

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU  
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

PNÖMATİK TEKERLERİN TERMOMEKANİK DAVRANIŞININ  
SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİYLE İNCELENMESİ

Mak.Yük.Müh. H.Tuncay YÜKSEL

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde  
"Doktor"

Ünvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir

109838

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 10 Ağustos 2001

Tezin Savunulduğu Tarih : 01 Mart 2002

109838

Tez Danışmanı : Prof.Dr. Sami KARADENİZ

.....  
Karadeniz

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Mustafa SAVCI

.....  
Mustafa Savcı

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Ragıp ERDÖL

.....  
Ragıp Erdöl

Enstitü Müdürü : Prof.Dr. Asım KADIOĞLU

.....  
A. Kadioğlu

TRABZON 2002

## ÖNSÖZ

Öncelikle kendisiyle çalışma fırsatını tanıyan sayın Prof. Dr. Sami KARADENİZ'e hem isabetli konu seçiminde hemde tez çalışmam sırasında sağlamış olduğu destekten dolayı sonsuz teşekkür ederim.

Ayrıca çalışmam sırasında desteğini esirgemeyen sayın Dr Yusuf AZAK 'a, yapıcı eleştirileriyle yardımcı olan sayın Dr. Mustafa ERDENER'e, Araş. Gör. Vahap VAHAPOĞLU 'na teşekkürü bir borç bilirim.

Son olarak çalışmam süresince göstermiş oldukları manevi destekten dolayı annem ve babama sonsuz teşekkür ederim.

H.Tuncay YÜKSEL

## İÇİNDEKİLER

|                                                          |     |
|----------------------------------------------------------|-----|
| ÖNSÖZ .....                                              | II  |
| İÇİNDEKİLER .....                                        | III |
| ÖZET .....                                               | VI  |
| SUMMARY .....                                            | VI  |
| ŞEKİLLER DİZİNİ .....                                    | VII |
| TABLolar DİZİNİ .....                                    | XII |
| SEMBOLLER DİZİNİ .....                                   | XIV |
| 1. GENEL BİLGİLER .....                                  | 1   |
| 1.1. Giriş .....                                         | 1   |
| 1.2. Tezin Konusu ve Kapsamı .....                       | 2   |
| 1.3. Literatür Araştırması .....                         | 3   |
| 1.4. Pnömatik Tekerin Yapısı ve Malzemeleri .....        | 19  |
| 1.4.1. Topuk telleri .....                               | 19  |
| 1.4.2. Topuk teli dolgusu .....                          | 20  |
| 1.4.3. Gövde katmanları .....                            | 20  |
| 1.4.4. Kuşak .....                                       | 20  |
| 1.4.5. Kuşak üstü dolgusu .....                          | 21  |
| 1.4.6. Taban .....                                       | 22  |
| 1.4.7. Yanak .....                                       | 22  |
| 1.4.8. İç yüzey kauçuk katmanı .....                     | 22  |
| 1.5. Pnömatik Teker Çeşitleri .....                      | 22  |
| 1.5.1. Çapraz Gövde Katmanlı Teker .....                 | 22  |
| 1.5.2. Çapraz Gövde Katmanlı ve Kuşaklı Teker .....      | 22  |
| 1.5.3. Radyal Gövde Katmanlı Teker .....                 | 22  |
| 1.6. Kauçuğun Şekil Değiştirme Enerjisi Fonksiyonu ..... | 26  |
| 1.6.1. Moleküler Yaklaşım .....                          | 27  |
| 1.6.2. Phenomenological Yaklaşım .....                   | 28  |
| 1.7. Lineer Olmayan Sonlu Elemanlar Formülasyonu .....   | 36  |
| 1.7.1. Virtüel İş Prensibi .....                         | 37  |
| 1.7.2. Total Lagrangian Formülasyonu .....               | 40  |

|                                                                                           |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1.7.2.1. Total Lagrangian Formülasyonun Üç Boyutlu Elemana Uyarlanması ...                | 43  |
| 1.7.3. Sıkıştırılmaz Malzemeler İçin Sonlu Elemanlar Formülasyonu .....                   | 48  |
| 1.8. Kord Takviyeli Kauçuk Kompozitlerin Sonlu Elemanlar Formülasyonu.....                | 52  |
| 1.8.1. Rebar Eleman Formülasyonu .....                                                    | 53  |
| 1.9. Isı Transfer Denklemlerinin Sonlu Elemanlar Formülasyonu.....                        | 56  |
| 1.10. Viskoelastik Davranış ve Kayıp Enerjinin Hesaplanması .....                         | 63  |
| 1.11. Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümü.....                                             | 65  |
| 2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....                                                                | 69  |
| 2.1. Termomekanik Analiz için Kullanılan Yaklaşım.....                                    | 69  |
| 2.2. Deformasyon Modülü .....                                                             | 69  |
| 2.3. Kayıp Modülü .....                                                                   | 71  |
| 2.4. Termal Modül .....                                                                   | 73  |
| 2.5. Modelde Kullanılan 175/70 R13 Tekerin Malzeme ve Geometrik açıdan tanımlanması ..... | 74  |
| 2.6. Radyal Otomobil Tekerinin Sonlu Elemanlar Modeli.....                                | 77  |
| 2.7. Kullanılan Sonlu Elemanlar Ağları ve Sınır Koşulları .....                           | 79  |
| 3. BULGULAR VE TARTIŞMA .....                                                             | 84  |
| 3.1. Analizlerden Elde Edilen Sonuçlar.....                                               | 85  |
| 3.2 Deformasyon Modülünün İrdelenmesi .....                                               | 150 |
| 3.3 Kayıp Modülünün İrdelenmesi .....                                                     | 156 |
| 3.4. Isı Modülünün İrdelenmesi .....                                                      | 158 |
| 4. SONUÇLAR .....                                                                         | 160 |
| 5. ÖNERİLER.....                                                                          | 164 |
| 6. KAYNAKLAR .....                                                                        | 165 |
| ÖZGEÇMİŞ.....                                                                             | 172 |

## ÖZET

Genel olarak pnömatik tekerlerin termomekanik davranışı, oldukça karmaşık, zaman bağımlı bir olaydır. Bu problem, bir çok araştırmacı tarafından, lineer olmayan malzeme özelliği, büyük yer değişimleri ve karmaşık sınır koşulları nedeniyle meydana okuyan bir problem olarak tanımlanmaktadır.

Bu tez çalışmasında, termomekanik analiz için deformasyon, kayıp ve termal modül olmak üzere üç analiz modülü içeren ardışıl bir yaklaşım kullanılmıştır. Deformasyon modülünde, tekerin kord destekli bölümleri için rebar elemanların kullanıldığı, kauçuk bölümler içinde Mooney-Rivlin malzeme modelinin kullanıldığı tam ölçekli bir sonlu elemanlar modeli kurulmuştur. İç basıncın uygulanan yüzeye devamlı dik kalması sağlanarak, ilk olarak şişme analizi (santrifüj kuvvetlerin de dikkate alındığı) daha sonra da teker ile zemin arasında temas analizi yapılmıştır. Kayıp modülünde, deformasyon modülünden elde edilen gerilmeler ve şekil değişimleri kullanılarak, analitik bir yaklaşımla dönmekte olan tekerde oluşan ısı analitik bir yaklaşımla viskoelastik teori kullanılarak hesaplanmıştır. Son olarakta, hesaplanan kayıp enerjinin termal modüle aktarılmasıyla, kararlı hal durumu için sıcaklık dağılımı hesaplanmış ve bu sıcaklık değerleri ile deformasyon modülü kullanılarak termal gerilme analizi yapılmıştır. Farklı örnekler çözülerek elde edilen sonuçlar diğer benzer çalışmalarla karşılaştırılmış ve uyum içinde olduğu belirlenmiştir. Bu tez çalışmasında, sonlu elemanlar modelleri için, kullanıcı alt programları ile birlikte MSC.MARC/MENTAT programı kullanılmıştır.

### **Anahtar Kelimeler :**

Lineer olmayan sonlu elemanlar analizi, Teker, Kauçuk, Lineer olmayan malzeme davranışı, Isı üretimi, Geometrik olarak lineer olmama, Viskoelastisite

## **SUMMARY**

### **Investigation of Thermomechanical Behaviour of Pneumatic Tires by Finite Element Method**

In general, thermomechanical behavior of a pneumatic tire is a highly complex transient phenomenon. This problem has been defined as a challenging problem for many researchers due to material nonlinearities, inhomogeneties, large deformations and complicated boundary conditions.

In this thesis, a sequential approach consisting of three main analysis modules: deformation, dissipation and thermal modules were used. For the deformation module, a full-scale finite element model of a tire is established using rebar elements for the cord reinforced part and the Mooney-Rivlin material model for rubber. With the follower pressure force, firstly inflation (including centrifugal forces) and then contact analyses between tire and pavement were carried out. Using calculated stresses and strains from the deformation module, an analytic approach for the calculation of the heat source in the rolling tire is established using the viscoelastic theory for the dissipation module. Finally, temperature distribution was calculated with the thermal module in a steady state case, using the distribution of heat generation rate which is obtained from the dissipation module and then with this temperature distributions thermal stresses were calculated using deformation module. Several examples are solved and results are compared with the literature. The calculated stresses, strains and thermal distribution are in good agreement with the existing data. During this thesis, MARC/MENTAT program used with user subroutines for finite element modeling.

#### **Key Words :**

Nonlinear finite element analysis, Tire, Rubber, Heat Generation, Contact problem, Material Nonlinearity, Geometric nonlinearity, Viscoelasticity

## ŞEKİLLER DİZİNİ

|                                                                                                                                                                                                                                                                               |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Şekil 1. Pnömatik tekerin bileşenleri (1) Taban, (2) Yanak, (3,4) Kuşak katmanları, (5) Gövde katmanları, (6) Topuk telleri, (7) Topuk teli dolgusu (apex), (8) Dönen gövde katmanı (turn-up), (9) Topuk kauçuğu, (10) Topuk sargısı, (11) Kuşak katmanları ara dolgusu ..... | 21 |
| Şekil 2. Çapraz gövde katmanlı teker .....                                                                                                                                                                                                                                    | 23 |
| Şekil 3. Çapraz gövde katmanlı ve kuşaklı teker .....                                                                                                                                                                                                                         | 24 |
| Şekil 4. Radyal gövde katmanlı teker .....                                                                                                                                                                                                                                    | 25 |
| Şekil 5. a) Başlangıçta ebatları ( $X, Y, Z$ ) olan numune şekil değiştirdikten sonra ( $x, y, z$ ) ebatlarına ulaşmaktadır. b) Bu şekil dağılımının numunedeki herhangi bir moleküler zincire yansıması .....                                                                | 26 |
| Şekil 6. $t = 0$ dan $t = \tau$ anına kadar sürekli ortamın şekil ve konum dağılımı ...                                                                                                                                                                                       | 29 |
| Şekil 7. Zaman aralığının parçalara bölünmesi .....                                                                                                                                                                                                                           | 36 |
| Şekil 8. Üç boyutlu sürekli ortam .....                                                                                                                                                                                                                                       | 37 |
| Şekil 9. Total Lagrange formülasyonunun şematik gösterimi .....                                                                                                                                                                                                               | 40 |
| Şekil 10. İzoparametrik koordinatlarda tanımlanmış katı eleman .....                                                                                                                                                                                                          | 43 |
| Şekil 11. Rebar elemandaki kordların modellenmesi .....                                                                                                                                                                                                                       | 54 |
| Şekil 12. Sekiz düğümlü izoparametrik elemandaki rebar katları .....                                                                                                                                                                                                          | 55 |
| Şekil 13. Isı transfer etkisindeki üç boyutlu eleman .....                                                                                                                                                                                                                    | 57 |
| Şekil 14. Kayıp modülü ve faz açısı arasındaki ilişkiyi gösteren histeresis çevrimi .....                                                                                                                                                                                     | 64 |
| Şekil 15. Sinüzoidal yük etkisindeki kauçuk bir cismin gerilme ve şekil değişimi arasında oluşan faz açısının şematik gösterimi .....                                                                                                                                         | 65 |
| Şekil 16. Tam Newton-Raphson yönteminin şematik gösterimi .....                                                                                                                                                                                                               | 66 |
| Şekil 17. Değiştirilmiş Newton-Raphson yönteminin şematik gösterimi .....                                                                                                                                                                                                     | 67 |
| Şekil 18. İteratif termomekanik yaklaşımın blok diyagramı .....                                                                                                                                                                                                               | 70 |
| Şekil 19. Dönmekte olan basit pnömatik teker modeli .....                                                                                                                                                                                                                     | 71 |
| Şekil 20. Tekerdeki farklı malzeme bölgeleri .....                                                                                                                                                                                                                            | 75 |
| Şekil 21. Pnömatik tekerin tanım boyutları .....                                                                                                                                                                                                                              | 77 |
| Şekil 22. Pnömatik tekerin kesitindeki ağ yapısı ve malzeme bölgeleri (Model 2) .....                                                                                                                                                                                         | 81 |

|                                                                                                                                                                                    |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Şekil 23. Pnömatik tekerin üç boyutlu sonlu elemanlar modeli<br>(Model 2) .....                                                                                                    | 82 |
| Şekil 24. Pnömatik tekerin üç boyutlu sonlu elemanlar modelinde<br>kullanılan sınır koşulları(Model 2) .....                                                                       | 83 |
| Şekil 25. Şişirme basıncı (2 Bar) etkisinde tekerde oluşan Von Mises<br>gerilmesinin dağılımı (Model 1) .....                                                                      | 85 |
| Şekil 26. Şişirme basıncı (2 Bar) + santrifuj kuvvet (80 km/h) etkisinde<br>tekerde oluşan Von Mises gerilmesinin dağılımı (Model 1) .....                                         | 86 |
| Şekil 27. Şişirme basıncı, santrifüj kuvvet ve araç yükü (10mm 'lik temas<br>yüzey deplasmanında) etkisinde tekerde oluşan Von Mises<br>gerilmesinin dağılımı (Model 1) .....      | 87 |
| Şekil 28. Şişirme basıncı, santrifüj kuvvet ve araç yükü (10mm 'lik temas<br>yüzey deplasmanında) etkisinde tekerde oluşan Von Mises<br>gerilmesinin dağılımı (Model 1) .....      | 88 |
| Şekil 29. Şişirme basıncı, santrifüj kuvvet ve araç yükü (25mm 'lik temas<br>yüzey deplasmanında) etkisinde tekerde oluşan Von Mises<br>gerilmesinin dağılımı (Model 1) .....      | 89 |
| Şekil 30. Şişirme basıncı (2 Bar) etkisinde tekerde oluşan eşdeğer şekil<br>değiştirmenin dağılımı (Model 1) .....                                                                 | 90 |
| Şekil 31. Şişirme basıncı (2 Bar) + santrifuj kuvvet (80 km/h) etkisinde<br>tekerde oluşan eşdeğer şekil değiştirmenin dağılımı (Model 1) .....                                    | 91 |
| Şekil 32. Şişirme basıncı, santrifüj kuvvet ve araç yükü (20 mm'lik<br>temas yüzey deplasmanında) etkisinde tekerde oluşan<br>eşdeğer şekil değiştirmenin dağılımı (Model 1) ..... | 92 |
| Şekil 33. Şişirme basıncı, santrifüj kuvvet ve araç yükü (25 mm'lik<br>temas yüzey deplasmanında) etkisinde tekerde oluşan<br>eşdeğer şekil değiştirmenin dağılımı (Model 1) ..... | 93 |
| Şekil 34. Şişme basıncında (2 Bar) oluşan Cauchy kayma<br>gerilmesi dağılımı (Model 1) .....                                                                                       | 94 |
| Şekil 35. 25 mm'lik temas yüzey deplasmanında oluşan Cauchy<br>kayma gerilmesi dağılımı (Model 1) .....                                                                            | 95 |

|                                                                                                                                                                                    |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Şekil 36. 25 mm'lik temas yüzey deplasmanında oluşan radyal yer<br>değiştirme dağılımı (Model 1) .....                                                                             | 96  |
| Şekil 37. 35 mm'lik temas yüzey deplasmanında oluşan eksenl yer<br>değiştirme vektörünün dağılımı (Model 1) .....                                                                  | 97  |
| Şekil 38. 10 mm'lik temas yüzey deplasmanında oluşan temas<br>kuvveti (Model 1) .....                                                                                              | 98  |
| Şekil 39. 20 mm'lik temas yüzey deplasmanında oluşan temas<br>kuvveti (Model 1) .....                                                                                              | 99  |
| Şekil 40. 25 mm'lik temas yüzey deplasmanında oluşan temas<br>kuvveti (Model 1) .....                                                                                              | 100 |
| Şekil 41. Şişirme basıncı (2 Bar) etkisinde tekerde oluşan Von Mises<br>gerilmesinin dağılımı (Model 2) .....                                                                      | 101 |
| Şekil 42. Şişirme basıncı (2 Bar) + santrifuj kuvvet (80 km/h) etkisinde<br>tekerde oluşan Von Mises gerilmesinin dağılımı (Model 2) .....                                         | 102 |
| Şekil 43. Şişirme basıncı, santrifuj kuvvet ve araç yükü (10mm 'lik temas<br>yüzey deplasmanında) etkisinde tekerde oluşan Von Mises<br>gerilmesinin dağılımı (Model 2) .....      | 103 |
| Şekil 44. Şişirme basıncı, santrifuj kuvvet ve araç yükü (10mm 'lik temas<br>yüzey deplasmanında) etkisinde tekerde oluşan Von Mises<br>gerilmesinin dağılımı (Model 2) .....      | 104 |
| Şekil 45. Şişirme basıncı, santrifuj kuvvet ve araç yükü (25mm 'lik temas<br>yüzey deplasmanında) etkisinde tekerde oluşan Von Mises<br>gerilmesinin dağılımı (Model 2) .....      | 105 |
| Şekil 46. Şişirme basıncı (2 Bar) etkisinde tekerde oluşan eşdeğer şekil<br>değiştirmenin dağılımı (Model 2) .....                                                                 | 106 |
| Şekil 47. Şişirme basıncı (2 Bar) + santrifuj kuvvet (80 km/h) etkisinde<br>tekerde oluşan eşdeğer şekil değiştirmenin dağılımı (Model 2) .....                                    | 107 |
| Şekil 48. Şişirme basıncı, santrifuj kuvvet ve araç yükü (20 mm'lik<br>temas yüzey deplasmanında) etkisinde tekerde oluşan<br>eşdeğer şekil değiştirmenin dağılımı (Model 2) ..... | 108 |

|                                                                                                                                                                              |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Şekil 49. Şişirme basıncı, santrifüj kuvvet ve araç yükü (25 mm'lik temas yüzey deplasmanında) etkisinde tekerde oluşan eşdeğer şekil değiştirmenin dağılımı (Model 2) ..... | 109 |
| Şekil 50. Şişme basıncında (2 Bar) oluşan Cauchy kayma gerilmesi dağılımı (Model 2) .....                                                                                    | 110 |
| Şekil 51. 25 mm'lik temas yüzey deplasmanında oluşan Cauchy kayma gerilmesi dağılımı (Model 2) .....                                                                         | 111 |
| Şekil 52. 25 mm'lik temas yüzey deplasmanında oluşan radyal yer değiştirme vektörünün değişimi (Model 2) .....                                                               | 112 |
| Şekil 53. 25 mm'lik temas yüzey deplasmanında oluşan eksenl yer değiştirme vektörünün dağılımı (Model 2) .....                                                               | 113 |
| Şekil 54. 10 mm'lik temas yüzey deplasmanında oluşan temas kuvveti (Model 2) .....                                                                                           | 114 |
| Şekil 55. 20 mm'lik temas yüzey deplasmanında oluşan temas kuvveti (Model 2) .....                                                                                           | 115 |
| Şekil 56. 35 mm'lik temas yüzey deplasmanında oluşan temas kuvveti (Model 2) .....                                                                                           | 116 |
| Şekil 57. Termal analizde kullanılan sonlu elemanlar modeli ve sınır koşulları (Model 2) .....                                                                               | 117 |
| Şekil 58. Termal analizde kullanılan malzeme bölgeleri (Model 2) .....                                                                                                       | 118 |
| Şekil 59. 20 mm'lik temas yüzeyi deplasmanında oluşan sıcaklık dağılımı (Model 1) .....                                                                                      | 119 |
| Şekil 60. 20 mm'lik temas yüzeyi deplasmanında ısı akısı (Model 1) .....                                                                                                     | 120 |
| Şekil 61. 25 mm'lik temas yüzeyi deplasmanında oluşan sıcaklık dağılımı (Model 1) .....                                                                                      | 121 |
| Şekil 62. 25 mm'lik temas yüzeyi deplasmanında ısı akısı (Model 1) .....                                                                                                     | 122 |
| Şekil 63. 20 mm'lik temas yüzeyi deplasmanında oluşan sıcaklık dağılımı (Model 2) .....                                                                                      | 123 |
| Şekil 64. 20 mm'lik temas yüzeyi deplasmanında ısı akısı (Model 2) .....                                                                                                     | 124 |
| Şekil 65. 25 mm'lik temas yüzeyi deplasmanında oluşan sıcaklık dağılımı (Model 2) .....                                                                                      | 125 |

|                                                                                                                         |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Şekil 66. 25 mm'lik temas yüzeyi deplasmanında ısı akısı (Model 2).....                                                 | 126 |
| Şekil 67. 20 mm'lik temas yüzeyi deplasmanında oluşan sıcaklık dağılımı (100 km/h)(Model 2).....                        | 127 |
| Şekil 68. 20 mm'lik temas yüzeyi deplasmanında ısı akısı (100 km/h)(Model 2) .....                                      | 128 |
| Şekil 69. 25 mm'lik temas yüzeyi deplasmanında oluşan sıcaklık dağılımı (100 km/h)(Model 2).....                        | 129 |
| Şekil 70. 25 mm'lik temas yüzeyi deplasmanında ısı akısı (100 km/h)(Model 2) .....                                      | 130 |
| Şekil 71. 25mm'lik temas yüzeyi deplasmanında eşdeğer termal şekil değiştirme dağılımı (Model 1) .....                  | 131 |
| Şekil 72. 25mm'lik temas yüzeyi deplasmanında eşdeğer termal şekil değiştirme dağılımı (Model 2) .....                  | 132 |
| Şekil 73.25mm'lik temas yüzeyi deplasmanında termal yüklemenden sonra oluşan Von Mises gerilmeleri (Model 2).....       | 133 |
| Şekil 74. 25mm'lik temas yüzeyi deplasmanında termal yüklemenden sonra oluşan kayma gerilmeleri (Model 2) .....         | 134 |
| Şekil 75. Teker kesiti üzerinde seçilen elemanlar .....                                                                 | 135 |
| Şekil 76. 25mm'lik temas yüzeyi deplasmanında termal yüklemenden sonra oluşan maksimum şekil değişimi (Model 2) .....   | 136 |
| Şekil 77. 25mm'lik temas yüzeyi deplasmanında termal yüklemenden sonra oluşan maksimum yanak deplasmanı (Model 2) ..... | 137 |
| Şekil 78. Eleman 317'nin çevresel yöndeki eşdeğer gerilme değişimi.....                                                 | 138 |
| Şekil 79. Eleman 317'nin çevresel yöndeki eşdeğer şekil değişimi .....                                                  | 139 |
| Şekil 80. Eleman 324'ün çevresel yöndeki eşdeğer gerilme değişimi.....                                                  | 140 |
| Şekil 81. Eleman 324'ün çevresel yöndeki eşdeğer şekil değişimi .....                                                   | 141 |
| Şekil 82. Eleman 336'nın çevresel yöndeki eşdeğer gerilme değişimi.....                                                 | 142 |
| Şekil 83. Eleman 336'nın çevresel yöndeki eşdeğer şekil değişimi .....                                                  | 143 |
| Şekil 84. Eleman 350'nin çevresel yöndeki eşdeğer gerilme değişimi.....                                                 | 144 |
| Şekil 85. Eleman 350'nin çevresel yöndeki eşdeğer şekil değişimi .....                                                  | 145 |

|                                                                                                       |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Şekil 86. Eleman 317 çevresel yöndeki eşdeğer gerilme değişimine<br>uydurulan harmonik fonksiyon..... | 146 |
| Şekil 87. Eleman 317'nin oluşturmuş olduğu histeresis çevrimi .....                                   | 147 |
| Şekil 88. Eleman 350'nin oluşturmuş olduğu histeresis çevrimi .....                                   | 148 |
| Şekil 89 Karkas kordlarında farklı yüklemelerde oluşan gerilmeler (Model 1)...                        | 149 |



## TABLÖLAR DİZİNİ

|                                                                                                                   |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tablo 1. Kauçuk ve Çelik Malzemelerin Termal Özellikleri. ....                                                    | 74 |
| Tablo 2. Teker kesitinde farklı hızlardaki ısı taşınım katsayıları. ....                                          | 74 |
| Tablo 3. 175/70 R13 tekerin boyutları. ....                                                                       | 75 |
| Tablo 4. 175/70 R13 tekerin sonlu elemanlar analizinde kullanılan<br>Mooney-Rivlin malzeme modeli sabitleri. .... | 76 |
| Tablo 5. 175/70R13 tekerin gövde ve kuşak katmanları kordlarının<br>mekanik özellikleri. ....                     | 76 |
| Tablo 6. Sonlu elemanlar modellerinde kullanılan eleman<br>ve düğüm sayıları. ....                                | 79 |



## SEMBOLLER DİZİNİ

- $\alpha$  : Kord yönlendirme açısı  
 $\varepsilon_{ij}$  : Birim şekil değişimi tansörü bileşenleri ( $i, j = 1, 2, 3$ )  
 $\sigma_{ij}$  : Gerilme tansörü bileşenleri  
 $\nu_{ij}$  : Poisson oranı  
 $A_i$  :  $i$  bileşenin kesit alanı  
 $V_i$  :  $i$  bileşenin hacimsel oranı  
 $S_{ij}$  : İkinci Piola-Kirchhoff gerilme tansörü bileşenleri  
 $C_{ijkl}$  : Malzeme özellikleri tansörü  
 $\lambda_i$  :  $i$  doğrultusundaki germe oranı  
 $t$  : zaman  
 $X_i$  : Malzeme koordinatları  
 $x_i$  : Uzayda sabit koordinat sistemi  
 $\mathbf{R}$  : Yer vektörü  
 $\mathbf{u}$  : Yer değiştirme vektörü  
 $\mathbf{F}$  : Şekil değiştirme gradyeni  
 $\mathbf{C}$  : Sağ Cauchy-Green şekil değişim tansörü  
 $I_i$  : Sağ Cauchy-Green şekil değişim tansörü invariantları  
 $W$  : Şekil değişim enerjisi  
 $p$  : Hidrostatik basınç  
 $t_{ij}$  : Cauchy gerilmesi (gerçek gerilme)  
 $G$  : Kayma şekil değişimi modülü  
 $K$  : Bulk modülü  
 $D_{ijkl}$  : Kauçuğun artımsal malzeme özellikleri tansörü
- Diğer semboller kullanıldıkları yerlerde tanımlanmışlardır.

## 1.GENEL BİLGİLER

### 1.1. Giriş

Yapısı, çalışma koşulları ve bu koşullarda oluşan yükler düşünüldüğünde, pnömatik tekerler mekanik açıdan oldukça karmaşık bir problem olarak tanımlanabilir. Yapısal olarak incelendiğinde, pnömatik teker yapı, kord takviyeli kauçuk kompozitlerin bilinen en karmaşık uygulaması olmakla birlikte ticari olarakta en başarılı uygulamasıdır. Kord takviyeli kauçuk kompozitleri diğer kompozitlerden ayıran en önemli fark; kompozit yapıyı oluşturan malzemler arasındaki mekanik özelliklerin ayrı karakterlerde olmasıdır. Örneğin diğer kompozit yapılarda bileşenlerin birbirine olan katılık oranı 10 iken bu oran kord takviyeli kauçuk kompozitlerde 30000 veya daha fazla olabilmektedir. İlave olarak çeki ve bası karakterli yüklerde göstermiş oldukları davranış farklılığı da dikkate alınması gereken noktalardan biridir.

Geometrik açıdan incelendiğinde ise pnömatik tekerler matematiksel bir fonksiyon olarak tam tanımlanamayan bir yapıya sahiptirler. Doğal olarak bu durum kurulacak olan sayısal modeller için, sınır koşullarının da değişken olduğu düşünüldüğünde ilave zorluklar anlamına gelmektedir. Sayısal modeller açısından bir başka zorluk ise, malzeme davranışının lineer olmaması yanında, problemde büyük şekil değişimleri, büyük yer değişimleri ve büyük dönmeler nedeniyle lineer olmayan sayısal modellerin kullanılması zorunluluğudur.

Pnömatik tekerlerden çalışma sırasında, yük taşıma kapasitesi, tahrik ve frenleme momentlerini taşıyabilme, boyutsal kararlılık, aşınmaya karşı direnç, küçük yuvarlanma direnci, yol tutma, patlamaya karşı emniyet, sessizlik ve ekonomiklik gibi fonksiyonların sağlanması beklenmektedir [1,2]. Doğaldır ki bu kadar fazla ve çeşitli olan beklentinin bir arada gerçekleştirilmesi hem sayısal modelleme hemde konstrüktif açıdan kolay değildir.

Yukarıda sıralamaya çalıştığımız özelliklerinden dolayı, pnömatik tekerler tasarım mühendisleri için hala güncelliğini korumaya devam etmektedir. Günümüzde hızla gelişen bilgisayar teknolojisinin yardımıyla, özellikle çok yüksek işlemci hızları ve de-

polama kapasitelerinin artmasıyla sonlu elamanlar yöntemi gibi sayısal tekniklerin hesaplama gücünün artması, teker tasarım çalışmalarını da hızlandırmıştır.

## 1.2. Tezin Konusu ve Kapsamı

Dinamik yük altında çalışan pnömatik tekerlerde karşılaşılan en önemli problemlerden biri, kauçuk malzemenin viskoelastik özelliği nedeniyle ısınma sonucu oluşan hasarlardır. Bu nedenle pnömatik tekerlerin termal analizleri ve sıcaklık nedeniyle oluşan gerilme durumunun belirlenmesi önem kazanmaktadır.

Bu tez çalışmasında kararlı halde dönmekte olan bir pnömatik tekerin termomekanik analizi sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak, ardışıl bir yaklaşım kullanılarak, yapılmaya çalışılmıştır. Genel olarak bakıldığında, pnömatik tekerlerin termomekanik davranışı oldukça karmaşık zaman bağımlı bir olaydır. Elde edilen problem iç kayıplar ve sürtünmeden kaynaklanan ısı üretimi etkisinde dinamik lineer olmayan etkileşimli (couple) termovizkoelastik bir probleminin çözümlenmesini gerektirmektedir. Bu tez çalışmasında, ilk olarak deformasyonların hesaplandığı, sonra kayıp enerjinin analitik olarak elde edildiği ve daha sonra da elde edilen bu kayıp enerjinin ısı kaynağı olarak kullanıldığı termal analizlerin yapıldığı üç aşamalı bir modelleme stratejisi kullanılarak pnömatik tekerdeki sıcaklık dağılımı elde edilmeye ve bu sıcaklık dağılımıyla tekrar gerilme ve şekil değişimleri hesaplanmaya çalışılmıştır.

Tez çalışması sırasında Türkiyede bulunan lastik üretici firmalarından BRİSA ve PETLAS ile yapılan görüş alış verişi doğrultusunda, yapılan çalışmanın ülkemizde bu konudaki bilgi ihtiyacına ışık tutacağı düşünülmektedir.

Tez beş ana bölümden oluşmaktadır. Tezin birinci bölümünde öncelikle, günümüze kadar olan pnömatik tekerler için yapılmış sayısal incelenmiştir. Problemin anlaşılabilmesi için pnömatik tekerin yapısı tanıtıldıktan sonra problemin çözümü için gerekli teorik alt yapı verilmeye çalışılmıştır. Öncelikle kauçuk malzemelerin şekil değiştirme enerji fonksiyonları bir özet şeklinde tanıtılmaya çalışıldıktan sonra, lineer olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ve ısı transfer denklemlerinin sonlu elemanlar formülasyonu çıkarılmıştır. Daha sonra tez çalışması sırasında kord takviyeli kompozit yapının modellenmesinde kullanılan rebar eleman formülasyonu tanıtılmış ve viskoelastik davranış ve kayıp enerjinin hesaplanması üzerinde durulmuştur. Son olarak lineer olmayan

denklem sistemlerinin çözümü için Newton-Raphson yöntemi tartışılmıştır.

İkinci bölümde ise, tez çalışmasında termomekanik davranışın modellenmesinde kullanılan yaklaşım tanıtılmıştır. Bu yaklaşım sayısal karşılaştırmalar yapılabilmesi için iki farklı sonlu elemanlar ağına uygulanmış ve elde edilen sonuçlar grafikler halinde sunulmuştur.

Üçüncü bölümde elde edilen bulgular doğrultusunda, pnömatik tekerin deformasyon mekanizması ve termal davranışı, tez çalışması çerçevesinde geliştirilen modelleme stratejisi göz önünde bulundurularak elde edilen sonuçlar doğrultusunda tartışılmıştır.

Son olarakta elde edilen bulgular doğrultusunda dördüncü bölümde sonuçlar değerlendirilerek sonraki çalışmalar için beşinci bölümde öneriler sunulmuştur.

### 1.3. Literatür Araştırması

Günümüzde kullanılan pnömatik tekerler, ilk kullanılmaya başlandığı yıllardan, günümüze değin, yapılan araştırma-geliştirme çalışmaları sonucunda, oldukça önemli bir değişime uğramıştır.

Bu gelişim sürecine bakıldığında, iyileştirme çalışmalarında analitik çözüm tekniklerinin, pnömatik lastik tekerleklerin karmaşık olan yapılarından dolayı, uzun bir süre etkin ve verimli bir şekilde kullanılamadığı görülür. Bu nedenle, ilk yıllarda daha çok, oldukça zahmetli ve zaman kaybına neden olan, kullanım sırasından elde edilen bilgilerden yararlanma ve yapılan deneysel çalışmaların pnömatik tekerin gelişim sürecinde etkili olduğu görülür.

Analitik çözümlerin bu gelişim sürecine katılması ile birlikte, doğal olarak iyileşmeler hem daha hızlı ve hem de daha ekonomik olmaya başlamıştır. Bu çalışmalar, tekerin geometrik olarak düzgün olmaması, heterojen yapısı ve etki altında kaldığı yüklerin karmaşıklığı açısından oldukça zor bir mekanik problemi olması nedeniyle 1970'li yıllara kadar istenilen hızda gerçekleştirilememiştir [3]. Nitekim hala tekerin tamamını birden temsil edebilecek analitik bir çözüm mümkün görülmemektedir. Bir çok mekanikçi tarafından, "meydan okuyan problem" tanımlaması, teker problemi için halen kullanılmaktadır. 1960'lı yıllardan itibaren bilgisayar teknolojisindeki gelişmeyle paralel olarak, kullanılan sayısal çözüm tekniklerinin, özellikle sonlu elemanlar yöntemi

mindeki gelişmeler ve yöntemin etkin kullanımı ile birlikte diğer mühendislik alanlarında olduğu gibi, lastik teknolojisinde de çok hızlı bir gelişim süreci yaşanmaya başlanmıştır [4].

Burada, bu gelişim süreci içerisinde yapılan çalışmalar ve kullanılan sayısal modeller sırasıyla incelenecektir.

