



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**PİSAGOR TEOREMİ VE THALES BAĞINTILARININ BAZI
ÖKLİDYEN OLMAYAN
GEOMETRİLERDEKİ BENZERLERİ ÜZERİNE**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EBRU YAZ AKDOĞAN

DANIŞMAN

Dr. Öğr. Üyesi Zeynep CAN

AKSARAY, 2025

Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 222342713 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi **Ebru YAZ AKDOĞAN** tarafından hazırlanan **PİSAGOR TEOREMİ VE THALES BAĞINTILARININ BAZI ÖKLİDYEN OLMAYAN GEOMETRİLERDEKİ BENZERLERİ ÜZERİNE** adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ/OY ÇOKLUĞU ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Zeynep CAN

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum.....

Üye: Doç. Dr. Mustafa YILDIRIM

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum.....

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Pelin TEKİN

Trakya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum.....

Tez Savunma Tarihi:/...../.....

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....
Prof. Dr. Fazlıye KARABÖRK
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinalliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

İmza

Ebru YAZ AKDOĞAN

TEŞEKKÜR

Bu yüksek lisans tezinin hazırlanmasında desteklerini ve katkılarını esirgemeyen birkaç kişiye teşekkür etmek isterim.

Öncelikle, tez danışmanım Sayın Dr. Öğr. Üyesi Zeynep CAN' a, bilgi ve tecrübeleriyle beni yönlendirdiği, sabırla destek olduğu ve yol gösterici eleştirileriyle çalışmama büyük katkı sağladığı için sonsuz teşekkür ederim.

Değerli bilgilerini paylaşan Türker TOKU' ya, hayatım boyunca beni koşulsuz sevgi ve sabırla destekleyen anne ve babama, ayrıca bu süreçte yanımda olan motivasyonumu korumamı sağlayan eşim ve oğluma teşekkür ederim.

Ebru YAZ AKDOĞAN
AKSARAY, 2025

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ÖZET.....	v
ABSTRACT	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
ÇİZELGE DİZİNİ	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR	x
1. GİRİŞ	1
1.1 Konveks Çokyüzlüler	1
1.2 Minkowski Geometrisi ve Konveks Çokyüzlüler ile ilişkileri.....	4
2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER	6
2.1 Çeşitli Geometrik Özellikler	6
2.2 Öklid düzleminde Thales Bağntıları ve Pisagor Teoremi	11
2.2.1 Öklid düzleminde Thales Bağntıları	11
2.2.2 Öklid düzleminde Pisagor Teoremi.....	12
2.3 Disyakis Dodecahedron, Triakis Octohedron, Truncated Octahedron ve Tetrakis Hexahedron Uzayları.....	13
2.3.1 Disdyakis Dodecahedron Uzayı	13
2.3.2 Triakis Octohedron Uzayı	14
2.3.3 Tetrakis Hexahedron Uzayı.....	14
2.3.4 Truncated Octahedron Uzayı	15
3. $\mathbb{R}_{DD}^2$ NİN TEMEL ÖZELLİKLERİ VE $\mathbb{R}_{DD}^2$ DE PİSAGOR TEOREMİ VE THALES BAĞINTILARI.....	16
3.1 $\mathbb{R}_{DD}^2$ nin Temel Özellikleri	16
3.2 Pisagor Teoreminin Disdyakis Dodecahedron Benzeri.....	20
3.3 Thales Bağntılarının Disdyakis Dodecahedron Benzeri	31
4. $\mathbb{R}_{TH}^2$ NİN TEMEL ÖZELLİKLERİ VE $\mathbb{R}_{TH}^2$ DE PİSAGOR TEOREMİ VE THALES BAĞINTILARI.....	34
4.1 $\mathbb{R}_{TH}^2$ nin Temel Özellikleri	34
4.2 Pisagor Teoreminin Tetrakis Hexahedron Benzeri	38
4.3 Thales Bağntılarının Tetrakis Hexahedron Benzeri	47
5. $\mathbb{R}_{TO}^2$ NUN TEMEL ÖZELLİKLERİ VE $\mathbb{R}_{TO}^2$ DA PİSAGOR TEOREMİ VE THALES BAĞINTILARI.....	51
5.1 $\mathbb{R}_{TO}^2$ nun Temel Özellikleri.....	51
5.2 Pisagor Teoreminin Truncated Octahedron Benzeri	57
5.3 Thales Bağntılarının Truncated Octahedron Benzeri.....	66
6. $\mathbb{R}_{TrOc}^2$ NİN TEMEL ÖZELLİKLERİ VE $\mathbb{R}_{TrOc}^2$ DE PİSAGOR TEOREMİ VE THALES BAĞINTILARI.....	69
6.1 $\mathbb{R}_{TrOc}^2$ nin Temel Özellikleri.....	69
6.2 Pisagor Teoreminin Triakis Octahedron Benzeri	73
6.3 Thales Bağntılarının Triakis Octahedron Benzeri.....	83
7. SONUÇ VE ÖNERİLER	86
KAYNAKLAR	87
ÖZGEÇMİŞ.....	89

YÜKSEK LİSANS TEZİ

PİSAGOR TEOREMİ VE THALES BAĞINTILARININ BAZI ÖKLİDYEN OLMAYAN GEOMETRİLERDEKİ BENZERLERİ ÜZERİNE

Ebru YAZ AKDOĞAN

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Zeynep CAN

ÖZET

Bu tezde bazı konveks çokyüzlüleri küre olarak kabul eden, üç boyutlu analitik uzayda daha önceden tanımlanmış metriklerle oluşturulmuş Minkowski tipi geometrilerin düzlemdeki karşılıkları tanımlanıp bu düzlemlerde Thales ve Pisagor teoremlerinin benzerlerinin belirlenmesi üzerine çalışılmıştır.

Tez yedi bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde tezde ele alınan problemin önemi ve motivasyon kaynağının belirlenmesi adına literatür taraması yapılmıştır. İkinci bölümde tez boyunca kullanılmış bazı önemli temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üç, dört, beş ve altıncı bölümler ise tezin orijinal olan bölümleridir ve bu bölümlerde sırasıyla Disdyakis Dodecahedron, Triakis Octahedron, Truncated Octahedron ve Tetrakis Hexahedron düzlemleri tanımlanıp bazı özellikleri verildikten sonra bu düzlemlerde Thales ve Pisagor teoremlerinin karşılıkları üzerine çalışılmıştır. Son olarak yedinci bölümde elde edilen sonuçlar özetlenmiş, literatüre katkısından bahsedilmiş ve bu tezde yapılan çalışmalar ışığında yapılabilecek çalışmalara önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Çokyüzlüler, Metrik Geometri, Minkowski Geometri, Disdyakis Dodecahedron Düzlemi, Triakis Octahedron Düzlemi, Truncated Octahedron Düzlemi, Tetrakis Hexahedron Düzlemi, Pisagor Teoremi, Thales Teoremi

Mart, 2025; 90 sayfa

M.Sc. THESIS

**ON THE ANALOGUES OF THE PYTHAGOREAN AND THALES
THEOREMS IN SOME NON-EUCLIDEAN GEOMETRIES**

Ebru YAZ AKDOĞAN

**Aksaray University
Graduate School Of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Zeynep CAN

ABSTRACT

This thesis focuses on defining the counterparts of Minkowski-type geometries in the plane, which are constructed with metrics previously defined in three-dimensional analytical space, considering certain convex polyhedra as spheres. Additionally, the thesis investigates the analogues of Thales' and Pythagoras' theorems in these planes.

The thesis consists of seven chapters. In the first chapter, a literature review is conducted to highlight the importance of the problem addressed in the thesis and to outline the sources of motivation. The second chapter presents some essential definitions and theorems used throughout the thesis. Chapters three, four, five, and six constitute the original contributions of the thesis. These chapters introduce and define the planes of the Disdyakis Dodecahedron, Triakis Octahedron, Truncated Octahedron, and Tetrakis Hexahedron, respectively. After providing their properties, the study examines the analogues of Thales' and Pythagoras' theorems in these planes. Finally, the seventh chapter summarizes the results obtained, discusses their contribution to the literature, and provides recommendations for future studies based on the work carried out in this thesis.

Keywords: Polyhedra, Metric Geometry, Minkowski Geometry, Disdyakis Dodecahedron Plane, Triakis Octahedron Plane, Truncated Octahedron Plane, Tetrakis Hexahedron Plane, Pythagoras' Theorem, Thales' Theorem

March, 2025; 90 pages

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1.	Kar tanesi.	4
Şekil 1.2.	$\mathbb{R}_M^3$ nin birim küresi olan küp.	5
Şekil 2.1.	Kesişen doğrularla oluşan ters açılar.	7
Şekil 2.2.	k, l ve m doğruları ile oluşan açılar.	8
Şekil 2.3.	Düzlemde ikişer ikişer kesişen ancak tek bir noktada kesişmeyen k, l ve m doğruları.	9
Şekil 2.4.	Benzer Üçgenler.	10
Şekil 2.5.	(K.A.K.) Benzerlik Aksiyomu.	11
Şekil 2.6.	Üç paralel doğru tarafından kesilen iki paralel doğru.	12
Şekil 2.7.	Benzer üçgenler ABC ve AGF; ABC ve ADE.	12
Şekil 2.8.	Disdyakis Dodecahedron.	14
Şekil 2.9.	Triakis Octahedron.	14
Şekil 2.10.	Tetrakis Hexahedron.	15
Şekil 2.11.	Truncated Octahedron.	15
Şekil 3.1.	$P_1 = (x_0, y_0)$ merkezli Disdyakis Dodecahedron çemberi.	20
Şekil 3.2.	$\mathbb{R}_{DD}^2$ de dik kenarları koordinat eksenine paralel olan ABC üçgeni.	22
Şekil 3.3.	$\mathbb{R}_{DD}^2$ de dik kenarlarından herhangi biri koordinat eksenlerine paralel olmayan ve dikey bir doğru üzerinde bulunmayan bir hipotenüse sahip ABC üçgeni.	23
Şekil 3.4.	$\mathbb{R}_{DD}^2$ de hipotenüsü x-eksenine paralel olan ABC üçgeni.	24
Şekil 3.5.	$\mathbb{R}_{DD}^2$ de hipotenüsü y-eksenine paralel olan ABC üçgeni.	25
Şekil 3.6.	$\mathbb{R}_{DD}^2$ de AB kenarı x-eksenine paralel ABC üçgeni.	26
Şekil 3.7.	$\mathbb{R}_{DD}^2$ de BC kenarı x-eksenine paralel ABC üçgeni.	26
Şekil 3.8.	$\mathbb{R}_{DD}^2$ de AB kenarı y-eksenine paralel ABC üçgeni.	27
Şekil 3.9.	$\mathbb{R}_{DD}^2$ de BC kenarı y-eksenine paralel ABC üçgeni.	27
Şekil 3.10.	$\mathbb{R}_{DD}^2$ de denklem (3.5) i sağlayan bir dik üçgen ile dik olmayan üçgen. .	29
Şekil 3.11.	$\mathbb{R}_{DD}^2$ de A açısı dik olan ABC üçgeni.	30
Şekil 3.12.	DD-düzleminde (A.A.A.) benzerlik teoremini sağlamayan iki üçgen. ...	31
Şekil 3.13.	$\mathbb{R}_{DD}^2$ de üç paralel doğru tarafından kesilen paralel olmayan iki doğru...	32
Şekil 4.1.	$P_1 = (x_0, y_0)$ merkezli Tetrakis Hexahedron çemberi.	38
Şekil 4.2.	$\mathbb{R}_{TH}^2$ de dik kenarları koordinat eksenine paralel olan ABC üçgeni.	41
Şekil 4.3.	$\mathbb{R}_{TH}^2$ de dik kenarlarından herhangi biri koordinat eksenlerine paralel olmayan ve dikey bir doğru üzerinde bulunmayan bir hipotenüse sahip ABC üçgeni.	41
Şekil 4.4.	$\mathbb{R}_{TH}^2$ de hipotenüsü x-eksenine paralel olan ABC üçgeni.	43
Şekil 4.5.	$\mathbb{R}_{TH}^2$ de hipotenüsü y-eksenine paralel olan ABC üçgeni.	43
Şekil 4.6.	$\mathbb{R}_{TH}^2$ de denklem (4.5) i sağlayan bir dik üçgen ile dik olmayan üçgen. .	46
Şekil 4.7.	$\mathbb{R}_{TH}^2$ de A açısı dik olan ABC üçgeni.	47
Şekil 4.8.	TH-düzleminde (A.A.A.) benzerlik teoremini sağlamayan iki üçgen.	48
Şekil 4.9.	$\mathbb{R}_{TH}^2$ de üç paralel doğru tarafından kesilen paralel olmayan iki doğru...	49
Şekil 5.1.	$P_1 = (x_0, y_0)$ merkezli Truncated Octahedron çemberi.	57
Şekil 5.2.	$\mathbb{R}_{TO}^2$ da dik kenarları koordinat eksenine paralel olan ABC üçgeni.	59
Şekil 5.3.	$\mathbb{R}_{TO}^2$ da dik kenarlarından herhangi biri koordinat eksenlerine paralel olmayan ve dikey bir doğru üzerinde bulunmayan bir hipotenüse sahip ABC üçgeni.	60
Şekil 5.4.	$\mathbb{R}_{TO}^2$ da hipotenüsü x-eksenine paralel olan ABC üçgeni.	61

Şekil 5.5.	$\mathbb{R}_{TO}^2$ da hipotenüsü y-eksenine paralel olan ABC üçgeni.	62
Şekil 5.6.	$\mathbb{R}_{TO}^2$ da denklem (5.5) i sağlayan bir dik üçgen ile dik olmayan üçgen...	65
Şekil 5.7.	$\mathbb{R}_{TO}^2$ da A açısı dik olan ABC üçgeni.	66
Şekil 5.8.	TO-düzleminde (A.A.A.) benzerlik teoremini sağlamayan iki üçgen....	67
Şekil 5.9.	$\mathbb{R}_{TO}^2$ da üç paralel doğru tarafından kesilen paralel olmayan iki doğru...	67
Şekil 6.1.	$P_1 = (x_0, y_0)$ merkezli Triakis Octahedron çemberi.	73
Şekil 6.2.	$\mathbb{R}_{TrOc}^2$ de dik kenarları koordinat eksenine paralel olan ABC üçgeni.	76
Şekil 6.3.	$\mathbb{R}_{TrOc}^2$ de dik kenarlarından herhangi biri koordinat eksenlerine paralel olmayan ve dikey bir doğru üzerinde bulunmayan bir hipotenüse sahip ABC üçgeni.	76
Şekil 6.4.	$\mathbb{R}_{TrOc}^2$ de hipotenüsü x-eksenine paralel olan ABC üçgeni.	78
Şekil 6.5.	$\mathbb{R}_{TrOc}^2$ de hipotenüsü y-eksenine paralel olan ABC üçgeni.	78
Şekil 6.6.	$\mathbb{R}_{TrOc}^2$ de denklem (6.5)i sağlayan bir dik üçgen ile dik olmayan üçgen.	81
Şekil 6.7.	$\mathbb{R}_{TrOc}^2$ de A açısı dik olan ABC üçgeni.....	82
Şekil 6.8.	TrOc-düzleminde (K.A.K.) benzerlik teoremini sağlamayan iki üçgen..	83
Şekil 6.9.	$\mathbb{R}_{TrOc}^2$ de üç paralel doğru tarafından kesilen paralel olmayan iki doğru.	84

ÇİZELGE DİZİNİ

Tablo 1.1. Euler Formülü	2
---------------------------------------	---



SİMGELER VE KISALTMALAR

DD-düzlemi	Disdyakis Dodecahedron düzlemi
DD-uzayı	Disdyakis Dodecahedron uzayı
TH-düzlemi	Tetrakis Hexahedron düzlemi
TH-uzayı	Tetrakis Hexahedron uzayı
TrOc-düzlem	Triakis Octahedron düzlemi
TrOc-uzayı	Triakis Octahedron uzayı
TO-düzlemi	Truncated Octahedron düzlemi
TO-uzayı	Truncated Octahedron uzayı
d_E	Öklidyen uzaklık
d_{DD}	Disdyakis Dodecahedron uzaklık
d_{TH}	Tetrakis Hexahedron uzaklık
d_{TrOc}	Triakis Octahedron uzaklık
d_{TO}	Truncated Octahedron uzaklık
$\mathbb{R}_E^2$	Öklidyen Düzlem
$\mathbb{R}_{DD}^2$	Disdyakis Dodecahedron düzlemi
$\mathbb{R}_{TH}^2$	Tetrakis Hexahedron düzlemi
$\mathbb{R}_{TrOc}^2$	Triakis Octahedron düzlemi
$\mathbb{R}_{TO}^2$	Truncated Octahedron düzlemi
$\mathbb{R}_{DD}^3$	Disdyakis Dodecahedron uzayı
$\mathbb{R}_{TH}^3$	Tetrakis Hexahedron uzayı
$\mathbb{R}_{TrOc}^3$	Triakis Octahedron uzayı
$\mathbb{R}_{TO}^3$	Truncated Octahedron uzayı

1. GİRİŞ

1.1 Konveks Çokyüzlüler

Estetik ve simetri tüm alanlarda olduğu gibi matematik dünyasında da oldukça önemli yere sahiptir. Simetri, ilki belirsiz bir mükemmellik veya güzelliği yansıtan bir muntazamlık veya estetik olarak hoş a giden bir orantılılık ve denge duygusu olarak; ikincisi kesin ve iyi tanımlanmış biçimsel sistemin kurallarına (geometri, fizik vb.) göre gösterilebilen veya işaret edilebilen bir denge ve orantılılık kavramı veya kendine benzeşme örneği olarak iki şekilde tanımlanır [1]. Sahip oldukları birden çok simetri özelliğinden dolayı, çokyüzlüler matematiksel ve estetik açıdan insanların ilgisini üzerine çeken objeler olmuşlardır. Çokyüzlüler bu bağlamda önemli bir rol oynar. Sonlu sayıda doğru parçalarının bir zinciri ile sınırlandırılmış düzlemsel şekle çokgen denilmektedir. Ortak kenarlara sahip çokgenlerden oluşan cisme bir çokyüzlü ve çokgenleri ele alındığında her bir çokgene çokyüzlünün bir yüzü denir. Çokgenlerin kenar ve köşeleri bu çokyüzlünün kenar ve köşelerini oluşturur. Kısaca her bir yüzü düzlemsel çokgenler ile sınırlanan, ayrıt ve köşeleri de bu çokgenlerin kenar ve köşeleri olan cisimlere çokyüzlü (Polyhedron) denilmektedir [2]. Çokyüzlüler yüzeylerindeki çokgenlerin özelliklerine göre simetrik ya da asimetrik yapılar sergileyebilirler. Bu cisimler, düzgün ve düzgün olmayan türlere ayrılır ve sahip oldukları simetri özellikleri, onları farklı sınıflara ayıran temel faktörlerden biridir. Çokyüzlüler sahip oldukları özelliklerine göre sınıflandırılmışlardır. Herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasının tamamı, çokyüzlünün yüzeyinde (bir yüzünde) veya içinde kalıyorsa bu çokyüzlüye dış bükey (konveks), aksi halde iç bükey (konkav) denilmektedir [3]. Tüm ayrıt ve yüzleri eş, ayrıca her köşesinde aynı sayıda yüzün kesiştiği çokyüzlülere düzgün çokyüzlüler denilmektedir. Eğer çokyüzlü düzgün değilse düzgün olmayan çokyüzlü olarak isimlendirilirler. Konveks, simetrik çokyüzlüler Platonik cisimler, Arşimed cisimleri ve Katalan cisimleri olarak üç ana grupta incelenebilir. Burada Platonik cisimler düzgün çokyüzlüler, Arşimed ve Katalan cisimler ise düzgün olmayan çokyüzlüler sınıfına girer [4]. Katalan cisimleri tek tip düzgün olmayan çokgenlerden, Arşimed cisimleri iki tipte düzgün çokgenlerden, Platonik cisimler ise hem tek tip hem de düzgün olan çokgenlerden meydana gelir. Platonik cisimler beş, Katalan cisimleri on üç, Arşimed cisimleri de on üç tanedir. M.Ö. 360 yıllarında Yunan filozof Platon (Eflatun) Timaus adlı eserinde, düzgün dört yüzlü (Tetrahedron) ile ateşi, düzgün sekiz yüzlü (Octahedron) ile havayı,

düzgün yirmi yüzlü (Icosahedron) ile suyu, düzgün altı yüzlü (Dodecahedron) ile evreni ilişkilendirerek doğanın anlaşılabilirliğinden bahsetmiştir. Platonun isminden esinlenerek bu düzgün çokyüzlülere Platonik cisimler denilmektedir. Katalan cisimler 1865 yılında Belçikalı matematikçi Eugene Catalan tarafından tanımlanmıştır. Katalan cisimleri, Platonik cisimler ve Arşimet cisimlerden ayıran en önemli özellik, düzgün olmayan konveks yapılar olmalarıdır. Katalan cisimlerin yüzlerindeki çokgenler düzgün olmayan çokgenlerdir [5]. Arşimed cisimleri ise başka bir Yunan matematikçi Syracuse Arşimet'den adını alır. Arşimed cisimlerinin bu ismi almış olmasının sebebi Pappus'un Koleksiyon'ununda Arşimed'in, yüzleri birden fazla düzgün çokgen olan on üç cisim bulduğundan bahsetmesidir [4].

Konveks çokyüzlülerin yüz ayrıt ve köşe sayıları arasında Euler Teoremi olarak bilinen bir bağıntı vardır. Köşe sayısı K , ayrıt sayısı A , yüz sayısı Y , her bir köşede birleşen ayrıt sayısı q , her bir yüzü oluşturan ayrıt sayısı p olmak üzere, düzgün bir çokyüzlü için $K + Y - A = 2$ dir. Platon çokyüzlüleri için bu verilerin bir tablosu aşağıdaki gibidir.

ÇOKYÜZLÜ	Y	K	A	q	p
Dörtüzlü	4	4	6	3	3
Küp	6	8	12	3	4
Sekizyüzlü	8	6	12	4	3
Onikiyüzlü	12	20	30	3	5
Yirmiyüzlü	20	12	30	5	3

Tablo 1.1. Euler Formülü.

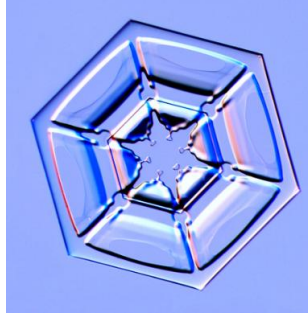
Tablo 1.1. deki sayılar yardımıyla her bir çokyüzlü için $K + Y - A$ sayısı hesaplanırsa her zaman sonucun 2 olduğu görülür. Bu sadece Platon katıları için değil tüm konveks çokyüzlüler için geçerli bir özelliktir [6].

Arşimed cisimlerinin duallerine ise Katalan cisimleri denir. Kübün ve Octahedronun (düzgün sekizyüzlünün) Tablo 1.1. deki satırları karşılaştırıldığında belli benzerlikler görülebilir. Örneğin, kenar sayıları eşit, p ve q değerleri yer değiştirmiş, aynı zamanda Y ve K değerleri de yer değiştirmiştir. Aynı gözlemleri Dodecahedron ve Icosahedron arasında da yapmak mümkündür. Bunun nedeni bu cisimlerin birbirlerinin duali

olmalarıdır. Elimizde herhangi bir çokyüzlü olsun, ona P diyelim. Şimdi P nin her yüzünün merkez noktasını işaretleyelim, bu noktalar dual çokyüzlünün (onu da P' ile gösterelim) köşeleri olacaktır. Eğer P de iki yüz komşu ise (yani aralarında bir kenar varsa) o zaman o yüzlerin merkezleri arasına bir kenar koyalım. Bu kenarlar da dualin kenarları olacaktır. Bu şekilde elde edilen cisim de bir çokyüzlü olur ve inşadan dolayı $K = K'$, $Y' = A$ ve $A' = Y$ olduğu kolayca görülür. Eğer P bir platonik bir cisimse, P' de platonik cisim olur [7].

Bazı bilim adamlarına göre, Euler Formülü Descartes'a aittir. Bunu ileri sürmelerinin sebebi de, Descartes'a ait olan bir teoremin doğrudan sonuçlarından birinin de yukarıdaki bağıntı olmasıdır. Ancak bu bağıntıyı ilk kez 1750 yılında açıkça ortaya atan kişi Euler olduğu bilinmektedir. Euler'in amacı, çokyüzlüleri sınıflandırabilmektir. Ancak bunu yapabilmek için sadece yüzlerin sayısı yeterli değildi; ayrıt ve köşe sayıları da incelenmeliydi. Euler incelemeleri sırasında bu üç sayı arasındaki bağıntıyı keşfetti. Bağıntının kesin ispatı ise ancak 1847 yılında C.von Sautt tarafından yapılabildi [3]. Platonik ve Arşimed cisimlerinin şekilleri, Altın oranın gizemleri, matematiksel ve geometrik kuralları Leonardo da Vinci ve Albrecht Dürer gibi önde gelen sanatçıların eserlerinde şifrelenmişlerdi. Leonardo da Vinci, 1509'da Luca Pacioli'nin yayımladığı İlahi Oran adlı bir çalışmasına resimler vermiştir. Bu kitapta Leonardo da Vinci tarafından yapılmış Five Platonic Solids (Beş Platonik Cisim) adlı resimler bulunmaktadır. Bunlar, bir küp, bir Tetrahedron, bir Dodecahedron, bir Octahedron ve bir İkosahedronun resimleridir [8].

Mühendislik malzemelerinin çoğundaki atom diziminde üç boyutlu tekrarlanan bir atom dizimi görülür. Böyle yapılara kristal denir. Kristallerdeki üç boyutlu kalıbın tekrarındaki sebep malzeme içyapısındaki atom koordinasyonudur. Bu iç koordinasyon kristalin dış şeklini de kontrol eder. Kar şeklinin altı köşeli dış yapısı fen bilimlerindeki çokyüzlülerin inceleme alanlarına girer [9].



Şekil 1.1. Kar tanesi.

Sonuç olarak çokyüzlüler sahip oldukları birden çok simetri ve estetik özelliklerinden dolayı matematik, fizik, mimari ve sanat alanında titizlikle çalışılan konular olmuştur.

1.2 Minkowski Geometrisi ve Konveks Çokyüzlüler ile ilişkileri

Minkowski uzaklığı ve Minkowski metriği, hem Öklid uzaklığında hem de Manhattan (Taksi metriği), Maximum, Çin dama gibi metriklerin genelleştirilmesi olarak düşünülebilen normlu vektör uzayındaki bir metriktir. Adını Polonyalı matematikçi Hermann Minkowski'den almıştır.

Tanım 1.2.1: $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $Q = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $\mathbb{R}^n$ de noktalar olmak üzere

$$d_p(P, Q) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

biçiminde tanımlı uzaklık fonksiyonuna Minkowski uzaklığı denir.

Minkowski uzaklığının $p = 2$ olduğu özel durumu Öklid uzaklığını; $p = 1$ olduğu özel durumu Manhattan (Taksi) uzaklığını; $p \rightarrow \infty$ özel durum ise maximum uzaklığını vermektedir [10].

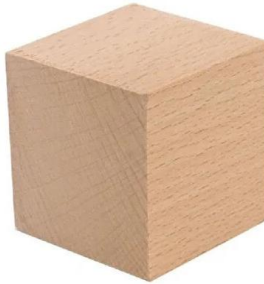
Minkowski geometri, eliptik ve hiperbolik geometriden farklı sonlu boyutlu bir Öklidyen olmayan geometridir. Ayrıca space-time Minkowskian geometrisinden de farklıdır. Minkowski geometrisindeki lineer yapı Öklidyen geometrisindeki ile hemen hemen aynıdır. Noktalar, doğrular ve düzlemler Öklidyen geometrinin noktaları, doğruları ve düzlemleri ile aynı iken, açı ölçümü de Öklidyen geometrideki ile aynı yolla yapılmaktadır. Minkowski geometrisinin Öklidyen geometriden tek farkı kullanılan uzaklık fonksiyonudur. Bu uzaklık fonksiyonuna göre uzaklık her yönde

aynı değildir. Bu farklılıkla birlikte uzaklığa bağlı yapılar tamamen değişmektedir [5]. Dolayısıyla Minkowski geometrilerinde uzaklıkla ilgili kavramların incelenmesi ilgi çekici konuların ortaya çıkmasını sağlamaktadır. Örneğin mühendislikte en yakın komşu algoritmasının sınıflandırılmasında, istatistikte, makine öğrenimi gibi alanlarda benzerliği veya farklılığı ölçmek için kullanılır. Ayrıca Öklidyen uzaydaki bilinen kürenin yerine alınan "yeni birim küre" değişebilen bir genel simetrik konveks kümedir ve paralellik aksiyomu geçerli olmasına rağmen, Pisagor teoremi gibi benzeri birçok teorem geçerli değildir. Bu geometrilere örnek verecek olursak Taksi geometrisi, Çin Dama geometrisi ve α geometrisi örnek olarak verilebilir [11]. Minkowski geometrilerin birim kürelerinin genel simetrik konveks kümeler olması gerçeği bazı çokyüzlüler ile metrikler arasında ilgi kurulabileceğini göstermektedir.

Tanım 1.2.2: $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere,

$$d_M(P_1, P_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\}$$

biçiminde tanımlı $d_M: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, \infty)$ uzaklık fonksiyonu kullanılarak oluşturulan Minkowski geometrisi Maksimum uzayı olarak isimlendirilmektedir ve $\mathbb{R}_M^3$ biçiminde gösterilmektedir. $\mathbb{R}_M^3$ uzayının birim küresi düzgün altıyüzlü ya da küptür.



Şekil 1.2. $\mathbb{R}_M^3$ nin birim küresi olan küp.

Benzer şekilde Taksi 3-uzayda birim küre bir düzgün sekizyüzlüdür. Son yıllarda yapılan çalışmalarda da birim küresi Dodecahedron ve Icosahedron olacak şekilde metriklerin dolayısıyla Minkowski geometrilerin varlığı görülmüştür. Ayrıca çin dama metriği ile döşenmiş uzayın birim küresi bir Katalan cisim olan Deltoidal Icositetrahedron olduğu görülmektedir. n - boyutlu R_n Öklid uzayında verilen konveks yapılar için, birim küreleri bu konveks yapılar olan normların varlığı bilinmektedir [2].

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde tez boyunca kullanılacak temel kavram ve teoremler verilecektir.

2.1 Çeşitli Geometrik Özellikler

Bu bölümde verilen tanım ve teoremler [12], [13], [14] ve [15] kaynakları baz alınarak derlenmiş olup ayrıntılı bilgi için bu kaynaklara bakılabilir.

Tanım 2.1.1: A boş olmayan bir küme olmak üzere $A \times A$ üzerinde tanımlanmış aşağıdaki şartları sağlayan reel değerli d fonksiyonuna A kümesi üzerinde bir metriktir denir. $\forall X, Y, Z \in A$ için,

$$M_1) X \neq Y \text{ için } d(X, Y) > 0 \quad (\text{Pozitif tanımlılık özelliği})$$

$$M_2) d(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y \quad (\text{Aynı yerde bulunma})$$

$$M_3) d(X, Y) = d(Y, X) \quad (\text{Simetri özelliği})$$

$$M_4) d(X, Y) \leq d(X, Z) + d(Z, Y) \quad (\text{Üçgen eşitsizliği})$$

Diğer bir ifadeyle, $M_1 - M_4$ şartlarını sağlayan $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna metrik denir [16].

Tanım 2.1.2: Öklid düzleminde alınan $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ iki nokta olmak üzere A ve B noktaları için

$$d_E(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

biçiminde tanımlanan $d_E : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna Öklid uzaklık fonksiyonu denir.

Teorem 2.1.1: Öklid uzaklık fonksiyonu bir metriktir. d_E metriği ile döşenmiş analitik düzlem $\mathbb{R}_E^2$ ile gösterilir ve Öklidyen düzlem olarak isimlendirilir.

Tanım 2.1.3: Düzlemde verilen herhangi bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümesine çember denir.

Yukarıdaki genel tanım kullanılarak $\mathbb{R}_E^2$ de çember tanımı şu şekilde verilebilir; düzlemde verilen $M = (m, n)$ noktasından r birim ($r \in \mathbb{R}, r \geq 0$) uzaklıkta bulunan değişken nokta $X = (x, y)$ olmak üzere $\{X : |d_E(X, M)| = r\}$ noktalar kümesi bir çember belirtir. Burada M noktasına çemberin merkezi, r reel sayısına ise çemberin yarıçapı adı verilir.

Tanım 2.1.4: Bir Oxy -koordinat sistemiyle verilen analitik düzlemde bir $A = (a_1, a_2)$ vektörü verildiğinde düzlemde alınan herhangi bir $P = (x, y)$ noktasını başka bir $P' = (x', y')$ noktasına resmeden $T: (x, y) \Rightarrow (x', y') = (x - a_1, y - a_2)$ dönüşümüne öteleme hareketi, A vektörüne öteleme vektörü denir ve bu dönüşüm kısaca $T(a, b)$ ile gösterilir [17].

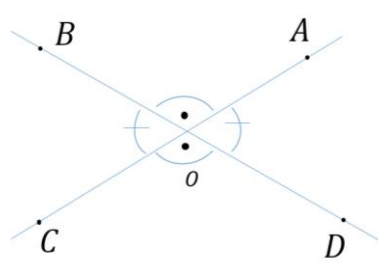
Tanım 2.1.5: $\mathcal{P}$ noktalar kümesi, $\mathcal{L}$ doğrular kümesi ve d herhangi bir uzaklık fonksiyonu olmak üzere $\mu = \{\mathcal{P}, \mathcal{L}, d\}$ metrik geometrisi verilsin. $f: P \rightarrow P$ dönüşümü $\forall P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ için

$$d(P_1, P_2) = d(f(P_1), f(P_2))$$

özellikliyse f dönüşümüne izometri denir [18].

Teorem 2.1.2: Ters açıların ölçüleri eşittir.

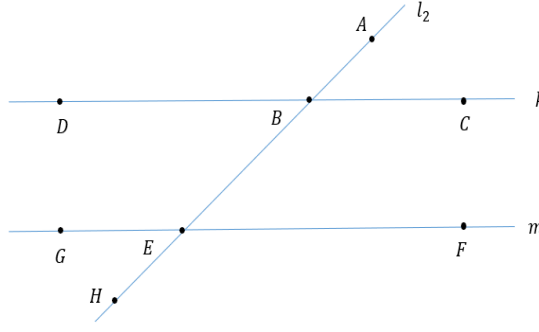
İspat: O noktasında kesişen $\vec{AC}$ ile $\vec{BD}$ doğrularını ele alalım. Böylece oluşan $\widehat{AOB}$ ile $\widehat{COD}$ ters açılardır, (Bkz; Şekil 2.1).



Şekil 2.1. Kesişen doğrularla oluşan ters açılar.

$m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) = 180^0$ ve $m(\widehat{BOC}) + m(\widehat{COD}) = 180^0$ olduğundan bu iki eşitlikte $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{COD})$ yani ters açıların eşit olduğu elde edilir. Benzer şekilde $m(\widehat{AOD}) = m(\widehat{BOC})$ olduğu gösterilir.

