



**T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MAT-YL-2010-0001**

**PLATONİK RIEMANN YÜZEYLERİ ÜZERİNDE
SABİT EĞRİLER**

Serhan ULUSAN

**Tez Danışmanı:
Yrd. Doç. Dr. Adnan MELEKOĞLU**

AYDIN

**T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MAT-YL-2010-0001**

**PLATONİK RIEMANN YÜZEYLERİ ÜZERİNDE
SABİT EĞRİLER**

Serhan ULUSAN

**Tez Danışmanı:
Yrd. Doç. Dr. Adnan MELEKOĞLU**

AYDIN

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı *Yüksek Lisans* Programı öğrencisi *Serhan ULUSAN* tarafından hazırlanan *Platonik Riemann Yüzeyleri Üzerinde Sabit Eğriler* başlıklı tez, 18.12.2009 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

Ünvanı, Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan : Doç. Dr. İbrahim ÇANAK	Adnan Menderes Ü.	
Üye : Yrd. Doç. Dr. Yusuf KAYA	Zonguldak Karaelmas Ü.	
Üye : Yrd. Doç. Dr. Adnan MELEKOĞLU	Adnan Menderes Ü.	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu *yüksek lisans* tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun Sayılı kararıyla tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Serap AÇIKGÖZ
Enstitü Müdürü

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ'NE

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

04.01.2010

Serhan ULUSAN

ÖZET

PLATONİK RIEMANN YÜZEYLERİ ÜZERİNDE SABİT EĞRİLER

Serhan ULUSAN

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Adnan MELEKOĞLU
2010, 38 sayfa

Yedi bölümden oluşan bu çalışmanın amacı platonik Riemann yüzeyleri üzerindeki sabit eğrileri ve bu eğrilerin bazı özelliklerini incelemektir.

Birinci bölümde giriş kısmı verildi.

İkinci bölümde tezin ana konusu için gerekli olan temel bilgilere yer verildi.

Üçüncü bölümde kısaca hiperbolik geometri tanıtıldı.

Dördüncü bölüm, Fuchs ve NEC (Non-Euclidean crystallographic) grupları ile Riemann yüzeylerine ayrıldı.

Beşinci bölümde düzgün figürler tanıtılıp bunların sınıflandırılması yapıldı.

Altıncı bölümde tezin ana konusu olan platonik Riemann yüzeyleri üzerindeki sabit eğrilerin desenleri tanıtıldı ve sınıflandırıldı. Ayrıca her sabit eğriye karşılık, birbirinin tersi olan, eğriyi ters yönlerde döndüren ve dönel otomorfizmalar olarak adlandırılan iki otomorfizma olduğu gösterildi. Son olarak bu otomorfizmalar yardımıyla cinsi 2 ve 3 olan platonik Riemann yüzeyleri üzerindeki sabit eğrilerin uzunlukları hesaplandı.

Yedinci bölümde elde edilen sonuçlar verildi.

Anahtar Sözcükler: Riemann yüzeyleri, Platonik yüzeyler, Düzgün figürler, Sabit eğri, Desen, Dönel otomorfizma

ABSTRACT

FIXED CURVES ON PLATONIC RIEMANN SURFACES

Serhan ULUSAN

M.Sc. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Assist. Prof. Dr. Adnan MELEKOĞLU
2010, 38 pages

The main topic of this study, which consists of seven chapters, is to investigate fixed curves on platonic Riemann surfaces and some properties of these curves.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, basic concepts, which are necessary for the main topic of the thesis, were given.

In the third chapter, hyperbolic geometry has been shortly introduced.

The fourth chapter is devoted to Fuchsian groups, NEC (Non-Euclidean crystallographic) groups and Riemann surfaces.

In the fifth chapter, regular maps were introduced and classified.

In the sixth chapter, the patterns of fixed curves on platonic Riemann surfaces, which are the main topic of the thesis, were introduced and classified. Furthermore, it has been shown that for each curve there exist two automorphisms so called rotary automorphisms. These are inverses of each other and they rotate the curve in opposite directions. Finally, with the aid of these automorphisms the lengths of fixed curves on platonic Riemann surfaces of genera two and three have been calculated.

The seventh chapter involves the conclusion of study.

Key words: Riemann surfaces, Platonic surfaces, Regular maps, Fixed curve, Pattern, Rotary automorphism

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmam boyunca yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Adnan MELEKOĞLU' na (Adnan Menderes Üniversitesi, Matematik Bölümü) sonsuz teşekkür ederim.

Ayrıca, tezin düzeltme aşamasında yapıcı önerileriyle bana yol gösteren değerli hocalarım Yrd. Doç. Dr. Yusuf KAYA' ya (Zonguldak Karaelmas Üniversitesi, Matematik Bölümü) ve Doç. Dr. İbrahim ÇANAK' a (Adnan Menderes Üniversitesi, Matematik Bölümü) teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY SAYFASI	iii
BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI	v
ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
ÖNSÖZ	xi
SİMGELER DİZİNİ	xv
ŞEKİLLER DİZİNİ	xvii
ÇİZELGELER DİZİNİ	xix
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL BİLGİLER	3
2.1 Topolojik Gruplar	3
2.2 Grup Etkisi	3
2.3 Bölüm (Yörünge) Uzayları	4
2.4 Ayrık Gruplar	5
2.5 Möbius Dönüşümleri	6
2.6 Bir Çember Üzerinde Yansıma (İnversiyon)	8
3. HİPERBOLİK GEOMETRİ	10
3.1 Hiperbolik Düzlem	10
3.2 Hiperbolik Metrik	11
3.3 Hiperbolik Doğrular	16
3.4 Hiperbolik Düzlemde İzometrilere	17
3.5 Hiperbolik Üçgenler	19
3.6 Hiperbolik Trigonometri	20
4. RIEMANN YÜZEYLERİNİN ELDE EDİLMESİ	21
4.1 NEC ve Fuchs Grupları	21
4.2 Üçgensel Gruplar	21
4.3 Riemann Yüzeyleri	22
5. DÜZGÜN FİGÜRLER	25
5.1 Düzgün Figür	25
5.2 Düzgün Figürlerin Sınıflandırılması	26

5.2.1 Cinsi 0 olan düzgün figürler	26
5.2.2 Cinsi 1 olan düzgün figürler	27
5.2.3 Cinsi 1 den büyük olan düzgün figürler	28
6. PLATONİK YÜZEYLER	29
6.1 Platonik Yüzey	29
6.2 Sabit Eğrilerin Desenleri	29
6.3 Dönel Otomorfizmalar	32
6.4 Sabit Eğrilerin Uzunlukları	33
7. SONUÇ	36
KAYNAKLAR.....	37
ÖZGEÇMİŞ	38

SİMGELER DİZİNİ

$\{m, n\}$	Figür tipi
$\mathbb{C}_\infty$	Genişletilmiş kompleks düzlem
$PGL(2, \mathbb{R})$	Hiperbolik düzlemin tüm izometrilerinin grubu
$PSL(2, \mathbb{R})$	Hiperbolik düzlemin konform izometrilerinin grubu
$\mathbb{D}$	Hiperbolik düzlem için birim daire modeli
$\mathbb{H}$	Hiperbolik düzlem için üst yarı düzlem modeli
(l, m, n)	İç açıları $\frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{m}$ ve $\frac{\pi}{n}$ olan bir hiperbolik üçgen
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$Aut^+ S$	S yüzeyinin konform otomorfizmalarının oluşturduğu grup
$Aut^\pm S$	S yüzeyinin tüm otomorfizmalarının oluşturduğu grup
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. G grubunun bölüm uzayı olan tor yüzeyi	5
Şekil 2.2. Bir çember üzerinde yansıma.....	8
Şekil 3.1. Yalancı küre.....	10
Şekil 3.2. Üst yarı düzlem modeline göre doğrular.....	11
Şekil 3.3. Birim daire modeline göre doğrular.....	11
Şekil 3.4. Hiperbolik doğru parçası.....	12
Şekil 3.5. İki noktayı birleştiren hiperbolik doğru parçası	15
Şekil 3.6. Hiperbolik doğrular.....	16
Şekil 3.7. Paralel, ayrık paralel ve kesişen hiperbolik doğrular	16
Şekil 3.8. Hiperbolik düzlemde öteleme	18
Şekil 3.9. Hiperbolik düzlemde rotasyon.....	18
Şekil 3.10. Hiperbolik düzlemde limit rotasyon	19
Şekil 3.11. Hiperbolik düzlemde ötelemeli yansıma.....	19
Şekil 4.1. Hiperbolik bir üçgenin kenarları üzerindeki yansımalar.....	21
Şekil 5.1. Küre üzerinde $\{2,n\}$ ve $\{n,2\}$ tipindeki figürler	27
Şekil 5.2. Küre üzerindeki diğer düzgün figürlere karşılık gelen cisimler.....	27
Şekil 6.1. Üçgenin kenarındaki yansımalar.....	30
Şekil 6.2. Dönel otomorfizma	32
Şekil 6.3. Herhangi bir $(2,3,7)$ -üçgeni	34

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 6.1. Küre üzerindeki düzgün figürler ve desenleri	30
Çizelge 6.2. Sabit eğrilerin desenleri	31
Çizelge 6.3. Desenler ve dönel otomorfizmalar	33
Çizelge 6.4. Cinsi 2 olan yüzeyler üzerindeki sabit eğrilerin uzunlukları	35
Çizelge 6.5. Cinsi 3 olan yüzeyler üzerindeki sabit eğrilerin uzunlukları	35

1. GİRİŞ

$\mathbb{H} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$ kümesi, üzerinde tanımlı $ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$ uzaklık

fonksiyonu ile hiperbolik düzlem için bir modeldir ve üst yarı düzlem modeli olarak adlandırılır. Aynı zamanda, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ kümesi de üzerinde tanımlı

$ds = \frac{2|dz|}{1 - |z|^2}$ uzaklık fonksiyonu ile hiperbolik düzlem için bir modeldir ve

birim daire modeli olarak adlandırılır. $j(z) = \frac{iz + 1}{z + i}$ dönüşümü yardımı ile bu iki model arasında geçiş daima mümkündür.

$\mathbb{H}$ kümesinin konform izometrilere

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ve } ad - bc = 1)$$

biçimindeki Möbius dönüşümlerinden oluşur (Jones ve Singerman, 1987). Bu dönüşümler sabit noktalarına göre, ötelemeler, rotasyonlar ve limit rotasyonlar olmak üzere üç türe ayrılırlar.

Hiperbolik düzlemin konform izometrilere bileşke işlemine göre bir grup oluşturur ve bu grubun herhangi bir ayrık alt grubuna bir Fuchs grubu denir. Bir Fuchs grubunun bölüm uzayı bir yüzeydir.

Γ , ötelemelerden oluşan bir Fuchs grubu ve $\mathbb{H}/\Gamma$ kompakt olsun. Bu durumda $S = \mathbb{H}/\Gamma$ bölüm uzayı bir kompakt Riemann yüzeyidir. Eğer Λ, Γ grubunu normal alt grup olarak içeren bir başka Fuchs grubu ve $|\Lambda : \Gamma| = n$ (Γ grubunun Λ grubundaki indeksi) ise Λ/Γ grubu S yüzeyinin bir konform otomorfizma grubudur. Böylece, her Riemann yüzeyinin konform otomorfizma grubu iki Fuchs grubunun bölüm grubu olarak ifade edilebilmektedir. Eğer yukarıdaki Λ grubu bir üçgensel Fuchs grubu ise S yüzeyine bir platonik Riemann yüzeyi denir.