Kullanılan ilk pnömatik teker modelleri; Clark ve arkadaşları [5] tarafından geliştirilen elastik zemine oturan halka, yay ve kiriş modellerdir. Bu modellerde genel olarak, taban ön gerilmeli yay veya halka, yanaklar ise tabanı destekleyen elastik zemin olarak düşünülmüştür. Clark ve arkadaşlarının modellerinde tam ölçekli teker deneylerinde ele edilen eşdeğer teker parametreleri kullanılmıştır. Bu modellerin, eşdeğer parametrelerin oluşturulabilmesi için çok kapsamlı deneyler gerektirmesi, parametrelerin belli bölgelerde geçerli olması ve bu geçerlilik bölgelerinin iyi bir şekilde belirlenememesi gibi nedenlerden dolayı kullanımı oldukça sınırlıdır.

İkinci olarak karşımıza çıkan lastik modelleri, şişme basıncının yalnızca kordlardaki çekme gerilmeleri ile taşındığının kabul edildiği kord-ağ modelleridir [5-6]. Bu modellerde, yükü taşıdığı varsayılan kord-ağ yapısı, kordların yönlendirilme açısı, kordun elastik özellikleri ve şişirme basıncına bağlı olarak denge konumuna kadar şekil değiştirir. Bu modeller kullanılarak çevresel ve eksenel doğrultudaki gerilmeler ve şekil değiştirmiş tekerin profili belirlenir. Bu model, kordun boy değişimi ihmal edilmiş, kord-ağ kinematiğinde kord-ağı geometrisi ile ilgili şekil değişiminin, kordun kendi eksenine doğrultusundaki şekil değişiminden daha az olması esasına dayanır [6]. Ancak bu modeller; gövde katmanlarının eğilme şekil değişimine maruz kalmaları ve kord-ağ yapısını çevreleyen kauçuk yapıyı ihmal etmesi nedeniyle yalnızca tekerin boyutsal karalılığının analitik olarak incelenmesi için kullanılabilir [7].

Karşımıza çıkan diğer bir model ise, kord-ağ modellerinde göz önüne alınmayan kauçuk yapının katılığını dikkate alan membran modellerdir. Membran modeller; eğilme momentlerinin dikkate alınmadığı lineer veya lineer olmayan kabuk teorisine dayanmaktadır. Membran modellerde yük; ince cidarlı katmanlardan oluşan kord-kauçuk yapı tarafından taşındığı varsayılır. Bu nedenle lineer membran teorisi kord-ağ metoduna göre bir avantaj sunmamaktadır. Bununla birlikte lineer olmayan membran teorisi ve moment terimleri içermeyen yaklaşım düz bir zemine karşı şişirilen membran profi-

linin hesaplanmasında kullanılır. Lineer olmayan membran teorisi tekerin genel davranışındaki eğilimleri belirlerken, teker-zemin temas analizi gibi daha genel problemlerin çözümünde dikkate alınması gereken kabuğun eğilme rijitliği ve kompozit özelliklerinin anlaşılmasında kolaylık sağlar. Ancak membran analizi; ani yükleme, malzeme özellikleri veya geometri değişikliklerini modelleyememekte, temas bölgesinde, membran yüzeyine dik doğrultudaki şekil değişimlerini hesaplayamamaktadır. İlave olarak, yüzey eğriliklerinin ani olarak değiştiği veya katmanların yönlenmesindeki süreksizliklerin olduğu bölgelerde yerel kuvvetler hesaplanamamaktadır.

Membran teoride dikkate alınmayan eğilme etkileri kabuk modellerde dikkate alınmıştır. Bu modellerde temas, topuk ve ani yüzey eğriliğinin değiştiği bölgelerin yerel etkileri hesaba katılmaktadır. Tekerin karmaşık şekli, değişken kalınlıklar, değişken kompozit özellikler ve büyük şekil değişimleri nedeniyle teker analizi için, klasik ince kabuk teorisi direkt olarak uygulanamaz. Kirchhoff hipotezindeki düzlem bölgeler deformasyondan sonrada düzlem kalır ifadesi tekerde farklı katlardaki farklı deformasyonlar nedeniyle tam olarak geçerli değildir. Yapılan bazı kabuller, örneğin lastik katların kendi orta düzlemlerine göre simetrik olmayan tabakalar halinde, değişen kord açıları ile istiflenmeleri gibi, sonuca etki etmektedir. Analizde kullanılan basit mesnet koşulları lastik çarpılmasını önleyen teker-jant arasında oluşan kuvvetleri ihmal etmektedir. Örneğin uçak lastiğinde olduğu gibi hesaplanan profil, deneysel olarak elde edilen şişmiş profil ile uygunluk göstermesine rağmen bazı şekil değişimleri, kesme kuvvetleri ve momentler ölçülen değerlerden oldukça farklılık göstermiştir. Bu yaklaşımla elde edilen denklemlerin çözümü için kullanılan sonlu farklar yöntemi oldukça zaman alıcıdır. Bunun nedeni her yük artımında gerekli yük artımını bulmak için deneme yanılma yöntemine başvurulmasıdır. Sonuç olarak bu modeller şişme ve dönme problemlerinin analizleri için sınırlı olsa bir sonuç vermelerine rağmen diğer yükleme koşulları için kullanılamazlar.

Robecchi [8] karmaşık bir malzeme yapısına sahip olan otomobil tekerinin, kauçuk katmanların etkilerinin ve daha da önemlisi farklı karakterlerdeki katmanların birleştirilmesinden doğan etkileri dikkate alabilecek orthotropik malzeme modeli kullanarak, iç basınç ve santrifüj kuvvetler altında çalışan bir radyal otomobil tekerini, lineer olmayan kabuk model kullanarak analitik olarak incelemiştir.

Kabuk elemanın ilk kullanıldığı çalışmalardan birisi Ridha [9] tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada, pişirme sırasında büzülme (çekmeler) nedeniyle oluşan lastik deformasyonları hesaplanmaya çalışılmıştır. Analizde kompozit malzeme teorisi ve sonlu elemanlar yönteminde kullanılan malzeme modelleme tekniği kullanılmış ve yapısal davranış hesaplanmaya çalışılmıştır. Wilson tarafından geliştirilen sabit şekil değişimi ve küçük şekil değiştirme teorisine sahip, izotropik malzeme modeli kullanan toroidal kabuk eleman, elemanın bulunduğu bölgeye göre değişebilen orthotropik malzeme modelini kullanılacak şekilde iyileştirilerek kullanılmıştır. Büzülme kuvvetleri eşdeğer yükler şeklinde düğümlere etki ettirilmiştir.

DeEskinazi, Yang ve Soedel [10], düzgün bir yüzeye temas eden radyal kuşaklı bir otomobil tekerinin gerilme şekil değiştirme analizi için üç öteleme, iki dönme olmak üzere, her bir düğümde beş serbestlik derecesine sahip, üçgen plaka sonlu elemanlar kullanılarak eksenel simetrik bir model kurmuşlardır. Modelde, radyal teker profilini dört farklı homojen bölgeye ayırmışlardır. Her bir bölge için malzeme özellikleri deneysel olarak elde edilmiştir. Lamina özellikleri üçgen elemanın katılık matrisinin formülasyonuna ilave edilmiştir. Şekil değiştirme denklemlerinde kuadratik terimler içeren artımsal katılık matrisi üçgen eleman için formüle edilmiştir. Analizde geometrik lineer olmayan bir sonlu elemanlar formülasyonu kullanılmıştır. Tekerin şekil değişimlerinin dağılımı, membran gerilmeler ve eğilme gerilmeleri hesaplanarak, yanak bölgesinin deplasmanları tekere yalnızca şişirme basıncının uygulanması ve tekerin zemine temas ettirilmesinden sonra belirlenerek, deneysel sonuçlarla karşılaştırmışlardır.

Kennedy, Patel ve McMinn [11], yalnızca şişme basıncı etkisi altındaki radyal bir kamyon tekerinin, geometrik olarak lineer olmayan, malzeme yapısı olarak ise homojen ve orthotropik sonlu elemanlar formülasyonu kullanarak gerilme analizini yapmışlardır. Kurulan model eksenel simetriktir ve kullanılan üçgen eleman, lineer şekil değişimine ve her bir düğüm noktasında üç serbestlik derecesine sahiptir. Kord transdüörleriyle kord yükleri, kuşakların köşelerinde pin rotation denilen teknikte düzlemler arası kayma şekil değişimleri ölçülmüş, lazer profilmetre ile yanak bölgesinin deformasyonunun değişimi belirlenmiş ve yanak bölgesindeki şekil değişimleri de sıvı metal starin gauge'lerle ölçülmüştür. Ölçülen bu değerler sonlu elemanlar modelinden elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Eksenel simetrik modelde sekiz düğümlü toroidal izoparametrik sonlu elemanlar kullanarak büyük iş makinası tekerinin gerilme analizi DeEskinazi ve Ridha [12], tarafından yapılmıştır. Çapraz katlı olan bu lastikler yalnızca şişirme analizi için incelenmiştir. Lastikteki on sekiz gövde katı, dört tanesinde dört kat, beşincisinde ise iki kat bulunacak şekilde, beş bant olarak gruplanmıştır. Sonlu elemanlar ağı her bir eleman bir bant kalınlığında olacak şekilde kurulmuştur. Topuk sargıları ise topuk telleri ve kauçuk yapıdan oluşacak şekilde modellenmiştir. Analizle şekil değiştirmiş geometrinin elde edilmesinin yanında her bir katdaki kord yükleri, topuk tellerindeki gerilmeler ve taban bölgesindeki kauçuk gerilmeleri elde edilmiştir. Çalışmada, değişen kord açılarının ve bir inç' teki uç sayısının lastik davranışına olan etkisi incelenmiştir.

Trinko [13], şişme basıncı ve temas yükü uygulanmış çelik kuşaklı radyal bir otomobil tekerinin gerilme, şekil değiştirme ve temas analizlerini üç boyutlu geometrik olarak lineer olmayan bir model kurarak gerçekleştirmiştir. Topuk-jant arasındaki sınır koşulları, buradaki düğümlerde hareket serbestliğinin sınırlandırılmasıyla sağlanmıştır. Analizlerde, lineer malzeme modeli kullanılarak, çevresel ve eksenel yönde simetri koşullarından yararlanılmıştır. Temas yükü taban bölgesinde seçilen düğümlere düşey yönde deplasmanlar verilerek sağlanmıştır. Bu yaklaşımın önceki modellere göre avantajları; her bir katmandan gerekli değerlerin alınabilmesi ve Fourier yaklaşımına oranla yükün direkt olarak temas alanına uygulanması olarak belirtilebilir.

Kabe ve arkadaşları [14], yaptıkları çalışmada tekerin virajlardaki performansını doğrudan etkileyen, tekerin yanal katılığını belirlemeye çalışmışlardır. Önceki çalışmalarda tekerin eğilme katılığının etkisinin dikkate alınmadığını vurgulayan Kabe ve arkadaşları, sonuçların bu nedenle deneysel sonuçlarla tam uyum gösteremediğini savunmuşlardır. Yaptıkları çalışmada teker, eğilme katılığında içeren membran-kabuk modeli kullanılarak yalnızca şişirme basıncının etkisi altında modellenmiştir. Yanak bölgesindeki karkas katlar ve taban bölgesindeki kuşak ve karkas katlar, şişirme basıncı ile oluşan membran kuvvetler ile uzayabilecek şekilde modellenmiştir. Karkas katın deplasman bileşenleri minimum potansiyel enerjisi prensibine dayanarak sayısal olarak hesaplanan sonlu sayıdaki terime sahip Fourier serisiyle tanımlanmıştır. Tekerin yanal rijitliği, yanal yükün tekerin merkezinin yanal deplasmanına oranı şeklinde tanımlanmıştır.

Üç boyutlu sonlu elemanlar modelleri açısından Rothert ve arkadaşları oldukça değerli çalışmalar yapmışlardır [15,16,17]. Yapılan bu çalışmalarda, öncelikle teker temas problemi için üç boyutlu sonlu elemanlar formülasyonu kurulmaya çalışılmıştır. Farklı metodlar kullanılarak deforme olabilen kütle-rijit cisim teması için kendilerinin "eliminasyon metodu" olarak adlandırdıkları metodu, doğrusal olmayan programlama tekniği ve sınır koşullarının değişimi gibi farklı yöntemlerle, deforme olabilen kütle-rijit cisim teması için bir formülasyon geliştirmişlerdir [15]. Rothert ve arkadaşları takip eden çalışmalarında [16], geliştirdikleri formülasyonlarını tekerle zemin arasındaki sürtünme etkilerini de göz önüne alacak şekilde geliştirmişlerdir. Yaklaşımlarını eksenel olarak yüklenmiş, taban deseni içermeyen homojen bir tekere uygulamışlardır. Rothert ve arkadaşları, temas bölgesini sürtünme kuvveti uygulandığında kayan ve yapışan (slip-stick) küçük bölgeler oluşacak şekilde bölgelere ayırabilen sürtünmeli bir temas algoritması sunmuşlardır [16]. Aynı araştırmacılar diğer bir çalışmalarında [17] ise, geliştirdikleri formülasyonlarını çelik kuşaklı radyal bir otomobil tekerinin üç boyutlu analizinde kullanmışlardır. Diğer çalışmalarından farklı olarak burada, çelik katlar ve karkas için lineer-elastik-orthotropik malzeme modelini kullanmışlardır. Kurulan sonlu elemanlar modeli katmanlar arasındaki şekil değişimlerini de hesaplayabilmektedir.

Ridha R.A., Satyamurty K., ve Hirschfeld [18], çalışmalarında teker gerilme analizi için, üç boyutlu sonlu elemanlar ve temas algoritması içeren bir yaklaşım sunmuşlardır. Kurulan temas algoritmasında, önce tanımlanan temas yüzeyine verilen düşey yer değiştirme ile temasa giren düğüm noktaları belirlenmektedir. Daha sonra bu düğümlerdeki temas yükleri hesaplanmaktadır. Bu şekilde teker tasarımcıları tarafından önem taşıyan temas alanı ve şekli elde edilmektedir. Geliştirilen model örnek olarak, homojen bir tekerin temas probleminde kullanılmıştır.

Birden fazla sayıdaki kompozit katmanların özelliklerini tek bir elemanda birleştiren üç boyutlu izoparametrik kompozit sonlu elemanlar formülasyonu ilk olarak Stechschulte ve Luchini [19] tarafından sunulmuştur. Geliştirilen bu elemanın temas problemi için global olarak iyi sonuç verdiği belirtilmektedir. Bu elemanın kullanılmasıyla üç boyutlu analizlerde serbestlik derecesi sayısı düşeceğinden hesaplama açısından da kazanç sağlanmaktadır. Bu yaklaşımda kabuk elemanlara nazaran taban karkas ve kuşak bölgelerin kolaylıkla modellenebilmesi bir avantaj olarak sayılabilir. Fakat bu

kolaylık eleman katılık matrislerinin birleştirilmesinde ve yük vektörünün oluşturulmasında hesaplama zamanının artmasına neden olmaktadır. Laminalı kompozit elemanın dezavantajı, katmanlar arasındaki kayma şekil değişimlerinin tam olarak elde edilememesidir. Bunu gidermek için kalınlık boyunca daha hassas şekil fonksiyonlarının kullanılmasına ihtiyaç vardır. Fakat bu iyileştirmenin serbestlik derecesini artıracığı ve bunun bir sonucu olarak hesaplama zamanının artıracığı düşünülmelidir.

Benzer bir çalışma Kenny ve Stechschulte [20] tarafından yapılmıştır. Buradaki farklılık, sayısal integrasyon kullanarak her bir laminanın malzeme özelliklerinin toplanarak ve eşdeğer tek bir malzeme özelliği elde edilerek, bu özelliklerin üç boyutlu elemana aktarılmasıdır. İlave olarak bu çalışmada katmanlar arası gerilme ve şekil değiştirmeleri elde etmek için uygun şekil fonksiyonları kullanılmış ve yalnızca şişme analizi için sonuçlar elde edilmiştir.

Eksenel simetrik modellere örnek olarak gösterilebilen çalışmalardan biri, Stayamurty ve Hirschfelt [21] tarafından yapılmıştır. Stayamurty ve Hirschfelt çalışmalarında, lineer olmayan eksenel simetrik formülasyonlar geliştirerek bir tekerde çevresel, radyal ve yanal deplasmanları elde etmişlerdir. Radyal tekerlerde şişme basıncı esnasında taban ve yanak bölgelerinde önemli çevresel deplasmanlar oluşur. Yapılan çalışmada, kullanılan modelin amacı teker yapısındaki bileşenlerin bu tip deformasyonlara olan etkilerinin belirlenmesidir. Bu yapı bileşenleri kuşak açısı, kuşak genişliği, kuşağın uç kısımlarında bulunan dolgunun modülü, chafer açısı olarak sayılabilir. Yapı elemanlarında yapılacak değişikliklerin etkileri aynı zamanda da kord yükü ve katmanlar arası kayma gerilmeleri hem düzlemde hem de çevresel yönde belirlenerek sunulmuştur ve deneysel sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Çalışmada eksenel simetrik analizlerin üç boyutlu analizlere oranla daha kolay olması nedeniyle, üç boyutlu analizlere başvurmadan bu modeller kullanılarak bazı teker tasarım problemlerinin çözümlenerek zaman kazanmanın mümkün olduğu vurgulanmaktadır. Elde edilen sonuçlar doğrultusunda, kuşak uç bölgelerindeki kayma şekil değişimlerinin teker tasarımında dikkate alınması gerekli faktörlerden birisi olduğu anlaşılmaktadır.

Tseng [22], çalışmasında diğerlerinden farklı olarak problemin eksenel simetrik sonlu elemanlar formülasyonuna santrifüj kuvvetleri de ilave ederek, bunun etkilerini incelemiştir. Sabit açısal hızda dönen iç basınç uygulanmış tekerin eksenel simetrik

analizi gerçekte kara veya çamura saplanmış bir tekeri modelleyeceği düşünüleceği gibi yüklü tekerin temas bölgesinin etkisinin olmadığı bölümleri de modellediği düşünülebilir. Çalışmada, sabit açısal hızda dönen, deforme olabilen bir kütlenin hareket denklemleri, elde edilmiş ve mevcut bir sonlu elemanlar koduna entegre edilmiştir. İnce kalınlıklı bir diskin dönmesi, sunulan formülasyonun ve kodlamanın doğruluğunu test etmek için kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlardan sayısal ve analitik çözümlerin oldukça uyumlu olduğu görülmektedir. Bu yaklaşım kullanılarak, radyal bir otomobil tekeri ve radyal bir kamyon tekeri ayrı ayrı analiz edilmiş ve 241 km/h araç hızına kadar sonuçlar alınmıştır. Tekerdeki elastomer yapı Mooney-Rivlin malzeme modeliyle tanımlanmıştır. Kuşak köşelerinde katmanlar arasında önemli kayma gerilmeleri, topuk ve yanak kordlarındaki yük değişimleri gözlenmiştir. Buradan elde edilen sonuçlardan serbest dönen tekerler için, kuşak köşelerinin dağılımı, topukta oluşabilecek bozulmalar ve taban bölgesindeki kuşak hatalarının, tasarım açısından önemli kriterler oldukları söylenebilir.

Temas yükü altındaki tekerin daha gerçekçi sonlu elemanlar analizini yapabilmek için üç boyutlu modeller gerekmektedir. Parametrik çalışmalar yapmak, özellikle tekerin yapısı detaylarıyla göz önüne alındığında bu modeller için çok fazla CPU zamanı gerektirmektedir. Chang, Satyamurty ve Tseng [23], yapmış oldukları çalışmada şişirilmiş ve araç yükü uygulanmış teker probleminin çözümü için sistematik bir sonlu eleman prosedürü sunmuşlardır. Sunulan prosedürün önemli noktaları şunlardır; doğru veri girişi için iyi bir ön işlemcinin oluşturulması, kullanıcıya problemdeki skew simetriyi oluşturabilmek için çok noktadan sınırlama (multipoint constraint) sunulması, eksenel simetrik analizden başlangıç koşullarının kolaylıkla oluşturulabilmesinin sağlanması. Bu prosedür sayesinde parametrik çalışmalar daha az elemanla ve daha büyük yük adımıyla daha az CPU zamanı harcanarak yapılabilmektedir.

Faria ve arkadaşları [24], sonlu elastik deformasyon durumları için yuvarlanmalı temas (rolling contact) probleminin varyasyonel formülasyonunu, serbest yuvarlanma (free rolling), dönme (cornering), ivmelenme ve frenleme durumlarının analizini yapmaya olanak sağlayacak şekilde genişletmişlerdir. Bu formülasyonu tekerin sonlu elemanlar analizi için kullanmışlardır. Büyük şekil değişimlerine ve büyük dönmeleri modelleyebilen tabakalı kabuk sonlu elemanlar geliştirmişlerdir. Malzeme modeli olarak ise, her bir katman için orthotropik Hooke malzemesi veya Mooney-Rivlin malzemesi

kullanmışlardır ve sıkıştırılamamazlık şartını Lagrange çarpanları yöntemiyle sağlamışlardır. Çalışmada bilinen Coulomb sürtünmesinin yerine, penaltı ve sürtünme terimleriyle uygulanan temas şartlarının sayısal açıdan daha uygun türevlenebilir formda düzenlendiği vurgulanmaktadır. Tekerin tamamı kabuk ve üç boyutlu elemanlarla modellenmiştir ve formülasyon sayesinde dinamik etkiler de dikkate alınmış olmaktadır. Bu grupta yapılan başka bir çalışmada [25] ise yukarıda belirttiğimiz formülasyona viskoelastik malzeme özelliklerini de ilave ederek daha gerçekçi bir model kurulmuştur. Gerçekte kauçuk viskoelastik bir malzemedir ve özellikle dinamik analizler için dikkate alınması gerekmektedir. Bu çalışma viskoelastisitenin göz önüne alındığı ilk çalışmalardan birisidir.

Kullanılan model açısından farklı bir çalışma Domscheit ve arkadaşları [26] tarafından sunulmuştur. Diğer çalışmalardan farklı olarak, bu çalışmada laminalı kompozit elemanlarla sıkıştırılamaz elemanlar birlikte kullanılmıştır. Kabuk elemanların katılık matrisi kalınlık boyunca bütün katların sayısal integrasyonu ile hesaplanmıştır. Analizlerde kabuk elemanlar ve Swanson malzeme modelinin kullanıldığı sonlu elemanlar ağı kullanmışlardır. Bu çalışmada özellikle büyük şekil değiştirmelerin eleman katılığına olan etkisini dikkate alacak şekilde kompozit malzeme teorisi geliştirilmeye çalışılmıştır.

Kompozit yapıların sonlu elemanlar formülasyonu açısından en önemli aşaması efektif malzeme özelliklerinin doğru olarak belirlenmesidir. Nitekim tekerin katmanlar arasındaki gerilme yığılmalarının doğru olarak belirlenmesi, doğrudan kullanılan malzeme modeline bağlıdır. Bu malzeme özellikleri kompozit yapılar için kullanılan ve çok iyi bilinen Halpin-Tsai denklemleri, Gough-Tangorra denklemleri ve Akasaka-Hirano denklemleriyle hesaplanmaktadır [27]. Ancak bu denklemler deformasyon süresince kord destekli yapının eğilme etkilerini dikkate almazlar. Tekerin, eğilme etkilerinin etkin olduğu kabuk olarak modellenmesi durumunda, bu denklemlerle gerilme analizi yapılması durumunda elde edilen değerler gerçeği yansıtmayacaktır. Bu nedenle Huh ve Kwak [27] yaptıkları çalışmada, tekerin her bir parçasının efektif malzeme özelliklerinin sonlu elemanlar formülasyonunda kullanılabilmesi için denklemler geliştirmişlerdir. Şişme basıncı ve temas yükünün uygulandığı tekerin gerilme analizi için yenilenmiş Lagrange sonlu elemanlar temas formülasyonu da geliştirmişlerdir.

Ishihara [28] ise teker analizleri için üç boyutlu membran eleman geliştirmiştir. Genelde tekerin üç boyutlu sonlu elemanlar formülasyonu problemin karmaşık yapısı nedeniyle oldukça uzun hesaplama zamanı gerektirmektedir. Karmaşıklığın en önemli nedenleri, problemin kinematığının lineer olmaması, tekerin malzeme özellikleri, sınır koşulları ve tekerde çok farklı katmanlara sahip bir yapının olmasıdır. Bu durumun üstesinden gelmenin yollarından biri modelleme stratejisidir. Ishiharanın çalışmasında kord-kauçuk yapının üç boyutlu lineer olmayan kompozit membran elemanlarla modellenmesi için gerekli düğüm sayısı, bilinen üç boyutlu katı eleman modellerin sonuçlarıyla karşılaştırıldığında bir doğruluk kaybı olmaksızın azaltılmıştır. Lineer olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile elde edilen sonuçlar, üç boyutlu sonlu elemanlar modellerinden ve deneysel yöntemlerle elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Noor, Tanner ve Peters [29] iki boyutlu aşırı dönmeye çalışan, katmanlı anizotropik kabuk teorisini kullanarak, malzeme ve geometrik parametrelerin değişimini de içeren kalın kabuk elemanı geliştirmişlerdir. Hu-Washizu karma varyasyonel ilkesini kullanarak sistem enerji denklemi yazılmış ve sonlu elemanlar formülasyonu için Total Lagrange yaklaşımı kullanılmıştır. Geliştirdikleri bu kabuk elemanı uçak teker analizi için kullanmışlardır. Modelde jant bölgesindeki düğümlerin yer değiştirmeleri bağlanmış ve teker kesitinin yarısı kullanılmıştır. Karkas katlardaki kord yönlenmesi ve uç sayısı, meridyenal uzunluğun fonksiyonu şeklinde tanımlanarak, bu yöndeki malzeme özelliklerinin değişimi dikkate alınmıştır.

Noor ve Peters [30] ise, bir önceki çalışmayı [29], geometrik ve malzeme parametrelerinin değişimini, anizotropik malzeme davranışını ve yanal (transverse) kayma şekil değişimini dikkate alan Saunders-Budiansky kabuk teorisini kullanarak kalın kabuk eleman geliştirmişlerdir. Lagrange çarpanı yaklaşımı kullanılarak sürtünmesiz temas hali probleme ilave edilmiştir. Geliştirilen formülasyon Uzay Mekiği Teker için uygulanmıştır.

Özellikle karkas katlardaki kord yönlenmesi ve birim uzunluktaki uç sayısı çapraz tekerlerin malzeme modelinin kurulmasında önemlidir. Danielson, Noor ve Green [31] yaptıkları çalışmada, uçak tekerleri için geometrik yapısı ve imalat sürecindeki işlemler nedeniyle başlangıçta tahmin edilmesi zor olan bu değerleri belirlemek için Magnetik Rezonans (MR) yönteminden yararlanmışlardır. Bu yöntemle kord açıları ve uç sayıları

boyutsuz meridyönel uzunluk cinsinden polinom fonksiyon şeklinde ifade edilmiştir. Bu fonksiyonlar kullanılarak, eleman katılık matrisleri hesaplanırken her elemanın integrasyon noktasına karşılık gelen kord açısı ve kord uç sayısı kullanılarak, ortogonal malzeme özellikleri hesaplanmıştır. Bu şekilde malzeme modeli daha hassas olarak tanımlanmıştır. Danielson ve arkadaşları ayrıca çalışmalarında rebar elemanlı modeller ve katmanlı kabuk modeller kullanarak hesaplama ve modelleme zamanını düşürmek için çeşitli stratejiler önermişlerdir.

Helnwein, Liu, Meschke ve Mang [4], kord takviyeli kauçuk kompozit yapılar için üç boyutlu yeni bir sonlu elemanlar formülasyonu sunmuşlardır. " Rebar " olarak adlandırılan bu eleman bir veya birden fazla farklı yönlenmiş kord katmanları içeren üç boyutlu bir elemandır. Bu elemanın formülasyonundaki yaklaşım, takviyeli beton yapı modellerinde küçük şekil değişimleri için daha önceden kullanılmaktaydı. Fakat yazarlar, bu elemanı lineer olmayan formülasyon temeline dayanacak şekilde (büyük şekil değişimi ve dönmelere izin verecek şekilde) yeniden düzenlemişlerdir. Bu elemanda, kauçuk ve farklı katmanlardaki kord malzeme özellikleri, birbirlerinden bağımsız olarak kullanılmaktadır. Sıkıştırılmaz Mooney-Rivlin malzeme modeli kullanılan kauçuğun, büyük şekil değiştirme analizi için Lagrange çarpanları metodu kullanılmıştır. Kordlar için ise Neo-Hookean malzeme modeli seçilmiştir. Bu elemanın oluşturulması teker yapıların sonlu elemanlar modelleri açısından düşünüldüğünde oldukça farklı bir yenilik kazandırdığı gözlenmektedir. Böylelikle deneysel olarak elde edilen malzeme verileri ara bir işlem yapmaksızın doğrudan modelde kullanılabilir. Geliştirilen bu eleman radyal otomobil teker modelinde kullanılmıştır. Bu modelleme yaklaşımıyla diğer modellere oranla oldukça az serbestlik derecesi kullanılarak, kord yükleri vs. kolaylıkla elde edilebilmektedir.

Yukarıdaki çalışmaların bir çoğunda belirtildiği gibi, teker hem yapısı hem de maruz kaldığı yükler açısından oldukça karmaşık bir yapıdır. Bu nedenlerle incelenen probleme çözüm için önerilen yöntemler de bir o kadar karmaşıktır. Mevcut malzeme yapısını modellemek, temas yüklerini modele aktarabilmek ve oluşan büyük şekil değişimleri ve gerilmeleri hesaplayabilmek oldukça zahmetlidir. Fakat bunların içinde belkide en fazla güçlük arzedeni temas sınırlarının düzenlenmesidir. Bu amaçla penaltı metodu önerilmiş ve boşluk (gap) elemanlar tanımlanmaya çalışılmıştır. Fakat kul-

lanılan lineer olmayan formülasyon nedeniyle bazen temas bölgesinde düğüm noktaları, rijit yüzeyde düzgün bir şekilde ilerlemek yerine, ya rijit yüzeye penetre olmakta, yada rijit yüzeyde kalmaktadır. Wu ve Xingen [32] yaptıkları çalışmada, daha gerçekçi bir modelleme için, lineer olmayan formülasyon için, follower-force metodu, Wave-Front metodu ve Newton-Raphson metodunun bir kombinasyonunu kullanmaya çalışmışlardır. Yazarlar kurulan formülasyonda, verilecek artımlar, sınırlayıcı koşullara göre iyileştirilerek kullanılacağından daha mantıklı sonuçlar elde edilebileceğini düşünmüşlerdir. Bu şekilde teker zemin arasındaki gerçek temas sınırı bütün deplasman alanı ile belirlenmiş olmaktadır. Metodun güvenilirliği ve yakınsaması deneysel sonuçlarla karşılaştırıldığında oldukça iyi çıkmıştır. Modelde sekiz düğümlü ve altı düğümlü üç boyutu elemanlar kullanılmıştır.

Gall, Tabaddor, ve arkadaşları [33] çalışmalarında, sonlu elemanlar yöntemini, teker davranışının daha iyi anlaşılabilmesi için parametrik çalışmalar yapmak ve karşılaştırmalı analizler yapabilmek için kullanmışlardır. Tasarım aşamasında, teker geliştirme sürecini azaltmak için, sonlu elemanlar yöntemi zaman alıcı test deneyleri yerine kullanılan en iyi araçtır. Kullanılan eleman tipi, malzeme modeline vs, bağlı olarak analizlerin doğruluğunun test limitleri içinde olmasını zorunlu kılmaktadır. Bu çalışmayla bilinen teknikler incelenmiş ve bunların sonuçların doğruluğuna katkısı tartışılmıştır. Özellikle sınır koşullarındaki kabullerin sonuçlara olan etkisini göstermek için kabuk elemanlarla kurulmuş modeller ve genel-yerel analiz yaklaşımı tartışılmıştır. İkinci olarak ta, paralel hesaplama teknolojisini kullanan bilgisayarla hesaplamalar yapılarak (Massively Parallel Processing-MPP) çözüm hızları hakkında bilgiler verilmiştir. Günümüzde bu ve benzeri teknolojiler oldukça yoğun kullanılarak, çok yüksek derecede hesaplama hızları elde edilebilmektedir.

L'Anson, Pena, Postic, Barret [34] ise, radyal bir uçak lastiğinin sonlu elemanlar analizini yapmışlardır. Sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak hesaplanan teker-jant arasındaki basınç dağılımı, elde edilen deneysel sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Bu çalışma uçak lastik tasarım mühendislerinin tasarım çalışmalarında yardımcı olabilecek bir çalışmadır. Uçak tekerleri çalışma şartları açısından diğer araç tekerlerinden çok farklı servis şartlarında çalıştıklarından bunların modellerini oluşturmak daha zor olmaktadır. Çalışma şartlarının ağır olmasındaki en önemli etkenler taşınan ağırlıkların çok

fazla olmasının yanında, kalkış ve iniş sırasındaki aşırı zorlanmalardır. Çalışmalarında hem eksenel simetrik model hem de üç boyutlu modeller kullanmışlardır. Şişme ve temas analizlerinin yanında, tekerin viraj alması da modellenmiştir.

Meschke, Payer ve Mang [35], otomobil tekerleri için lineer olmayan malzeme davranışı, büyük şekil değişimleri ve sonlu deformasyonların dikkate alındığı, üç boyutlu, tam ölçekte gerçekçi bir teker analizi için hesaplama stratejileri kullanan bir sonlu elemanlar formülasyonu hedeflemişlerdir. Kord destekli katmanlar rebar elemanlar ile modellenirken, hiperelastik Mooney-Rivlin malzeme modeli, hibrit sonlu elemanlar formülasyonu kauçuk malzemeler için kullanılmıştır. Bölgesel olarak iyileştirilmiş sonlu eleman ağları oluşturularak, teker desenleri de dikkate alınmıştır. Çeşitli hesaplama stratejileri, iteratif çözüm teknikleriyle birlikte, geliştirilmiş ve bunlar örneklerle sunulmuştur. Modelin önemli noktalarından biri geometrik olarak uygun olmayan ağların farklı derecelerde iyileştirmelerle birbirlerine bağlanmasıdır. Bu özellik temas bölgesi ile tekerin geri kalan parçası arasında gerçekleştirilmiştir. İlave olarak üç boyutlu büyük ölçekteki problemlerin sonlu elemanlar analizlerinde çözüm için iteratif stratejiler önerilmiştir.

Tekerin dayanıklılığı büyük ölçüde çalışma sırasındaki sıcaklığına bağlıdır. Özellikle bu durum büyük yükler taşıyan araçlar, örneğin uçaklar ve ağır yük taşıyan kamyon lastikleri, için doğrudur. Bu nedenledir ki tekerin çalışma sırasındaki sıcaklık dağılımını belirleyerek tekerdeki kritik sıcaklık bölgelerini tespit etmek ve buna göre önlem almak oldukça önemlidir. Bu konudaki ilk çalışmalardan biri Trivisonno [36] tarafından uçak tekerleri için yapılmıştır. Uçak tekerlerinde sıcaklık dağılımının belirlenmesi oldukça güçtür. Dinamik çalışma sırasındaki deformasyonlar o kadar fazladır ki termo- kupullar ancak içerdeki hava boşluğuna ve topuk bölgesine düzgün bir şekilde yerleştirilebilmektedir. Tekerin durmasından sonra havası boşaltılıp probalar yardımıyla sıcaklık ölçümü yapılabilir fakat bu da zahmetli bir yoldur. Trivisonno, yapmış olduğu çalışmayla sonlu farklar yöntemi kullanarak uçak tekerindeki sıcaklık dağılımını hem kararlı durum hem de kararsız durum için çözmeye çalışmıştır. İncelenen tekerdeki dış yüzey sıcaklığını termal kamera yardımıyla deneysel olarak belirlemiştir.