Aksiyom 2.1.1: k, l ve m düzlemde, $k \parallel m$, $l \nparallel k$ ve $l \nparallel m$ özelliğine sahip doğrular olsunlar. Bu durumda oluşan yöndeş açılar eşittir, yani $k \parallel m$ ise $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{BEF})$, $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{BEG})$, $m(\widehat{DBE}) = m(\widehat{GEH})$ ve $m(\widehat{CBE}) = m(\widehat{FEH})$ dir, (Bkz; Şekil 2.2).



Şekil 2.2. k, l ve m doğruları ile oluşan açılar.

Teorem 2.1.3: k, l ve m düzlemde, $k \parallel m$, $l \nparallel k$ ve $l \nparallel m$ özelliğine sahip doğrular olsunlar. Bu durumda oluşan iç ters açılar birbirine eşittir.

İspat: k, l ve m düzlemde $k \parallel m$, $l \cap k = B$ ve $l \cap m = E$ özelliğinde doğrular ve A, B, E, H , l üzerindeki, B, C, D , k üzerindeki, E, F, G , m üzerindeki noktalar olsunlar, (Bkz; Şekil 2.2.). $k \parallel m$ olduğundan yöndeş açılardan eşliğinden $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{BEF})$ ve ters açılardan eşliğinden, $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{DBE})$ dir. Böylece bu iki eşitlikten, $m(\widehat{BEF}) = m(\widehat{DBE})$ elde edilir.

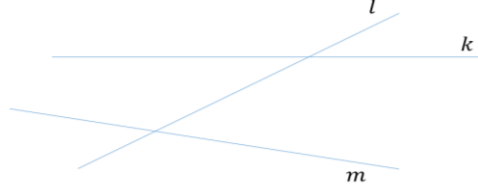
Teorem 2.1.4: k, l ve m düzlemde, $k \parallel m$, $l \nparallel k$ ve $l \nparallel m$ özelliğine sahip doğrular olsunlar. Bu durumda oluşan dış ters açılar birbirine eşittir.

İspat: k, l ve m düzlemde $k \parallel m$, $l \cap k = B$ ve $l \cap m = E$ özelliğindeki doğrular ve A, B, E, H , l üzerindeki, B, C, D , k üzerindeki, E, F, G , m üzerindeki noktalar olsunlar, (Bkz; Şekil 2.2.). $k \parallel m$ olduğundan yöndeş açılardan eşliğinden $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{BEG})$ ve ters açılardan eşliğinden, $m(\widehat{BEG}) = m(\widehat{FEH})$ dir. Böylece bu iki eşitlikten, $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{FEH})$ elde edilir.

Teorem 2.1.5: k, l ve m düzlemde, $k \parallel m$, $l \nparallel k$ ve $l \nparallel m$ özelliğine sahip doğrular olsunlar. Bu durumda oluşan karşı durumlu açılar bütünlerdir.

İspat: k, l ve m düzlemde $k \parallel m$, $l \cap k = B$ ve $l \cap m = E$ özelliğindeki doğrular ve A, B, E, H , l üzerindeki, B, C, D , k üzerindeki, E, F, G , m üzerindeki noktalar olsunlar, (Bkz; Şekil 2.2.). $k \parallel m$ olduğundan yöndeş açılardan eşliğinden; $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{BEF})$ dir ve ayrıca $m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{CBE}) = 180^\circ$ dir. Bu iki eşitlikten $m(\widehat{BEF}) + m(\widehat{CBE}) = 180^\circ$ yani karşı durumlu açılardan bütünler olduğu elde edilir.

Sonuç 2.2.1: k, l ve m düzlemde, üçü birlikte tek bir noktadan geçmeyen ancak ikişer ikişer kesişen doğrular olsunlar, (Bkz; Şekil 2.3).



Şekil 2.3. Düzlemde ikişer ikişer kesişen ancak tek bir noktada kesişmeyen k, l ve m doğruları.

Bu durumda;

- i. Yöndeş açılar eş ise doğrular paraleldir.
- ii. İç ters açılar eş ise doğrular paraleldir.
- iii. Dış ters açılar eş ise doğrular paraleldir.
- iv. Karşı durumlu açılar eş ise doğrular paraleldir.

Tanım 2.1.6: $n \in \mathbb{N}^+$ ve $n \geq 3$ olmak üzere, aynı düzlemdeki herhangi üçü doğrudan olmayan $P_1, P_2, \dots, P_n$ noktalarında kesişen, $[P_1P_2], [P_2P_3], \dots, [P_nP_1]$ doğru parçalarının birleşim kümesine çokgen denir.

Tanım 2.1.7: Herhangi bir çokgenin bütün kenarları uzatıldığında, bu doğrular çokgeni kesmiyorsa bu çokgene konveks çokgen, uzatılardan en az biri çokgeni kesiyorsa bu çokgene konkav çokgen denir. Konveks bir çokgende, bütün kenar ve köşeler herhangi bir kenarın aynı tarafında kalır.

Herhangi bir noktalar kümesi için konvekslik tanımı aşağıdaki gibi verilebilir;

Tanım 2.1.8: $\mathcal{P}$ bir noktalar kümesi ve $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}$ olsun. $P, Q \in \mathcal{P}_1$ olacak biçimdeki her P, Q nokta çifti için $\overline{PQ}$ doğru parçası $\mathcal{P}_1$ in bir alt kümesi oluyorsa, $\mathcal{P}_1$ e konvektir denir.

Tanım 2.1.9: P_1, P_2 ve P_3 doğrudan olmayan farklı üç nokta olmak üzere, $[P_1P_2], [P_2P_3]$ ve $[P_3P_1]$ nın birleşim kümesine üçgen denir.

Köşeleri A, B ve C noktaları olan üçgen $\triangle ABC$ biçiminde (veya A, B ve C nin herhangi bir sırada yazılmasıyla) gösterilir. A, B ve C noktaları üçgen köşeleri, $[AB], [BC]$ ve $[CA]$ ya üçgen kenarları, $|BC| = a, |AC| = b$ ve $|AB| = c$ ye üçgen

kenar uzunlukları ve $\hat{A} = \widehat{BAC}$, $\hat{B} = \widehat{ABC}$ ve $\hat{C} = \widehat{ACB}$ açılarına da üçgen iç açıları adı verilir.

Tanım 2.1.10: $\triangle ABC$ ve $\triangle DEF$ düzlemde verilen herhangi iki üçgen ve $f: \{A, B, C\} \rightarrow \{D, E, F\}$ üçgenler köşeleri arasında birebir örten bir eşleme olsun. Bu durumda

$$\overline{AB} \simeq \overline{f(A)f(B)}, \quad \overline{BC} \simeq \overline{f(B)f(C)}, \quad \overline{CA} \simeq \overline{f(C)f(A)}$$

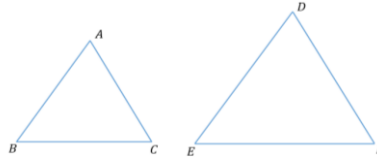
ve

$$\hat{A} \simeq f(\hat{A}), \quad \hat{B} \simeq f(\hat{B}), \quad \hat{C} \simeq f(\hat{C})$$

ise f ye bir eşlik bağıntısı denir.

$\triangle ABC$ ve $\triangle DEF$ üçgenleri eş iseler bu durumda bir $f: \{A, B, C\} \rightarrow \{D, E, F\}$ eşlik bağıntısı vardır. f eşliği $f(A) = D$, $f(B) = E$ ve $f(C) = F$ biçiminde verildiyse $\triangle ABC \simeq \triangle DEF$ yazılır.

Tanım 2.1.11: İki üçgen arasında yapılan birebir eşlemede, karşılıklı açılar eş ve karşılıklı kenar uzunlukları orantılı ise bu üçgenlere benzer üçgenler denir.



Şekil 2.4. Benzer Üçgenler.

Şekildeki üçgenler arasında, $\triangle ABC \leftrightarrow \triangle DEF$ eşlemesi verilsin. $m(\hat{A}) = m(\hat{D})$, $m(\hat{B}) = m(\hat{E})$, $m(\hat{C}) = m(\hat{F})$

ve

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|} = k$$

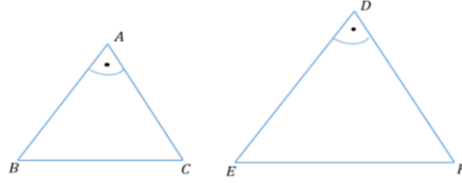
ise

$\triangle ABC$ ile $\triangle DEF$ benzerdir ve benzerlik $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.12: Benzer iki üçgenin karşılıklı kenarlarının uzunlukları oranına benzerlik oranı denir. Benzerlik oranı pozitif bir k reel sayısıdır. Eş üçgenler benzerdirler ve benzerlik oranı 1 dir.

Aksiyom 2.1.2: İki üçgenin karşılıklı ikişer kenarlarının uzunlukları orantılı ve bu kenarların arasında kalan açılar eş ise bu iki üçgen benzerdir.

Bu benzerliğe kenar-açı-kenar (K.A.K.) benzerliği, bu aksiyoma da (K.A.K.) benzerlik aksiyomu denir.



Şekil 2.5. (K.A.K.) Benzerlik Aksiyomu.

Yani

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = k \text{ ve } m(\widehat{A}) = m(\widehat{D}) \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

dir. Buradan $m(\widehat{B}) = m(\widehat{E})$, $m(\widehat{C}) = m(\widehat{F})$ ve $\frac{|BC|}{|EF|} = k$ diyebiliriz.

Aksiyom 2.1.3: İki üçgen arasında yapılan bir eşlemede, karşılıklı açılar eş ise bu iki üçgen benzerdir. Bu benzerliğe aç-açı-açı (A.A.A.) benzerliği denir.

Aksiyom 2.1.4: İki üçgen arasında yapılan bir eşlemede, karşılıklı kenarların uzunlukları orantılı ise bu üçgenler benzerdir. Bu benzerliler kenar-kenar-kenar (K.K.K.) benzerliği denir.

2.2 Öklid düzleminde Thales Bağlıları ve Pisagor Teoremi

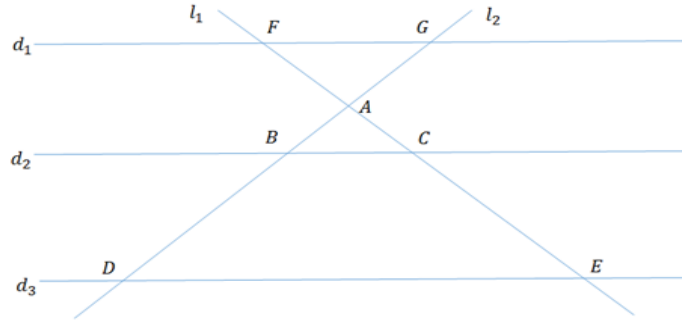
2.2.1 Öklid düzleminde Thales Bağlıları

Teorem 2.2.1.1: Kesişen iki doğru, paralel üç doğruyla kesiştirildiğinde oluşan üçgenlerin karşılıklı kenar uzunlukları orantılıdır. Yani Şekil 2.6 da $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3$, $\ell_1 \nparallel \ell_2$ ve $\ell_i \nparallel d_j$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$ olmak üzere

$$\text{i. } \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|DE|}$$

$$\text{ii. } \frac{|AB|}{|AG|} = \frac{|AC|}{|AF|} = \frac{|BC|}{|FG|}$$

dir.



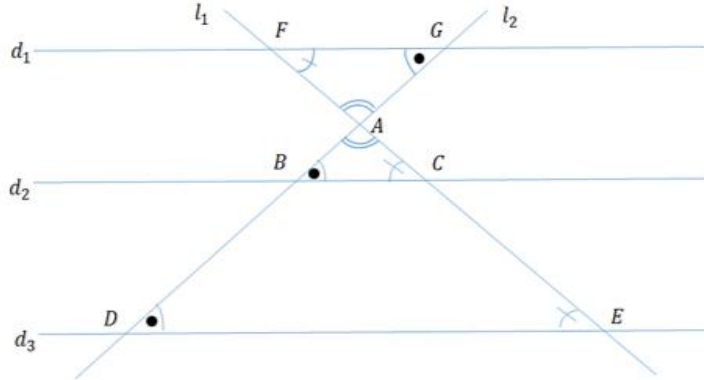
Şekil 2.6. Üç paralel doğru tarafından kesilen iki paralel doğru.

İspat: ABC ve ADE üçgenlerinin (A.A.A.) benzerliğinden, (Bkz. Şekil 2.7).

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|DE|}; \text{ } ABC \text{ ve } AFG \text{ üçgenlerinin (A.A.A.) benzerliğinden ise}$$

$$\frac{|AB|}{|AG|} = \frac{|AC|}{|AF|} = \frac{|BC|}{|FG|}$$

elde edilir.



Şekil 2.7. Benzer üçgenler ABC ve AGF ; ABC ve ADE .

2.2.2 Öklid düzleminde Pisagor Teoremi

Pozitif bilimlerin oluşumundan günümüze denk gelen yol hem çok uzun hem de çok meşakkatlidir. Yirmi beş yüzyıl önce bu yola ilk adımını atanların başında Pythagoras (Pisagor, M.Ö.569-477) gelir. O, bilimler tarihi boyunca ilk defa ve hayatı pahasına, bilimsel mantığın temellerini, bir daha değiştirilemeyecek olan, axiom-postulat-hypothesis bazına oturtarak, bu düşünce zincirini bir de (absolute) mutlak (ispat) 'ın lüzumu ile noktalamıştır. O kendisinden çok daha öncelerden birikmiş ve kendi

devrinde gelişmiş tüm çeşitli fakat dağınık ve bireysel kalmış bilimleri bir disiplin altında derleyerek sınıflandırmış ve her birini ayrı bir bilim dalı olarak öğrenime açmıştır. Devrinin filozofu, geometri, aritmetik, müzik, astronomi, coğrafya ve tabiat bilimlerinde üstat idi. Fizik alanında ilk defa optik kuramlarını koymuş, ses ve armonikleri teorilerine ilk adımını atmıştır. Buna rağmen, bilim tarihçilerinin birleştikleri nokta, Pisagor'un asıl büyüklüğünün geometri alanında oluşudur. Pisagor'un insanlığa devrettiği en önemli mirası kendi adına izafe edilen o meşhur 'Pisagor Teoremi' dir. Ona göre sadece deneysel olarak kanıtlanan bu '3-4-5' kuralının çok daha geniş ve evrensel bir kuramın sonucu olup olmadığını araştırmak ve mutlaka bir geometrik ispatını yapmak gerekiyordu [19]. Bir dik üçgende, dik kenarların üzerinde kurulan karelerin alanları toplamı, hipotenüs üzerinde kurulan karenin alanına eşittir. Bu ifadeyi şöyle söyleyebiliriz. Bir dik üçgende dik kenarların kareleri toplamı hipotenüsün karesine eşittir. Pisagor bağıntısının ispatı yüzyıllardır matematikçileri meşgul etmiş, yüzlerce farklı ispat yapılmıştır. Detaylı bilgi için [20] kaynağına bakılabilir.

2.3 Disyakis Dodecahedron, Triakis Octohedron, Truncated Octahedron ve Tetrakis Hexahedron Uzayları

Bu bölümde Disyakis Dodecahedron, Triakis Octohedron, Truncated Octahedron ve Tetrakis Hexahedron Uzaylarının tanımları ve temel özellikleri [21], [4] ve [2] kaynaklarından faydalanılarak kısaca verilecektir.

2.3.1 Disdyakis Dodecahedron Uzayı

Tanım 2.3.1.1: $\mathbb{R}^3$ de $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ noktaları verilsin.

$$d_{DD}(P_1, P_2) = \max \left\{ \begin{array}{l} |x_1 - x_2|, \\ |y_1 - y_2|, \\ |z_1 - z_2| \end{array} \right\} + (\sqrt{2} - 1) \min \left\{ \begin{array}{l} |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|, \\ |x_1 - x_2| + |z_1 - z_2|, \\ |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| \end{array} \right\} + (\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1) \min \left\{ \begin{array}{l} |x_1 - x_2|, \\ |y_1 - y_2|, \\ |z_1 - z_2| \end{array} \right\}.$$

şeklinde tanımlanan $d_{DD}: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, \infty)$ uzaklık fonksiyonuna analitik 3-uzayda P_1 ve P_2 noktaları arasındaki Disdyakis Dodecahedron uzaklık fonksiyonu denir.

Teorem 2.3.1.1: d_{DD} uzaklık fonksiyonu bir metriktir ve bu metrikle döşenmiş 3 boyutlu analitik uzayın birim küresi bir Disdyakis Dodecahedron'dur [2].

Disdyakis Dodecahedron 48 yüzü, 72 kenarı ve 26 köşesi bulunan bir Katalan cisimdir, (Bkz: Şekil 2.8).



Şekil 2.8. Disdyakis Dodecahedron.

2.3.2 Triakis Octohedron Uzayı

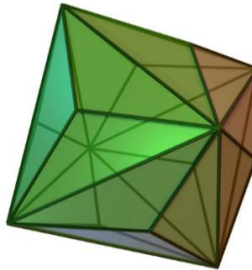
Tanım 2.3.2.1: $\mathbb{R}^3$ de $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ noktaları verilsin.

$$d_{TroC}(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| + (\sqrt{2} - 2) \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\}$$

şeklinde tanımlanan $d_{TroC}: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, \infty)$ uzaklık fonksiyonuna analitik 3-uzayda P_1 ve P_2 noktaları arasındaki Triakis Octahedron uzaklık fonksiyonu denir.

Teorem 2.3.2.1: d_{TroC} uzaklık fonksiyonu bir metriktir ve bu metrikle döşenmiş 3 boyutlu analitik uzayın birim küresi bir Triakis Octahedron'dur, [21].

Triakis Octahedron 24 yüzü, 36 kenarı ve 14 köşesi bulunan bir Katalan cisimdir, (Bkz: Şekil 2.9).



Şekil 2.9. Triakis Octahedron.

2.3.3 Tetrakis Hexahedron Uzayı

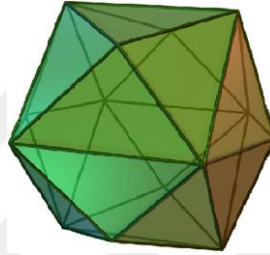
Tanım 2.3.3.1: $\mathbb{R}^3$ de $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ noktaları verilsin.

$$d_{TH}(P_1, P_2) = (\sqrt{3} - 1) \max \left\{ \begin{array}{l} |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|, \\ |x_1 - x_2| + |z_1 - z_2|, \\ |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| \end{array} \right\} + (2 - \sqrt{3}) \max \left\{ \begin{array}{l} |x_1 - x_2|, \\ |y_1 - y_2|, \\ |z_1 - z_2| \end{array} \right\}$$

şeklinde tanımlanan $d_{TH}: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, \infty)$ uzaklık fonksiyonuna analitik 3-uzayda P_1 ve P_2 noktaları arasındaki Tetrakis Hexahedron uzaklık fonksiyonu denir.

Teorem 2.3.3.1: d_{TH} uzaklık fonksiyonu bir metriktir ve bu metrikle döşenmiş 3 boyutlu analitik uzayın birim küresi bir Tetrakis Hexahedron' dur [2].

Tetrakis Hexahedron 24 yüzü, 36 kenarı ve 14 köşesi bulunan bir Katalan cisimdir, (Bkz: Şekil 2.10).



Şekil 2.10. Tetrakis Hexahedron.

2.3.4 Truncated Octahedron Uzayı

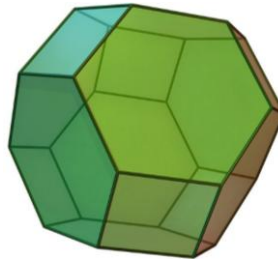
Tanım 2.3.4.1: $\mathbb{R}^3$ de $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ noktaları verilsin.

$$d_{TO}(P_1, P_2) = \max \left\{ \frac{2}{3} (|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|), |x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2| \right\}$$

şeklinde tanımlanan $d_{TO}: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, \infty)$ uzaklık fonksiyonuna analitik 3-uzayda P_1 ve P_2 noktaları arasındaki Truncated Octahedron uzaklık fonksiyonu denir.

Teorem 2.3.4.1: d_{TO} uzaklık fonksiyonu bir metriktir ve bu metrikle döşenmiş 3 boyutlu analitik uzayın birim küresi bir Truncated Octahedron' dur [4].

Truncated Octahedron 14 yüzü, 36 kenarı ve 24 köşesi bulunan bir Arşimed cisimdir, (Bkz: Şekil 2.11).



Şekil 2.11. Truncated Octahedron.

3. $\mathbb{R}_{DD}^2$ NİN TEMEL ÖZELLİKLERİ VE $\mathbb{R}_{DD}^2$ DE PİSAGOR TEOREMİ VE THALES BAĞINTILARI

3.1 $\mathbb{R}_{DD}^2$ nin Temel Özellikleri

Bu bölümde daha önceden [2] de 3 boyutlu analitik uzayda verilen Disdyakis Dodecahedron metriğinin izdüşüm kullanılarak elde edilen 2 boyutlu analitik düzlemdeki tanımı verilmekte ve bazı özelliklerine değinilmektedir.

Tanım 3.1.1: $\mathbb{R}^2$ de $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ noktaları verilsin.

$$d_{DD}(P_1, P_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})\min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

biçiminde tanımlı $d_{DD}: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ uzaklık fonksiyonuna Disdyakis Dodecahedron uzaklık fonksiyonu denir.

Teorem 3.1.1: d_{DD} uzaklık fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ de bir metriktir.

İspat: $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ verilsin. d_{DD} nin metrik olduğunu kanıtlamak için her $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^2$ için

(i) $d_{DD}(P_1, P_2) \geq 0$ ve $d_{DD}(P_1, P_2) = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$

(ii) $d_{DD}(P_1, P_2) = d_{DD}(P_2, P_1)$

(iii) $d_{DD}(P_1, P_3) \leq d_{DD}(P_1, P_2) + d_{DD}(P_2, P_3)$

aksiyomlarının sağlandığı gösterilmelidir.

(i) d_{DD} uzaklık fonksiyonu $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$$d_{DD}(P_1, P_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})\min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

biçiminde tanımlı olduğundan, mutlak değer her zaman negatif olmayan değerler üreteceğinden ve mutlak değer maximumu da minimumu da negatif olmayan değerler alacağından $d_{DD}(P_1, P_2) \geq 0$ dir. Eğer $d_{DD}(P_1, P_2) = 0$ ise $|x_1 - x_2| = 0$, $|y_1 - y_2| = 0$ olup $x_1 = x_2$ ve $y_1 = y_2$ elde edilir. Dolayısıyla $P_1 = P_2$ dir. Tersine $P_1 = P_2$ ise $x_1 = x_2$ ve $y_1 = y_2$ olacağından $|x_1 - x_2| = 0$, $|y_1 - y_2| = 0$ olup $d_{DD}(P_1, P_2) = 0$ elde edilir.

(ii) Mutlak değer tanımından, $|a - b| = |b - a|$ olduğundan açıkça $d_{DD}(P_1, P_2) = d_{DD}(P_2, P_1)$ dir. Yani d_{DD} uzaklık fonksiyonu simetriktir.

(iii) $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ ve $P_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ olsun.

$$d_{DD}(P_1, P_3) \leq d_{DD}(P_1, P_2) + d_{DD}(P_2, P_3)$$

eşitsizliğin sağlandığı gösterilmelidir. P_1, P_2 and P_3 noktaları için

$$d_{DD}(P_1, P_3) = \max\{|x_1 - x_3|, |y_1 - y_3|\} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})\min\{|x_1 - x_3|, |y_1 - y_3|\}$$

$$d_{DD}(P_1, P_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})\min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

$$d_{DD}(P_2, P_3) = \max\{|x_2 - x_3|, |y_2 - y_3|\} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})\min\{|x_2 - x_3|, |y_2 - y_3|\}$$

dir. Bahsedilen eşitsizliği incelemek için 8 durumu dikkate almak gerekir;

Durum 1: Eğer $|x_1 - x_3| \geq |y_1 - y_3|$, $|x_1 - x_2| \geq |y_1 - y_2|$ ve $|x_2 - x_3| \geq |y_2 - y_3|$, ise

$$\begin{aligned} d_{DD}(P_1, P_3) &= |x_1 - x_3| + (\sqrt{3} - \sqrt{2})|y_1 - y_3| \\ &= |x_1 - x_2 + x_2 - x_3| + (\sqrt{3} - \sqrt{2})|y_1 - y_2 + y_2 - y_3| \\ &\leq |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + (\sqrt{3} - \sqrt{2})|y_1 - y_2| + (\sqrt{3} - \sqrt{2})|y_2 - y_3| \\ &= (|x_1 - x_2| + (\sqrt{3} - \sqrt{2})|y_1 - y_2|) + (|x_2 - x_3| + (\sqrt{3} - \sqrt{2})|y_2 - y_3|) \\ &= d_{DD}(P_1, P_2) + d_{DD}(P_2, P_3) \end{aligned}$$

elde edilir.

Durum 2: Eğer $|x_1 - x_3| \geq |y_1 - y_3|$, $|x_1 - x_2| \geq |y_1 - y_2|$ ve $|y_2 - y_3| \geq |x_2 - x_3|$, ise

$$\begin{aligned} d_{DD}(P_1, P_3) &= |x_1 - x_3| + (\sqrt{3} - \sqrt{2})|y_1 - y_3| \\ &= |x_1 - x_2 + x_2 - x_3| + (\sqrt{3} - \sqrt{2})|y_1 - y_2 + y_2 - y_3| \\ &\leq (|x_1 - x_2| + (\sqrt{3} - \sqrt{2})|y_1 - y_2|) + (|x_2 - x_3| + (\sqrt{3} - \sqrt{2})|y_2 - y_3|) \\ &\leq (|x_1 - x_2| + (\sqrt{3} - \sqrt{2})|y_1 - y_2|) + (|y_2 - y_3| + (\sqrt{3} - \sqrt{2})|x_2 - x_3|) \\ &= d_{DD}(P_1, P_2) + d_{DD}(P_2, P_3) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada;

$$|y_2 - y_3| \geq |x_2 - x_3| \Rightarrow (1 - (\sqrt{3} - \sqrt{2}))|y_2 - y_3| \geq (1 - (\sqrt{3} - \sqrt{2}))|x_2 - x_3|$$

$$\Rightarrow |y_2 - y_3| + (\sqrt{3} - \sqrt{2})|x_2 - x_3| \geq |x_2 - x_3| + (\sqrt{3} - \sqrt{2})|y_2 - y_3|$$

olduğu kullanılmıştır. Ortaya çıkabilecek diğer durumlar da aşağıda belirtilmiş olup benzer hesaplamalarla kolaylıkla gösterilebilir;

Durum 3: $|x_1 - x_3| \geq |y_1 - y_3|$, $|y_1 - y_2| \geq |x_1 - x_2|$ ve $|x_2 - x_3| \geq |y_2 - y_3|$ ise,

Durum 4: $|x_1 - x_3| \geq |y_1 - y_3|$, $|y_1 - y_2| \geq |x_1 - x_2|$ ve $|y_2 - y_3| \geq |x_2 - x_3|$ ise,

Durum 5: $|y_1 - y_3| \geq |x_1 - x_3|$, $|x_1 - x_2| \geq |y_1 - y_2|$ ve $|x_2 - x_3| \geq |y_2 - y_3|$ ise,

Durum 6: $|y_1 - y_3| \geq |x_1 - x_3|$, $|x_1 - x_2| \geq |y_1 - y_2|$ ve $|y_2 - y_3| \geq |x_2 - x_3|$ ise,

Durum 7: $|y_1 - y_3| \geq |x_1 - x_3|$, $|y_1 - y_2| \geq |x_1 - x_2|$ ve $|x_2 - x_3| \geq |y_2 - y_3|$ ise,

Durum 8: $|y_1 - y_3| \geq |x_1 - x_3|$, $|y_1 - y_2| \geq |x_1 - x_2|$ ve $|y_2 - y_3| \geq |x_2 - x_3|$ ise,

böylece $d_{DD}(P_1, P_3) \leq d_{DD}(P_1, P_2) + d_{DD}(P_2, P_3)$ elde edilir.

Sonuç olarak 2 boyutlu analitik düzlemde d_{DD} uzaklık fonksiyonu bir metriktir ve bu metrikle döşenmiş düzlem $\mathbb{R}_{DD}^2$ olarak gösterilmektedir.

Önerme 3.1.1: Her Öklidyen öteleme DD-düzleminde uzaklığı korur. Böylece ötelemeler $\mathbb{R}_{DD}^2$ de bir izometridir.

İspat: $A = (a_1, a_2)$, $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere $T_A: \mathbb{R}_{DD}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{DD}^2$, $T_A(X) = A + X$ olacak şekilde $\mathbb{R}_{DD}^2$ de bir öteleme olsun. $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$\begin{aligned} d_{DD}(T_A(P_1), T_A(P_2)) &= \max\{|x_1 + a_1 - x_2 - a_1|, |y_1 + a_2 - y_2 - a_2|\} \\ &\quad + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \min\{|x_1 + a_1 - x_2 - a_1|, |y_1 + a_2 - y_2 - a_2|\} \\ &= \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} \\ &= d_{DD}(P_1, P_2) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla T_A $\mathbb{R}_{DD}^2$ de bir izometridir.

Önerme 3.1.2: $A, B \in \mathbb{R}_{DD}^2$ ve kartezyen koordinat düzleminde dikey bir doğru üzerinde bulunmayan iki nokta, m de bu iki noktadan geçen doğrunun eğimi ise,

$$\rho(m) = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{\max\{1, |m|\} + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \min\{1, |m|\}}$$

olmak üzere

$$d_E(A, B) = \rho(m) \cdot d_{DD}(A, B) \quad (3.1)$$

dir. A ve B dikey bir doğru üzerinde bulunan iki nokta ise, $d_E(A, B) = d_{DD}(A, B)$ dir.

İspat: $A = (x_1, y_1)$ ve $B = (x_2, y_2)$, $\mathbb{R}_{DD}^2$ de iki nokta olsun. Eğer A ve B dikey bir doğru üzerinde değilse, $x_1 \neq x_2$ ve,

$$d_E(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = |x_2 - x_1| \sqrt{1 + m^2}$$

ve

$$\begin{aligned} d_{DD}(A, B) &= \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} \\ &= |x_1 - x_2| [\max\{1, |m|\} + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \min\{1, |m|\}] \end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Her iki eşitliği karşılıklı olarak birbirine oranlarsak,

$$\frac{d_E(A, B)}{d_{DD}(A, B)} = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{\max\{1, |m|\} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})\min\{1, |m|\}}$$

elde edilir. Böylece,

$$\rho(m) = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{\max\{1, |m|\} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})\min\{1, |m|\}}.$$

olmak

üzere

$$d_E(A, B) = \rho(m) \cdot d_{DD}(A, B)$$

dir. Eğer A ve B dikey bir doğru üzerindeki iki nokta ise, $x_1 = x_2$ dir. Bu durumda $d_E(A, B) = |y_2 - y_1|$ ve $d_{DD}(A, B) = |y_2 - y_1|$ olur. Böylece $d_E(A, B) = d_{DD}(A, B)$ eşitliği elde edilir.

Önerme 3.1.2 doğrudan noktalar için d_{DD} uzaklığının Öklid uzaklığının pozitif sabit bir katı olduğunu belirtir.

Sonuç 3.1.1: P_1, P_2 ve X , $\mathbb{R}^2$ de doğrudan üç nokta olmak üzere

$$d_E(P_1, X) = d_E(P_2, X) \Leftrightarrow d_{DD}(P_1, X) = d_{DD}(P_2, X)$$

dir.

Sonuç 3.1.2: P_1, P_2 ve X , $\mathbb{R}^2$ de üç farklı doğrudan nokta olmak üzere

$$\frac{d_E(P_1, X)}{d_E(P_2, X)} = \frac{d_{DD}(P_1, X)}{d_{DD}(P_2, X)}$$

dir.

Tanım 3.1.2: $\mathbb{R}_{DD}^2$ de merkezi $P_1 = (x_0, y_0)$ ve yarıçapı r birim olan çember

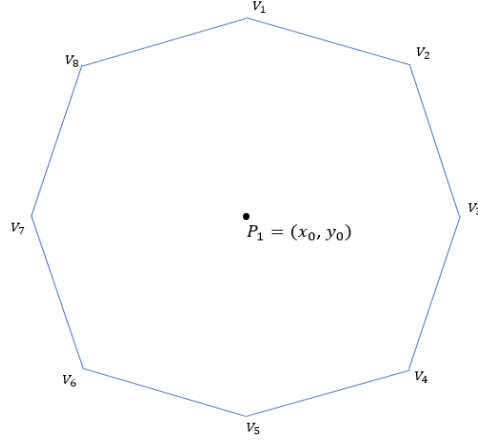
$$d_{DD}(P, P_1) =$$

$$\{P = (x, y) | \max\{|x - x_0|, |y - y_0|\} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})\min\{|x - x_0|, |y - y_0|\} = r\}$$

kümesidir ve bu kümenin noktalarının geometrik yeri Şekil 3.1 de gösterildiği gibi köşeleri $V_1, V_2, \dots, V_8$ olan bir sekizgendir. Bu sekizgenin köşe noktalarının

koordinatları ise, $V_1 : (x_0, y_0 + r)$, $V_2 : \left(\frac{(2+\sqrt{6}-\sqrt{2})r}{4} + x_0, \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2}+2)r}{4} + y_0\right)$, $V_3 : (x_0 + r, y_0)$, $V_4 : \left(\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2}+2)r}{4} + x_0, \frac{(-\sqrt{6}+\sqrt{2}-2)r}{4} + y_0\right)$, $V_5 : (x_0, y_0 - r)$, $V_6 :$

$\left(\frac{(-\sqrt{6}+\sqrt{2}-2)r}{4} + x_0, \frac{(-\sqrt{6}+\sqrt{2}-2)r}{4} + y_0\right), \quad V_7 : (x_0 - r, y_0), \quad V_8 : \left(\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{6}-2)r}{4} + x_0, \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{6}-2)r}{4} + y_0\right)$ biçimindedir.



Şekil 3.1. $P_1 = (x_0, y_0)$ merkezli Disdyakis Dodecahedron çemberi.

3.2 Pisagor Teoreminin Disdyakis Dodecahedron Benzeri

Bu bölümde Pisagor teoreminin Disdyakis Dodecahedron düzlemindeki benzerleri [22] kaynağına benzer yöntemlerden faydalanılarak verilmektedir. Kartezyen koordinat düzleminde iki nokta arasındaki Öklid ve Disdyakis Dodecahedron uzunluklarını birbirine dönüştürmeye yarayan bir bağıntı veren ve bu bağıntının bir özelliğini belirten aşağıdaki iki önerme ile Önerme 3.1.2 konu içinde önemli bir role sahiptir.

Önerme 3.2.1: m sıfırdan farklı bir reel sayı ve $m' = \frac{-1}{m}$ ise,

$$\rho(m) = \rho(m') = \rho(-m) = \rho(-m') \quad (3.2)$$

dir.

İspat: $m \in \mathbb{R} - \{0\}$ ise, $m' = \frac{-1}{m} \in \mathbb{R} - \{0\}$ dir. $\rho(m)$ in tanımını kullanarak

$$\begin{aligned} \rho\left(-\frac{1}{m}\right) &= \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{-1}{m}\right)^2}}{\max\{1, \left|\frac{-1}{m}\right|\} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})\min\{1, \left|\frac{-1}{m}\right|\}} \\ &= \frac{\sqrt{1 + m^2}}{\max\{|m|, 1\} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})\min\{|m|, 1\}} \\ &= \rho(m) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $p(m) = p(-m)$ ve $p(m') = p(-m)$ oldukları da kolaylıkla elde edilir.