Bu yüzeyler geometrik olarak düzgün ve özdeş çokgenlere bölünebilir. Bu yüzeyler üzerine; çokgenlerin köşelerini köşe, kenarlarını kenar kabul eden bir düzgün figür yerleştirilebilir. Burada her bir çokgene düzgün figürün bir yüzü

denir. Riemann yüzeylerinin yönlenmeyi korumayan dönüşümleri de içeren tüm otomorfizma gruplarını belirlemek için ise NEC (Non-Euclidean Crystallographic) gruplarından benzer şekilde yararlanılmaktadır. Bir Riemann yüzeyi üzerindeki bir yansımanın sabit tuttuğu noktaların kümesi yüzey üzerinde basit kapalı eğrilerden oluşur. Bu eğrilerin her birine bir sabit eğri denir. Bu çalışmada ilk önce platonik Riemann yüzeyleri üzerindeki sabit eğrilerin desenleri tanıtılacak ve sınıflandırılacaktır. Ayrıca her sabit eğriye karşılık birbirinin tersi olan ve eğriyi ters yönlere döndüren iki otomorfizma olduğu gösterilecektir. Bu otomorfizmalara sabit eğrinin dönel otomorfizmaları denir. Son olarak bu otomorfizmalar yardımıyla platonik Riemann yüzeyleri üzerindeki sabit eğrilerin uzunluklarının hesaplanma metodu gösterilip cinsi 2 ve 3 olan platonik Riemann yüzeyleri üzerindeki sabit eğrilerin uzunlukları hesaplanacaktır.

2. TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde, bu çalışmada sıkça kullanılan bazı temel bilgiler verilecektir

2.1. Topolojik Gruplar

Tanım 2.1.1 $(G, *)$ bir grup ve aynı zamanda topolojik uzay olsun. Eğer $\forall g, h \in G$ için,

$$\alpha : G \times G \rightarrow G, \alpha(g, h) = g * h$$

$$\beta : G \rightarrow G, \beta(g) = g^{-1}$$

şeklinde tanımlanan α ve β dönüşümleri sürekli ise G grubuna bir topolojik grup denir.

Bundan böyle, aksi belirtilmedikçe $g * h = gh$ alınacaktır.

Örnek 2.1.1 $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ ve $(\mathbb{Z}, +)$ grupları Öklid topolojisiyle birlikte ele alındığında birer topolojik gruptur.

2.2. Grup Etkisi

Tanım 2.2.1 G bir grup ve $X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan

$$\phi : G \times X \rightarrow X$$

dönüşümüne G grubunun X kümesi üzerine bir etkisi denir:

$$(i) \quad \phi(e, x) = x \quad (\forall x \in X)$$

$$(ii) \quad \phi(g_1 g_2, x) = \phi(g_1, \phi(g_2, x)) \quad (\forall x \in X \text{ ve } \forall g_1, g_2 \in G).$$

Burada e , G grubunun birim elemanıdır.

Örnek 2.2.1 X topolojik uzay ve $G = \{g \mid g : X \rightarrow X \text{ homeomorfizma}\}$ olsun. G kümesi fonksiyonlarda bileşke işlemine göre bir gruptur. Bu durumda $\forall x \in X$

ve $\forall g \in G$ için, $\phi: G \times X \rightarrow X$, $\phi(g, x) = g(x)$ şeklinde tanımlanan ϕ dönüşümü G grubunun X kümesi üzerine bir etkisidir.

Tanım 2.2.2 $X \neq \emptyset$ bir küme, G bir grup ve $\phi: G \times X \rightarrow X$ dönüşümü G grubunun X kümesi üzerine bir etkisi olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ için $\phi(g, x) = y$ olacak şekilde bir $g \in G$ varsa, G grubunun X kümesi üzerine etkisi geçişlidir denir.

Tanım 2.2.3 $X \neq \emptyset$ bir küme, G bir grup ve $\phi: G \times X \rightarrow X$ dönüşümü G grubunun X kümesi üzerine bir etkisi olsun. Eğer $x \neq y$ ve $u \neq v$ özelliğindeki $\forall x, y, u, v \in X$ elemanları için $\phi(g, x) = u$ ve $\phi(g, y) = v$ olacak şekilde bir $g \in G$ varsa, G grubunun X kümesi üzerine etkisi çift geçişlidir denir.

2.3. Bölüm (Yörünge) Uzayları

Tanım 2.3.1 $X \neq \emptyset$ bir küme $a \in X$ ve $\phi: G \times X \rightarrow X$ dönüşümü, G grubunun X kümesi üzerine bir etkisi olsun. Bu durumda, $G_a = \{\phi(g, a) \mid g \in G\}$ kümesine a noktasının yörüngesi ve $S_a = \{g \in G \mid \phi(g, a) = a\}$ kümesine de a noktasının sabitleyeni denir.

Tanım 2.3.2 X bir topolojik uzay ve $G = \{g \mid g: X \rightarrow X \text{ homeomorfizma}\}$ olsun. Bu durumda $\forall x \in X$ ve $\forall g \in G$ için, $\phi: G \times X \rightarrow X$, $\phi(g, x) = g(x)$ şeklinde tanımlanan ϕ dönüşümünün G grubunun X kümesine bir etkisi olduğu biliniyor. Bu şartlar altında X uzayının aşağıdaki özellikleri sağlayan kapalı bir K alt kümesine G grubu için bir temel bölge denir:

$$(i) \bigcup_{g \in G} g(K) = X,$$

$$(ii) \overset{\circ}{K} \cap g(\overset{\circ}{K}) = \emptyset \quad (\forall g \in G - \{e\}).$$

Tanım 2.3.3 X bir topolojik uzay ve G , X uzayına etki eden bir grup olmak üzere, G_x kümesi $x \in X$ noktasının yörüngesi olsun. Her $x, y \in X$ için,

$$x\beta y \Leftrightarrow y \in G_x$$

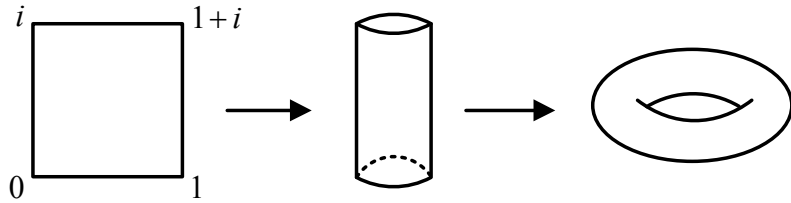
olarak tanımlanan β bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısı X uzayını denklik sınıflarına ayırır. Bu denklik bağıntısına göre bir x elemanın denklik sınıfı, x elemanın yörüngesidir ve denklik sınıflarının kümesi $X/\beta = \{G_x \mid x \in X\}$ olarak gösterilir. X/β , X kümesinin bu bağıntıya göre bölüm kümesidir.

$\pi : X \rightarrow X/\beta$, $\pi(x) = G_x$ bölüm fonksiyonu olmak üzere;

$$"A \subset X/\beta \text{ açıktır} \Leftrightarrow \pi^{-1}(A), X \text{ uzayında açıktır}"$$

şeklinde tanımlanan A açık kümeleri X/β kümesi üzerinde bir topoloji oluşturur. Bu topolojiye bölüm topolojisi denir. X/β kümesi bu topolojiyle birlikte düşünüldüğünde bir topolojik uzaydır ve X/β topolojik uzayına bölüm uzayı veya yörünge uzayı denir. X/β bölüm uzayının elemanları G grubuna göre yörüngeler olduğundan X/β yerine X/G notasyonu kullanılacaktır.

Örnek 2.3.1 $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z+1$ ve $g(z) = z+i$ şeklinde tanımlı dönüşümler olsun. f ve g dönüşümleri $\mathbb{C}$ üzerine etki eden bir G grubu üretirler. Bu grubun $\mathbb{C}$ üzerine etkisi düşünülürse, köşeleri, $0, 1, i$ ve $1+i$ olan kare, G grubu için bir temel bölgedir. Bu karenin kenarları üzerinde aynı yörüngeye sahip noktalar uygun şekilde birleştirilirse bölüm uzayı olarak bir tor yüzeyi elde edilir.



Şekil 2.1. G grubunun bölüm uzayı olan tor yüzeyi

2.4. Ayırık Gruplar

Tanım 2.4.1 G bir topolojik grup olsun. G grubunun bütün tek noktalı alt kümeleri açık ise G topolojik grubuna bir ayırık grup denir. Bu durumda, ayırık topoloji ile birlikte düşünüldüğünde her grup bir ayırık grup olur.

Tanım 2.4.2 X bir topolojik uzay ve A, X uzayının bir alt uzayı olsun. Her $a \in A$ noktasının $U \cap A = \{a\}$ olacak şekilde bir U komşuluğu varsa, A uzayına X topolojik uzayının bir ayrık alt uzayı denir.

Tanım 2.4.3 G bir topolojik grup ve H, G grubunun bir alt grubu olsun. Eğer H, G topolojik uzayının bir ayrık alt uzayı ise H grubuna G grubunun bir ayrık alt grubu denir.

Örnek 2.4.1 $(\mathbb{Z}, +)$ grubu $(\mathbb{R}, +)$ grubunun bir ayrık alt grubudur.

Tanım 2.4.4 X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $\forall a \in A$ için $U \cap A = \{a\}$ olacak şekilde a noktasının bir U komşuluğu varsa, A kümesine X topolojik uzayının bir ayrık alt kümesidir denir.

Örnek 2.4.2 $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$ kümesi reel sayılar kümesinin bir ayrık alt kümesidir. Fakat $B = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\} \cup \{0\}$ kümesi reel sayılar kümesinin bir ayrık alt kümesi değildir. Çünkü 0 noktasının her komşuluğunda B kümesine ait 0 dan başka elemanlar da mevcuttur.

2.5. Möbius Dönüşümleri

Tanım 2.5.1 $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ve $ad - bc \neq 0$ olmak üzere,

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

şeklindeki dönüşümlere Möbius dönüşümleri denir. Bu dönüşümlerin kümesi $PGL(2, \mathbb{C})$ notasyonu ile gösterilir ve $ad - bc$ sayısına T dönüşümünün determinanı denir.

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ve } ad - bc = 1) \quad (2.5.1)$$

şeklindeki dönüşümlerin kümesi de $PSL(2, \mathbb{R})$ notasyonu ile gösterilir. $PSL(2, \mathbb{R})$ kümesinin dönüşümleri ile birlikte,

$$T(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ve } ad - bc = -1) \quad (2.5.2)$$

şeklindeki Möbius dönüşümleri bir grup oluşturur. $PSL(2, \mathbb{R})$ bu grubun iki indeksli bir alt grubudur ve bu grup $PGL(2, \mathbb{R})$ notasyonu ile gösterilir.