Tekerin termomekanik modeli ilk olarak General Motor Labratuvarlarında (GMR) bir grup bilim adamı tarafından kurulmaya çalışılmıştır. Öncelikle Segalman [37], tara-

findan karalı halde dönen tekerin kayıp enerjisini bulmak için matematiksel bir formülasyon geliştirilmiştir. Formülasyonda, teker kauçuklarının viskoelastik gerilme cevabı için lineer olmayan bünye denklemlerini kullanmıştır. Bünye denklemleri, tekerdeki malzemeler, sıcaklık dağılımı ve tekerin her bir dönmesi ile oluşan geri döndürülemez işi üreten deformasyonlar dikkate alınacak şekilde hazırlanmıştır. Yöntemin uygulanabilmesi için öncelikle; teker malzemesinin viskoelastik özellikleri deneysel olarak elde edilmiş olması gereklidir. Bu çalışma GMR'nin termomekanik modelinin kayıp modülünü oluşturmaktadır.

GMR 'deki diğer bir çalışma ile Browne ve Arambages [38], termomekanik modelin termal analiz modülünü sunmuşlardır. Bu çalışmada lineer olmayan ısı transfer denklemi sonlu elemanlar formülasyonu kullanılarak çözülmüştür. Kayıp modülünden gelen kayıp enerjiler ısı denkleminde ısı kaynağı olarak ilave edilmiştir. Teker ile zemin ve lastik-jant arasında ısı iletimi, lastiğin dış ve iç yüzeyinde ısı taşınımı, sınır koşulları olarak kullanılmıştır.

Çalışmanın son ayağı olarak ta Whicker, Browne ve Segelman [39], üç ana modülden oluşan tekerin güç kaybını hesaplamak için kurulan analitik modelin birbiriyle ilişkilendirilmesi ve iteratif olarak termomekanik modelin oluşturulması çalışmasını sunmuşlardır. Deformasyon modülü ile yüklü ve dönmekte olan bir tekerin deformasyon şekli belirlenmektedir. Kayıp modülü ile kauçuk malzemenin deformasyonu ile oluşan ısı üretimi hesaplanır. Termal modül ise kayıp modülünden gelen ısı üretimini dikkate alarak sıcaklık dağılımını elde etmektedir. Hesaplanan sıcaklık dağılımı, deformasyon modülüne aktararak sıcaklığın gerilme ve şekil değiştirmeye olan etkileri, sıcaklık bağımlı malzeme özellikleri yardımıyla hesaplanır. Bu çevrim işlemine, termal modül yardımıyla elde edilen sıcaklık dağılımı bir önceki adımda elde edilen sıcaklık dağılımıyla dengeye gelinceye kadar devam edilir. Bu iterasyon işlemi sırasında sıcaklık nedeniyle değişen malzeme özelliklerinin etkileri tekerdeki şekil değişimiyle dikkate alınmış olmaktadır. Burada, doğru sonuçların elde edilebilmesi için, modele tekerin geometrisinin çok düzgün olarak tanımlanması, farklı teker malzemelerinin mekanik ve termal özelliklerinin doğru olarak belirlenmesi ve modele aktarılması gereklidir.

Clark ve Dodge [40], düzgün yuvarlanma yükünde, frenleme esnasındaki yuvarlanma yükünde ve frenlemenin olmadığı düzgün olmayan yükleme durumları için

uçak lastiklerinde sıcaklık dağılımının belirlenmesine yönelik bir metod geliştirilmiştir. Metodun dayandığı temel; tekerdeki bir noktanın tekerin bir çevrimi boyunca maruz kaldığı gerilmenin belirlenmesidir. Bu gerilmelerden göz önüne alınan noktanın yapmış olduğu mekanik iş hesaplanır, bu iş üretimi malzemenin histerisis özellikleri nedeniyle ısı üretimine dönüştürülür. Çalışmada teker kesiti iç ısı üretimi ile birlikte eksenel simetrik olarak dşnlmş ve ısı iletim denklemleri uygun teker-jant ve teker-zemin sınır koşulları kullanılarak zlmştir. Elde edilen sonuçlar tekerin içine termokupl gömülerek elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Bu formülasyonda şişme basıncından olan gerilmelerinin enerji kaybına neden olmadığı kabul edilmiştir.

Tekerdeki ısı üretimini ve sıcaklık dağılımını belirlemeye yönelik çalışmalardan birisi Schuring, ve Clarck [41] tarafından gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmada, labratuvar ortamında yk, hız ve şişme basıncı parametrelerine göre ayrı ayrı test ortamları oluşturularak, her gurup parametre için, ortamdaki hava sıcaklığı, tekerin içindeki hava sıcaklığı, teker yüzeyindeki sıcaklıklar ve yuvarlanma kayıpları llmştir. Çevrede havanın sıcaklığı ve teker içindeki hava sıcaklığı termokupullar ile ölçülmüş, yüzey sıcaklığı infared kamera yardımıyla, yuvarlanma kaybı ise standart rolling-loss drum test makinası ile belirlenmiştir. Sıcaklık değerleri ve termal özellikler (ısı taşınım katsayıları) modele sınır koşulu olarak aktarılmıştır. Sonlu farklar çözüm yöntemi kullanılarak ısı iletim denklemi çözülmeye çalışılmıştır. Parametrik çalışmalardan elde edilen sonuçlar yardımıyla yk, hız ve basına bağlı genel yuvarlanma kayıpları için bir bağıntı kurulmuştur. Çalışmada aynı teker için değişik malzemelerin etkileri tekrar hesaplama yapılmaksızın bu bağıntıyla belirlenebileceği ileri srlmştir.

Sürekli durumda dönen tekerin sıcaklık dağılımının belirlenmesi için termomekanik bir model Yavari, Tworzydlo ve Bass [42], tarafından geliştirilmeye çalışılmıştır. Yavari ve arkadaşları lineer olmayan sonlu elemanlar formülasyonunu termomekanik etkileri de katacak şekilde yeniden düzenlemişlerdir. Pnömatik tekerlerin termomekanik davranışı, genel olarak, temas, sürtünme ve viskoelastik kayıplardan kaynaklanan ısı üretimi ile dinamik lineer olmayan etkileşimli (kapılı) thermoviskoelastik problemin çözümünü gerektirmektedir. Bu oldukça karmaşık ve lineer olmayan sistemin çözümünde yapıya ait geometrik bilgiye, malzeme özelliklerine, sürtünme katsayılarına, kayıp mekanizmasına ve ısı taşınım katsayılarına ait bilgilere gereksinim duyulur. Bu

çalışmada temas yükü ile şekil değiştirmiş tekerin geometrik formu dikkate alınmış, iç ısı üretimi ve diğer termal sınır koşulları veri olarak kullanılmıştır. Viskoelastik deformasyonlar nedeniyle ısı oluşumu termodinamik açıdan tersinmez bir olaydır. Böylelikle açığa çıkan ısı formülasyonun sağ tarafına kaynak terim olarak ilave edilmiştir. Bu çalışmada temas yüzeyinin sıcaklık dağılımına etkisi dikkate alınmıştır.

Oh ve arkadaşları [43] ise, dönen bir tekerin iç sıcaklık dağılımını sonlu farklar yöntemi kullanarak geliştirdikleri bir program aracılığı ile hesaplamışlardır. Isı üretimini deneysel olarak yük, hız, lastik içindeki hava basıncına bağlı bir ifade olarak belirlemişlerdir. Kararlı olmayan durum için iki boyutlu ısı iletim denklemi, ısı taşınımı ve radyasyon sınır koşulları kullanılarak çözülmüştür. Dış yüzeydeki sıcaklıklar infrared kamera yardımıyla, lastik içindeki hava sıcaklığı ise termokupıl yardımıyla belirlenmiştir. Farklı hızlardaki sıcaklık dağılımları elde edilerek, özellikle kuşak bölgesinin uç kısımlarıyla, apex bölgesinin ısısal açıdan önemli olduğunu belirlemişlerdir. Fakat bu çalışmada kurulan ısı üretim ifadesinin, bazı deneysel parametrelere duyulan gereksinim ve bu parametrelerin de üretici firmalara bağlı olabileceğinden, kullanılması sınırlıdır.

Allen, Cuitino ve Serna [44-45], serbest dönme durumundaki bir uçak tekerinin ısısal analizi için iki aşamadan oluşan değişik bir yaklaşım sunmuşlardır. Birinci aşamada, elastik olmayan davranış sebebiyle (viskoelastisite) ortaya çıkan ısı üretimini belirlemek için gerekli deformasyon karakteristiği belirlenmiştir. İkinci aşamada ilk aşamadan elde edilen ısı üretim değerleri ısı transfer problemine aktarılarak termal analiz yapılmıştır. Bu çalışmada, normal olarak deformasyon mekanizması üç boyutlu analiz sonucundan elde edilmesi gerekirken, farklı bir düşünceyle, eksenel simetrik analiz yardımıyla, belirlenmiştir. Çalışmada tekrarlı elastik olmayan deformasyondan kaynaklanan enerji kaybı ısı üretiminin ana kaynağı olarak düşünülmüştür. Kurulan modelde tekerin deformasyon prosesinin kararlı durumda olduğu kabul edilmiştir. Elastik olmayan enerji, gerilme ve şekil değişimlerine bir faz farkı koyularak elde edilmiştir. Bu faz farkında oluşan gerilme şekil değiştirme değerlerinde kayıp modülünün titreşim frekansından bağımsız olduğu kabul edilmiştir. Buradan elde edilen kayıp enerji zaman bağımlı ısısal analiz için hacimsel ısı kaynağı olarak modele aktarılmıştır.

Şekil değiştirme enerjisinden kaynaklanan ısı nedeniyle oluşan sıcaklık dağılımının belirlenmesi için Park, Youn, Song ve Kim [46] sonlu elemanlar yöntemini kullanan

bir yöntem sunmuşlardır. Bu çalışmada da General Motor Araştırma Lab. da yapılan çalışmaya benzer olarak, deformasyon modülü, kayıp modülü ve termal modül olmak üzere üç aşamalı bir model önerilmektedir. Yalnız bu çalışmada diğerlerinden farklı olarak deformasyon modülü için kullanılan model üç boyutlu sonlu elemanlar modelidir. Kayıp modelinde ise gerilme ve şekil değiştirme ifadesi, deformasyon modelinden teker içindeki herhangi bir noktanın bir tur boyunca etki altında kalmış olduğu gerilme ve şekil değiştirme değerlerini üçüncü derece bir polinom fonksiyonla ifade ederek kayıp enerji miktarını bu zaman aralığı boyunca integre ederek hesaplanmaktadır. Tekerdeki farklı bölgeler için bu işlemler ayrı ayrı yapılmaktadır. Çalışmalar radyal bir otomobil tekeri için farklı hızlarda yapılmıştır.

Becker, Dorsch, Kaliske ve Rothert [47] yaptıkları çalışmada, öncelikle farklı şekil değişimlerinde çekme/basma, değişen frekans ve genlikli dinamik testler ve küçük çevrimli yükleme ve boşaltma testleri ile tekerin kauçuk parçalarının histeresis davranışını araştırmışlardır. Buradan elde edilen bilgi doğrultusunda, kompleks frekans bağımlı (viskoelastik) malzeme modeli kadar iyi elastoplastik davranış gösteren, bir malzeme modeli geliştirmişlerdir. Bu model farklı, viskoz ve plastik etkileri gösteren reholojik elemanların birleştirmesiyle elde edilmiştir. Geliştirilen malzeme modeli sonlu elemanlar koduna aktarılarak teker analizleri için kullanılmıştır. Modelin statik hesaplamalar için sonuçlara çok küçük etkiler yaptığı gözlenmiştir. Bu yaklaşımda sürekli durum dönme hali için kauçuğun histresisinden ve sürtünmesinden oluşan yuvarlanma kayıpları belirlenebilmektedir.

#### 1.4. Pnömatik Tekerin Yapısı ve Malzemeleri

Pnömatik teker yapının sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak çözümünün yapılabilmesi için öncelikle yapının çok iyi tanınması, bileşenlerin yapı içersinde üstlendikleri görevlerin değerlendirilmesi oldukça önemlidir. Aşağıda pnömatik tekerin bileşenleri ve üstlendikleri görevler açıklanmıştır (Şekil 1).

##### 1.4.1. Topuk Telleri (beads)

Topuk telleri, çelik tellerden oluşmaktadır. Şişirilmiş tekerin özellikle viraj ve frenleme esnasında janta bağlı kalmasını sağlar. Topuk telleri, sürekli bir tel ile sarılarak tek parça halinde olabildiği gibi birkaç parça sarımdan da oluşabilir. Topuk telleri sarılıp

halka haline getirildikten sonra tekstil lamina ile sarılarak atmosfer ile teması kesilir ve aynı zamanda dağılması da engellenmiş olur.

#### **1.4.2. Topuk Teli Dolgusu (apex)**

Topuk telinin üst kısmına yerleştirilen oldukça sert bir kauçuk dolgudur. Görevi topuk telleri üzerindeki boşluğu almak, gövde katmanı ve onun topuk telleri etrafından dönen (turn-up) kısmının arasındaki bağlantıyı sağlamak ve bu bölgenin rijitliğini artırmaktır.

#### **1.4.3. Gövde Katmanları (carcas plies)**

Tekerin mukavemetini sağlayan ve araç yükünü taşıyan bileşendir. Gövde katmanlarının kordları rayon, naylon, polyester veya çelikten yapılabilir. Nemi alınmış ve istenilen sıklıkta dizilmiş olan kordlar kauçuk ile kaplanırlar. Kord destekli kauçuk kompozit olarak adlandırılırlar. Bu katmanlar ham tekerde kullanılacak gövde katmanı açısına göre kesilerek kullanılırlar.

#### **1.4.4. Kuşak (belt)**

Tekerin taban bölgesindeki katılığını artırarak şişirilmiş tekerin şeklini korumasını sağlar. İlave olarak tekerin yol ile yaptığı temas bölgesindeki yükleri taşımaktadır.

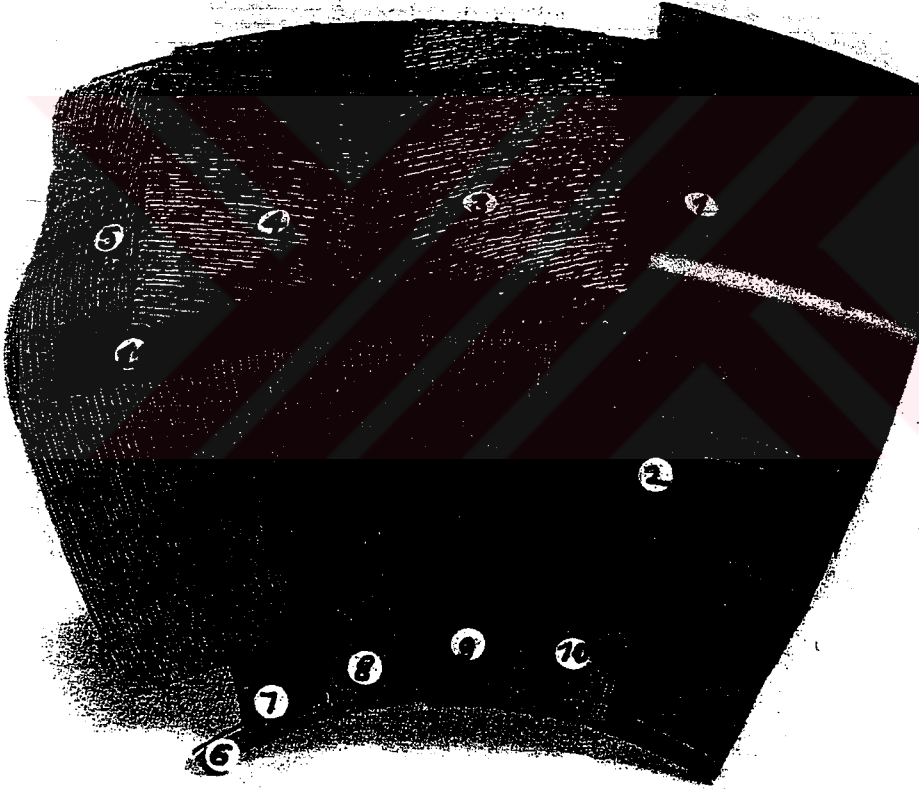
Kuşak ta, gövde katmanları gibi imal edilirler. Ancak kord yönlendirme açıları gövde katmanlarının kord yönlendirme açılarından daha küçüktürler. Bu açılar ortalama  $15^{\circ} - 22^{\circ}$  arasında değişmektedir. Kuşak uçlarında gerilme yıgılmaları oluşacağından, bu kısımlarda çeşitli konstrüktif önlemlerin, örneğin sertliği daha yüksek bir kauçuk malzeme kullanmak veya burada rayon türü bir sargı malzemesi kullanmak gibi önlemlerin alınması gerekmektedir. Tekerdeki özellikle aşırı yükte uzun süre kullanılan araçlarda en fazla hasarın oluştuğu bölgeler kuşak sonlarıdır.

#### 1.4.5. Kuşak Üstü Dolgusu

Kuşak ile taban arasındaki kauçuk dolgudur. Bu dolgu genel olarak daha yumuşak olan taban kauçuğu ile oldukça rijit olan kuşak bölgesi kauçuğu arasındaki geçişi sağlamaktadır.

#### 1.4.6. Taban (tread)

Tekerin zeminle temas eden bölgesidir ve üzerinde açılan desenler sayesinde, özellikle ıslak zeminlerde, teker ile yol arasında oluşan hidrodinamik film tabakasının yırtılmasını sağlayarak yol tutuculuğunu sağlar. Taban kauçuğu aşınmaya, yarılmaya ve delinmeye karşı dirençli olmalıdır.



Şekil 1: Pünömatik tekerin bileşenleri (1) Taban, (2) Yanak, (3,4) Kuşak katmanları, (5) Gövde katmanları, (6) Topuk Telleri,(7) Topuk teli dolgusu(apex), (8) Dönen gövde katmanı (turn-up), (9) Topuk kauçuğu, (10) Topuk sargısı, (11) Kuşak katmanları ara dolgusu

#### 1.4.7. Yanak (sidewall)

Gövde katmanlarını atmosferden ve sürtünme nedeniyle oluşabilecek hasarlardan koruyan kauçuk bileşendir. Yanak taban ile birlikte tekerin atmosfer ile temas eden bileşenidir. En büyük şekil değişimi yanakta olması yanında bu bölgedeki kauçuğun histerisiz özellikleri nedeniyle ısı açıdan dikkat edilmesi gerekli bir bölgedir.

#### 1.4.8. İç Yüzey Kauçuk Katmanı (inner linear)

Tekerin en iç kısmındaki gövde katmanının yüzeyine kaplanan, ince bir kauçuk katmandır. Görevi gövde katmanlarını şişirme havasındaki nem benzeri etkilerden korumaktır.

### 1.5. Pnömatik Teker Çeşitleri

Bir tekerde tasarım ve üretim açısından ana esaslar benzerlik göstermesine karşılık, ürün çeşidine göre yapısal olarak farklılıklar vardır. Tasarım şekli açısından değerlendirildiğinde, gövde katmanlarının yapısına göre üç farklı tasarım tipi mevcuttur.

#### 1.5.1. Çapraz Gövde Katmanlı Teker

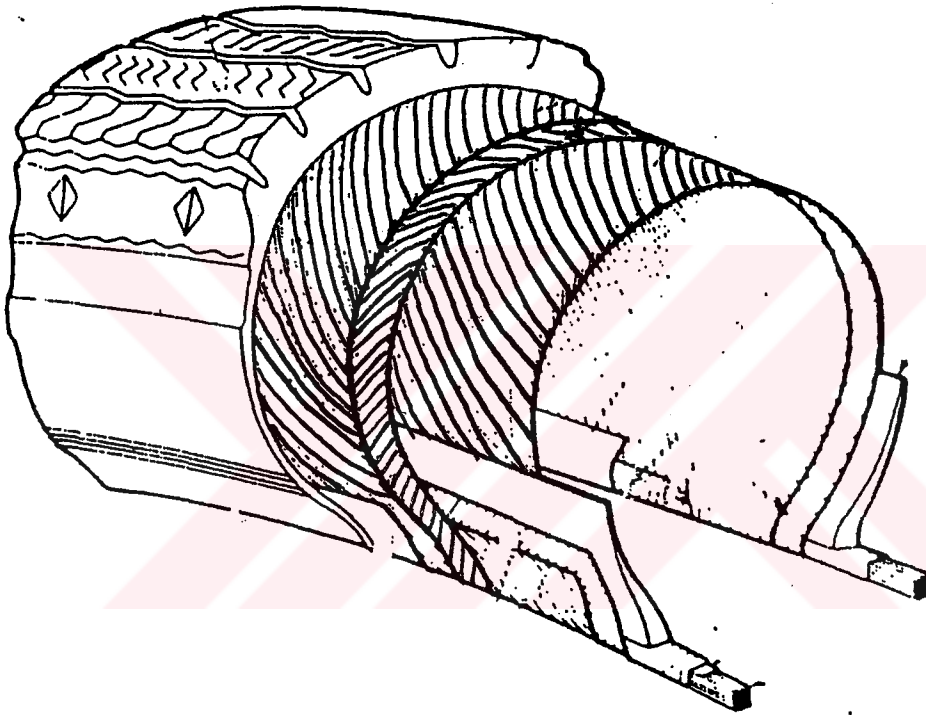
Çapraz gövde katmanlı tekerlerde gövde katmanları kord yönlenme açısı tekerin çevresel eksenine göre  $+\alpha$  ve  $-\alpha$  açısı yapacak şekilde düzenlenmiştir (Şekil 2). Kuşak bulunmaması nedeniyle bu tür tekerlerin kesitleri ve temas alanları ovaldir.

#### 1.5.2. Çapraz Gövde Katmanlı ve Kuşaklı Teker

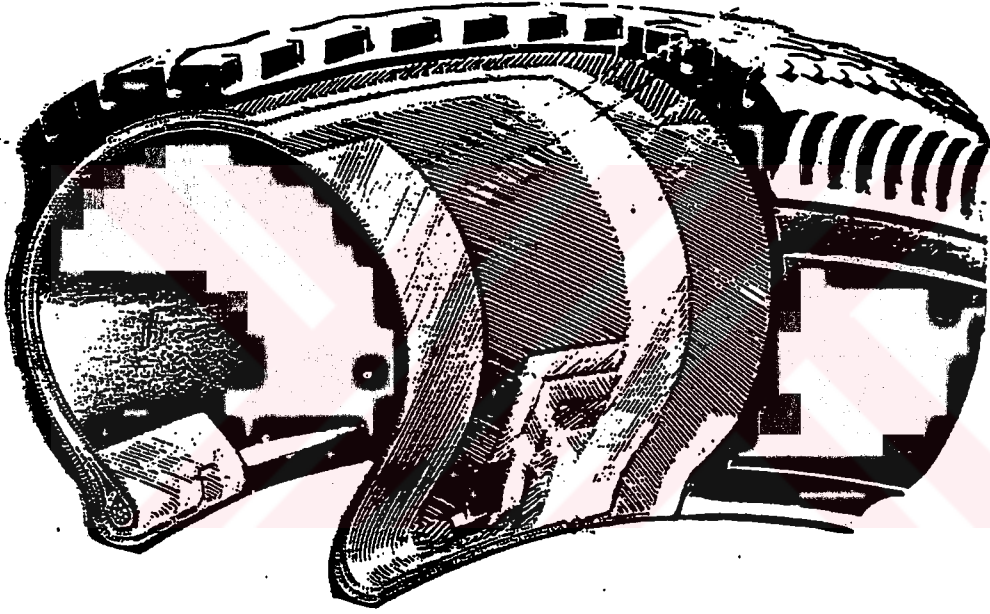
Bu tekerin bir önceki tekerden farkı, esas yapıya gövde katmanlarının yönlendirme açılarındaki  $(+\alpha, -\alpha)$  düzenini bozmayacak şekilde kuşak katmanları ilave edilmesidir. Böylece taban bölgesinde tekerin çevresel ve meridyenal katılığı artırılmış ve bunun sonucu olarak ta tekerin şişirilmiş geometrik formu kontrol edilmiş ve böylelikle frenleme sırasında taban bölgesine etkiyen ilave yükler karşılanmış olur.(Şekil 3)

#### 1.5.3. Radyal Gövde Katmanlı Tekerlek

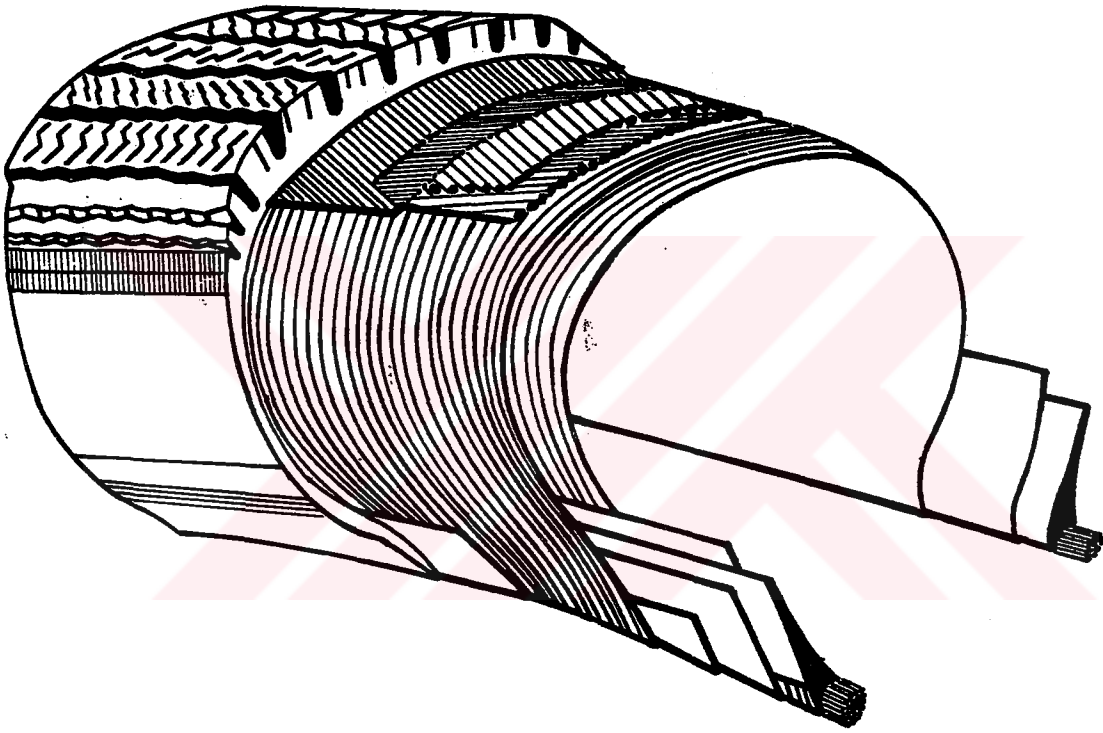
Bu tür tekerlerde, Şekil 4 'te görüldüğü gibi gövde katmanlarındaki kordların yönlenmesi radyal doğrultudadır. Bir başka deyişle gövde katmanlarındaki kordlar tekerin çevresel eksenine ile  $90^\circ$  açı yaparlar. Diğer bir ifade ile meridyenal doğrultu ile çakışırlar. Bu tasarım şekli ile kuşak destekli taban bölgesinden bağımsız olarak şekil



Şekil 2. Çapraz gövde katmanlı teker



Şekil 3. Çapraz gövde katmanlı ve kuşaklı teker



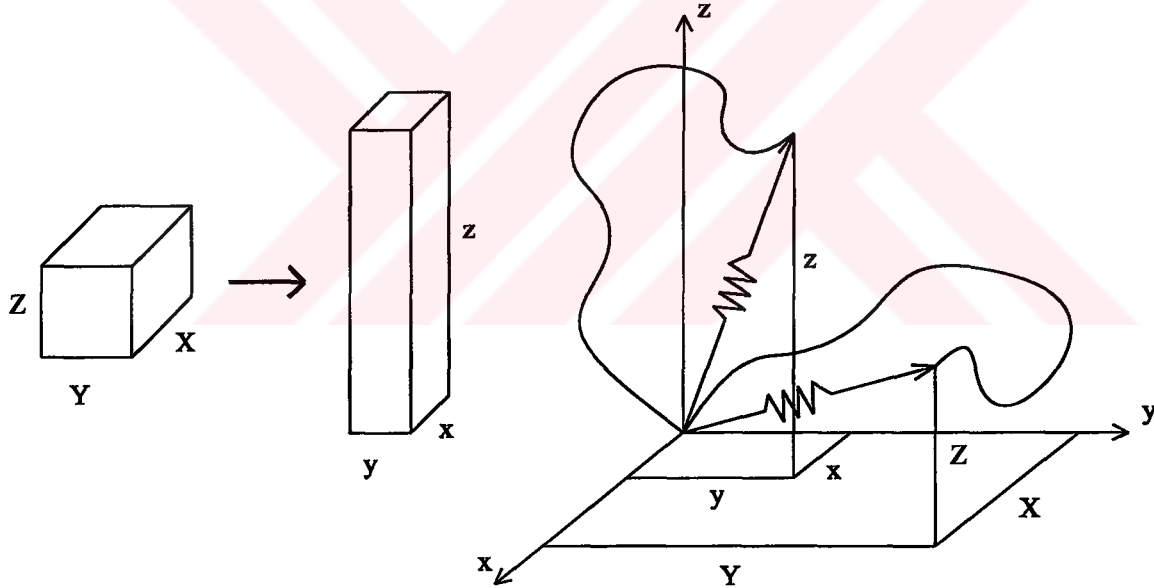
Şekil 4. Radyal gövde katmanlı teker

değiştiren esnek bir yanak bölgesi elde edilir. Bu sayede düzgün bir temas alanı elde edileceğinden, tekerde taban ömrü, viraj yeteneği, vb. özellikler iyileştirilmiş olmaktadır.

Kuşak katmanlarındaki kord açıları çapraz tekere göre daha küçüktür ve kuşaklarda kord malzemesi olarak tekstil, rayon ve çelik kullanılmaktadır.

### 1.6. Kauçuğun Şekil Değişimi Enerjisi Fonksiyonu

Teker tasarımında en önemli gereklerden birisi de, büyük elastik şekil değişimine uğrarken hacimsel şekil değişimine uğramayan, kauçukdan yapılmış bileşenlerin mekanik özelliklerini doğru olarak karakterize etmektir. Sonlu elemanlar analizi gibi teker tasarım analizlerinin başarısı, kauçuğun şekil değişimi enerjisi fonksiyonunun hassas olarak tanımlanmasına veya bu enerji denklemlerinden türetilen gerilme - şekil değişimi denklemlerine bağlıdır.



Şekil 5: a) Başlangıçta ebatları  $(X, Y, Z)$  olan numune şekil değiştirdikten  $(x, y, z)$  ebatlarına ulaşmaktadır. b) Bu şekil değişiminin numunedeki herhangi bir moleküler zincire yansıması

Kauçuğun lineer olmayan büyük elastik şekil değişimini tanımlamada kullanılan malzeme modellerini üretmek için iki yaklaşım kullanılır [48,49,50]. Bunların birincisi moleküler yaklaşım olarak bilinir ve moleküler ağın şekil değiştirme enerjisi denklemi,

kauçuğun fiziksel yapısı ile kimyasal yapısı ilişkilendirilerek ifade edilmeye çalışılır. Phenomenological yaklaşım olarak adlandırılan ikinci yaklaşımda ise; kauçuğun kimyasal yapısıyla direkt bir ilişkisi olmayan, deneysel olarak desteklenmiş veya desteklenmemiş elastisitenin temel postülasyonları kullanılarak, gerilme ve birim şekil değişimi arasındaki ilişki elde edilmeye çalışılır. Bu çalışmada Phenomenological yaklaşımın ürünlerinden olan Mooney-Rivlin malzeme modeli kullanılacaktır.

### 1.6.1. Moleküler Yaklaşım

Bu yaklaşımda; izotermal şekil değişim koşullarında kauçuğun moleküler yapısındaki bir zincirin bir ucunu diğer ucuna bağlayan vektördeki şekil değişimi ile şekil değişiminin entropide sebep olduğu değişim ilişkilendirilir.

Bir numune üzerine etkiyen kuvvetin  $F$  olduğu varsayılırsa, Helmholtz serbest enerjisinin numune boyuna göre türevi bu kuvvete eşit olur. Yani;

$$F = \left( \frac{\partial E}{\partial L} \right)_{T,V} + T \left( \frac{\partial S}{\partial L} \right)_{T,V} \quad (1)$$

dir. Burada  $E$  iç enerjiyi,  $T$  sıcaklığı ve  $S$  ise entropiyi gösterir. Kaçuk benzeri malzemelerde numune boyunda meydana gelen değişim, toplam iç enerjide ( mekanik enerji  $W$  + termal enerji  $Q$  ) değişime neden olmazken ( $\Delta W + \Delta Q = 0$ ), entropide değişime sebep olur. Bu durumda ideal tek bir zincir için;

$$\begin{aligned} f &= -T \left( \frac{\partial s}{\partial r} \right) \\ &= -T \left( - \left( \frac{2k}{\rho^2} \right) r \right) = Kr \end{aligned} \quad (2)$$

elde edilir. Burada

$k$  : Boltzman sabiti

$\rho$  : zincirin boyunu temsil eden istatistiksel bir parametre

$r$  : zincirin bir ucunu diğer uca bağlayan vektör

Bu tanımlamaları, hacimsel şekil değişiminin korunması

$$\begin{aligned} XYZ &= xyz \\ &= \lambda_x X \lambda_y Y \lambda_z Z \end{aligned} \quad (3)$$

koşulu altında değerlendirir ve zincirdeki şekil değişim enerjisi, denklem (2) ve denklem (3) kullanılarak yazılır ve yeniden düzenlenirse birim hacim için şekil değiştirme enerjisi;

$$W = \frac{NkT}{2} \frac{(r^2)_i}{(r^2)_0} [\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 - 3] \quad (4)$$

$$= \frac{G}{2} [\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 - 3]$$

şeklinde elde edilir. Burada  $G$  numunenin kayma şekil değişimi modülü ve  $\lambda_i$ 'ler ise  $x$ ,  $y$  ve  $z$  eksenleri yönündeki germe oranları olarak tanımlanırlar. Denklem (4), aynı zamanda Neo-Hookean malzeme modeli olarak ta adlandırılmaktadır.

### 1.6.2. Phenomenological Yaklaşım

Bu yaklaşım ilk önce Rivlin tarafından önerilmiştir [51,52,53]. Rivlin; tamamen matematiksel bakış açısından şekil değişimi enerjisinin en genel ifadesini tanımlamaya çalışmıştır. Bu amaçla sıkıştırılamaz malzemelerin şekil değiştirme enerjisi denklemini tanımlamak için şekil değiştiren sistemin kinematikini tanımlamada kullandığımız, germe oranları gibi terimleri kullanmıştır.

