

PELL ÖZDEŞLİKLERİ

Yurdanur BEKLEViÇ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**EYLÜL 2006
ANKARA**

Yurdanur BEKLEVİÇ tarafından hazırlanan PELL ÖZDEŞLİKLERİ adlı bu tezin
Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım

Prof. Dr. Dursun TAŞÇI
Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek
lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Sait Halıcioğlu

Üye : Prof. Dr. Dursun TAŞÇI

Üye : Doç. Dr. Ahmet ARIKAN

Üye : Doç Dr. Derya KESKİN TÜTÜNCÜ

Üye : Yrd. Doç Dr. Ercan ALTINIŞIK

Tarih : 11 / 09 / 2006

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Yurdanur BEKLEViÇ

PELL ÖZDEŞLİKLERİ
(Yüksek Lisans Tezi)

Yurdanur BEKLEVİÇ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Eylül 2006

ÖZET

“Pell Özdeşlikleri” isimli tez çalışmasında $\{P_n\}$ Pell dizisinin $w_n(a,b;p,q)$ genelleştirilmiş dizisi ile bağlantısı belirtilmiş, Pell sayıları için geçerli olan bazı özelliklere değinilmiş $\{w_n\}$ genelleştirilmiş dizisinin Pisagor özelliğinden bahsedilmiş, bu özellik Fibonacci sayıları için yeniden düzenlenmiş, Pell sayıları için verilen özdeşliklere benzer özdeşlikler Fibonacci sayıları için elde edilmiştir.

Bilim Kodu : 204.1.025
Anahtar Kelimeler : Pell Özdeşlikleri
Sayfa Adedi : 44
Tez Yöneticisi : Prof. Dr. Dursun TAŞCI

PELL IDENTITIES

(M.Sc. Thesis)

Yurdanur BEKLEVİÇ

GAZİ UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

September 2006

ABSTRACT

During study of “Pell Identities” thesis, the relationship of $\{P_n\}$ Pell sequence with the generalized $w_n(a,b;p,q)$ $\{P_n\}$ Pell sequence has been determined, a few properties which are applicable to Pell numbers have been addressed, the Pythagorean property of generalized $\{w_n\}$ sequence has been discussed and followed by re-arrangement of such property for Fibonacci numbers the identities similar to those ones given for Pell numbers have been achieved for Fibonacci numbers.

Science Code : 204.1.025
Key Words : Pell Identities
Page Number : 44
Adviser : Prof. Dr. Dursun TASCI

TEŞEKKÜR

Tez konumu verip katkılarıyla beni yönlendiren Hocam Prof. Dr. Dursun TAŞÇI'ya, ayrıca beni bugünlere getiren ve manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan, hayatımın her aşamasında bana güvenen ve destek veren aileme de teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER	viii
1. GİRİŞ	1
2. PELL ÖZDEŞLİKLERİ	4
2.1. $\{w_n(a,b;p,q)\}$ Genelleştirilmiş Dizisi	4
2.2. Pell Özdeşlikleri	10
3. $w_n(a,b;p,q)$ DİZİSİNİN ÖZELLİKLERİ	14
3.1. Pisagor Özelliği.....	15
4. FİBONACCİ ÖZDEŞLİKLERİ	37
KAYNAKLAR	43
ÖZGEÇMİŞ.....	44

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$\Rightarrow$	Gerektilir
$\{P_n\}$	Pell dizisi
$\{f_n\}$	Fibonacci dizisi
$\{L_n\}$	Lucas dizisi
$\{w_n\}$	Genelleştirilmiş dizi
Σ	Toplam sembolü
$\binom{n}{j}$	n in j li kombinasyonu

1. GİRİŞ

Bu tezde $\{P_n\}$, $\{w_n\}$ ve $\{f_n\}$ dizileri için geçerli olan bazı özellik ve özdeşlikler ele alınmaktadır.

Pell dizisi,

$$P_0 = 0, P_1 = 1 \text{ başlangıç koşulları ve } n \geq 0 \text{ için } P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n$$

bağıntısı ile tanımlanır[2].

Pell dizisinin negatif indisli terimleri

$$P_{-n} = (-1)^{n+1} P_n$$

bağıntısıyla tanımlı olup buna göre birkaç terimi

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & P_{-4} & P_{-3} & P_{-2} & P_{-1} & P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & \dots \\ \{P_n\} & & & & & & & & & & \\ \dots & 12 & 5 & -2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 5 & 1 & \dots \end{array}$$

şeklindedir.

Bu tezde $\{P_n\}$ Pell dizilerinin $\{w_n\}$ genelleştirilmiş dizileri ile ilişkisi ele alınmakta, $\{w_n\}$ dizisinin özelliklerinden yararlanılarak $\{P_n\}$ Pell dizisi için özellik ve özdeşlikler ifade edilmektedir.

Ayrıca,

$$w_0 = a, w_1 = b \text{ başlangıç koşulları ve } n \geq 0 \text{ için } w_{n+2} = pw_{n+1} - qw_n$$

bağıntısı ile tanımlanan $\{w_n\}$ genelleştirilmiş dizisinin Pisagor özelliğinden bahsedilmekte ve $\{w_n(a, b; 1, -1)\}$ dizisi $\{f_n\}$ Fibonacci dizisinin terimleri

yardımıyla yazılmaktadır[3]. Böylece $\{w_n\}$ dizisi için ifade edilmiş olan Pisagor özelliği yeniden ifade edilmektedir.

Burada adı geçen Fibonacci dizisi,

$f_0 = 0, f_1 = 1$ başlangıç koşulları ve $n \geq 0$ için $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ bağıntısı

ile tanımlanır[1].

$\{f_n\}$ dizisinin terimlerine de Fibonacci sayıları denir. Çalışmadaki genelliği bozmamak için “f” küçük harfle alınmaktadır.

Pisagor üçleme formülünün $\{w_n\}$ genelleştirilmiş dizisine tatbik edilmesiyle bulunan Sonuç 3.3 (i)’de Pell dizisi için $a=0, b=1, p=2, q=-1$ yazılmasıyla ve $n=0$ alınmasıyla,

$$P_2^2 - P_1^2 = 2^2 - 2^2 = 0$$

$$2.P_2 P_1 = 2.2.2 = 8$$

$$P_2^2 + P_1^2 = 2^2 + 2^2 = 8$$

bulunur. Yani 0,8,8 Pisagor üçlüsü oluşturulur.

$p=1, q=-1$ alınarak oluşturulan $w_n(a,b;1,-1)$ dizisi Pell sayıları ile ifade edilmeye çalışılırsa Teorem 3.11’deki ifadeleri benzer ifadeler elde edilememektedir.

Bu tezde Pell sayıları için geçerli olan ifade ve özdeşlikler Fibonacci sayıları için ifade edilmektedir.

Lucas dizisi,

$L_0 = 2, L_1 = 1$ başlangıç koşulları ve $n \geq 0$ için $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$

bağıntısı ile tanımlanır[9]. Bu dizinin terimlerine de Lucas sayıları denir.

$\{H_n(s,r)\}$ genelleştirilmiş Horadam dizisi,

$H_0 = s, H_1 = r$ başlangıç şartları ve $n \geq 0$ için $H_{n+2} = H_{n+1} + H_n$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır[5]. Burada s, r keyfi tamsayılardır.