Bundan sonra aksi belirtilmedikçe ABC , kartezyen koordinat düzleminde köşeleri saat yönünün tersine harflendirilmiş, A açısı dik olan bir üçgeni gösterecek ve bu üçgenin kenarlarının Öklidyen uzunlukları $d_E(B, C) = a_E$, $d_E(A, C) = b_E$ ve $d_E(A, B) = c_E$, DD uzunlukları $d_{DD}(B, C) = a_{DD}$, $d_{DD}(A, C) = b_{DD}$ ve $d_{DD}(A, B) = c_{DD}$ olarak alınacaktır.

Aşağıdaki önerme, bir dik üçgenin dik kenarlarının Öklid uzunlukları b_E ve c_E ile DD uzunlukları b_{DD} ve c_{DD} nin genel olarak farklı olmasına rağmen oranlarının eşit olduğunu ifade eder.

Önerme 3.2.2: ABC , kartezyen koordinat düzleminde köşeleri saat yönünün tersine harflendirilmiş, A açısı dik olan bir üçgen ve $d_E(A, C) = b_E$, $d_E(A, B) = c_E$, $d_{DD}(A, C) = b_{DD}$ ve $d_{DD}(A, B) = c_{DD}$ ise,

$$\frac{b_E}{c_E} = \frac{b_{DD}}{c_{DD}} \quad (3.3)$$

dir.

İspat: ABC , kartezyen koordinat düzleminde köşeleri saat yönünün tersine harflendirilmiş, A açısı dik olan bir üçgen olsun. Eğer ABC üçgeninin AB ve AC kenarları koordinat eksenlerine paralel ise, $c_E = c_{DD}$ ve $b_E = b_{DD}$ olacağı açıktır. Böylece bu iki eşitliğin karşılıklı oranları birbirine eşittir. ABC üçgeninin dik kenarlarından biri koordinat eksenlerine paralel olmasın. Bu durumda diğer dik kenar da bir koordinat eksenine paralel değildir. Ancak kenarlar birbirine dik olduğundan, eğer AB doğrusunun eğimi m ise, AC doğrusunun eğimi $m' = -\frac{1}{m}$ dir.

(3.1) ve (3.2) denklemleri kullanılarak;

$$\frac{d_E(A, C)}{d_E(A, B)} = \frac{\rho(m) \cdot d_{DD}(A, C)}{\rho(m) \cdot d_{DD}(A, B)}$$

böylece,

$$\frac{b_E}{c_E} = \frac{\rho(m) \cdot b_{DD}}{\rho(m) \cdot c_{DD}} = \frac{b_{DD}}{c_{DD}}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.1:

- i. Eğer ABC üçgeninin dik kenarları koordinat eksenlerine paralel ise,

$$a = \max\{b, c\} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})\min\{b, c\} \quad (3.4)$$

- ii. Eğer ABC üçgeninin dik kenarları koordinat eksenlerine paralel değil, hipotenüsü de (yani BC kenarı) dikey bir doğru üzerinde değil ise, dik kenarlardan birinin eğimi m olmak üzere,

$$a = \frac{\max\{|bm+c|, |cm-b|\} + (\sqrt{3}-\sqrt{2})\min\{|bm+c|, |cm-b|\}}{\max\{1, |m|\} + (\sqrt{3}-\sqrt{2})\min\{1, |m|\}} \quad (3.5)$$

dir.

İspat:

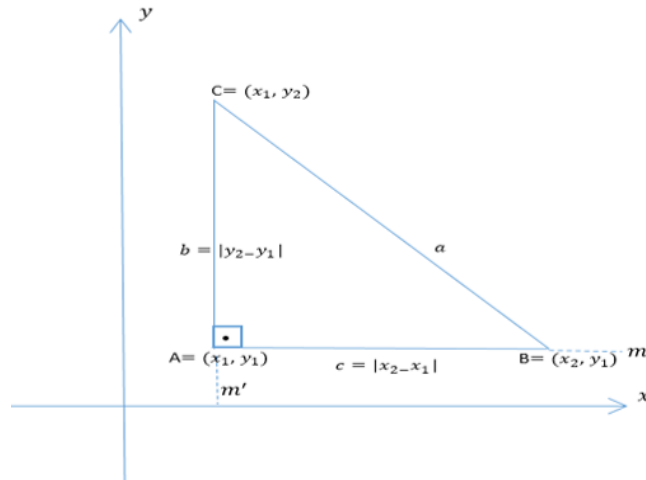
- i. ABC üçgeninin dik kenarları koordinat eksenlerine paralel ve Şekil 3.2 de gösterildiği gibi A , B ve C nin koordinatları sırasıyla (x_1, y_1) , (x_2, y_1) ve (x_1, y_2) olsun.

$$d_{DD}(C, B) = \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})\min\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}$$

dolayısıyla

$$a = \max\{b, c\} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})\min\{b, c\}$$

olduğu açıktır.



Şekil 3.2. $\mathbb{R}_{DD}^2$ de dik kenarları koordinat eksenine paralel olan ABC üçgeni.

- ii. Şekil 3.3 de gösterildiği gibi ABC üçgeninin dik kenarları koordinat eksenine paralel değil, hipotenüsü de (yani BC kenarı) dikey bir doğru üzerinde değildir. Dik kenarlardan birinin eğimi m ve hipotenüsün eğimi m_1 olmak üzere, AC kenarının

$$\frac{b_E}{c_E} = \frac{b_{DD}}{c_{DD}} \text{ elde edilir. Böylece}$$

$$\frac{b_{DD}}{c_{DD}} = \frac{m-m_1}{1+m \cdot m_1} \quad (3.6)$$

ve

$$m_1 = \frac{c_{DD} \cdot m - b_{DD}}{b_{DD} \cdot m + c_{DD}} \quad (3.7)$$

elde edilir.

Şekil 3.3. $\mathbb{R}_{DD}^2$ de dik kenarlarından herhangi biri koordinat eksenlerine paralel olmayan ve dikey bir doğru üzerinde bulunmayan bir hipotenüse sahip ABC üçgeni.

Denklem (3.1) göz önüne alınırsa;

$$d_E(A, B) = \rho(m) \cdot d_{DD}(A, B) \Rightarrow c_E = \rho(m) \cdot c_{DD}$$

$$d_E(A, C) = \rho(m') \cdot d_{DD}(A, C) \Rightarrow b_E = \rho(m) \cdot b_{DD}$$

$$d_E(B, C) = \rho(m_1) \cdot d_{DD}(B, C) \Rightarrow a_E = \rho(m_1) \cdot a_{DD}$$

elde edilir. Öklidyen düzlemdeki Pisagor Teoreminde yani $a_E^2 = b_E^2 + c_E^2$ eşitliğinde yukarıdaki ifadeler yerlerine yazılırsa

$$[\rho(m_1)]^2 \cdot a_{DD}^2 = [\rho(m)]^2 (b_{DD}^2 + c_{DD}^2) \quad (3.8)$$

elde edilir.

Daha açık olarak

$$\left(\frac{\sqrt{1+m_1^2}}{\max\{1, |m_1|\} + (\sqrt{3}-\sqrt{2})\min\{1, |m_1|\}} \right)^2 a^2 = \left(\frac{\sqrt{1+m^2}}{\max\{1, |m|\} + (\sqrt{3}-\sqrt{2})\min\{1, |m|\}} \right)^2 (b_{DD}^2 + c_{DD}^2) \quad (3.9)$$

dir. (3.9) denkleminde $m_1 = \frac{c_{DD}m - b_{DD}}{b_{DD}m + c_{DD}}$ yerine konulduğunda,

$$a = \frac{\max\{|b_{DD}m + c_{DD}|, |c_{DD}m - b_{DD}|\} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})\min\{|b_{DD}m + c_{DD}|, |c_{DD}m - b_{DD}|\}}{\max\{1, |m|\} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})\min\{1, |m|\}}$$

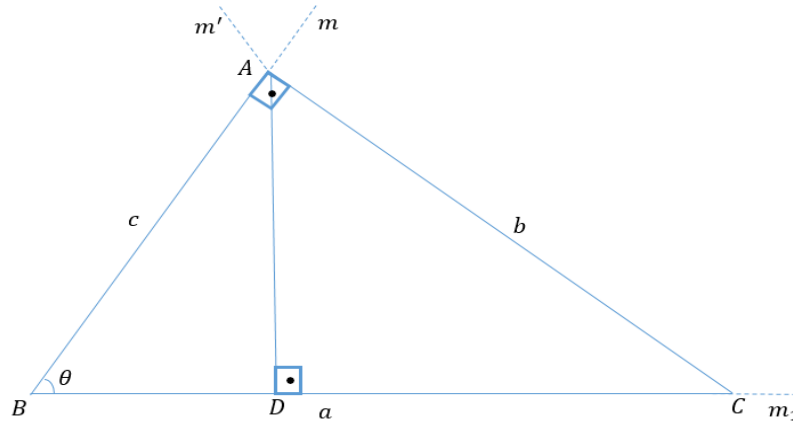
elde edilir.

Sonuç 3.2.1: Eğer BC kenarı, yani ABC üçgeninin hipotenüsü, koordinat eksenlerinden birine paralel ise,

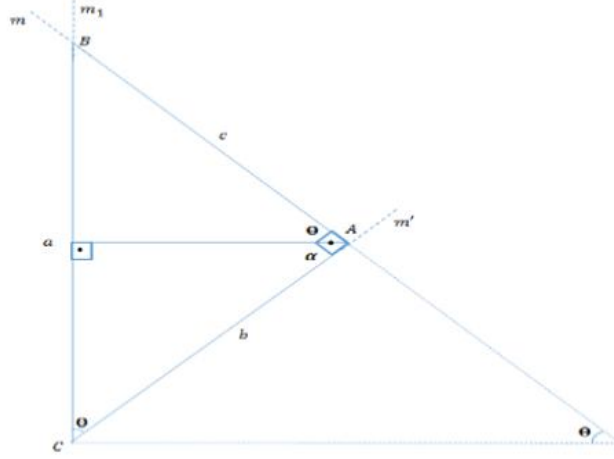
$$a = \frac{b_{DD}^2 + c_{DD}^2}{\max\{|c_{DD}|, |b_{DD}|\} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})\min\{|c_{DD}|, |b_{DD}|\}} \quad (3.10)$$

dır.

İspat: ABC üçgeninin BC kenarı koordinat eksenlerinden birine paralel olsun, (Bkz: Şekil 3.4 ve Şekil 3.5). Eğer BC kenarı x-eksenine paralel ise $m_1 = 0$ olup $\rho(m_1) = 1$ dir. BC kenarı y-eksenine paralel ise $m_1 = \infty$ olup $\rho(m_1) \rightarrow 1$ dir. Her iki durum için de denklem (3.8) eşitliği, AB kenarının eğimi m olmak üzere, $a_{DD}^2 = [\rho(m)]^2(b_{DD}^2 + c_{DD}^2)$ haline indirgenir.



Şekil 3.4. $\mathbb{R}_{DD}^2$ de hipotenüsü x-eksenine paralel olan ABC üçgeni.



Şekil 3.5. $\mathbb{R}_{DD}^2$ de hipotenüsü y-eksenine paralel olan ABC üçgeni.

Benzer üçgenler ve denklem (3.3) eşitliğinden, BC yatay iken, $|m| = \left| \frac{AD}{BD} \right| = \left| \frac{AC}{AB} \right| = \frac{b_{DD}}{c_{DD}}$ ve BC dikey iken, $|m| = \frac{c_{DD}}{b_{DD}}$ elde edilir. Böylece BC yatay ise,

$$a_{DD}^2 = \left(\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{b_{DD}}{c_{DD}} \right)^2}}{\max\{1, \frac{b_{DD}}{c_{DD}}\} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})\min\{1, \frac{b_{DD}}{c_{DD}}\}} \right)^2 (b_{DD}^2 + c_{DD}^2)$$

ve BC dikey ise,

$$a_{DD}^2 = \left(\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{c_{DD}}{b_{DD}} \right)^2}}{\max\{1, \frac{c_{DD}}{b_{DD}}\} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})\min\{1, \frac{c_{DD}}{b_{DD}}\}} \right)^2 (b_{DD}^2 + c_{DD}^2)$$

elde edilir. Her iki denklem sonucunun denklem (3.10) a eşit olduğu açıktır.

Bir sonraki sonuç da Pisagor Teoreminin bir DD benzeridir ve dik kenarlardan birinin eğimi yerine hipotenüsün eğimini parametre olarak içermektedir.

Sonuç 3.2.2: ABC üçgenin hiçbir kenarı koordinat eksenlerine paralel değil ise, BC kenarının, yani hipotenüsün eğimi m_1 olmak üzere,

$$a_{DD} = \frac{(b_{DD}^2 + c_{DD}^2)[\max\{1, |m_1|\} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})\min\{1, |m_1|\}]}{\max\{|c_{DD} - b_{DD}m_1|, |b_{DD} + c_{DD}m_1|\} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})\min\{|c_{DD} - b_{DD}m_1|, |b_{DD} + c_{DD}m_1|\}} \quad (3.11)$$

dir.

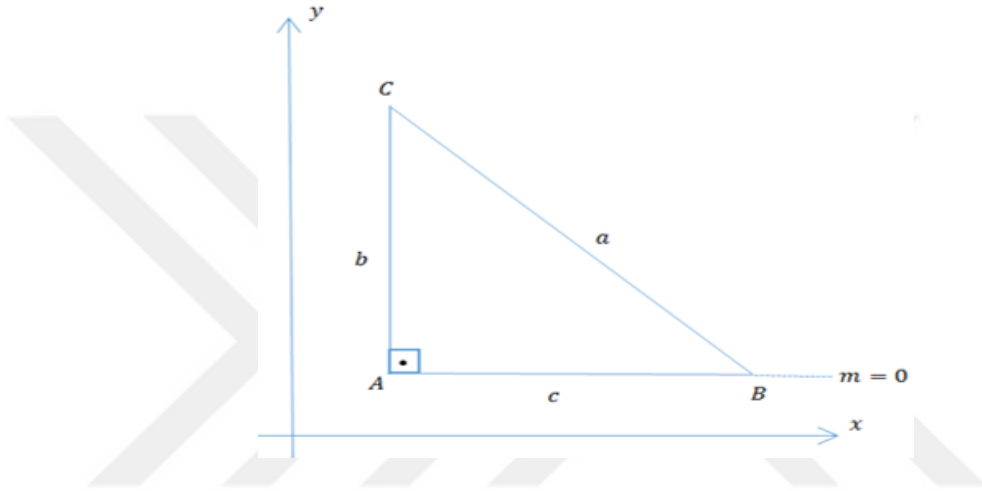
İspat: AB kenarının eğimi m ise denklem (3.6) dan

$$m = \frac{b_{DD} + c_{DD} \cdot m_1}{c_{DD} - b_{DD} \cdot m_1} \quad (3.12)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikteki m denklem (3.5) de yerine konulursa denklem (3.11) elde edilir.

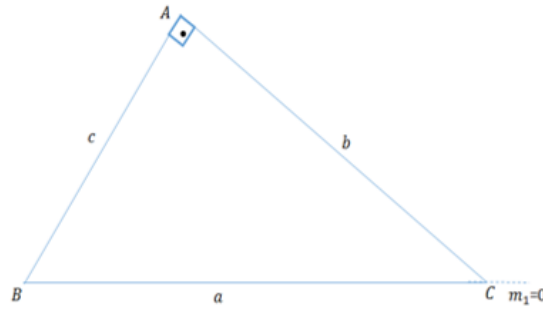
Uyarı 3.2.1:

ABC üçgeninde AB kenarı x -eksenine paralel, yani $m = 0$ iken; denklem (3.5) denklem (3.4) indirgenir.



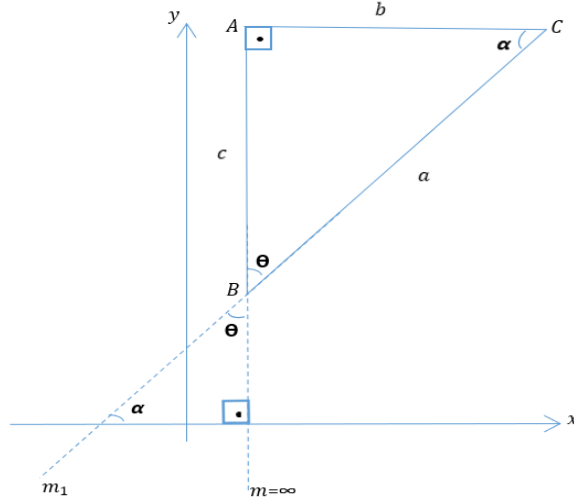
Şekil 3.6. $\mathbb{R}_{DD}^2$ de AB kenarı x -eksenine paralel ABC üçgeni.

Benzer bir şekilde, BC kenarı x -eksenine paralel, yani $m_1 = 0$ iken; denklem (3.11) denklem (3.10) deki eşitliğe indirgenir.



Şekil 3.7. $\mathbb{R}_{DD}^2$ de BC kenarı x -eksenine paralel ABC üçgeni.

AB kenarı y -eksenine paralel, yani $m \rightarrow \infty$ iken; denklem (3.5) denklem (3.4) e indirgenir.



Şekil 3.8. $\mathbb{R}_{DD}^2$ de AB kenarı y-eksenine paralel ABC üçgeni.

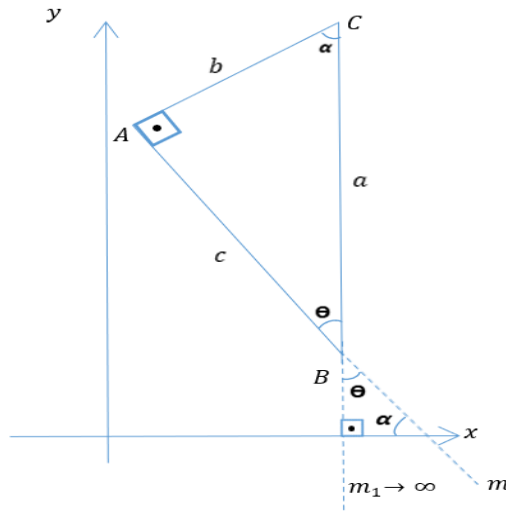
Ayrıca (3.4) denklemi şu şekilde de elde edilir;

$m_1 = \tan \alpha = \frac{c_{DD}}{b_{DD}}$ ve $\rho(m) \rightarrow 1$ dir. (3.8) ile verilen denklemi daha açık olarak

$$\frac{1+m_1^2}{(\max\{1, |m_1|\} + (\sqrt{3}-\sqrt{2})\min\{1, |m_1|\})^2} \cdot a_{DD}^2 = b_{DD}^2 + c_{DD}^2$$

biçiminde yazılabilir. Bu denklemde $m_1 = \frac{c_{DD}}{b_{DD}}$ yerine konulduğunda, denklem (3.4) elde edilir.

BC kenarı dikey iken; yani $m_1 \rightarrow \infty$ iken; denklem (3.11) denklem (3.10) eşitliğine indirgenir.



Şekil 3.9. $\mathbb{R}_{DD}^2$ de BC kenarı y-eksenine paralel ABC üçgeni.

Ayrıca (3.10) denklemi şu şekilde de elde edilebilir;

$m = \tan \alpha = -\frac{c_{DD}}{b_{DD}}$ ve $\rho(m_1) \rightarrow 1$ dir. (3.8) ile verilen denklemi daha açık olarak

$$a_{DD}^2 = \frac{1 + m^2}{(\max\{1, |m|\} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})\min\{1, |m|\})^2} (b_{DD}^2 + c_{DD}^2)$$

biçiminde yazılabilir. Bu denklemde $m = -\frac{c_{DD}}{b_{DD}}$ yerine konulduğunda, denklem (3.10) elde edilir.

Uyarı 3.2.2: A açısı dik olan ABC üçgeni saat yönünde harflendirilirse b_{DD} ve c_{DD} nin rolleri değişir. Böylece denklem (3.5);

$$[\max\{1, |m|\} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})\min\{1, |m|\}]a_{DD} = \max\{|c_{DD}m + b_{DD}|, |b_{DD}m - c_{DD}|\} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})\min\{|c_{DD}m + b_{DD}|, |b_{DD}m - c_{DD}|\} \quad (3.13)$$

şekline, benzer şekilde denklem (3.11);

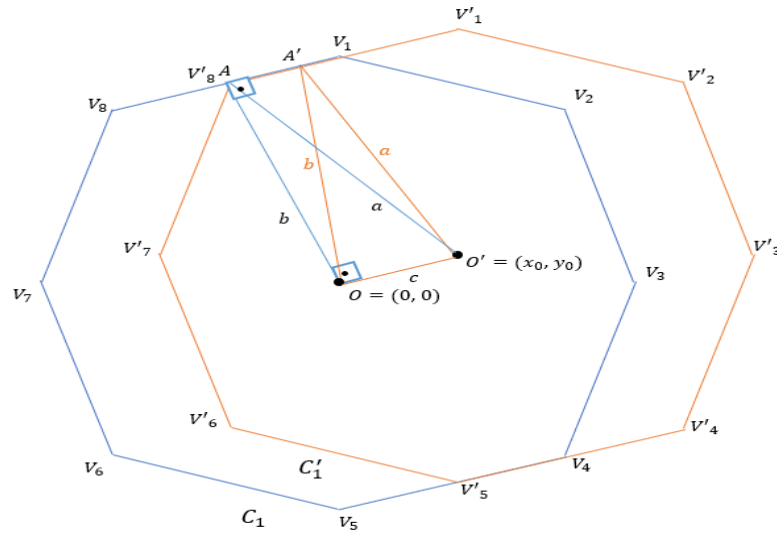
$$[\max\{|b_{DD} + c_{DD}m_1|, |c_{DD} + b_{DD}m_1|\} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})\min\{|b_{DD} - c_{DD}m_1|, |c_{DD} + b_{DD}m_1|\}]a_{DD} = (b_{DD}^2 + c_{DD}^2)\max\{1, |m_1|\} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})\min\{1, |m_1|\} \quad (3.14)$$

Aşağıda, Teorem 3.2.1 in karşıtının ve dolayısıyla Sonuç 3.2.2 nin karşıtının doğru olmadığını gösteren bir örnek verilmiştir. Diğer bir ifadeyle Pisagor teoreminde üçgen dik ise $a_E^2 = b_E^2 + c_E^2$ bağıntısı sağlanır, ayrıca $a_E^2 = b_E^2 + c_E^2$ bağıntısı sağlanıyorsa bu üçgen diktir, yani ifadenin karşıtı da doğrudur. Fakat DD -düzleminde Pisagor bağıntısının sağlandığı $a_E^2 = b_E^2 + c_E^2$ ye karşı gelen denklem (3.5) ya da denklem (3.11) eşitliğini sağlayan fakat hiçbir dik açuya sahip olmayan bir ABC üçgeninin varlığını gösteren bir örnek verilebilir. Örnekte Şekil 3.10 da gösterildiği gibi, DD -çemberlerinden faydalanılarak denklem (3.5) veya (3.11) deki Pisagor bağıntısının DD -düzlemindeki karşılığını sağlayacak şekilde bir dik üçgen ile aynı kenar uzunluklarına sahip dik olmayan bir üçgen örneği verilmektedir. Bilindiği üzere, O merkezli r birim yarıçaplı DD -çemberi, O noktasına DD -uzaklığı r birim olan tüm noktaların kümesidir. Bu noktaların geometrik yeri bir sekizgendir. Ayrıca Öklidyen çemberlerde olduğu gibi O merkezli ve bu merkeze r birim DD -uzaklığındaki bir nokta bu çemberi tamamen belirler.

Örnek 3.2.1: Merkezi $O = (0,0)$, yarıçapı r birim ve köşeleri saat yönünde $V_1, V_2, \dots, V_8$ olarak isimlendirilmiş olan DD -çemberi

$$\mathcal{C}_1 = \{(x, y) \mid \max\{|x|, |y|\} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})\min\{|x|, |y|\} = r\}$$

olsun. Böylece, bahsi geçen DD -çemberinin köşelerinin koordinatları $(0, r)$, $\left(\frac{(2+\sqrt{6}-\sqrt{2})r}{4}, \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2}+2)r}{4}\right)$, $(r, 0)$, $\left(\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2}+2)r}{4}, \frac{(-\sqrt{6}+\sqrt{2}-2)r}{4}\right)$, $(0, -r)$, $\left(\frac{(-\sqrt{6}+\sqrt{2}-2)r}{4}, \frac{(-\sqrt{6}+\sqrt{2}-2)r}{4}\right)$, $(-r, 0)$ ve $\left(\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{6}-2)r}{4}, \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2}+2)r}{4}\right)$ dir. $\mathcal{C}_1$ çemberinin V_1V_8 kenarına O dan inilen dikmenin ayağı $A = \left(-\frac{\sqrt{3}}{6}r, \frac{3+\sqrt{6}}{6}r\right)$ olsun. A noktasını $O' = (x_0, y_0) = \left(\frac{\sqrt{6}}{12}(6 - \sqrt{3} - \sqrt{2})r, \frac{\sqrt{6}}{12}(6\sqrt{3} - 6\sqrt{2} - 1)r\right)$ merkezinden geçen -1 eğimli doğru üzerinde bulunan V'_8 köşesi olarak kabul eden r birim yarıçaplı $\mathcal{C}'_1$ çemberi şekilde gösterilen kırmızı çember olsun. Böylece O açısı dik olacak şekilde, köşeleri saat yönünün tersine harflendirilmiş AOO' üçgeni elde edilir. $d_{DD}(O, O') = c_{DD}$, $d_{DD}(O, A) = b_{DD}$ ve $d_{DD}(O', A) = a_{DD}$ olarak isimlendirilsin, (Bkz; Şekil 3.10). A' de $\mathcal{C}_1$ ve $\mathcal{C}'_1$ çemberlerinin kesişiminde bir nokta olsun. A' noktası hem $\mathcal{C}_1$ DD -çemberi hem de $\mathcal{C}'_1$ DD -çemberi üzerinde olduğu için $d_{DD}(O, A) = b_{DD}$ ve $d_{DD}(O', A) = a_{DD}$ olduğundan $d_{DD}(O, A') = b_{DD}$ ve $d_{DD}(O', A') = a_{DD}$ elde edilir. Bu durumda AOO' üçgenine Teorem 3.2.1 uygulanırsa OO' doğru parçasının eğimi m olmak üzere hiçbir dik açısı olmayan $A'O'O'$ üçgeni için de geçerli olan, $[\max\{1, |m|\} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})\min\{1, |m|\}]a_{DD} = \max\{|b_{DD}m + c_{DD}|, |c_{DD}m - b_{DD}|\} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})\min\{|b_{DD}m + c_{DD}|, |c_{DD}m - b_{DD}|\}$ eşitliği elde edilir. Böylece R_{DD}^2 de Teorem 3.2.1'in karıştının dolayısıyla Sonuç 3.2.1'in karıştının doğru olmadığı gösterilmiş olur.



Şekil 3.10. $\mathbb{R}_{DD}^2$ de denklem (3.5) i sağlayan bir dik üçgen ile dik olmayan üçgen.

Aşağıdaki teorem, DD –düzlemindeki bir üçgenin bir dik açıya sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşul ifade eder. Yeterli koşul, aslında Pisagor teoreminin karşıtının başka bir ifadesidir.

Teorem 3.2.2: ABC üçgeni DD –düzleminde kenar uzunlukları $d_{DD}(B, C) = a_{DD}$, $d_{DD}(A, C) = b_{DD}$ ve $d_{DD}(A, B) = c_{DD}$ olan bir üçgen olsun; m_1 , m ve m' de sırasıyla BC , AB ve AC kenarlarının eğimlerini göstere. Buna göre A açısının dik olması için gerek ve yeter koşul,

$$\rho(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\max\{1, |x|\} + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) \min\{1, |x|\}}$$

olmak üzere

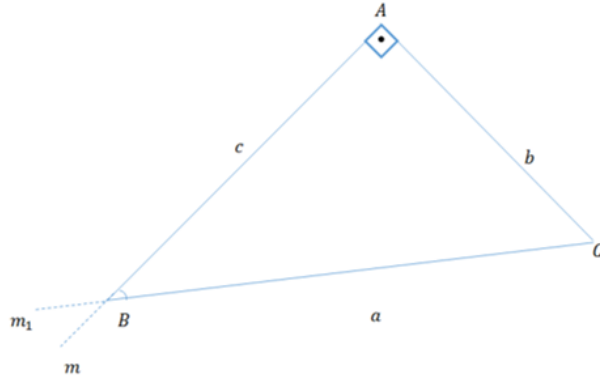
$$[\rho(m_1)]^2 \cdot a_{DD}^2 = [\rho(m)]^2 (b_{DD}^2 + c_{DD}^2) = [\rho(m')]^2 (b_{DD}^2 + c_{DD}^2) \quad (3.15)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat: (3.15) eşitliği geçerli ise $\rho(m) = \rho(m')$ ve $[\rho(m_1)]^2 \cdot a_{DD}^2 = [\rho(m)]^2 b_{DD}^2 + [\rho(m)]^2 c_{DD}^2 = [\rho(m')]^2 b_{DD}^2 + [\rho(m')]^2 c_{DD}^2$ dir. O halde

$$[\rho(m_1)]^2 \cdot a_{DD}^2 = [\rho(m')]^2 b_{DD}^2 + [\rho(m)]^2 c_{DD}^2 \quad (3.16)$$

yazılabilir. $d_E(A, B) = \rho(m) \cdot d_{DD}(A, B)$ eşitliği (3.16) eşitliğine uygulanırsa;



Şekil 3.11. $\mathbb{R}_{DD}^2$ de A açısı dik olan ABC üçgeni.

$d_E^2(A, B) = \rho(m)^2 \cdot d_{DD}^2(A, B)$ yani $c_E^2 = \rho(m)^2 \cdot c_{DD}^2$, $d_E^2(B, C) = \rho(m_1)^2 \cdot d_{DD}^2(B, C)$ yani $a_E^2 = \rho(m_1)^2 \cdot a_{DD}^2$ ve $d_E^2(A, C) = \rho(m')^2 \cdot d_{DD}^2(A, C)$ yani $b_E^2 = \rho(m')^2 \cdot b_{DD}^2$ dir. Böylece $a_E^2 = b_E^2 + c_E^2$ elde edilir. Bu ise Öklidyen

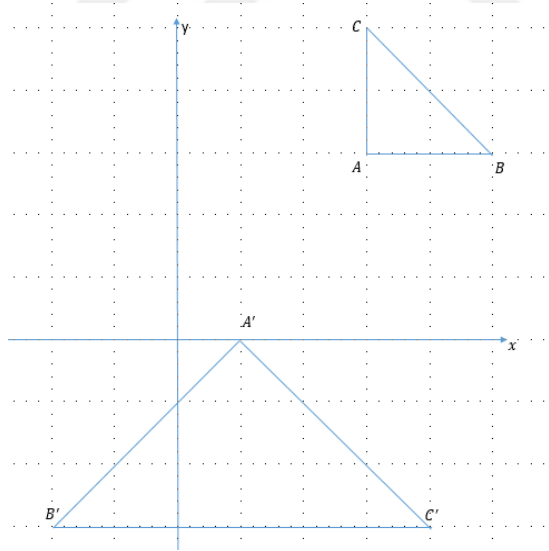
düzlemde Pisagor bağıntısına karşılık gelip Öklidyen düzlemde Pisagor bağıntısının tersi de geçerli olduğundan A açısının dik olduğunu gösterir.

3.3 Thales Bağıntılarının Disdyakis Dodecahedron Benzeri

Bu bölümde Thales bağıntılarının Disdyakis Dodecahedron düzlemindeki benzerleri [23] kaynağındaki benzer yöntemlerden faydalanılarak verilmektedir.

Teorem 3.3.1: (A.A.A.) benzerlik teoremi $\mathbb{R}_{DD}^2$ de geçerli değildir.

İspat: (A.A.A.) benzerlik teoreminin $\mathbb{R}_{DD}^2$ de sağlanmadığını göstermek için bir örnek verilmesi yeterlidir. Şekil 3.12 de gösterildiği gibi $A = (3,3)$, $B = (5,3)$, $C = (3,5)$ ve $A' = (1,0)$, $B' = (-2,-3)$, $C' = (4,-3)$ noktalarını ve bu noktalarla oluşturulan ABC ve $A'B'C'$ üçgenlerini göz önüne alalım. Dikkat edilirse $m(A) = m(A')$, $m(B) = m(B')$ ve $m(C) = m(C')$ dür. (A.A.A.) benzerliğinden Öklid düzleminde $ABC \sim A'B'C'$ dir. Ancak DD -düzleminde $d_{DD}(A,B) = 2$, $d_{DD}(A'B') = 3(1 + \sqrt{3} - \sqrt{2})$, $d_{DD}(B,C) = 2 + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$, $d_{DD}(B'C') = 6$, $d_{DD}(A,C) = 2$ ve $d_{DD}(A'C') = 3(1 + \sqrt{3} - \sqrt{2})$ olup $\frac{3(1+\sqrt{3}-\sqrt{2})}{2} = \frac{3(1+\sqrt{3}-\sqrt{2})}{2} \neq \frac{3}{1+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ dir. Dolayısıyla ABC ile $A'B'C'$ benzer değildir.



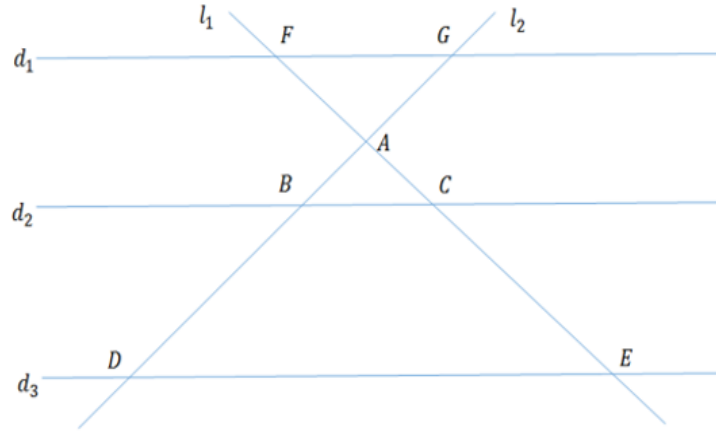
Şekil 3.12. DD-düzleminde (A.A.A.) benzerlik teoremini sağlamayan iki üçgen.

Sonuç olarak DD-düzleminde (A.A.A.) ve diğer benzerlik bağıntıları sağlanmamaktadır.

Teorem 3.3.2: Kesişen iki doğru, paralel üç doğru ile kesiştirildiğinde oluşan üçgenlerin karşılıklı kenar uzunlukları orantılıdır. Yani Şekil 3.13 de verilen $d_1, d_2, d_3, \ell_1, \ell_2$ doğruları için $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3, \ell_1 \nparallel \ell_2$ ve $\ell_i \nparallel d_j, i = 1, 2, j=1, 2, 3$ ise

- i. $\frac{d_{DD}(A,B)}{d_{DD}(A,D)} = \frac{d_{DD}(A,C)}{d_{DD}(A,E)} = \frac{d_{DD}(B,C)}{d_{DD}(D,E)}$
- ii. $\frac{d_{DD}(A,B)}{d_{DD}(A,G)} = \frac{d_{DD}(A,C)}{d_{DD}(A,F)} = \frac{d_{DD}(B,C)}{d_{DD}(F,G)}$

dir.