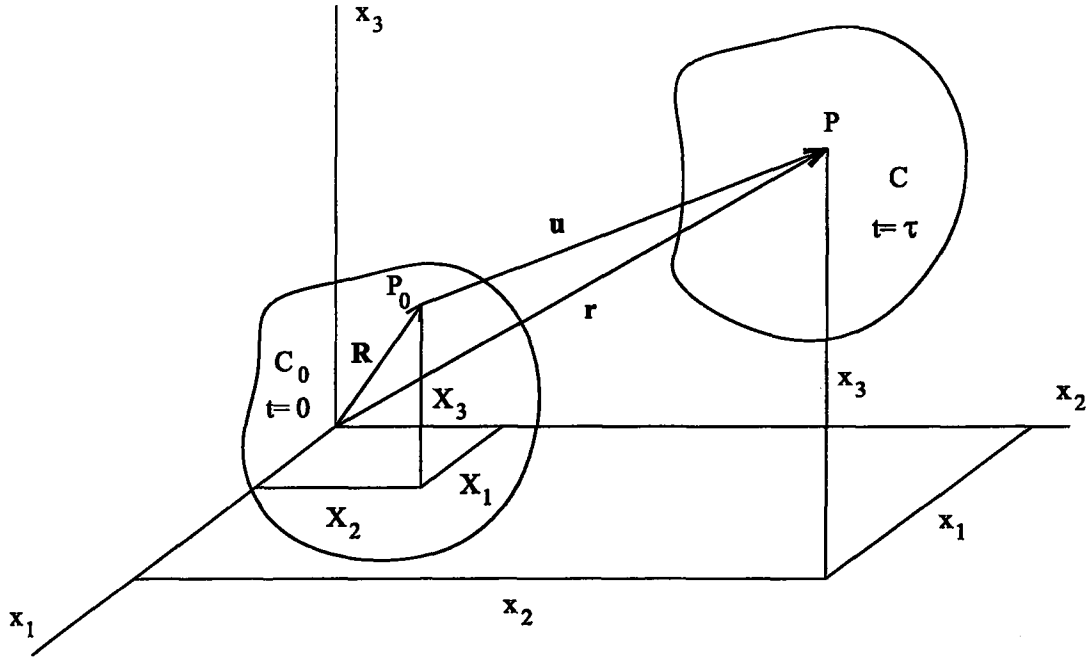
Kauçuk türü malzemeler sonlu şekil değişimi sergiledikleri için; sonlu şekil değişiminin incelenmesi gerekmektedir. Bu nedenle bu bölümün bir kısmı sonlu şekil değişimi teorisine ayrılacaktır.

Şekil 6 'da verilen üç boyutlu sürekli bir ortamı  $t = 0$  anında  $C_0$  konfigürasyonu ile tanımlayalım. Bu üç boyutlu ortam içerisindeki her bir  $\mathbf{X}$  nokta,  $X_i = (X_1, X_2, X_3)$  şeklinde verilen malzeme koordinatları ile tanımlansın. Cismin şekil değişimini veya hareketini tanımlayabilmek için, üç boyutlu uzayda sabit bir kartezyen koordinat sistemi olarak  $x_i$  'yi seçelim.  $t = \tau$  ( $0 \leq \tau \leq t$ ) anında cismin yeni bir konfigürasyona şekil değiştirdiğini veya ulaştığını varsayalım. Referans konfigürasyonunda  $\mathbf{X}$  ile tanımlanan parçacık,  $C$  konfigürasyonunda yeni bir  $P$  noktasına ulaşır ve sabit kartezyen koordinat sisteminde tanımlanır [54,55].

$$\begin{array}{lll} t=0 & \text{ için } & x_i = X_i \\ t=\tau & \text{ için } & x_i = x_i(\tau) \end{array} \quad (5)$$

yazılabilir.

Burada  $\mathbf{X}$  şekil değiştirmemiş hali temsil ederken,  $\mathbf{x}$  şekil değiştirmiş hali temsil etmektedir. Eğer bu iki koordinat sistemi arasında bir ilişki kurulabilinirse, cismin şekil



Şekil 6:  $t = 0$  dan  $t = \tau$  anına kadar sürekli ortamın şekil ve konum değişimi.

değişimi  $C_0$  konfigürasyonuna göre tanımlanabilir. Yani;

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(X_1, X_2, X_3) \\ x_2 &= x_2(X_1, X_2, X_3) \end{aligned} \quad (6)$$

$$x_3 = x_3(X_1, X_2, X_3)$$

veya tersine dönüşümle;

$$\begin{aligned} X_1 &= X_1(x_1, x_2, x_3) \\ X_2 &= X_2(x_1, x_2, x_3) \\ X_3 &= X_3(x_1, x_2, x_3) \end{aligned} \quad (7)$$

yazılabilir. Denklem (6) ve (7) ile verilen dönüşümler, Jakobyenin sıfırdan büyük olması ile mümkündür;

$$\left| \frac{\partial x_i(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_j} \right| > 0 \quad (8)$$

Bu kabuller altında;  $C_0$  konfigürasyonundaki herhangi bir  $P_0$  noktasını tanımlamak için kullanılan  $X_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 'ler, yer vektörü  $\mathbf{R}$  'nin bileşenlerini gösterir. Aynı nokta  $C$  durumunda  $P$  ile gösterilsin ve onun yer vektörü ise  $\mathbf{r}$  ile tanımlansın. Yani;

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= X_i \mathbf{i}_i \\ \mathbf{r} &= x_i \mathbf{i}_i\end{aligned}\tag{9}$$

Yerdeğiştirme vektörü  $\mathbf{u}$  ise;

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{r} - \mathbf{R} \\ &= u_i \mathbf{i}_i\end{aligned}\tag{10}$$

ile tanımlıdır. Denklem (6) ile verilen transformasyon kullanılırsa yerdeğiştirme vektörü için;

$$\mathbf{u} = \mathbf{x}(\mathbf{X}) - \mathbf{X}\tag{11}$$

$$u_i = u_i(X_1, X_2, X_3)$$

Şimdi şekil değiştirmemiş konfigürasyonda sonsuz küçük çizgi elemanı  $d\mathbf{X}$  'i ele alalım ve bu çizgisel elemanın şekil değiştirdikten sonra  $d\mathbf{x}$  haline dönüştüğünü varsayalım. (6) ve (10) denklemleri kullanılarak çizgisel diferansiyel elemanın her iki konfigürasyondaki halleri arasında ilişki kurulabilir;

$$\begin{aligned}dx_i &= F_{ij} dX_j \\ d\mathbf{x} &= \mathbf{F} d\mathbf{X}\end{aligned}\tag{12}$$

yazılabilir. Burada  $\mathbf{F}$ ; şekil değiştirme gradyeni olarak adlandırılır ve bileşenleri cinsinden :

$$F_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}\tag{13}$$

şeklinde ifade edilir. Cisim şekil değişimine uğradıktan sonra çizgisel elemanın boyunda değişim olmuşsa, yani  $dx_i^2 - dX_i^2 \neq 0$  ise, cisim şekil değişimine uğramıştır; eğer

değişiklik yoksa sistem rijit kütle hareketi yapmıştır. Bu durumda;

$$\begin{aligned}
 dx_i^2 - dX_i^2 &= d\mathbf{x}d\mathbf{x} - d\mathbf{X}d\mathbf{X} \\
 &= F_{ik}F_{il}dX_kdX_l - dX_kdX_l \\
 &= (F_{ik}F_{il} - \delta_{kl})dX_kdX_l
 \end{aligned} \tag{14}$$

olur. Denklem (14) 'te elde edilen  $F_{ik}F_{il}$  ifadesine Sağ Cauchy-Green deformasyon tansörü denir ve  $\mathbf{C}$  ile gösterilir. Yine bu denklemden Green-Lagrange birim şekil değişimi tansörü  $\epsilon_{kl}$  de elde edilir;

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{kl} &= \frac{1}{2}(F_{ik}F_{il} - \delta_{kl}) \\
 &= \frac{1}{2}(C_{kl} - \delta_{kl})
 \end{aligned} \tag{15}$$

Denklem (11) kullanılarak Green- Lagrange birim şekil değişimi tansörü yerdeğiştirme vektörünün bileşenleri cinsinden yazılabilir;

$$\epsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k} - u_{i,k} u_{i,l}) \tag{16}$$

Burada;

$$u_{k,l} = \frac{\partial u_k}{\partial X_l} \tag{17}$$

olarak tanımlıdır. Green-Lagrange birim şekil değişimi tansörünün bileşenleri;

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right)^2 \right] \\
 \epsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right)^2 \right] \\
 \epsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial X_3} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right)^2 \right] \\
 2\epsilon_{12} &= \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \\
 2\epsilon_{23} &= \frac{\partial u_3}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \\
 2\epsilon_{31} &= \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \frac{\partial u_3}{\partial X_1}
 \end{aligned} \tag{18}$$

olarak elde edilir. Sağ Cauchy - Green deformasyon tansörünün invaryantları ise;

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \text{tr} \mathbf{C} = C_{ii} \\
 I_2 &= (I_1^2 - \text{tr} \mathbf{C}^2) = \frac{1}{2}(C_{ii}C_{jj} - C_{ij}C_{ij}) \\
 I_3 &= \det \mathbf{C} = \det |C_{ij}|
 \end{aligned} \tag{19}$$

olarak tanımlanır. İnvaryantların Cauchy - Green şekil değişimi tansörlerine göre türevleri ise;

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial I_1}{\partial C_{kl}} &= \delta_{kl} \\
 \frac{\partial I_2}{\partial C_{kl}} &= C_{mm}\delta_{kl} - C_{kl} \\
 &= I_1\delta_{kl} - C_{kl} \\
 \frac{\partial I_3}{\partial C_{kl}} &= \frac{1}{2}e_{krs}e_{ltu}C_{rt}C_{su} \\
 &= I_3C_{kl}^{-1}
 \end{aligned} \tag{20}$$

şeklindedir. Denklem (20) 'de kullanılan  $\delta_{kl}$  ve  $e_{krs}$  sırasıyla Kronecker delta ve Permütasyon sembolleridir.

Eğer kullandığımız eksenlere göre şekil değiştirme sadece aksinel oluyor çarpılma olmuyorsa, yani eksenler asal ise;  $i \neq j$  için  $F_{ij} = 0$  'dır. Bu durumda sağ Green - Lagrange deformasyon tansörü aşağıdaki hali alır;

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial x_1}{\partial X_1}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial x_2}{\partial X_2}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{\partial x_3}{\partial X_3}\right)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \tag{21}$$

Burada  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 'ler asal germe oranları olarak bilinirler ve basit olarak aksinel boy değişimleri için, ilk boyun son boya oranı olarak tanımlanabilirler. Denklem (21)

ve denklem (15) kullanılarak, germe oranları asal birim şekil değişimleri cinsinden;

$$\begin{aligned}\lambda_1^2 &= 1 + 2\epsilon_{11} \\ \lambda_2^2 &= 1 + 2\epsilon_{22} \\ \lambda_3^2 &= 1 + 2\epsilon_{33}\end{aligned}\tag{22}$$

olarak elde edilir. Denklem (19) ile tanımlanan sağ Cauchy-Green deformasyon tansörünün invaryantları, germe oranları  $\lambda_i$  'ler cinsinden yazılabilir.

$$\begin{aligned}I_1 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 \\ I_3 &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2\end{aligned}\tag{23}$$

Kauçuk benzeri malzemeler mühendislik uygulamalarında genellikle sıkıştırılmaz, izotropik ve hiperelastik malzeme olarak kabul edilir. Bu durumda denklem (23) ile tanımlanan sağ Cauchy-Green deformasyon tansörünün hacimsel şekil değişimini temsil eden üçüncü invaryantı;

$$I_3 = 1\tag{24}$$

olur. Şekil değişimi üçüncü invaryanttan bağımsız olması sebebi ile, şekil değiştirme enerjisi denklemi birinci ve ikinci invaryantların fonksiyonu olarak yazılabilir. Bu durumda şekil değiştirme enerjisi denklemi;

$$W = W(I_1, I_2)\tag{25}$$

şeklini alır. Dikkat edilirse şekil değiştirmemiş hal için germe oranları  $\lambda_i$  'ler birim değere sahiptirler. Bu durumda sağ Cauchy-Green deformasyon tansörünün invaryantlarının ilk ikisi;

$$I_1 = 3\tag{26}$$

$$I_2 = 3$$

değerlerini alırlar. Bu durum dikkate alınır, şekil değiştirme enerjisi denkleminin birinci ve ikinci invaryant için Taylor serisine açılımı aşağıdaki şekilde olur [51,52].

$$W = \sum_{i=0} \sum_{j=0} c_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j\tag{27}$$

Burada  $c_{00} = 0$  'dır.

Birinci ve ikinci invaryantlar cinsinden enerji denklemi yazılırken, üçüncü invaryant aracılığı ile sıkıştırılamazlık enerji denklemine uygulanabilir. Bütün şekil değişimi boyunca üçüncü invaryant birim değere sahip olması *Lagrange çarpanı* aracılığı ile enerji denklemine uygulanırsa ( $I_3 = 1$  olması için enerji denklemi zorlanır) [49,56] şekil değiştirme ifadesi

$$W^* = W(I_1, I_2) + \lambda (I_3 - 1) \quad (28)$$

olur. Burada  $\lambda$  *Lagrange çarpanıdır*.

Lagrangian yaklaşımda Virtüel İş denklemi yazılırken, şekil değiştirmemiş hal referans alınarak düzenlenmiş olan Green- Lagrange birim şekil değişimi tansörü ile İkinci Piola-Kirchhoff gerilme tansörü kullanılır. Genel olarak enerji denkleminde, birim şekil değişimi tansörüne göre türev alınır, onun iş eşleniği olan gerilme tansörü elde edilir. Şekil değiştirme enerjisi denkleminde Green-Lagrange birim şekil değişimi tansörüne göre türev alınır, İkinci Piola-Kirchhoff gerilmesi elde edilir.

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} \\ &= 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} \delta_{ij} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} [\delta_{ij} C_{kk} - C_{ij}] + 2 \lambda \frac{\partial I_3}{\partial C_{ij}} \end{aligned} \quad (29)$$

Denklem (29) elde edilirken zincir kuralı kullanılarak türev alınmıştır. Cauchy-Green deformasyon tansörünün Green-Lagrange birim şekil değişimi tansörüne göre türevleri, denklem (15) üzerinden;

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{kl}}{\partial \epsilon_{ij}} &= 2 \quad \text{eğer } i, j = k, l \text{ ise} \\ \frac{\partial C_{kl}}{\partial \epsilon_{ij}} &= 0 \quad \text{eğer } i, j \neq k, l \text{ ise} \end{aligned} \quad (30)$$

olarak elde edilir.

Denklem (29), şekil değiştirmemiş hal için düzenlenirse Lagrange çarpanı elde edilebilir. Şekil değiştirmemiş halde yapıda sadece hidrostatik gerilme mevcuttur. Bu durumda  $C_{ij} = \delta_{ij}$  olacağı için;

$$\begin{aligned} S_{ij}^0 &= \left( 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} \Big|_0 + 4 \frac{\partial W}{\partial I_2} \Big|_0 + 2 \lambda \right) \delta_{ij} \\ &= -p \end{aligned} \quad (31)$$

olur. Burada  $p$  hidrostatik gerilmedir. Denklem (31) kullanılarak Lagrange çarpanı denklem (29) 'den elimine edilirse, sıkıştırılamaz bir malzeme için İkinci Piola-Kirchhoff gerilmesinin son hali aşağıdaki gibi olur.

$$S_{ij} = 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} \delta_{ij} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} [ \delta_{ij} C_{kk} - C_{ij} ] - \left( p + 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} \Big|^0 + 4 \frac{\partial W}{\partial I_2} \Big|^0 \right) \frac{\partial I_3}{\partial C_{ij}} \quad (32)$$

İkinci Piola Kirchhoff gerilmesi matematiksel formülasyon için kullanışlı olmasına rağmen, fiziksel olarak anlaşılır değildir.

Bu durumda; sonuçları gerilmeler cinsinden hesaplarken, İkinci Piola-Kirchhoff gerilmesini Cauchy gerilmesi (gerçek gerilme) veya mühendislik gerilmesi gibi fiziksel olarak yorumlanabilir bir başka gerilmeye dönüştürmemiz gerekir. İkinci Piola Kirchhoff gerilmesi Cauchy gerilmesine aşağıdaki bağıntı ile dönüştürülebilir;

$$\mathbf{t} = \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T \quad (33)$$

veya bileşenleri cinsinden;

$$t_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} (\delta_{ik} + u_{i,k}) S_{kl} (\delta_{jl} + u_{j,l}) \quad (34)$$

olarak elde edilir. Burada  $\rho_0, \rho$  sırasıyla katı cismin ilk ve sonraki anlardaki yoğunluklarıdır. Sıkıştırılamaz malzeme için  $\frac{\rho}{\rho_0} = 1$  'dir.

Cauchy gerilme tansörü direkt olarak enerji denkleminde türev olarak ta yazılabilir [57];

$$\mathbf{t} = 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{B} - \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{B}^{-1} - p \mathbf{I} \quad (35)$$

burada  $\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T$  olarak tanımlıdır ve sol Cauchy-Green deformasyon tansörü,  $\mathbf{I}$  ise birim matrisdir. Deneysel çalışmalarda daha çok kullanılan ve asal eksenlerde tanımlanmış Cauchy gerilmesinin daha basit olan formu ise [57];

$$t_{ii} = \lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} - p \quad (36)$$

şeklindedir.

Bu tanımlamalardan sonra, sıkıştırılmaz malzemeler için burada yalnızca Mooney malzeme modeli incelenecektir.

#### a) Mooney Malzeme Modeli

Mooney kurduğu modelde şu kabulleri yapmıştır [59].

- Kauçuk sıkıştırılmaz ve izotropdur.
- Kauçuk; basit kayma şekil değişiminde ve basit tek eksenli çekme veya basma durumlarında Hook kanununa uyar.

Mooney malzeme modelini, kauçuğun basit kayma şekil değişimi ile şekil değişimi enerjisi arasındaki yaklaşık lineer olan ilişkiyi dikkate alarak, genel kullanıma yönelik olarak geliştirdi. Bu kabuller ışığında Mooney, şekil değişimi enerjisi fonksiyonu için;

$$W = c_1 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + c_2 \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_3^2} - 3 \right) \quad (37)$$

ifadesini sunmuştur. Bu denklemdeki sabitler  $c_1$  ve  $c_2$  deneysel olarak belirlenirler. Burada dikkat edilirse  $c_2 = 0$  için, Mooney modeli Neo-Hookean malzeme modeline dönüşmektedir, yani Neo-Hookean modeli Mooney modelinin bir özel halidir.

Mooney modelinin sabitleri basit kayma şekil değişimi, basit tek eksenli çekme deneyi veya iki eksenli çekme (biaxial test) deneyinden belirlenebilir.

#### 1.7. Lineer Olmayan Sonlu Elemanlar Formülasyonu.

Bu tez çalışmasında, vitüel iş prensibi kullanılarak lineer olmayan Sonlu Elemanlar Formülasyonu ifade edilmeye çalışılmıştır. Öncelikle virtüel iş prensibi sürekli ortamın gerilme denge denklemlerinden elde edildikten sonra, yalnızca üç boyutlu bir eleman için formülasyon verilmiştir. Formülasyonda Lagrangian formülasyonu kullanılacaktır.

Şekil 7: Zaman aralığının bölünmesi

Lineer olmayan problemlerin çözümünde kullanılan en güçlü ve verimli yöntem, adım adım artımsal çözüm prosedürünü kullanmaktır. Öncelikle zaman aralığı  $[0, T]$  ,  $t_0 = 0$  ,  $t_1 > t_0$  ,  $t_2 > t_1$  , ..... ,  $t_N = T > t_{N-1}$  gibi zaman aralıklarına bölünür (Şekil 7). Bu yaklaşımda istenen bütün koşulları  $0 < t < T$  aralığında sağlayan çözüm yerine,  $t_n (n = 0, N)$  anında istenen bütün koşulları sağlayan çözüm aranmaktadır.  $t_{n+1}$  anı için aranacak çözüm tamamen  $t_n$  anı için elde edilen çözüme bağlıdır.  $t_n$  anından  $t_{n+1}$  anına geçiş adım olarak adlandırılır.  $t_n$  ve  $t_{n+1}$  zaman farkı, zaman adımı olarak adlandırılır ve  $\Delta t_n$  ile gösterilir.

$$\Delta t_n = t_{n+1} - t_n \quad (38)$$

Şimdi  $t_0$  ,  $t_1$  , ..... ,  $t_n$  anları için çözümlerin biliniyor ve  $t_{n+1}$  için çözüm arandığını kabul edelim. Eğer  $t_n$  'i  $\tau$  ,  $t_{n+1}$  'i  $t$  ve  $\Delta t_n$  'i ise  $\Delta t$  ile gösterirsek;

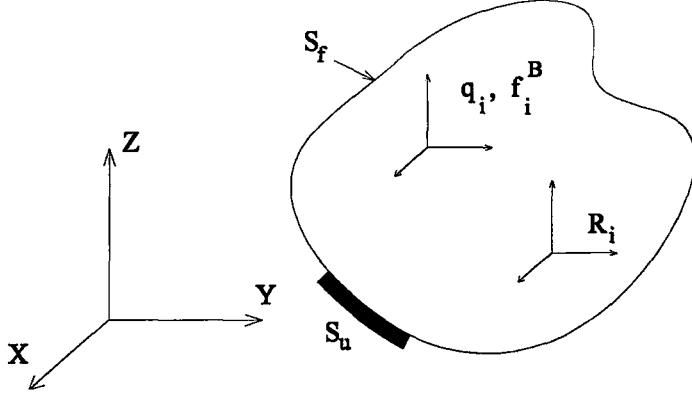
$$t = \tau + \Delta t \quad (39)$$

şeklinde yazılabilir.  $t_0$  ,  $t_1$  , ..... ,  $t_n$  anlarındaki çözümler biliniyorsa, bu anlardan herhangi birisi, sistemi analiz etmek için referans konfigürasyon olarak alınabilir. Genel olarak ya  $t_0$  anı, yada  $\tau$  anı referans konfigürasyon olarak alınır. Formülasyon; işlemlerde  $t_0$  anına göre referans konfigürasyon alınırsa Total Lagrangian, bilinen en son an  $\tau$  referans konfigürasyon olarak alınırsa, Updated Lagrangian formülasyonu olarak adlandırılır.

Her iki formülasyonda da, büyük şekil değişimleri, büyük dönme ve büyük yer değiştirmelerden kaynaklanan lineer olamayan kinematik etkiler, kullanılacak olan bünye denklemleriyle uygun olarak modellenir. Bir formülasyonun diğerine olan avantaj veya dezavantajı tamamıyla problem tipine bağlı olarak sayısal verimlilik açısından değerlendirilir.

### 1.7.1. Virtüel İş Prensibi

Statik olarak dengede olan bir yapıya, sınır şartlarını ihlal etmemek koşuluyla virtüel yer değiştirmeler uygulandığı zaman, iç kuvvetlerin toplam virtüel işi dış kuvvetlerin virtüel işine eşittir. Burada yerdeğiştirme tabanlı sonlu elemanlar formülasyonu virtüel yerdeğiştirme prensibi yardımıyla oluşturulmuştur. Bu tanıma uygun matematiksel ifadeyi elde etmek için, Şekil 8 de görüldüğü gibi üç boyutlu bir katı cisim



Şekil 8: Üç boyutlu sürekli ortam

tikel ifadeyi elde etmek için, Şekil 8 de görüldüğü gibi üç boyutlu bir katı cisim düşünelim. Bu cisim için denge denklemini yazalım.

$$\frac{\partial^t \sigma_{ij}}{\partial^t x_j} + {}^t f_i^B = 0 \quad \text{burada } i,j=1,2,3 \quad (40)$$

Doğal (natural) ve esas (essential) sınır koşulları ise;

$$\begin{aligned} {}^t \sigma_{ij} n_j &= {}^t f_i^{S_f} & S_f \text{ yüzeyinde tanımlı} \\ u_i &= u_i^{S_u} & S_u \text{ yüzeyinde tanımlı} \end{aligned} \quad (41)$$

burada  $S = S_u \cup S_f$ ,  $S_u \cap S_f = 0$  şeklindedir, ve  $n_j$  cismin  $S$  yüzeyinin birim normal vektörüdür.

$\delta u_i$  virtüel deplasman olmak üzere  $S_u$  yüzeyinde  $\delta u_i = 0$  dır. Denge denklemini tekrar yazarsak;

$$({}^t \sigma_{ij,j} + {}^t f_i^B) \delta u_i = 0 \quad (42)$$

dır. İfade bütün hacim üzerinden yeniden düzenlendiğinde;

$$\int_V ({}^t \sigma_{ij,j} + {}^t f_i^B) \delta u_i dV = 0 \quad (43)$$

şeklini alır. Burada  $(\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} = \sigma_{ij,j} \delta u_i + \sigma_{ij} \delta u_{i,j}$  ifadesinden yararlanarak yukarıdaki denklemden tekrar düzenleme yapıldığında;

$$\int_V [({}^t \sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} - {}^t \sigma_{ij} \delta u_{i,j} + {}^t f_i^B \delta u_i] dV = 0 \quad (44)$$

elde edilir. Daha sonra,  $\int_V ({}^t\sigma_{ij}\delta u_i)_{,j} dV = \int_S ({}^t\sigma_{ij}\delta u_i)n_j dS$  şeklinde diverjans teoreminden yararlanarak gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\int_V (-{}^t\sigma_{ij}\delta u_{i,j} + {}^t f_i^B \delta u_i) dV + \int_S ({}^t\sigma_{ij}\delta u_i)n_j dS = 0 \quad (45)$$

elde edilir. Doğal sınır koşulundan ve virtüel yerdeğiştirmenin sıfır olma koşulundan faydalanarak (45) ifadesini yeniden düzenlersek;

$$\int_{tV} (-{}^t\sigma_{ij}\delta u_{i,j} + {}^t f_i^B \delta u_i) d^tV + \int_{tS_f} ({}^t\sigma_{ij}\delta u_i^{Sf}) d^tS = 0 \quad (46)$$

elde edilir. Gerilme tansörünü simetrik ( ${}^t\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ) olması nedeniyle aşağıdaki ifade yazılabilir.

$${}^t\sigma_{ij}\delta u_{i,j} = {}^t\sigma_{ij}[\frac{1}{2}(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i})] = {}^t\sigma_{ij}\delta_\tau e_{ij} \quad (47)$$

Bu ifade yardımıyla (46) denklemini tekrar düzenlenirse lineer olmayan sonlu elemalar formülasyonunda kullanılacak olan virtüel yerdeğiştirme prensibi ifadesi elde edilmiş olur.

$$\int_{tV} \sigma_{ij}\delta_\tau e_{ij} dV = \int_{tV} {}^t f_i^B \delta u_i d^tV + \int_{tS_f} {}^t f_i^{Sf} d^tS \quad (48)$$

Bu ifadede, iç ve dış kuvvetlerin yapmış oldukları virtüel işleri ayrı ayrı yazarsak;

$$\begin{aligned} \delta W_S &= \int_{tV} \sigma_{ij}\delta_\tau e_{ij} dV \\ \delta W_R &= \int_{tV} {}^t f_i^B \delta u_i d^tV + \int_{tS_f} {}^t f_i^{Sf} d^tS \end{aligned} \quad (49)$$

elde edilir. Burada  ${}^t\sigma_{ij}$  kartezyen koordinatlarda *Cauchy Gerilme* tansörü  ${}^t e_{ij}$ , virtüel deplasmanlarla ilgili şekil değiştirme tansörü,  $\delta u_i$   $t$  anındaki virtüel yer değiştirme deplasman vektörü,  ${}^tV$   $t$  anındaki hacim,  ${}^t f_i^B$  birim hacime etki eden dış yükler,  ${}^t f_i^{Sf}$  birim yüzey alanına etki eden dış yüzey kuvvetleri,  ${}^tS_f$  dış yüzey kuvvetlerinin etki ettiği yüzey,  $\delta u_i^{Sf}$  ise  $S_f$  yüzeyinde oluşan virtüel yer değiştirmedir.

(45) denkleminin uygulanmasındaki problem  $t$  anı için cismin konfigürasyonunun bilinmemesidir. Lineer analiz ile lineer olmayan analiz arasındaki en önemli fark, lineer analizde  $t$  anı için başalangıçtaki konfigürasyonun kullanılabilmesidir. Lineer olmayan durumda ise cisim sürekli değişim içindedir ve artımsal çözüm prosedürü açasından

zorluklar çıkarmaktadır. Örneğin  $t$  anındaki Cauchy gerilmeleri,  $t_0$  anındaki Cauchy gerilmesine ilave gerilme eklenerek bulunamaz. Bunun nedeni  $t$  süresinde cismin yalnızca rijit dönme hareketi yapması durumunda Cauchy gerilme tansörü etkilenecektir. Bu nedenle lineer olmayan analizde kullanılacak olan gerilme ve şekil değiştirme tanımları oldukça önem kazanmaktadır.

Bu düşünce altında iç kuvvetlerin yapmış olduğu virtüel iş ifadesini ikinci Piola Kirchoff ve Green-Lagrange şekilde değiştirme tansörü cinsinden (Total Lagrange Formülasyonu için)

$$\begin{aligned} \int_{tV} \sigma_{kl} \delta_t e_{kl} dV &= \int_{tV} \left( \frac{t\rho}{0\rho} {}^tS_{ij} {}^tx_{k,i} {}^tx_{l,j} \right) ({}^0x_{m,k} {}^0x_{n,l} \delta {}^t\epsilon_{mn}) d^tV \\ &= \int_{tV} \left( \frac{t\rho}{0\rho} {}^tS_{ij} \delta_{mi} \delta_{nj} \delta {}^t\epsilon_{mn} \right) d^tV \\ &= \int_{0V} {}^tS_{ij} \delta {}^t\epsilon_{ij} d^0V \end{aligned} \quad (50)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada  ${}^tx_{i,j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$  ve  ${}^0x_{i,j} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}$  'dir.

### 1.7.2. Total Lagrangian Formülasyonu

İç kuvvetlerin yapmış olduğu iş ifadesi (45) denkleminin yardımıyla, ikinci Piola-Kirchoff ve Green-Lagrange birim şekil değiştirme tansörleri cinsinden

$$\delta W_s = \int_{0V} {}^tS_{ij} \delta {}^t\epsilon_{ij} dV \quad (51)$$

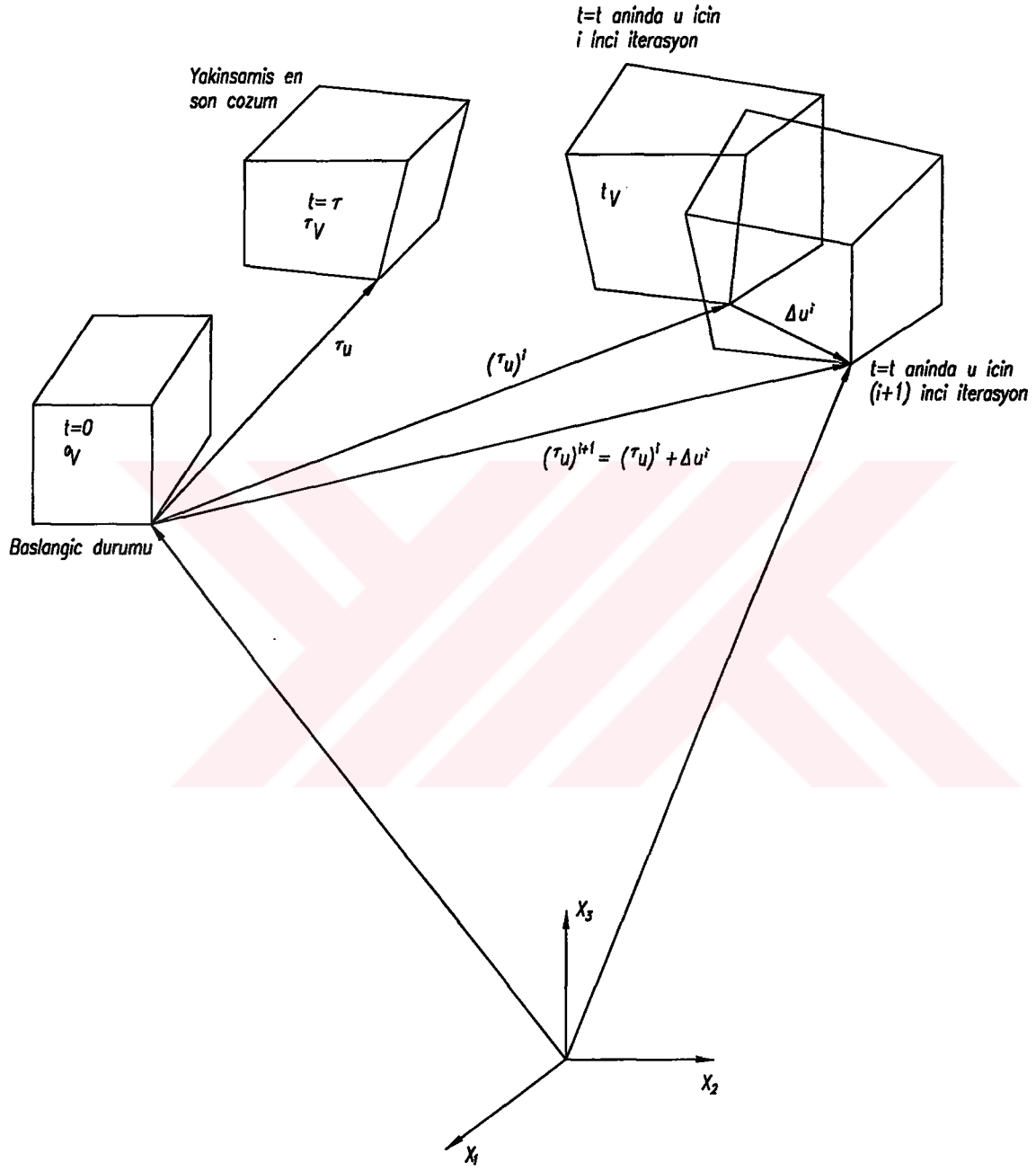
şeklinde yazılır (Şekil 9). Denklemi lineerleştirmek için aşağıdaki prosedür kullanılmıştır.

$${}^tS_{ij} = {}^{\tau}S_{ij} + {}_0S_{ij} \quad (52)$$

$${}^t\epsilon_{ij} = {}^{\tau}\epsilon_{ij} + {}_0\epsilon_{ij}$$

Burada  ${}^{\tau}S_{ij}$  gerilme tansöründeki artımı,  ${}_0\epsilon_{ij}$  birim şekil değişimi tansöründeki artımı göstermektedir ve aşağıdaki şekilde lineer ve linner olmayan şekil değişimlerinin toplamı olarak yazılabilir.

$${}_0\epsilon_{ij} = {}_0e_{ij} + {}_0\eta_{ij} \quad (53)$$



Şekil 9: Total Lagrange formülasyonunun şematik gösterimi

ve

$$\begin{aligned} {}_0e_{ij} &= \frac{1}{2} ({}_0u_{i,j} + {}_0u_{j,i} + {}_0^{\sigma}u_{k,i} {}_0u_{k,j} + {}_0u_{k,i} {}_0^{\sigma}u_{k,j}) \\ {}_0\eta_{ij} &= \frac{1}{2} {}_0u_{k,i} {}_0u_{k,j} \end{aligned} \quad (54)$$

şeklinde tanımlanmışlardır.  ${}^{\tau}_0\epsilon_{ij}$  değeri  $t$  anında sabit bir değerdir. Bu nedenle;

$$\delta_0^t \epsilon_{ij} = \delta_0 \epsilon_{ij} = \delta_0 e_{ij} + \delta_0 \eta_{ij} \quad (55)$$

şeklinde yazılabilir. Denklem (52) ve (54) 'yi (51) denkleminde yerlerine yazarsak virtüel iş ifadesi;

$$\delta W_s = \int_{0V} ({}^{\tau}_0S_{ij} \delta_0 \epsilon_{ij} + {}^{\tau}_0S_{ij} \delta_0 \eta_{ij} + {}_0S_{ij} \delta_0 \epsilon + {}_0S_{ij} \eta_{ij}) dV \quad (56)$$

şeklini alır. Burada parantez içindeki son terim diğer terimler ile karşılaştırıldığında daha yüksek derecelidir ve bu yüzden ihmal edilebilir.