Yukarıdaki şekilde tanımları verilen $\{L_n\}$ Lucas ve $\{H_n(s,r)\}$ genelleştirilmiş dizileri için Pell ve Fibonacci özdeşliklerine benzer özdeşlikler elde edilememektedir. Bunun nedeni a, b keyfi tam sayılarının seçimidir.

2. PELL ÖZDEŞLİKLERİ

2.1. $\{w_n(a,b;p,q)\}$ Genelleştirilmiş Dizisi

$\{w_n(a,b;p,q)\}$ genelleştirilmiş dizisi

$w_0 = a, w_1 = b$ başlangıç koşulları ve $n \geq 0$ için;

$$w_{n+2} = pw_{n+1} - qw_n \quad (2.1)$$

bağıntısı ile tanımlanır[3]. Buna göre $\{w_n(a,b;p,q)\}$ genelleştirilmiş dizisinin birkaç terimi

$$\{w_n\} \quad \dots, w_{-1}, w_0, w_1, w_2, w_3, w_4 \\ \dots, \frac{pa-b}{q}, a, b, pb-qa, p^2b-pqa, \dots \quad (2.2)$$

Eş 2.1'deki a,b,p,q keyfi tamsayıları

$$a=0, b=1, p=2, q=-1 \quad (2.3)$$

şeklinde alınırsa, $P_n = w_n(0,1;2,-1)$ elde edilir.

2.1. Teorem

$\{w_n(a,b;p,q)\}$ genelleştirilmiş dizisinin genel terimi;

$$w_n = \frac{b - a\beta}{\alpha - \beta} \alpha^n + \frac{a\alpha - b}{\alpha - \beta} \beta^n$$

dir. Burada $\alpha = (p+d)/2$ ve $\beta = (p-d)/2$ dir.

İspat

α ve β 'yi kök kabul eden karakteristik denklem;

$$x^2 - px + q = 0$$

ve buradaki p,q sayılar keyfi tamsayılar olsun.

Bu denklemin diskriminantının karekökü d olarak alınırsa, bu ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemin kökleri α ve β olduğundan

$$\begin{cases} \alpha = (p + d) / 2, & \beta = (p - d) / 2 \\ d = (p^2 - 4q)^{1/2} \end{cases}$$

dir.

Bu karakteristik denklemin kökleri olan α ve β yardımıyla, kökler toplamı, kökler çarpımı ve kökler farkı:

$$\alpha + \beta = p, \quad \alpha\beta = q, \quad \alpha - \beta = d$$

dir.

O halde Eş 2.2 eşitliğinde tanımladığımız $\{w_n\}$ genelleştirilmiş dizisi

$$w_n = A\alpha^n + B\beta^n$$

şeklinde yazılabilir. Burada;

$$A = \frac{b - a\beta}{\alpha - \beta}, \quad B = \frac{a\alpha - b}{\alpha - \beta}$$

dir.

Böylece $\{w_n(a,b;p,q)\}$ genelleştirilmiş dizisinin genel terimi;

$$w_n = \frac{b - a\beta}{\alpha - \beta} \alpha^n + \frac{a\alpha - b}{\alpha - \beta} \beta^n$$

şeklinde yazılabilir.

2.2. Teorem

$$e = pab - qa^2 - b^2$$

sayısı $\{w_n\}$ dizisinin karakteristik sayısıdır [5].

2.3. Teorem

$$A+B=a, A-B=(2b-pa) d^{-1}, A.B=e d^{-2}$$

dir.

İspat

Teorem 2.1.'den eşitlikler kolayca görülebilir.

2.1. Sonuç

Pell dizisinin n.terimi;

$$P_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n}{2^{3/2}}$$

şeklindedir.

İspat

Teorem 1.1'i Eş 2.3 deki Pell sayıları için geçerli olan $a=0$, $b=1$, $p=2$, $q=-1$ değerleri için yazarsak

$$\begin{cases} d = 2^{3/2} \\ \alpha = 1 + \sqrt{2} \\ \beta = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

değerleri yardımıyla Pell dizisinin n.terimi;

$$P_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n}{2^{3/2}}$$

şeklinde bulunur.

2.4. Teorem

$\{w_n\}$ için üreteç fonksiyonu

$$\frac{a + (b - pa)x}{1 - px + qx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} w_n x^n$$

dir[4] .

2.5. Teorem

$$\frac{1}{1 - 2x - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n+1} x^n$$

dir.

İspat

Eş 2.3 teki a,b, p, q değerlerini kullanırsak Teorem 2.4 $\{P_n\}$ Pell dizisi için aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\frac{x}{1 - 2x - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n$$

Bu üreteç fonksiyonunu düzenleyelim.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-2x-x^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^{n-1} \\
&= \sum_{n=-1}^{\infty} P_{n+1} x^n \\
&= P_0 x^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} P_{n+1} x^n (P_0 = 0) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P_{n+1} x^n
\end{aligned}$$

Yani;

$$\frac{1}{1-2x-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n+1} x^n$$

dir.

2.2. Sonuç

Pell sayılarının karakteristik sayısı

$$e_p = -1 \text{ dir}[8].$$

İspat

Teorem 2.2’de kullandığımız karakteristik sayısı [5] olan

$e = pab - qa^2 - b^2$ de Eş 2.3’deki a, b, p, q değerleri yerleştirilirse;

$$e_p = -1$$

şeklinde bulunur.

2.1. Tanım

$\{u_n(p,q)\}$ dizisi

$u_0 = 0, u_1 = 1$ başlangıç şartları

ve

$$u_{n+2} = pu_{n+1} - qu_n$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanan dizidir[2].

Not: $u_n(p,q) = w_n(0,1;p,q)$

dir[8,10].

2.3. Sonuç

$\{u_n(p,q)\}$ dizisi için karakteristik sayı

$$e_u = -1$$

dir.

2.2. Tanım

u_n sayılarının yardımıyla ve

$$u_{-n} = -q^{-n} \cdot u_n$$

negatif genellemeleri yapılarak $\{u_n\}$ genelleştirilmiş dizisi elde edilir [7].

2.6. Teorem

$$P_n = u_n(2, -1)$$

dir

İspat

Eş 2.3 ve Not birlikte kullanılarak eşitlik kolayca görülür.

Dikkat edilirse 1. bölümde P_n sayıları ve P_n sayılarının negatif genellemelerini kullanarak $\{P_n\}$ dizilerini tanımlanmıştır. Oradaki negatif genelleme $p=2$, $q=-1$ tamsayılarının Tanım 2.2.'de u_n sayıları için verilen negatif genellemede yerleştirilmesiyle ortaya çıkmış özel bir durumdur.

2.2. Pell Özdeşlikleri

2.7. Teorem

$$2^n w_n = a \sum_{j=0}^{[n/2]} p^{n-2j} d^{2j} \binom{n}{2j} + (2b - pa) \sum_{j=0}^{[(n-1)/2]} \binom{n}{2j+1} p^{n-2j-1} d^{2j}$$

dir[5].

2.4. Sonuç

$$P_k = \sum_{r=0}^{k-1/2} \binom{k}{2r+1} 2^r$$

dir[8].

İspat

Eş 2.3 ve Sonuç 2.1'in ispatında geçen α, β ve d sayıları Teorem 2.8'de yerleştirilerek yukarıdaki özdeşlik elde edilir.

2.8. Teorem

$$w_{2n} = (-q)^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{-p}{q} \right)^{n-j} w_{n-j}$$

dir[3].

2.9. Teorem

$$P_{2k} = \sum_{r=1}^k \binom{k}{r} 2^r \cdot P_r$$

dir[10].