Şekil 3.13. $\mathbb{R}_{DD}^2$ de üç paralel doğru tarafından kesilen paralel olmayan iki doğru.

İspat:

- i. A, B, D noktaları ve A, C, E noktaları doğrudan olduğundan Sonuç 3.1.2 gereğince $\frac{d_E(A,B)}{d_E(A,D)} = \frac{d_{DD}(A,B)}{d_{DD}(A,D)}$ ve $\frac{d_E(A,C)}{d_E(A,E)} = \frac{d_{DD}(A,C)}{d_{DD}(A,E)}$, dolayısıyla $\frac{d_{DD}(A,B)}{d_{DD}(A,D)} = \frac{d_{DD}(A,C)}{d_{DD}(A,E)}$ dir.
- d_1 doğrusunun eğimi m olsun. $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3$ olduğundan d_2 ve d_3 doğrularının eğimleri de m dir. Önerme 3.1.2 gereğince $m \in \mathbb{R}$ için

$$d_E(B, C) = \frac{\sqrt{1+m^2}}{(\sqrt{3}-1)(1+|m|)+(2-\sqrt{3})\max\{1,|m|\}} d_{DD}(B, C) \quad \text{ve} \quad d_E(D, E) = \frac{\sqrt{1+m^2}}{(\sqrt{3}-1)(1+|m|)+(2-\sqrt{3})\max\{1,|m|\}} \cdot d_{DD}(D, E) \text{ olup bu eşitlikler taraf tarafa oranlanırsa}$$

$$\frac{d_E(B, C)}{d_E(D, E)} = \frac{\frac{\sqrt{1+m^2}}{(\sqrt{3}-1)(1+|m|)+(2-\sqrt{3})\max\{1,|m|\}} d_{DD}(B, C)}{\frac{\sqrt{1+m^2}}{(\sqrt{3}-1)(1+|m|)+(2-\sqrt{3})\max\{1,|m|\}} d_{DD}(D, E)} = \frac{d_{DD}(B, C)}{d_{DD}(D, E)}$$

elde edilir. $m \rightarrow \infty$ için $d_E(B, C) = d_{DD}(B, C)$ ve $d_E(D, E) = d_{DD}(D, E)$ olduğundan $\frac{d_E(B, C)}{d_E(D, E)} = \frac{d_{DD}(B, C)}{d_{DD}(D, E)}$ dir. Böylece sonuç olarak $\frac{d_{DD}(A, B)}{d_{DD}(A, D)} = \frac{d_{DD}(A, C)}{d_{DD}(A, E)} = \frac{d_{DD}(B, C)}{d_{DD}(D, E)}$ elde edilir.

ii. Benzer biçimde A, B, G noktaları ve A, C, F noktaları doğrudan olduğundan Sonuç 3.1.2 gereğince $\frac{d_E(A, B)}{d_E(A, G)} = \frac{d_{DD}(A, B)}{d_{DD}(A, G)}$ ve $\frac{d_E(A, C)}{d_E(A, F)} = \frac{d_{DD}(A, C)}{d_{DD}(A, F)}$, dolayısıyla $\frac{d_{DD}(A, B)}{d_{DD}(A, G)} = \frac{d_{DD}(A, C)}{d_{DD}(A, F)}$ dir. Önerme 3.1.2 gereğince $m \in \mathbb{R}$ için

$$d_E(B, C) = \frac{\sqrt{1+m^2}}{\max\{1, |m|\} + (\sqrt{3}-\sqrt{2})\min\{1, |m|\}} d_{DD}(B, C) \quad \text{ve} \quad d_E(F, G) = \frac{\sqrt{1+m^2}}{\max\{1, |m|\} + (\sqrt{3}-\sqrt{2})\min\{1, |m|\}} d_{DD}(F, G) \text{ olup bu eşitlikler taraf tarafa oranlanırsa}$$

$$\frac{d_E(B, C)}{d_E(F, G)} = \frac{\frac{\sqrt{1+m^2}}{\max\{1, |m|\} + (\sqrt{3}-\sqrt{2})\min\{1, |m|\}} d_{DD}(B, C)}{\frac{\sqrt{1+m^2}}{\max\{1, |m|\} + (\sqrt{3}-\sqrt{2})\min\{1, |m|\}} d_{DD}(F, G)} = \frac{d_{DD}(B, C)}{d_{DD}(F, G)}$$

elde edilir.

$$m \rightarrow \infty \text{ için } d_E(B, C) = d_{DD}(B, C) \text{ ve } d_E(F, G) = d_{DD}(F, G)$$

olduğundan, $\frac{d_E(B, C)}{d_E(F, G)} = \frac{d_{DD}(B, C)}{d_{DD}(F, G)}$ dir. Sonuç olarak $\frac{d_{DD}(A, B)}{d_{DD}(A, G)} = \frac{d_{DD}(A, C)}{d_{DD}(A, F)} = \frac{d_{DD}(B, C)}{d_{DD}(F, G)}$ elde edilir.

4. $\mathbb{R}_{TH}^2$ NİN TEMEL ÖZELLİKLERİ VE $\mathbb{R}_{TH}^2$ DE PİSAGOR TEOREMİ VE THALES BAĞINTILARI

4.1 $\mathbb{R}_{TH}^2$ nin Temel Özellikleri

Bu bölümde daha önceden [2] de 3 boyutlu analitik uzayda verilen Tetrakis Hexahedron metriğinin izdüşüm kullanılarak elde edilen 2 boyutlu analitik düzlemdeki tanımı verilmekte ve bazı özelliklerine değinilmektedir.

Tanım 4.1.1: $\mathbb{R}^2$ de $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ noktaları verilsin.

$$d_{TH}(P_1, P_2) = (\sqrt{3} - 1)(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) + (2 - \sqrt{3}) \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

biçiminde tanımlı $d_{TH}: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ uzaklık fonksiyonuna Tetrakis Hexahedron fonksiyonu denir.

Teorem 4.1.1: d_{TH} uzaklık fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ de bir metriktir.

İspat: $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ verilsin. d_{TH} nin metrik olduğunu kanıtlamak için her $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^2$ için

(i) $d_{TH}(P_1, P_2) \geq 0$ ve $d_{TH}(P_1, P_2) = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$

(ii) $d_{TH}(P_1, P_2) = d_{TH}(P_2, P_1)$

(iii) $d_{TH}(P_1, P_3) \leq d_{TH}(P_1, P_2) + d_{TH}(P_2, P_3)$

aksiyomlarının sağlandığı gösterilmelidir.

(i) d_{TH} uzaklık fonksiyonu

$$d_{TH}(P_1, P_2) = (\sqrt{3} - 1)(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) + (2 - \sqrt{3}) \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

biçiminde tanımlı olduğundan, mutlak değer her zaman negatif olmayan değerler üreteceğinden, mutlak değer maximumu da negatif olmayan değerler alacağından $d_{TH}(P_1, P_2) \geq 0$ dır. Eğer $d_{TH}(P_1, P_2) = 0$ ise $|x_1 - x_2| = 0$, $|y_1 - y_2| = 0$ olup $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ ve dolayısıyla $P_1 = P_2$ elde edilir. Tersine $P_1 = P_2$ ise $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ olacağından $|x_1 - x_2| = 0$, $|y_1 - y_2| = 0$ olup $d_{TH}(P_1, P_2) = 0$ bulunur.

(ii) Mutlak değer tanımından açıkça $d_{TH}(P_1, P_2) = d_{TH}(P_2, P_1)$ dir. Yani d_{TH} uzaklık fonksiyonu simetriktir.

(iii) $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ ve $P_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ olsun. $d_{TH}(P_1, P_3) \leq d_{TH}(P_1, P_2) + d_{TH}(P_2, P_3)$ eşitsizliğinin sağlandığı gösterilmelidir. Açıkça P_1 , P_2 and P_3 noktaları için

$$d_{TH}(P_1, P_3) = (\sqrt{3} - 1)(|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|) + (2 - \sqrt{3})\max\{|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|\}$$

$$d_{TH}(P_1, P_2) = (\sqrt{3} - 1)(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) + (2 - \sqrt{3})\max\{|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|\}$$

$$d_{TH}(P_2, P_3) = (\sqrt{3} - 1)(|x_2 - x_3| + |y_2 - y_3|) + (2 - \sqrt{3})\max\{|x_2 - x_3| + |y_2 - y_3|\}$$

dir. Bahsedilen eşitsizliği incelemek için 8 durum dikkate alınmalıdır;

Durum 1: Eğer $|x_1 - x_3| \geq |y_1 - y_3|$, $|x_1 - x_2| \geq |y_1 - y_2|$, $|x_2 - x_3| \geq |y_2 - y_3|$ ise

$$\begin{aligned} d_{TH}(P_1, P_3) &= (\sqrt{3} - 1)(|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|) + (2 - \sqrt{3})|x_1 - x_3| \\ &= |x_1 - x_3| + (\sqrt{3} - 1)|y_1 - y_3| \\ &= |x_1 - x_2 + x_2 - x_3| + (\sqrt{3} - 1)|y_1 - y_2 + y_2 - y_3| \\ &\leq (|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3|) + (\sqrt{3} - 1)(|y_1 - y_2| + |y_2 - y_3|) \\ &= (|x_1 - x_2| + (\sqrt{3} - 1)|y_1 - y_2|) + (|x_2 - x_3| + (\sqrt{3} - 1)|y_2 - y_3|) \\ &= d_{TH}(P_1, P_2) + d_{TH}(P_2, P_3) \end{aligned}$$

elde edilir.

Durum 2: Eğer $|x_1 - x_3| \geq |y_1 - y_3|$, $|x_1 - x_2| \geq |y_1 - y_2|$ ve $|y_2 - y_3| \geq |x_2 - x_3|$ ise

$$\begin{aligned} d_{TH}(P_1, P_3) &= |x_1 - x_3| + (\sqrt{3} - 1)|y_1 - y_3| \\ &\leq (|x_1 - x_2| + (\sqrt{3} - 1)|y_1 - y_2|) + (|x_2 - x_3| + (\sqrt{3} - 1)|y_2 - y_3|) \\ &\leq (|x_1 - x_2| + (\sqrt{3} - 1)|y_1 - y_2|) + (|y_2 - y_3| + (\sqrt{3} - 1)|x_2 - x_3|) \\ &= d_{TH}(P_1, P_2) + d_{TH}(P_2, P_3) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada;

$$|y_2 - y_3| \geq |x_2 - x_3| \Rightarrow (2 - \sqrt{3})|y_2 - y_3| \geq (2 - \sqrt{3})|x_2 - x_3|$$

$$\Rightarrow (|y_2 - y_3| + (\sqrt{3} - 1)|x_2 - x_3|) \geq (|x_2 - x_3| + (\sqrt{3} - 1)|y_2 - y_3|)$$

olduğu kullanılmıştır. Eşitsizliğin geçerli olduğunun benzer hesaplamalarla kolaylıkla gösterilebildiği diğer durumlarda aşağıda belirtilmiştir;

Durum 3: $|x_1 - x_3| \geq |y_1 - y_3|$, $|y_1 - y_2| \geq |x_1 - x_2|$ ve $|x_2 - x_3| \geq |y_2 - y_3|$ ise,

Durum 4: $|x_1 - x_3| \geq |y_1 - y_3|$, $|y_1 - y_2| \geq |x_1 - x_2|$ ve $|y_2 - y_3| \geq |x_2 - x_3|$ ise,

Durum 5: $|y_1 - y_3| \geq |x_1 - x_3|$, $|x_1 - x_2| \geq |y_1 - y_2|$ ve $|x_2 - x_3| \geq |y_2 - y_3|$ ise,

Durum 6: $|y_1 - y_3| \geq |x_1 - x_3|$, $|x_1 - x_2| \geq |y_1 - y_2|$ ve $|y_2 - y_3| \geq |x_2 - x_3|$ ise,

Durum 7: $|y_1 - y_3| \geq |x_1 - x_3|$, $|y_1 - y_2| \geq |x_1 - x_2|$ ve $|x_2 - x_3| \geq |y_2 - y_3|$ ise,

Durum 8: $|y_1 - y_3| \geq |x_1 - x_3|$, $|y_1 - y_2| \geq |x_1 - x_2|$ ve $|y_2 - y_3| \geq |x_2 - x_3|$ ise,

böylece $d_{TH}(P_1, P_3) \leq d_{TH}(P_1, P_2) + d_{TH}(P_2, P_3)$ elde edilir.

Sonuç olarak 2 boyutlu analitik düzlemde d_{TH} uzaklık fonksiyonu bir metriktir ve bu metriğin sağladığı düzlem $\mathbb{R}_{TH}^2$ olarak gösterilmektedir.

Önerme 4.1.1: Her Öklidyen öteleme TH-düzleminde uzaklığı korur. Böylece ötelemeler $\mathbb{R}_{TH}^2$ de bir izometridir.

İspat: $A = (a_1, a_2)$, $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere $T_A: \mathbb{R}_{TH}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{TH}^2$, $T_A(X) = X + A$ olacak şekilde $\mathbb{R}_{TH}^2$ de reel bir öteleme olsun. $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$\begin{aligned} d_{TH}(T_A(P_1), T_A(P_2)) &= (\sqrt{3} - 1)(|x_1 + a_1 - x_2 - a_1| + |y_1 + a_2 - y_2 - a_2|) \\ &\quad + (2 - \sqrt{3}) \max\{|x_1 + a_1 - x_2 - a_1|, |y_1 + a_2 - y_2 - a_2|\} \\ &= (\sqrt{3} - 1)(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) + (2 - \sqrt{3}) \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} \\ &= d_{TH}(P_1, P_2) \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla T_A $\mathbb{R}_{TH}^2$ de bir izometridir.

Önerme 4.1.2: $A, B \in \mathbb{R}_{TH}^2$ ve kartezyen koordinat düzleminde dikey bir doğru üzerinde bulunmayan iki nokta, m de bu iki noktadan geçen doğrunun eğimi ise,

$$\rho(m) = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{(\sqrt{3} - 1)(1 + |m|) + (2 - \sqrt{3})\max\{1, |m|\}}$$

olmak üzere

$$d_E(A, B) = \rho(m) \cdot d_{TH}(A, B) \quad (4.1)$$

dir. Ayrıca A ve B dikey bir doğru üzerinde bulunan iki nokta ise, $d_E(A, B) = d_{TH}(A, B)$ dir.

İspat: $A = (x_1, y_1)$ ve $B = (x_2, y_2)$, $\mathbb{R}_{TH}^2$ de iki nokta olsun. Eğer A ve B dikey bir doğru üzerinde değilse, $x_1 \neq x_2$ dir ve

$$d_E(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = |x_2 - x_1| \sqrt{1 + m^2}$$

ve

$$d_{TH}(A, B) = (\sqrt{3} - 1)(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) + (2 - \sqrt{3}) \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} = |x_1 - x_2| [(\sqrt{3} - 1)(1 + |m|) + (2 - \sqrt{3}) \max\{1, |m|\}]$$

biçiminde yazılabilir. Her iki eşitliği karşılıklı olarak birbirine oranlarsak;

$$\frac{d_E(A, B)}{d_{TH}(A, B)} = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{(\sqrt{3} - 1)(1 + |m|) + (2 - \sqrt{3}) \max\{1, |m|\}}$$

elde edilir. Böylece,

$$\rho(m) = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{(\sqrt{3} - 1)(1 + |m|) + (2 - \sqrt{3}) \max\{1, |m|\}}$$

olmak

üzere,

$$d_E(A, B) = \rho(m) \cdot d_{TH}(A, B).$$

elde edilir. Eğer A ve B dikey bir doğru üzerinde bulunan iki nokta ise, $x_1 = x_2$ dir.

Bu durumda $d_E(A, B) = |y_2 - y_1|$ ve $d_{TH}(A, B) = |y_2 - y_1|$ olur. Böylece $d_E(A, B) = d_{TH}(A, B)$ eşitliği elde edilir.

Önerme 4.1.2 doğrudan noktalar için d_{TH} uzaklığının Öklid uzaklığının pozitif sabit bir katı olduğunu belirtir.

Sonuç 4.1.1: P_1, P_2 ve X , $\mathbb{R}^2$ de doğrudan üç nokta olmak üzere

$$d_E(P_1, X) = d_E(P_2, X) \Leftrightarrow d_{TH}(P_1, X) = d_{TH}(P_2, X)$$

dir.

Sonuç 4.1.2: P_1, P_2 ve X , $\mathbb{R}^2$ de üç farklı doğrudan nokta olmak üzere

$$\frac{d_E(P_1, X)}{d_E(P_2, X)} = \frac{d_{TH}(P_1, X)}{d_{TH}(P_2, X)}$$

dir.

Tanım 4.1.2: $\mathbb{R}_{TH}^2$ de merkezi $P_1 = (x_0, y_0)$ ve yarıçapı r birim olan çember

$$d_{TH}(P, P_1)$$

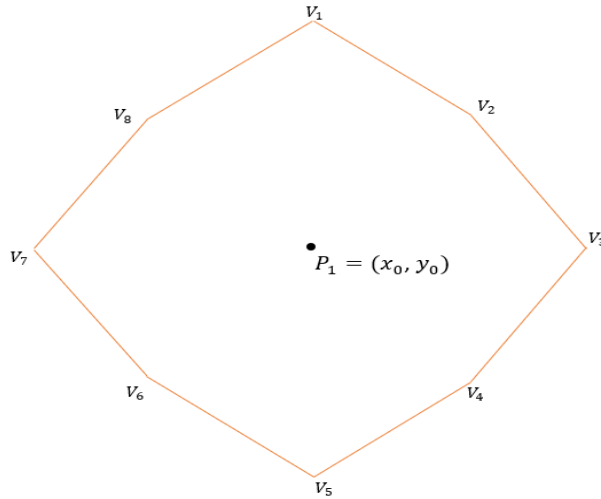
$$= \{P = (x, y) | (\sqrt{3} - 1)(|x - x_0| + |y - y_0|) + (2 - \sqrt{3}) \max\{|x - x_0|, |y - y_0|\} = r\}$$

kümesidir ve bu kümenin noktalarının geometrik yeri Şekil 4.1 de gösterildiği gibi

köşeleri $V_1, V_2, \dots, V_8$ olan bir sekizgendir. Bu sekizgenin köşe koordinatları ise, V_1 :

$$(x_0, y_0 + r), V_2: \left(\frac{\sqrt{3}}{3}r + x_0, \frac{\sqrt{3}}{3}r + y_0\right), V_3: (x_0 + r, y_0), V_4: \left(\frac{\sqrt{3}}{3}r + x_0, \frac{-\sqrt{3}}{3}r + y_0\right),$$

$$V_5: (x_0, y_0 - r), V_6: \left(\frac{-\sqrt{3}}{3}r + x_0, \frac{-\sqrt{3}}{3}r + y_0\right), V_7: (x_0 - r, y_0), V_8: \left(\frac{-\sqrt{3}}{3}r + x_0, \frac{\sqrt{3}}{3}r + y_0\right) \text{ biçimindedir.}$$



Şekil 4.1. $P_1 = (x_0, y_0)$ merkezli Tetrakis Hexahedron çemberi.

4.2 Pisagor Teoreminin Tetrakis Hexahedron Benzeri

Bu bölümde Pisagor teoreminin Tetrakis Hexahedron düzlemindeki benzerleri [22] kaynağına benzer yöntemlerden faydalanılarak verilmektedir. Kartezyen koordinat düzleminde iki nokta arasındaki Öklid ve Tetrakis Hexahedron uzunluklarını birbirine dönüştürmeye yarayan bir bağıntı veren ve bu bağıntının bir özelliğini belirten aşağıdaki iki önerme ile Önerme 4.1.2 konu içinde önemli bir role sahiptir.

Önerme 4.2.1: m sıfırdan farklı bir reel sayı ve $m' = \frac{-1}{m}$ ise,

$$\rho(m) = \rho(m') = \rho(-m) = \rho(-m') \quad (4.2)$$

dür.

İspat: $m \in \mathbb{R} - \{0\}$ ise, $m' = \frac{-1}{m} \in \mathbb{R} - \{0\}$ dir. $\rho(m)$ in tanımını kullanılarak

$$\begin{aligned} \rho\left(-\frac{1}{m}\right) &= \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{-1}{m}\right)^2}}{(\sqrt{3} - 1)\left(1 + \left|-\frac{1}{m}\right|\right) + (2 - \sqrt{3})\max\left\{1, \left|-\frac{1}{m}\right|\right\}} \\ &= \frac{\sqrt{1 + m^2}}{(\sqrt{3} - 1)(1 + |m|) + (2 - \sqrt{3})\max\{1, |m|\}} \\ &= \rho(m) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\rho(m) = \rho(-m)$ ve $\rho(m') = \rho(-m)$ oldukları da kolaylıkla elde edilir.

Bundan sonra aksi belirtilmedikçe ABC , kartezyen koordinat düzleminde köşeleri saat yönünün tersine harflendirilmiş, A açısı dik olan bir üçgeni gösterecek ve daha önce tanımlandığı gibi bu üçgenin kenarlarının Öklidyen uzunlukları $d_E(B, C) = a_E$, $d_E(A, C) = b_E$ ve $d_E(A, B) = c_E$, TH -uzunlukları $d_{TH}(B, C) = a_{TH}$, $d_{TH}(A, C) = b_{TH}$ ve $d_{TH}(A, B) = c_{TH}$ olarak alınacaktır.

Aşağıdaki önerme, bir dik üçgenin dik kenarlarının Öklid uzunlukları b_E ve c_E ile TH -uzunlukları b_{TH} ve c_{TH} nin genel olarak farklı olmasına rağmen oranlarının eşit olduğunu ifade eder.

Önerme 4.2.2: ABC , kartezyen koordinat düzleminde köşeleri saat yönünün tersine harflendirilmiş, A açısı dik olan bir üçgen olsun. $d_E(A, C) = b_E$, $d_E(A, B) = c_E$, $d_{TH}(A, C) = b_{TH}$ ve $d_{TH}(A, B) = c_{TH}$ ise,

$$\frac{b_E}{c_E} = \frac{b_{TH}}{c_{TH}} \quad (4.3)$$

dir.

İspat: ABC , kartezyen koordinat düzleminde köşeleri saat yönünün tersine harflendirilmiş, A açısı dik olan bir üçgen olsun. Eğer ABC üçgeninin AB ve AC kenarları koordinat eksenlerine paralel ise, $c_E = c_{TH}$ ve $b_E = b_{TH}$ olacağı açıktır. Böylece bu iki eşitliğin karşılıklı oranları birbirine eşittir. ABC üçgeninin dik kenarlarından biri koordinat eksenlerine paralel olmasın. Bu durumda diğer dik kenar

da bir koordinat eksenine paralel değildir. Ancak kenarlar birbirine dik olduğundan, eğer AB doğrusunun eğimi m ise, AC doğrusunun eğimi $m' = -\frac{1}{m}$ dir.

(4.1) ve (4.2) denklemleri kullanılarak;

$$\frac{d_E(A, C)}{d_E(A, B)} = \frac{p(m) \cdot d_{TH}(A, C)}{p(m) \cdot d_{TH}(A, B)}$$

böylece,

$$\frac{b_E}{c_E} = \frac{p(m) \cdot b_{TH}}{p(m) \cdot c_{TH}} = \frac{b_{TH}}{c_{TH}}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.1:

- i. Eğer ABC üçgeninin dik kenarları koordinat eksenlerine paralel ise,

$$a_{TH} = (\sqrt{3} - 1)(c_{TH} + b_{TH}) + (2 - \sqrt{3})\max\{c_{TH}, b_{TH}\} \quad (4.4)$$

- ii. Eğer ABC üçgeninin dik kenarları koordinat eksenlerine paralel değil, hipotenüsü de (yani BC kenarı) dikey bir doğru üzerinde değil ise, dik kenarlardan birinin eğimi m olmak üzere,

$$a_{TH} = \frac{(\sqrt{3}-1)(|c_{TH}m - b_{TH}| + |b_{TH}m + c_{TH}|) + (2-\sqrt{3})\max\{|b_{TH}m + c_{TH}|, |c_{TH}m - b_{TH}|\}}{(\sqrt{3}-1)(|m|+1) + (2-\sqrt{3})\max\{1, |m|\}} \quad (4.5)$$

dir.

İspat:

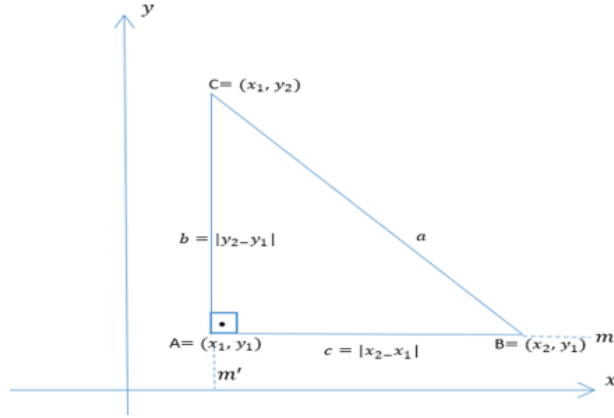
- i. ABC üçgeninin dik kenarları koordinat eksenlerine paralel olsun ve Şekil 4.2 de gösterildiği gibi A , B ve C nin koordinatları sırasıyla (x_1, y_1) , (x_2, y_1) ve (x_1, y_2) olsun. Bu durumda

$$d_{TH}(C, B) = (\sqrt{3} - 1)(|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|) + (2 - \sqrt{3})\max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}$$

dolayısıyla

$$a_{TH} = (\sqrt{3} - 1)(c_{TH} + b_{TH}) + (2 - \sqrt{3})\max\{c_{TH}, b_{TH}\}$$

olduğu açıktır.



Şekil 4.2. $\mathbb{R}_{TH}^2$ de dik kenarları koordinat eksenine paralel olan ABC üçgeni.

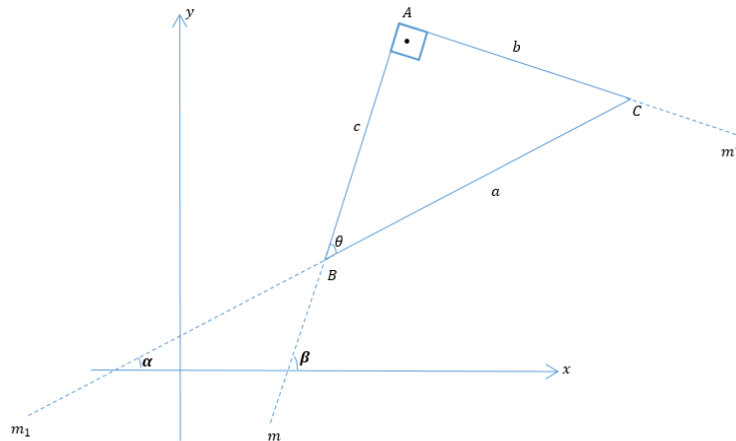
ii. Şekil 4.3 de gösterildiği gibi ABC üçgeninin dik kenarları koordinat eksenine paralel değil ve hipotenüsü de (yani BC kenarı) dikey bir doğru üzerinde değil ise, dik kenarlardan birinin eğimi m ve hipotenüsün eğimi m_1 olmak üzere, AC kenarının eğimi de $m' = -\frac{1}{m}$ ve $\tan \theta = \frac{m-m_1}{1+m \cdot m_1}$ dir. Denklem (4.3) kullanılarak, $\tan \theta = \frac{b_E}{c_E} = \frac{b_{TH}}{c_{TH}}$ elde edilir. Böylece

$$\frac{b_{TH}}{c_{TH}} = \frac{m-m_1}{1+m \cdot m_1} \quad (4.6)$$

ve

$$m_1 = \frac{c_{TH} \cdot m - b_{TH}}{b_{TH} \cdot m + c_{TH}} \quad (4.7)$$

elde edilir



Şekil 4.3. $\mathbb{R}_{TH}^2$ de dik kenarlarından herhangi biri koordinat eksenlerine paralel olmayan ve dikey bir doğru üzerinde bulunmayan bir hipotenüse sahip ABC üçgeni.

Denklem (4.1) göz önüne alınırsa;

$$d_E(A, B) = \rho(m) \cdot d_{TH}(A, B) \Rightarrow c_E = \rho(m) \cdot c_{TH}$$

$$d_E(A, C) = \rho(m') \cdot d_{TH}(A, C) \Rightarrow b_E = \rho(m) \cdot b_{TH}$$

$$d_E(B, C) = \rho(m_1) \cdot d_{TH}(B, C) \Rightarrow a_E = \rho(m_1) \cdot a_{TH}$$

elde edilir ve bu eşitlikler Öklidyen düzlemdeki Pisagor Teoreminde yani $a_E^2 = b_E^2 + c_E^2$ eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$[\rho(m_1)]^2 a_{TH}^2 = [\rho(m)]^2 (b_{TH}^2 + c_{TH}^2) \quad (4.8)$$

elde edilir. Daha açık olarak

$$\left(\frac{\sqrt{1+m_1^2}}{(\sqrt{3}-1)(|m_1|+1)+(2-\sqrt{3})\max\{1,|m_1|\}} \right)^2 \cdot a_{TH}^2 = \left(\frac{\sqrt{1+m^2}}{(\sqrt{3}-1)(|m|+1)+(2-\sqrt{3})\max\{1,|m|\}} \right)^2 \cdot (b_{TH}^2 + c_{TH}^2) \quad (4.9)$$

dir. (4.9) denklemde $m_1 = \frac{c_{TH} \cdot m - b_{TH}}{b_{TH} \cdot m + c_{TH}}$ olduğu kullanılarak,

$$a_{TH} = \frac{(\sqrt{3}-1)(|c_{TH}m - b_{TH}| + |b_{TH}m + c_{TH}|) + (2-\sqrt{3})\max\{|b_{TH}m + c_{TH}|, |c_{TH}m - b_{TH}|\}}{(\sqrt{3}-1)(|m|+1) + (2-\sqrt{3})\max\{1, |m|\}}$$

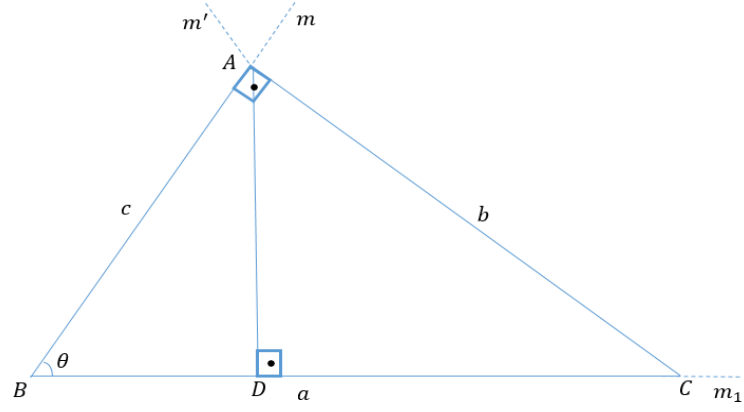
elde edilir.

Sonuç 4.2.1: BC kenarı, yani ABC üçgeninin hipotenüsü, koordinat eksenlerinden birine paralel ise,

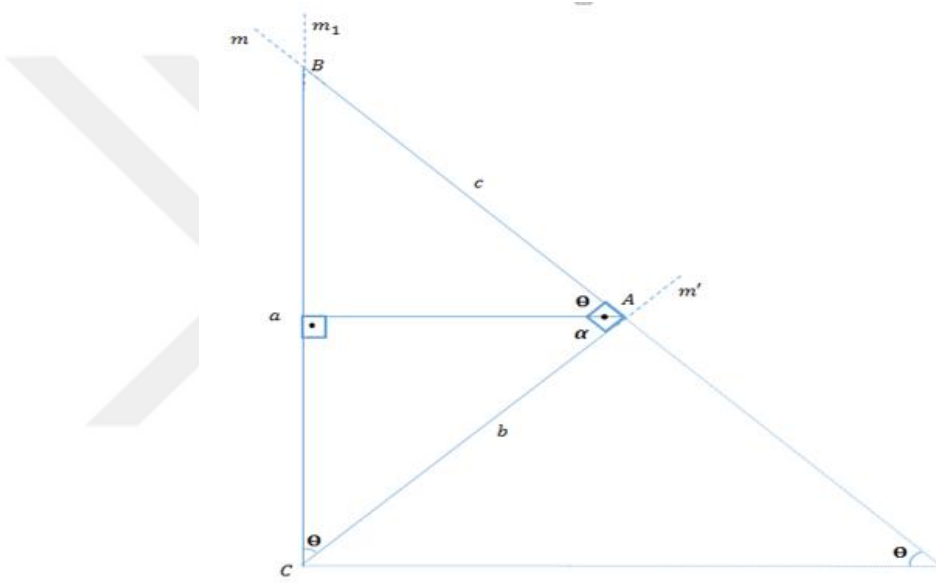
$$a_{TH} = \frac{b_{TH}^2 + c_{TH}^2}{(\sqrt{3}-1)(|b_{TH}| + |c_{TH}|) + (2-\sqrt{3})\max\{|b_{TH}|, |c_{TH}|\}} \quad (4.10)$$

dir.

İspat: ABC üçgeninin BC kenarı koordinat eksenlerinden birine paralel olsun, (Bkz: Şekil 4.4 ve Şekil 4.5). Eğer BC kenarı x-eksenine paralel ise $m_1 = 0$ olup $\rho(m_1) = 1$ dir. BC kenarı y-eksenine paralel ise $m_1 = \infty$ olup $\rho(m_1) \rightarrow 1$ dir. Her iki durum için de denklem (4.8), AB kenarının eğimi m olmak üzere, $a_{TH}^2 = [\rho(m)]^2 (b_{TH}^2 + c_{TH}^2)$ haline indirgenir.



Şekil 4.4. $\mathbb{R}_{TH}^2$ de hipotenüsü x-eksenine paralel olan ABC üçgeni.



Şekil 4.5. $\mathbb{R}_{TH}^2$ de hipotenüsü y-eksenine paralel olan ABC üçgeni.

Benzer üçgenler ve denklem (4.3) den, BC yatay iken, $|m| = \left| \frac{AD}{BD} \right| = \left| \frac{AC}{AB} \right| = \frac{b_{TH}}{c_{TH}}$ ve

BC dikey iken, $|m| = \frac{c_{TH}}{b_{TH}}$ elde edilir. Böylece BC yatay ise,

$$a_{TH}^2 = \left(\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{b_{TH}}{c_{TH}} \right)^2}}{(\sqrt{3} - 1) \left(\left| \frac{b_{TH}}{c_{TH}} \right| + 1 \right) + (2 - \sqrt{3}) \max \left\{ 1, \left| \frac{b_{TH}}{c_{TH}} \right| \right\}} \right)^2 (b_{TH}^2 + c_{TH}^2)$$

ve BC dikey ise,

$$a_{TH}^2 = \left(\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{c_{TH}}{b_{TH}}\right)^2}}{(\sqrt{3} - 1)\left(\left|\frac{c_{TH}}{b_{TH}}\right| + 1\right) + (2 - \sqrt{3})\max\left\{1, \left|\frac{c_{TH}}{b_{TH}}\right|\right\}} \right)^2 (b_{TH}^2 + c_{TH}^2)$$

elde edilir. Her iki denklem sonucunun denklem (4.10) a eşit olduğu açıktır.

Bir sonraki sonuç da Pisagor Teoreminin bir TH -benzeridir ve dik kenarlardan birinin eğimi yerine hipotenüsün eğimini parametre olarak içermektedir.

