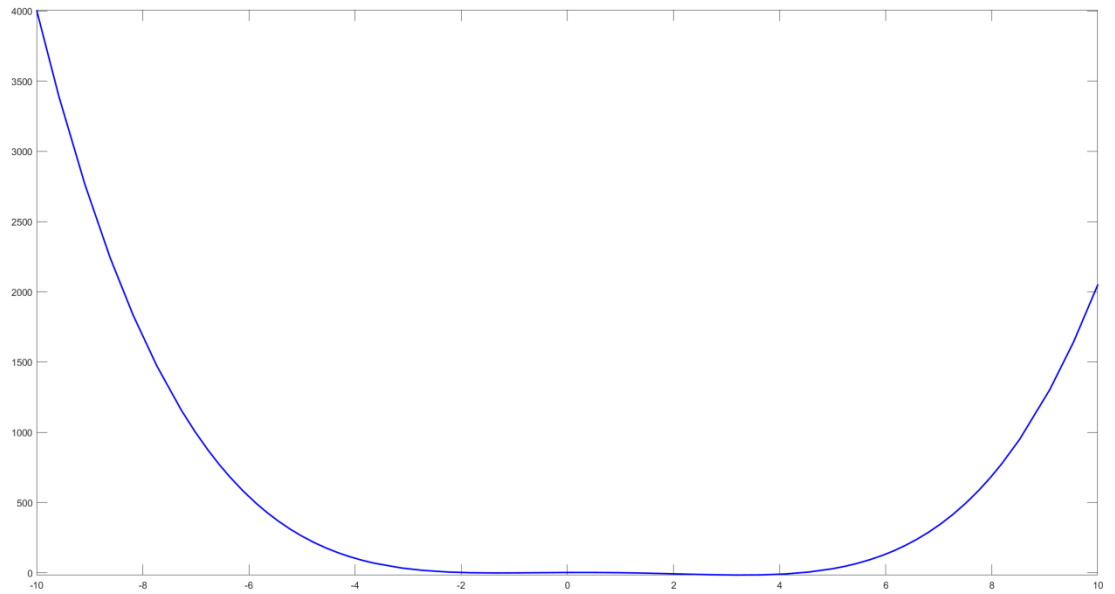
Şekil 132: Tip VI Dağılımı İçin ϕ_2 'nin Etki Fonksiyonu



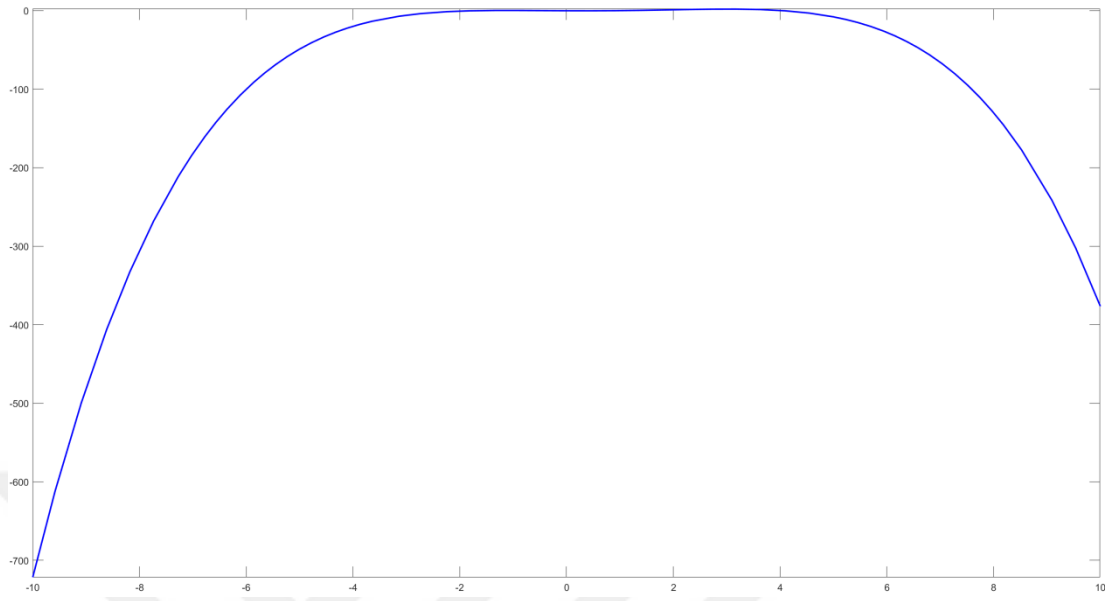
Şekil 133: Tip IV Dağılımı İçin φ_0 'ın Etki Fonksiyonu