Şimdi de gerilmelerle şekil değişimleri arasında;

$${}_0S_{ij} = {}_0C_{ijrs} {}_0e_{rs} \quad (57)$$

bağıntısını yazalım. Burada  ${}_0C_{ijrs}$  malzema tansörü olarak adlandırılır ve simetrik bir yapıya sahiptir.

Yüksek dereceden terimleri ihmal ederek ve denklem (19)'u kullanarak yeniden bir düzenleme yapıldığında (56) virtüel iş ifadesi aşağıdaki şekli alır.

$$\delta W_s = \int_{0V} {}^{\tau}_0S_{ij} \delta_0 \epsilon_{ij} dV + \int_{0V} {}^{\tau}_0S_{ij} \delta_0 \eta_{ij} dV + \int_{0V} ({}_0C_{ijrs} {}_0e_{rs}) \delta_0 e_{rs} dV \quad (58)$$

Burada  ${}_0C_{ijrs}$ ,  ${}_0\eta_{ij}$ ,  ${}_0e_{ij}$  ve  ${}^{\tau}_0S$  tansörlerinin simetrik olması nedeniyle

$$\delta W_s = \int_{0V} \delta_0 \epsilon_{ij}^T {}^{\tau}_0S_{ij} dV + \int_{0V} \delta_0 \eta_{ij}^T {}^{\tau}_0\tilde{S} {}_0\eta_{ij} dV + \int_{0V} \delta_0 e_{ij}^T ({}_0C_{ijrs} {}_0e_{rs}) dV \quad (59)$$

şeklinde yazılabilir. Burada malzeme tansörü  ${}_0C_{ijrs}$  6x6 boyutundadır. Diğer ifadeler

ise;

$$\begin{aligned}
 {}^0e_{ij} &= \{ {}^0e_{11} \quad {}^0e_{22} \quad {}^0e_{33} \quad 2{}_^0e_{12} \quad 2{}_^0e_{23} \quad 2{}_^0e_{31} \}^T \\
 {}^\tau S &= \{ {}^\tau S_{11} \quad {}^\tau S_{22} \quad {}^\tau S_{33} \quad {}^\tau S_{12} \quad {}^\tau S_{23} \quad {}^\tau S_{31} \}^T \\
 {}^0\eta_{ij} &= \{ {}^0u_{1,1} \quad {}^0u_{1,2} \quad {}^0u_{1,3} \quad {}^0u_{2,1} \quad {}^0u_{2,2} \quad {}^0u_{2,3} \quad {}^0u_{3,1} \quad {}^0u_{3,2} \quad {}^0u_{3,3} \}^T \quad (60) \\
 {}^0\tilde{S} &= \begin{bmatrix} {}^\tau\bar{S} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & {}^\tau\bar{S} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & {}^\tau\bar{S} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada  $\bar{0}$  ile  $3 \times 3$  lük *sıfır matris* temsil edilmektedir.  ${}^\tau\bar{S}$  matrisi ise;

$${}^\tau\bar{S} = \begin{bmatrix} {}^\tau S_{11} & {}^\tau S_{12} & {}^\tau S_{13} \\ {}^\tau S_{21} & {}^\tau S_{22} & {}^\tau S_{23} \\ {}^\tau S_{31} & {}^\tau S_{32} & {}^\tau S_{33} \end{bmatrix} \quad ve \quad \bar{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (61)$$

şeklinde verilir.

#### 1.7.2.1. Total Lagrange Formülasyonunun Üç Boyutlu Katı Elemana Uyarlanması

$t = t$  anında üç boyutlu katı elemanın geometrisi için :

$${}^t\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{n=1}^N \phi_n(\xi, \eta, \zeta) {}^t\mathbf{x}^n \quad (62)$$

şeklindedir. Burada  ${}^t\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta)$  izoparametrik koordinatlarda tanımlanmış elemanın içerisindeki herhangi bir noktanın yer vektörüdür,  ${}^t\mathbf{x}^n$  ise  $n$  nolu eleman düğüm noktasının yer vektörüdür,  $N$  elemanın toplam düğüm noktası sayısıdır ve  $\phi_n$  ise  $n$  'inci düğüm noktasına ait şekil fonksiyonudur (Şekil 10).

Eleman içerisinde  $\tau$  anından  $t$  anına kadarki yerdeğiştirme alanı aşağıdaki gibi tanımlanabilir;

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta) &= {}^t\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta) - {}^\tau\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta) \\
 &= \sum_{n=1}^N \phi_n(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{u}^n \quad (63)
 \end{aligned}$$

Şekil 10: İzoparametrik koordinatlarda tanımlanmış katı eleman

Burada  $\mathbf{u}^n$  ;  $n$  'inci düğüm noktasının yerdeğiştirme vektörünü göstermektedir, yani;

$$\mathbf{u}^n = {}^t\mathbf{x}^n - {}^\tau\mathbf{x}^n \quad (64)$$

Denklem (63) matris formunda aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \{ u_1 \quad u_2 \quad u_3 \}^T \\ &= \mathbf{Q}u \end{aligned} \quad (65)$$

Burada;

$$u = \{ u_1^1 \quad u_2^1 \quad u_3^1 \quad u_1^2 \quad u_2^2 \quad u_3^2 \quad \dots \dots \quad u_1^N \quad u_2^N \quad u_3^N \} \quad (66)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & \dots & \phi_N & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & \dots & 0 & \phi_N & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & \dots & 0 & 0 & \phi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} \quad (67)$$

Burada;

$$Q_1 = \{ \phi_1 \quad 0 \quad 0 \quad \phi_2 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad \phi_N \quad 0 \quad 0 \}$$

$$Q_2 = \{ 0 \quad \phi_1 \quad 0 \quad 0 \quad \phi_2 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad \phi_N \quad 0 \} \quad (68)$$

$$Q_3 = \{ 0 \quad 0 \quad \phi_1 \quad 0 \quad 0 \quad \phi_2 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad \phi_N \}$$

şeklindedir.

Denklem (65) ile tanımlanan yerdeğiştirme alanı ile eleman içerisindeki birim şekil değişimi, noktasal yerdeğiştirmeler  $u^n$  cinsinden hesaplanabilir.

$$\begin{aligned} \tau u_{k,i} &= \frac{\partial \tau u_i}{\partial X_i} = Q_{i,j} \tau u \\ u_{i,j} &= \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = Q_{i,j} u \end{aligned} \quad (69)$$

Burada;

$$\begin{aligned} \tau u &= \{ \tau u_1^1 \quad \tau u_2^1 \quad \tau u_3^1 \quad \tau u_1^2 \quad \tau u_2^2 \quad \tau u_3^2 \quad \dots \dots \dots \quad \tau u_1^N \quad \tau u_2^N \quad \tau u_3^N \}^T \\ Q_{i,j} &= \frac{\partial Q_i}{\partial X_j} \end{aligned} \quad (70)$$

dır. Denklem (69) denklem (60a) 'da yerlerine yazılır ve (60a) yeniden düzenlenirse;

$$e = B_L u \quad (71)$$

bulunur. Burada;

$$B_L = B_{L1} + B_{L2} \quad (72)$$

dir. Denklem (72) açık olarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$B_{L1} = \begin{bmatrix} Q_{1,1} \\ Q_{2,2} \\ Q_{3,3} \\ Q_{1,2} + Q_{2,1} \\ Q_{2,3} + Q_{3,2} \\ Q_{3,1} + Q_{1,3} \end{bmatrix}, \quad B_{L2} = \begin{bmatrix} \tau u^T Q_{k,1}^T Q_{k,1} \\ \tau u^T Q_{k,2}^T Q_{k,2} \\ \tau u^T Q_{k,3}^T Q_{k,3} \\ \tau u^T (Q_{k,1}^T Q_{k,2} + Q_{k,2}^T Q_{k,1}) \\ \tau u^T (Q_{k,2}^T Q_{k,3} + Q_{k,3}^T Q_{k,2}) \\ \tau u^T (Q_{k,3}^T Q_{k,1} + Q_{k,1}^T Q_{k,3}) \end{bmatrix} \quad (73)$$

Denklem (69a) 'yı denklem (60c) 'de yerine yazarsak,

$$\eta = B_N u \quad (74)$$

olur. Burada,

$$B_N = \begin{bmatrix} Q_{1,1}^T & Q_{1,2}^T & Q_{1,3}^T & Q_{2,1}^T & Q_{2,2}^T & Q_{2,3}^T & Q_{3,1}^T & Q_{3,2}^T & Q_{3,3}^T \end{bmatrix} \quad (75)$$

Yukarıda oluşturulan birim şekil değişimi tansörü - yerdeğiştirme vektörü ilişkisinden, virtüel iş ifadesini matris formunda aşağıdaki gibi sunabiliriz.

Bir tek elemandaki iç kuvvetlerin virtüel işi  $\delta w_s$  ile gösterirsek, Total Lagrangian formülasyonu:

$$\delta w_s = \delta u^T \left( \int_{0_v} B_L^T D B_L d^0 v \right) u + \delta u^T \left( \int_{0_v} B_N^T \tau \tilde{S} B_N d^0 v \right) u + \delta u^T \left( \int_{0_v} B_L^T \tau S d^0 v \right) u \quad (76)$$

olur. Burada  $0_v$  elemanın başlangıç anındaki hacmini gösterir.

Denklem (76) 'daki birinci parantez lineer katılık matrisini, ikinci parantez lineer olmayan katılık matrisini ve üçüncü parantez ise iç kuvvetlerin yük vektörünü temsil ederler. Bu terimleri sırasıyla  $k_L$ ,  $k_N$  ve  $f$  ile gösterirsek;

$$\begin{aligned} k_L &= \int_{0_v} B_L^T D B_L d^0 v \\ k_N &= \int_{0_v} B_N^T \tau \tilde{S} B_N d^0 v \\ f &= \int_{0_v} B_L^T \tau S d^0 v \end{aligned} \quad (77)$$

yazılabilir. Denklem (77) kullanılarak denklem (76) aşağıdaki gibi yazılabilir :

$$\delta w_s = \delta u^T (k_L u + k_N u + f) \quad (78)$$

Kütlesel yük ve yapının yüzeyine etkiyen yükler nedeniyle oluşan virtüel iş ( $\delta w_R$ ) ise aşağıdaki gibi hesaplanır;

$$\begin{aligned} \delta w_R &= \int_{0_v} {}^t b_i \delta u_i d^0 v + \int_{0_\Gamma} {}^t \bar{q}_i \delta u_i d^0 \Gamma \\ &= \delta u^T \left( \int_{0_v} Q^T {}^t b d^0 v \right) + \delta u^T \left( \int_{0_\Gamma} Q^T {}^t \bar{q} d^0 \Gamma \right) \\ &= \delta u^T {}^t \mathfrak{R} \end{aligned} \quad (79)$$

Burada;

$${}^t \mathfrak{R} = \int_{0_v} Q^T {}^t b d^0 v + \int_{0_\Gamma} Q^T {}^t \bar{q} d^0 \Gamma \quad (80)$$

ve  ${}^0\Gamma$  dış yüzey yükünün tanımlandığı yüzey alanıdır ( bütün yüzey alanının bir alt kümesidir). Ayrıca;

$$\begin{aligned} {}^tb &= \left\{ {}^tb_1 \quad {}^tb_2 \quad {}^tb_3 \right\}^T \\ {}^t\bar{q} &= \left\{ {}^t\bar{q}_1 \quad {}^t\bar{q}_1 \quad {}^t\bar{q}_1 \right\}^T \end{aligned} \quad (81)$$

şeklinde virtüel iş prensibi gereği iç kuvvetlerin virtüel işi dış yüklerin virtüel işine eşit olmalıdır; üç boyutlu elemanımız için,

$$\delta w_s = \delta w_R \quad (82)$$

olur. Bu durumda denklem (78) ve (79) kullanılarak;

$$\delta u^T (k_L u + k_N u + f) = \delta u^T {}^t\mathfrak{R} \quad (83)$$

elde edilir.

Yapının tamamı dikkate alınıp, bütün hacim üzerinden integral alınır; yani sonlu elemanlar felsefesine göre, yapı parçalanarak oluşturulan her bir sonlu eleman üzerinden alınan integraller toplanırsa :

$$\sum_{e=1}^N (k_L^e + k_N^e) u = \sum_{e=1}^N ({}^t\mathfrak{R}^e - f^e) \quad (84)$$

elde edilir. Burada,

$${}^\tau K = \sum_{e=1}^N (k_L^e + k_N^e) \quad {}^tR = \sum_{e=1}^N {}^t\mathfrak{R} \quad ve \quad {}^\tau F = \sum_{e=1}^N {}^\tau f^e \quad (85)$$

şeklinde yazarsak;

$${}^\tau K u = {}^tR - {}^\tau F \quad (86)$$

şeklinde lineer olmayan sistem denklemi elde edilmiş olur. Burada  ${}^\tau K$  sistemin katılık matrisidir. Denklem (86) 'nın sağ tarafı ile sol tarafı eşit olmalıdır. Ancak denklem (86) 'nın sol tarafı  $f^e$  'nin lineerizasyon nedeniyle,  $\tau$  anı için düzenlenirken,  ${}^t\mathfrak{R}^e$  ifadesi  $t$  anı için düzenlenmiştir. Dolayısıyla;

$${}^tR - {}^\tau F = \text{hata} \quad (87)$$

şeklinde hata oluşur. Yani gerilmenin neden olduğu virtüel işin lineerleştirilmesi nedeniyle dengelenmemiş virtüel iş ile karşılaşılır. Bu dengelenmemiş virtüel işi azaltmak için iterasyon prosedürü uygulanır. Dış yüklerin virtüel işi ile iç yüklerin virtüel işi arasındaki fark kabul edilebilir toleransa düşene kadar iterasyona devam edilir.

### 1.7.2.3. Sıkıştırılamaz Malzemeler İçin Sonlu Elemanlar Formülasyonu

Deplasman tabanlı sonlu elemanlar formülasyonu, sıkıştırılmaz özelliğe sahip kauçuk türü malzemelerin analizi için yeniden düzenlenmek zorundadır.

Bilindiği üzere, denge denklemlerinden ve bünye denklemlerinden yararlanarak, katı cisim için aşağıdaki denklemi yazabiliriz.

$$\sigma_{ij} = \kappa \epsilon_V \delta_{ij} + 2G \epsilon'_{ij} \quad (88)$$

Burada  $\kappa$  bulk modülü,  $G$  ise kayma modülüdür.

$$\kappa = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad , \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (89)$$

$\epsilon_V$  hacimsel şekil değişimi,  $\epsilon'_{ij}$  ise deviatorik şekil değiştirme bileşenleridir,  $\delta_{ij}$  ise Kronecker deltadır.

Cisme etki eden  $p$  hidrostatik basınç ise,

$$p = -\kappa \epsilon_V \quad (90)$$

şeklinde hesaplanır. Sıkıştırılmaz malzemler için Poisson oranı 0.5 olması nedeniyle, bulk modülü, tanımı gereği, sonsuz bir değer alırken, hacimsel şekil değişimi de sıfıra eşittir. Bu nedenle yukarıdaki denklem yardımıyla hidrostatik basınç değeri hesaplanamaz hale gelir. Sonuç olarak sıkıştırılmaz malzemeler için hidrostatik basınç değeri deplasman değerlerinden bağımsızlaştığı için deplasman tabanlı sonlu elemanlar formülasyonu ile elde edilen gerilme sonuçları, yetersiz kalacaktır. Problemi giderebilmek için sıkıştırılmazlık şartının mevcut formülasyona aktarılması gerekmektedir. Bu işlem ise virtüel iş prensibi kullanılarak elde edilen ifadenin içersine, sıkıştırılamamazlık şartının ilave edilmesi ile gerçekleştirilebilir. Şekil değiştirme enerjisini, hidrostatik etkileri de dikkate alacak biçimde aşağıdaki gibi tekrar düzenlersek,

$${}^{\tau}_0W = {}^{\tau}_0\overline{W} + {}^{\tau}_0Q \quad (91)$$

yazılabilir. Sonlu elemanlar formülasyonu için, şekil fonksiyonlarını kullanarak deplasmanlar ve basınç ifadeleri

$$u_i = \sum_{k=1}^N Q_k u_i^k \quad ve \quad \tilde{p} = \sum_{(i=1)}^q g_i \hat{p}_i \quad (92)$$

şeklinde yazılır. Burada  $Q_k$  deplasman şekil değiştirme fonksiyonu,  $g_i$  ise basınç şekil fonksiyonu,  $\tilde{p}$  ise elemana etkiyen toplam basınçtır.

Yeniden düzenlenmiş olan enerji ifadesi virtüel yer değiştirme prensibi ifadesi (48)'de yerine yazıldığında elde edilen ifadede hidrostatik basınç değeri bir sınırlayıcı koşul olarak yer alacaktır. Genel olarak izotropik malzemeler için enerji fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilir.

$${}^{\tau}W = {}^{\tau}\bar{W} - \frac{1}{2\kappa} (\bar{p} - \tilde{p})^2 \quad (93)$$

Bu enerji fonksiyonu kullanılarak gerekli lineerleştirmelerin yapılmasıyla sıkıştırılmaz malzemeler için sonlu elemanlar sistem denklemleri matris formda aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\begin{bmatrix} {}^{\tau}K_{UU} & {}^{\tau}K_{UP} \\ {}^{\tau}K_{PU} & {}^{\tau}K_{PP} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^tR \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} {}^{\tau}FU \\ {}^{\tau}FP \end{Bmatrix} \quad (94)$$

Burada  $\hat{u}$  ve  $\hat{p}$  elemanların düğüm noktalarındaki deplasman ve basınç artım vektörleridir. (94) denkleminin sağ tarafındaki vektörler;

$${}^{\tau}FU_i = \frac{\partial}{\partial {}^{\tau}\hat{u}_i} \left( \int_{\Omega_V} {}^{\tau}W d^0V \right) \quad {}^{\tau}FP_i = \frac{\partial}{\partial {}^{\tau}\hat{p}_i} \left( \int_{\Omega_V} {}^{\tau}W d^0V \right) \quad (95)$$

sol taraftaki matrisler ise;

$$\begin{aligned} {}^{\tau}K_{UU}_{ij} &= \frac{\partial {}^{\tau}FU_i}{\partial {}^{\tau}\hat{u}_j} \\ {}^{\tau}K_{UP}_{ij} &= \frac{\partial {}^{\tau}FU_i}{\partial {}^{\tau}\hat{p}_j} = \frac{\partial {}^{\tau}FP_i}{\partial {}^{\tau}\hat{u}_j} = {}^{\tau}K_{PU}_{ij} \\ {}^{\tau}K_{PP}_{ij} &= \frac{\partial {}^{\tau}FP_i}{\partial {}^{\tau}\hat{p}_j} \end{aligned} \quad (96)$$

olarak tanımlanmışlardır. Zincir türev kuralından

$$\begin{aligned}
{}^\tau F U_i &= \int_{0V} {}^\tau S_{kl} \frac{\partial {}^\tau \epsilon_{kl}}{\partial {}^\tau \hat{u}_j} \\
{}^\tau F P_i &= \int_{0V} \frac{1}{\kappa} ({}^\tau \bar{p} - {}^\tau \tilde{p}) \frac{\partial {}^\tau \tilde{p}}{\partial {}^\tau \hat{p}_i} d^0 V \\
{}^\tau K U U_{ij} &= \int_{0V} {}^0 C U U_{klrs} \frac{\partial {}^\tau \epsilon_{kl}}{\partial {}^\tau \hat{u}_i} \frac{\partial {}^\tau \epsilon_{rs}}{\partial {}^\tau \hat{u}_j} d^0 V + \int_{0V} {}^\tau S_{kl} \frac{\partial {}^\tau \epsilon_{kl}}{\partial {}^\tau \hat{u}_i} \frac{\partial {}^2 {}^\tau \epsilon_{kl}}{\partial {}^\tau \hat{u}_i \partial {}^\tau \hat{u}_j} d^0 V \quad (97) \\
{}^\tau K U P_{ij} &= \int_{0V} {}^0 C U P_{kl} \frac{\partial {}^\tau \epsilon_{kl}}{\partial {}^\tau \hat{u}_i} \frac{\partial {}^\tau \tilde{p}}{\partial {}^\tau \hat{p}_j} d^0 V \\
{}^\tau K P P_{ij} &= \int_{0V} -\frac{1}{\kappa} \frac{\partial {}^\tau \tilde{p}}{\partial {}^\tau \hat{p}_i} \frac{\partial {}^\tau \tilde{p}}{\partial {}^\tau \hat{p}_j} d^0 V
\end{aligned}$$

olup burada,

$$\begin{aligned}
{}^\tau S_{kl} &= {}^\tau \bar{S}_{kl} - \frac{1}{\kappa} ({}^\tau \bar{p} - {}^\tau \tilde{p}) \frac{\partial {}^\tau \bar{p}}{\partial {}^\tau \epsilon_{kl}} \\
{}^0 C U U_{klrs} &= {}^0 \bar{C}_{klrs} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial {}^\tau \bar{p}}{\partial {}^\tau \epsilon_{kl}} \frac{\partial {}^\tau \bar{p}}{\partial {}^\tau \epsilon_{rs}} - \frac{1}{\kappa} ({}^\tau \bar{p} - {}^\tau \tilde{p}) \frac{\partial {}^2 {}^\tau \bar{p}}{\partial {}^\tau \epsilon_{kl} \partial {}^\tau \epsilon_{rs}} \quad (98) \\
{}^0 C U P_{kl} &= \frac{1}{\kappa} \frac{\partial {}^\tau \bar{p}}{\partial {}^\tau \epsilon_{kl}}
\end{aligned}$$

tanımları yapılmıştır.

Kauçuk benzeri malzemeler için farklı modeller olmasına rağmen en çok kullanılanları, Neo-Hookean, Mooney-Rivlin ve Ogden malzeme modelleridir. Burada yalnızca Mooney-Rivlin modeli için formülasyon verilecektir.

Mooney-Rivlin malzeme modeli, birim hacim için şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu

$${}^\tau \tilde{W} = C_1 ({}^\tau I_1 - 3) + C_2 ({}^\tau I_2 - 3) \quad , \quad {}^\tau I_3 = 1 \quad (99)$$

olarak elde edilmiştir. Burada  $C_1$  ve  $C_2$  malzeme sabitleridir ve deneysel olarak elde edilirler,  ${}^\tau I_i$  ise Cauchy-Green deformasyon tansörü bilşenleri cinsinden ifade edilmiş şekil değiştirme invariantlarıdır.

$$\begin{aligned}
{}^\tau I_1 &= {}^\tau C_{kk} \\
{}^\tau I_2 &= \frac{1}{2} [({}^\tau I_1)^2 - {}^\tau C_{ij} {}^\tau C_{ij}] \quad (100) \\
{}^\tau I_3 &= \det {}^\tau C
\end{aligned}$$

Denklem (99)'daki  ${}^\tau_0\tilde{W}$  enerji ifadesi, yukarıdaki formülasyondaki  ${}^\tau_0\overline{W}$  enerji ifadesine eşit değildir. Bunun nedeni (99) denkleminde sıkıştırılamazlık şartı  ${}^\tau_0I_3 = 1$  kullanılması nedeni ile, enerji ifadesine hidrostatik basıncın yapmış olduğu iş ifadesinin eklenmesi gereklidir.

$${}^\tau_0\tilde{W} = C_1({}^\tau_0I_1 - 3) + C_2({}^\tau_0I_2 - 3) + W_H({}^\tau_0I_3) \quad (101)$$

Bu ifadedeki her üç terimde de basıncın etkisi olması nedeni ile direkt olarak kullanılamaz. Daha uygun bir ifade elde edebilmek için aşağıdaki indirgenmiş invariantlar tanımlanır,

$$\begin{aligned} {}^\tau_0J_1 &= {}^\tau_0I_1 ({}^\tau_0I_1)^{-1/3} \\ {}^\tau_0J_2 &= {}^\tau_0I_2 ({}^\tau_0I_3)^{-2/3} \end{aligned} \quad (102)$$

$${}^\tau_0J_3 = ({}^\tau_0I_3)^{1/2}$$

ve tekrar enerji ifadesi yazılırsa

$${}^\tau_0\overline{W} = C_1({}^\tau_0J_1 - 3) + C_2({}^\tau_0J_2 - 3) + \frac{1}{2}\kappa({}^\tau_0J_3 - 1)^2 \quad (103)$$

elde edilir. Burada enerji ifadesinden oluşan basınç değeri

$${}^\tau\overline{p} = -\kappa({}^\tau_0J_3 - 1) \quad (104)$$

türevleri ise

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}^\tau\overline{p}}{\partial {}^\tau_0\epsilon_{kl}} &= -\kappa {}^\tau_0J_3 {}^\tau_0C_{kl} \\ \frac{\partial^2 {}^\tau\overline{p}}{\partial {}^\tau_0\epsilon_{kl} \partial {}^\tau_0\epsilon_{rs}} &= \kappa {}^\tau_0J_3 {}^\tau_0C_{kl} {}^\tau_0C_{rs} \\ &\quad - \kappa {}^\tau_0J_3^{-1} (\delta_{kre} \delta_{lsf} + \delta_{kse} \delta_{lrf}) {}^\tau_0C_{ef} \end{aligned} \quad (105)$$

şeklindedir. Bu denklemlerin (97) ve (98) denklemlerinde yerlerine yazılmasıyla, ikinci Piola-Kirchoff tansörü;

$${}^\tau_0S_{ij} = -p {}^\tau_0C_{ij} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} \delta_{ij} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} [\delta_{ij} C_{kk} - C_{ij}] \quad (106)$$

malzeme matrisi ise;

$${}^\tau_0C_{ijkl} = -p [{}^\tau_0C_{ij} {}^\tau_0C_{kl} + {}^\tau_0C_{il} {}^\tau_0C_{jk}] + 4 \frac{\partial^2 W}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} \quad (107)$$

olarak elde edilir.

Bu işlemlerin sonucu olarak sıkıştırılamaz malzemeler için sonlu elemanlar formülasyonun bileşenleri elde edilmiş olmaktadır. Bu denklem takımında deplasman  $\hat{u}$  ve basınç artımı  $\hat{p}$  olmak üzere iki bilinmeyen vardır.

$$KUU \hat{u} + KUP \hat{p} = B - FU \quad (108)$$

$$KUP^T \hat{u} + KPP \hat{p} = 0 - FP$$

İkinci denklemim yardımıyla basınç artımı

$$\hat{p} = KPP^{-1}(-FP - KUP^T \hat{u}) \quad (109)$$

elde edilir ve ilk denklemde yerine yazıldığında, kompakt formda sıkıştırılamaz malzemeler için sonlu elemanlar denklemi

$$K\hat{u} = R - F \quad (110)$$

şeklinde yazılabilir.  $K$  matrisi ve  $F$  vektörü aşağıdaki gibi hesaplanır;

$$K = KUU - KUPKPP^{-1}KUP^T \quad (111)$$

$$F = FU - KUPKPP^{-1}FP$$

### 1.8. Kord Takviyeli Kauçuk Kompozitlerin Sonlu Elemanlar Formülasyonu

Pnömatik teker yapısal olarak tamamıyla bir kord takviyeli kauçuk kompozit yapı uygulamasıdır. Bir veya birden fazla kord katmanları, kauçuk kompozitin dayanımını artırmak için, farklı yönelme açılarında kauçuk matris içine kordların yerleştirilmesiyle elde edilirler. Oluşan yapı makroskopik açıdan tamamıyla homojen olmayan anizotropik bir yapıdır. Kauçuk kompozitlerin davranışlarının belirlenmesinde kordların farklı yönelmelerinin getirmiş olduğu zorluğa ek olarak, özellikle yapının büyük şekil değişimlerine maruz kaldığı durumlarda, kordların da lineer olmayan davranış göstermeleri ilave bir zorluk oluşturmaktadır. Hatta bazı durumlarda çeki ve bası yüklerindeki çok farklı özellikleri nedeni ile yüklemenin durumuna göre kordlarda katlanmalar olabilmektedir.

Kord-takviyeli kompozitlerin sonlu elemanlar analizi için üç alternatif yaklaşım sözkonusudur. Bunlardan ilki, laminalı kompozit teorisi ve analizini temel alan yaklaşımdır. Burada her bir bileşenin malzeme özellikleri ortalaması alınarak yapı tek bir eşdeğer

malzemeye indirgenir. Bu durumda sayısal sonuçların doğruluğundan emin olabilmek için nispeten daha küçük boyutta eleman kullanılması gereklidir. Bunun yanında analize başlamadan önce ortalama alma işlemi için belli bir ön hazırlık yapılması gereklidir. Ek olarak sonuçların değerlendirilebilmesi için de tekrar bazı ilave işlemler gerekmektedir. Bu yaklaşımda kullanılan basit bünye denklemi nedeni ile malzemenin mekanik davranışı yeterince gerçekçi olarak temsil edilememektedir.

İkinci olarak, takviye kordlarının mekanik davranışının simülasyonu için bir boyutlu bar elemanlar kullanılabilir. Bu elemanlar kauçuk elemanlara, düğüm noktalarında deplasman uyumunu sağlayacak şekilde süperpoze edilirler. Bu tür yaklaşımlar ilk olarak çelik takviyeli beton yapılar için kullanılmıştır. Mantık olarak basit olmasına rağmen, sonlu elemanlar ağıni oluşturma esnasında, kordların yerleri ve yönleri büyük zorluklar çıkarmaktadır. Bu sorun teker gibi yapılarda oldukça ciddi problemlere neden olur.

Üçüncü yaklaşım ise, "rebar" olarak adlandırılan, bir veya birden fazla farklı doğrultulardaki kordların kauçuk eleman içine gömülmesiyle temsil edilen elemanlardır (Şekil 11). Bu modelleme tekniği ilk olarak çelik takviyeli beton yapılar için iki boyutlu ve küçük şekil değişimi için kullanılmıştır. Daha sonraları bu eleman tipinin kord takviyeli kauçuk kompozitler için üç boyutlu ve lineer olmayan formülasyonu geliştirilmiştir. Bu yaklaşımla takviye kordlarının ve kauçuk matris malzemesinin her birinin ayrı ayrı kendi bünye teorisini kullanması nedeniyle doğru bir şekilde gerilme dağılımları elde edilmektedir. Böylece kordların ve kauçuğun geometrik ve lineer olmayan fiziksel özellikleri uygun bir şekilde modellenebilmektedir. Hem kord için hemde kauçuk için deneysel olarak elde edilen malzeme parametreleri bu model sayesinde bir ön işlem yapmaksızın doğrudan modelde kullanılabilmektedir. Ek olarak, farklı katmanların tek bir elemana indirgenmesiyle hem eleman sayısı hemde hesaplama zamanı azaltılabilmektedir (Şekil 12).

### 1.8.1. Rebar Eleman Formülasyonu

Katı cisim içindeki bir maddesel noktanın referans konfigürasyondaki  $X$  pozisyon (yer) vektörü,  $\mathbf{x}$  ise maddesel noktanın belli bir zaman sonraki yer değiştirmesini gösteren yer vektörü olsun. Burada deformasyon gradyanı ve sağ Cauchy-Green de-

formasyon tansörü;

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad \text{ve} \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (112)$$

şeklinde yazılabilir. Green-Lagrange şekil değiştirme tansörü ise,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (113)$$

şeklindedir. Burada  $\mathbf{I}$  ikinci dereceden birim tansördür. Referans konfigürasyonunda kordun yönlenmesinin  $\mathbf{T}$  birim vektörü ile tanımlandığını kabul edelim. Bu durumda,  $\lambda_R$  kordun aksenal gemesi,

$$\lambda_R^2 = \mathbf{T}^T \mathbf{C} \mathbf{T} \quad (114)$$

olarak ifade edilebilir. Kordun Green şekil değiştirmesi ise aşağıdaki gibi yazılır.

$$E_R = \frac{1}{2} (\lambda_R^2 - 1) = \frac{1}{2} (\mathbf{T}^T \mathbf{C} \mathbf{T} - 1) \quad (115)$$

Sınır değer problemini oluşturan bir boyutlu kord için zayıf (weak) formülasyonu aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$G(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_V S_R \delta E_R dV - G_{\text{dış}} \quad (116)$$

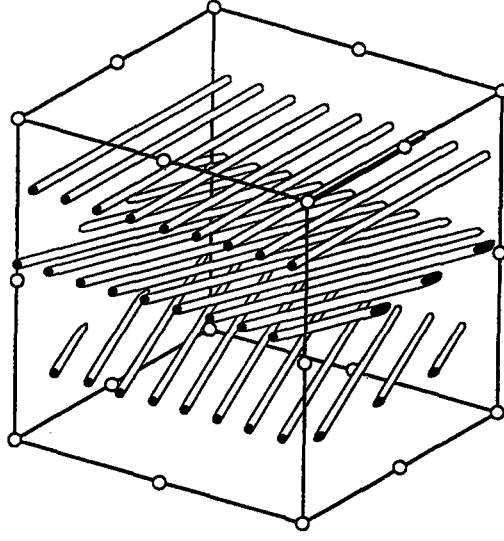
Burada  $S_R$  kord için ikinci Piola-Kirchhoff gerilme tansörü,  $\mathbf{u}$  deplasman vektörü,  $V$  yapıdaki bütün kordların toplam hacmi ve  $G_{\text{dış}}$  ise dış yüklerin yapmış olduğu virtüel işi ifade etmektedir.

Genel olarak, asal gerilmeler asal germelere bağlıdır, fakat bir boyutlu kordun özel durumu nedeniyle yanal germeler olmadığından,  $S_R$  yalnızca  $\lambda_R$ 'nin bir fonksiyonu olmaktadır.

(116)denklemini lineerleştirilirse,

$$\Delta G(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_V \left[ \frac{dS_R}{dE_R} \Delta E_R \delta E_R + S_R \Delta \delta E_R \right] dV \quad (117)$$

elde edilir. Bu denklemde  $dS_R/dE_R$  kordun Young modülünü temsil etmektedir.  $dS_R/dE_R$  farklı hiperelastik model temeline dayalı kapalı formda da ifade edilebilirler. Eğer kordun aksenal şekil değişimi küçük ise, sabit bir Young modülü kullanılabilir.



Şekil 11: Rebar elemandaki kordların yönlenmesi.

Genel olarak izoparametrik bir elamanın integrasyon noktalarındaki Green şekil değiştirmesi ve bunun değişimi;

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (C_{ij} - \delta_{ij}) \quad \text{ve} \quad \delta E_{ij} = \frac{1}{2} \delta C_{ij} = B_{ijm} \delta \bar{u}_m \quad (118)$$

şeklinde yazılabilir. Burada,  $\bar{u}$  elemanın düğüm deplasman vektörü,  $B$  total Lagrangian formülasyonunun büyük şekil değişimleri için sonlu elemanlar gösterimindeki standart beta matrisidir ve aşağıdaki şekilde yazılabilir,

$$B_{ijm} = B_{ijm}^L + B_{ijm}^{NL} = B_{ijm}^L + \bar{u}_n B_{ikn}^{L1} B_{ikn}^{L2} \quad (119)$$

Burada,  $B^L$  lineer sonlu elemanlar analizindeki standart beta matrisi,  $B^{NL}$  ise beta matrisinin lineer olmayan kısmıdır.