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ve } \Delta = ad - bc > 0) \quad (2.5.3)$$

olsun. T dönüşümünde pay ve paydayı $\sqrt{\Delta}$ ya bölersek $T(z) = \frac{(\frac{a}{\sqrt{\Delta}})z + (\frac{b}{\sqrt{\Delta}})}{(\frac{c}{\sqrt{\Delta}})z + (\frac{d}{\sqrt{\Delta}})}$ dönüşümünü elde ederiz. Buradan, $(\frac{a}{\sqrt{\Delta}})(\frac{d}{\sqrt{\Delta}}) - (\frac{b}{\sqrt{\Delta}})(\frac{c}{\sqrt{\Delta}}) = 1$ olduğu için (2.5.3) dönüşümünün $PSL(2, \mathbb{R})$ kümesinin elemanı olduğu görülür.

$PSL(2, \mathbb{R})$ kümesi,

$$z \rightarrow az + b \quad (a, b \in \mathbb{R} \text{ ve } a > 0) \quad (2.5.4)$$

şeklindeki dönüşümleri de içerir. Çünkü,

$$az + b = \frac{\sqrt{a}z + \frac{b}{\sqrt{a}}}{0z + \frac{1}{\sqrt{a}}} \text{ ve } \Delta = (\sqrt{a})(\frac{1}{\sqrt{a}}) - (0)(\frac{b}{\sqrt{a}}) = 1 \text{ dir.}$$

(2.5.3) dönüşümü,

$$T(z) = \frac{(az + b)(c\bar{z} + d)}{|cz + d|^2} = \frac{(acz\bar{z} + bd) + (adz + bc\bar{z})}{|cz + d|^2} \quad (2.5.5)$$

biçiminde yazılabilir. $z = x + iy$ olmak üzere $T(z) = u + iv$ karmaşık sayısının sanal kısmı

$$v = \frac{(ad - bc)y}{|cz + d|^2} \quad (2.5.6)$$

olarak bulunur.

$\mathbb{H} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$ kümesi üst yarı düzlem olmak üzere, $ad - bc > 0$ olduğundan, T dönüşümünün $\mathbb{H}$ kümesini kendi üzerine resmettiği açıktır.

Teorem 2.5.1 $PSL(2, \mathbb{R})$ kümesi fonksiyonlarda bileşke işleme göre bir gruptur.

İspat: (Churchill ve Brown, 1990).

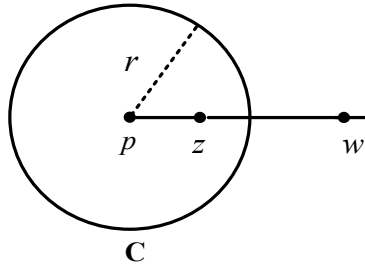
Teorem 2.5.2 $PSL(2, \mathbb{R})$ grubu $\mathbb{H}$ üzerinde geçişlidir, $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ üzerinde çift geçişlidir.

İspat: (Jones ve Singerman, 1987).

Teorem 2.5.3 Möbius dönüşümleri çemberler ve doğruları, çemberler ve doğrulara resmederler.

İspat: (Churchill ve Brown, 1990).

2.6. Bir Çember Üzerinde Yansıma (İnversiyon)



Şekil 2.2. Bir çember üzerinde yansıma

C , Şekil 2.2 de görüldüğü gibi, karmaşık düzlemde merkezi p , yarıçapı r olan bir çember ve $z \in C - \{p\}$ olsun. p noktasından başlayıp z noktasından geçen yarı doğru üzerinde,

$$|z - p||w - p| = r^2 \quad (2.6.7)$$

olacak şekilde bir tek w noktası vardır. Böylece, z noktası C çemberi üzerinde yansıtıldığında görüntüsü (2.6.7) denklemindeki kuralı sağlayan w noktası olur. C çemberi üzerinde bu şekilde elde edilen yansıma çember üzerindeki yansıma

(inversiyon) denir ve I_c notasyonuyla gösterilir. $I_c : \mathbb{C} - \{p\} \rightarrow \mathbb{C} - \{p\}$ bir fonksiyondur ve bu fonksiyon çemberin merkezi hariç, çemberin, içindeki noktaları dışındaki noktalara, dışındaki noktaları içindeki noktalara resmeder. Bu durumda, $z \rightarrow p$ iken $w \rightarrow \infty$ ve $w \rightarrow p$ iken $z \rightarrow \infty$ olur. I_c dönüşümü çember üzerindeki noktaların her birini sabit tutar. $z \neq p$ olması durumunda,

$$|(\bar{z} - \bar{p})(w - p)| = |(\bar{z} - \bar{p})| |(w - p)| = |z - p| |w - p| = r^2$$

olur. Bu eşitlikte $\arg(z - p) = \arg(w - p)$ olduğundan $\arg(\bar{z} - \bar{p})(w - p) = 0$ bulunur. Böylece $(\bar{z} - \bar{p})(w - p) = r^2$ olur ve sonuç olarak I_c dönüşümünün denklemi,

$$w = I_c(z) = p + \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{p}} \quad (2.6.8)$$

şeklinde elde edilir. Eğer $p = 0$ ve $r = 1$ olarak alınırsa birim çember üzerindeki yansıma elde edilir ve bu yansımanın denklemi;

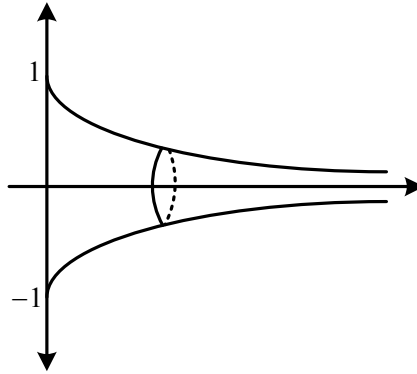
$$I_c(z) = \frac{1}{\bar{z}} \quad (2.6.9)$$

olur.

3. HİPERBOLİK GEOMETRİ

3.1. Hiperbolik Düzlem

Bir düzlem üzerinde, bir L doğrusu ve bu doğruya ait olmayan bir p noktası verildiğinde, p noktasından geçen ve L doğrusunu kesmeyen birden fazla doğruyu üzerinde bulunduran düzlem arayışı sonucunda hiperbolik düzlem ortaya çıkmıştır. Hiperbolik düzleme bir örnek olarak yalancı küre (pseudosphere) verilebilir.



Şekil 3.1. Yalancı küre

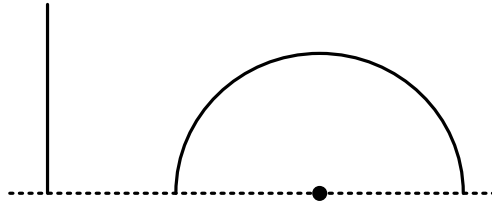
Yalancı küre;

$$x = \theta - \tan \theta, \quad y = \sec \theta, \quad \theta \in [0, \infty) \quad (3.1.1)$$

parametrik denklemleri ile verilen ve çekme eğrisi (tractrix) olarak bilinen eğrinin, x eksenine etrafında 360 derece döndürülmesi ile elde edilen yüzeydir. Bu yüzeyin her noktası bir eyer noktasıdır ve her noktasındaki Gauss eğriliği -1 dir. Üzerindeki geometrinin daha kolay anlaşılabilmesi için hiperbolik düzlemin değişik modelleri ortaya konulmuştur. Bunlardan en çok kullanılan modeller, üst yarı düzlem modeli ve birim daire modeli olarak adlandırılan modellerdir.

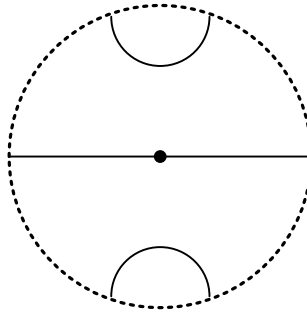
Üst yarı düzlem modeline göre hiperbolik düzlem; $\mathbb{H} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$ kümesidir. $\mathbb{H}$ modeline göre hiperbolik düzlemdeki doğrular, reel eksene dik olan

Öklid doğruları ve merkezi reel ekseninde olan çemberlerin $\mathbb{H}$ kümesi içinde kalan kısımlarıdır (Şekil 3.2).



Şekil 3.2. Üst yarı düzlem modeline göre doğrular

Birim daire modeline göre hiperbolik düzlem; $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ kümesidir. Bu modele göre hiperbolik düzlemin doğruları, karmaşık düzlemde $\mathbb{D}$ kümesinin sınırını dik kesen, Öklid doğru ve çemberlerinin $\mathbb{D}$ kümesinde kalan kısımlarıdır (Şekil 3.3).



Şekil 3.3. Birim daire modeline göre doğrular

Üst yarı düzlem ve birim daire modeline göre hiperbolik açı ise, bu düzlemlerdeki iki hiperbolik doğru arasındaki Öklid anlamında ölçülen açıdır.

Bu tezin genelinde üst yarı düzlem modeli kullanılacak ve açıklamalar bu model temel alınarak yapılacaktır.

3.2. Hiperbolik Metrik

$I = [0, 1]$ ve $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir fonksiyonlar ve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ eğrisi $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ şeklinde verilsin. γ eğrisinin Öklid uzunluğu, $ds^2 = dx^2 + dy^2$ formülü yardımıyla

$$|\gamma|_E = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

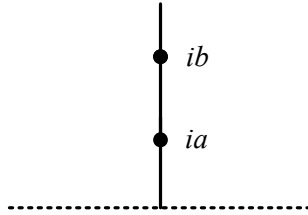
olarak verilir.

$\beta : I \rightarrow \mathbb{H}$ ve $\beta(t) = (x(t), y(t))$ olmak üzere β eğrisinin hiperbolik uzunluğu, $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ formülü yardımıyla

$$|\beta|_H = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt = \int_0^1 \frac{\left|\frac{dz}{dt}\right|}{y(t)} dt$$

olarak verilir.

Örnek 3.2.1 $b > a > 0$ olmak üzere, sanal eksen üzerindeki ia ve ib noktalarını birleştiren Öklid doğru parçasının Öklid uzunluğunun $b - a$ birim olduğu biliniyor.



Şekil 3.4. Hiperbolik doğru parçası

$I = [0, 1]$ için $\beta : I \rightarrow \mathbb{H}$ eğrisi Şekil 3.4 deki ia ve ib noktalarını birleştiren doğru parçası olmak üzere, bu eğri $\beta(t) = (0, (b - a)t + a)$ parametrik denklemine sahiptir. Bu eğrinin hiperbolik uzunluğu;

$$\begin{aligned} |\beta|_H &= \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{0 + (b - a)^2}}{(b - a)t + a} dt \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \frac{b-a}{(b-a)t+a} dt = \ln(b) - \ln(a) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

olarak bulunur.

Teorem 3.2.1 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}$ bir eğri ve $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ ise $|T \circ \gamma|_H = |\gamma|_H$ dir.