Sonuç 4.2.2: ABC üçgenin hiçbir kenarı koordinat eksenlerine paralel değil ise, BC kenarının, yani hipotenüsün eğimi m_1 olmak üzere,

$$a_{TH} = \frac{(\sqrt{3}-1)(|c_{TH}^2 m_1 - b_{TH}^2 m_1| + |b_{TH}^2 + c_{TH}^2|) + (2-\sqrt{3})\max\{|c_{TH}^2 m_1 - b_{TH}^2 m_1|, |b_{TH}^2 + c_{TH}^2|\}}{(\sqrt{3}-1)(|b_{TH} + c_{TH} m_1| + |c_{TH} - b_{TH} m_1|) + (2-\sqrt{3})\max\{|c_{TH} - b_{TH} m_1|, |b_{TH} + c_{TH} m_1|\}} \quad (4.11)$$

dir.

İspat: AB kenarının eğimi m ise denklem (4.6) dan

$$m = \frac{b_{TH} + c_{TH} m_1}{c_{TH} - b_{TH} m_1} \quad (4.12)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikteki m denklem (4.5) de yerine konulursa denklem (4.11) elde edilir.

Uyarı 4.2.1: AB kenarı x -eksenine paralel, yani $m = 0$ iken ya da AB kenarı dikey, yani $m \rightarrow \infty$ iken; denklem (4.5) denklem (4.4) deki eşitliğe indirgenir. Ayrıca (4.4) denklemini şu şekilde de elde edilir; $m_1 = \tan \alpha = \frac{c_{TH}}{b_{TH}}$ ve $\rho(m) \rightarrow 1$ dir. (4.8) ile verilen denklemini daha açık olarak

$$\frac{1 + m_1^2}{\left((\sqrt{3} - 1)(1 + |m_1|) + (2 - \sqrt{3})\max\{1, |m_1|\}\right)^2} \cdot a_{TH}^2 = b_{TH}^2 + c_{TH}^2$$

biçiminde yazılabilir. Bu denklemde $m_1 = \frac{c_{TH}}{b_{TH}}$ yerine konulduğunda, denklem (4.4) elde edilir. Benzer bir şekilde, BC kenarı x -eksenine paralel, yani $m_1 = 0$ iken ya da BC kenarı dikey, yani $m_1 \rightarrow \infty$ iken; denklem (4.11) denklem (4.10) daki eşitliğe indirgenir. Ayrıca (4.10) denklemini şu şekilde de elde edilebilir; $m = \tan \alpha = -\frac{c_{TH}}{b_{TH}}$ ve $\rho(m_1) \rightarrow 1$ dir. (4.8) ile verilen denklemini daha açık olarak $a_{TH}^2 =$

$$\frac{1 + m^2}{\left((\sqrt{3} - 1)(1 + |m|) + (2 - \sqrt{3})\max\{1, |m|\}\right)^2} (b_{TH}^2 + c_{TH}^2)$$

$m = -\frac{c_{TH}}{b_{TH}}$ yerine konulduğunda, denklem (4.10) elde edilir.

Uyarı 4.2.2: A açısı dik olan ABC üçgeni saat yönünde harflendirilirse b_{TH} ve c_{TH} nin rolleri değişir. Böylece denklem (4.5);

$$a_{TH} = \frac{(\sqrt{3}-1)(|b_{TH}m - c_{TH}| + |c_{TH}m + b_{TH}|) + (2-\sqrt{3})\max\{|c_{TH}m + b_{TH}|, |b_{TH}m - c_{TH}|\}}{(\sqrt{3}-1)(|m|+1) + (2-\sqrt{3})\max\{1, |m|\}} \quad (4.13)$$

şekline, benzer şekilde denklem (4.11),

$$a_{TH} = \frac{(\sqrt{3}-1)(|b_{TH}^2 m_1 - c_{TH}^2 m_1| + |c_{TH}^2 + b_{TH}^2|) + (2-\sqrt{3})\max\{|b_{TH}^2 m_1 - c_{TH}^2 m_1|, |c_{TH}^2 + b_{TH}^2|\}}{(\sqrt{3}-1)(|c_{TH} + b_{TH}m_1| + |b_{TH} - c_{TH}m_1|) + (2-\sqrt{3})\max\{|b_{TH} - c_{TH}m_1|, |c_{TH} + b_{TH}m_1|\}} \quad (4.14)$$

şekline gelir.

Sırada, Teorem 4.2.1 in karşıtının ve dolayısıyla Sonuç 4.2.2 nin karşıtının doğru olmadığını gösteren bir örnek verilmektedir. Diğer bir ifadeyle Öklidyen düzlemde bilinen Pisagor teoreminde bir ABC üçgeni dik ise $a_E^2 = b_E^2 + c_E^2$ bağıntısını sağlarken aynı zamanda $a_E^2 = b_E^2 + c_E^2$ bağıntısı sağlanıyorsa bu üçgen diktir, yani terside doğrudur. Fakat TH -düzleminde Pisagor bağıntısının $a_E^2 = b_E^2 + c_E^2$ ye karşı gelen denklem (4.5) ya da denklem (4.11) u sağlayan fakat hiçbir dik açiya sahip olmayan bir ABC üçgeninin varlığını gösteren bir örnek verilebilir. Şekil 4.6 da gösterildiği gibi, TH -çemberlerinden faydalanılarak denklem (4.5) veya (4.11) deki Pisagor bağıntısının TH -düzlemindeki karşılığını sağlayacak şekilde aynı kenar uzunluklarına sahip bir dik üçgen ile dik olmayan bir üçgen örneği verilmektedir. Bilindiği üzere, O merkezli r birim yarıçaplı TH -çemberi, O noktasına TH -uzaklığı r birim olan tüm noktaların kümesidir. Bu noktaların geometrik yeri bir sekizgendir. Ayrıca Öklidyen çemberlerde olduğu gibi O merkezli ve bu merkeze r birim TH -uzaklığındaki bir nokta bu çemberi tamamen belirler.

Örnek 4.2.1: Merkezi $O = (0,0)$, yarıçapı r birim ve köşeleri saat yönünde Şekil 4.6 dekine benzer biçimde $V_1, V_2, \dots, V_8$ olarak isimlendirilmiş olan TH -çemberi

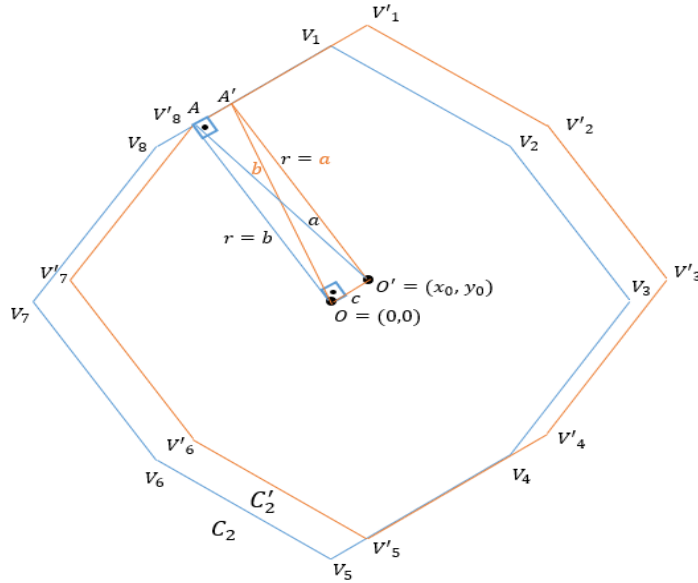
$$C_2 = \{(x, y) \mid (\sqrt{3}-1)(|x| + |y|) + (2-\sqrt{3})\max\{|x|, |y|\}\}$$

olsun. Böylece, bahsi geçen TH -çemberinin köşelerinin koordinatları sırasıyla $V_1 = (0, r)$, $V_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}r, \frac{\sqrt{3}}{3}r\right)$, $V_3 = (r, 0)$, $V_4 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}r, -\frac{\sqrt{3}}{3}r\right)$, $V_5 = (0, -r)$, $V_6 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}r, -\frac{\sqrt{3}}{3}r\right)$, $V_7 = (-r, 0)$, $V_8 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}r, \frac{\sqrt{3}}{3}r\right)$ dir. C_2 çemberinin V_1V_8 kenarına O dan inilen dikmenin ayağı $A = \left(\frac{(-1-3\sqrt{3})r}{13}, \frac{(5+2\sqrt{3})r}{13}\right)$ olsun. A noktasını $O' =$

$\left(\frac{(-3+4\sqrt{3})r}{39}, \frac{(15-7\sqrt{3})r}{39}\right)$ merkezinden geçen -1 eğimli doğru üzerinde bulunan V'_8 köşesi olarak kabul eden r birim yarıçaplı C'_2 çemberi şekilde gösterilen kırmızı çember olsun. Böylece O açısı dik olacak şekilde, köşeleri saat yönünün tersine harflendirilmiş AOO' üçgeni elde edilir. $d_{TH}(O, O') = c_{TH}$, $d_{TH}(O, A) = b_{TH}$ ve $d_{TH}(O', A) = a_{TH}$ olarak isimlendirilsin, (Bkz; Şekil 4.6). A' de C_2 ve C'_2 çemberlerinin kesişiminde bir nokta olsun. A' noktası hem C_2 TH -çemberi hem de C'_2 TH -çemberi üzerinde olduğu için $d_{TH}(O, A) = b_{TH}$ ve $d_{TH}(O', A) = a_{TH}$ olduğundan $d_{TH}(O, A') = b_{TH}$ ve $d_{TH}(O', A') = a_{TH}$ elde edilir. Bu durumda AOO' üçgenine Teorem 4.2.1 uygulanırsa OO' doğru parçasının eğimi m olmak üzere hiçbir dik açısı olmayan $A'O O'$ üçgeni içinde geçerli olan

$$a_{TH} = \frac{(\sqrt{3}-1)(|c_{TH}m - b_{TH}| + |b_{TH}m + c_{TH}|) + (2-\sqrt{3})\max\{|b_{TH}m + c_{TH}|, |c_{TH}m - b_{TH}|\}}{(\sqrt{3}-1)(|m|+1) + (2-\sqrt{3})\max\{1, |m|\}}$$

eşitliği elde edilir. Böylece R_{TH}^2 de Teorem 4.2.1 in karşıtının dolayısıyla Sonuç 4.2.2 nin karşıtının doğru olmadığı gösterilmiş olur.



Şekil 4.6. R_{TH}^2 de denklem (4.5) i sağlayan bir dik üçgen ile dik olmayan üçgen.

Aşağıdaki teorem TH -düzlemindeki bir üçgenin bir dik açısı sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşulu ifade eder. Yeter koşul aslında Pisagor Teoreminin karşıtının başka bir ifadesidir.

Teorem 4.2.2: ABC üçgeni TH -düzleminde kenar uzunlukları $d_{TH}(B, C) = a_{TH}$, $d_{TH}(A, C) = b_{TH}$ ve $d_{TH}(A, B) = c_{TH}$ olan bir üçgen olsun; m_1 , m ve m' de sırasıyla

BC , AB ve AC kenarlarının eğimlerini gösterebilirsin. Buna göre A açısının dik olması için gerek ve yeter koşul,

$$\rho(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{(\sqrt{3}-1)(1+|x|) + (2-\sqrt{3})\max\{1, |x|\}}$$

olmak üzere,

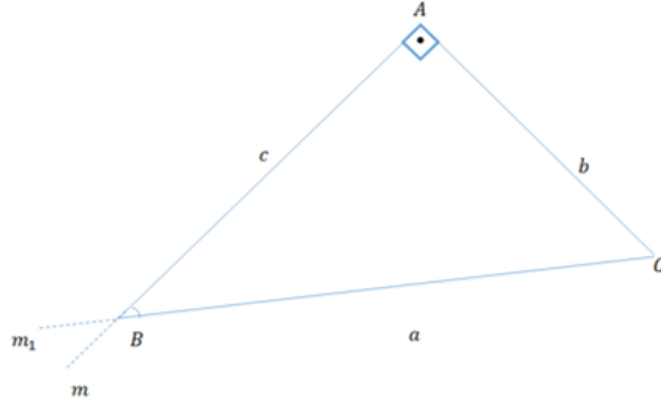
$$[\rho(m_1)]^2 a_{TH}^2 = [\rho(m)]^2 (b_{TH}^2 + c_{TH}^2) = [\rho(m')]^2 (b_{TH}^2 + c_{TH}^2) \quad (4.15)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat: (4.15) eşitliği geçerli ise $\rho(m) = \rho(m')$ ve $[\rho(m_1)]^2 \cdot a_{TH}^2 = [\rho(m)]^2 b_{TH}^2 + [\rho(m)]^2 c_{TH}^2 = [\rho(m')]^2 b_{TH}^2 + [\rho(m)]^2 c_{TH}^2$ dir. O halde

$$[\rho(m_1)]^2 a_{TH}^2 = [\rho(m')]^2 b_{TH}^2 + [\rho(m)]^2 c_{TH}^2 \quad (4.16)$$

yazılabilir. $d_E(A, B) = \rho(m) \cdot d_{TH}(A, B)$ eşitliğini (4.16) eşitliğine uygularsak;



Şekil 4.7. $\mathbb{R}_{TH}^2$ de A açısı dik olan ABC üçgeni.

$d_E^2(A, B) = \rho(m)^2 \cdot d_{TH}^2(A, B)$ yani $c_E^2 = \rho(m)^2 \cdot c_{TH}^2$, $d_E^2(B, C) = \rho(m_1)^2 \cdot d_{TH}^2(B, C)$ yani $a_E^2 = \rho(m_1)^2 \cdot a_{TH}^2$, $d_E^2(A, C) = \rho(m')^2 \cdot d_{TH}^2(A, C)$ yani $b_E^2 = \rho(m')^2 \cdot b_{TH}^2$ dir. Böylece $a_E^2 = b_E^2 + c_E^2$ elde edilir. Bu ise Öklidyen düzlemde Pisagor bağıntısına karşılık gelip, Öklidyen düzlemde Pisagor bağıntısının tersi de geçerli olduğundan A açısının dik olduğunu gösterir.

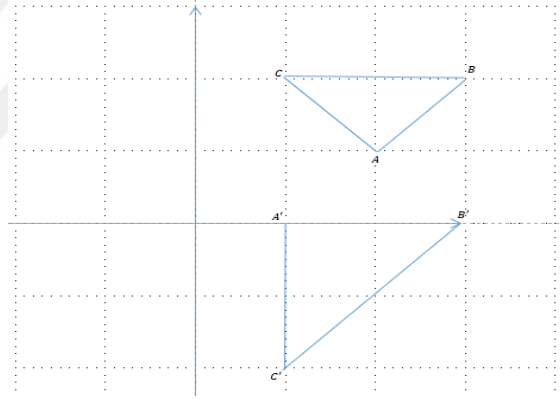
4.3 Thales Bağlılarının Tetrakis Hexahedron Benzeri

Bu bölümde Thales bağıntılarının Tetrakis Hexahedron düzlemindeki benzerleri [23] kaynağındaki benzer yöntemlerden faydalanılarak verilmektedir.

Teorem 4.3.1: (A.A.A.) benzerlik teoremi $\mathbb{R}_{TH}^2$ de geçerli değildir.

İspat: (A. A. A.) benzerliğinin $\mathbb{R}_{TH}^2$ de geçerli olmadığını göstermek için bu özelliği sağlamayan bir örnek verilmesi yeterlidir. Şekil 4.8 de gösterildiği gibi $A = (2,1), B = (1,2), C = (3,2), A' = (0,1), B' = (3,0)$ ve $C' = (1,-2)$ noktaları verilsin. Bu noktalarla oluşturulan ABC ve $A'B'C'$ üçgenlerini göz önüne alalım. Dikkat edilirse $m(A) = m(A'), m(B) = m(B')$ ve $m(C) = m(C')$ dir. Öklid düzleminde (A.A.A.) benzerliğinden $ABC \sim A'B'C'$ dür. Ancak TH -düzleminde $d_{TH}(A,B) = \sqrt{3}, d_{TH}(A'B') = 2, d_{TH}(B,C) = 2, d_{TH}(B'C') = 2\sqrt{3}, d_{TH}(A,C) = \sqrt{3}$ ve $d_{TH}(A'C') = 2$ olup $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ dir. Dolayısıyla ABC ile $A'B'C'$ benzer değildir.

Sonuç olarak TH -düzleminde (A.A.A.) ve diğer benzerlik bağlantıları sağlanmamaktadır.

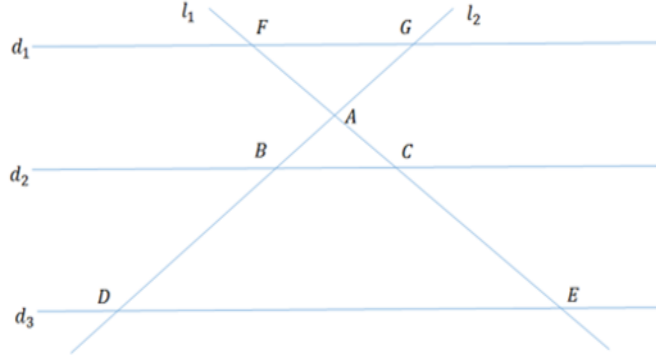


Şekil 4.8. TH-düzleminde (A.A.A.) benzerlik teoremini sağlamayan iki üçgen.

Teorem 4.3.2: Kesişen iki doğru, paralel üç doğru ile kesiştirildiğinde oluşan üçgenlerin karşılıklı kenar uzunlukları orantılıdır. Yani Şekil 4.9 de verilen d_1, d_2, d_3, ℓ_1 ve ℓ_2 doğruları için $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3, \ell_1 \nparallel \ell_2$ ve $\ell_i \nparallel d_j, i = 1,2, j=1,2,3$ ise

- i. $\frac{d_{TH}(A,B)}{d_{TH}(A,D)} = \frac{d_{TH}(A,C)}{d_{TH}(A,E)} = \frac{d_{TH}(B,C)}{d_{TH}(D,E)}$
- ii. $\frac{d_{TH}(A,B)}{d_{TH}(A,G)} = \frac{d_{TH}(A,C)}{d_{TH}(A,F)} = \frac{d_{TH}(B,C)}{d_{TH}(F,G)}$

dir.



Şekil 4.9. $\mathbb{R}_{TH}^2$ de üç paralel doğru tarafından kesilen paralel olmayan iki doğru.

İspat:

i. A, B, D noktaları ve A, C, E noktaları doğruduş olduğundan Sonuç 4.1.2 gereğince $\frac{d_E(A,B)}{d_E(A,D)} = \frac{d_{TH}(A,B)}{d_{TH}(A,D)}$ ve $\frac{d_E(A,C)}{d_E(A,E)} = \frac{d_{TH}(A,C)}{d_{TH}(A,E)}$, dolayısıyla $\frac{d_{TH}(A,B)}{d_{TH}(A,D)} = \frac{d_{TH}(A,C)}{d_{TH}(A,E)}$ dir.

d_1 doğrusunun eğimi m olsun. $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3$ olduğundan d_2 ve d_3 doğrularının eğilimleri de m dir. Önerme 4.1.2 gereğince $m \in \mathbb{R}$ için $d_E(B, C) =$

$$\frac{\sqrt{1+m^2}}{(\sqrt{3}-1)(1+|m|)+(2-\sqrt{3})\max\{1,|m|\}} \cdot d_{TH}(B, C) \quad \text{ve} \quad d_E(D, E) = \frac{\sqrt{1+m^2}}{(\sqrt{3}-1)(1+|m|)+(2-\sqrt{3})\max\{1,|m|\}} \cdot d_{TH}(D, E)$$

olup eşitlikler taraf tarafa oranlanırsa

$$\frac{d_E(B, C)}{d_E(D, E)} = \frac{\frac{\sqrt{1+m^2}}{(\sqrt{3}-1)(1+|m|)+(2-\sqrt{3})\max\{1,|m|\}} d_{TH}(B, C)}{\frac{\sqrt{1+m^2}}{(\sqrt{3}-1)(1+|m|)+(2-\sqrt{3})\max\{1,|m|\}} d_{TH}(D, E)} = \frac{d_{TH}(B, C)}{d_{TH}(D, E)}$$

Elde edilir. $m \rightarrow \infty$ için $d_E(B, C) = d_{TH}(B, C)$ ve $d_E(D, E) = d_{TH}(D, E)$ olduğundan $\frac{d_E(B, C)}{d_E(D, E)} = \frac{d_{TH}(B, C)}{d_{TH}(D, E)}$ dir. Sonuç olarak $\frac{d_{TH}(A,B)}{d_{TH}(A,D)} = \frac{d_{TH}(A,C)}{d_{TH}(A,E)} = \frac{d_{TH}(B,C)}{d_{TH}(D,E)}$ elde edilir.

ii. Benzer biçimde A, B, G noktaları ve A, C, F noktaları doğruduş olduğundan Sonuç 4.1.2 gereğince $\frac{d_E(A,B)}{d_E(A,G)} = \frac{d_{TH}(A,B)}{d_{TH}(A,G)}$ ve $\frac{d_E(A,C)}{d_E(A,F)} = \frac{d_{TH}(A,C)}{d_{TH}(A,F)}$, dolayısıyla $\frac{d_{TH}(A,B)}{d_{TH}(A,G)} = \frac{d_{TH}(A,C)}{d_{TH}(A,F)}$ dir.

Önerme 4.1.2 gereğince $m \in \mathbb{R}$ için $d_E(B, C) =$

$$\frac{\sqrt{1+m^2}}{(\sqrt{3}-1)(1+|m|)+(2-\sqrt{3})\max\{1,|m|\}} d_{TH}(B, C) \quad \text{ve} \quad d_E(F, G) = \frac{\sqrt{1+m^2}}{(\sqrt{3}-1)(1+|m|)+(2-\sqrt{3})\max\{1,|m|\}} d_{TH}(F, G)$$

$\frac{\sqrt{1+m^2}}{(\sqrt{3}-1)(1+|m|)+(2-\sqrt{3})\max\{1,|m|\}} d_{TH}(F, G)$ olup bu eşitlikler taraf tarafa
 oranlanırsa $\frac{d_E(B, C)}{d_E(F, G)} = \frac{d_{TH}(B, C)}{d_{TH}(F, G)}$ elde edilir. $m \rightarrow \infty$ için $d_E(B, C) =$
 $d_{TH}(B, C)$ ve $d_E(F, G) = d_{TH}(F, G)$ olduğundan, $\frac{d_E(B, C)}{d_E(F, G)} = \frac{d_{TH}(B, C)}{d_{TH}(F, G)}$ dir. Sonuç olarak
 $\frac{d_{TH}(A, B)}{d_{TH}(A, G)} = \frac{d_{TH}(A, C)}{d_{TH}(A, F)} = \frac{d_{TH}(B, C)}{d_{TH}(F, G)}$ elde edilir.

5. $\mathbb{R}_{T0}^2$ NUN TEMEL ÖZELLİKLERİ VE $\mathbb{R}_{T0}^2$ DA PİSAGOR TEOREMİ VE THALES BAĞINTILARI

5.1 $\mathbb{R}_{T0}^2$ nun Temel Özellikleri

Bu bölümde daha önceden [4] de 3 boyutlu analitik uzayda verilen Truncated Octahedron metriğinin izdüşüm kullanılarak elde edilen 2 boyutlu analitik düzlemdeki tanımı verilmekte ve bazı özelliklerine değinilmektedir.

Tanım 5.1.1: $\mathbb{R}^2$ de $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ noktaları verilsin.

$$d_{TO}(P_1, P_2) = \max \left\{ |x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, \frac{2}{3}(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) \right\}$$

biçiminde tanımlı $d_{TO}: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ uzaklık fonksiyonuna Truncated Octahedron fonksiyonu denir.

Teorem 5.1.1: d_{TO} uzaklık fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ de bir metriktir.

İspat: $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ verilsin. d_{TO} nun metrik olduğunu kanıtlamak için her $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^2$ için

(i) $d_{TO}(P_1, P_2) \geq 0$ ve $d_{TO}(P_1, P_2) = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$

(ii) $d_{TO}(P_1, P_2) = d_{TO}(P_2, P_1)$

(iii) $d_{TO}(P_1, P_3) \leq d_{TO}(P_1, P_2) + d_{TO}(P_2, P_3)$

aksiyomlarının sağlandığı gösterilmelidir.

(i) d_{TO} uzaklık fonksiyonu

$$d_{TO}(P_1, P_2) = \max \left\{ |x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, \frac{2}{3}(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) \right\}$$

biçiminde tanımlı olduğundan, mutlak değer her zaman negatif olmayan değerler üreteceğinden, mutlak değer maksimumu da negatif olmayan değerler alacağından $d_{TO}(P_1, P_2) \geq 0$ dır. Eğer $d_{TO}(P_1, P_2) = 0$ ise $|x_1 - x_2| = 0$, $|y_1 - y_2| = 0$ olup $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ ve dolayısıyla $P_1 = P_2$ elde edilir. Tersine $P_1 = P_2$ ise $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ olacağından $|x_1 - x_2| = 0$, $|y_1 - y_2| = 0$ olup $d_{TO}(P_1, P_2) = 0$ bulunur.

(ii) Mutlak değer tanımından, açıkça $d_{TO}(P_1, P_2) = d_{TO}(P_2, P_1)$ dir. Yani d_{TO} uzaklık fonksiyonu simetriktir.

(iii) $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ ve $P_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ olsun. $d_{TO}(P_1, P_3) \leq d_{TO}(P_1, P_2) + d_{TO}(P_2, P_3)$ eşitsizliğinin sağlandığı gösterilmelidir. P_1 , P_2 and P_3 noktaları için

$$d_{TO}(P_1, P_3) = \max \left\{ |x_1 - x_3|, |y_1 - y_3|, \frac{2}{3}(|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|) \right\}$$

$$d_{TO}(P_1, P_2) = \max \left\{ |x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, \frac{2}{3}(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) \right\}$$

$$d_{TO}(P_2, P_3) = \max \left\{ |x_2 - x_3|, |y_2 - y_3|, \frac{2}{3}(|x_2 - x_3| + |y_2 - y_3|) \right\}$$

bahsedilen eşitsizliği incelemek için 27 durum dikkate alınmalıdır ;

Durum 1: Eğer $d_{TO}(P_1, P_3) = |x_1 - x_3|$, $d_{TO}(P_1, P_2) = |x_1 - x_2|$ ve $d_{TO}(P_2, P_3) = |x_2 - x_3|$ ise

$$\begin{aligned} d_{TO}(P_1, P_3) &= |x_1 - x_3| = |x_1 - x_3 + x_2 - x_2| \\ &\leq |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| \\ &= d_{TO}(P_1, P_2) + d_{TO}(P_2, P_3) \end{aligned}$$

elde edilir.

Durum 2: Eğer $d_{TO}(P_1, P_3) = |x_1 - x_3|$, $d_{TO}(P_1, P_2) = |y_1 - y_2|$ ve $d_{TO}(P_2, P_3) = \frac{2}{3}(|x_2 - x_3| + |y_2 - y_3|)$ ise

$$\begin{aligned} d_{TO}(P_1, P_3) &= |x_1 - x_3| = |x_1 - x_3 + x_2 - x_2| \\ &\leq |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| \\ &\leq |y_1 - y_2| + \frac{2}{3}(|x_2 - x_3| + |y_2 - y_3|) \\ &= d_{TO}(P_1, P_2) + d_{TO}(P_2, P_3) \end{aligned}$$

elde edilir.

Eşitsizliğin geçerli olduğunun benzer hesaplamalarla kolaylıkla gösterilebildiği diğer durumlarda aşağıda belirtilmiştir;

Durum 3: Eğer $d_{TO}(P_1, P_3) = |x_1 - x_3|$, $d_{TO}(P_1, P_2) = |x_1 - x_2|$ ve $d_{TO}(P_2, P_3) = \frac{2}{3}(|x_2 - x_3| + |y_2 - y_3|)$ ise,

Durum 4: Eğer $d_{TO}(P_1, P_3) = |x_1 - x_3|$, $d_{TO}(P_1, P_2) = |x_1 - x_2|$ ve $d_{TO}(P_2, P_3) = |y_2 - y_3|$ ise,

Durum 5: Eğer $d_{TO}(P_1, P_3) = |x_1 - x_3|$, $d_{TO}(P_1, P_2) = |y_1 - y_2|$ ve $d_{TO}(P_2, P_3) = |x_2 - x_3|$ ise,

Durum 6: Eğer $d_{TO}(P_1, P_3) = |x_1 - x_3|$, $d_{TO}(P_1, P_2) = |y_1 - y_2|$ ve $d_{TO}(P_2, P_3) = |y_2 - y_3|$ ise,

Durum 7: Eğer $d_{TO}(P_1, P_3) = |x_1 - x_3|$, $d_{TO}(P_1, P_2) = \frac{2}{3}(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|)$ ve $d_{TO}(P_2, P_3) = |x_2 - x_3|$ ise,

Durum 8: Eğer $d_{TO}(P_1, P_3) = |x_1 - x_3|$, $d_{TO}(P_1, P_2) = \frac{2}{3}(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|)$ ve $d_{TO}(P_2, P_3) = |y_2 - y_3|$ ise,

Durum 9: Eğer $d_{TO}(P_1, P_3) = |x_1 - x_3|$, $d_{TO}(P_1, P_2) = \frac{2}{3}(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|)$ ve $d_{TO}(P_2, P_3) = \frac{2}{3}(|x_2 - x_3| + |y_2 - y_3|)$ ise,

Durum 10: Eğer $d_{TO}(P_1, P_3) = |y_1 - y_3|$, $d_{TO}(P_1, P_2) = |x_1 - x_2|$ ve $d_{TO}(P_2, P_3) = |x_2 - x_3|$ ise,

Durum 11: Eğer $d_{TO}(P_1, P_3) = |y_1 - y_3|$, $d_{TO}(P_1, P_2) = |x_1 - x_2|$ ve $d_{TO}(P_2, P_3) = |y_2 - y_3|$ ise,

Durum 12: Eğer $d_{TO}(P_1, P_3) = |y_1 - y_3|$, $d_{TO}(P_1, P_2) = |x_1 - x_2|$ ve $d_{TO}(P_2, P_3) = \frac{2}{3}(|x_2 - x_3| + |y_2 - y_3|)$ ise,

Durum 13: Eğer $d_{TO}(P_1, P_3) = |y_1 - y_3|$, $d_{TO}(P_1, P_2) = |y_1 - y_2|$ ve $d_{TO}(P_2, P_3) = |x_2 - x_3|$ ise,

Durum 14: Eğer $d_{TO}(P_1, P_3) = |y_1 - y_3|$, $d_{TO}(P_1, P_2) = |y_1 - y_2|$ ve $d_{TO}(P_2, P_3) = |y_2 - y_3|$ ise,

Durum 15: Eğer $d_{TO}(P_1, P_3) = |y_1 - y_3|$, $d_{TO}(P_1, P_2) = |y_1 - y_2|$ ve $d_{TO}(P_2, P_3) = \frac{2}{3}(|x_2 - x_3| + |y_2 - y_3|)$ ise,

Durum 16: Eğer $d_{TO}(P_1, P_3) = |y_1 - y_3|$, $d_{TO}(P_1, P_2) = \frac{2}{3}(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|)$ ve $d_{TO}(P_2, P_3) = |x_2 - x_3|$ ise,

Durum 17: Eğer $d_{TO}(P_1, P_3) = |y_1 - y_3|$, $d_{TO}(P_1, P_2) = \frac{2}{3}(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|)$ ve $d_{TO}(P_2, P_3) = |y_2 - y_3|$ ise,

Durum 18: Eğer $d_{TO}(P_1, P_3) = |y_1 - y_3|$, $d_{TO}(P_1, P_2) = \frac{2}{3}(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|)$ $d_{TO}(P_2, P_3) = \frac{2}{3}(|x_2 - x_3| + |y_2 - y_3|)$ ise,

Durum 19: Eğer $d_{TO}(P_1, P_3) = \frac{2}{3}(|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|)$, $d_{TO}(P_1, P_2) = |x_1 - x_2|$ ve $d_{TO}(P_2, P_3) = |x_2 - x_3|$ ise,

Durum 20: Eğer $d_{TO}(P_1, P_3) = \frac{2}{3}(|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|)$, $d_{TO}(P_1, P_2) = |x_1 - x_2|$ ve $d_{TO}(P_2, P_3) = |y_2 - y_3|$ ise,

Durum 21: Eğer $d_{TO}(P_1, P_3) = \frac{2}{3}(|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|)$, $d_{TO}(P_1, P_2) = |x_1 - x_2|$ ve $d_{TO}(P_2, P_3) = \frac{2}{3}(|x_2 - x_3| + |y_2 - y_3|)$ ise,

Durum 22: Eğer $d_{TO}(P_1, P_3) = \frac{2}{3}(|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|)$, $d_{TO}(P_1, P_2) = |y_1 - y_2|$ ve $d_{TO}(P_2, P_3) = |x_2 - x_3|$ ise,

Durum 23: Eğer $d_{TO}(P_1, P_3) = \frac{2}{3}(|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|)$, $d_{TO}(P_1, P_2) = |y_1 - y_2|$ ve $d_{TO}(P_2, P_3) = |y_2 - y_3|$ ise,

Durum 24: Eğer $d_{TO}(P_1, P_3) = \frac{2}{3}(|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|)$, $d_{TO}(P_1, P_2) = |y_1 - y_2|$ ve $d_{TO}(P_2, P_3) = \frac{2}{3}(|x_2 - x_3| + |y_2 - y_3|)$ ise,

Durum 25: Eğer $d_{TO}(P_1, P_3) = \frac{2}{3}(|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|)$, $d_{TO}(P_1, P_2) = \frac{2}{3}(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|)$ ve $d_{TO}(P_2, P_3) = |x_2 - x_3|$ ise,

Durum 26: Eğer $d_{TO}(P_1, P_3) = \frac{2}{3}(|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|)$, $d_{TO}(P_1, P_2) = \frac{2}{3}(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|)$ ve $d_{TO}(P_2, P_3) = |y_2 - y_3|$ ise,

Durum 27: Eğer $d_{TO}(P_1, P_3) = \frac{2}{3}(|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|)$, $d_{TO}(P_1, P_2) = \frac{2}{3}(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|)$ ve $d_{TO}(P_2, P_3) = \frac{2}{3}(|x_2 - x_3| + |y_2 - y_3|)$ ise,

böylece $d_{TO}(P_1, P_3) \leq d_{TO}(P_1, P_2) + d_{TO}(P_2, P_3)$ elde edilir.

Sonuç olarak 2 boyutlu analitik düzlemde d_{TO} uzaklık fonksiyonu bir metriktir ve bu metrikle döşenmiş düzlem $\mathbb{R}_{TO}^2$ olarak gösterilmektedir.

Önerme 5.1.1: Her Öklidyen öteleme TO -düzleminde uzaklığı konur. Böylece ötelemeler $\mathbb{R}_{TO}^2$ de bir izometridir.

İspat: $A = (a_1, a_2), X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere $T_A: \mathbb{R}_{TO}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{TO}^2$, $T_A(X) = A + X$ olacak şekilde $\mathbb{R}_{TO}^2$ da bir öteleme olsun. $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$\begin{aligned} d_{TO}(T_A(P_1), T_A(P_2)) &= \max \{ |x_1 + a_1 - x_2 - a_1|, |y_1 + a_2 - y_2 - a_2|, \\ &\quad \frac{2}{3}(|x_1 + a_1 - x_2 - a_1| + |y_1 + a_2 - y_2 - a_2|) \} \\ &= \max \{ |x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, \frac{2}{3}(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) \} \\ &= d_{TO}(P_1, P_2) \end{aligned}$$

dir.