İspat

Eş 2.3 ve Sonuç 2.1'in ispatında gecen α , β ve d sayıları Teorem 2.8'de uygun değerler alınarak yukarıdaki özdeşlik elde edilir.

2.10. Teorem

$$w_{n+r} w_{n-r} = w_n^2 + e q^{n-r} u_r^2$$

dir[5].

2.11. Teorem

$$w_{n+r} = w_r u_{n+1} - q w_{r-1} u_n$$

dir.

2.12. Teorem

$$P_{2n+1} = P_n^2 + P_{n+1}^2$$

dir[10].

İspat

Teorem 2.10'da r yerine $n+1$ alıp Eş 2.3 teki a , b , p , q değerleri yerleştirilirse aranılan özdeşlik görülür.

Ayrıca bu özdeşlik Teorem 2.11'den elde edilebilir.

2.13. Teorem

$$P_{n+r} = P_r P_{n+1} + P_{r-1} P_n$$

dir.

İspat

Teorem 2.11'de Pell dizileri için verilen a,b, p, q değerleri yerleştirilirse kolayca görülür.

2.14. Teorem

$$P_{2n} = P_n (P_{n+1} + P_{n-1})$$

İspat:

Teorem 2.13'de r=n alınırsa kolayca görülür.

2.15. Teorem

$$P_{n+1} \cdot P_{n-1} - P_n^2 = (-1)^n \text{ dir}[2].$$

İspat

Teorem 2.10'de r=1 alınır ve Teorem 2.1, Sonuç 2.2, Teorem 2.6 ile $P_1=1$ kullanılırsa kolayca görülür.

2.16. Teorem

$$w_{n-r} w_{n+r+t} - w_n w_{n+t} = e q^{n-r} u_r u_{r+t}$$

dir[5].

2.17. Teorem

$$P_{2n+1} + P_{2n} = 2P_{n+1}^2 - 2P_n^2 - (-1)^n$$

dir[11].

İspat

Teorem, 2.12, Teorem 2.14, Teorem 2.15 ve Pell tanımını kullanarak ispatlayalım.

$$\begin{aligned} P_{2n+1} + P_{2n} &= P_{n+1}^2 + (P_{n+1} \cdot P_{n-1} - (-1)^n)P_n(2P_{n+1} - 2P_n) \\ &= P_{n+1}^2 + P_{n+1}(P_{n+1} - 2P_n) - (-1)^n + P_n(2P_{n+1} - 2P_n) \\ &= 2(P_{n+1}^2 - P_n^2) - (-1)^n \end{aligned}$$

Böylece

$$P_{2n+1} + P_{2n} = 2P_{n+1}^2 - 2P_n^2 - (-1)^n$$

olur.

Teorem 2.16'da $r=-a$, $b=r+t$, $t=a+b$ alalım. Bu şekilde de Pell tanımı, Eş 2.3, Sonuç 2.2 ve Teorem 2.6 kullanılarak da bu özdeşlik ispatlanabilir.

3. $W_n(a,b,p,q)$ DİZİSİNİN ÖZELLİKLERİ

$\{w_n(a,b;p,q)\}$ genelleştirilmiş dizisini şu 2. bölümde tanımlamıştık. Şimdi, dizinin “Pisagor Özelliği” ni inceleyeceğiz. Bu özellik;

$$\{h_n(r,s)\} = \{w_n(r,r+s;1,-1)\}$$

dizileri için bulunan çözümlerin genelleştirilmiş durumlarıdır [5,6].

3.1. Teorem

$w_n(a,b;p,q)$ dizisindeki a, b, p, q sayıları söylendiği şekilde ifade edilirse belirtilen sayı dizileri elde edilir.

i) Tam sayılar	$a=1,$	$b=2,$	$p=2,$	$q=1$	
ii) Tek sayılar	1	3	2	1	
iii) Aritmetik diziler	a	$a+d$	2	1	
(Ortak fark d)					
iv) Geometrik diziler	a	aq	$q+1$	q	
(Ortak oran q)					
v) Fermat Dizileri $v_n(3,2)$	1	3	3	2	$(u_n(p,q)=w_n(1,3;p,q))$
vi) Fermat Dizileri $u_n(3,2)$	2	3	3	2	$(v_n(p,q)=w_n(2,3;p,q))$
vii) Pell Dizileri $u_n(2,-1)$	1	2	2	-1	$(u_n(p,q) = w_n(1,2;p,q))$
viii) Pell Dizileri $v_n(2,-1)$	2	2	2	-1	$(v_n(p,q)=w_n(2,2;p,q))$

İspat

(iv) $a \rightarrow a$, $b \rightarrow aq$, $p \rightarrow q+1$, $q \rightarrow q$ alınsın.

$$w_0 = a$$

$$w_1 = aq$$

$$w_2 = (q+1)aq - qa = aq^2$$

$$w_3 = (q+1)q^2 a - qa^2 = aq^3$$

.

.

.

$$w_n = aq^n$$

.

.

.

şeklinde, ortak çarpanı q olan geometrik dizi elde edilir. (i), (ii),..., (viii) ifadeleri de benzer şekilde görülebilir.

3.1. Pisagor Özelliği

3.2. Teorem

u , v herhangi negatif olmayan reel sayılar olmak üzere

$$(u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = (u^2 + v^2)^2$$

dir. Bu formüle Pisagor üçleme formülü denir.

İspat

$$\left. \begin{aligned} (u^2 - v^2)^2 &= u^4 - 2u^2v^2 + v^4 \\ (u^2 + v^2)^2 &= u^4 + 2u^2v^2 + v^4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = (u^2 + v^2)^2$$

3.1. Sonuç

$$i) (w_{n+2}^2 - w_{n+1}^2)^2 + 2(w_{n+2}w_{n+1})^2 = (w_{n+2}^2 + w_{n+1}^2)^2$$

$$ii) \left[(pw_{n+1} - qw_n)^2 - w_{n+1}^2 \right]^2 + [2w_{n+1}(pw_{n+1} - qw_n)]^2 \\ = \left[(pw_{n+1} - qw_n)^2 + w_{n+1}^2 \right]^2$$

İspat

i) $\{w_n\}$ genelleştirilmiş dizisi için Teorem 3.2'yi kullanalım.

Her $w_n, (u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = (u^2 + v^2)^2$ Pisagor üçleme formülünde yerine konabilir.

Pisagor üçleme formülünde $u=w_{n+2}$, $v=w_{n+1}$ yazılırsa;

$$(w_{n+2}^2 - w_{n+1}^2)^2 + (2w_{n+2}w_{n+1})^2 = (w_{n+2}^2 + w_{n+1}^2)^2$$

elde edilir.

ii) (i) özdeşliğinde w_{n+2} yerine $w_{n+2}=pw_{n+1}-qw_n$ ifadesindeki eşitliği yazılırsa (ii) özdeşliği görülür.

3.1. Örnek

Teorem 3.3'deki Pisagor özdeşlikleri kullanılarak, n, p, q (ve a, b) için formülde bazı değerler konulmasıyla farklı Pisagor üçlülere elde edilir.