İspat: $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ve $ad-bc=1$) olsun. O halde

$$\frac{dT}{dz} = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{1}{(cz+d)^2}$$

bulunur. $z = x + iy$, $T(z) = u + iv$ olarak alınırsa (2.5.6) denklemi gereğince

$$v = \frac{y}{|cz+d|^2}$$

elde edilir ve buradan

$$\left| \frac{dT}{dz} \right| = \frac{v}{y}$$

olur. O halde;

$$\begin{aligned} |T \circ \gamma|_H &= \int_0^1 \frac{\left| \frac{dT}{dz} \right|}{v} dt = \int_0^1 \frac{\left| \frac{dT}{dz} \frac{dz}{dt} \right|}{v} dt \\ &= \int_0^1 \frac{v \left| \frac{dz}{dt} \right|}{yv} dt = \int_0^1 \frac{\left| \frac{dz}{dt} \right|}{y} dt = |\gamma|_H \end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi z_1 ve z_2 hiperbolik düzlemde iki farklı nokta olmak üzere, bu iki noktayı birleştiren ve hiperbolik uzunluğu en küçük olan eğrinin tek olduğu gösterilecek. Bu özellikteki bir eğriye ise z_1 ve z_2 noktalarını birleştiren hiperbolik doğru parçası denir.

Teorem 3.2.2 *Hiperbolik düzlemde iki farklı noktayı birleştiren bir tek hiperbolik doğru parçası vardır.*

İspat:

1. Durum: $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ ve bu noktaların reel kısımları sıfır olsun. O halde noktalar $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $z_1 = ia, z_2 = ib$ şeklindedir. Genel durum bozulmayacağından $b > a$ kabul edilebilir. Sanal eksenin z_1 ve z_2 noktalarını birleştiren Öklid doğru parçası γ olsun. Bu doğru parçasının hiperbolik uzunluğunun $\ln(\frac{b}{a})$ olduğu biliniyor. γ^* eğrisi z_1 ve z_2 noktalarını birleştiren γ eğrisinden farklı bir başka eğri olsun. Bu durumda,

$$\gamma^* : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}, \gamma^*(t) = (x(t), y(t)) \quad (t \in [0, 1])$$

şeklindedir ve en az bir $t_0 \in [0, 1]$ için $x(t_0) \neq 0$ dır. O halde

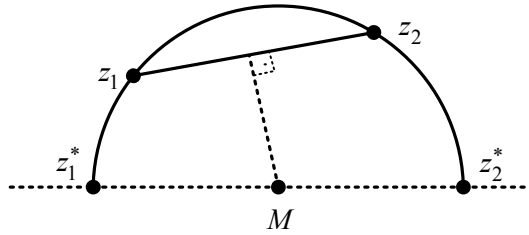
$$\begin{aligned} |\gamma^*|_H &= \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt > \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\left|\frac{dy}{dt}\right|}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{y(t)} dt = \int_0^1 \frac{dy}{y} dt = \ln\left(\frac{b}{a}\right) = |\gamma|_H \end{aligned}$$

bulunur ve $|\gamma^*|_H > |\gamma|_H$ olduğu görülür. O halde z_1 ve z_2 noktalarını birleştiren hiperbolik doğru parçası bu iki noktayı birleştiren Öklid doğru parçasıdır.

Eğer z_1 ve z_2 noktaları hiperbolik düzlemde reel kısımları aynı fakat sıfırdan farklı olan noktalar ise bu noktalar $T(z) = z + \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ şeklinde bir dönüşüm ile sanal eksen üzerine taşınabilirler. $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ olduğundan yukarıdaki

açıklamalar ve Teorem 3.2.1 gereğince, z_1 ve z_2 noktalarını birleştiren hiperbolik doğru parçasının bu noktaları birleştiren Öklid doğru parçası olduğu görülür.

2. Durum: z_1 ve z_2 noktaları hiperbolik düzlemde reel kısımları farklı olan iki nokta olsun. Bu durumda, merkezi reel eksen üzerinde bulunan ve bu noktalardan geçen bir tek C çemberi vardır. Şekil 3.5 deki gibi bu çemberin reel eksenini kestiği noktalar z_1^* ve z_2^* olsun. Teorem 2.5.2 gereğince $T(z_1^*) = 0$ ve $T(z_2^*) = \infty$ olacak şekilde bir $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ dönüşümü vardır. Ayrıca, Möbius dönüşümleri çemberler ve doğruları, çemberler ve doğrulara resmettikleri için $T(C)$ sanal eksenin hiperbolik düzlemde kalan kısmıdır ve $T(z_1)$ ile $T(z_2)$ noktalarını birleştiren hiperbolik doğru parçası bu noktaları birleştiren Öklid doğru parçasıdır. T , hiperbolik doğru parçalarını hiperbolik doğru parçalarına resmettiği için z_1 ve z_2 noktalarını birleştiren hiperbolik doğru parçası, C çemberinin bu iki noktayı birleştiren yayıdır.



Şekil 3.5. İki noktayı birleştiren hiperbolik doğru parçası

Yani, her iki durumda da bu iki noktayı birleştiren bir tek hiperbolik doğru parçası vardır.

Sonuç 3.2.1 *Üst yarı düzlem modeline göre hiperbolik doğru parçaları, reel eksene dik olan Öklid doğru parçaları ve reel eksenini dik kesen Öklid çemberlerinin yaylarıdır.*

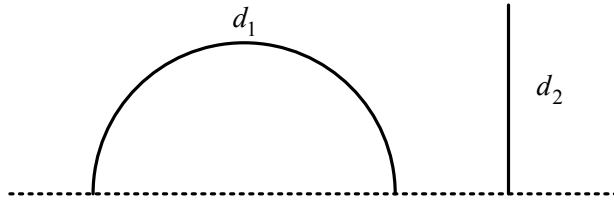
z ve w hiperbolik düzlemde iki nokta olmak üzere, bu iki nokta arasındaki hiperbolik uzaklık, bu noktaları birleştiren hiperbolik doğru parçasının uzunluğu olarak tanımlanır ve $\rho(z, w)$ notasyonu ile gösterilir. Bu şekilde elde edilen $\rho: \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu $\mathbb{H}$ üzerinde bir metriktir ve hiperbolik metrik olarak adlandırılır.

Teorem 3.2.3 $\mathbb{H}$ üzerinde hiperbolik metrik ile Öklid metriği aynı topolojiyi üretirler.

İspat: (Katok, 1992).

3.3. Hiperbolik Doğrular

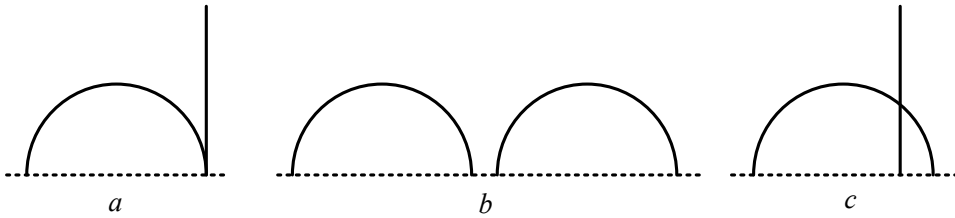
Merkezi reel eksen üzerindeki çemberler ve reel eksene dik Öklid doğrularının hiperbolik düzlemde kalan kısımlarına, hiperbolik doğrular denir. Şekil 3.6 da gösterilen d_2 doğrusunun bir ucu reel eksen üzerindedir, diğer ucunun ise sonsuzda olduğu kabul edilir.



Şekil 3.6. Hiperbolik doğrular

Tanım 3.1.1 d_1 ve d_2 iki farklı hiperbolik doğru olsun. Bu durumda;

- (i) d_1 ve d_2 doğrularının $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ üzerinde bir tek ortak noktaları varsa doğrular paraleldirler (Şekil 3.7 a).
- (ii) d_1 ve d_2 doğrularının $\mathbb{H}$ ve $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ da hiçbir ortak noktaları yoksa bu doğrular ayık paraleldirler (Şekil 3.7 b).
- (iii) d_1 ve d_2 doğrularının hiperbolik düzlemde bir tek ortak noktaları varsa doğrular kesişirler (Şekil 3.7 c).



Şekil 3.7. Paralel, ayık paralel ve kesişen hiperbolik doğrular

3.4. Hiperbolik Düzlemde İzometrilere

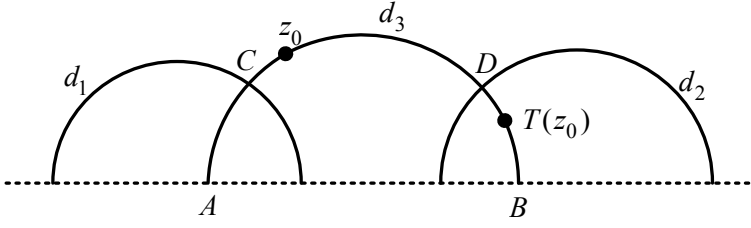
Hiperbolik düzlemin izometrilere yansımalar, ötelemeler, dönmeler, ötelemeli yansımalar ve limit rotasyonlardır. Bu izometrilere yansımalar ve ötelemeli yansımalar, yönelmeyi korumayan izometrilere; ötelemeler, dönmeler ve limit rotasyonlar ise yönelmeyi koruyan izometrilere.

Teorem 3.4.1 *Hiperbolik düzlemin yönelmeyi koruyan izometrilere çift sayıda yansımanın, yönelmeyi korumayan izometrilere tek sayıda yansımanın bileşkesi olarak ifade edilebilirler.*

İspat: (Stillwell, 1992).

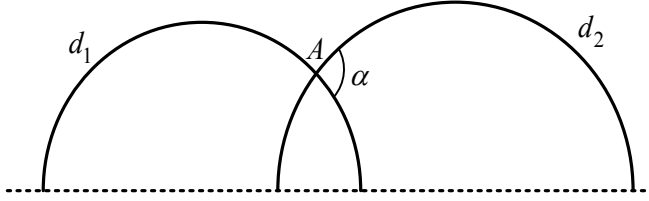
Yansıma: d hiperbolik düzlemde bir doğru olsun. d reel eksenine dik kesen bir yarı doğru veya bir yarı çemberdir. d bir yarı doğru ise bunun üzerindeki yansıma Öklid düzlemindeki yansıma ile aynıdır. d bir yarı çember ise bunun üzerindeki yansıma d üzerindeki inversiyondur.

Öteleme: d_1 ve d_2 hiperbolik düzlemde ayrı paralel iki doğru olsun. Bu durumda d_1 ve d_2 doğrularının bir tek ortak dikmesi vardır. Bu dikme d_3 ile gösterilsin. d_3 doğrusunun sonsuzdaki noktaları A ve B olmak üzere; d_3 doğrusu, d_1 ve d_2 doğrularını C ve D noktalarında kessin (Şekil 3.8). C ve D noktaları arasındaki hiperbolik uzaklık m olmak üzere, T_1 ve T_2 dönüşümleri sırasıyla d_1 ve d_2 doğruları üzerindeki yansımalar olsunlar. $T = T_2 \circ T_1$ dönüşümü d_3 ortak dikmesi boyunca bir ötelemedir. T ötelemesi hiperbolik düzlemde hiçbir noktayı sabit tutmaz. z_0 , d_3 üzerinde bir nokta olmak üzere T ötelemesi, z_0 noktasını d_3 doğrusu üzerinde $2m$ kadar öteler. T ötelemesi d_3 ortak dikmesini küme olarak sabit tutar. Yani $T(d_3) = d_3$ dir. T ötelemesinin tersi olan $T^{-1} = T_1 \circ T_2$ dönüşümü de d_3 ortak dikmesi boyunca bir ötelemedir ve T ötelemesi ile benzer özelliklere sahiptir. Ancak T ötelemesi d_3 doğrusu üzerindeki noktaları A noktasından B noktasına doğru ötelerken T^{-1} ötelemesi tam tersi yönde öteler. Her iki ötelemelerde de öteleme mesafesi $2m$ dir.