Dolayısıyla $T_A: \mathbb{R}_{TO}^2$ da bir izometridir.

Önerme 5.1.2: $A, B \in \mathbb{R}_{TO}^2$ ve kartezyen koordinat düzleminde dikey bir doğru üzerinde bulunmayan iki nokta, m de bu iki noktadan geçen doğrunun eğimi ise,

$$\rho(m) = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{\max \{ 1, |m|, \frac{2}{3}(1 + |m|) \}}$$

olmak üzere

$$d_E(A, B) = \rho(m) \cdot d_{TO}(A, B) \quad (5.1)$$

dir. Ayrıca A ve B dikey bir doğru üzerinde bulunan iki nokta ise, $d_E(A, B) = d_{TO}(A, B)$ dir.

İspat: $A = (x_1, y_1)$ ve $B = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}_{TO}^2$ de iki nokta olsun. Eğer A ve B dikey doğru üzerinde değilse, $x_1 \neq x_2$ ise d_E ve d_{TO} nin tanımını kullanarak,

$$d_E(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = |x_2 - x_1| \sqrt{1 + m^2}$$

ve

$$\begin{aligned} d_{TO}(A, B) &= \max \left\{ |x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, \frac{2}{3}(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) \right\} \\ &= |x_1 - x_2| \max \left\{ 1, |m|, \frac{2}{3}(1 + |m|) \right\} \end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Her iki eşitliği karşılıklı olarak birbirine oranlarsak;

$$\frac{d_E(A, B)}{d_{TO}(A, B)} = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{\max\left\{1, |m|, \frac{2}{3}(1 + |m|)\right\}}$$

elde ederiz. Böylece,

$$\rho(m) = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{\max\left\{1, |m|, \frac{2}{3}(1 + |m|)\right\}}$$

olduğunda,

$$d_E(A, B) = \rho(m) \cdot d_{TO}(A, B)$$

dır. Eğer A ve B dikey doğru üzerinde ise, $x_1 = x_2$ dir. Bu durumda $d_E(A, B) = |y_2 - y_1|$ ve $d_{TO}(A, B) = |y_2 - y_1|$ olur. Böylece $d_E(A, B) = d_{TO}(A, B)$ eşitliği elde edilir.

Önerme 5.1.2 doğrudan noktalar için d_{TO} uzaklığının Öklid uzaklığının pozitif sabit bir katı olduğunu belirtir.

Sonuç 5.1.1: P_1, P_2 ve $X, \mathbb{R}^2$ de doğrudan üç nokta olmak üzere

$$d_E(P_1, X) = d_E(P_2, X) \Leftrightarrow d_{TO}(P_1, X) = d_{TO}(P_2, X)$$

dir.

Sonuç 5.1.2: P_1, P_2 ve $X, \mathbb{R}^2$ de üç farklı ve doğrudan nokta olmak üzere

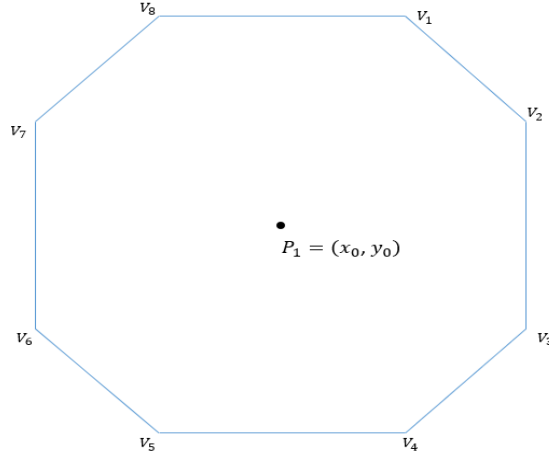
$$\frac{d_E(P_1, X)}{d_E(P_2, X)} = \frac{d_{TO}(P_1, X)}{d_{TO}(P_2, X)}$$

dir.

Tanım 5.1.2: $\mathbb{R}_{TO}^2$ da merkezi $P_1 = (x_0, y_0)$ ve yarıçapı r birim olan çember

$$d_{TO}(P, P_1) = \left\{ P = (x, y) \mid \max\left\{|x - x_0|, |y - y_0|, \frac{2}{3}(|x - x_0| + |y - y_0|)\right\} = r \right\}$$

kümesidir ve bu kümenin noktalarının geometrik yeri Şekil 5.1 de gösterildiği gibi köşeleri $V_1, V_2, \dots, V_8$ olan bir sekizgendir. Ayrıca $V_i, i = 1, 2, \dots, 8$ köşe noktalarının koordinatları; $V_1: \left(x_0 + \frac{r}{2}, y_0 + r\right), V_2: \left(x_0 + r, y_0 + \frac{r}{2}\right), V_3: \left(x_0 + r, y_0 - \frac{r}{2}\right), V_4: \left(x_0 + \frac{r}{2}, y_0 - r\right), V_5: \left(x_0 - \frac{r}{2}, y_0 - r\right), V_6: \left(x_0 - r, y_0 - \frac{r}{2}\right), V_7: \left(x_0 - r, y_0 + \frac{r}{2}\right), V_8: \left(x_0 - \frac{r}{2}, y_0 + r\right)$ biçimindedir.



Şekil 5.1. $P_1 = (x_0, y_0)$ merkezli Truncated Octahedron çemberi.

5.2 Pisagor Teoreminin Truncated Octahedron Benzeri

Bu bölümde Pisagor teoreminin Truncated Octahedron düzlemindeki benzerleri [22] kaynağına benzer yöntemlerden faydalanılarak verilmektedir. Kartezyen koordinat düzleminde iki nokta arasındaki Öklid ve Truncated Octahedron uzunluklarını birbirine dönüştürmeye yarayan bir bağıntı veren ve bu bağıntının bir özelliğini belirten aşağıdaki iki önerme ile Önerme 5.1.2 konu içinde önemli bir role sahiptir.

Önerme 5.2.1: m sıfırdan farklı bir reel sayı ve $m' = \frac{-1}{m}$ ise,

$$\rho(m) = \rho(m') = \rho(-m) = \rho(-m') \quad (5.2)$$

dir.

İspat: $m \in \mathbb{R} - \{0\}$ ise, $m' = \frac{-1}{m} \in \mathbb{R} - \{0\}$ dir. $\rho(m)$ in tanımını kullanarak

$$\begin{aligned} \rho\left(-\frac{1}{m}\right) &= \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{-1}{m}\right)^2}}{\max\left\{1, \left|\frac{-1}{m}\right|, \frac{2}{3}\left(1 + \left|\frac{-1}{m}\right|\right)\right\}} \\ &= \frac{\sqrt{1 + m^2}}{\max\left\{1, |m|, \frac{2}{3}(1 + |m|)\right\}} \\ &= \rho(m) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\rho(m) = \rho(-m)$ ve $\rho(m') = \rho(-m)$ oldukları da kolaylıkla elde edilir.

Bundan sonra aksi belirtilmedikçe ABC , kartezyen koordinat düzleminde köşeleri saat yönünün tersine harflendirilmiş, A açısı dik olan bir üçgeni gösterecek ve daha önce tanımlandığı gibi bu üçgenin kenarlarının Öklidyen uzunlukları $d_E(B, C) = a_E$, $d_E(A, C) = b_E$ ve $d_E(A, B) = c_E$, TO -uzunlukları $d_{TO}(B, C) = a_{TO}$, $d_{TO}(A, C) = b_{TO}$ ve $d_{TO}(A, B) = c_{TO}$ olarak alınacaktır.

Aşağıdaki önerme, bir dik üçgenin Öklid uzunlukları b_E ve c_E ile TO uzunlukları b_{TO} ve c_{TO} nin genel olarak farklı olmasına rağmen oranlarının eşit olduğunu ifade eder.

Önerme 5.2.2: ABC , kartezyen koordinat düzleminde köşeleri saat yönünün tersine harflendirilmiş, A açısı dik olan bir üçgen olsun. $d_E(A, C) = b_E$, $d_E(A, B) = c_E$, $d_{TO}(A, C) = b_{TO}$ ve $d_{TO}(A, B) = c_{TO}$ ise,

$$\frac{b_E}{c_E} = \frac{b_{TO}}{c_{TO}} \quad (5.3)$$

dir.

İspat: ABC , kartezyen koordinat düzleminde köşeleri saat yönünün tersine harflendirilmiş, A açısı dik olan bir üçgen olsun. Eğer ABC üçgeninin AB ve AC kenarları koordinat eksenlerine paralel ise, $c_E = c_{TO}$ ve $b_E = b_{TO}$ olacağı açıktır. Böylece bu iki eşitliğin karşılıklı oranları birbirine eşittir. ABC üçgeninin dik kenarlarından biri koordinat eksenlerine paralel olmasın. Bu durumda diğer dik kenar da bir koordinat eksenine paralel değildir. Ancak kenarlar birbirine dik olduğundan, eğer AB doğrusunun eğimi m ise, AC doğrusunun eğimi $m' = -\frac{1}{m}$ dir.

(5.1) ve (5.2) denklemleri kullanılarak;

$$\frac{d_E(A, C)}{d_E(A, B)} = \frac{\rho(m) \cdot d_{TO}(A, C)}{\rho(m) \cdot d_{TO}(A, B)}$$

böylece,

$$\frac{b_E}{c_E} = \frac{p(m) \cdot b_{TO}}{p(m) \cdot c_{TO}} = \frac{b_{TO}}{c_{TO}}$$

elde edilir.

Teorem 5.2.1:

- i. Eğer ABC üçgeninin dik kenarları koordinat eksenlerine paralel ise,

$$a_{TO} = \max \left\{ b_{TO}, c_{TO}, \frac{2}{3} (b_{TO} + c_{TO}) \right\} \quad (5.4)$$

ii. Eğer ABC üçgeninin dik kenarları koordinat eksenlerine paralel değil, hipotenüsü de (yani BC kenarı) dikey değil ise, dik kenarlardan birinin eğimi m olmak üzere,

$$a_{TO} = \frac{\max\{|b_{TO}m+c_{TO}|, |c_{TO}m-b_{TO}|, \frac{2}{3}(|b_{TO}m+c_{TO}|+|c_{TO}m-b_{TO}|)\}}{\max\{1, |m|, \frac{2}{3}(1+|m|)\}} \quad (5.5)$$

dir.

İspat:

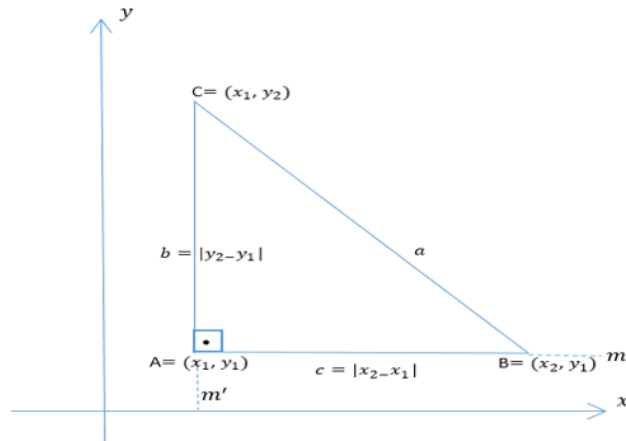
i. ABC üçgeninin dik kenarları koordinat eksenlerine paralel olsun ve Şekil 5.2 de gösterildiği gibi A , B ve C nin koordinatları sırasıyla (x_1, y_1) , (x_2, y_1) ve (x_1, y_2) olsun.

$$d_{TO}(A, B) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, \frac{2}{3}(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|)\}$$

dolayısıyla

$$a_{TO} = \max\{b_{TO}, c_{TO}, \frac{2}{3}(b_{TO} + c_{TO})\}$$

olduğu açıktır.



Şekil 5.2. $\mathbb{R}_{TO}^2$ da dik kenarları koordinat eksenine paralel olan ABC üçgeni.

ii. Şekil 5.3 de gösterildiği gibi ABC üçgeninin dik kenarları koordinat eksenine paralel değil ve hipotenüsü de (yani BC kenarı) dikey bir doğru üzerinde değil ise, dik kenarlardan birinin eğimi m ve hipotenüsün eğimi m_1 olmak üzere, AC kenarının

eğimi de $m' = -\frac{1}{m}$ ve $\tan \theta = \frac{m-m_1}{1+m \cdot m_1}$ dir. Denklem (3) kullanılarak, $\tan \theta = \frac{b_E}{c_E} =$

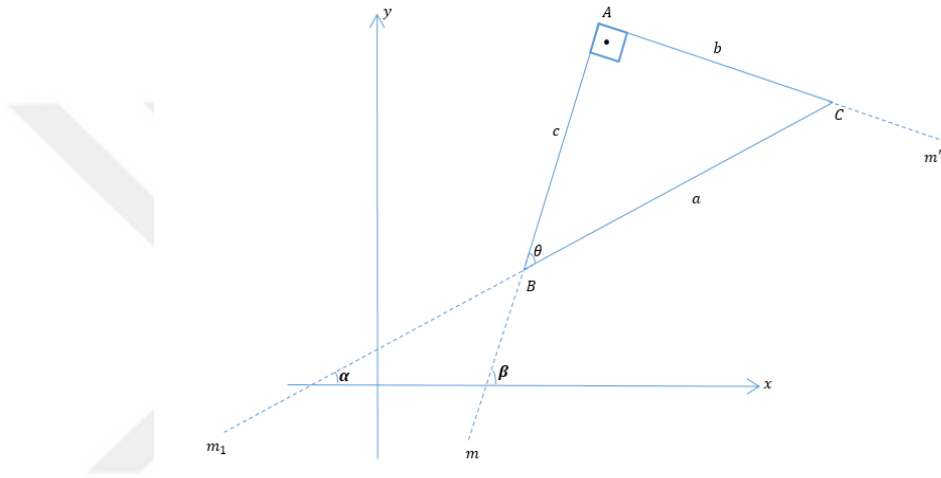
$\frac{b_{TO}}{c_{TO}}$ elde edilir. Böylece

$$\frac{b_{TO}}{c_{TO}} = \frac{m-m_1}{1+m \cdot m_1} \quad (5.6)$$

ve

$$m_1 = \frac{c_{TO} \cdot m - b_{TO}}{b_{TO} \cdot m + c_{TO}} \quad (5.7)$$

dir.



Şekil 5.3. $\mathbb{R}_{TO}^2$ de dik kenarlarından herhangi biri koordinat eksenlerine paralel olmayan ve dikey bir doğru üzerinde bulunmayan bir hipotenüse sahip ABC üçgeni.

Denklem (5.1) göz önüne alınırsa;

$$d_E(A, B) = \rho(m) \cdot d_{TO}(A, B) \Rightarrow c_E = \rho(m) \cdot c_{TO}$$

$$d_E(A, C) = \rho(m') \cdot d_{TO}(A, C) \Rightarrow b_E = \rho(m) \cdot b_{TO}$$

$$d_E(B, C) = \rho(m_1) \cdot d_{TO}(B, C) \Rightarrow a_E = \rho(m_1) \cdot a_{TO}$$

elde edilir ve bu eşitlikler Öklidyen düzlemdeki Pisagor Teoreminde yani $a_E^2 = b_E^2 + c_E^2$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$[\rho(m_1)]^2 a_{TO}^2 = [\rho(m)]^2 (b_{TO}^2 + c_{TO}^2) \quad (5.8)$$

elde edilir. Daha açık olarak

$$\left(\frac{\sqrt{1+m_1^2}}{\max\{1, |m_1|, \frac{2}{3}(1+|m_1|)\}} \right)^2 a_{TO}^2 = \left(\frac{\sqrt{1+m^2}}{\max\{1, |m|, \frac{2}{3}(1+|m|)\}} \right)^2 (b_{TO}^2 + c_{TO}^2) \quad (5.9)$$

dir. Böylece (5.9) denklemde $m_1 = \frac{c_{TO} \cdot m - b_{TO}}{b_{TO} \cdot m + c_{TO}}$ olduğu kullanılarak,

$$a_{TO} = \frac{\max\{|b_{TO}m + c_{TO}|, |c_{TO}m - b_{TO}|, \frac{2}{3}(|b_{TO}m + c_{TO}| + |c_{TO}m - b_{TO}|)\}}{\max\{1, |m|, \frac{2}{3}(1 + |m|)\}}$$

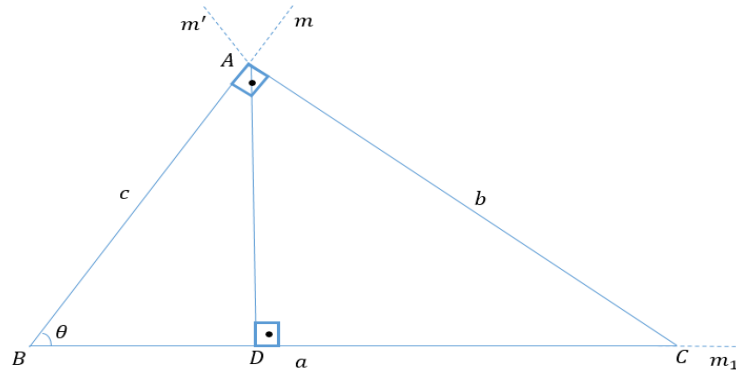
elde edilir.

Sonuç 5.2.1: BC kenarı, yani ABC üçgeninin hipotenüsü, koordinat eksenlerinden birine paralel ise,

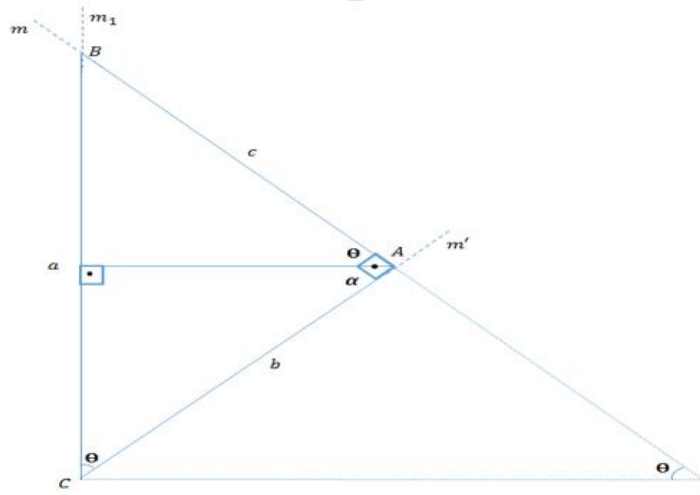
$$a_{TO} = \frac{b_{TO}^2 + c_{TO}^2}{\max\{b_{TO}, c_{TO}, \frac{2}{3}(b_{TO} + c_{TO})\}} \quad (5.10)$$

dir.

İspat: ABC üçgeninin BC kenarı koordinat eksenlerinden birine paralel olsun, (Bkz: Şekil 5.4 ve Şekil 5.5). Eğer BC kenarı x-eksenine paralel ise $m_1 = 0$ olup $p(m_1) = 1$ dir. BC kenarı y-eksenine paralel ise $m_1 = \infty$ olup $p(m_1) \rightarrow 1$ dir. Her iki durum için de denklem (5.8), AB kenarının eğimi m olmak üzere, $a_{TO}^2 = [p(m)]^2(b_{TO}^2 + c_{TO}^2)$ haline indirgenir.



Şekil 5.4. $\mathbb{R}_{TO}^2$ da hipotenüsü x-eksenine paralel olan ABC üçgeni.



Şekil 5.5. $\mathbb{R}_{TO}^2$ da hipotenüsü y-eksenine paralel olan ABC üçgeni.

Benzer üçgenler ve denklem (5.3) den, BC yatay iken, $|m| = \left| \frac{AD}{BD} \right| = \left| \frac{AC}{AB} \right| = \frac{b_{TO}}{c_{TO}}$ ve BC dikey iken, $|m| = \frac{c_{TO}}{b_{TO}}$ elde edilir. Böylece BC yatay ise,

$$a_{TO}^2 = \left(\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{b_{TO}}{c_{TO}} \right)^2}}{\max \left\{ 1, \left| \frac{b_{TO}}{c_{TO}} \right|, \frac{2}{3} \left(1 + \left| \frac{b_{TO}}{c_{TO}} \right| \right) \right\}} \right)^2 (b_{TO}^2 + c_{TO}^2)$$

ve BC dikey ise,

$$a_{TO}^2 = \left(\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{c_{TO}}{b_{TO}} \right)^2}}{\max \left\{ 1, \left| \frac{c_{TO}}{b_{TO}} \right|, \frac{2}{3} \left(1 + \left| \frac{c_{TO}}{b_{TO}} \right| \right) \right\}} \right)^2 (b_{TO}^2 + c_{TO}^2)$$

elde edilir. Her iki denklem sonucunun denklem (5.10) a eşit olduğu açıktır.

Bir sonraki sonuç da Pisagor Teoreminin bir TO -benzeridir ve dik kenarlardan birinin eğimi yerine hipotenüsün eğimini parametre olarak içermektedir.

Sonuç 5.2.2: Eğer ABC üçgenin hiçbir kenarı koordinat eksenlerine paralel değil ise, BC kenarının, yani hipotenüsün eğimi m_1 olmak üzere,

$$a_{TO} = \frac{\max \{ |b_{TO}^2 + c_{TO}^2|, |c_{TO}^2 m_1 + b_{TO}^2 m_1|, \frac{2}{3} (|b_{TO}^2 + c_{TO}^2| + |c_{TO}^2 m_1 + b_{TO}^2 m_1|) \}}{\max \{ |c_{TO} - b_{TO} m_1|, |b_{TO} + c_{TO} m_1|, \frac{2}{3} (|c_{TO} - b_{TO} m_1| + |b_{TO} + c_{TO} m_1|) \}} \quad (5.11)$$

dir.

İspat: AB kenarının eğimi m ise denklem (5.6) dan

$$m = \frac{b_{TO} + c_{TO}m_1}{c_{TO} - b_{TO}m_1} \quad (5.12)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikteki m denklem (5.5) de yerine konulursa denklem (5.11) elde edilir.

Uyarı 5.2.1: AB kenarı x-eksenine paralel, yani $m = 0$ iken ya da AB kenarı dikey, yani $m \rightarrow \infty$ iken; denklem (5.5) denklem (5.4) deki eşitliğe indirgenir. Ayrıca (5.4) denklemi şu şekilde de elde edilir; $m_1 = \tan \alpha = \frac{c_{TO}}{b_{TO}}$ ve $p(m) \rightarrow 1$ dir. (5.8) ile verilen

denklemi daha açık olarak $\frac{1+m_1^2}{\left(\max\left\{1, |m_1|, \frac{2}{3}(1+|m_1|)\right\}\right)^2} a_{TO}^2 = b_{TO}^2 + c_{TO}^2$ biçiminde yazılabilir. Bu denklemde $m_1 = \frac{c_{TO}}{b_{TO}}$ yerine konulduğunda, denklem (5.4) elde edilir.

Benzer bir şekilde, BC kenarı x-eksenine paralel, yani $m_1 = 0$ iken ya da BC kenarı dikey, yani $m_1 \rightarrow \infty$ iken; denklem (5.11) denklem (5.10) daki eşitliğe indirgenir. Ayrıca (5.10) denklemi şu şekilde de elde edilebilir; $m = \tan \alpha = -\frac{c_{TO}}{b_{TO}}$ ve $p(m_1) \rightarrow 1$ dir. (5.8) ile verilen denklemi daha açık olarak $a_{TO}^2 = \frac{1+m^2}{\left(\max\left\{1, |m|, \frac{2}{3}(1+|m|)\right\}\right)^2} (b_{TO}^2 + c_{TO}^2)$ Biçiminde yazılabilir. Bu denklemde $m = -\frac{c_{TO}}{b_{TO}}$ yerine konulduğunda, denklem (5.10) elde edilir.

Uyarı 5.2.2: A açısı dik olan ABC üçgeni saat yönünde harflendirilirse b_{TO} ve c_{TO} nin rolleri değişir. Böylece denklem (5.5);

$$a_{TO} = \frac{\max\left\{|c_{TO}m + b_{TO}|, |b_{TO}m - c_{TO}|, \frac{2}{3}(|c_{TO}m + b_{TO}| + |b_{TO}m - c_{TO}|)\right\}}{\max\left\{1, |m|, \frac{2}{3}(1 + |m|)\right\}} \quad (5.13)$$

şekline,

Benzer şekilde denklem (5.11),

$$a_{TO} = \frac{\max\left\{|c_{TO}^2 + b_{TO}^2|, |b_{TO}^2m_1 + c_{TO}^2m_1|, \frac{2}{3}(|c_{TO}^2 + b_{TO}^2| + |b_{TO}^2m_1 + c_{TO}^2m_1|)\right\}}{\max\left\{|b_{TO} - c_{TO}m_1|, |c_{TO} + b_{TO}m_1|, \frac{2}{3}(|b_{TO} - c_{TO}m_1| + |c_{TO} + b_{TO}m_1|)\right\}} \quad (5.14)$$

şekline gelir.

Sırada, Teorem 5.2.1 in karşıtının ve dolayısıyla Sonuç 5.2.2 nin karşıtının doğru olmadığını gösteren bir örnek verilmektedir. Diğer bir ifadeyle Öklidyen düzlemde bilinen Pisagor teoreminde bir ABC üçgeni dik ise $a_E^2 = b_E^2 + c_E^2$ bağıntısını sağlarken aynı zamanda $a_E^2 = b_E^2 + c_E^2$ bağıntısı sağlanıyorsa bu üçgen diktir, yani tersi de doğrudur. Fakat TO -düzleminde Pisagor bağıntısının sağlandığı $a_E^2 = b_E^2 + c_E^2$ ye karşı gelen denklem (5.5) ya da denklem (5.11) i sağlayan fakat hiçbir dik açıya sahip olmayan bir ABC üçgeninin varlığını gösteren bir örnek verilebilir. Şekil 5.6 da gösterildiğı gibi, TO -çemberlerinden faydalanılarak denklem (5.5) ya da (5.11) deki Pisagor bağıntısının TO -düzlemindeki karşılığını sağlayacak şekilde aynı kenar uzunluklarına sahip bir dik üçgen ile dik olmayan bir üçgen örneğı verilmektedir. Bilindiğı üzere, O merkezli r birim yarıçaplı TO -çemberi, O noktasına TO -uzaklığı r birim olan tüm noktaların kümesidir. Bu noktaların geometrik yeri bir sekizgendir. Ayrıca Öklidyen çemberlerde olduğı gibi O merkezli ve bu merkeze r birim TO -uzaklığındaki bir nokta bu çemberi tamamen belirler.

Örnek 5.2.1: AOO' , OO' kenarı x -eksenine paralel ve O açısı dik olan, köşeleri saat yönünün tersine harflendirilmiş bir üçgen ve $d_{TO}(O, O') = c_{TO}$, $d_{TO}(A, O') = b_{TO}$ ve $d_{TO}(A, O) = a_{TO}$ olsun, (Bkz; Şekil 5.6). C_3 , O merkezli a_{TO} yarıçaplı TO -çemberi ve O' merkezli b_{TO} yarıçaplı TO -çemberi ise C'_3 çemberi olsun. A' noktasıda bu iki çemberin kesişiminde bir nokta olsun. A' noktası hem C_3 TO -çemberi hem de C'_3 TO -çemberi üzerinde olduğı için $d_{TO}(A, O') = b_{TO}$ ve $d_{TO}(A, O) = a_{TO}$ olduğı gibi $d_{TO}(A', O') = b_{TO}$, $d_{TO}(O, A') = a_{TO}$ uzunluğundadır. Bu durumda AOO' üçgenine Teorem 5.2.1 uygulanırsa OO' doğru parçasının eğimi m olmak üzere hiçbir dik açısı olmayan $A'OO'$ üçgeni için de geçerli olan,

$$a_{TO} = \frac{\max\{|b_{TO}m + c_{TO}|, |c_{TO}m - b_{TO}|, \frac{2}{3}(|b_{TO}m + c_{TO}| + |c_{TO}m - b_{TO}|)\}}{\max\{1, |m|, \frac{2}{3}(1 + |m|)\}}$$

eşitliğı elde edilir. Böylece Teorem 5.2.1 in karşıtının, dolayısıyla Sonuç 5.2.2 nin karşıtının doğru olmadığı gösterilmiş olur.

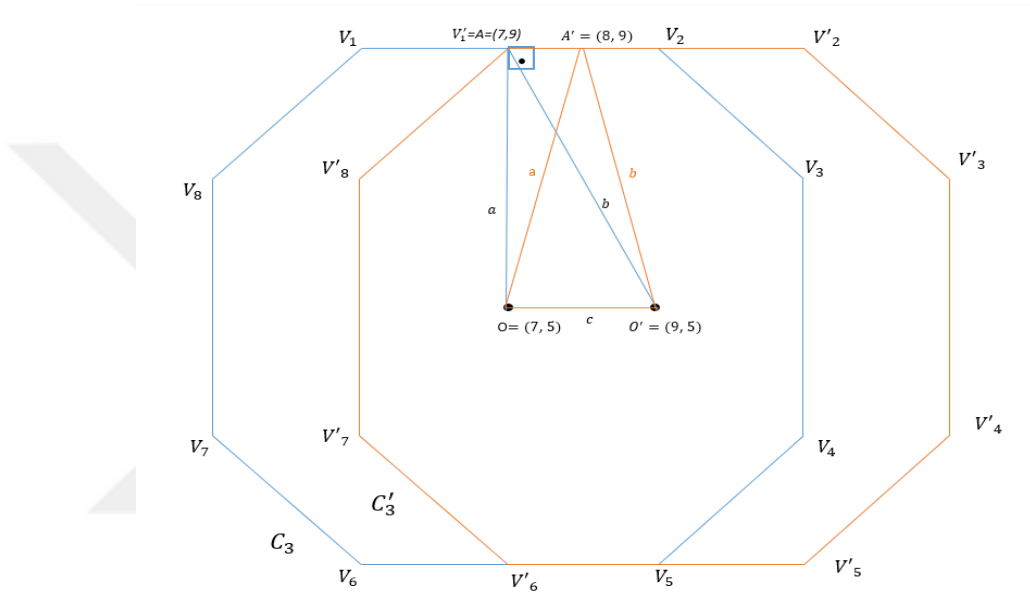
Şekil 5.6 da yukarıdaki tartışılan ifadelere sayısal bir örnek verilmektedir. C_3 , $O = (7,5)$ merkezli $a_{TO} = 4$ birim yarıçaplı çember ve $A = (7,9)$ noktasını $O' = (9,5)$ merkezinden geçen 2 birim eğimli doğru üzerinde bulunan V'_1 köşesi olarak kabul eden $b_{TO} = 4$ birim yarıçaplı C'_3 çemberi olsun. $A' = (8,9)$ bu iki çemberin kesişiminde bir

nokta olsun. AOO' dik üçgeninde $m = 0$ olduğundan $a_{TO} = \max\left\{c_{TO}, b_{TO}, \frac{2}{3}(b_{TO} + c_{TO})\right\}$ olup $a_{TO} = 4$ ve $c_{TO} = 2$ ise $b_{TO} = 4$ dür.

$A'OO'$ dik olmayan üçgeninde de $a_{TO} = 4$, $b_{TO} = 4$, $c_{TO} = 2$ ve $m = 0$ olduğundan

$$a_{TO} = \frac{\max\left\{|b_{TO}m + c_{TO}|, |c_{TO}m - b_{TO}|, \frac{2}{3}(|b_{TO}m + c_{TO}| + |c_{TO}m - b_{TO}|)\right\}}{\max\left\{1, |m|, \frac{2}{3}(1 + |m|)\right\}}$$

eşitliği sağlanır.



Şekil 5.6. $\mathbb{R}_{TO}^2$ da denklem (5.5) i sağlayan bir dik üçgen ile dik olmayan üçgen.

Aşağıdaki teorem TO -düzlemindeki bir üçgenin bir dik açıya sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşulu ifade eder. Yeter koşul aslında Pisagor Teoreminin karşınının başka bir ifadesidir.

Teorem 5.2.2: ABC üçgeni TO düzleminde kenar uzunlukları $d_{TO}(B, C) = a_{TO}$, $d_{TO}(A, C) = b_{TO}$ ve $d_{TO}(A, B) = c_{TO}$ olan bir üçgen olsun; m_1 , m ve m' de sırasıyla BC , AB ve AC kenarlarının eğimlerini göstere. Buna göre A açısının dik olması için gerek ve yeter koşul,

$$\rho(x) = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{\max\left\{1, |x|, \frac{2}{3}(1 + |x|)\right\}}$$

olmak üzere

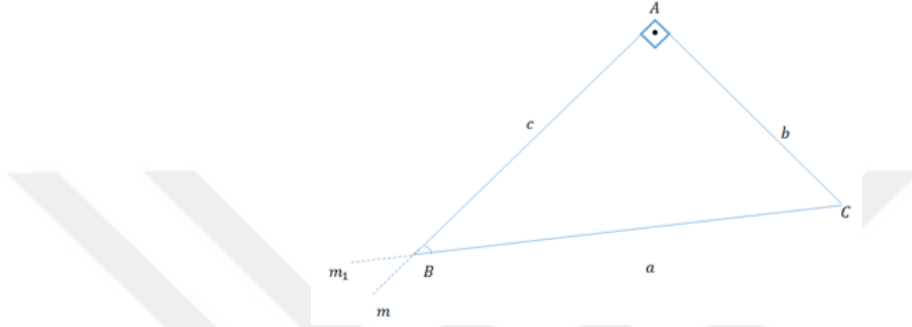
$$[\rho(m_1)]^2 a_{TO}^2 = [\rho(m)]^2 (b_{TO}^2 + c_{TO}^2) = [\rho(m')]^2 (b_{TO}^2 + c_{TO}^2) \quad (5.15)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat: (5.15) eşitliği geçerli ise $\rho(m) = \rho(m')$ ve $[\rho(m_1)]^2 a_{TO}^2 = [\rho(m)]^2 b_{TO}^2 + [\rho(m)]^2 c_{TO}^2 = [\rho(m')]^2 b_{TO}^2 + [\rho(m)]^2 c_{TO}^2$ dir. O halde

$$[\rho(m_1)]^2 a_{TO}^2 = [\rho(m')]^2 b_{TO}^2 + [\rho(m)]^2 c_{TO}^2 \quad (5.16)$$

yazılabilir. $d_E(A, B) = \rho(m) \cdot d_{TO}(A, B)$ eşitliğini (5.16) eşitliğine uygularsak;



Şekil 5.7. $\mathbb{R}_{TO}^2$ da A açısı dik olan ABC üçgeni.

$d_E^2(A, B) = \rho(m)^2 \cdot d_{TO}^2(A, B)$ yani $c_E^2 = \rho(m)^2 \cdot c_{TO}^2$, $d_E^2(B, C) = \rho(m_1)^2 \cdot d_{TO}^2(B, C)$ yani $a_E^2 = \rho(m_1)^2 \cdot a_{TO}^2$, $d_E^2(A, C) = \rho(m')^2 \cdot d_{TO}^2(A, C)$ yani $b_E^2 = \rho(m')^2 \cdot b_{TO}^2$ dir. Böylece $a_E^2 = b_E^2 + c_E^2$ elde edilir. Bu ise Öklidyen düzlemde Pisagor bağıntısına karşılık gelip, Öklidyen düzlemde Pisagor bağıntısının tersi de geçerli olduğundan A açısının dik olduğunu gösterir.