Örneğin; $n=0$, $a=1$ ($=w_0$), $b=2$ ($=w_1$), $p=5$, $q=-1$ (seçimler tamamen keyfî) değerleri 117, 44, 125 üçlüsünü oluşturur. Gerçekten;

$n=0$ için,

$$w_{n+2} = w_2, w_{n+1}=w_1=2, w_2=pw_1-qw_0=11$$

3.1 Sonuç (ii)den

$$(w_2^2 - w_1^2) = 11^2 - 2^2 = 121 - 4 = 117$$

$$2w_2 w_1 = 2 \cdot 11 \cdot 2 = 44$$

$$w_2^2 + w_1^2 = 11^2 + 2^2 = 121 + 4 = 125$$

dir.

3.3. Teorem

$\{w_n(a,b;p,q)\}$ dizisi için kolaylık olsun diye $n=0$ alınırsa; Teorem 3.1'deki sayı dizileri için sırasıyla aşağıdaki Pisagor üçlülere elde edilir:

i) Tam sayılar	5	12	13
ii) Tek sayılar	16	30	34
iii) Aritmetik diziler	$2ad+3d^2$	$2a^2+6ad+4d^2$	$2a^2+6ad+5d^2$
iv) Geometrik diziler	$a^2q^2(q^2-1)$	$2a^2q^3$	$a^2q^2(q^2+1)$
v) Fermat dizileri $v_n(3,2)$	40	42	58
vi) Fermat dizileri $u_n(3,2)$	16	30	34
vii) Pell Dizileri $u_n(2,-1)$	21	20	29
viii) Pell Dizileri $v_n(2,-1)$	32	24	40

Burada (ii) ve (vi) üçlülere $n=0$ ve $w_1=3$, $w_2=5$ sayıları aynı olduğu için aynı çıktı. Fakat bu iki dizi başka hiçbir durumda aynı çıkamaz.

İspat

i) Tamsayılar için;

$a=1$, $b=2$, $p=2$, $q=1$ alınırsa

$$w_0=1, w_1=2, w_2=2.2 - 1.1 = 3$$

olarak bulunur. Böylece tamsayılar için Pisagor üçlüsü;

$$w_2^2 - w_1^2 = 3^2 - 2^2 = 5, \quad 2w_2w_1 = 2.3.2 = 12, \quad w_2^2 + w_1^2 = 3^2 + 2^2 = 13$$

şeklindedir.

ii) Tek sayılar için;

$a=1$, $b=3$, $p=2$, $q=1$ alınırsa

$$w_0=1, w_1=3, w_2=2.3-1.1 = 5$$

olarak bulunur.

Böylece tek sayılar için Pisagor üçlüsü;

$$w_2^2 - w_1^2 = 5^2 - 3^2 = 16, \quad 2w_2w_1 = 2.5.3 = 30, \quad w_2^2 + w_1^2 = 5^2 + 3^2 = 34$$

şeklindedir.

iii) Aritmetik diziler (Ortak Fark d) için;

$a \rightarrow a$, $b \rightarrow a+d$, $p \rightarrow 2$, $q \rightarrow 1$ alınırsa

$$w_0=a, w_1 = a+d, w_2=2(a+d) - 1a = a+2d$$

olarak bulunur. Böylece aritmetik diziler için Pisagor üçlüsü;

$$w_2^2 - w_1^2 = (a + 2d)^2 - (a + d)^2 = (a + 2d - a - d)(a + 2d + a + d) \\ = d(2a + 3d) = 2ad + 3d^2$$

$$2w_2w_1 = 2(a + 2d)(a + d) = 2(a^2 + 3ad + 2d^2) = 2a^2 + 6ad + 4d^2$$

$$w_2^2 + w_1^2 = (a + 2d)^2 + (a + d)^2 = a^2 + 4ad + 4d^2 + a^2 + 2ad + d^2 = 2a^2 + 6ad + 5d^2$$

şeklindedir.

iv) Geometrik diziler (Ortak oran q) için;

$$a \rightarrow a, b \rightarrow aq, p \rightarrow q+1, q \rightarrow q$$

alınırsa

$$w_0 = a, w_1 = qa, w_2 = (q+1)qa - qa = q^2a$$

olarak bulunur.

Böylece geometrik diziler için Pisagor üçlüsü;

$$w_2^2 - w_1^2 = (aq^2)^2 - (aq)^2 = a^2q^4 - a^2q^2 = a^2q^2(q^2 - 1)$$

$$2w_2w_1 = 2q^2aqa = 2a^2q^3$$

$$w_2^2 + w_1^2 = (aq^2)^2 + (aq)^2 = a^2q^4 + a^2q^2 = a^2q^2(q^2 + 1)$$

şeklindedir.

v) Fermat dizileri $u_n(3,2)$ için;

$$a=1, b=3, p=3, q=2 \text{ alınırsa}$$

$$w_0=1, w_2 = 3, w_2=3.3-2.1=7$$

olarak bulunur. Böylece $u_n (3,2)$ Fermat dizileri için Pisagor üçlüsü;

$$w_2^2 - w_1^2 = 7^2 - 3^2 = 40, \quad 2w_2w_1 = 2.7.3 = 42, \quad w_2^2 + w_1^2 = 7^2 + 3^2 = 58,$$

şeklindedir.

vi) Fermat Dizileri $v_n (3,2)$ için;

$$a=2, b=3, p=3, q=2$$

alınırsa

$$w_0=2, w_1 = 3, w_2= 3.3 - 2.2 = 5$$

olarak bulunur.

Böylece $v_n (3,2)$ Fermat dizileri için Pisagor üçlüsü;

$$w_2^2 - w_1^2 = 5^2 - 3^2 = 16, \quad 2w_2w_1 = 2.5.3 = 30, \quad w_2^2 + w_1^2 = 5^2 + 3^2 = 34$$

şeklindedir.

vii) Pell Dizileri $u_n (2,-1)$ için;

$$a=1, b=2, p=2, q=-1$$

alınırsa

$$w_0=1, w_1=2, w_2 = 2.2 - (-1).1 = 5$$

olarak bulunur. Böylece $u_n (2,-1)$ Pell dizileri için Pisagor üçlüsü;

$$w_2^2 - w_1^2 = 5^2 - 2^2 = 21, \quad 2w_2w_1 = 2.5.2 = 20, \quad w_2^2 + w_1^2 = 5^2 + 2^2 = 29$$

şeklindedir.

viii) Pell Dizileri $v_n(2,-1)$ için;

$$a=2, b=2, p=2, q=-1$$

alınırsa

$$w_0=2, w_1=2, w_2 = 2.2 - (-1).2 = 6$$

olarak bulunur. Böylece $v_n(2,-1)$ Pell dizileri için Pisagor üçlüsü;

$$w_2^2 - w_1^2 = 6^2 - 2^2 = 32, \quad 2w_2w_1 = 2.6.2 = 24, \quad w_2^2 + w_1^2 = 6^2 + 2^2 = 40$$

şeklindedir.

3.4. Teorem

$$w_{n+3} = w_{n+2} + w_{n+1}$$

İspat

$w_{n+2} = pw_{n+1} - qw_n$ eşitliğinde $p=1, q= -1$ yazılırsa

$$w_{n+2} = w_{n+1} + w_n$$

bulunur. Burada n yerine $n+1$ alınırsa

$$w_{n+3} = w_{n+2} + w_{n+1}$$

bulunur. Böylece

$$\left. \begin{array}{l} w_{n+2} - w_{n+1} = w_n \\ w_{n+2} + w_{n+1} = w_{n+3} \end{array} \right\}$$

eşitlikleri taraf tarafa çarpılırsa

$$w_{n+2}^2 - w_{n+1}^2 = w_n w_{n+3}$$

özdeşliği elde edilir.