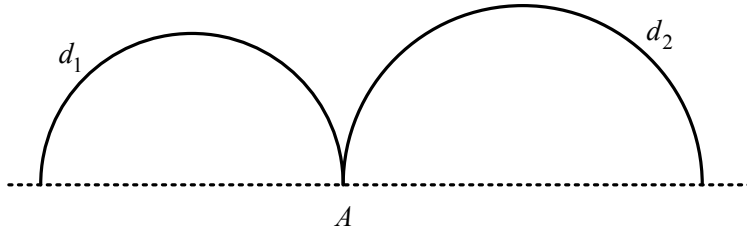
Şekil 3.8. Hiperbolik düzlemde öteleme

Rotasyon: d_1 ve d_2 doğruları hiperbolik düzlemde, aralarındaki dar açı α olacak şekilde bir A noktasında kesişsinler (Şekil 3.9). T_1 ve T_2 sırasıyla d_1 ve d_2 doğruları üzerindeki yansımalar olmak üzere $T = T_1 \circ T_2$ dönüşümü A noktasını sabit tutan bir rotasyondur. $T^{-1} = T_2 \circ T_1$ dönüşümü, T rotasyonunun tersidir ve T rotasyonu ile benzer özelliklere sahiptir. T ve T^{-1} rotasyonları hiperbolik düzlemde A noktası dışındaki noktaları A noktası etrafında 2α kadar döndürürler. Fakat döndürmeler birbirinin tersi yönünde olur.



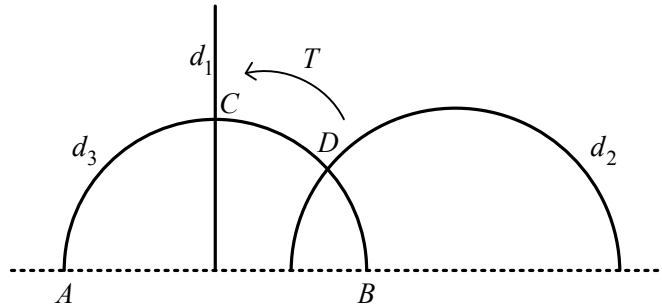
Şekil 3.9. Hiperbolik düzlemde rotasyon

Limit Rotasyon: d_1 ve d_2 hiperbolik düzlemde paralel iki doğru ve bu doğrularının reel eksende kesiştikleri nokta A noktası olsun (Şekil 3.10). d_1 ve d_2 doğruları üzerindeki yansımalar sırasıyla T_1 ve T_2 olmak üzere, $T = T_1 \circ T_2$ dönüşümü A noktasını sabit tutar ve T dönüşümü, A noktasını sabit tutan bir limit rotasyon olarak adlandırılır. $T^{-1} = T_2 \circ T_1$ dönüşümü, T dönüşümünün tersidir ve yine A noktasını sabit tutan bir limit rotasyondur. T ve T^{-1} dönüşümleri A noktasından geçen hiperbolik doğruları yine A noktasından geçen hiperbolik doğrulara resmederler ve hiçbir hiperbolik doğruyu sabit tutmazlar.



Şekil 3.10. Hiperbolik düzlemde limit rotasyon

Ötelemeli Yansıma: d_1 ve d_2 hiperbolik düzlemde ayrıık paralel iki doğru ve d_3 ; uç noktaları A ve B olan ve d_1 ve d_2 doğrularını sırasıyla C ve D noktalarında dik kesen başka bir hiperbolik doğru olsun (Şekil 3.11). T_1 , T_2 ve T_3 dönüşümleri sırasıyla d_1 , d_2 ve d_3 doğruları üzerindeki yansımalar olmak üzere $T = T_1 \circ T_2 \circ T_3$ dönüşümü d_3 doğrusu boyunca bir ötelemeli yansımadır. Bu dönüşüm, d_3 doğrusunu kendi üzerine resmeder ve bu doğrunun uç noktalarını sabit tutar. z_0 , d_3 doğrusu üzerinde bir nokta ise $T(z_0)$ noktası da d_3 doğrusu üzerindedir ve bu iki nokta arasındaki uzaklık C ve D noktaları arasındaki uzaklığın iki katı kadardır. T dönüşümü hiperbolik düzlemde d_3 doğrusu haricinde hiçbir doğruyu sabit tutmaz. T^{-1} dönüşümü T dönüşümü ile benzer özelliklere sahiptir fakat öteleme yönleri birbirlerinin tersidir.



Şekil 3.11. Hiperbolik düzlemde ötelemeli yansıma

3.5. Hiperbolik Üçgenler

Bir Δ hiperbolik üçgen şöyle tanımlanır; $\mathbb{H}$ veya $\mathbb{D}$ modelinde üç nokta verilsin. Bu noktaları birleştiren geodezik doğru parçalarının oluşturacağı üçgen Δ üçgenini tanımlar.

Teorem 3.5.1 l, m, n pozitif tamsayı olsun ve $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1$ olmak üzere iç açıları $\frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{m}$ ve $\frac{\pi}{n}$ olan bir hiperbolik üçgen daima mevcuttur.

İspat: (Jones ve Singerman, 1987).

Böyle bir hiperbolik üçgene bir (l, m, n) -üçgeni denir. Bu çalışmada daha çok $(2, m, n)$ -üçgenleri incelenecektir.

3.6. Hiperbolik Trigonometri

Öklid geometrisinde aynı iç açıya sahip fakat kenar uzunlukları farklı olan üçgenler bulunabilir. Hiperbolik geometride ise iç açıları belli olan hiperbolik üçgenin kenar uzunluklarının değerleri tekdir. Bu uzunluklar hiperbolik Kosinüs ve hiperbolik Sinüs kuralları yardımıyla bulunabilir.

Teorem 3.6.1 Kenar uzunlukları a, b, c ve bu kenarların karşısındaki açılar sırasıyla $\alpha, \beta, \gamma > 0$ olan bir hiperbolik üçgende aşağıdaki kurallar geçerlidir. Bu kurallara hiperbolik Kosinüs kuralları denir.

$$(i) \cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma$$

$$(ii) \cosh c = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}$$

İspat: (Beardon, 1983).

Teorem 3.6.2 Kenar uzunlukları a, b, c ve bu kenarların karşısındaki açılar sırasıyla $\alpha, \beta, \gamma > 0$ olan bir hiperbolik üçgende aşağıdaki kural geçerlidir. Bu kurala hiperbolik Sinüs kuralı denir.

$$\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma}$$

İspat: (Beardon, 1983).

4. RIEMANN YÜZEYLERİNİN ELDE EDİLMESİ

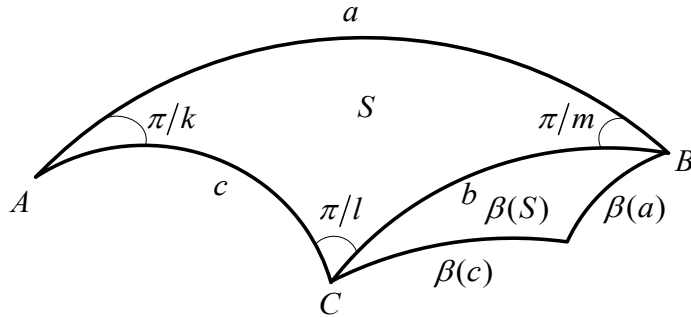
4.1. NEC ve Fuchs Grupları

Hiperbolik düzlemin bütün izometrilere, fonksiyonların bileşke işlemine göre bir grup oluşturur ve bu grup $PGL(2, \mathbb{R})$ notasyonu ile gösterilir. $PGL(2, \mathbb{R})$ grubunun sadece konform dönüşümlerden oluşan alt grubu ise $PSL(2, \mathbb{R})$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 4.1.1 Γ , $PGL(2, \mathbb{R})$ grubunun bir ayrık alt grubu olsun. $\mathbb{H}/\Gamma$ bölüm uzayı kompakt ise Γ grubuna bir NEC grubu denir. Eğer Γ sadece konform dönüşümlerden oluşuyorsa Γ grubuna bir Fuchs grubu denir.

4.2. Üçgensel Gruplar

S , Şekil 4.1 de gösterilen köşeleri A, B, C , kenarları a, b, c ve k, l, m birden büyük ve $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} < 1$ özelliğini sağlayan pozitif tamsayılar olmak üzere, iç açıları $\frac{\pi}{k}, \frac{\pi}{l}$ ve $\frac{\pi}{m}$ olan bir hiperbolik üçgen ve bu üçgenin kenarları üzerindeki yansımalar sırasıyla α, β ve γ olsun.



Şekil 4.1. Hiperbolik bir üçgenin kenarları üzerindeki yansımalar

S hiperbolik üçgeninin b kenarı üzerindeki β yansıması altında görüntüsü $\beta(S)$ hiperbolik üçgenidir. Aynı şekilde S üçgeninin diğer kenarları üzerindeki yansımalar altında da görüntüleri hiperbolik üçgenlerdir. Bu üçgenler kenarları üzerinde tekrar yansıtılır ve bu şekilde devam edilirse hiperbolik düzlem iç açıları

$\frac{1}{k}, \frac{1}{l}, \frac{1}{m}$ olan üçgenlerle kaplanır. S hiperbolik üçgeninin bu yansımalar altında hareketleri düşünüldüğünde $\alpha\beta$ dönüşümü B köşesini sabit tutan m mertebeli, $\gamma\alpha$ dönüşümü A köşesini sabit tutan k mertebeli, $\beta\gamma$ dönüşümü de C köşesini sabit tutan l mertebeli bir dönmedir.

S üçgeninin kenarları üzerindeki bu yansımalar sonlu olmayan bir Γ^* grubu üretir. Bu Γ^* grubunun üreticileri olan dönüşümler yönlenmeyi korumayan dönüşümler oldukları için bu grup bir Fuchs grubu değildir. p hiperbolik düzlemde herhangi bir nokta olmak üzere,

$$\Gamma_p^* = \{f(p) \mid f \in \Gamma^*\}$$

kümesi p noktasının yörüngesidir. Bu kümenin elemanı olan noktalardan her biri yukarıdaki üçgenlerden biri üzerinde yer alır. Bu nedenle Γ_p^* kümesi hiperbolik düzlemin ayrık bir alt kümesidir. O halde, Γ^* grubu bir NEC grubudur. Bu şekilde elde edilen bir gruba bir üçgensel NEC grubu denir. Γ^* grubunun konform dönüşümlerden oluşan Γ alt grubuna ise bir üçgensel Fuchs grubu denir.