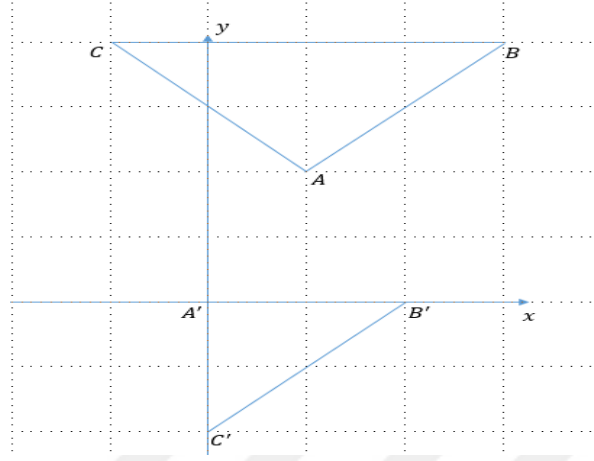
5.3 Thales Bağıntılarının Truncated Octahedron Benzeri

Bu bölümde Thales bağıntılarının Truncated Octahedron düzlemindeki benzerleri [23] kaynağındaki benzer yöntemlerden faydalanılarak verilmektedir.

Teorem 5.3.1: (A. A. A.) benzerlik teoremi $\mathbb{R}_{TO}^2$ da genel olarak geçerli değildir.

İspat: (A. A. A.) benzerliğinin $\mathbb{R}_{TO}^2$ da geçerli olmadığını göstermek için bu özelliği sağlamayan bir örnek verilmesi yeterlidir. Şekil 5.8 de gösterildiği gibi $A = (1,2)$, $B = (3,4)$, $C = (-1,4)$, $A' = (0,0)$, $B' = (2,0)$ ve $C' = (0,-2)$ noktaları verilsin. Bu noktalarla oluşturulan ABC ve $A'B'C'$ üçgenlerini göz önüne alalım. Dikkat edilirse $m(A) = m(A')$, $m(B) = m(B')$ ve $m(C) = m(C')$ dir. Öklid düzleminde iki üçgenin kenar uzunlukları da karşılıklı olarak orantılı olup $ABC \sim A'B'C'$ dir. Ancak TO -

düzleminde ise $d_{TO}(A,B) = \frac{8}{3}$, $d_{TO}(A'B') = 2$, $d_{TO}(B,C) = 4$, $d_{TO}(B'C') = \frac{8}{3}$, $d_{TO}(A,C) = \frac{8}{3}$ ve $d_{TO}(A'C') = 2$ olup $\frac{4}{3} = \frac{4}{3} \neq \frac{3}{2}$ dir, dolayısıyla ABC ile $A'B'C'$ benzer değildir.



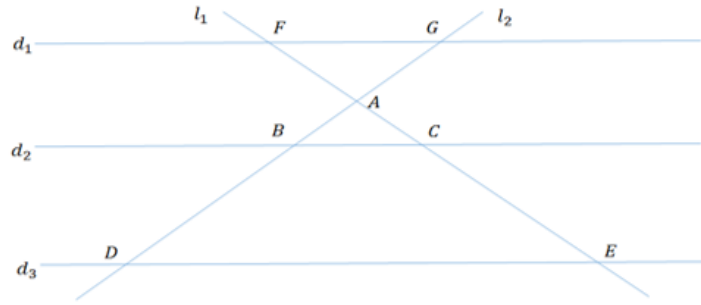
Şekil 5.8. TO-düzleminde (A.A.A.) benzerlik teoremini sağlamayan iki üçgen.

Sonuç olarak TO -düzleminde (A.A.A.) ve diğer benzerlik bağıntıları sağlanmamaktadır.

Teorem 5.3.2: Kesişen iki doğru, paralel üç doğru ile kesiştirildiğinde oluşan üçgenlerin karşılıklı kenar uzunlukları orantılıdır. Yani Şekil 5.9 da verilen d_1, d_2, d_3, ℓ_1 ve ℓ_2 doğruları için $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3, \ell_1 \nparallel \ell_2$ ve $\ell_i \nparallel d_j, i = 1, 2, j=1, 2, 3$ ise

- i. $\frac{d_{TO}(A,B)}{d_{TO}(A,D)} = \frac{d_{TO}(A,C)}{d_{TO}(A,E)} = \frac{d_{TO}(B,C)}{d_{TO}(D,E)}$
- ii. $\frac{d_{TO}(A,B)}{d_{TO}(A,G)} = \frac{d_{TO}(A,C)}{d_{TO}(A,F)} = \frac{d_{TO}(B,C)}{d_{TO}(F,G)}$

dir.



Şekil 5.9. $\mathbb{R}_{TO}^2$ da üç paralel doğru tarafından kesilen paralel olmayan iki doğru.

İspat:

i. A, B, D noktaları ve A, C, E noktaları doğrudan olduğundan Sonuç 5.1.2 gereğince $\frac{d_E(A, B)}{d_E(A, D)} = \frac{d_{TO}(A, B)}{d_{TO}(A, D)}$ ve $\frac{d_E(A, C)}{d_E(A, E)} = \frac{d_{TO}(A, C)}{d_{TO}(A, E)}$, dolayısıyla $\frac{d_{TO}(A, B)}{d_{TO}(A, D)} = \frac{d_{TO}(A, C)}{d_{TO}(A, E)}$ dir. d_1 doğrusunun eğimi m olsun. $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3$ olduğundan d_2 ve d_3 doğrularının eğimleri de m dir. Önerme 5.1.2 gereğince $m \in \mathbb{R}$ için $d_E(B, C) = \frac{\sqrt{1+m^2}}{\max\{1, |m|, \frac{2}{3}(1+|m|)\}} d_{TO}(B, C)$ ve $d_E(D, E) = \frac{\sqrt{1+m^2}}{\max\{1, |m|, \frac{2}{3}(1+|m|)\}} d_{TO}(D, E)$ olup bu eşitlikler taraf tarafa oranlanırsa

$$\frac{d_E(B, C)}{d_E(D, E)} = \frac{\frac{\sqrt{1+m^2}}{\max\{1, |m|, \frac{2}{3}(1+|m|)\}} d_{TO}(B, C)}{\frac{\sqrt{1+m^2}}{\max\{1, |m|, \frac{2}{3}(1+|m|)\}} d_{TO}(D, E)} = \frac{d_{TO}(B, C)}{d_{TO}(D, E)}$$

elde edilir. $m \rightarrow \infty$ için $d_E(B, C) = d_{TH}(B, C)$ ve $d_E(D, E) = d_{TH}(D, E)$ olduğundan

$$\frac{d_E(B, C)}{d_E(D, E)} = \frac{d_{TO}(B, C)}{d_{TO}(D, E)} \text{ dir. Sonuç olarak } \frac{d_{TO}(A, B)}{d_{TO}(A, D)} = \frac{d_{TO}(A, C)}{d_{TO}(A, E)} = \frac{d_{TO}(B, C)}{d_{TO}(D, E)} \text{ elde edilir.}$$

ii. Benzer biçimde A, B, G noktaları ve A, C, F noktaları doğrudan olduğundan Sonuç 5.1.2 gereğince $\frac{d_E(A, B)}{d_E(A, G)} = \frac{d_{TO}(A, B)}{d_{TO}(A, G)}$ ve $\frac{d_E(A, C)}{d_E(A, F)} = \frac{d_{TO}(A, C)}{d_{TO}(A, F)}$, dolayısıyla $\frac{d_{TO}(A, B)}{d_{TO}(A, G)} = \frac{d_{TO}(A, C)}{d_{TO}(A, F)}$ dir. Önerme 5.1.2 gereğince $m \in \mathbb{R}$ için $d_E(B, C) = \frac{\sqrt{1+m^2}}{\max\{1, |m|, \frac{2}{3}(1+|m|)\}} d_{TO}(B, C)$ ve $d_E(F, G) = \frac{\sqrt{1+m^2}}{\max\{1, |m|, \frac{2}{3}(1+|m|)\}} d_{TO}(F, G)$ olup bu eşitlikler taraf tarafa oranlanırsa

$$\frac{d_E(B, C)}{d_E(F, G)} = \frac{\frac{\sqrt{1+m^2}}{\max\{1, |m|, \frac{2}{3}(1+|m|)\}} d_{TO}(B, C)}{\frac{\sqrt{1+m^2}}{\max\{1, |m|, \frac{2}{3}(1+|m|)\}} d_{TO}(F, G)} = \frac{d_{TO}(B, C)}{d_{TO}(F, G)}$$

elde edilir. $m \rightarrow \infty$ için $d_E(B, C) = d_{TO}(B, C)$ ve $d_E(F, G) = d_{TO}(F, G)$ olduğundan,

$$\frac{d_E(B, C)}{d_E(F, G)} = \frac{d_{TO}(B, C)}{d_{TO}(F, G)} \text{ dir. Sonuç olarak } \frac{d_{TO}(A, B)}{d_{TO}(A, G)} = \frac{d_{TO}(A, C)}{d_{TO}(A, F)} = \frac{d_{TO}(B, C)}{d_{TO}(F, G)} \text{ elde edilir.}$$

6. $\mathbb{R}_{TrOc}^2$ NİN TEMEL ÖZELLİKLERİ VE $\mathbb{R}_{TrOc}^2$ DE PİSAGOR TEOREMİ VE THALES BAĞINTILARI

6.1 $\mathbb{R}_{TrOc}^2$ nin Temel Özellikleri

Bu bölümde daha önceden [21] de 3 boyutlu analitik uzayda verilen Triakis Octahedron metriğinin izdüşüm kullanılarak elde edilen 2 boyutlu analitik düzlemdeki tanımı verilmekte ve bazı özelliklerine değinilmektedir.

Tanım 6.1.1: $\mathbb{R}^2$ de $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ noktaları verilsin.

$$d_{TrOc}(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + (\sqrt{2} - 2) \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

biçiminde tanımlı $d_{TrOc}: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ uzaklık fonksiyonuna Triakis Octahedron uzaklık fonksiyonu denir.

Teorem 6.1.1: d_{TrOc} uzaklık fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ de bir metriktir.

İspat: $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ verilsin. d_{TrOc} nin metrik olduğunu kanıtlamak için her $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^2$ için

$$(i) \ d_{TrOc}(P_1, P_2) \geq 0 \text{ ve } d_{TrOc}(P_1, P_2) = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$$

$$(ii) \ d_{TrOc}(P_1, P_2) = d_{TrOc}(P_2, P_1)$$

$$(iii) \ d_{TrOc}(P_1, P_3) \leq d_{TrOc}(P_1, P_2) + d_{TrOc}(P_2, P_3)$$

aksiyomlarının sağlandığı gösterilmelidir.

(i) d_{TrOc} uzaklık fonksiyonu

$$d_{TrOc}(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + (\sqrt{2} - 2) \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

biçiminde tanımlı olduğundan ve mutlak değer her zaman negatif olmayan değerler üreteceğinden ve mutlak değer minimumu negatif olmayan değerler alacağından $d_{TrOc}(P_1, P_2) \geq 0$ dır. Eğer $d_{TrOc}(P_1, P_2) = 0$ ise $|x_1 - x_2| = 0, |y_1 - y_2| = 0$ olup $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ ve dolayısıyla $P_1 = P_2$ elde edilir. Tersine $P_1 = P_2$ ise $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ olacağından $|x_1 - x_2| = 0$, $|y_1 - y_2| = 0$ olup $d_{TrOc}(P_1, P_2) = 0$ elde edilir.

(ii) Mutlak değer tanımından, açıkça $d_{TrOc}(P_1, P_2) = d_{TrOc}(P_2, P_1)$ dir. Yani d_{TrOc} uzaklık fonksiyonu simetriktir.

(iii) $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ ve $P_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ olsun. $d_{Troc}(P_1, P_3) \leq d_{Troc}(P_1, P_2) + d_{Troc}(P_2, P_3)$ eşitsizliğinin sağlandığı gösterilmelidir. P_1 , P_2 and P_3 noktaları için

$$d_{Troc}(P_1, P_3) = |x_1 - x_3| + |y_1 - y_3| + (\sqrt{2} - 2) \min\{|x_1 - x_3|, |y_1 - y_3|\}$$

$$d_{Troc}(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + (\sqrt{2} - 2) \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

$$d_{Troc}(P_2, P_3) = |x_2 - x_3| + |y_2 - y_3| + (\sqrt{2} - 2) \min\{|x_2 - x_3|, |y_2 - y_3|\}$$

olup bahsedilen eşitsizliği incelemek için 8 durum dikkate alınmalıdır;

Durum 1: Eğer $|y_1 - y_3| \geq |x_1 - x_3|$, $|y_1 - y_2| \geq |x_1 - x_2|$ ve $|y_2 - y_3| \geq |x_2 - x_3|$ ise

$$\begin{aligned} d_{Troc}(P_1, P_3) &= (\sqrt{2} - 1) |x_1 - x_3| + |y_1 - y_3| \\ &= (\sqrt{2} - 1) |x_1 - x_2 + x_2 - x_3| + |y_1 - y_2 + y_2 - y_3| \\ &\leq [(\sqrt{2} - 1) |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|] + [(\sqrt{2} - 1) |x_2 - x_3| + |y_2 - y_3|] \\ &= d_{Troc}(P_1, P_2) + d_{Troc}(P_2, P_3) \end{aligned}$$

elde edilir.

Durum 2: Eğer $|y_1 - y_3| \geq |x_1 - x_3|$, $|y_1 - y_2| \geq |x_1 - x_2|$ ve $|x_2 - x_3| \geq |y_2 - y_3|$ ise,

$$\begin{aligned} d_{Troc}(P_1, P_3) &= (\sqrt{2} - 1) |x_1 - x_3| + |y_1 - y_3| \\ &= (\sqrt{2} - 1) |x_1 - x_2 + x_2 - x_3| + |y_1 - y_2 + y_2 - y_3| \\ &\leq [(\sqrt{2} - 1) |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|] + [(\sqrt{2} - 1) |x_2 - x_3| + |y_2 - y_3|] \\ &\leq [(\sqrt{2} - 1) |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|] + [(\sqrt{2} - 1) |y_2 - y_3| + |x_2 - x_3|] \\ &= d_{Troc}(P_1, P_2) + d_{Troc}(P_2, P_3) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada;

$$\begin{aligned} |x_2 - x_3| \geq |y_2 - y_3| &\Rightarrow (2 - \sqrt{2}) |x_2 - x_3| \geq (2 - \sqrt{2}) |y_2 - y_3| \\ &\Rightarrow (\sqrt{2} - 1) |y_2 - y_3| + |x_2 - x_3| \geq (\sqrt{2} - 1) |x_2 - x_3| + |y_2 - y_3| \end{aligned}$$

olduğu kullanılmıştır. Eşitsizliğin geçerli olduğunun benzer hesaplamalarla kolaylıkla gösterilebileceği diğer durumlarda aşağıda belirtilmiştir;

Durum 3: $|x_1 - x_3| \geq |y_1 - y_3|$, $|y_1 - y_2| \geq |x_1 - x_2|$ ve $|x_2 - x_3| \geq |y_2 - y_3|$ ise,

Durum 4: $|x_1 - x_3| \geq |y_1 - y_3|$, $|y_1 - y_2| \geq |x_1 - x_2|$ ve $|y_2 - y_3| \geq |x_2 - x_3|$ ise,

Durum 5: $|y_1 - y_3| \geq |x_1 - x_3|$, $|x_1 - x_2| \geq |y_1 - y_2|$ ve $|x_2 - x_3| \geq |y_2 - y_3|$ ise,

Durum 6: $|y_1 - y_3| \geq |x_1 - x_3|$, $|x_1 - x_2| \geq |y_1 - y_2|$ ve $|y_2 - y_3| \geq |x_2 - x_3|$ ise,

Durum 7: $|y_1 - y_3| \geq |x_1 - x_3|$, $|y_1 - y_2| \geq |x_1 - x_2|$ ve $|x_2 - x_3| \geq |y_2 - y_3|$ ise,

Durum 8: $|y_1 - y_3| \geq |x_1 - x_3|$, $|y_1 - y_2| \geq |x_1 - x_2|$ ve $|y_2 - y_3| \geq |x_2 - x_3|$ ise

Diğer durumlarda aynı yolla bulunur. Böylece

$d_{TrOc}(P_1, P_3) \leq d_{TrOc}(P_1, P_2) + d_{TrOc}(P_2, P_3)$ elde edilir.

Sonuç olarak 2 boyutlu analitik düzlemde d_{TrOc} uzaklık fonksiyonu bir metriktir ve bu metrikle döşenmiş düzlem $\mathbb{R}_{TrOc}^2$ olarak gösterilmektedir.

Önerme 6.1.1: Her Öklidyen öteleme TrOc-düzlemde uzaklığı korur. Böylece ötelemeler $\mathbb{R}_{TrOc}^2$ de bir izometridir.

İspat: $A = (a_1, a_2)$, $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere $T_A: \mathbb{R}_{TrOc}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{TrOc}^2$, $T_A(X) = A + X$ olacak şekilde $\mathbb{R}_{TrOc}^2$ de bir öteleme olsun. $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$\begin{aligned} d_{TrOc}(T_A(P_1), T_A(P_2)) &= |x_1 + a_1 - x_2 - a_1| + |y_1 + a_2 - y_2 - a_2| + (\sqrt{2} - 2) \\ &\quad \min\{|x_1 + a_1 - x_2 - a_1|, |y_1 + a_2 - y_2 - a_2|\} \\ &= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|(\sqrt{2} - 2) \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} \\ &= d_{TrOc}(P_1, P_2) \end{aligned}$$

dir.

Dolayısıyla T_A $\mathbb{R}_{TrOc}^2$ de bir izometridir.

Önerme 6.1.2: $A, B \in \mathbb{R}_{TrOc}^2$ ve kartezyen koordinat düzleminde dikey bir doğru üzerinde bulunmayan iki nokta, m de bu iki noktadan geçen doğrunun eğimi ise,

$$\rho(m) = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{1 + |m| + (\sqrt{2} - 2) \min\{1, |m|\}}$$

olmak üzere

$$d_E(A, B) = \rho(m) \cdot d_{TrOc}(A, B) \quad (6.1)$$

dir. Ayrıca A ve B dikey bir doğru üzerinde bulunan iki nokta ise, $d_E(A, B) = d_{TrOc}(A, B)$ dir.

İspat: $A = (x_1, y_1)$ ve $B = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}_{Troc}^2$ de iki nokta olsun. Eğer A ve B dikey doğru üzerinde değilse, $x_1 \neq x_2$ dir ve,

$$d_E(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = |x_2 - x_1| \sqrt{1 + m^2}$$

ve

$$\begin{aligned} d_{Troc}(A, B) &= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + (\sqrt{2} - 2) \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} \\ &= |x_1 - x_2| [1 + |m| + (\sqrt{2} - 2) \min\{1, |m|\}] \end{aligned}$$

Bişiminde yazılabilir. Her iki eşitliği karşılıklı olarak birbirine oranlarsak;

$$\frac{d_E(A, B)}{d_{Troc}(A, B)} = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{1 + |m| + (\sqrt{2} - 2) \min\{1, |m|\}}$$

elde edilir. Böylece,

$$\rho(m) = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{1 + |m| + (\sqrt{2} - 2) \min\{1, |m|\}}$$

olmak üzere

$$d_E(A, B) = \rho(m) \cdot d_{Troc}(A, B)$$

dir. Eğer A ve B dikey bir doğru üzerinde bulunan iki nokta ise, $x_1 = x_2$ dir. Bu durumda $d_E(A, B) = |y_2 - y_1|$ ve $d_{Troc}(A, B) = |y_2 - y_1|$ olur. Böylece $d_E(A, B) = d_{Troc}(A, B)$ eşitliği elde edilir.

Önerme 6.1.2 doğrudan noktalar için d_{Troc} uzaklığının Öklid uzaklığının pozitif sabit bir katı olduğunu belirtir.

Sonuç 6.1.1: P_1, P_2 ve $X, \mathbb{R}^2$ de doğrudan üç nokta olmak üzere

$$d_E(P_1, X) = d_E(P_2, X) \Leftrightarrow d_{Troc}(P_1, X) = d_{Troc}(P_2, X)$$

dir.

Sonuç 6.1.2: P_1, P_2 ve $X, \mathbb{R}^2$ de üç farklı doğrudan nokta olmak üzere

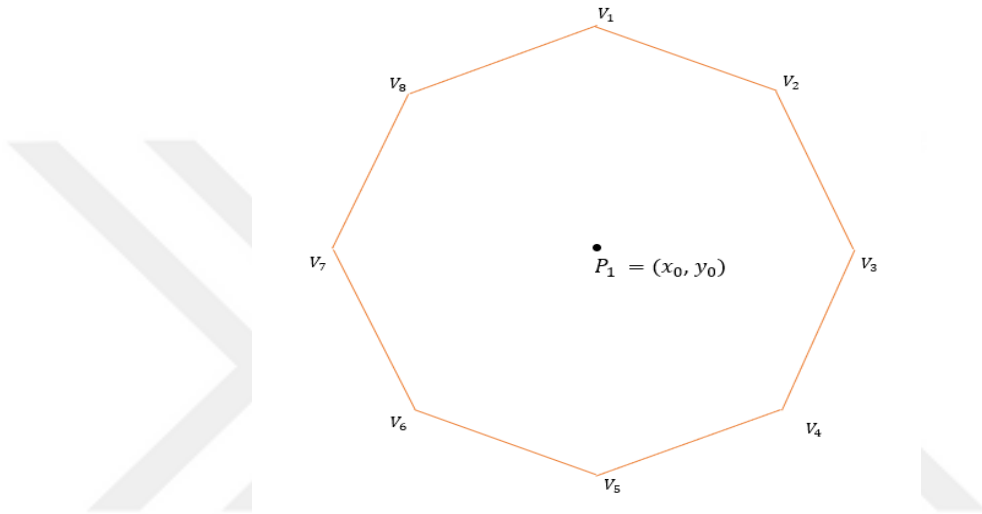
$$\frac{d_E(P_1, X)}{d_E(P_2, X)} = \frac{d_{Troc}(P_1, X)}{d_{Troc}(P_2, X)}$$

dir.

Tanım 6.1.2: $\mathbb{R}_{Troc}^2$ de merkezi $P_1 = (x_0, y_0)$ ve yarıçapı r birim olan çember

$$d_{Troc}(P, P_1) = \{P = (x, y) \mid |x - x_0| + |y - y_0| + (\sqrt{2} - 2)\min\{|x - x_0|, |y - y_0|\} = r\}$$

kümesidir. Bu kümenin noktalarının geometrik yeri köşeleri $V_1, V_2, \dots, V_8$ olan bir sekizgendir, (Bkz; Şekil 6.1). Bu sekizgenin köşe koordinatları ise, $V_1: (x_0, y_0 + r)$, $V_2: \left(\frac{\sqrt{2}}{2}r + x_0, \frac{\sqrt{2}}{2}r + y_0\right)$, $V_3: (x_0 + r, y_0)$, $V_4: \left(\frac{\sqrt{2}}{2}r + x_0, \frac{-\sqrt{2}}{2}r + y_0\right)$, $V_5: (x_0, y_0 - r)$, $V_6: \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}r + x_0, \frac{-\sqrt{2}}{2}r + y_0\right)$, $V_7: (x_0 - r, y_0)$, $V_8: \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}r + x_0, \frac{\sqrt{2}}{2}r + y_0\right)$ biçimindedir.



Şekil 6.1. $P_1 = (x_0, y_0)$ merkezli Triakis Octahedron çemberi.

6.2 Pisagor Teoreminin Triakis Octahedron Benzeri

Bu bölümde Pisagor teoreminin Triakis Octahedron düzlemindeki benzerleri [22] kaynağına benzer yöntemlerden faydalanılarak verilmektedir. Kartezyen koordinat düzleminde iki nokta arasındaki Öklid ve Triakis Octahedron uzaklıklarını birbirine dönüştürmeye yarayan bir bağıntı veren ve bu bağıntının bir özelliğini belirten aşağıdaki iki önerme ile Önerme 6.1.2 konu içinde önemli bir role sahiptir.

Önerme 6.2.1: m sıfırdan farklı bir reel sayı ve $m' = \frac{-1}{m}$ ise,

$$\rho(m) = \rho(m') = \rho(-m) = \rho(-m') \quad (6.2)$$

dür.

İspat: $m \in \mathbb{R} - \{0\}$ ise, $m' = \frac{-1}{m} \in \mathbb{R} - \{0\}$ dir. $\rho(m)$ in tanımını kullanarak

$$\begin{aligned}
\rho\left(-\frac{1}{m}\right) &= \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{-1}{m}\right)^2}}{1 + \left|\frac{-1}{m}\right| + (\sqrt{2} - 2)\min\left\{1, \left|\frac{-1}{m}\right|\right\}} \\
&= \frac{\sqrt{1 + m^2}}{1 + |m| + (\sqrt{2} - 2)\min\{1, |m|\}} \\
&= \rho(m)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\rho(m) = \rho(-m)$ ve $\rho(m') = \rho(-m)$ oldukları da kolaylıkla elde edilir.

Bundan sonra aksi belirtilmedikçe ABC , kartezyen koordinat düzleminde köşeleri saat yönünün tersine harflendirilmiş, A açısı dik olan bir üçgeni gösterecek ve daha önce tanımlandığı gibi bu üçgenin kenarlarının Öklidyen uzunlukları $d_E(B, C) = a_E$, $d_E(A, C) = b_E$ ve $d_E(A, B) = c_E$, $TrOc$ -uzunlukları $d_{TrOc}(B, C) = a_{TrOc}$, $d_{TrOc}(A, C) = b_{TrOc}$ ve $d_{TrOc}(A, B) = c_{TrOc}$ olarak alınacaktır.

Aşağıdaki önerme, bir dik üçgenin dik kenarlarının Öklid uzunlukları b_E ve c_E ile $TrOc$ -uzunlukları b_{TrOc} ve c_{TrOc} nin genel olarak farklı olmasına rağmen oranlarının eşit olduğunu ifade eder.

Önerme 6.2.2: ABC , kartezyen koordinat düzleminde köşeleri saat yönünün tersine harflendirilmiş, A açısı dik olan bir üçgen olsun. $d_E(A, C) = b_E$, $d_E(A, B) = c_E$, $d_{TrOc}(A, C) = b_{TrOc}$ ve $d_{TrOc}(A, B) = c_{TrOc}$ ise,

$$\frac{b_E}{c_E} = \frac{b_{TrOc}}{c_{TrOc}} \quad (6.3)$$

dir.

İspat: ABC , kartezyen koordinat düzleminde köşeleri saat yönünün tersine harflendirilmiş, A açısı dik olan bir üçgen olsun. Eğer ABC üçgeninin AB ve AC kenarları koordinat eksenlerine paralel ise, $c_E = c_{TrOc}$ ve $b_E = b_{TrOc}$ olacağı açıktır. Böylece bu iki eşitliğin karşılıklı oranları birbirine eşittir. ABC üçgeninin dik kenarlarından biri koordinat eksenlerine paralel olmasın. Bu durumda diğer dik kenar da bir koordinat eksenine paralel değildir. Ancak kenarlar birbirine dik olduğundan, eğer AB doğrusunun eğimi m ise, AC doğrusunun eğimi $m' = -\frac{1}{m}$ dir.

(6.1) ve (6.2) denklemleri kullanılarak;

$$\frac{d_E(A, C)}{d_E(A, B)} = \frac{\rho(m) \cdot d_{TrOc}(A, C)}{\rho(m) \cdot d_{TrOc}(A, B)}$$

böylece,

$$\frac{b_E}{c_E} = \frac{p(m) \cdot b_{TrOc}}{p(m) \cdot c_{TrOc}} = \frac{b_{TrOc}}{c_{TrOc}}$$

elde edilir.

Teorem 6.2.1:

- i. Eğer ABC üçgeninin dik kenarları koordinat eksenlerine paralel ise,

$$a_{TrOc} = b_{TrOc} + c_{TrOc} + (\sqrt{2} - 2) \min\{b_{TrOc}, c_{TrOc}\} \quad (6.4)$$

- ii. Eğer ABC üçgeninin dik kenarları koordinat eksenlerine paralel değil, hipotenüsü de (yani BC kenarı) dikey bir doğru üzerinde değil ise, dik kenarlardan birinin eğimi m olmak üzere,

$$a_{TrOc} = \frac{|b_{TrOc}m + c_{TrOc}| + |c_{TrOc}m - b_{TrOc}| + (\sqrt{2} - 2) \min\{|b_{TrOc}m + c_{TrOc}|, |c_{TrOc}m - b_{TrOc}|\}}{1 + |m| + (\sqrt{2} - 2) \min\{1, |m|\}} \quad (6.5)$$

dir.

İspat:

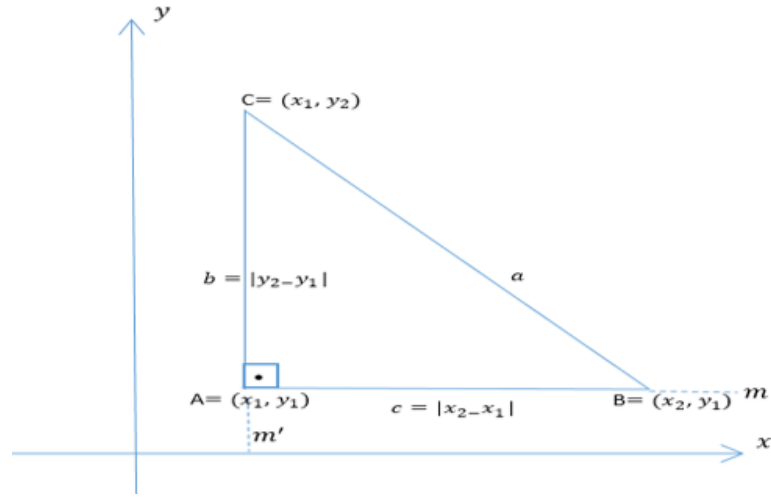
- i. ABC üçgeninin dik kenarları koordinat eksenlerine paralel olsun ve Şekil 6.2 de gösterildiği gibi A , B ve C nin koordinatları sırasıyla (x_1, y_1) , (x_2, y_1) ve (x_1, y_2) olsun. Bu durumda

$$d_{TrOc}(C, B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| + (\sqrt{2} - 2) \min\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}$$

ve dolayısıyla

$$a_{TrOc} = b_{TrOc} + c_{TrOc} + (\sqrt{2} - 2) \min\{b_{TrOc}, c_{TrOc}\}$$

olduğu açıktır.



Şekil 6.2. $\mathbb{R}_{TrOc}^2$ de dik kenarları koordinat eksenine paralel olan ABC üçgeni.

ii. Şekil 6.3 de gösterildiği gibi ABC üçgeninin dik kenarları koordinat eksenlerine paralel değil ve hipotenüsü de (yani BC kenarı) dikey bir doğru üzerinde değil ise, dik kenarlardan birinin eğimi m ve hipotenüsün eğimi m_1 olmak üzere, AC kenarının eğimi de $m' = -\frac{1}{m}$ ve $\tan \theta = \frac{m-m_1}{1+m \cdot m_1}$ dir. Denklem (6.3) kullanılarak,

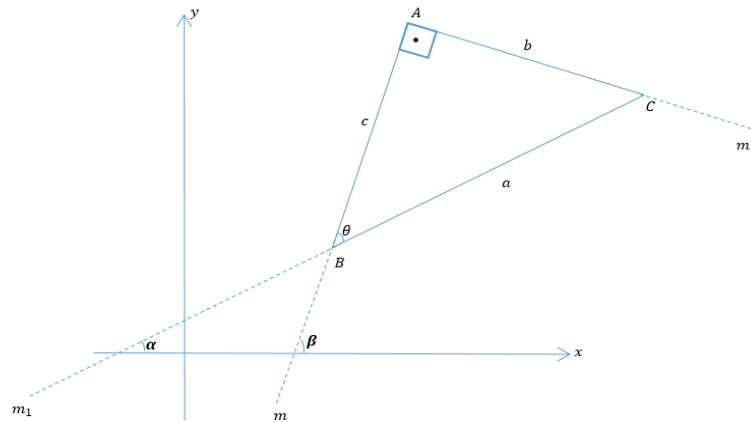
$\tan \theta = \frac{b_E}{c_E} = \frac{b_{TrOc}}{c_{TrOc}}$ elde edilir. Böylece

$$\frac{b_{TrOc}}{c_{TrOc}} = \frac{m-m_1}{1+m \cdot m_1} \quad (6.6)$$

ve

$$m_1 = \frac{c_{TrOc}m - b_{TrOc}}{b_{TrOc}m + c_{TrOc}} \quad (6.7)$$

elde edilir.



Şekil 6.3. $\mathbb{R}_{TrOc}^2$ de dik kenarlarından herhangi biri koordinat eksenlerine paralel olmayan ve dikey bir doğru üzerinde bulunmayan bir hipotenüse sahip ABC üçgeni.

Denklem (6.1) göz önüne alınırsa;

$$d_E(A, B) = \rho(m) \cdot d_{TroC}(A, B) \Rightarrow c_E = \rho(m) \cdot c_{TroC},$$

$$d_E(A, C) = \rho(m') \cdot d_{TroC}(A, C) \Rightarrow b_E = \rho(m) \cdot b_{TroC},$$

$$d_E(B, C) = \rho(m_1) \cdot d_{TroC}(B, C) \Rightarrow a_E = \rho(m_1) \cdot a_{TroC}$$

elde edilir ve bu eşitsizlikler Öklidyen düzlemdeki Pisagor teoreminde yani $a_E^2 = b_E^2 + c_E^2$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$[\rho(m_1)]^2 a_{TroC}^2 = [\rho(m)]^2 (b_{TroC}^2 + c_{TroC}^2) \quad (6.8)$$

elde edilir. Daha açık olarak

$$\left(\frac{\sqrt{1+m_1^2}}{1+|m_1|+(\sqrt{2}-2)\min\{1,|m_1|\}} \right)^2 a_{TroC}^2 = \left(\frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|+(\sqrt{2}-2)\min\{1,|m|\}} \right)^2 \cdot (b_{TroC}^2 + c_{TroC}^2) \quad (6.9)$$

dir. (6.9) denklemde $m_1 = \frac{c_{TroC}m - b_{TroC}}{b_{TroC}m + c_{TroC}}$ olduğu kullanılarak,

$$a_{TroC} = \frac{|b_{TroC}m + c_{TroC}| + |c_{TroC}m - b_{TroC}| + (\sqrt{2}-2) \min\{|b_{TroC}m + c_{TroC}|, |c_{TroC}m - b_{TroC}|\}}{(1+|m|+(\sqrt{2}-2)\min\{1,|m|\})}$$

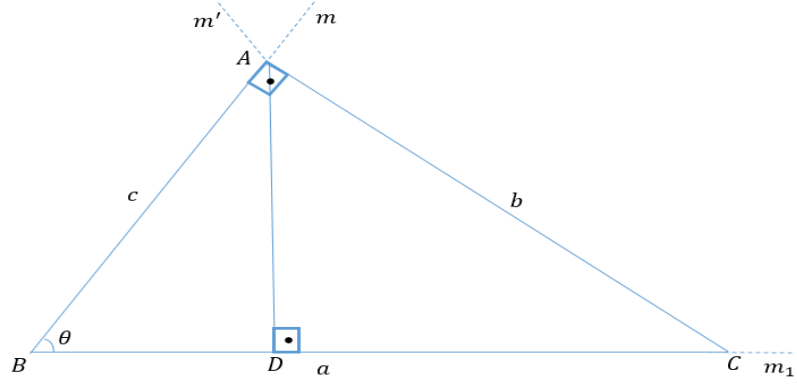
elde edilir.