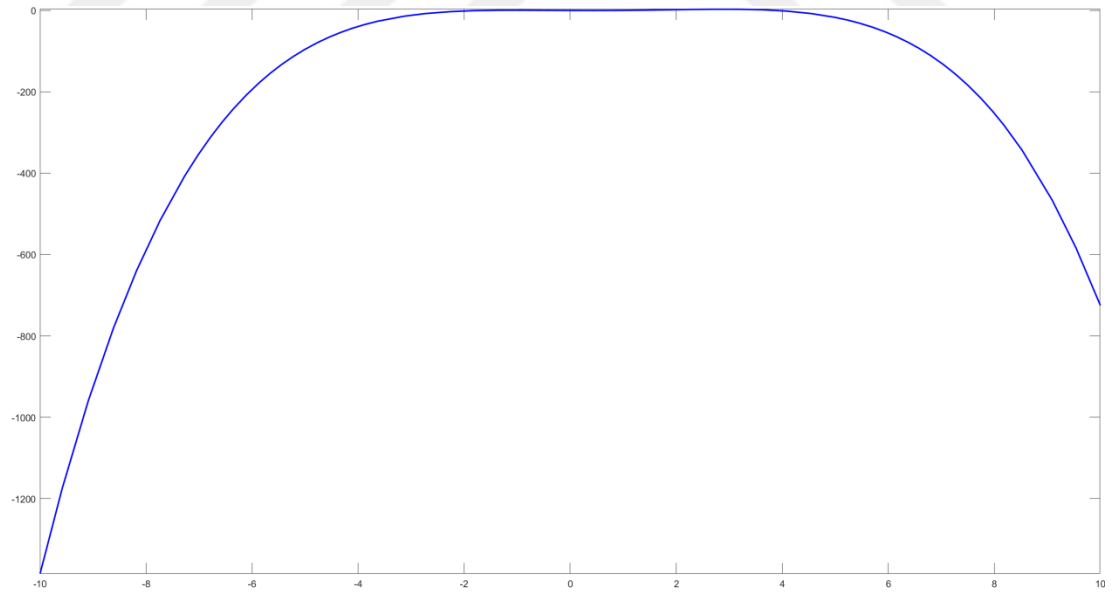
Şekil 134: Tip VI Dağılımı İçin φ_0 'ın Etki Fonksiyonu



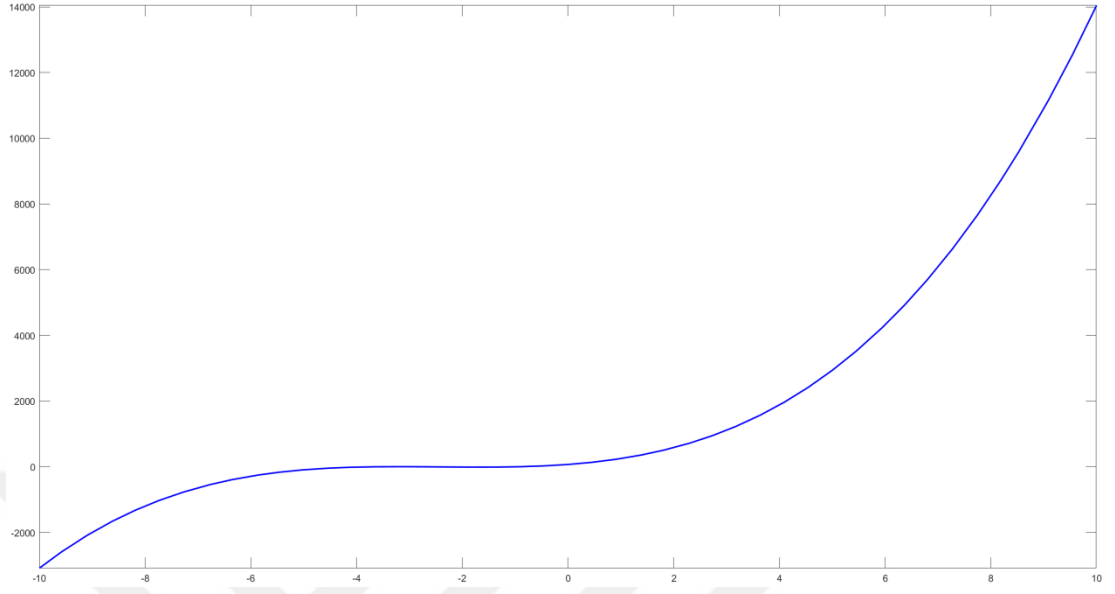
Şekil 135: Tip IV Dağılımı İçin φ_2 'nin Etki Fonksiyonu