Yukarıdaki şekildeki S üçgeni Γ^* grubu için bir temel bölgedir ve $\mathbb{H}/\Gamma^*$ bölüm uzayı topolojik olarak bir diskidir. $S \cup \beta(S)$ çokgeni de Γ grubu için bir temel bölgedir ve $\mathbb{H}/\Gamma$ topolojik olarak bir küredir.

Notasyon: Yukarıda tanımlanan Γ^* ve Γ grupları bu çalışmada sırasıyla $\Gamma^*(k, l, m)$ ve $\Gamma(k, l, m)$ grupları olarak ifade edilecektir.

4.3. Riemann Yüzeyleri

Tanım 4.3.1 S bağlantılı bir Hausdorff topolojik uzayı olsun. S uzayının her s noktası $\mathbb{C}$ in bir açık alt kümesine homeomorf olan, açık bir U komşuluğuna sahipse S uzayına bir yüzey denir.

Tanım 4.3.2 S bağlantılı bir Hausdorff topolojik uzayı olsun. Bir $A = \{(U_i, \Phi_i)\}$ ailesi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa A ailesine, S topolojik uzayı için bir atlas ve (U_i, Φ_i) ikilisine bir pafta denir:

(i) Her bir $U_i \subset S$ açık kümedir ve $\bigcup_{i \in I} U_i = S$ dir.

(ii) Her bir $W_i, \mathbb{C}$ in bir açık alt kümesi olmak üzere, $\Phi_i : U_i \rightarrow W_i$ bir homeomorfizmadır.

Tanım 4.3.3 S bir yüzey olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $\{(\phi_j, U_j) : j \in J\}$ ailesi varsa S yüzeyine bir Riemann yüzeyi denir:

(i) $\{U_j : j \in J\}$, S yüzeyinin açık örtüsüdür.

(ii) Her bir ϕ_j, U_j den $\mathbb{C}$ in açık bir alt kümesine homeomorfizmadır.

(iii) Eğer $U = U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ise $\phi_i(\phi_j)^{-1} : \phi_j(U) \rightarrow \phi_i(U)$, $\phi_j(U)$ ve $\phi_i(U)$ kümeleri arasında analitik bir dönüşümdür.

Teorem 4.3.1 Her basit bağlantılı Riemann yüzeyi aşağıdakilerden birine konform denktir:

(i) Riemann küresi $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$,

(ii) Kompleks düzlem $\mathbb{C}$,

(iii) Üst yarı düzlem $\mathbb{H}$.

İspat: (Jones ve Singerman, 1987).

Teorem 4.3.2 X , cinsi $g > 1$ olan bir kompakt Riemann yüzeyi olsun. X ve $\mathbb{H}/\Gamma$ konform denk olacak şekilde bir Γ Fuchs grubu vardır.

İspat: (Jones ve Singerman, 1987).

Teorem 4.3.3 Γ_1 ve Γ_2 iki Fuchs grubu olsun. Bu durumda $\mathbb{H}/\Gamma_1$ ve $\mathbb{H}/\Gamma_2$ konform denktir ancak ve ancak $g\Gamma_1g^{-1} = \Gamma_2$ olacak şekilde $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ vardır.

İspat: (Jones ve Singerman, 1987).

Tanım 4.3.4 X bir Riemann yüzeyi olsun. Eğer $f : X \rightarrow X$ konform veya anti konform bir homeomorfizma ise bu f homeomorfizmasına X yüzeyinin bir otomorfizması denir.

Bu çalışmada bir X Riemann yüzeyinin bütün otomorfizmalarının oluşturduğu grup $Aut^{\pm}X$; bu grubun sadece konform otomorfizmalardan oluşan alt grubu ise $Aut^{+}X$ notasyonu ile gösterilecektir.

Teorem 4.3.4 Γ bir Fuchs grubu olsun. $N^{\pm}(\Gamma)$ ve $N^{+}(\Gamma)$, Γ grubunun sırasıyla $PGL(2, \mathbb{R})$ ve $PSL(2, \mathbb{R})$ gruplarındaki normalleyenleri olmak üzere,

$$Aut^{\pm}(\mathbb{H}/\Gamma) \cong N^{\pm}(\Gamma)/\Gamma \text{ ve } Aut^{+}(\mathbb{H}/\Gamma) \cong N^{+}(\Gamma)/\Gamma$$

dir.

İspat: (Jones ve Singerman, 1987).

Tanım 4.3.5 S , cinsi $g \geq 1$ olan bir Riemann yüzeyi olsun. Mertebesi 2 ve konform olmayan bir $\sigma : S \rightarrow S$ otomorfizmasına S yüzeyinin bir simetrisi denir. Bu durumda S yüzeyine bir simetrik yüzey denir.

Yukarıdaki tanımda bahsedilen σ simetrisi S yüzeyinde bazı noktaları sabit tutar. Fakat bir yüzeyin, sabit noktası olmayan simetrileri de mevcut olabilir. Bu çalışmada sabit noktaları olan simetriler ele alınacaktır.

Tanım 4.3.6 S , cinsi $g \geq 1$ olan bir Riemann yüzeyi ve σ , S yüzeyinin bir simetrisi olsun. σ simetrisinin sabit noktalarından oluşan küme S yüzeyi üzerinde basit kapalı eğrilerden oluşur. Bu eğrilerin her birine σ simetrisinin bir sabit eğrisi denir.

Harnack teoremine göre σ simetrisinin sabit eğrilerinin sayısı en fazla $g+1$ tanedir.

5. DÜZGÜN FİGÜRLER

Bu bölümde, düzgün figürler hakkında bilgi verilecektir.

5.1. Düzgün Figür

Tanım 5.1.1 Sonlu ve bağlantılı bir G grafinin, kompakt, bağlantılı ve yönlendirilebilir bir S yüzeyine gömülmesine S üzerinde bir figür denir. Burada, $S - G$ yüz (face) adı verilen çokgenlerden oluşur ve bu çokgenlerin her biri bir açık diske homeomorftur. G grafinin köşe ve kenarlarına sırasıyla figürün köşe ve kenarları denir. Eğer bir figürün yüzleri düzgün ve özdeş çokgenlerden oluşuyorsa, bu figüre bir düzgün figür denir.

Tanım 5.1.2 Verilen bir düzgün figürün yüz merkezleri, kenar orta noktaları ve köşelerine bu düzgün figürün geometrik noktaları denir.

Notasyon: Bu çalışmada, bir düzgün figürün köşeleri, kenar orta noktaları ve yüz merkezleri sırasıyla **0**, **1** ve **2** notasyonu ile gösterilecektir.

Tanım 5.1.3 Aynı yüzey üzerinde bulunan ancak mevcut düzgün figürün yüz merkezlerini köşe kabul eden ve bu köşelerin her biri mevcut düzgün figürün sadece bir kenarını kesecek şekilde yeni kenarlarla birleştirilmesiyle elde edilen yeni figür de bir düzgün figürdür. Bu düzgün figüre mevcut düzgün figürün dual figürü denir.

Tanım 5.1.4 μ bir düzgün figür olsun. μ figürünün her bir yüzü n kenarlı bir düzgün çokgen ve her bir köşesinden çıkan kenarların sayısı m ise μ figürünün tipi $\{m, n\}$ olarak tanımlanır.

$\{m, n\}$ tipindeki bir düzgün figürün duali olan düzgün figürün tipinin $\{n, m\}$ olduğu kolayca görülebilir.

Tanım 5.1.5 Bir S Riemann yüzeyi üzerinde bulunan bir düzgün figürün cinsi, S yüzeyinin cinsi olarak tanımlanır.

5.2. Düzgün Figürlerin Sınıflandırılması

μ bir S yüzeyi üzerinde $\{m, n\}$ tipinde bir düzgün figür ve F , μ figürünün bir yüzü olsun. F yüzünün merkezi, F yüzüne komşu olan kenar orta noktalar ve köşelere geodezik doğru parçalarıyla birleştirilsin. Bu durumda F , $2n$ adet üçgene bölünür. Bu üçgenlerin her birinin iç açıları $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{m}$ ve $\frac{\pi}{n}$ olur ve bir $(2, m, n)$ -üçgenidir.

Eğer μ figürünün cinsi 0 ise, bu üçgenler küre üzerindedir ve bu durumda $(2, m, n)$ -üçgeninin iç açıları toplamı $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{m} + \frac{\pi}{n} > \pi$ olur.

Düzenleme yapılırsa, cinsi 0 olan $\{m, n\}$ tipindeki düzgün figürler, $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$ eşitsizliği çözülerek bulunur.

Benzer şekilde, $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \frac{1}{2}$ ifadelerinden sırasıyla cinsi 1 ve 1 den büyük olan figürler elde edilir.

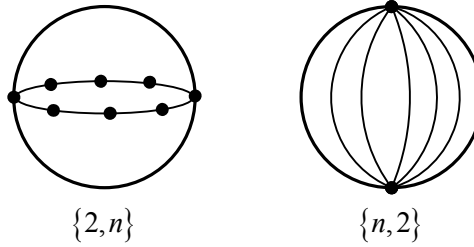
5.2.1 Cinsi 0 olan düzgün figürler

Yukarıda belirtildiği gibi, $\{m, n\}$ tipindeki bir düzgün figürün küre üzerinde olması için gerek ve yeter şart $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$ olmasıdır. Burada $m, n \geq 2$ olmalıdır.

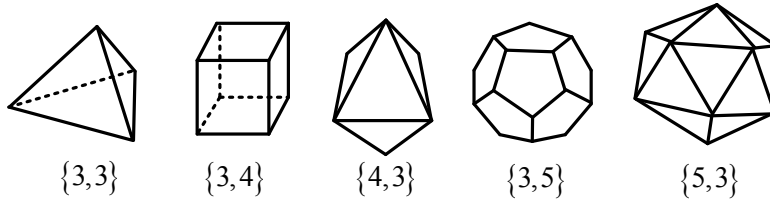
$m = 2$ için $\frac{1}{n} > 0$ yani $n > 0$ olup her n değeri için küre üzerinde $\{2, n\}$ tipinde düzgün figürler bulunabilir. Aynı şekilde duali olan $\{n, 2\}$ tipinde düzgün figürler elde edilebilir. $m = 3$ için $\frac{1}{3} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$ eşitsizliğinden $n < 6$ elde edilir. Buradan $n = 2, 3, 4, 5$ değerleri bulunur. $n = 2$ durumu daha önce incelenmişti. O halde, $m = 3$ durumu için $\{3, 3\}$, $\{3, 4\}$ ve $\{3, 5\}$ tipinde düzgün figürler elde edilir. Bunlar sırasıyla düzgün dört yüzlü (Tetrahedron), küp (Hexahedron) ve düzgün oniki yüzlüye (Dodecahedron) karşılık gelen figürlerdir. $m = 4$ için $\frac{1}{4} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$ eşitsizliğinden $n < 4$ bulunur ve bu durumda, $\{3, 4\}$ figürünün duali olan $\{4, 3\}$

figürü bulunur. Bu figür de düzgün sekiz yüzlüye (Octahedron) karşılık gelir. $m = 5$ için ise yeni figür olarak $\{3,5\}$ figürünün duali olan $\{5,3\}$ figürü elde edilir. Bu figür ise düzgün yirmi yüzlüye (Icosahedron) karşılık gelir. $m \geq 6$ için yukarıda bulunanların dışında yeni düzgün figürler elde edilmez. Aynı işlemler n için uygulanırsa aynı figürler bulunur.