(118) Green şekil değiştirme ifadesi yeniden düzenlenirse,

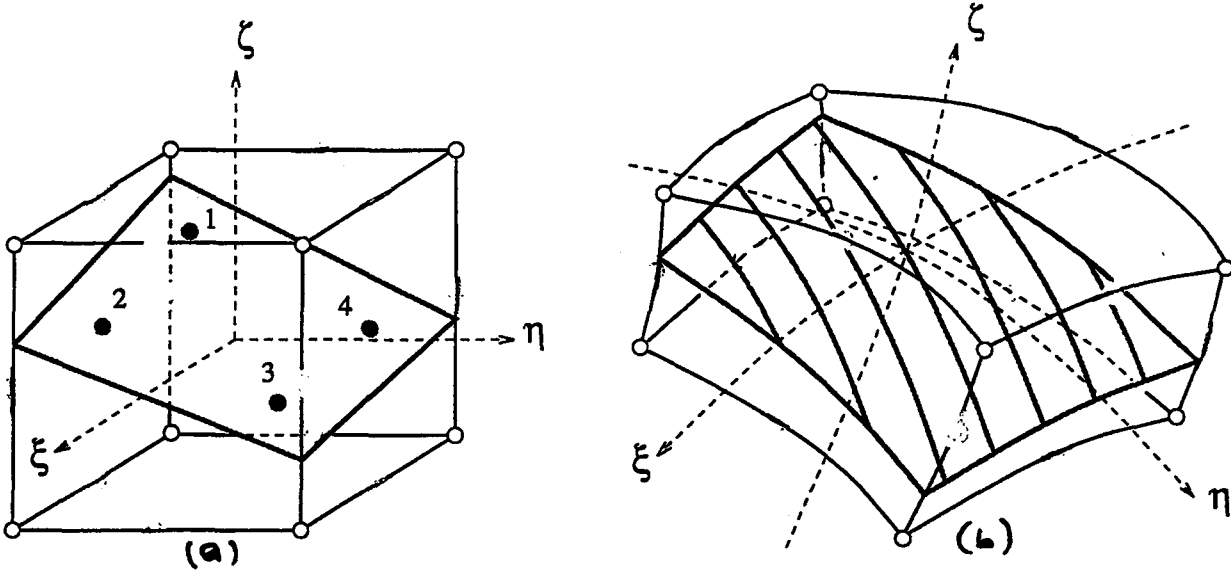
$$\delta E_R = \frac{1}{2} T_i T_j \delta C_{ij} = T_i T_j \delta E_{ij} = B_{Rm} \delta \bar{u}_m \quad (120)$$

yazılabilir. İlave olarak,

$$B_{Rm} = T_i T_j B_{ijm} \quad (121)$$

tanımı geçerlidir. Denklem (120) lineerleştirilirse,

$$\Delta \delta E_R = T_i T_j B_{ikn}^{L1} B_{jkm}^{L2} \Delta \bar{u}_n \delta \bar{u}_m \quad (122)$$



Şekil 12: 8 düğümlü izoparametrik rebar elemanda rebar katmanları (a) ve eşlenmesi (b)

elde edilir.

Yukarıdaki denklemlerin yardımıyla rebar eleman için katılık matrisi ve iç kuvvet vektörü aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

$$K_{mn} = \int_{V^e} \left[ \frac{dS_R}{dE_R} B_{Rm} B_{Rn} + S_R T_i T_j B_{ikn}^{L1} B_{jkm}^{L2} \right] dV \quad (123)$$

$$F_m = \int_{V^e} S_R B_{Rm} dV \quad (124)$$

Burada  $V^e$  elemandaki kordların toplam hacmidir.

### 1.9. Isı Transfer Denklemlerinin Sonlu Elemanlar Formülasyonu

Sonlu elemanlar yöntemi yalnızca katı mekaniği problemlerinin modellenmesinde değil aynı zamanda ısı iletimi problemlerinin modellenmesinde de başarıyla kullanılmaktadır. Burada ısı transfer denkleminin sonlu elemanlar formülasyonunun kurulmasında virtüel sıcaklıklar prensibi kullanılmıştır.

Şekil 13 'teki gibi bir katı cisim için kararlı durumda Fourier' in ısı iletim kanunun yardımıyla aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$q_x = -k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad q_y = -k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad q_z = -k_z \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (125)$$

Burada  $q_x, q_y$  ve  $q_z$  birim alandan iletilen ısı akılarıdır,  $\theta$  cismin sıcaklığı,  $k_x, k_y, k_z$  ısı iletim katsayılarıdır. Cisimdeki ısı akısı dengesinden

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = -q^B \quad (126)$$

yazılabilir. Burada  $q^B$  birim hacimde üretilen ısı miktarıdır. Cismin yüzeyinde aşağıdaki sınır koşulları sağlanmak zorundadır.

$$\theta|_{S_\theta} = \theta^S \quad \text{ve} \quad k_n \frac{\partial \theta}{\partial n} \Big|_{S_q} = q^S \quad (127)$$

Burada  $\theta^S$ ,  $S_\theta$  yüzeyinde bilinen sıcaklık,  $k_n$  ısı iletim katsayısı,  $n$  yüzey birim vektör bileşeni,  $q^S$ ,  $S_q$  yüzeyine giren ısı akısıdır.

Yukarıdaki denklemde, öncelikle katı cismin, durağan olduğu kabulü yapılmıştır. Eğer hareketli bir akışkan içersindeki ısı transferi incelenmek istenirse (126) denklemi-ne taşınım yoluyla ısı transferi terimi eklenmesi gerekir. İkinci kabul ise ısı transferi ve gerilme olayları birbirinden tamamıyla ayrı düşünülmüştür. Diğer bir kabulde faz değişimleri nedeniyle oluşan gizli ısı (latent heat) etkileri dikkate alınmamıştır. Bununla birlikte formülasyonda malzeme parametreleri sıcaklık bağımlıdır.

Isı tranferi analizinde çeşitli sınır koşullarıyla karşılaşılır. Bunlar;

*Sıcaklık sınır koşulu*; Cismin yüzeyinde belli bir noktada veya belli bir alanda tanımlanan sıcaklıklar.

$$\theta|_{S_\theta} = \theta^S \quad (128)$$

*Isı akışı sınır koşulu*; Cismin yüzeyinde belli bir bölgede tanımlanan ısı akışı

$$k_n \frac{\partial \theta}{\partial n} \Big|_{S_q} = q^S \quad (129)$$

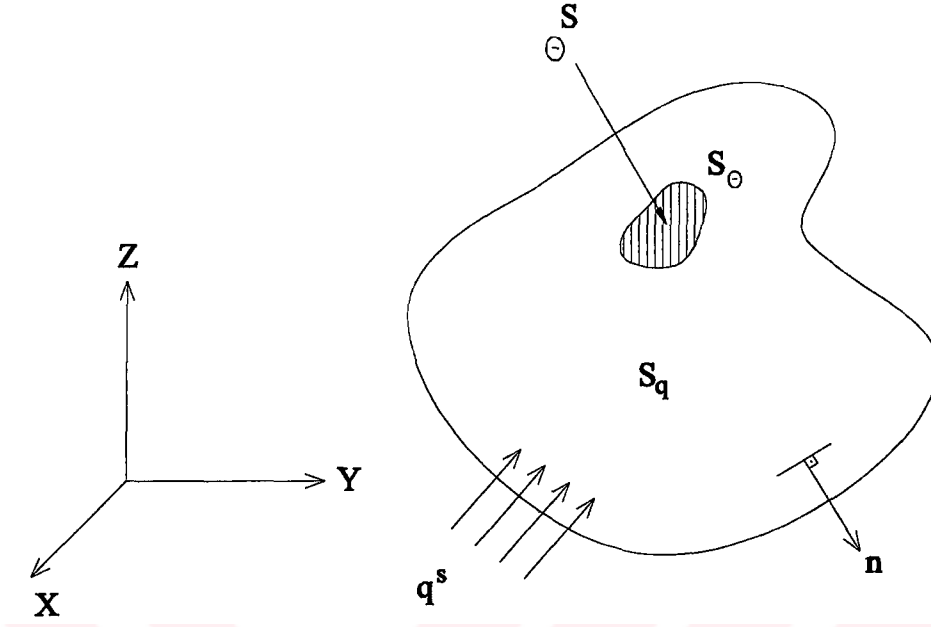
*Taşınım sınır koşulu*;

$$q^S = h(\theta_e - \theta^S) \quad (130)$$

burada  $h$  ısı taşınım katsayısıdır,  $\theta_e$  bilinen çevre sıcaklığı,  $\theta^S$  ise yüzey sıcaklığıdır.

*Radyasyon sınır koşulu*;

$$q^S = \sigma \epsilon (\theta_e^4 - \theta^{S4}) \quad (131)$$



Şekil 13: Isı transferi etkisindeki üç boyutlu cisim

burada  $\sigma$  Stefan-Boltzmann sabiti,  $\epsilon$  ise emisivitedir. Bu sınır koşullarına ek olarak zaman bağımlı (transient) analiz için başlangıç sıcaklık koşulu tanımlanmalıdır.

Isı transfer problemlerinin sonlu elemanlar çözümü için virtüel sıcaklık prensibi

$$\int_V \bar{\theta}'^T \mathbf{k} \theta' = \int_V \bar{\theta} q^B dV + \int_{S_q} \bar{\theta}^S q^S dV + \sum_i \bar{\theta}^i Q_i \quad (132)$$

olarak yazılabilir. Burada,

$$\bar{\theta}'^T = \left[ \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \quad (133)$$

ve  $Q^i$  konsantre ısı yüküdür.

Yukarıdaki denklemde ısı transferi için kararlı hal durumu dikkate alınmıştır. Bununla birlikte kısa bir süre içerisinde sisteme önemli derecede bir ısı girişi olursa (sınır koşullarının değişimi nedeniyle veya cisimdeki ısı üretimi nedeniyle), malzemede üretilen enerjiyi ifade eden yeni bir terim eklenmesi gereklidir.

$$q^c = \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (134)$$

Burada  $c$  malzemenin özgül ısısıdır.

Kararlı hal ve transient problemlerin, lineer ve lineer olmayan çözümleri için iteratif denge denkleminin yazılması gereklidir.

Kararlı durum için artımsal formda virtüel sıcaklık prensibi

$$\int_V \bar{\theta}' T^t \mathbf{k}^t \theta' dV = {}^tQ + \int_{S_c} \bar{\theta}^S t h ({}^t\theta_e - {}^t\theta^S) dS + \int_{S_r} \bar{\theta}^S t \kappa ({}^t\theta_r - {}^t\theta^S) dS \quad (135)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $S_c$  ısı iletiminin gerçekleştiği yüzey,  $S_r$  radyasyonla ısı transferinin gerçekleştiği yüzeydir,  ${}^tQ$  ise  $\tau$  ile  $t$  anı arasındaki ilave ısıdır. Bu denklemdeki  ${}^t\theta_e$  ve  ${}^t\theta_r$  bilinen sıcaklıklardır,  ${}^t\theta^S$  ise aranan sıcaklık değeridir.  ${}^tQ$  değeri yalnızca ısı üretimi  ${}^tq^B$  ve yüzey ısı akısının  ${}^tq^S$  etkilerini ve  ${}^tQ^i$  ısı yükünü içeren bir büyüklük olarak tanımlanmış olup, iletim ve radyasyon terimlerini içermektedir.

$${}^tQ = \int_V \bar{\theta}^t q^B dV + \int_{S_q} \bar{\theta}^S t q^S dS + \sum_i \bar{\theta}^i {}^tQ^i \quad (136)$$

Lineer analizde,  ${}^t\mathbf{k}$  ve  ${}^th$  sabit değerlidir, radyasyon sınır koşulu ise denkleme ilave edilmez ve  ${}^t\theta$  bilinmeyen sıcaklığı için (135)denklemini doğrudan çözmek mümkün olur.

$$\int_V \bar{\theta}' T^t \mathbf{k}^t \theta' dV = \int_{S_c} \bar{\theta}^S h {}^t\theta^S dS = {}^tQ + \int_{S_c} \bar{\theta}^S h {}^t\theta_e dS \quad (137)$$

Denklem (137),  $t$  anındaki bilinmeyen sıcaklık için lineer olmayan bir formdadır. Bu sıcaklık değeri için yaklaşık çözüm artımsal olarak (137) denkleminin lineerleştirilmesiyle çözülebilir;

$${}^t\theta = \tau\theta + \theta$$

$${}^t\theta' = \tau\theta' + \theta' \quad (138)$$

$$\tau\tilde{\kappa} = 4\tau h_r (\tau\theta^S)^3$$

$$\tau\kappa = \tau h_r (({}^t\theta_r)^2 + ({}^t\theta^S)^2) ({}^t\theta_r + {}^t\theta^S)$$

Bu ifadeler (137) denkleminde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} & \int_V \bar{\theta}' T^{\tau} \mathbf{k}^{\tau} \theta' dV + \int_{S_c} \bar{\theta}^S \tau h \theta^S dS + \int_{S_r} \bar{\theta}^S \tau \tilde{\kappa} \theta^S dS \\ & = {}^tQ + \int_{S_c} \bar{\theta}^S \tau h ({}^t\theta_e - {}^t\theta^S) dS + \int_{S_r} \bar{\theta}^S t \kappa ({}^t\theta_r - {}^t\theta^S) dS \\ & \quad - \int_V \bar{\theta}' T^t \mathbf{k}^t \theta' dV \quad (139) \end{aligned}$$

elde edilir. Newton-Raphson iteratif yöntemi kullanılarak denklemin çözümü yapılabilir.

Zaman bağımlı (transient) analizler için ise, ısı kapasite etkisi, gerilme analizinde atalet kuvvetlerinin sistem denkleminde ilave edilmesi gibi ısı transferi denklemlerine ilave edilir.

$$\begin{aligned} \int_V \bar{\theta}^T t(\rho c) \dot{\theta}' dV + \int_V \bar{\theta}'^T t \mathbf{k} \theta' dV \\ = {}^t Q + \int_{S_c} \bar{\theta}^S t h ({}^t \theta_e - {}^t \theta^S) dS + \int_{S_r} \bar{\theta}^S t \kappa ({}^t \theta_r - {}^t \theta^S) dS \end{aligned} \quad (140)$$

Sonlu elemanlar formülasyonunu gerçekleştirebilmek için  $t$  anındaki sıcaklık ve sıcaklık gradyanı için aşağıdaki tanımlamalar yapılırsa,

$$\begin{aligned} {}^t \theta^{(n)} &= \mathbf{H}^{(n)} {}^t \theta \\ {}^t \theta^{S(n)} &= \mathbf{H}^{S(n)} {}^t \theta \\ {}^t \theta'^{(n)} &= \mathbf{B}^{(n)} {}^t \theta \end{aligned} \quad (141)$$

elde edilir. Burada  $n$  indisi eleman numarasıdır,  ${}^t \theta$  ise düğüm noktalarındaki sıcaklık vektörüdür.

$${}^t \theta^T = [{}^t \theta_1 \quad {}^t \theta_2 \quad \dots \quad {}^t \theta_3] \quad (142)$$

$\mathbf{H}^{(n)}$  sıcaklık şekil fonksiyon matrisi,  $\mathbf{B}^{(n)}$  ise sıcaklık gradyant matrisidir,  $\mathbf{H}^{S(n)}$  ise yüzey sıcaklığı şekil fonksiyon matrisidir. Buradaki denklemler sadece  $t$  anı için değil diğer zamanlar için de geçerlidir.

Bu tanımlamaların yardımı ile lineer kararlı hal ısı transfer sistem denklemleri matris formda, aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$(\mathbf{K}^k + \mathbf{K}^c) {}^t \theta = {}^t Q + {}^t Q^c \quad (143)$$

Burada  $\mathbf{K}^k$  iletim katsayı matrisi;

$$\mathbf{K}^k = \sum_n \int_{V^{(n)}} \mathbf{B}^{(n)T} \mathbf{k}^n \mathbf{B}^{(n)} dV^{(n)} \quad (144)$$

ve  $\mathbf{K}^c$  ise taşınım katsayı matrisidir;

$$\mathbf{K}^c = \sum_n \int_{S_c^{(n)}} h^{(n)} \mathbf{H}^{S(n)T} \mathbf{H}^{S(n)} dS^{(n)} \quad (145)$$

düğüm ısı akımı vektörü ise;

$${}^tQ = {}^tQ_B + {}^tQ_S + {}^tQ_C \quad (146)$$

Burada,

$${}^tQ_B = \sum_n \int_{V^{(n)}} \mathbf{H}^{(n)T} {}^tq^{B(n)} dV^{(n)} \quad (147)$$

$${}^tQ_S = \sum_n \int_{S_q^{(n)}} \mathbf{H}^{(n)T} {}^tq^{S(n)} dS^{(n)} \quad (148)$$

ve  ${}^tQ_C$  ise konsantre ısı akımı düğüm yük vektörü değeridir.  ${}^tQ^e$  ise ısı taşınım sınır koşuluyla oluşan düğüm ısı akımıdır.

$${}^tQ^e = \sum_n \int_{S_c^{(n)}} h^{(n)} \mathbf{H}^{S(n)T} \mathbf{H}^{S(n)} {}^tq^{S(n)} dS^{(n)} \quad (149)$$

Lineer olmayan daimi durum koşulu için ise, sıcaklık ve sıcaklık gradyan şekil fonksiyonları kullanılarak

$$\left( \mathbf{K}^{k(i-1)} + \mathbf{K}^{c(i-1)} + \mathbf{K}^{r(i-1)} \right) \Delta \theta^i = {}^tQ + {}^tQ^{c(i-1)} + {}^tQ^{r(i-1)} - {}^tQ^{k(i-1)} \quad (150)$$

elde edilir. Burada (i) artımı sonundaki sıcaklık değeri

$${}^t\theta^{(i)} = {}^t\theta^{(i-1)} + \Delta \theta^{(i)} \quad (151)$$

olarak tanımlıdır. Yukarıdaki denklemde  ${}^tQ$  ısı akımı vektörü lineer durum için tanımlanmış vektör ile aynıdır.

Isı iletim katılık matrisi;

$$\mathbf{K}^{k(i-1)} = \sum_n \int_{V^{(n)}} \mathbf{B}^{(n)T} \mathbf{k}^{n(i-1)} \mathbf{B}^{(n)} dV^{(n)} \quad (152)$$

ve  $\mathbf{K}^c$  ise taşınım katsayı matrisidir;

$$\mathbf{K}^c = \sum_n \int_{S_c^{(n)}} h^{(n)(i-1)} \mathbf{H}^{S(n)T} \mathbf{H}^{S(n)} dS^{(n)} \quad (153)$$

radyasyon katılık matrisi;

$$\mathbf{K}^{r(i-1)} = \sum_n \int_{S_c^{(n)}} \tilde{\kappa}^{(n)(i-1)} \mathbf{H}^{S(n)T} \mathbf{H}^{S(n)} dS^{(n)} \quad (154)$$

ısı akımı vektörleri ise;

$${}^tQ^{c(i-1)} = \sum_n \int_{S_e^{(n)}} {}^th^{(n)(i-1)} \mathbf{H}^{S(n)T} \left[ \mathbf{H}^{S(n)} \left( {}^t\theta_e - {}^t\theta^{(i-1)} \right) \right] dS^{(n)} \quad (155)$$

$${}^tQ^{r(i-1)} = \sum_n \int_{S_e^{(n)}} {}^t\kappa^{(n)(i-1)} \mathbf{H}^{S(n)T} \left[ \mathbf{H}^{S(n)} \left( {}^t\theta_r - {}^t\theta^{(i-1)} \right) \right] dS^{(n)} \quad (156)$$

$${}^tQ^{k(i-1)} = \sum_n \int_{V^{(n)}} \mathbf{B}^{(n)T} \left[ {}^tk^{(n)(i-1)} \mathbf{B}^{(n)} {}^t\theta^{(i-1)} \right] dV^{(n)} \quad (157)$$

olarak matris formada yazılabilir.

Isı taşınım ve radyasyon sınır koşullarına ek olarak, düğüm noktalarında sıcaklıklar sınır koşulu olarak ta verilebilir. Bu durumda gerilme analizinde yerdeğiştirme sınır koşulunun tanımlanmasında olduğu gibi yukarıda çıkartılmış olan denklemlere bu sınır koşulları doğrudan yazılarak çözüm yapılır.

Zaman bağımlı ısı transfer denkelmlerinde hatırlanacağı gibi ısı kapasite etkileri, ısı üretiminin bir parçası olarak denkleme ilave edilmişti. Bu denklemler kapalı (implicit) veya açık (explicit) zaman integrasyonu kullanılarak çözölmektedir.

Geri yönlü implicit zaman integrasyonu kullanıldığında, daimi durum koşulu için çıkarılmış denklem yardımıyla elde edilebilir. Sıcaklık türev ifadesi şekil fonksiyonu kullanılarak aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\dot{\theta}^{(n)}(x, y, z, t) = \mathbf{H}^{(n)}(x, y, z) \dot{\theta}(t) \quad (158)$$

ve ısı kapasitesi için

$${}^tQ_B = \sum_n \int_{V^{(n)}} \mathbf{H}^{(n)T} {}^tq^{B(n)} - {}^t(\rho c)^{(n)} \mathbf{H}^{(n)} {}^t\dot{\theta} dV^{(n)} \quad (159)$$

yazılabilir. Bu tanımlamaların yardımıyla zaman bağımlı ısı transfer denklemi lineer analizler için,

$$\mathbf{C}^t \dot{\theta} + (\mathbf{K}^k + \mathbf{K}^e) {}^t\theta = {}^tQ + {}^tQ^e \quad (160)$$

Burada  $\mathbf{C}$  ısı kapasite matrisi

$$\mathbf{C} = \sum_n \int_{V^{(n)}} \mathbf{H}^{(n)T} {}^t(\rho c)^{(n)} \mathbf{H}^{(n)} dV^{(n)} \quad (161)$$

olur.

Lineer olmayan analizler için ( ısı kapasitesi etkilerini lineerleştirmeden tam Newton-Raphson iterasyonu kullanılarak)

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{C}^{(i)}\dot{\boldsymbol{\theta}}^{(i)} + \left( \mathbf{K}^{k(i-1)} + \mathbf{K}^{c(i-1)} + \mathbf{K}^{r(i-1)} \right) \Delta \boldsymbol{\theta}^i \\ = {}^t\mathbf{Q} + {}^t\mathbf{Q}^{c(i-1)} + {}^t\mathbf{Q}^{r(i-1)} - {}^t\mathbf{Q}^{k(i-1)} \end{aligned} \quad (162)$$

yazılabilir.  ${}^t\mathbf{C}^{(i)}$  ısı kapasite matrisi

$${}^t\mathbf{C}^{(i)} = \sum_n \int_{V^{(n)}} \mathbf{H}^{(n)T} {}^t(\rho c)^{(n)(i)} \mathbf{H}^{(n)} dV^{(n)} \quad (163)$$

şeklindedir.

### 1.10. Viskoelastik Davranış ve Kayıp Enerjinin Hesaplanması

Viskoelastik malzemeler hem elastik hemde viskoz karakterleri bünyesinde barındıran malzemelerdir. Elastik teoride malzemelerin yalnızca enerji depolayabilme özelliği olduğu düşünülürken, viskoz malzeme teorisinde ise yalnızca kayıp enerji dikkate alınır. Viskoelastik malzemelerde ise enerjinin bir kısmı depolanırken bir kısımda kayıp enerji olarak açığa çıkmaktadır. Özellikle kauçuk türü malzemeler bu sınıfa girmektedir.

Viskoelastik malzemelere zaman bağımlı yükler uygulandığında, oluşan gerilmeler ve şekil değişimleri arasında belli bir faz farkı oluşur, bu faz farkı ise enerji kaybına neden olmaktadır. Viskoelastik malzemelerin tanımlanabilmesi için çeşitli lineer ve lineer olmayan malzeme modelleri kullanılmaktadır. Bu modeller, problemin özelliğine göre farklılıklar içermektedir.

Burada yalnızca viskoelastik malzemelerin histeresis özelliği nedeniyle oluşan enerjinin üzerinde durulacaktır. Bunun nedeni pnömomatik tekerin yapısının önemli bir kısmının kauçuktan yapılmış olması ve tekerin dinamik yük altında çalışması nedeni ile açığa çıkan enerjinin, tekerdeki en önemli ısı kaynağı olmasıdır. Bu sebeble kayıp enerjinin hesaplanması tekerin ısı analizi açısından önem kazanmaktadır.

Genel olarak dinamik yük etkisinde çalışan lineer viskoelastik bir malzemede, şekil değiştirmelerin sinüzoidal olduğu kabul edilirse,

$$\epsilon = \epsilon_0 \sin \omega t \quad (164)$$

şeklinde ifade edilebilir. Gerilme ise,  $\delta$  faz farkı olmak üzere,

$$\sigma = \sigma_0 \sin(\omega t + \delta) = (\sigma_0 \cos \delta) \sin \omega t + (\sigma_0 \sin \delta) \cos \omega t \quad (165)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada  $\sigma_0$  gerilme genliği,  $\epsilon_0$  şekil değiştirme genliğidir. Yukarıdaki denklem yeniden düzenlenirse,

$$\sigma = E' \epsilon_0 \sin \omega t + E'' \epsilon_0 \cos \omega t \quad (166)$$

yazılabilir. Burada;

$$E' = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \cos \delta \quad \text{ve} \quad E'' = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \sin \delta \quad (167)$$

olmak üzere;

$$E^* = E' + E'' \quad (168)$$

olur. (168) ifadesinde  $E'$  ve  $E''$  değişkenleri  $E^*$  dinamik viskoelastik modülün reel ve imajiner kısımları olarak tanımlanabilir.  $E'$  dinamik modul,  $E''$  ise kayıp modülü olarak adlandırılır. Faz açısı ise,

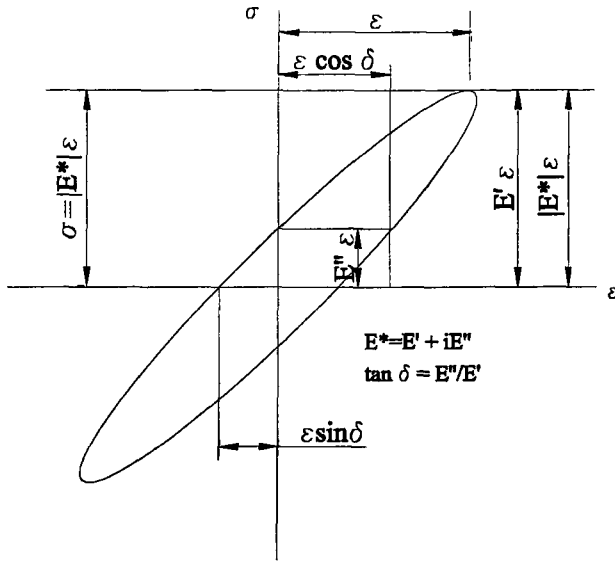
$$\tan \delta = \frac{E''}{E'} \quad (169)$$

şeklinde yazılabilir. Yani dinamik modülün kayıp module oranı tanjant modülü olarak adlandırılabilir.

Faz açısı her bir yük tekrarındaki kayıp enerjiyi temsil etmektedir. Şekil 14 'te tekrarlı yük etkisi altında viskoelastik bir malzemede oluşan en genel haldeki gerilme şekil değiştirme grafiği verilmiştir. Sinüzoidal gerilme ile şekil değiştirme sonucu histerisis çevrimi Şekil 14 'te görüldüğü gibi oluşmaktadır.  $\delta$  sıfır olması durumunda elips alanı sıfır olacaktır ve malzeme lineer elastik bir malzeme gibi davranacaktır (Şekil 15).

Çevrim boyunca kaybolan enerji miktarı veya dinamik yükleme nedeniyle oluşan elastik olmayan enerji;

$$\begin{aligned} \text{Kayıp Enerji / Çevrim} &= \oint \sigma d\epsilon = \int_0^{2\pi/\omega} \sigma \frac{d\epsilon}{dt} dt \\ &= \omega \epsilon^2 \int_0^{2\pi/\omega} (E' \sin \omega t \cos + E'' \cos^2 \omega t) dt \\ &= \pi E'' \epsilon_0^2 \end{aligned} \quad (170)$$



Şekil 14: Kayıp modülü ve faz açısı arasındaki ilişkiyi göstren histeresis çevrimi

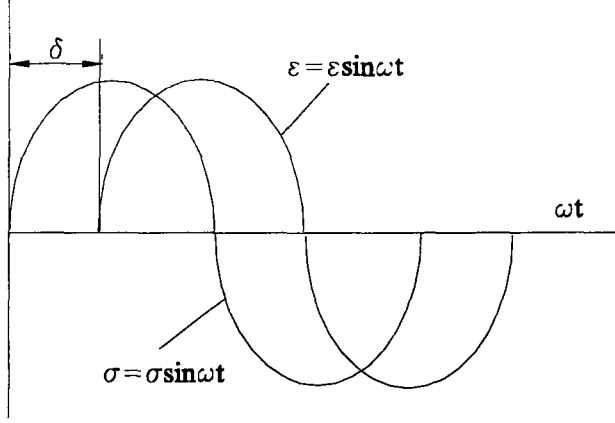
şeklinde hesaplanabilir.

Yukarıdaki denklemden görüleceği üzere, kayıp enerjinin hesaplanması için,  $E''$  kayıp modülünün ve  $\tan \delta$  tanjant modülünün deneysel yollarla elde edilmesi gerekmektedir. Bu amaçla çeşitli matematik modeller kullanılmaktadır. Ancak, kayıp ve tanjant modüllerinin özellikle sıcaklık ve frekans bağımlı özellikler olması nedeni ile gerçekçi bir modelden söz edebilmek için problemin yapısı önem kazanmaktadır. Bu modellerin en basitleri sönüm ve yay eleman analogjisinden yaralanılarak kurulmuş Kelvin-Voight ve Maxwell modelleridir.

Teker de kullanılan polimerler için, tanjant modülünün deneysel olarak belirlenmesi için yapılan testlerde Kelvin-Voight ve Maxwell gibi basit modeller için frekans aralığının hemen hemen  $10^{-5} - 10^6$  arasında kaldığı belirlenmiştir. Bu çalışmada da bu sonuç dikkate alınmıştır.

### 1.11. Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümü

Lineer olmayan sonlu elemanlar denklemlerinin iteratif çözümünde Newton - Raphson yöntemi yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu yaklaşımda Sonlu Elemanlar



Şekil 15: Sinüzoidal yük etkisindeki kauçuk bir cismin gerilme ve şekil değişimi arasında oluşan faz açısının şematik gösterimi.

Formülasyonu aşağıdaki gibi bir denklemin çözümünü gerektirmektedir;

$$f(u^*) = 0 \quad (171)$$

$$f(u^*) = {}^tR(u^*) - {}^tF(u^*) \quad (172)$$

Burada  $u^*$  değişkeni, deplasman, basınç ve dönmeler gibi değişkenleri ifade etmektedir. Bu fonksiyonu  ${}^tu^{(i-1)}$  civarında Taylor serisine açarsak;

$$f(u^*) = f({}^tu^{(i-1)}) + \left[ \frac{\partial f}{\partial u} \right]_{{}^tu^{(i-1)}} + \text{yüksek dereceli terimler} \quad (173)$$

elde edilir. Burada (172) denkelmini (173)denkleminde (171) eşitliğini kullanılarak yazarsak;

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial u} \right]_{{}^tu^{(i-1)}} (u^* - {}^tu^{(i-1)}) + \text{yüksek dereceli terimler} = {}^tR - {}^tF^{(i-1)} \quad (174)$$

elde edilir. Yüksek dereceli terimleri ihmal ederek, deplasmandaki artım miktarı,

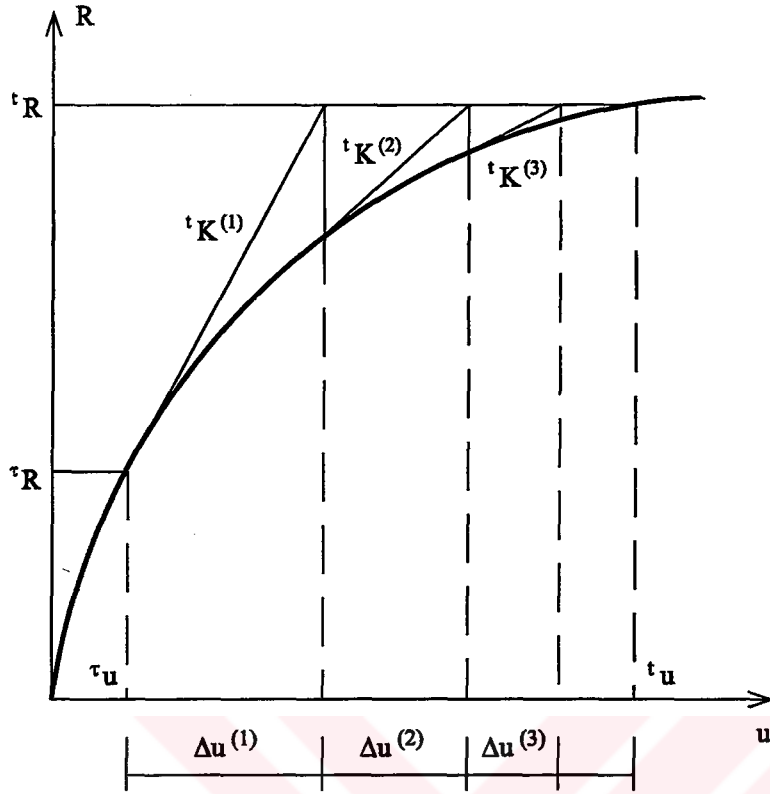
$${}^tK^{(i-1)} \Delta u^{(i)} = {}^tR - {}^tF^{(i-1)} \quad (175)$$

olur. Burada,  ${}^tK^{(i-1)}$  tanjant katılık matrisidir;

$${}^tK^{(i-1)} = \left[ \frac{\partial F}{\partial u} \right]_{{}^tu^{(i-1)}} \quad (176)$$

artımdan sonra elde edilen deplasman ise;

$${}^tu^{(i)} = {}^tu^{(i-1)} + \Delta u^{(i)} \quad (177)$$

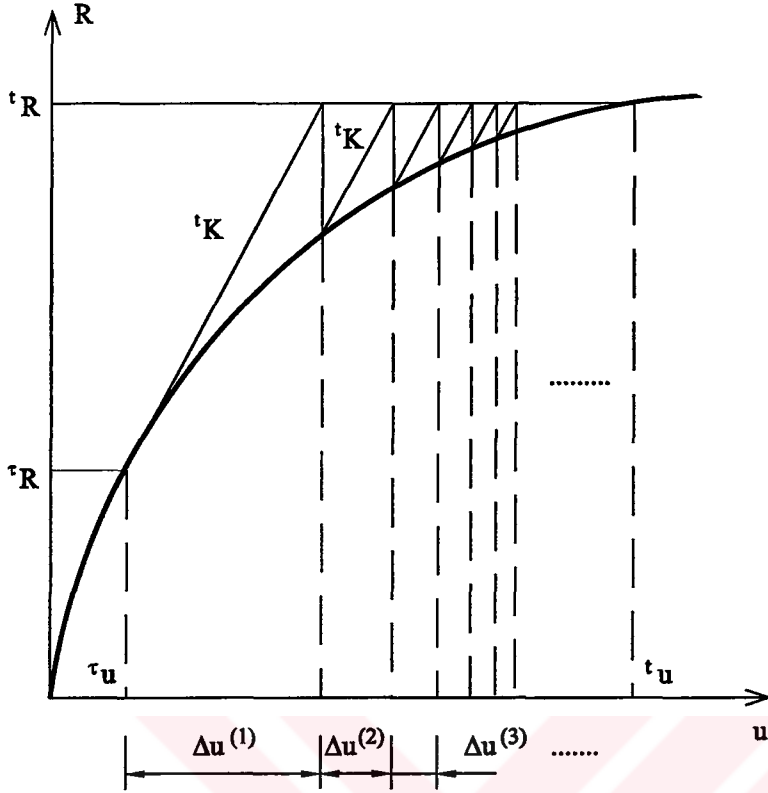


Şekil 16: Tam Newton-Rapson yönteminin şematik gösterimi

şeklinde yazılır. Belli miktardaki zaman adım artırımları veya yük artırımlarıyla gerekli yakınsama kriterleri sağlanıncaya kadar iterasyona devam edilir. Burada başlangıç iterasyonu için  $t_u^{(0)} = \tau_u$ ,  $t_F^{(0)} = \tau_F$  ve  $t_K^{(0)} = \tau_K$  tanımlamaları kullanılmıştır. Tanjant katılık matrisi her iterasyonda yeniden hesaplanırsa bu yaklaşıma Tam Newton-Raphson (full Newton-Raphson) yöntemi, eğer bu matris güncelleme yapılmadan kullanılıyorsa burada Değiştirilmiş Newton-Raphson (modified Newton-Raphson) yöntemi adı verilir.