3.5. Teorem

$$w_{n+2}^2 - w_{n+1}^2 = -w_n w_{n+3}$$

İspat

$w_{n+2} = pw_{n+1} - qw_n$ eşitliğinde $p=-1$, $q= -1$ yazılırsa

$$w_{n+2} = -w_{n+1} + w_n$$

bulunur. Burada n yerine $n+1$ alınırsa

$$w_{n+3} = -w_{n+2} + w_{n+1}$$

bulunur. Böylece

$$w_{n+2} + w_{n+1} = w_n$$

$$-w_{n+2} + w_{n+1} = w_{n+3}$$

eşitlikleri taraf tarafa çarpılırsa

$$-w_{n+2}^2 + w_{n+1}^2 = w_n w_{n+3}$$

özdeşliği elde edilir.

$$w_{n+2}^2 - w_{n+1}^2 = -w_n w_{n+3}$$

bulunur.

3.6. Teorem

$$w_{n+2}^2 - w_{n+1}^2 = (w_{n+1} - w_{n+1}).(w_{n+2} + w_{n+1})$$

3.7. Teorem

$$(w_n w_{n+3})^2 + (2w_{n+2} w_{n+1})^2 = (w_{n+2}^2 + w_{n+1}^2)^2$$

İspat

Teorem 3.6'da $p=1$, $q = -1$ alınırsa; Teorem 3.4'ün Sonuç 3.1'in (i) de yerine yazılmasıyla ispat yapılır.

Ya da,

Teorem 3.6'da $p= -1$, $q = -1$ alınırsa; Teorem 3.5'in Sonuç 3.1 (i) de yerine yazılmasıyla ispat yapılır.

Not: Burada $p=1$, $q =-1$ ve $p=-1$, $q =-1$ alınarak Teorem 3.7'deki özdeşlik elde edilmiş oldu. p , q 'nın başka hiçbir değeri için buradaki $(w_n w_{n+3})^2$ terimi elde edilemez.

3.1. Teorem

$$i) w_n(a,b;1,-1) \equiv a f_{n-2} + b f_{n-1} \equiv h_n(a,b-a)$$

$$ii) w_n(a,b;1,-1) = (-1)^n (a f_{n-2} - b f_{n-1}) \equiv g_n(a,b-a)$$

Burada g - ve h - notasyonları¹ uygunluk olsun diye kullanılmıştır.

f_n Fibonacci sayılarının² genel terimidir.

İspat

$$h_n(r,s) = w_n(r,r+s;1,-1)$$

Ayrıca yukarıdaki $g_n(r,s)$ teriminde $r \rightarrow a$, $s \rightarrow b-a$ alınırsa istenilen ifade elde edilir.

¹ $h_n(r,s)=w_n(r,r+s; 1,-1)$ $g_n(r,s)=w_n(r,r+s;-1,-1)$ [7]

² $f_0=1, f_1=1, f_2=2, f_{n+1} = f_n+f_{n-1}$ [9]

3.2. Sonuç

$$(h_n h_{n+3})^2 + (2h_{n+1} h_{n+2})^2 = (2h_{n+1} h_{n+2} + h_n^2)^2$$

dir. Bu denklemin sağ tarafındaki ifade Teorem 3.7'deki denklemin sağ tarafındaki ifadeye alternatif olarak kullanılabilir.

İspat:

$w_n(a, b; 1, -1) \equiv h_n(a, b-a)$ için $p=1$, $q=-1$ olup, Teorem 3.7'de yerine konulursa istenilen ifade elde edilir. Gerçekten

$$w_{n+2} = pw_{n+1} - qw_n \text{ eşitliğinde } p=1, q=-1 \text{ yazılırsa}$$

$$w_{n+2} = w_{n+1} + w_n$$

$$\Rightarrow w_{n+2} - w_{n+1} = w_n$$

bulunur. Bu eşitlik yardımıyla

$$\begin{aligned} w_{n+2}^2 + w_{n+1}^2 &= 2w_{n+1}w_{n+2} + w_{n+2}^2 - 2w_{n+2}w_{n+1} + w_{n+1}^2 \\ &= 2w_{n+1}w_{n+2} + \underbrace{(w_{n+2} - w_{n+1})^2}_{w_n^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow w_{n+2}^2 + w_{n+1}^2 = 2w_{n+1}w_{n+2} + w_n^2$$

şeklinde bulunun ifade Teorem 3.7'de yerine konulursa

$$(w_n w_{n+3})^2 + (2w_{n+2} w_{n+1})^2 = (2w_{n+1} w_{n+2} + w_n^2)^2$$

bulunur. Ayrıca

$$w_n(a, b; 1, -1) \equiv h_n(a, b-a) \text{ olup}$$

$$(h_n h_{n+3})^2 + (2h_{n+1} h_{n+2})^2 = (2h_{n+1} h_{n+2} + h_n^2)^2$$

Pisagor genellemesi elde edilir.

3.2. Örnek

$n=0$, $a=5$, $b=2$ alınırsa;

Özellik 3.1 (i) den; $45^2 + 28^2 = 53^2$

Özellik 3.1 (ii) den; $5^2 + 12^2 = 13^2$ bulunur. Gerçekten

$n=0$, $a=5$, $b=2$, $p=1$, $q=-1$ için;

$$w_{n+2} = pw_{n+1} - qw_n = w_{n+1} + w_n$$

olduğundan,

$$w_0 = 5$$

$$w_1 = 2$$

$$w_2 = w_1 + w_0 = 7$$

$$w_3 = w_2 + w_1 = 9$$

$$w_0 \cdot w_3 = 5 \cdot 9 = 45$$

$$2w_2 \cdot w_1 = 2 \cdot 7 \cdot 2 = 28$$

$$w_2^2 + w_1^2 = 7^2 + 2^2 = 53$$

böylece

$45^2 + 28^2 = 53^2$ bulunur.

$n=0$, $a=5$, $b=2$, $p=-1$, $q=-1$ için;

$$w_{n+2} = pw_{n+1} - qw_n = -w_{n+1} + w_n \text{ olduğundan,}$$

$$w_0=5$$

$$w_1=2$$

$$w_2=w_1+w_0=-2+5=3$$

$$w_3=-w_2+w_1=-3+2=-1$$

$$w_0w_3=5.(-1)= -5$$

$$2w_2w_1=2.3.2 = 12$$

$$w_2^2+w_1^2=3^2+2^2=13$$

böylece

$$5^2+12^2=13^2$$

bulunur.

Görüldüğü gibi Teorem 3.7'de sağlanır.

3.3 Sonuç

$$(g_n g_{n+3})^2 + (2g_{n+2} g_{n+1})^2 = (-2g_{n+2} g_{n+1} + g_n^2)^2$$

İspat

$w_{n+2} = pw_{n+1} - qw_n$ eşitliğinde $p=-1$, $q=-1$ yazılırsa

$$w_{n+2} = -w_{n+1} + w_n$$

bulunur. Bu eşitlik yardımıyla

$$\begin{aligned} w_{n+2}^2 + w_{n+1}^2 &= -2w_{n+2}w_{n+1} + w_{n+2}^2 + 2w_{n+2}w_{n+1} + w_{n+1}^2 \\ &= -2w_{n+2} + \underbrace{(w_{n+2} + w_{n+1})^2}_{w_n^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow w_{n+2}^2 + w_{n+1}^2 = -2w_{n+2}w_{n+1} + w_n^2$$

Şeklinde bulunan ifade Teorem 3.7’de yerine yazılırsa,

$$(w_n w_{n+3})^2 + (2w_{n+2} w_{n+1})^2 = (-2w_{n+2} w_{n+1} + w_n^2)^2$$

bulunur. Ayrıca

$$w_n(a, b; -1, -1) \equiv g_n(a, b - a) \text{ olduğundan}$$

$$(g_n g_{n+3})^2 + (2g_{n+2} g_{n+1})^2 = (-2g_{n+2} g_{n+1} + g_n^2)^2$$

Pisagor genellemesi elde edilir.