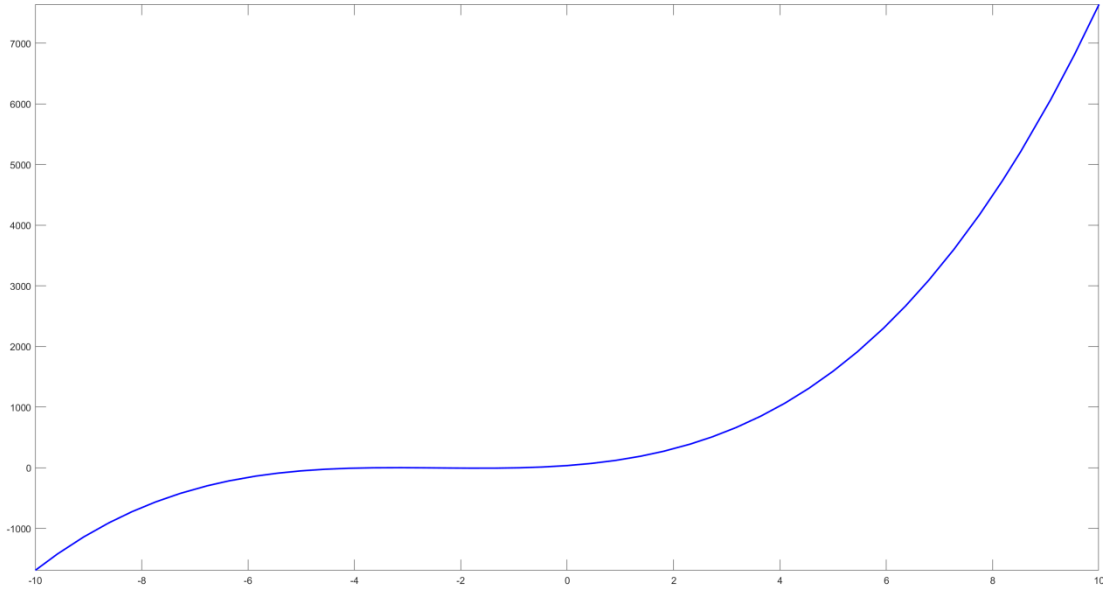
Şekil 136: Tip VI Dağılımı İçin φ_2 'nin Etki Fonksiyonu



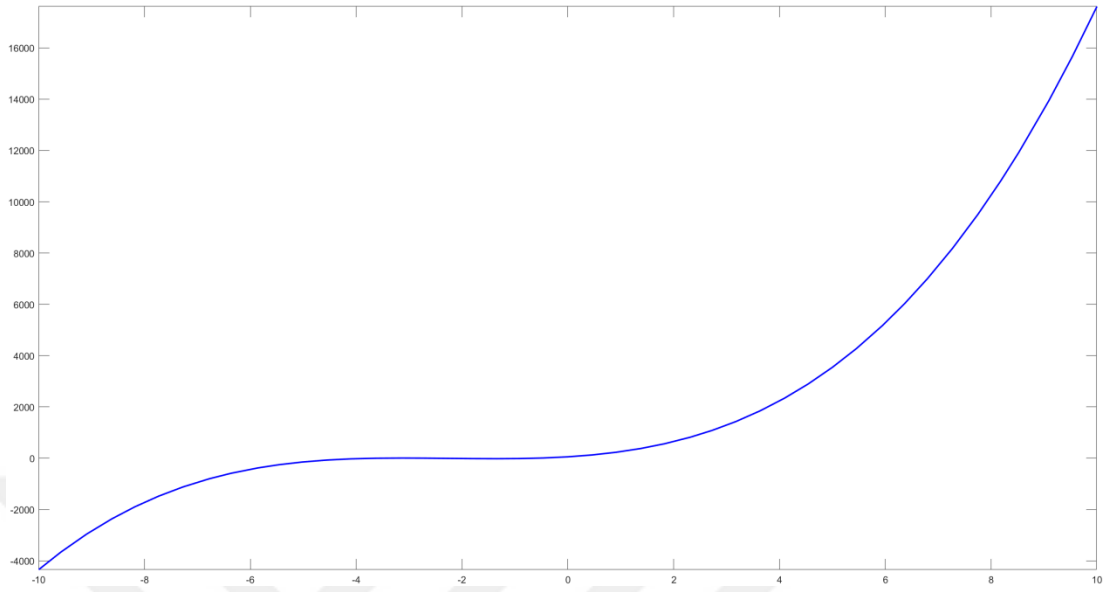
Şekil 137: Tip IV Dağılımı İçin λ_0 'ın Etki Fonksiyonu