Sonuç 6.2.1: BC kenarı, yani ABC üçgeninin hipotenüsü, koordinat eksenlerinden birine paralel ise,

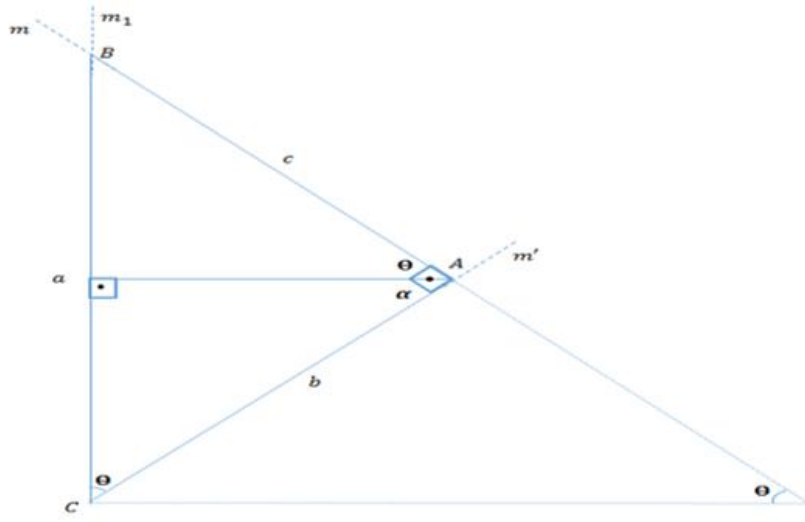
$$a_{TroC} = \frac{b_{TroC}^2 + c_{TroC}^2}{|c_{TroC}| + |b_{TroC}| + (\sqrt{2}-2)\min\{|c_{TroC}|, |b_{TroC}|\}} \quad (6.10)$$

dir.

İspat: ABC üçgeninin BC kenarı koordinat eksenlerinden birine paralel olsun, (Bkz; Şekil 6.4 ve Şekil 6.5). Eğer BC kenarı x -eksenine paralel ise $m_1 = 0$ olup $\rho(m_1) = 1$ dir. BC kenarı y -eksenine paralel ise $m_1 = \infty$ olup $\rho(m_1) \rightarrow 1$ dir. Her iki durum için de denklem (6.8) eşitliği, AB kenarının eğimi m olmak üzere, $a_{TroC}^2 = [\rho(m)]^2 (b_{TroC}^2 + c_{TroC}^2)$ haline indirgenir.



Şekil 6.4. $\mathbb{R}^2_{TrOc}$ de hipotenüsü x-eksenine paralel olan ABC üçgeni.



Şekil 6.5. $\mathbb{R}^2_{TrOc}$ de hipotenüsü y-eksenine paralel olan ABC üçgeni.

Benzer üçgenler ve denklem (6.3) den, BC yatay iken, $|m| = \left| \frac{AD}{BD} \right| = \left| \frac{AC}{AB} \right| = \frac{b_{TrOc}}{c_{TrOc}}$ ve

BC dikey iken, $|m| = \frac{c_{TrOc}}{b_{TrOc}}$ elde edilir. Böylece BC yatay ise,

$$a_{TrOc}^2 = \left(\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{b_{TrOc}}{c_{TrOc}} \right)^2}}{1 + \frac{b_{TrOc}}{c_{TrOc}} + (\sqrt{2} - 2) \min\{1, \frac{b_{TrOc}}{c_{TrOc}}\}} \right)^2 (b_{TrOc}^2 + c_{TrOc}^2)$$

ve BC dikey ise,

$$a_{TrOc}^2 = \left(\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{c_{TrOc}}{b_{TrOc}}\right)^2}}{1 + \frac{c_{TrOc}}{b_{TrOc}} + (\sqrt{2} - 2)\min\{1, \frac{c_{TrOc}}{b_{TrOc}}\}} \right)^2 (b_{TrOc}^2 + c_{TrOc}^2)$$

elde edilir. Her iki denklem sonucunun denklem (6.10) a eşit olduğu açıktır.

Bir sonraki sonuç da Pisagor Teoreminin bir $TrOc$ -benzeridir ve dik kenarlardan birinin eğimi yerine hipotenüsün eğimini parametre olarak içermektedir.

Sonuç 6.2.2: ABC üçgenin hiçbir kenarı koordinat eksenlerine paralel değil ise, BC kenarının, yani hipotenüsün eğimi m_1 olmak üzere,

$$a_{TrOc} = \frac{1 + |m_1| + (\sqrt{2} - 2)\min\{1, |m_1|\}}{|b_{TrOc}m_1 - c_{TrOc}| + |c_{TrOc}m_1 + b_{TrOc}| + (\sqrt{2} - 2)\min\{|b_{TrOc}m_1 - c_{TrOc}|, |c_{TrOc}m_1 + b_{TrOc}|\}} (b_{TrOc}^2 + c_{TrOc}^2) \quad (6.11)$$

dir.

İspat: AB kenarının eğimi m ise denklem (6.6) dan

$$m = \frac{b_{TrOc} + c_{TrOc}m_1}{c_{TrOc} - b_{TrOc}m_1} \quad (6.12)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikteki m denklem (6.5) de yerine konulursa denklem (6.11) elde edilir.

Uyarı 6.2.1: AB kenarı x-eksenine paralel, yani $m = 0$ iken ya da AB kenarı dikey, yani $m \rightarrow \infty$ iken; denklem (6.5) denklem (6.4) deki eşitliğe indirgenir. Ayrıca (6.4) denklemi şu şekilde de elde edilir; $m_1 = \tan\alpha = \frac{c_{TrOc}}{b_{TrOc}}$ ve $\rho(m) \rightarrow 1$ dir. (6.8) ile verilen denklemi daha açık olarak $\frac{1 + m_1^2}{(1 + |m_1| + (\sqrt{2} - 2)\min\{1, |m_1|\})^2} \cdot a_{TrOc}^2 = b_{TrOc}^2 + c_{TrOc}^2$ biçiminde yazılabilir. Bu denklemde $m_1 = \frac{c_{TrOc}}{b_{TrOc}}$ yerine konulduğunda, denklem (6.4) elde edilir.

Benzer bir şekilde, BC kenarı x-eksenine paralel, yani $m_1 = 0$ iken ya da BC kenarı dikey, yani $m_1 \rightarrow \infty$ iken; denklem (6.11) denklem (6.10) deki eşitliğe indirgenir. Ayrıca (6.10) denklemi şu şekilde de elde edilebilir; $m = \tan\alpha = -\frac{c_{TrOc}}{b_{TrOc}}$ ve $\rho(m_1) \rightarrow 1$ dir. (6.8) ile verilen denklemi daha açık olarak $a_{TrOc}^2 =$

$\frac{1+m^2}{(1+|m|+(\sqrt{2}-2)\min\{1,|m|\})^2} (b_{TrOc}^2 + c_{TrOc}^2)$ biçiminde yazılabilir. Bu denklemde $m = -\frac{c_{TrOc}}{b_{TrOc}}$ yerine konulduğunda, denklem (6.10) elde edilir.

Uyarı 6.2.2: A açısı dik olan ABC üçgeni saat yönünde harflendirilirse b_{TrOc} ve c_{TrOc} nin rolleri değişir. Böylece denklem (6.5);

$$a_{TrOc} = \frac{|c_{TrOc}m + b_{TrOc}| + |b_{TrOc}m - c_{TrOc}| + (\sqrt{2}-2)\min\{|c_{TrOc}m + b_{TrOc}|, |b_{TrOc}m - c_{TrOc}|\}}{1+|m|+(\sqrt{2}-2)\min\{1,|m|\}} \quad (6.13)$$

şekline, benzer şekilde denklem (6.11),

$$a_{TrOc} = \frac{1 + |m_1| + (\sqrt{2} - 2)\min\{1, |m_1|\}}{|c_{TrOc}m_1 - b_{TrOc}| + |b_{TrOc}m_1 + c_{TrOc}| + (\sqrt{2} - 2)\min\{|c_{TrOc}m_1 - b_{TrOc}|, |b_{TrOc}m_1 + c_{TrOc}|\}} (b_{TrOc}^2 + c_{TrOc}^2) \quad (6.14)$$

şekline gelir.

Sırada, Teorem 6.2.1 in karşının ve dolayısıyla Sonuç 6.2.2 nin karşının doğru olmadığını gösteren bir örnek verilmektedir. Diğer bir ifadeyle Öklidyen düzlemde bilinen Pisagor teoreminde üçgen dik ise $a_E^2 = b_E^2 + c_E^2$ bağıntısı sağlanırken $a_E^2 = b_E^2 + c_E^2$ bağıntısı sağlanıyorsa bu üçgen diktir, yani tersi de doğrudur. Fakat $TrOc$ -düzleminde Pisagor bağıntısının sağlandığı $a_E^2 = b_E^2 + c_E^2$ ye karşı gelen denklem (6.5) ya da denklem (6.10) u sağlayan fakat hiçbir dik açığa sahip olmayan bir ABC üçgeninin varlığını gösteren bir örnek verilebilir. Şekil 6.6 da gösterildiği gibi, $TrOc$ -çemberlerinden faydalanılarak denklem (6.5) veya (6.10) deki Pisagor bağıntısının $TrOc$ -düzlemindeki karşılığını sağlayacak şekilde aynı kenar uzunluklarına sahip bir üçgen ile dik olmayan bir üçgen örneği verilmektedir. Bilindiği üzere, O merkezli r birim yarıçaplı $TrOc$ -çemberi, O noktasına $TrOc$ -uzaklığı r birim olan tüm noktaların kümesidir. Bu noktaların geometrik yeri bir sekizgendir. Ayrıca Öklidyen çemberlerde olduğu gibi O merkezli ve bu merkeze r birim $TrOc$ -uzaklığındaki bir nokta bu çemberi tamamen belirler.

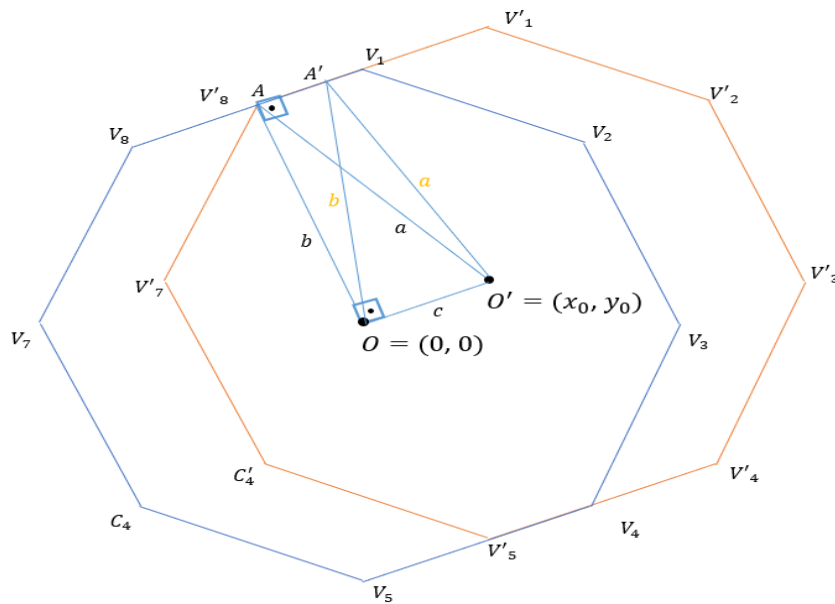
Örnek 6.2.1: Merkezi $O = (0,0)$, yarıçapı r birim ve köşeleri saat yönünde Şekil 6.6 dakine benzer biçimde $V_1, V_2, \dots, V_8$ olarak isimlendirilmiş olan $TrOc$ -çemberi

$$C_4 = \{(x, y) \mid |x| + |y| + (\sqrt{2} - 2)\min\{|x|, |y|\}\}$$

olsun. Böylece, bahsi geçen $TrOc$ -çemberinin köşelerinin koordinatları sırasıyla $V_1 = (0, r)$, $V_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}r, \frac{\sqrt{2}}{2}r\right)$, $V_3 = (r, 0)$, $V_4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}r, -\frac{\sqrt{2}}{2}r\right)$, $V_5 = (0, -r)$, $V_6 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}r, -\frac{\sqrt{2}}{2}r\right)$, $V_7 = (-r, 0)$, $V_8 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}r, \frac{\sqrt{2}}{2}r\right)$ dir. C_4 in V_1V_8 kenarına O dan inilen dikmenin ayağı $A = \left(-\frac{\sqrt{2}}{8}r, \frac{2+\sqrt{2}}{8}r\right)$ olsun. A noktasını $O' = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}r, \frac{2-\sqrt{2}}{8}r\right)$ merkezinden geçen -1 eğimli doğru üzerinde bulunan V'_8 köşesi olarak kabul eden r birim yarıçaplı C_4 çemberi şekilde gösterilen kırmızı çember olsun. Böylece O açısı dik olacak şekilde, köşeleri saat yönünün tersine harflendirilmiş AOO' üçgeni elde edilir. $d_{TrOc}(O, O') = c$, $d_{TrOc}(O, A) = b$ ve $d_{TrOc}(O', A) = a$ denilsin, (Bkz: Şekil 6.6). A' de C_4 ve C'_4 çemberlerinin kesişiminde bir nokta olsun. A' noktası hem C_4 TH -çemberi hem de C'_4 $TrOc$ -çemberi üzerinde olduğu için $d_{TrOc}(O, A) = b_{TrOc}$ ve $d_{TrOc}(O', A) = a_{TrOc}$ olduğundan $d_{TrOc}(O, A') = b_{TrOc}$ ve $d_{TrOc}(O', A') = a_{TrOc}$ elde edilir. Bu durumda AOO' üçgenine Teorem 6.2.1 uygulanırsa OO' doğru parçasının eğimi m olmak üzere hiçbir dik açısı olmayan $A'OO'$ üçgeni için de geçerli olan,

$$a_{TrOc} = \frac{|b_{TrOc}m + c_{TrOc}| + |c_{TrOc}m - b_{TrOc}| + (\sqrt{2}-2)\min\{|b_{TrOc}m + c_{TrOc}|, |c_{TrOc}m - b_{TrOc}|\}}{1 + |m| + (\sqrt{2}-2)\min\{1, |m|\}}$$

eşitliği elde edilir. Böylece R_{TrOc}^2 de Teorem 6.2.1 ün karşıtının dolayısıyla Sonuç 6.2.2 nin karşıtının doğru olmadığı gösterilmiş olur.



Şekil 6.6. $\mathbb{R}_{TrOc}^2$ de denklem (6.5) i sağlayan bir dik üçgen ile dik olmayan üçgen.

Aşağıdaki teorem $TrOc$ -düzlemindeki bir üçgenin bir dik açıya sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşulu ifade eder. Yeter koşul aslında Pisagor Teoreminin karşıtının başka bir ifadesidir.

Teorem 6.2.2: ABC üçgeni $TrOc$ -düzleminde kenar uzunlukları $d_{TrOc}(B, C) = a_{TrOc}$, $d_{TrOc}(A, C) = b_{TrOc}$ ve $d_{TrOc}(A, B) = c_{TrOc}$ olan bir üçgen olsun; m_1, m ve m' de sırasıyla BC, AB ve AC kenarlarının eğimlerini göstere. Buna göre A açısının dik olması için gerek ve yeter koşul,

$$\rho(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+|x|+(\sqrt{2}-2)\min\{1,|x|\}}$$

olmak üzere

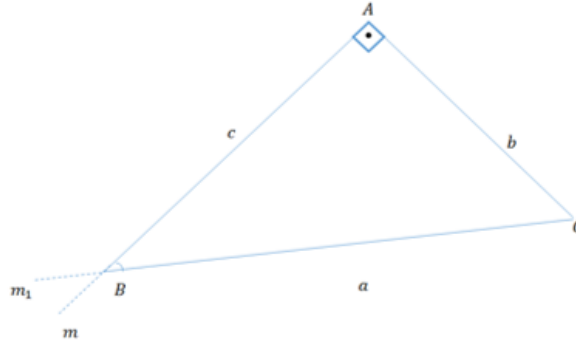
$$[\rho(m_1)]^2 a_{TrOc}^2 = [\rho(m)]^2 (b_{TrOc}^2 + c_{TrOc}^2) = [\rho(m')]^2 (b_{TrOc}^2 + c_{TrOc}^2) \quad (6.15)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat: (6.15) eşitliği geçerli ise $\rho(m) = \rho(m')$ ve $[\rho(m_1)]^2 a_{TrOc}^2 = [\rho(m)]^2 b_{TrOc}^2 + [\rho(m)]^2 c_{TrOc}^2 = [\rho(m')]^2 b_{TrOc}^2 + [\rho(m)]^2 c_{TrOc}^2$ dir. O halde

$$[\rho(m_1)]^2 a_{TrOc}^2 = [\rho(m')]^2 b_{TrOc}^2 + [\rho(m)]^2 c_{TrOc}^2 \quad (6.16)$$

yazılabilir. $d_E(A, B) = \rho(m) \cdot d_{TrOc}(A, B)$ eşitliği (6.16) eşitliğine uygulanırsa;



Şekil 6.7. $\mathbb{R}_{TrOc}^2$ de A açısı dik olan ABC üçgeni.

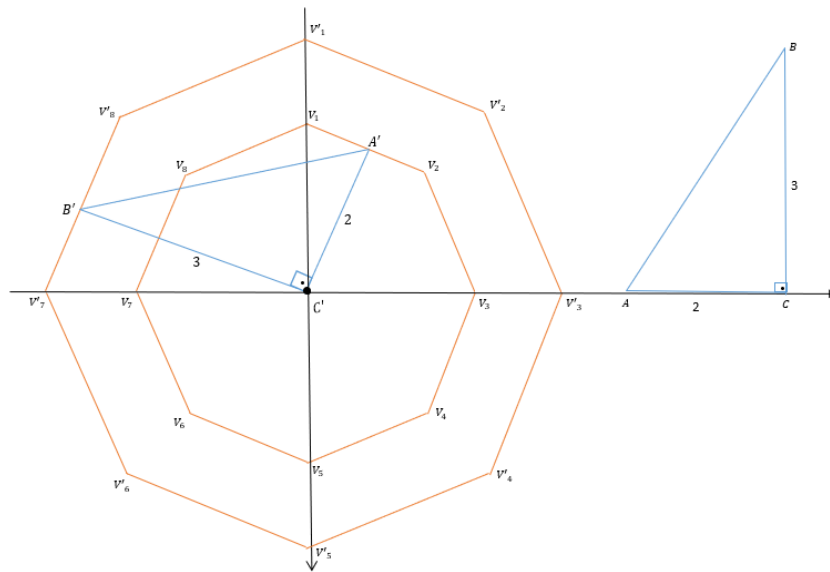
$d_E^2(A, B) = \rho(m)^2 \cdot d_{TrOc}^2(A, B)$ yani $c_E^2 = \rho(m)^2 \cdot c_{TrOc}^2$, $d_E^2(B, C) = \rho(m_1)^2 \cdot d_{TrOc}^2(B, C)$ yani $a_E^2 = \rho(m_1)^2 \cdot a_{TrOc}^2$, $d_E^2(A, C) = \rho(m')^2 \cdot d_{TrOc}^2(A, C)$ yani $b_E^2 = \rho(m')^2 \cdot b_{TrOc}^2$ dir. Böylece $a_E^2 = b_E^2 + c_E^2$ elde edilir. Bu ise Öklidyen düzlemde Pisagor bağıntısına karşılık gelip, Öklidyen düzlemde Pisagor bağıntısının tersi de geçerli olduğundan A açısının dik olduğunu gösterir.

6.3 Thales Bağıntılarının Triakis Octahedron Benzeri

Bu bölümde Thales bağıntılarının Triakis Octahedron düzlemindeki benzerleri [23] kaynağındaki benzer yöntemlerden faydalanılarak verilmektedir.

Teorem 6.3.1: (K.A.K.) benzerlik teoremi $\mathbb{R}_{TrOc}^2$ de geçerli değildir.

İspat: (K.A.K.) benzerliğinin $\mathbb{R}_{TrOc}^2$ de geçerli olmadığını göstermek için bu özelliği sağlamayan bir örnek verilmesi yeterlidir. Köşeleri $A = (1,0)$, $B = (3,3)$, $C = (3,0)$ ve C açısı dik olan ACB üçgeni ile C' açısı dik olan $A'C'B'$ üçgenini ele alalım. Karşılıklı (K.A.K.) elemanlarının aynı olacağı şekildeki $A'C'B'$ üçgenini şu şekilde oluşturalım; $C' = (0,0)$ olmak üzere C' merkezli 2 birim yarıçaplı TrOc çemberi üzerindeki bir nokta $A' = (2\sqrt{2} - 2, 4\sqrt{2} - 4)$ olsun ve $A'C'$ doğru parçasıyla negatif yönde 90° lik açı yapan $C'B'$ ışını ile C' merkezli 3 birim yarıçaplı TrOc-çemberinin kesişim noktası $B' = (6 - 6\sqrt{2}, 3\sqrt{2} - 3)$ biçimindedir. Açıkça $d_{TrOc}(A, C) = 2$, $d_{TrOc}(B, C) = 3$, $d_{TrOc}(A, B) = 2\sqrt{2} + 1$, $d_{TrOc}(A', C') = 2$, $d_{TrOc}(B', C') = 3$ ve $d_{TrOc}(A', B') = 6\sqrt{2} - 5$, ayrıca $m(A) = m(A')$, $m(B) = m(B')$ ve $m(C) = m(C')$ dür. $\mathbb{R}_E^2$ de ACB ve $A'C'B'$ üçgenlerinin karşılıklı kenar uzunlukları da eş olup $ACB \sim A'C'B'$ dür. Ancak $\mathbb{R}_{TrOc}^2$ de karşılıklı kenar uzunluklarının oranları eşit değildir, yani $\frac{|AC|}{|A'C'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} \neq \frac{|AB|}{|A'B'|}$ dir, dolayısıyla Şekil 6.8 de verilen ACB ile $A'C'B'$ üçgenleri $\mathbb{R}_{TrOc}^2$ de benzer üçgenler değildir. Sonuç olarak $\mathbb{R}_{TrOc}^2$ de, (K.A.K.) ve diğer benzerlik bağıntıları geçerli değildir.

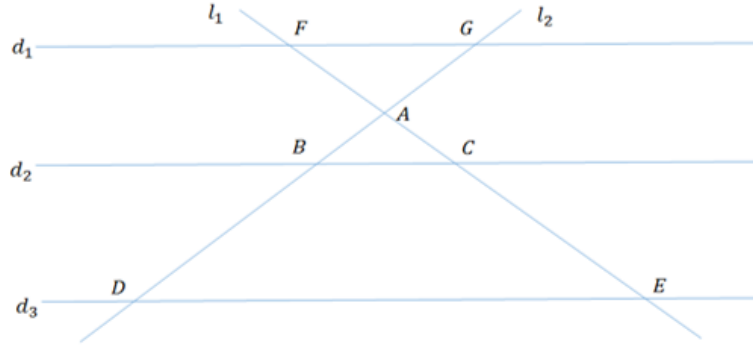


Şekil 6.8. TrOc-düzleminde (K.A.K.) benzerlik teoremini sağlamayan iki üçgen.

Teorem 6.3.2: Kesişen iki doğru, paralel üç doğru ile kesiştirildiğinde oluşan üçgenlerin karşılıklı kenar uzunlukları orantılıdır. Yani Şekil 6.9 da verilen d_1, d_2, d_3, ℓ_1 ve ℓ_2 doğruları için $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3, \ell_1 \nparallel \ell_2$ ve $\ell_i \nparallel d_j, i = 1, 2, j=1, 2, 3$ ise

- i. $\frac{d_{TrOc}(A,B)}{d_{TrOc}(A,D)} = \frac{d_{TrOc}(A,C)}{d_{TrOc}(A,E)} = \frac{d_{TrOc}(B,C)}{d_{TrOc}(D,E)}$
- ii. $\frac{d_{TrOc}(A,B)}{d_{TrOc}(A,G)} = \frac{d_{TrOc}(A,C)}{d_{TrOc}(A,F)} = \frac{d_{TrOc}(B,C)}{d_{TrOc}(F,G)}$

dir.



Şekil 6.9. $\mathbb{R}_{TrOc}^2$ de üç paralel doğru tarafından kesilen paralel olmayan iki doğru.

İspat:

i. A, B, D noktaları ve A, C, E noktaları doğruduş olduğundan Sonuç 6.1.2 gereğince $\frac{d_E(A,B)}{d_E(A,D)} = \frac{d_{TrOc}(A,B)}{d_{TrOc}(A,D)}$, dolayısıyla $\frac{d_E(A,C)}{d_E(A,E)} = \frac{d_{TrOc}(A,C)}{d_{TrOc}(A,E)}$ dir. O halde $\frac{d_{TrOc}(A,B)}{d_{TrOc}(A,D)} = \frac{d_{TrOc}(A,C)}{d_{TrOc}(A,E)}$ dir. d_1 doğrusunun eğimi m olsun. $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3$ olduğundan d_2 ve

d_3 doğrularının eğilimleri de m dir. Önerme 6.1.2 gereğince $m \in \mathbb{R}$ için $d_E(B, C) =$

$$\frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|+(\sqrt{2}-2)\min\{1,|m|\}} d_{TrOc}(B, C) \quad \text{ve} \quad d_E(D, E) =$$

$$\frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|+(\sqrt{2}-2)\min\{1,|m|\}} d_{TrOc}(D, E) \text{ olup bu eşitlikler taraf tarafa oranlanırsa}$$

$$\frac{d_E(B, C)}{d_E(D, E)} = \frac{\frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|+(\sqrt{2}-2)\min\{1,|m|\}} d_{TrOc}(B, C)}{\frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|+(\sqrt{2}-2)\min\{1,|m|\}} d_{TrOc}(D, E)} = \frac{d_{TrOc}(B, C)}{d_{TrOc}(D, E)}$$

elde edilir. $m \rightarrow \infty$ için $d_E(B, C) = d_{TrOc}(B, C)$ ve $d_E(D, E) = d_{TrOc}(D, E)$ olduğundan $\frac{d_E(B, C)}{d_E(D, E)} = \frac{d_{TrOc}(B, C)}{d_{TrOc}(D, E)}$ dir. Sonuç olarak $\frac{d_{TrOc}(A, B)}{d_{TrOc}(A, D)} = \frac{d_{TrOc}(A, C)}{d_{TrOc}(A, E)} = \frac{d_{TrOc}(B, C)}{d_{TrOc}(D, E)}$ elde edilir.

ii. Benzer biçimde, A, B, G noktaları ve A, C, F noktaları doğrudan olduğundan sonuç 6.1.2 gereğince $\frac{d_E(A, B)}{d_E(A, G)} = \frac{d_{TrOc}(A, B)}{d_{TrOc}(A, G)}$ ve $\frac{d_E(A, C)}{d_E(A, F)} = \frac{d_{TrOc}(A, C)}{d_{TrOc}(A, F)}$, dolayısıyla

$\frac{d_{TrOc}(A, B)}{d_{TrOc}(A, G)} = \frac{d_{TrOc}(A, C)}{d_{TrOc}(A, F)}$ dir. Önerme 6.1.2 gereğince $m \in \mathbb{R}$ için $d_E(B, C) =$

$$\frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|+(\sqrt{2}-2)\min\{1, |m|\}} d_{TrOc}(B, C) \quad \text{ve} \quad d_E(F, G) =$$

$$\frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|+(\sqrt{2}-2)\min\{1, |m|\}} d_{TrOc}(F, G) \text{ olup bu eşitlikler taraf tarafa oranlanırsa}$$

$$\frac{d_E(B, C)}{d_E(F, G)} = \frac{\frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|+(\sqrt{2}-2)\min\{1, |m|\}} d_{TrOc}(B, C)}{\frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|+(\sqrt{2}-2)\min\{1, |m|\}} d_{TrOc}(F, G)} = \frac{d_{TrOc}(B, C)}{d_{TrOc}(F, G)}$$

elde edilir. $m \rightarrow \infty$ için $d_E(B, C) = d_{TrOc}(B, C)$ ve $d_E(F, G) = d_{TrOc}(F, G)$ olduğundan,

$\frac{d_E(B, C)}{d_E(F, G)} = \frac{d_{TrOc}(B, C)}{d_{TrOc}(F, G)}$ dir. Sonuç olarak $\frac{d_{TrOc}(A, B)}{d_{TrOc}(A, G)} = \frac{d_{TrOc}(A, C)}{d_{TrOc}(A, F)} = \frac{d_{TrOc}(B, C)}{d_{TrOc}(F, G)}$ elde edilir.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde Öklid dışı geometrilere örnek teşkil eden dört farklı Minkowski tipi geometride Öklidyen geometride bilinen Pisagor Teoremi ile Thales Bağlıntılarının karşılıkları incelenmiş olup tez Öklid dışı geometrilere farklı çalışmalar yapılabilmesi adına literatüre katkı sağlamak üzere hazırlanmıştır.

İlk bölümde tez konusu adına motivasyon kaynağı belirtilmiş, ikinci bölümde ise konunun daha iyi anlaşılabilmesi için gerekli ve daha önceden bilinen tanım ve teoremler verilmiştir.

Tezin üç, dört, beş ve altıncı bölümlerinde sırasıyla Disdyakis Dodecahedron, Tetrakis Hexahedron, Truncated Octahedron ve Triakis Octahedron uzaylarının düzleme indirgenmiş metrikleri ile döşeli $\mathbb{R}_{DD}^2$, $\mathbb{R}_{TH}^2$, $\mathbb{R}_{TO}^2$ ve $\mathbb{R}_{TrOc}^2$ düzlemlerinin temel özellikleri ile bu düzlemlerin her birinde Pisagor Teoremi ve Thales Bağlıntılarının benzerleri incelenmiştir.

Sonuç olarak bu tez çalışması Minkowski tipi geometriler üzerine çalışmalar yaparak matematikçilere Öklidyen düzlemde bilinen teoremlerin benzerlerinin nasıl bulunabileceği hakkında ışık tutacaktır. Böylece başka Öklidyen teoremlerin de tezde verilen düzlemlerde ya da benzer şekilde elde edilebilecek Minkowski tipi düzlemlerde çalışılması düşünülebilir.

KAYNAKLAR

1. Elmalı, N. H., 2020. Zafer Bilim Araştırma Kültür Sanat Dergisi, 525. Sayı.
2. Çolak, Z., 2016. Bazı katalan çokyüzlülerle ilgili metrik geometriler üzerine, Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
3. Ermiş, T., 2014. Düzgün çokyüzlülerin metrik geometriler ile ilişkileri üzerine, Doktora Tezi, Eskişehir Osman Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
4. Can, Z., 2016. Bazı konveks çok yüzlülerle ilgili metrikler ve bu metriklerin geometrileri üzerine, Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
5. Çiçek, E., 2023. Bazı konveks çok yüzlülerle elde edilen öklidyen olmayan geometrilerde evritimin incelenmesi, Yüksek Lisans Tezi, Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Aksaray.
6. Yüksel, S., 2012. Taksit uzayda bazı düzgün çokgenler ve çokyüzlüler üzerine, Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
7. Berkman, A., 2020. Platonik cisimlerin simetrileri, Math 216 Geometri ve Cebir, 6. Hafta.
8. Altinkurt, D., 2009. Fibonacci dizisi ve altın oran hesabı, URL Adres: <https://www.daltinkurt.com/Fibonacci-Dizisi-ve-Altin-Oran-Hesabi>, Erişim Tarihi:23.12.2024.
9. Uyanık, C., 2011. X-ışınları kristalografisi, Bitirme Tezi, Trakya Üniversitesi.
10. Erdal, T., A., 2016. K-En yakın komşu algoritması parametrelerinin sınıflandırma performansı üzerine etkisinin incelenmesi, Ege Üniversitesi, Celal Bayar Üniversitesi, Akademik Bilişim, S. 4-18.
11. Yıldırım, K., 2018. Maksimum metriği geometrisinde uzaklık formülleri üzerine, Yüksek Lisans Tezi, Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Aksaray.
12. Millman, R., S. ve Parker, G., D., 1945. Geometry; a metric approach with models, Springer-Verlag, S. 358.
13. Martin, G. E., 1991. The foundations of geometry and the non-euclidean plane, Springer.
14. Çevik, G., 2006. Öklid geometride üçgenler ve temel teoremler üzerine, Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

15. URL Adresi: <<http://www.turkcebilgi.com/Eukleides>>, Erişim Tarihi: 22.12.2024.
16. Eker, S., 2009. s-Metrik geometrisi üzerine, Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
17. Arslaner, R., 2011. Analitik Geometri, Nobel Akademik Yayıncılık Eğitim Danışmanlık Tic. Ltd. Şti., S. 225.
18. Sahin, R. ve Gürlü, Ö., 2003. Lise Geometri Ders Kitabı, Zambak Yayınları, S. 128.
19. Şentürk, S., 1989. Pisagor teoreminin ilginç öyküsü, Tübitak Popüler Bilim Yayınları E-dergi, Sayfa 24, URL Adres: <https://services.tubitak.gov.tr/edergi>, Erişim tarihi: 22.12.2024.
20. Topkaya, H., 2013. Matematiksel mantık, ispat teknikleri, fibonacci sayısı, pisagor teoremi ispatı, Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
21. Bozkurt, G., 2016. Üç boyutlu uzayda öklidyen, taksi ve çin dama uzaklıkları yardımıyla oluşturulan bir metrik: triakis octahedron metriği, Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
22. Çolakoğlu, H., B., 2009. Taksi, maksimum, çin dama ve alfa düzlemlerinin bazı özellikleri ve genelleştirilmesi, Doktora Tezi, Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
23. Çolakoğlu, H., B., 2005. Bazı öklidyen problemlerin taksi geometrideki benzerleri, Yüksek Lisans Tezi, Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Ebru YAZ AKDOĞAN

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Yeditepe Üniversitesi, Matematik Öğretmenliği
Bölümü, 20004-2010

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Anabilim Dalı, 2017-2024

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLERİ

1. İstek Vakfı Koleji / Staj
2. Sosyal Yardımlaşma ve Dayanışma Vakfı / Sosyal Yardım ve İnceleme Görevlisi

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Uluslararası Hakemli Dergilerde Yayımlanan Makaleler

1. Can, Z., Yaz Akdoğan, E., Versions of Pythagorean Theorem in TO and TH Planes, (Submitted).

Kongrelerde Sunulan Makaleler

1. Can, Z., Yaz Akdoğan, E., Truncated Octahedron and Tetrakis Hexahedron Versions of Thales Theorem, Al Farabi 13th International Scientific Research and Innovation Congress, Tekirdağ-Türkiye, 17-18 October 2024, Full Text Book, 664-674.
2. Can, Z., Yaz Akdoğan, E., Pythagorean Theorem in Disdyakis Dodecahedron Plane, 12. International Summit Scientific Research Congress, Gaziantep-Türkiye, 29-31 May 2024, Full Text Book, 1128-1139.

3. Can, Z., Yaz Akdoğan, E., Triakis Octahedron Version of Pythagorean Theorem, 2. International Black Sea Scientific Research and Innovation Congress, Trabzon-Türkiye, 29-30 June 2024, Congress Book, 994-1006.
4. Can, Z., Yaz Akdoğan, E., Disdyakis Dodecahedron and Triakis Octahedron Versions of Thales Theorem, UMTEB-XVI International Scientific Research Congress, Adana-Türkiye, 6-8 December 2024.