3.3. Örnek

$$a=x-y, b=y \tag{3.1}$$

ifadelerini Teorem 3.8 (i) de kullanmak yerine

$$a=x+y, b=y \tag{3.2}$$

ifadeleri Teorem 3.8 (ii) de kullanılabilir. Bu durumda elde edilen Pisagor üçlülere aynı alınabilir. Gerçekten

$$n=0, a=x+y, b=y, p=-1, q=-1 \text{ için}$$

$$w_{n+2} = -w_{n+1} + w_n \text{ olacağından}$$

$$w_0 = x+y$$

$$w_1 = y$$

$$w_2 = -y + x + y = x$$

$$w_3 = -x + y$$

$$w_0 w_3 = (x+y)(-x+y) = -(x^2 - y^2)$$

$$2w_2 w_1 = 2xy$$

$$w_2^2 + w_1^2 = x^2 + y^2$$

böylece

$$(x^2-y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2+y^2)^2 \text{ dir.}$$

3.4. Sonuç

Bazı durumlarda üçlü sayılar negatif olabilir. Bir örnekle açıklayalım.

3.4. Örnek

$n=0$, $a=5$, $b=2$, $p=-1$, $q=-1$ için;

$w_{n+2}=w_{n+1}+w_n$ olduğundan

$$w_0=5$$

$$w_1=2$$

$$w_2=3$$

$$w_3=-1$$

$$w_0w_3=-5$$

$$-2w_2w_1=2.3.2 = - 12$$

$$w_2^2 + w_1^2 = 3^2 + 2^2 = 13$$

böylece Pisagor üçlülere

$$-5,-12,13$$

bulunur.

3.8. Teorem

$$f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^{n+1}$$

İspat

Tümevarımla ispatlayalım.

$n=1$ olsun.

$$f_2f_1 - f_1^2 = 1 = (-1)^2$$

O halde $n=1$ için doğrudur.

$n=k$ için doğru olsun. Buna göre ifadenin $n=k+1$ için doğru olduğunu göstereceğiz.

$$f_{k+1} \cdot f_{k-1} - f_k^2 = (-1)^{k+1}$$

$$f_{k+2} \cdot f_k - f_{k+1}^2 = -(f_{k+1}^2 - f_{k+2} \cdot f_k)$$

$$= -(f_{k+1}^2 - (f_{k+1} + f_k) \cdot f_k) \quad [f_{k+2} = f_{k+1} + f_k]$$

$$= -(f_{k+1}^2 - (f_{k+1} \cdot f_k) - f_k^2)$$

$$= -(f_{k+1} \underbrace{(f_{k+1} - f_k)}_{f_{k-1}} - f_k^2) \quad \begin{bmatrix} f_{k+1} = f_k + f_{k-1} \\ f_{k+1} - f_k = f_{k-1} \end{bmatrix}$$

$$= -(f_{k+1} - f_{k-1} - f_k^2)$$

$$= -(-1)^{k+1} \quad [n=k \text{ için doğru olduğundan}]$$

$$= -(-1)^{k+2}$$

$$= (-1)^{(k+1)+1} \quad n=k+1 \text{ için doğru}$$

Böylece

$$f_{n+1} \cdot f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^{n+1} \text{ 'dir.}$$

Not: Birçok farklı fakat birbiriyle alakalı dizi aynı üçlüleri farklı n değerleri için verebilir.

3.5. Örnek

$p=1$ ve $q=-1$ alalım.

$a=x-y$, $b=y$, $p=1$, $q=-1$ için;

$$w_0 = a = x - y$$

$$w_1 = b = y$$

$$w_2 = pw_1 - qw_0 = w_1 + w_0 = x \text{ olup,}$$

$$x = w_{n+2}, y = w_{n+1} \text{ alınabilir.}$$

Özellik 3.8 (i) de yukarıdaki ifadeler yerleştirilirse

$$\begin{aligned} x &= af_n + bf_{n+1} \\ y &= af_{n-1} + bf_n \end{aligned} \quad (3.3)$$

denklemini elde ederiz. Eş 3.3 denklemini çözerken Teorem 3.8'i de kullanacağız.

Birinci denklemi f_n , ikinci denklemi $-f_{n+1}$ ile çarpıp denklemleri taraf tarafa toplarsak

$$xf_n - yf_{n+1} = a(\underbrace{f_n^2 - f_{n+1}f_{n-1}}_{(-1)^{n+1} = (-1)^n})$$

Böylece

$$a = (-1)^n (xf_n - yf_{n+1})$$

$$b = (-1)^{n+1} (xf_{n-1} - yf_n) \text{ bulunur.}$$

Verilecek tüm n değerleri için serilerden sonsuz seri elde edilir. Bunların bazıları;

$$\begin{cases} h_n(y, x - y) & , h_n(x - y, -x + 2y) \\ h_n(-x + 2y, 2x - 3y), h_n(2x - 3y, -3x + 5y) \end{cases} \quad (3.4)$$

dir. Burada $n=1,0,1,2$ sırası ile alınmıştır.

$$\begin{aligned} a &= (-1)^n (xf_n - yf_{n+1}) \\ b &= (-1)^{n+1} (xf_{n-1} - yf_n) \end{aligned} \quad h_n(a, b-a)$$

eşitliklerinde sırasıyla

$n = -1, 0, 1, 2$ alalım.

$n = -1$ için;

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \quad f_0 = 1, f_1 = 1 \text{ olduğundan}$$

$$f_1 = f_0 + f_{-1} \Rightarrow f_{-1} = 0$$

$$f_0 = f_{-1} + f_{-2} \Rightarrow f_{-2} = 1$$

bulunur. Böylece

$$a = (-1)^{-1}(xf_{-1} - yf_0) = y$$

$$b = (-1)^{-1+1}(xf_{-2} - yf_{-1}) = x$$

$$b - a = x - y$$

$$h_n(y, x - y)$$

elde edilir.

$n = 0$ için;

$$a = (-1)(xf_0 - yf_1) = x - y$$

$$b = (-1)^1(xf_{-1} - yf_0) = y$$

bulunur. Böylece

$$b - a = -x + 2y$$

$$h_n(x - y, -x + 2y)$$

elde edilir.

$n = 1$ için;

$$a = (-1)^1(xf_1 - yf_2) = -x + 2y$$

$$b = (-1)^2(xf_0 - yf_1) = x - y$$

bulunur. Böylece

$$b - a = 2x - 3y$$

$$h_n(-x + 2y, -2x - 3y)$$

elde edilir.

$n=2$ için;

$$a = (-1)^2(xf_2 - yf_3) = 2x - 3y$$

$$b = (-1)^3(xf_1 - yf_2) = -x + 2y$$

bulunur. Böylece

$$b - a = -3x + 5y$$

$$h_n(2x - 3y, -3x + 5y) \quad \text{elde edilir.}$$

Eş 3.4'teki $h_n(x-y, -x+2y)$ dizisi Eş 3.1'de zaten vardı.