Sonuç olarak, cinsi 0 olan düzgün figürler $n \geq 2$ için $\{2,n\}$, $\{n,2\}$ ve $\{3,3\}$, $\{3,4\}$, $\{3,5\}$, $\{4,3\}$, $\{5,3\}$ tipindeki figürlerdir.



Şekil 5.1. Küre üzerinde $\{2,n\}$ ve $\{n,2\}$ tipindeki figürler



Şekil 5.2. Küre üzerindeki diğer düzgün figürlere karşılık gelen cisimler

5.2.2 Cinsi 1 olan düzgün figürler

$\{m,n\}$ tipindeki bir düzgün figürün cinsinin 1 olması için gerek ve yeter şart $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$ olmasıdır. Bu denklem çözülerek, cinsi 1 olan bir düzgün figürün tipinin $\{4,4\}$, $\{3,6\}$ veya $\{6,3\}$ olduğu görülür. Burada, tipi $\{3,6\}$ ve $\{6,3\}$ olan figürler birbirinin dualidir ve aynı tor yüzeyi üzerinde bulunurlar. Bu yüzey, dar açıları 60 derece olan bir eşkenar dörtgenin karşılıklı kenarlarının uygun şekilde birleştirilmesiyle elde edilir. Tipi $\{4,4\}$ olan figürün duali ise kendisi ile

aynı tiptedir. Bu figürü üzerinde bulunduran tor yüzeyi, bir karenin karşılıklı kenarlarının uygun şekilde birleştirilmesiyle elde edilir.

5.2.3 Cinsi 1 den büyük olan düzgün figürler

$\{m, n\}$ tipindeki bir düzgün figürün cinsinin 1 den büyük olması için gerek ve yeter şart $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \frac{1}{2}$ olmasıdır. Bu eşitsizliği sağlayan pozitif tam sayıların sonlu olmadığı açıktır. $m, n \geq 5$ şartını sağlayan tüm m ve n pozitif tam sayılarına karşılık $\{m, n\}$ tipinde düzgün figürler mevcuttur. $m = 3$ için $n \geq 7$ ve $m = 4$ için $n \geq 5$ olmalıdır. Benzer irdelemeler $n = 3$ ve $n = 4$ durumları için de geçerlidir.

Yukarıdaki şartları sağlayan m ve n tamsayılarına karşılık $\{m, n\}$ tipinde bir düzgün figür her yüzey üzerinde bulunmayabilir. Örneğin $\{3, 7\}$ tipindeki bir düzgün figürü üzerinde bulunduran sonsuz Riemann yüzeyi vardır. Klein'in Riemann yüzeyi olarak bilinen ve cinsi 3 olan yüzey, bu özelliği sağlayan en küçük cinsli yüzeydir.

6. PLATONİK YÜZEYLER

6.1. Platonik Yüzey

Tanım 6.1.1 S bir Riemann yüzeyi olsun. Eğer S yüzeyi üzerinde bir düzgün figür bulunuyorsa bu S yüzeyine bir Platonik Riemann yüzeyi denir.

Teorem 6.1.1 $S = \mathbb{H}/\Omega$ bir Riemann yüzeyi ve μ , S yüzeyi üzerinde tipi $\{m, n\}$ olan bir düzgün figür olsun. Bu durumda Ω , $\Gamma(2, m, n)$ grubunun bir normal alt grubudur.

İspat: (Jones ve Singerman, 1987).

6.2. Sabit Eğrilerin Desenleri

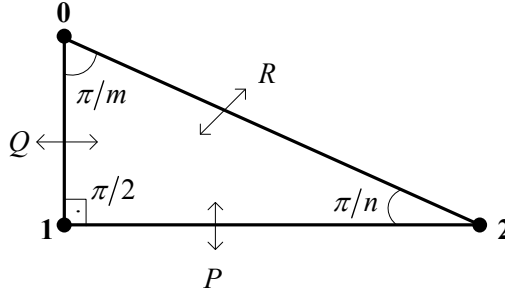
μ bir $S = \mathbb{H}/\Omega$ yüzeyi üzerinde $\{m, n\}$ tipinde bir düzgün figür olsun. Eğer S yüzeyinin bir otomorfizması μ figürünü invaryant bırakıyorsa bu otomorfizma aynı zamanda μ figürünün de bir otomorfizmasıdır. μ figürünün tüm otomorfizmaları bu şekilde elde edilir ve bileşke işlemine göre bir grup oluşturur. Bu grup ve sadece konform otomorfizmalardan oluşan alt grubu sırasıyla $Aut^\pm \mu$ ve $Aut^+ \mu$ notasyonuyla gösterilecektir. Eğer Ω grubunun $PGL(2, \mathbb{R})$ deki normalleyeni $\Gamma^*(2, m, n)$ grubu ise $Aut^\pm \mu$ ve $Aut^\pm S$ grupları izomorftur. Aksi halde, $Aut^\pm \mu$ grubu $Aut^\pm S$ grubunun bir öz alt grubudur (Singerman, 1974).

μ figürünün bütün yüzleri daha önce açıklandığı gibi $2n$ adet $(2, m, n)$ -üçgenine bölünsün. Böylece, S yüzeyi $|Aut^\pm \mu|$ adet üçgene bölünmüş olur.

T, S yüzeyi üzerinde bir $(2, m, n)$ -üçgeni ve T üçgenin kenarlarındaki yansımalar P, Q, R olsun. Ayrıca bu üç yansıma

$$P^2 = Q^2 = R^2 = (PQ)^2 = (QR)^m = (RP)^n = 1$$

bağıntılarını sağlasın. Bu yansımalar $Aut^\pm \mu$ grubunu üretir.



Şekil 6.1. Üçgenin kenarındaki yansımalar

M , S yüzeyi üzerinde bir sabit eğri olsun. M sabit eğrisi μ figürünün bazı geometrik noktalarından geçer ve bu geometrik noktalar

$$\underbrace{a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k}_1 \underbrace{a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k}_2 \dots \underbrace{a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k}_N \quad (6.2.1)$$

şeklinde bir geometrik dizi oluşturur. Burada $a_i \in \{0,1,2\}$, $1 \leq i \leq k$ dir. Bu diziye M sabit eğrisinin deseni denir. Bu dizinin tekrar eden her bir $a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k$ parçasına ise desenin bir halkası denir. O halde bir yüzey üzerindeki bir sabit eğrinin deseni, sonlu halkadan oluşan bir zincir biçimindedir.

Bir desenin mertebesi desendeki halka sayısı olarak tanımlanır. (6.2.1) deseni $(a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k)^N$ olarak kısaltılabilir. Küre üzerindeki $\{3,3\}$ tipindeki düzgün figürün bütün sabit eğrileri **010212** şeklinde desene sahiptir. Bu desenin, halka sayısı 1 olduğundan mertebesi 1 dir.

Çizelge 6.1 de küre üzerindeki düzgün figürler ve bunlara karşılık gelen sabit eğri ve desenleri verilmiştir.

Çizelge 6.1. Küre üzerindeki düzgün figürler ve desenleri

Figür Tipi	Sabit Eğri Sayısı	Desen
$\{3,3\}$	6	010212
$\{3,4\}$	3	(12)⁴
	6	(0102)²
$\{3,5\}$	15	(010212)²

μ bir S Riemann yüzeyi üzerinde $\{m, n\}$ tipinde bir düzgün figür olsun. Bu figüre karşılık gelen sabit eğrilerin desenleri m ve n sayılarının tek veya çift olmasına bağlıdır. Örnek olarak, m ve n sayıları tek sayı olsun. Bu durumda μ figürünün yansımaları tarafından sabit tutulan her bir eğrinin deseni $(\mathbf{010212})^k$ şeklindedir. Burada k bir pozitif tam sayıdır.

Benzer şekilde m ve n sayılarının diğer durumlarına göre oluşan desenler belirlenebilir. Bu desenler Çizelge 6.2 de verilmiştir.

Çizelge 6.2. Sabit eğrilerin desenleri

Durum	Yansımalar	Desen Halkası
m ve n tek	P, Q, R	010212
m tek n çift	P	12
	Q, R	0102
m ve n çift	P	12
	Q	01
	R	02
m çift n tek	P, R	0212
	Q	01

Çizelge 6.2 için notlar:

(i) Çizelgede desenlerin sadece bir halkası verilmiştir.

(ii) m ve n sayılarının her ikisinin de tek olduğu durumda μ figürünün tüm yansımaları eşleniktir ve yüzey üzerindeki her bir sabit eğrinin deseni $(\mathbf{010212})^k$ biçimindedir. Burada k bir pozitif tam sayıdır.

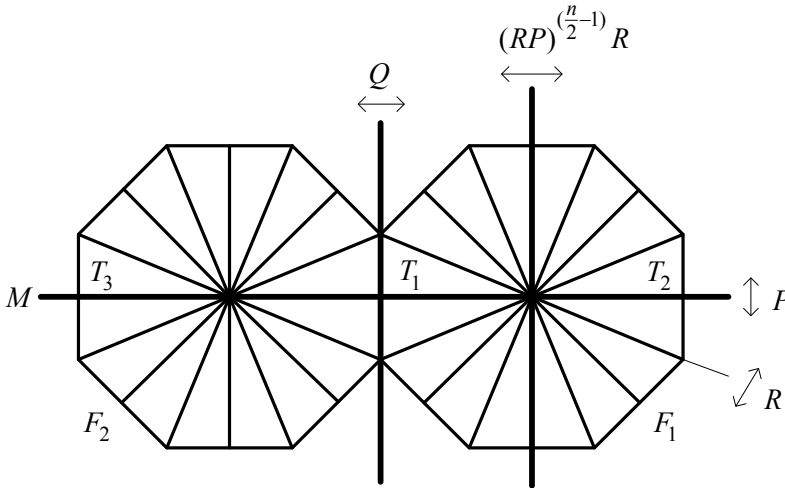
(iii) m sayısının tek, n sayısının çift olduğu durumda; Q ve R yansımaları $Aut^{\pm}\mu$ grubunda eşleniktir. Ancak P yansıması Q ve R yansımaları ile eşlenik olmayabilir ve P nin $(\mathbf{12})^k$ desenli en az bir sabit eğrisi vardır. Benzer şekilde, Q ve R yansımalarının her birinin $(\mathbf{0102})^k$ desenli en az bir sabit eğrisi vardır. Burada k bir pozitif tam sayıdır. Benzer irdelemeler diğer durumlar için de geçerlidir.