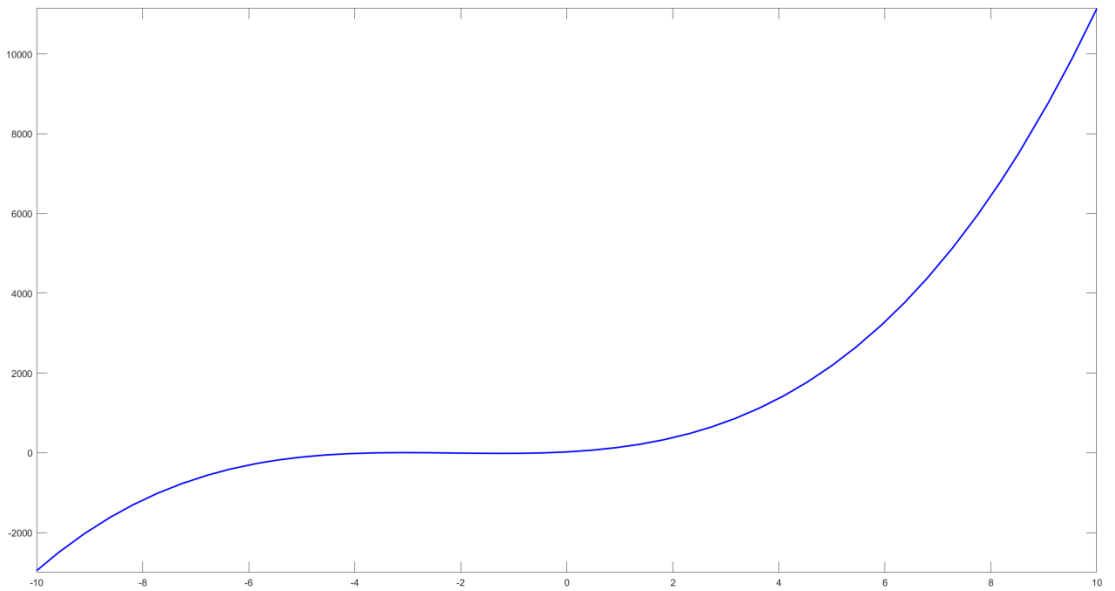
Şekil 138: Tip VI Dağılımı İçin λ_0 'ın Etki Fonksiyonu



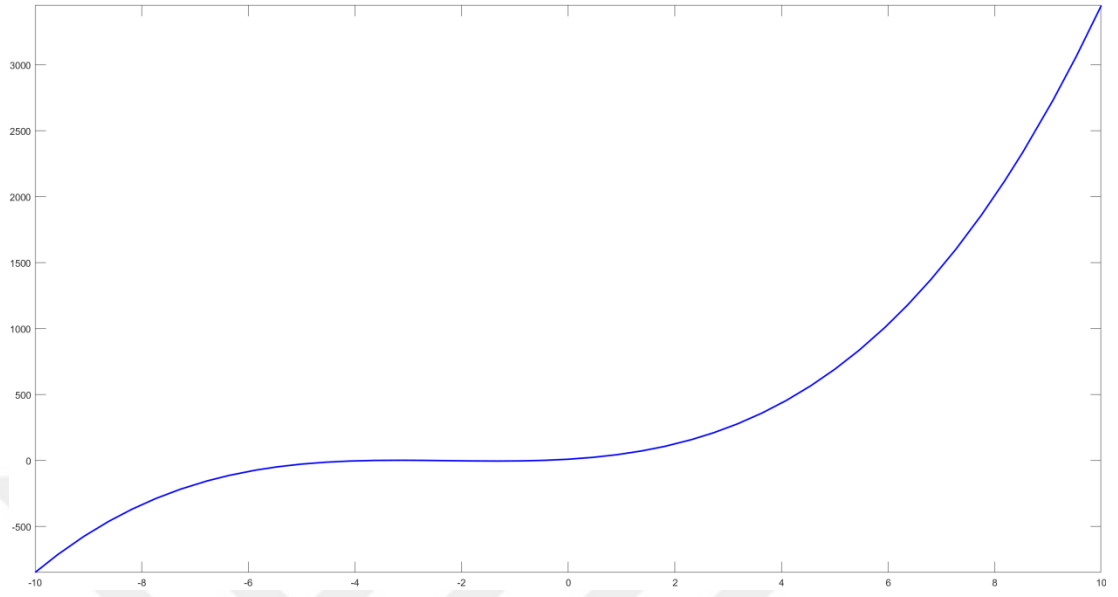
Şekil 139: Tip IV Dağılımı İçin λ_1 'in Etki Fonksiyonu



Şekil 140: Tip VI Dağılımı İçin λ_1 'in Etki Fonksiyonu



Şekil 141: Tip IV Dağılımı İçin λ_2 'nin Etki Fonksiyonu



Şekil 142: Tip VI Dağılımı İçin λ_2 'nin Etki Fonksiyonu