Eş 3.1'deki $a=x-y$, $b=y$ olduğundan $b-a=-x+2y$ 'dir. Böylece

$$h_n(x-y, -x+2y)$$

bulunur.

Eğer doğru n değerleri bulunursa, Eş 3.4'teki herhangi bir dizi kullanılarak verilen Pisagor üçlülere ifade edilebilir. (çünkü daha önce de belirttiğimiz gibi kullandığımız sayılar $a=x-y$, $b=y$ veya $a=x$, $b=x+y$ olup elde edilecek Pisagor üçlülere aynıdır.)

İki Özel durum inceleyelim.

(i) $x=3$, $y=2$ alınırsa; üçlüler 5,12,13 tür ve sırasıyla,

$n=-1,0,1,2$ için; $h_n(2,1)$, $h_n(1,1)$, $h_n(1,0)$, $h_n(0,1)$ kullanılarak elde edilir.

Gerçekten;

$$(h_n h_{n+3})^2 + (2h_{n+1} h_{n+2})^2 = (2h_{n+1} h_{n+2} + h_n^2)^2 \text{ Pisagor genellemesinde}$$

$$n=-1, h_n(y, x-y) = h_n(2,1)$$

$$n=0; h_n(x-y-x+2y) = h_n(1,1)$$

$$n=1; h_n(-x+2y, 2x-3y) = h_n(1,0)$$

$$n=2; h_n(2x-3y-3x+5y) = h_n(0,1)$$

$$a=x-y=1 \quad b=y=2$$

$$w_n(a,b; 1,-1) \equiv af_{n-2}+bf_{n-1} \equiv h_n(a,b-a) \text{ \u015feklindeki \u00d6zellik 3.8 (i) 'den dolayı,}$$

$$h_n=1f_{n-2}+2f_{n-1}$$

$$h_0 = f_{-2} + 2f_{-1} = 1$$

$$h_1 = f_{-1} + 2f_0 = 2$$

$$h_2 = f_0 + 2f_1 = 3$$

$$h_3 = f_1 + 2f_2 = 5$$

$$h_0 h_3 = 1.5 = 5$$

$$2 h_1 h_2 = 2.2.3 = 12$$

$$2h_1 h_2 + h_0^2 = 2.2.3 + 1^2 = 13$$

B\u00f6ylece Pisagor \u00fc\u013fl\u00fcleri;

$$5,12,13$$

t\u00fcr.

(ii) $x = 4, y=3$ alınırsa; Pisagor \u00fc\u013fl\u00fcleri 7,24,25'dir ve sırasıyla,

$n=-1,0,1,2$ i\u00e7in $h_n(3,1), h_n(1,2), h_n(2,-1), h_n(-1,3)$ kullanılarak bulunur.

Gerçekten;

$$(h_n h_{n+3})^2 + (2h_{n+1} h_{n+2})^2 = (2h_{n+1} h_{n+2} + h_n^2)^2$$

$$a = x - y = 1 \quad b = y = 3$$

$h_n = f_{n-2} + 3f_{n-1}$ olduğundan,

$$h_0 = f_{-2} + 3f_{-1} = 1$$

$$h_1 = f_{-1} + 3f_0 = 3$$

$$h_2 = f_0 + 3f_1 = 4$$

$$h_3 = f_1 + 3f_2 = 7$$

$$h_0 h_3 = 1 \cdot 7 = 7$$

$$2h_1 \cdot h_2 = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$2h_1 \cdot h_2 + h_0^2 = 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1^2 = 25$$

Böylece Pisagor üçlülere;

7,24,25

dir.

$$n=-1 \text{ için; } h_n(y, x-y) = h_n(3, 1)$$

$$n=0 \text{ için; } h_n(x - y - x + 2y) = h_n(1, 2)$$

$$n=2 \text{ için; } h_n(-x + 2y, 2x - 3y) = h_n(2, -1)$$

$$n=3 \text{ için; } h_n(2x - 3y, -3x + 5y) = h_n(-1, 3)$$

dir.

3.6. Örnek

$p=-1$ ve $q=-1$ alınırsa;

$x=w_{n+2}$, $y=-w_{n+1}$ Özellik 3.8 (ii)'de yerine konursa;

$$\begin{aligned} x &= (-1)^n \cdot (af_n - bf_{n+1}) \\ y &= (-1)^n (-af_{n-1} + bf_n) \end{aligned} \quad (3.5)$$

elde edilir.

Fundamental Fibonacci Formülü ışığında Eş 3.5 çözülürse;

$$\begin{aligned} a &= x.f_n + y.f_{n+1} \\ b &= x.f_{n-1} + y.f_n \end{aligned} \quad (3.6)$$

elde edilir. Gerçekten

$$\begin{aligned} xf_n + yf_{n+1} &= a(-1)^n \underbrace{(f_n^2 - f_{n+1}f_{n-1})}_{-(-1)^{n+1}} \\ a &= xf_n + yf_{n+1} \\ xf_{n-1} + yf_n &= b(-1)^n \underbrace{(-f_{n+1}f_{n-1} + f_n^2)}_{-(-1)^{n+1}} \\ b &= xf_{n-1} + yf_n \end{aligned}$$

bulunur.

Elde edilen sonsuz dizilerden bazıları, $n=-1, 0, 1, 2$ için;

$$\begin{cases} g_n(y, x-y), g_n(x+y, -x) \\ g_n(x+2y, -y), g_n(2x+3y, -x-y) \end{cases} \quad (3.7)$$

olur. İnceleyelim;

$g_n(a, b-a)$ için;

$n=-1$ için;

$$a = xf_{-1} + yf_0 = y, \quad b = xf_{-2} + yf_{-1} = x, \quad b - a = x - y \quad g_n(y, x-y)$$

$n=0$ için;

$$a = xf_0 + yf_1 = x + y, \quad b = xf_{-1} + yf_0 = y, \quad b - a = -x \quad g_n(x+y-x)$$

$n=1$ için;

$$a = xf_1 + yf_2 = x + 2y, \quad b = xf_0 + yf_1 = x + y, \quad b - a = -y \quad g_n(x+2y,-y)$$

$n=2$ için;

$$a = xf_2 + yf_3 = 2x + 3y, \quad b = xf_1 + yf_2 = x + 2y, \quad b - a = -x - y \quad g_n(2x+3y,-x-y)$$

ifadeleri elde edilir.

Özel olarak $x=3$ ve $y=2$ alınırsa; üçlüler $-5, -12, 13$ tür ve sırasıyla, $n=-1, 0, 1, 2$ için $g_n(2, 1)$, $g_n(5, -3)$, $g_n(7, -2)$, $g_n(12, -5)$ ifadelerinden elde edilir.

Eş 3.35'te $x=-w_{n+2}$, $y=w_{n+1}$ yazılırsa, a, b 'nin negatif değerleri elde edilebilir.

$h_n(a, b-a)$ için söylenenler $g_n(a, b-a)$ için de geçerlidir.

4. FİBONACCI ÖZDEŞLİKLERİ

4.1. Teorem

Fibonacci dizisinin n. terimi

$$f_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}$$

dir.

İspat

2.1 Teoremde $a=0$, $b=1$, $p=1, q=-1$ alalım. O halde Fibonacci dizisini elde ederiz ve burada

$$\begin{cases} d = \sqrt{5} \\ \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

dir. Böylece

$$f_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}$$

şeklinde bulunur.