Sonuç 6.2.1 *Bir yüzey üzerindeki bir sabit eğrinin deseni aşağıda verilen halkalardan biri yardımıyla elde edilir: 01, 02, 12, 0102, 0212, 010212.*

6.3. Dönel Otomorfizmalar

μ bir S Riemann yüzeyi üzerinde $\{m, n\}$ tipinde bir düzgün figür, M bu figürün bir yansıması tarafından sabit tutulan bir eğri ve M eğrisinin deseninin mertebesi 1 den büyük olsun. M eğrisini kümesel olarak sabit tutan μ figürünün iki tane konform otomorfizması vardır. Bu otomorfizmalar birbirlerinin tersidir ve M eğrisini zıt yönde döndürürler. Bu otomorfizmalara M eğrisinin dönel otomorfizmaları denir. Eğer M eğrisinin deseninin mertebesi 1 ise, bu desen bir adet halkadan oluşur ve dönel otomorfizması sadece birim dönüşümdür.

Şimdi M sabit eğrisinin desenlerini inceleyelim. İlk olarak M eğrisinin deseni $(12)^k$ olsun. Burada k bir pozitif tam sayıdır. Çizelge 6.2 de görüleceği gibi bu desen sadece n sayısının çift olduğu durumlarda karşımıza çıkar. M eğrisinin k adet yüzü, merkezlerinden geçerek ikiye böldüğü açıktır. Bu yüzler $F_1, F_2, \dots, F_k$ olsun. Her bir yüzün $2n$ tane $(2, m, n)$ -üçgenine bölünebileceği biliniyor. M eğrisi, F_1 yüzündeki bir T_1 üçgeninin 12-kenarından geçsin ve T_1 üçgenin kenarları üzerindeki yansımalar P, Q ve R olsun.



Şekil 6.2. Dönel otomorfizma

Bu yansımalar $Aut^\pm \mu$ grubunu üretir. Şekil 6.2 de görüldüğü gibi, μ figürünün $(RP)^{\binom{n-1}{2}} R$ otomorfizması T_1 üçgenini F_1 yüzünde bulunan bir T_2 üçgenine yansıtır. Q yansıması ise T_2 üçgenini F_2 yüzündeki bir T_3 üçgenine yansıtır. Böylece $Q(RP)^{\binom{n-1}{2}} R$ otomorfizması T_1 üçgenini T_3 üçgenine resmeder. $Q(RP)^{\binom{n-1}{2}} R$ otomorfizmasının mertebesinin k olduğu ve M eğrisini kümesel olarak sabit tuttuğu açıktır. O halde, bu otomorfizma M eğrisinin bir dönel otomorfizmasıdır. Eğer $M^*(12)^k$ desenli bir başka eğri ise M^* eğrisinin dönel otomorfizmaları ile M eğrisinin dönel otomorfizmaları aynı eşlenik sınıfındadırlar (Melekoğlu, 2008).

Diğer desenlere karşılık gelen dönel otomorfizmalar da benzer şekilde elde edilebilir ve sonuçlar Çizelge 6.3 de verilmiştir.

Çizelge 6.3. Desenler ve dönel otomorfizmalar

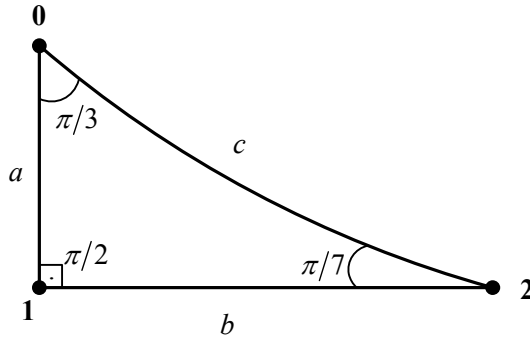
Durum	Desen Halkası	Dönel Otomorfizma
1	12	$(RP)^{\binom{n-1}{2}} RQ$
2	02	$(PR)^{\binom{n-1}{2}} P(QR)^{\binom{m-1}{2}} Q$
3	01	$(RQ)^{\binom{m-1}{2}} RP$
4	0102	$(PR)^{\binom{n-1}{2}} P(QR)^{\frac{m-1}{2}} P(RQ)^{\frac{m-1}{2}}$
5	010212	$(QR)^{\frac{m-1}{2}} P(RQ)^{\frac{m-1}{2}} (PR)^{\frac{n-1}{2}} Q(RP)^{\frac{n-1}{2}}$
6	0212	$(PR)^{\frac{n-1}{2}} Q(RP)^{\frac{n-1}{2}} (QR)^{\binom{m-1}{2}} Q$

6.4. Sabit Eğrilerin Uzunlukları

Cinsi 1 den büyük ve $\{m, n\}$ tipinde bir düzgün figür bulunduran bir Riemann yüzeyi üzerinde bir sabit eğri, bu yüzey üzerinde bulunan $(2, m, n)$ -üçgenlerinin bazı kenarlarından geçer. O halde, bir sabit eğri sonlu sayıda $(2, m, n)$ -üçgeninin

kenarlarından oluşur. Hiperbolik Sinüs ve Kosinüs kuralları yardımı ile bu tür üçgenlerin kenar uzunlukları hesaplanabildiği için sabit eğrilerin uzunluğu da hesaplanabilir.

Örnek 6.4.1 S' cinsi 3 ve 168 adet konform otomorfizması bulunan yüzey olsun. Bu yüzey üzerinde $\{3, 7\}$ tipinde bir düzgün figür bulunduğu biliniyor. Bu yüzey üzerinde 28 adet sabit eğri vardır ve her birinin deseni **010212010212010212** dir (Klein, 1878). Bu sabit eğrilerin her biri $(2, 3, 7)$ -üçgenlerinin 6 adet **01**, 6 adet **02** ve 6 adet **12** kenarından oluşur. Bir $(2, 3, 7)$ -üçgeninin $\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{3}$ ve $\frac{\pi}{2}$ iç açılarının karşısındaki kenarların uzunlukları sırasıyla a, b ve c olsun.



Şekil 6.3. Herhangi bir $(2, 3, 7)$ -üçgeni

Bu hiperbolik üçgen için Kosinüs kuralından,

$$\cosh a = \frac{\cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{3}}$$

olur ve hesaplamalar sonucunda a kenarının hiperbolik uzunluğu $a \cong 0,2831282$ bulunur.

Bir kenarın uzunluğu ve iç açıları belli olduğu için hiperbolik Sinüs kuralından,

$$\frac{\sinh a}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{\sinh b}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{\sinh c}{\sin \frac{\pi}{2}}$$

olur ve eşitliklerden yararlanılarak c kenarının hiperbolik uzunluğu $c \cong 0,6206718$ ve b kenarının hiperbolik uzunluğu $b \cong 0,5452747$ olarak bulunur. Kenar uzunlukları belli olduğu için sabit eğrinin uzunluğu yaklaşık 8,6944483 olarak hesaplanır.

Benzer şekilde herhangi bir platonik yüzey üzerindeki sabit eğrilerin uzunlukları hesaplanabilir. Aşağıdaki çizelgelerde cinsi 2 ve cinsi 3 olan yüzeyler üzerindeki sabit eğrilerin uzunlukları verilmiştir (Melekoğlu, 1998).

Çizelge 6.4. Cinsi 2 olan yüzeyler üzerindeki sabit eğrilerin uzunlukları

Figür Tipi	Desen	Sabit Eğri Uzunluğu
{5,10}	0102	6.3676503
	12	3.2338433
{4,6}	(12)⁴	7.6603142
	(02)²	4.5848633
	(01)²	2.6339157
{3,8}	(12)²	3.0571418
	(0102)²	4.9656634

Çizelge 6.5. Cinsi 3 olan yüzeyler üzerindeki sabit eğrilerin uzunlukları

Figür Tipi	Desen	Sabit Eğri Uzunluğu
{7,14}	0102	8.6944483
	12	4.1519716
{4,12}	(12)²	6.6515435
	(01)²	3.3257717
	02	3.9833047
{3,12}	(12)²	5.1067474
	(0102)²	7.5112634
{4,8}	(12)²	4.8969048
	(01)²	3.0571418
	(02)²	6.1142836
{4,6}	(12)²	3.8301571
	(01)⁴	5.2678315
	(02)²	4.5848633
{3,8}	(12)⁴	6.1142836
	(0102)²	4.9656634
{3,7}	(010212)³	8.6944483

7. SONUÇ

Bu tez çalışmasında ilk önce platonik Riemann yüzeyleri üzerindeki sabit eğri tanımı verildi ve sabit eğri desenleri tanıtılıp bu desenler sınıflandırıldı. Ayrıca adına dönel otomorfizma denilen; her sabit eğriye karşılık birbirinin tersi olan ve eğriyi ters yönlerde döndüren iki otomorfizmanın olduğu gösterildi. Son olarak bu otomorfizmalar yardımı ile platonik Riemann yüzeyleri üzerindeki sabit eğrilerin uzunluklarının hesaplanma metodu gösterildi ve cinsi 2 ve 3 olan platonik Riemann yüzeyleri üzerindeki sabit eğrilerin uzunlukları hesaplanıp çizelge halinde verildi.

KAYNAKLAR

- Beardon, A.F. 1983. The Geometry of Discrete Groups. Springer-Verlag, xii+337 pp., New York, Heidelberg, Berlin.
- Churchill, R.V., Brown J.W. 1990. Complex Variables and Applications. McGraw-Hill, xvi+362 pp., New York.
- Coxeter, H.S.M., Moser, W.O.J. 1980. Generators and Relations for Discrete Groups. Springer-Verlag, ix+161 pp., New York, Berlin.
- Jones, G.A., Singerman, D. 1978. Theory of maps on orientable surfaces. **Proc.Lond.Math.Soc.**, 37(3): 273-307.
- Jones, G.A., Singerman, D. 1987. Complex Functions. Cambridge University Press, xiv+342 pp., Cambridge.
- Katok, S. 1992. Fuchsian Groups. The University of Chicago Press, 186 p., London.
- Klein, V.F. 1878. Ueber die transformation siebenter ordnung der elliptischen functionen. **Math.Ann.**, 14: 428-471.
- Macbeath, A.M. 1967. The classification of non-Euclidean plane crystallographic groups. **Canad.J.Math.**, 19: 1192-1205.
- Melekoğlu, A. 1998. Symmetries of Riemann Surfaces and Regular Maps. University of Southampton, Ph.D. Thesis, 126 p., Southampton.
- Melekoğlu, A. 2008. A geometric approach to the reflections of regular maps. **Ars Combin.**, 89(3): 355-367.
- Melekoğlu, A., Singerman, D. 2008. Reflections of regular maps and Riemann surfaces. **Rev.Mat.Iberoam.**, 24 (3): 921-939.
- Singerman, D. 1974. On the structure of non-Euclidean crystallographic groups. **Proc.Camb.Phil.Soc.**, 76: 233-240.
- Singerman, D. 1974. Symmetries of Riemann surfaces with large automorphism group. **Math.Ann.**, 210: 17-32.
- Stillwell, J. 1992. Geometry of Surfaces. Springer-Verlag, 216 p., New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Serhan ULUSAN
Doğum Yeri ve Tarihi : İstanbul 07.07.1984

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Adnan Menderes Üniversitesi
Yüksek Lisans Öğrenimi : Adnan Menderes Üniversitesi
Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

- a) Yayınlar
 - SCI
 - Diğer
- b) Bildiriler
 - Uluslararası
 - Ulusal
- c) Katıldığı Projeler

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl :

İLETİŞİM

E-posta Adresi : serhan_ulusan@hotmail.com
Tarih : 04.01.2010