Şekil 16 ve Şekil 17’de görüldüğü gibi, Tam Newton-Raphson yöntemi Değiştirilmiş Newton-Raphson yöntemine göre daha hızlı yakınsamaktadır. İşlem zamanı açısından bakıldığında ise Değiştirilmiş Newton-Raphson yöntemi, her bir artımda tanjant katılık matrisinin tekrar hesaplanmaması nedeniyle avantaj sağlamaktadır.

Sonuçların yakınsadığına karar vermede temel olarak iki yakınsama kriterinden söz edilebilir; bunlar deplasman ve dengelenmemiş kuvvet kriterleridir. Deplasman kriterinde; her iterasyonun sonunda hesaplanan deplasman artım değerinin belli bir



Şekil 17: Değiştirilmiş Newton-Rapson yönteminin şematik gösterimi

değerde kalması istenir. Yani;

$$\frac{\|\Delta u^{(i)}\|_{\infty}}{\|t u\|_{\infty}} \leq \text{tolerans} \quad (178)$$

olması istenir. Burada yeterince küçük deplasman toleransı kullanılmalıdır.

İkinci kriterde ise dengelenmemiş kuvvet belli bir tolerans değerinin altında tutulmaya çalışılır;

$$\frac{\|t R - t F^{(i)}\|_{\infty}}{\|t R - \tau F\|_{\infty}} \leq \text{tolerans} \quad (179)$$

Bu kriterin yalnız başına kullanılması durumunda, deplasman faktörünün dikkate alınmaması nedeniyle, hataya neden olunabilmektedir.

## **2. YAPILAN ÇALIŞMALAR**

### **2.1 Termomekanik Analiz İçin Kullanılan Yaklaşım**

Genel olarak bakıldığında pnömatik terkerlerin termomekanik davranışı oldukça karmaşık bir problemdir. Zaman bağımlı, sürtünme ve iç kayıplardan kaynaklanan ısı üretimi etkisinde, lineer olmayan dinamik etkileşimli termoviskoelastisite probleminin çözümünü gerektirmektedir.

Bu tez çalışmasında etkileşimli termomekanik problem, kararlı halde dönmekte olan bir teker için, deformasyon modülü, kayıp modülü ve termal modül olarak adlandırılan üç aşamalı iteratif bir çözüm algoritması geliştirilerek çözülmeye çalışılmıştır (Şekil 18). Bu yaklaşım kullanılarak, sürekli dönme halinde olan radyal bir otomobil tekeri için farklı teker hızlarında, farklı araç yüklerinde ve farklı kuşak açılarında, sıcaklık dağılımı ve gerilme-şekil değiştirme değerleri elde edilmiştir.

Kullanılan iteratif modüler yaklaşım çeşitli avantajlar sağlamaktadır. Bunlardan ilki büyük boyuttaki etkileşimli problem, daha kolay yönetilebilir küçük parçalara ayrılmıştır. Diğer bir avantaj ise, her bir modelin iyileştirilme işlemi diğer parçalardan etkilenmeksizin yapılabilir. Literatürde pnömatik tekerler ile ilgili yapılan çalışmalar incelendiğinde görüleceği gibi, bu yaklaşımda kullanılan üç modülün herbiri başlı başına bir araştırma konusunu oluşturmaktadır. Bu yaklaşımda kullanılan malzeme özellikleri sıcaklık bağımlı değilse iterasyona gerek duyulmamaktadır. Şimdi bu modülleri kısaca tanıtalım.

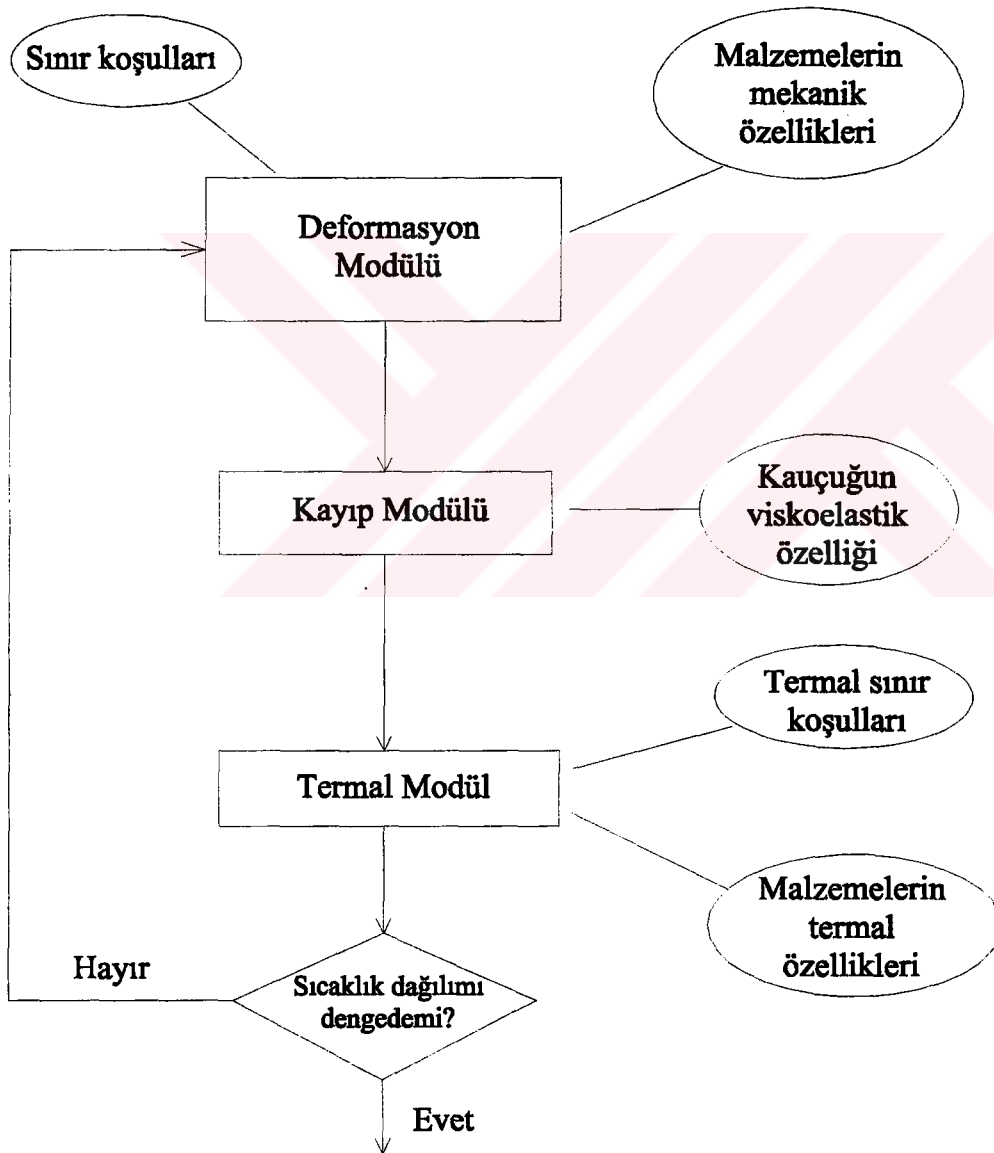
### **2.2 Deformasyon Modülü**

Deformasyon modülünün hedefi; iç basınç, santrifüj kuvvet ve temas yükü altındaki pnömatik tekerin deformasyon mekanizmasını belirlemektir. Kayıp enerjinin, hesaplanmasında deformasyon modülüyle belirlenecek olan gerilme-şekil değişimlerinin doğruluğu oldukça önemlidir.

Pnömatik tekerin, gerilme analizi açısından en önemli aşaması, yapının mekanik davranışında büyük rolü olan kord-kauçuk kompozit yapının nasıl modelleneceğidir. Bu

konuda farklı yaklaşımlar önerilmiş olmakla birlikte, çalışmada kord-kaçuk kompozit yapı, rebar elemanlar ile modellenmiştir.

Rebar eleman kullanımındaki amaç, literatürde yer alan mevcut çalışmalarda bu tip elemanlar kullanılarak termomekanik gerilme analizinin yapılmamış olmamasının yanında, bu tip elemanların deneysel olarak elde edilen kaçuk ve kord malzemelerin mekanik özelliklerinin doğrudan modele aktarılmasına getirmiş olduğu kolaylıktır. Ek olarak teorisi gereği daha az eleman kullanarak, kompozit yapıyı oluşturan bileşenler üzerinde ayrı ayrı çalışma şansı tanımaktadır.



Şekil 18. İteratif termomekanik yaklaşımın blok diyagramı



Bu çalışmada eşdeğer gerilmeler ve şekil değişimleri herbir integrasyon noktası için,

$$\begin{aligned}\epsilon_e &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ (\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_y - \epsilon_z)^2 + 6(\epsilon_{xy}^2 + \epsilon_{yz}^2 + \epsilon_{zx}^2) \}^{0.5} \\ \sigma_e &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) \}^{0.5}\end{aligned}\quad (165)$$

şeklinde, viskozite nedeniyle bir çevrim boyunca oluşan kayıp enerji miktarı ise;

$$\psi = \int_{t=t_0}^{t=T} \sigma(t) d\epsilon \quad (166)$$

şeklinde hesaplanır.

Burada her bir elemanın her integrasyon noktasında hesaplanan eşdeğer gerilme ve şekil değişimleri, deformasyon modülüyle ayrı ayrı elde edilmiştir. Böylelikle teker üzerindeki bir noktanın bir çevrim boyunca maruz kaldığı şekil değişimleri ve gerilmeler belirlenmiş olmaktadır. Doğal olarak her bir noktanın etki altında kaldığı gerilme ve şekil değişimi farklı olacaktır. Bu değerlere en küçük kareler yöntemiyle harmonik kosinüs fonksiyonu kullanılarak eğri uydurma işlemi yapılır. Harmonik kosinüs fonksiyonu için gerilme ve şekil değiştirme fonksiyonları aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\epsilon = \sum_{k=0}^K \epsilon_k \cos(2\pi k\eta) \quad (167)$$

ve

$$\sigma = \sum_{m=0}^M \sigma_m \cos(2\pi m\eta) \quad (168)$$

burada  $\eta = t/T$  dir.  $T$  ise periyottur. Eğri uydurma işlemi, her bir elemanın herbir integrasyon noktası için 30 eğri sabiti kullanılarak yapılmıştır. Bilindiği gibi viskoelastik malzemelerde gerilme ve şekil değişimi arasındaki faz açısı kayıp enerjinin oluşumuna neden olmaktadır. Bu yüzden bu faz açısı  $\delta$  şekil değiştirme fonksiyonuna aşağıdaki şekilde ilave edilir.

$$\epsilon = \sum_{k=0}^K \epsilon_k \cos(2\pi k\eta - \delta) \quad (169)$$

Elde edilen bu fonksiyonlar yardımıyla gerilme-şekil değiştirme diyagramının çizilmesi durumunda histeresiz çevriminin oluştuğu görülebilir. Bu eğriler arasında kalan kapalı alan kayıp enerjidir.

Bu enerji miktarını hesaplamak için yukarıda verilen ifadeyi kullanırsak;

$$\int_{t=t_0}^{t=T} \sigma(t) d\epsilon = \int_{\eta=0}^{\eta=1} \sigma(\eta) \frac{d\epsilon(\eta)}{d\eta} d\eta \quad (170)$$

yazılabilir. Bu ifadede  $\eta = t/T$  dönüşümü kullanılmıştır. Gerilme ve şekil değişimleri için harmomik kosinüs fonksiyonu şeklindeki ifadeleri enerji ifadesinde yerine yazarsak kayıp enerji;

$$\psi = -2\pi \int_0^1 \left[ \sum_{m=0}^M \sigma_m \cos(2\pi m\eta) \sum_{k=0}^K k\epsilon_k \sin(2\pi k\eta - \delta) \right] d\eta \quad (171)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a \quad (172)$$

trigonometrik ifadesinden yararlanılarak (171) denklemini yeniden düzenlersek;

$$\psi = 2\pi \int_0^1 \left[ \sum_{m=0}^M \sigma_m \cos(2\pi m\eta) \sum_{k=0}^K k\epsilon_k (\sin(2\pi k\eta) \cos \delta - \sin \delta \cos(2\pi k\eta)) \right] d\eta \quad (173)$$

elde edilir. Burada  $\sin(2\pi m\eta)$  ve  $\cos(2\pi m\eta)$  orthogonal fonksiyonlar olması nedeniyle (173 ifadesi)

$$\psi = \sin \delta \sum_{m=0}^M m\sigma_m \epsilon_m \quad (174)$$

şeklini alır.

## 2.4. Termal Modül

Termal modülde, kararlı halde dönmekte olan bir teker için, kayıp modülü yardımı ile hesaplanan kayıp enerjinin, ısı analize hacimsel ısı girişi şeklinde aktarılmasıyla sıcaklık dağılımı belirlenmektedir.

Çözülmeye çalışılan ısı transfer denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = k \left[ \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{d^2 T}{dy^2} + \frac{d^2 T}{dz^2} \right] + Q_v \quad (175)$$

burada  $k$  ısı iletim katsayısı,  $C_p$  özgül ısı,  $T$  sıcaklık ve  $\rho$  ise malzemenin yoğunluğudur. Denklemin sağ tarafında yer olan  $Q_v$  ise histeresis nedeniyle oluşan ısı üretimini gösteren ve denkleme ilave edilen hacimsel ısı girişini göstermektedir. Çalışmada kullanılan malzemelerin termal özellikleri Tablo 1’de verilmiştir.

**Tablo 1.** Kauçuk ve Çelik Malzemelerin Termal Özellikleri

| Teker Bileşeni | $k$ ( $W/mm.^{\circ}C$ ) | $C_p$ ( $J/kg.^{\circ}C$ ) | $\rho$ ( $kg/mm^3$ ) |
|----------------|--------------------------|----------------------------|----------------------|
| Kauçuk         | 0.0002                   | 1900                       | 9.13E-7              |
| Çelik          | 0.0537                   | 465                        | 7.833E-6             |

Isıl analiz açısından bakıldığında da karmaşık görünen bu problemin çözümünde, tekerin çevresel yönde ısı değişiminin olmadığı kabulü yapılmıştır. Tekerin yan, taban ve iç yüzeyinden ve jant bölgesinden ısı taşınımının var olduğu şeklinde sınır koşulları kullanılmıştır. Isıl analizde, radyasyonla ısı taşınımı ihmal edilmiştir. Kauçuk malzemenin ısı özellikleri ve çeşitli hızlarda kullanılan ısı taşınım katsayıları Tablo 2’de verilmiştir. Bu değerler modellenen teker için deneysel veriler olmadığından, literatürde mevcut benzer çalışmalardan alınmıştır [44-46].

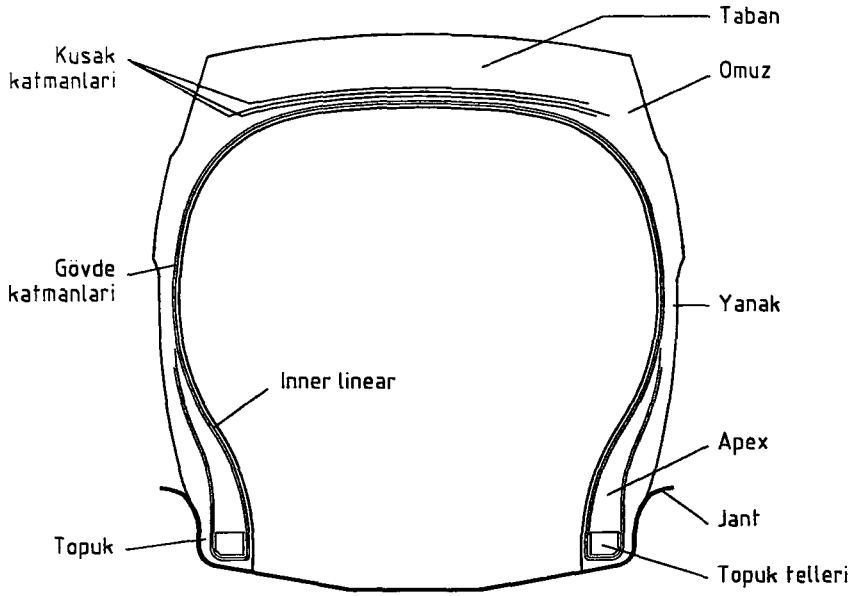
**Tablo 2.** Teker kesitinde farklı hızlardaki ısı taşınım katsayıları

| Hız ( $km/h$ ) | Isı Taşınım Katsayısı ( $W/mm^2.^{\circ}C$ ) |            |                |
|----------------|----------------------------------------------|------------|----------------|
|                | Teker İçi                                    | Teker-Jant | Yanak ve Taban |
| 60             | 7.5E-6                                       | 3.00E-6    | 40.0E-6        |
| 80             | 7.5E-6                                       | 3.00E-6    | 52.5E-6        |
| 100            | 7.5E-6                                       | 3.00E-6    | 65.0E-6        |
| 120            | 7.5E-6                                       | 3.00E-6    | 82.5E-6        |

## 2.5. Modelde Kullanılan 175/70 R13 Tekerin Malzeme ve Geometrik Açidan Tanımlanması

### a) Gövde katmanları

Gövde katmanı bir adet rayon kattan oluşmaktadır. Rayon katta, bir inç uzunluk başına kord uç sayısı (epi) 20 'dir. Kord çapı yaklaşık olarak 0.4 mm dir. Gövde katmanı kordlarının tamamen radyal yönde yönlendirilmiş oldukları (çevresel eksen ile 90°'lik açı yaptığı) kabul edilmiştir.



Şekil 20. Bir teker kesiti

#### b) Kuşak katmanları

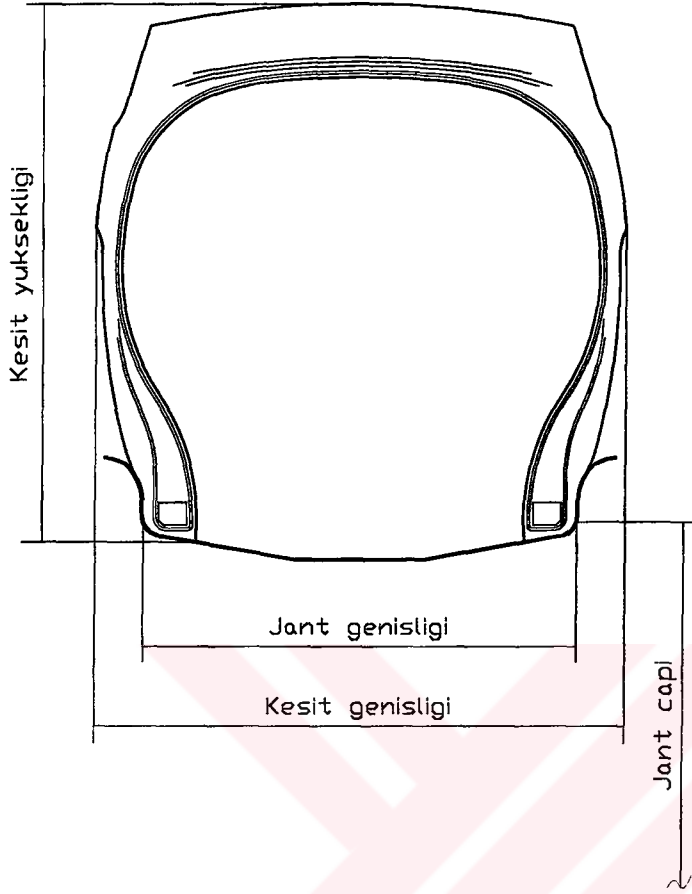
Taban bölgesinde gövde katmanının üzerinde iki kat çelik kordlu kuşak katmanı mevcuttur. Kuşak kord açıları çevresel eksene göre, birinci kat için (gövde katmanına bitişik olan kat)  $\alpha = +20^\circ$  ve ikinci kat için ise  $\alpha = -20^\circ$  dir. Çelik kordları oluşturan teller 0.5 mm çapındadır. Kuşak katmanları için epi değeri ortalama olarak 20 alınmıştır.

Tablo 3. 175/70 R13 tekerin boyutları.

|                         |                    |
|-------------------------|--------------------|
| Tekerin kesit genişliği | 333 mm             |
| Teker kesit yüksekliği  | 250 mm             |
| Teker jant çapı         | 330.2 mm (13 inç)  |
| Jant genişliği          | 139.7 mm (5.5 inç) |

#### c) Topuk telleri demeti

Bir taraftaki topuk teli demetinde 16 adet ve 0.95 mm çapında çelik tel vardır. Çelik tel demeti kauçuk matris ile beraber kompozit yapıyı oluşturmaktadır.



**Şekil 21.** Pnömatik tekerin tanım boyutları

## 2.6. Radyal Otomobil Tekerinin Üç Boyutlu Sonlu Elemanlar Modeli

Bu tez çalışmasında öncelikle yukarıda tanıtilan radyal otomobil tekerin deformasyon modülü için üç boyutlu sonlu elemanlar modeli kurulmuştur. Isıl analiz için de teker kesiti boyunca aynı ağ yapısına sahip sonlu elemanlar modeli kullanılmıştır. Modelleme sırasında dikkate alınan noktalar aşağıdaki şekildedir.

- Modelde, tekerin lineer olmayan malzeme yapısı ve lineer olmayan geometrik davranışı dikkate alınmıştır.
- Tekerde hem şişme anında hemde yere temas anında meydana gelen şekil değişimlerinin büyük olması nedeniyle, etki eden basınç yükünün uygulanan yüzeye, artımsal yükleme boyunca devamlı dik kalması sağlanmıştır.
- Rebar elemanlar kullanılmasıyla hem karkas iplerinin hemde kuşak tellerinin yönlendirilmesi modele doğru olarak aktarılması sağlanmıştır.

- Teker oluşturulan kauçuk bölümler için Mooney-Rivlin Malzeme modeli kullanılmıştır.
- Modelde teker ile zemin arasındaki temasta sürtünme dikkate alınmamıştır.
- Teker ile jant arasındaki etkileşim gerçekte bir temas problemi olarak düşünülmesi gerekirken, bu çalışmada kullanılan iş istasyonunun kapasitesinin yetersizliği nedeniyle, yalnızca bu bölgedeki düğüm noktalarının yer değişimlerinin engellenmesi şeklinde simüle edilmiştir.
- Bu çalışmada kullanılan sonlu elemanlar modeli tekerin tam ölçekli üç boyutlu modelidir. Aslında yalnızca şişme basıncı etkisi altındaki teker dikkate alındığında simetriden yararlanılacağı düşünülse de, tekerin yere temas etmesiyle bu durum geçerliliğini yitirmektedir. Bu nedenle daha gerçekçi gerilme şekil değiştirme değerleri elde edilebilmek için tekerin tam modeli üzerinde çalışılmıştır.
- Teker kesiti boyunca iki farklı ağ yapısı kullanılmıştır. Kesitte daha yoğun ağ yapısı kullanılması daha çok noktadan veri alınarak çalışılması anlamına geldiğinden daha gerçekçi bir sıcaklık dağılımı elde edilceği umulmuştur.
- Sonlu elemanlar ağında, katı sıkıştırılamaz elemanlar ve rebar elemanlar olmak üzere farklı iki tip eleman kullanılmıştır. Kauçuk malzemeler için Mooney-Rivlin malzeme modeli parametreleri kullanırken, rebar elemanlar için elastisite modülü ve poisson oranı kullanılmıştır.
- Teker ile jant arasında sıkı geçme şeklinde bağlantı olduğundan, tekerin janta takılmasıyla birlikte tekerde bir ön gerilme oluşmaktadır. Bu durum modelleme esnasında topuk bölgelerinin yatay yönde ötelenmesiyle oluşturulmaya çalışılmıştır.
- Yükleme işlemi, birden çok aşamada gerçekleştirilmiştir. Öncelikle 2 Bar 'lık iç basınç yükü ve tekerin janta takılması olayının simülasyonu için topuk bölgesi ötelenmiştir. Daha sonra bu yüklemeye tekerin hangi hızda incelenmesi düşünülüyor ise o hızdaki açısal hızın oluşturacağı santrifüj kuvvetler uygulanmıştır. Son olarakta rijit temas yüzeyinin tekere doğru artımlı şekilde ötelenmesiyle de teker zemin teması sağlanmıştır. Burada toplam 35mm lik bir öteleme yapılmıştır. 10

mm, 20 mm ve 35 mm 'lik öteleme değerlerinde veriler kullanılarak bu yükleme durumlarında sıcaklık analizi yapılmıştır.

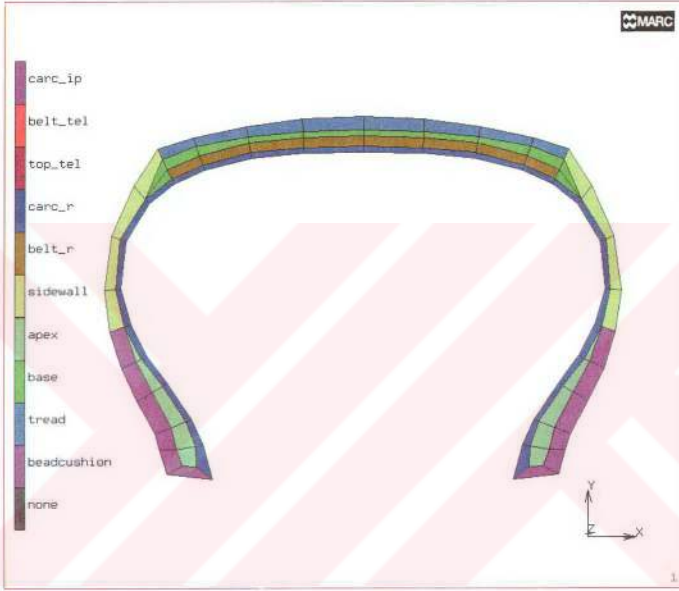
- Termal analizde, üç boyutlu ısı tranfer elamanları kullanılmıştır. Yalnızca 10 derecelik bir teker dilimi üzerinde çalışılmıştır. Bir başka deyişle tekerin çevresel doğrultusunda sıcaklık değişiminin olmadığı kabul edilerek, eksenel simetriden faydalanılmıştır.
- Termal analiz, sıcaklık bağımlı malzeme özelliklerine ait veriler olmadığından, yalnızca kararlı hal çözümü için gerçekleştirilmiştir.
- Analizde Total Lagrange formülasyonu kullanılmıştır. Bu formülasyonda başlangıçtaki konfigürasyon sürekli olarak referans konfigürasyonu olarak alınmaktadır. Total Lagrange formülasyonunda kullanılan ikinci Piola Kirchhoff gerilmesi ve Green Lagrange birim şekil değiştirme tansörleri rijit kütle dönmesinden etkilenmezler. Bu özellik sayesinde kord açısının her yük artımında formülasyonda güncelleştirilmesine ihtiyaç kalmaz.

## 2.7. Kullanılan Sonlu Elemanlar Ağları ve Sınır Koşulları

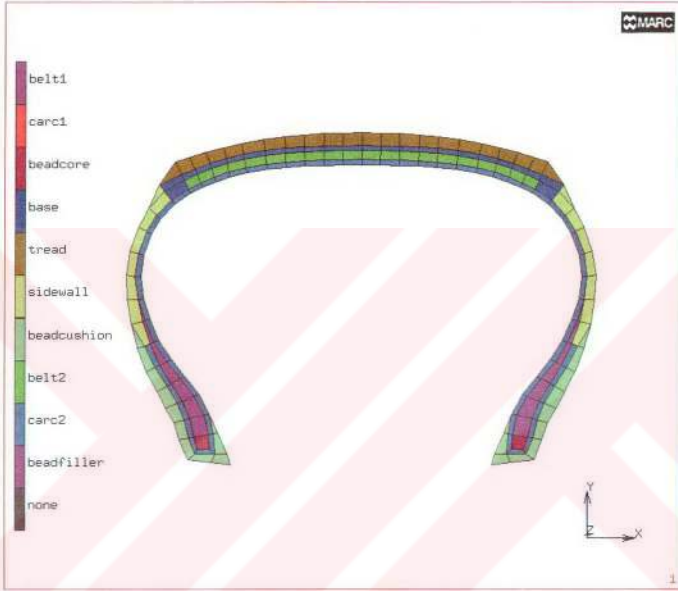
Termomekanik yaklaşımda kullanılmak üzere iki farklı sonlu elemanlar ağı kullanılmıştır. Bu ağlar Model 1 ve Model 2 olarak adlandırılmaktadır (Şekil 21,22 ve 23). Model 2'de Model 1'e göre teker kesiti boyunca daha fazla eleman kullanılmaktadır. Uygulanan sınır koşulları ise Şekil 24 'de görülmektedir. Bu modellerdeki eleman ve düğüm sayıları Tablo 6'da verilmiştir.

**Tablo 6.** Sonlu elemanlar modellerinde kullanılan eleman ve düğüm sayıları

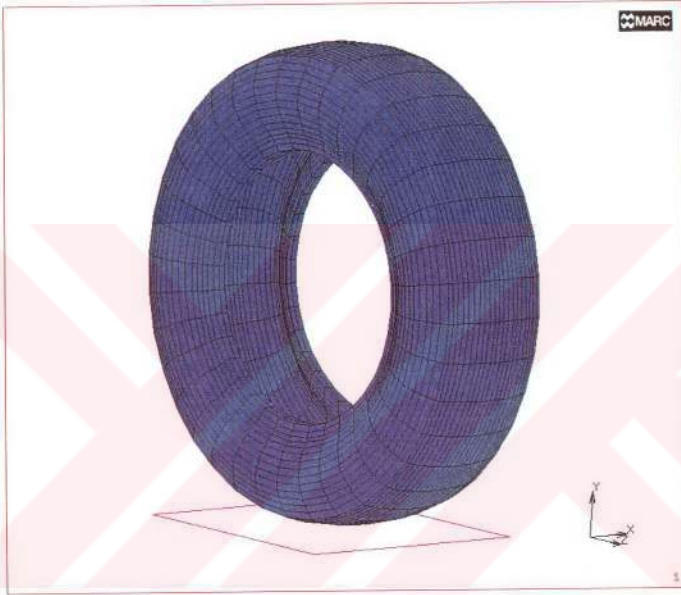
|         | 3D Rebar Eleman | 3D Eleman | Düğüm Noktası |
|---------|-----------------|-----------|---------------|
| Model 1 | 1728            | 3024      | 3924          |
| Model 2 | 3024            | 6552      | 8244          |



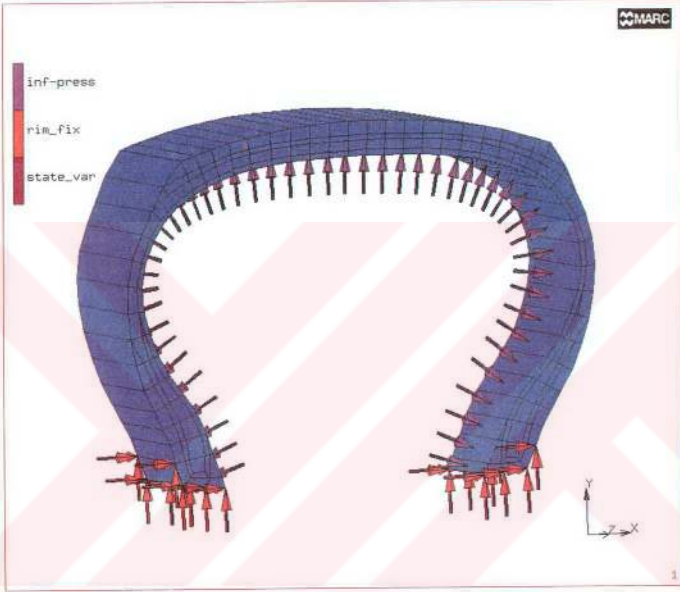
Şekil 21. Pnömatik tekerin kesitindeki ağ yapısı ve malzeme bölgeleri (Model 1)



Şekil 22. Pnömatik tekerin kesitindeki ağ yapısı ve malzeme bölgeleri (Model 2)



Şekil 23. Pnömatik tekerin üç boyutlu sonlu elemanlar modeli  
(Model 2)



Şekil 24. Pünomatik tekerin üç boyutlu sonlu elemanlar modelinde kullanılan sınır koşulları(Model 2)

### 3. BULGULAR ve TARTIŞMA

Dinamik yük etkisi altında çalışan pnömatik tekerler için en önemli sorunlardan biri ısınma sebebiyle oluşan problemlerdir. Aşırı ısınma, tekerin ömrünü azaltan etkenlerin başında gelmektedir. Bu nedenle teker tasarımı açısından, ısınma nedeniyle oluşan, tekerin farklı bölgelerinde; topuk, omuz, taban gibi, termal gerilmelerin ve oluşan yüksek sıcaklık bölgelerinin belirlenmesi önem kazanmaktadır.

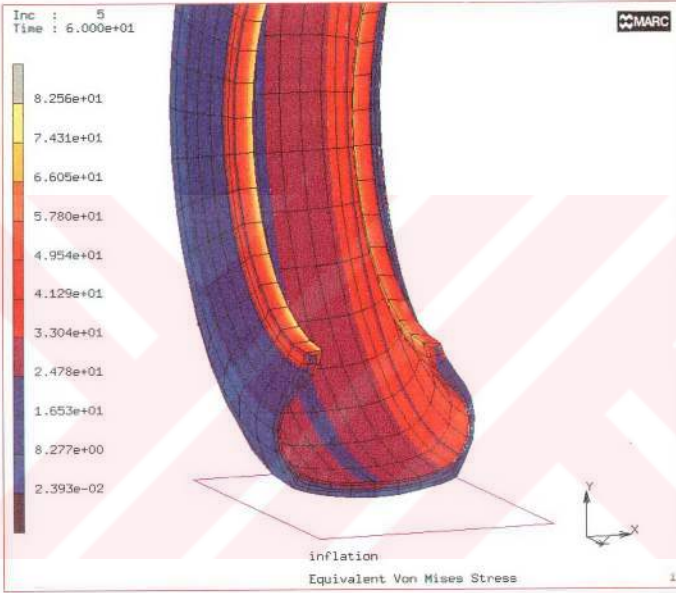
Tekerdeki sıcaklık artışına sebep olan en önemli etken, kauçuk malzemelerin viskoelastik özelliğidir. Tekerde sıcaklık artışına neden olan diğer bir etken de, teker ile zemin arasındaki sürtünmedir. Bu çalışmada kurulan modelde, sürtünmeden oluşan ısı miktarı, viskoelastik etkinin yanında çok daha küçük olması nedeniyle dikkate alınmamıştır.