4.2. Teorem

Lucas dizisinin n. terimi:

$$L_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

dir.

4.3. Teorem

$\{H_n(s,r)\}$ genelleştirilmiş dizisinin n. terimi

$$H_n(s,r) = \frac{-s + 2r + s\sqrt{5}}{2} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{s - r + s\sqrt{5}}{2} \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

dir.

4.4 Teorem

$$\frac{1}{1 - x - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} x^n$$

dir.

İspat

Fibonacci sayıları için olan a, b, p, q değerlerini kullanırsak 1.4 Teorem $\{f_n\}$ Fibonacci dizisi için aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$$

Bu üreteç fonksiyonu düzenleyelim.

$$\frac{1}{1 - x - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^{n-1}$$

$$= \sum_{n=-1}^{\infty} f_{n+1} x^n$$

$$= f_0 x^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} x^n (f_0 = 0)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} x^n$$

Yani;

$$\frac{1}{1-x-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} x^n$$

dir.

4.5. Teorem

Fibonacci sayılarının karakteristik sayısı

$$e_f = -1$$

dir.

İspat

Teorem 2.2’de ifade ettiğimiz karakteristik sayı [5] olan

$e = pab - qa^2 - b^2$ de Fibonacci sayıları için olan a, b, p, q değerleri yerleştirilirse

$e_f = -1$ şeklinde bulunur.

4.6. Teorem

$$f_n = u_n(1, -1)$$

dir.

İspat

Fibonacci sayıları için olan a, b, p, q değerleri ve Not birlikte kullanılarak eşitlik kolayca görülür

Not: u_n sayılarının Tanım 2.1'deki negatif genellemesi ve Teorem 4.6 birlikte kullanırsa

$$f_{-n} = -(-1)^{-n} f_n$$

negatif genellemeleri yapılarak Fibonacci dizisi negatif sayılara genişletilebilir.

4.7. Teorem

$$f_{2n+1} = f_n^2 + f_{n+1}^2$$

dir.

İspat

Teorem 2.10'da r yerine $n+1$ alıp Teorem 4.6 yardımıyla Fibonacci sayıları için düzenleyelim.

$$f_{2n+1}f_1 = f_n^2 + (-1) \cdot (-1)^{-1} f_{n+1}^2$$

$f_1=0$ olduğundan bu eşitlikten

$$f_{2n+1} = f_n^2 + f_{n+1}^2$$

özdeşliği elde edilir.

Ayrıca bu özdeşlik Teorem 2.11'den de elde edilebilir.

Dikkat edilirse bu özdeşlik Teorem 2.12'de Pell sayıları için verdiğimiz özdeşliğe benzemektedir.

4.8. Teorem

$$f_{n+r} = f_r f_{n+1} + f_{r-1} f_n$$

dir.

İspat

Teorem 2.11'de a, b, p, q değerleri yerleştirilirse kolayca görülür.

4.9. Teorem

$$f_{2n} = f_n (f_{n+1} + f_{n-1})$$

dir.

İspat

Teorem 2.13'de $r=n$ alınırsa kolayca görülür.

4.10. Teorem

$$f_{n+1} \cdot f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$$

dir.

İspat

2.10 Teoremde $r=1$ alınırsa Teorem 4.5 ve 4.6'dan

$$f_{n+1}f_{n-1} = f_n^2 + (-1) \cdot (-1)^{n-1} f_1^2$$

bulunur, $f_1 = 1$ olduğundan

$$f_{n+1} \cdot f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$$

elde edilir.

4.11. Teorem

$$f_{2n+1} + f_{2n} = 2 \cdot (f_{n+1}^2 - f_n^2) - (-1)^n$$

dir.

İspat

Teorem 4.7, Teorem 4.9, Teorem 4.10 ve Fibonacci sayılarının tanımını kullanarak ispatlayalım.

$$\begin{aligned}
 f_{2n+1} + f_{2n} &= f_n^2 + f_{n+1}^2 + f_n(f_{n+1} + f_{n-1}) \\
 &= f_{n+1}^2 + [f_{n+1}f_{n-1} - (-1)^n] + f_n(2f_{n+1} - 2f_n) \\
 &= f_{n+1}^2 + f_{n+1}(f_{n+1} - 2f_n) - (-1)^n + f_n(2f_{n+1} - 2f_n) \\
 &= f_{n+1}^2 + f_{n+1} - 2f_n f_{n+1} + 2f_n f_{n+1} - 2f_n^2 - (-1)^n \\
 &= 2(f_{n+1}^2 - f_n^2) - (-1)^n
 \end{aligned}$$

Böylece;

$$f_{2n+1} + f_{2n} = 2 \cdot (f_{n+1}^2 - f_n^2) - (-1)^n$$

özdeşliği elde edilir.

Teorem 2.16'da $r=-a$, $b=r+t$, $t=a+b$ alalım. Bu şekilde de Fibonacci tanımı, Teorem 4.5 ve Teorem 4.6 kullanılarak da bu özdeşlik ispatlanabilir.

KAYNAKLAR

1. Brousseau, A., "Linear Recursionvar - Lesson Eight: Asymptotic Ritios in Recursion Relations", ***Fibonacci Quarterly***, 8(3): 311-316 (1970).
2. Horadam, A.F., "Pell İdentities", ***Fibonacci Quarterly***, 9(3): 245-252 (1971).
3. Horadam, A.F., "Special Properties of the Sequence $w_n(a,b;p,q)$ ", ***Fibonacci Quarterly***, 5(5): 424-434 (1967).
4. Horadam, A.F., "Generating Functions for Powers of a Certain Generalized Sequence of Numbers", ***Duke Mathematical Journal***, 32(3):437-446 (1965).
5. Horadam, A.F., "Basic Properties of a Certain Generalized Sequence of Numbers", ***Fibonacci Quarterly***, 3(3): 161-176 (1965).
6. Horadam, A.F., "A Generalized Fibonacci Sequence", ***Amer. Math. Monthly***, 68(5):455-459 (1961).
7. Horadam, A.F., "Fibonacci Number Triples", ***Amer. Math. Monthly***, 68(8):751-753 (1961).
8. Ivie, J., "Problem B-161", ***Fibonacci Quarterly***, 8(1): 107-108 (1970).
9. Lucas, E., "Theorie des Nombres", **Blanchard**, Paris, 88-90 (1961).
10. Mana, P., Problems B-136, B-137, ***Fibonacci Quarterly***, 7 (5):547 (1969).
11. Swamy, M.N.S. and Vespe, C.A., Problem B-155, ***Fibonacci Quarterly***, 7(5):547 (1969).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : BEKLEVİÇ, Yurdanur
 Uyruğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 22.09.1981 Ankara
 Medeni hali : Bekar
 Telefon : 0 (312) 276 82 32
 Faks :
 e-mail : ynur5@hotmail.com

Eğitim Derece

Eğitim Birimi

Mezuniyet tarihi

Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi /Ortaöğretim Matematik Alanlar Öğretmenliği (Tezsiz)	2005
Lisans	Gazi Üniversitesi Matematik Bölümü	2003
Lise	Ö.Muradiye Fen Lisesi	1998

İş Deneyimi Yıl

Yer

Görev

2004-2006	Ö.Vatan Dersanesi	Matematik Öğretmeni
2003-2004	Ö.Formül Dersanesi	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Masa Tenisi, Bilgisayar