Bir önceki bölümde belirtildiği gibi bu çalışmada, tekerin termomekanik analizi için üç aşamalı iteratif bir çözüm algoritması uygulanmıştır. Bu yaklaşımın, literatürde mevcut diğer çalışmalar incelendiğinde fark edileceği üzere, tekerin termomekanik davranışını belirlemek için kullanılan en verimli yöntem olduğu söylenebilir. Bu tez çalışmasında kullanılan deformasyon modeli ve kayıp modelinde kullanılan yaklaşım açısından diğerlerinden farklılaşmaktadır.

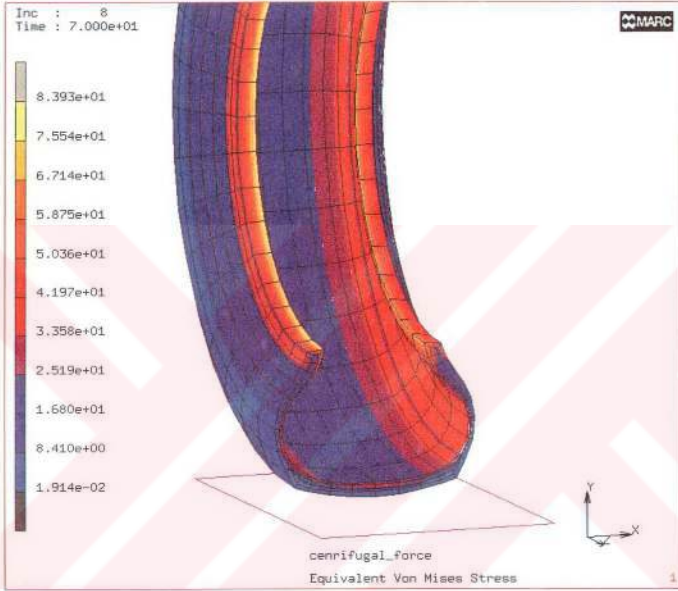
Modüler yaklaşımın en önemli avantajı her bir parçanın kendi içinde iyileştirilmeye olanak tanınmasıdır. Bu doğrultuda, sıcaklık artışının sebebi tekerdeki gerilme şekil değişiminden kaynaklanan ısı üretimi olduğu düşünülürse, tekerin deformasyon mekanizmasının doğru olarak belirlenmesi önem kazanmaktadır.

Bu çalışmada, 128MB RAM hafızaya ve 4 GB Harddisk'e sahip Sun Ultra-5 İşstasyonu kullanılmıştır. Sonlu elemanlar çözümleri için, SUN UNIX işletim sistemi üzerinde çalışan MARC/MENTAT 7.2 ticari solu elemnalar programı ve Sun Fortran Compiler 4.1 kullanılmıştır. Benzer çalışmalar incelendiğinde, bu platform, problemin boyutu ve nonlinear özelliğide düşünüldüğün de, özellikle işlem hızı ve depolama kapasitesi açısından oldukça yetersiz kalmaktadır.

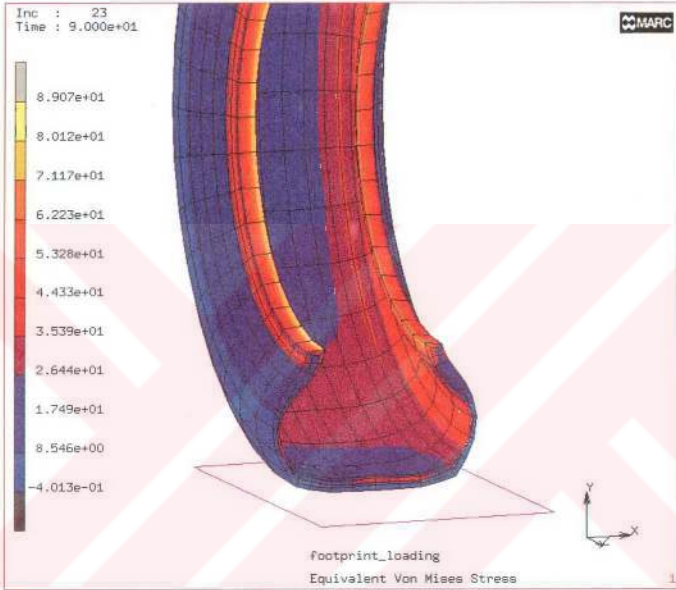
### 3.1. Analizlerden Elde Edilen Sonuçlar



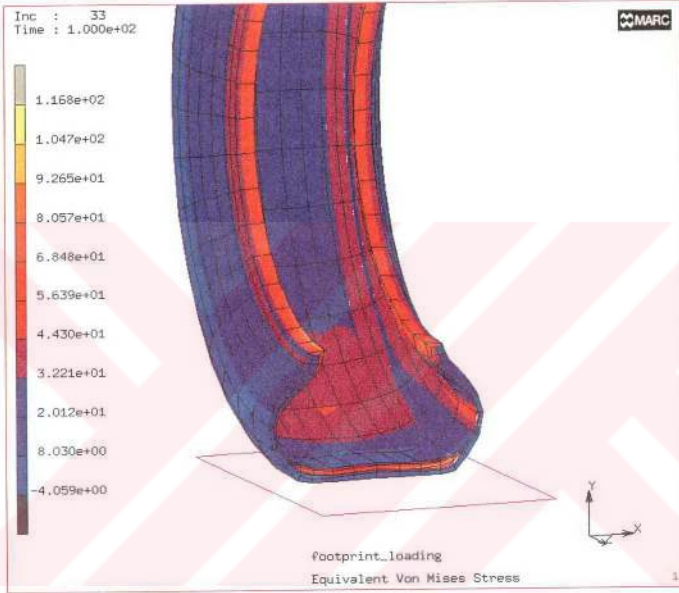
Şekil 25. Şişirme basıncı (2 Bar) etkisinde tekerde oluşan Von Mises gerilmesinin dağılımı (Model 1)



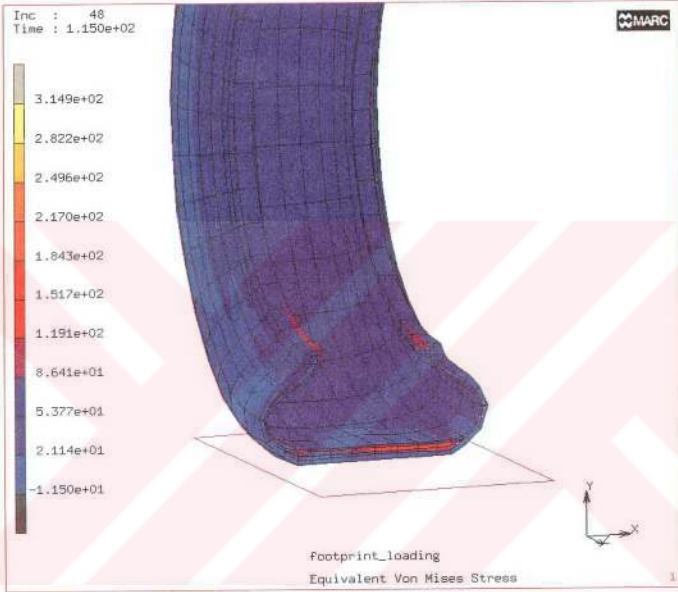
Şekil 26. Şişirme basıncı (2 Bar) + santrifuj kuvvet (80 km/h) etkisinde tekerde oluşan Von Mises gerilmesinin dağılımı (Model 1)



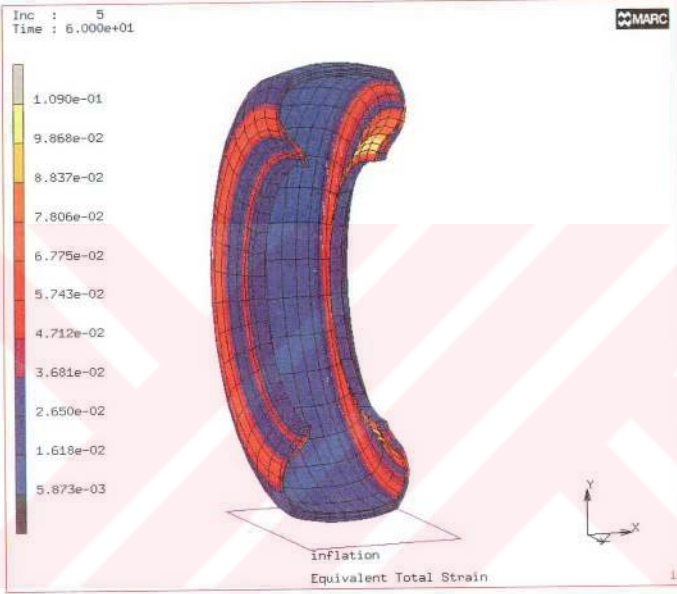
Şekil 27. Şişirme basıncı, santrifüj kuvvet ve araç yükü (10mm 'lik temas yüzey deplasmanında) etkisinde tekerde oluşan Von Mises gerilmesinin dağılımı (Model 1)



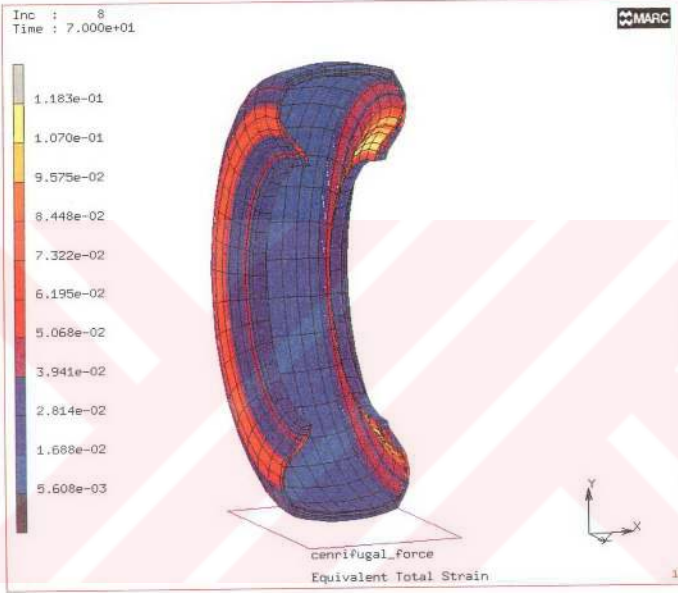
Şekil 28. Şişirme basıncı, santrifüj kuvvet ve araç yükü (10mm 'lik temas yüzey deplasmanında) etkisinde tekerde oluşan Von Mises gerilmesinin dağılımı (Model 1)



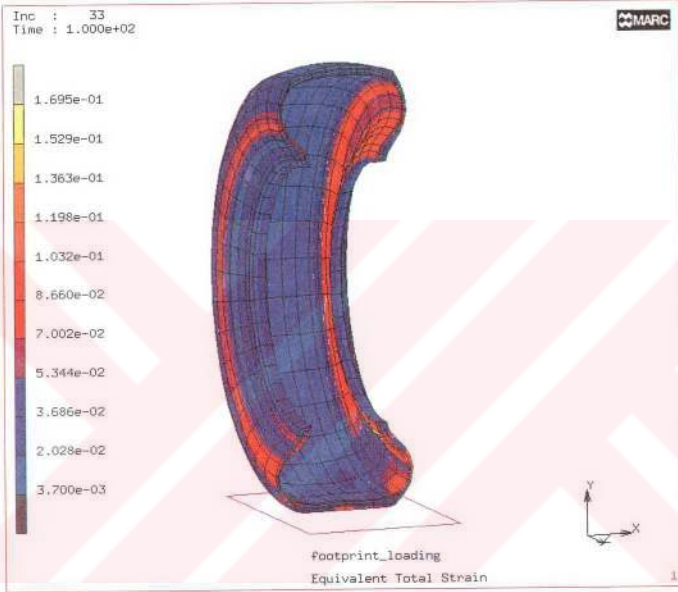
Şekil 29. Şişirme basıncı, santrifüj kuvvet ve araç yükü (25mm 'lik temas yüzey deplasmanında) etkisinde tekerde oluşan Von Mises gerilmesinin dağılımı (Model 1)



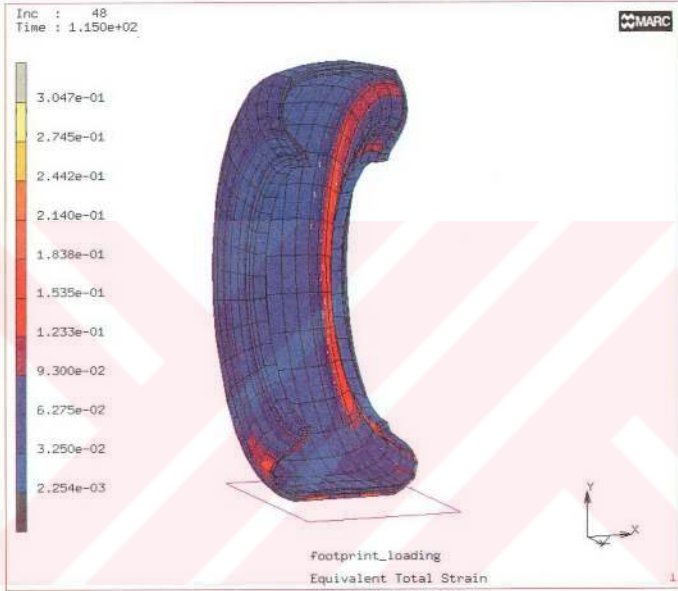
Şekil 30. Şişirme basıncı (2 Bar) etkisinde tekerde oluşan eşdeğer şekil değiştirmenin dağılımı (Model 1)



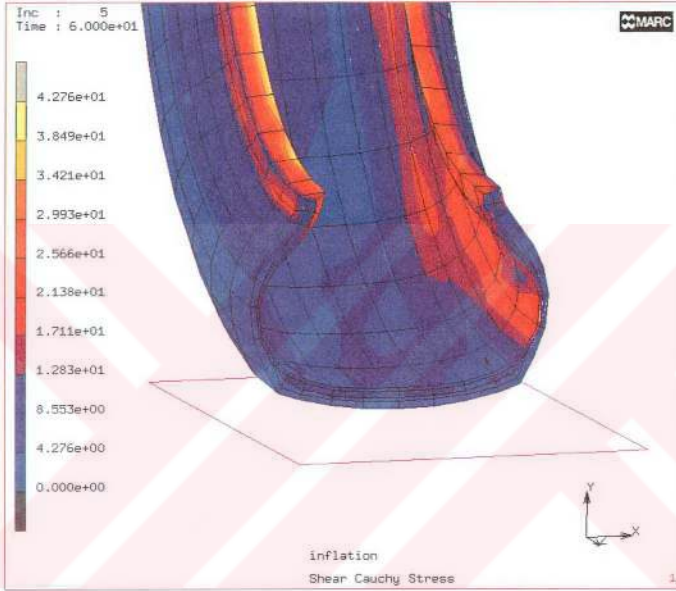
Şekil 31. Şişirme basıncı (2 Bar) + santrifuj kuvvet (80 km/h) etkisinde tekerde oluşan eşdeğer şekil değiştirmenin dağılımı (Model 1)



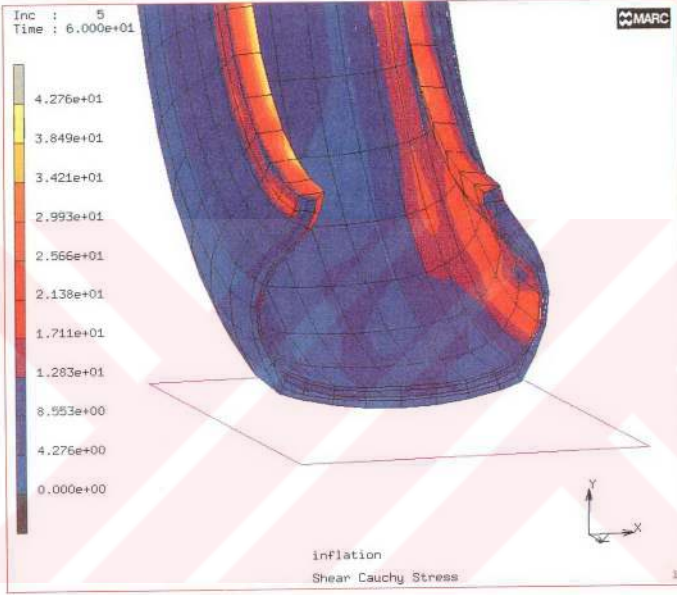
Şekil 32. Şişirme basıncı, santrifüj kuvvet ve araç yükü (20 mm'lik temas yüzey deplasmanında) etkisinde tekerde oluşan eşdeğer şekil değıştirmenin dağılımı (Model 1)



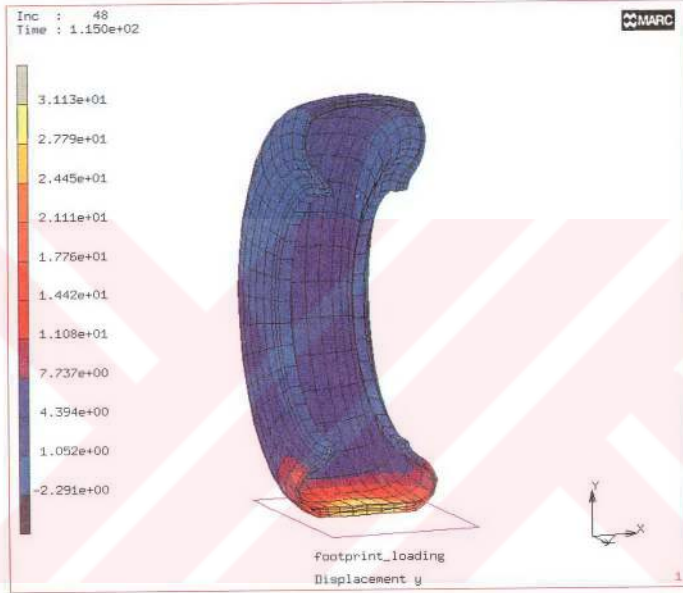
Şekil 33. Şişirme basıncı, santrifüj kuvvet ve araç yükü (25 mm'lik temas yüzey deplasmanında) etkisinde tekerde oluşan eşdeğer şekil değıştirmenin dağılımı (Model 1)



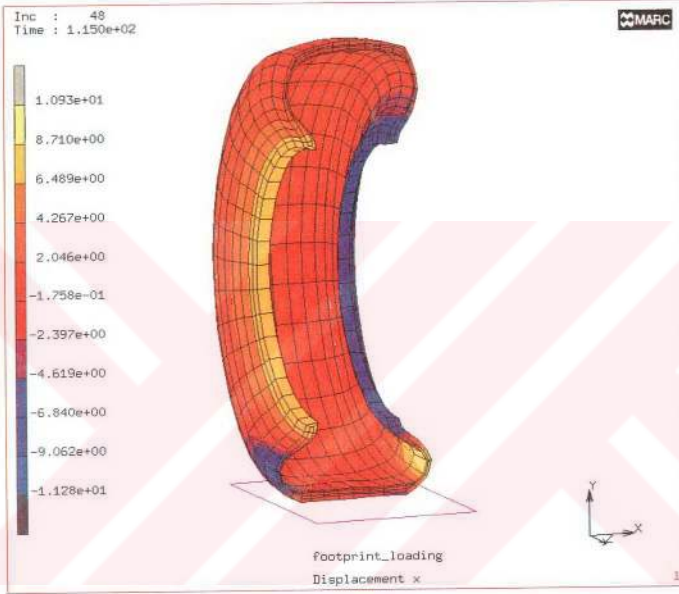
Şekil 34. Şişme basıncında (2 Bar) oluşan Cauchy kayma gerilmesi dağılımı (Model 1)



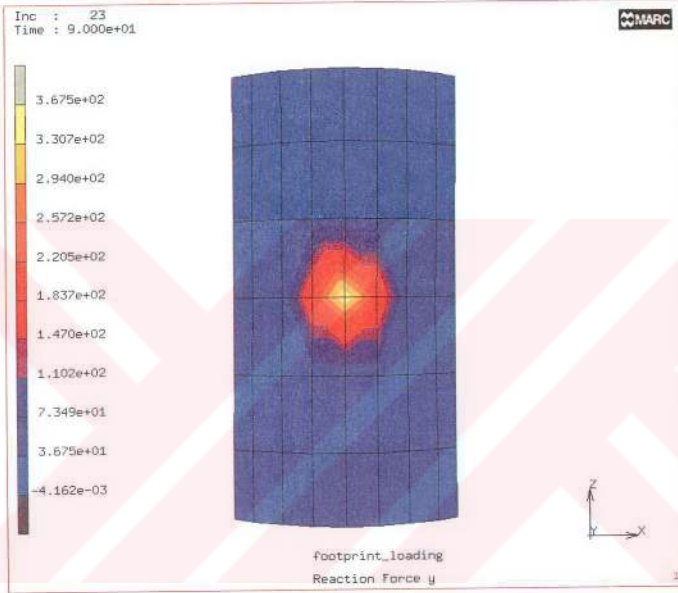
Şekil 35. 25 mm'lik temas yüzey deplasmanında oluşan Cauchy kayma gerilmesi dağılımı (Model 1)



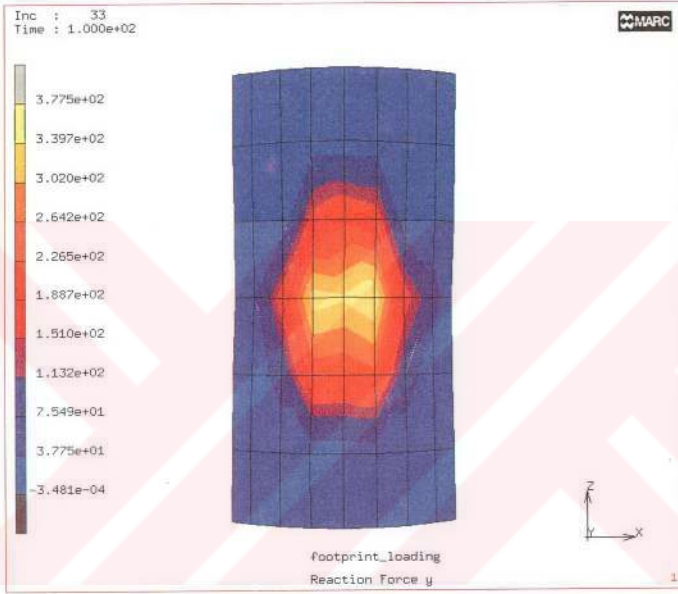
Şekil 36. 25 mm'lik temas yüzey deplasmanında oluşan radyal yer değiştirme dağılımı (Model 1)



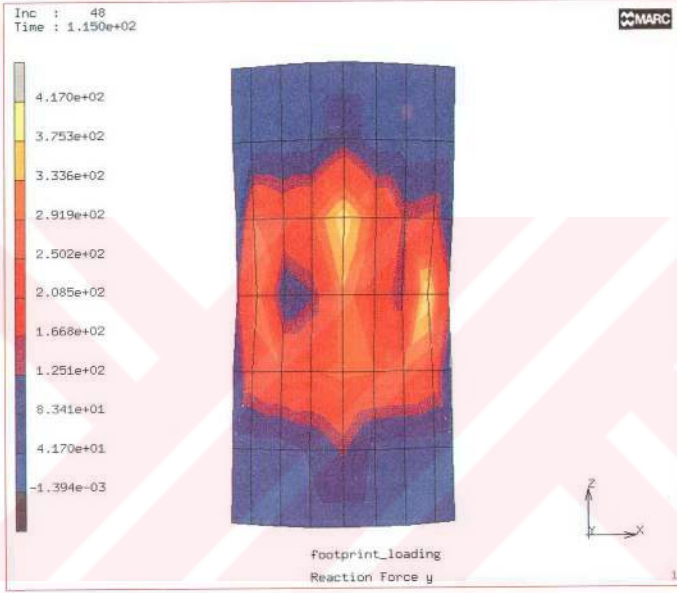
Şekil 37. 35 mm'lik temas yüzey deplasmanında oluşan aksel yer değiştirme dağılımı (Model 1)



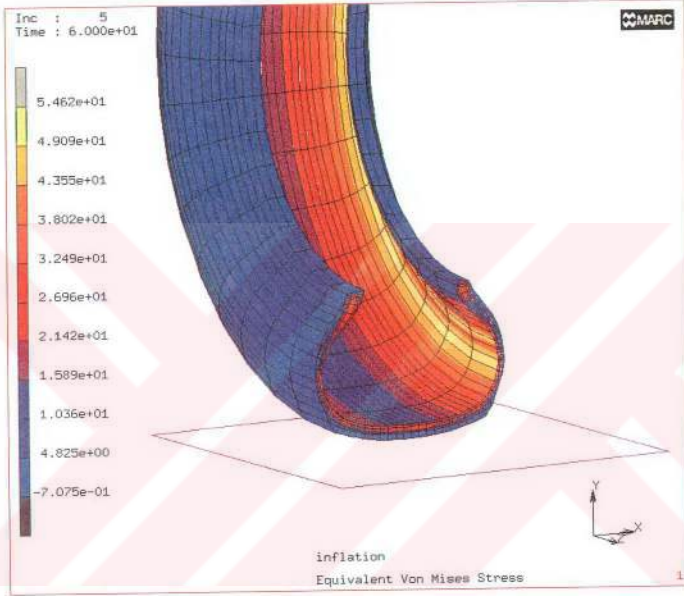
Şekil 38. 10 mm'lik temas yüzey deplasmanında oluşan temas kuvveti (Model 1)



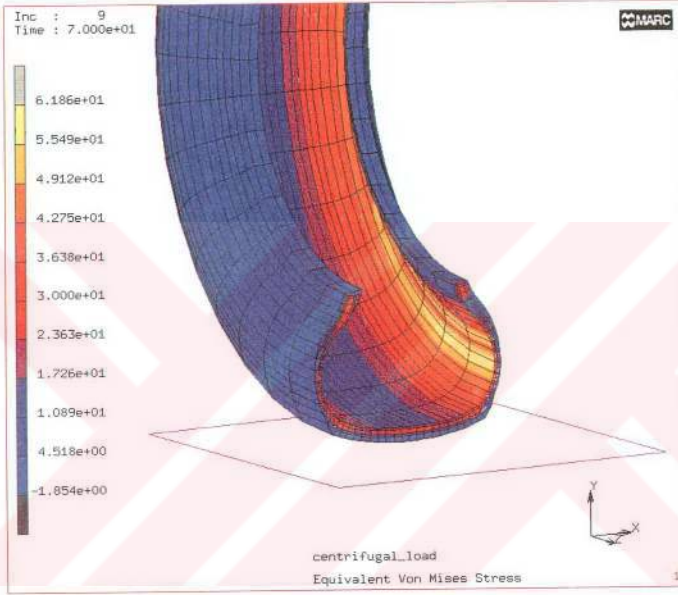
Şekil 39. 20 mm'lik temas yüzey deplasmanında oluşan temas kuvveti (Model 1)



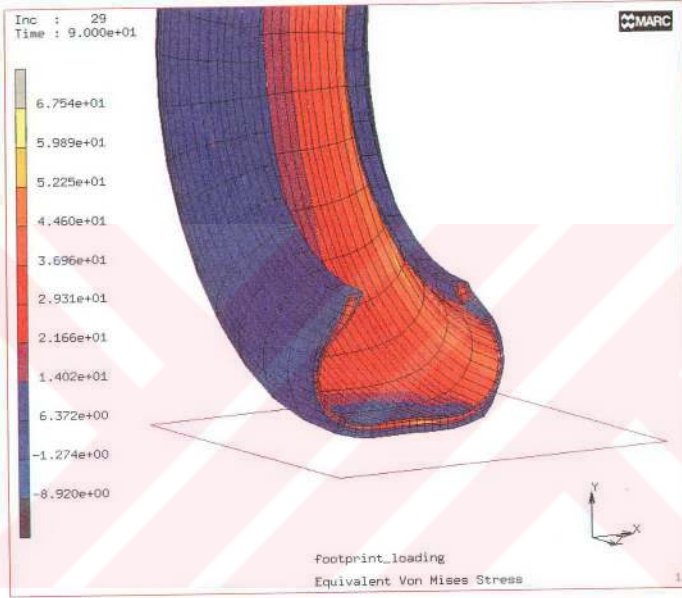
Şekil 40. 25 mm'lik temas yüzey deplasmanında oluşan temas kuvveti (Model 1)



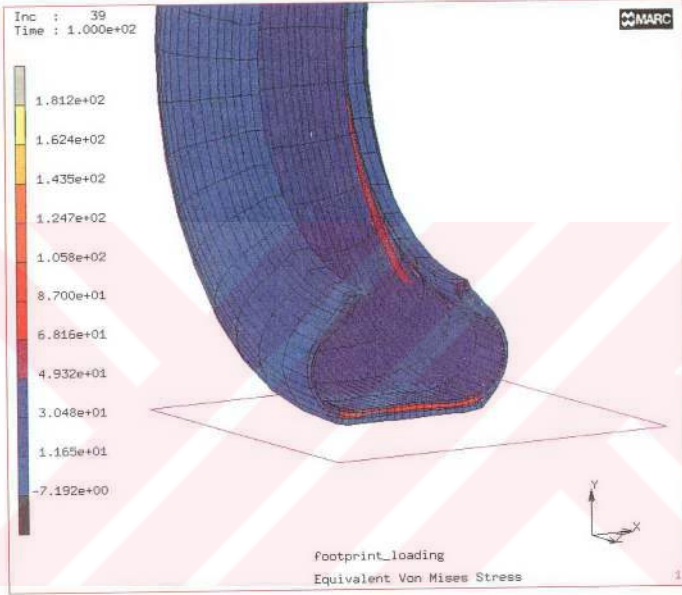
Şekil 41. Şişirme basıncı (2 Bar) etkisinde tekerde oluşan Von Mises gerilmesinin dağılımı (Model 2)



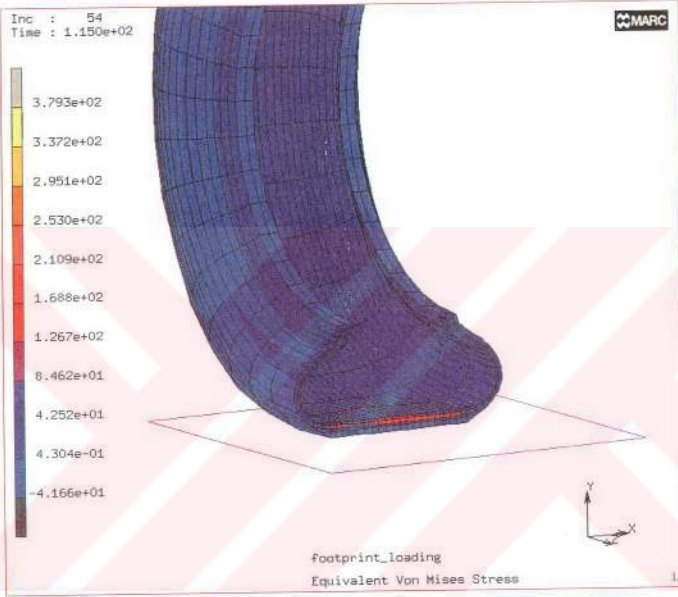
Şekil 42. Şişirme basıncı (2 Bar) + santrifuj kuvvet (80 km/h) etkisinde tekerde oluşan Von Mises gerilmesinin dağılımı (Model 2)



Şekil 43. Şişirme basıncı, santrifüj kuvvet ve araç yükü (10mm 'lik temas yüzey deplasmanında) etkisinde tekerde oluşan Von Mises gerilmesinin dağılımı (Model 2)



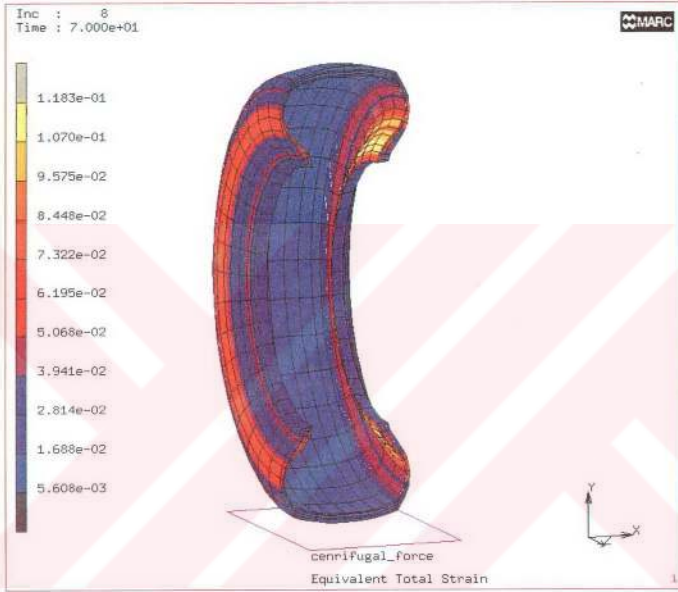
Şekil 44. Şişirme basıncı, santrifüj kuvvet ve araç yükü (10mm 'lik temas yüzey deplasmanında) etkisinde tekerde oluşan Von Mises gerilmesinin dağılımı (Model 2)



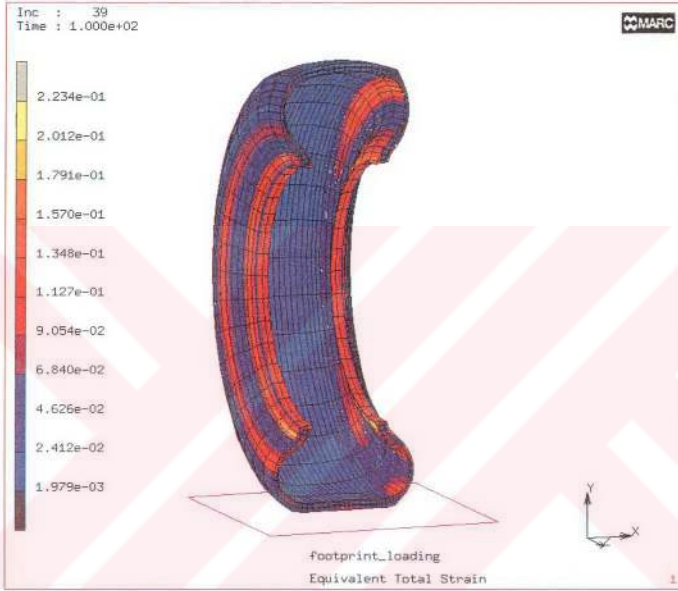
Şekil 45. Şişirme basıncı, santrifüj kuvvet ve araç yükü (25mm 'lik temas yüzey deplasmanında) etkisinde tekerde oluşan Von Mises gerilmesinin dağılımı (Model 2)



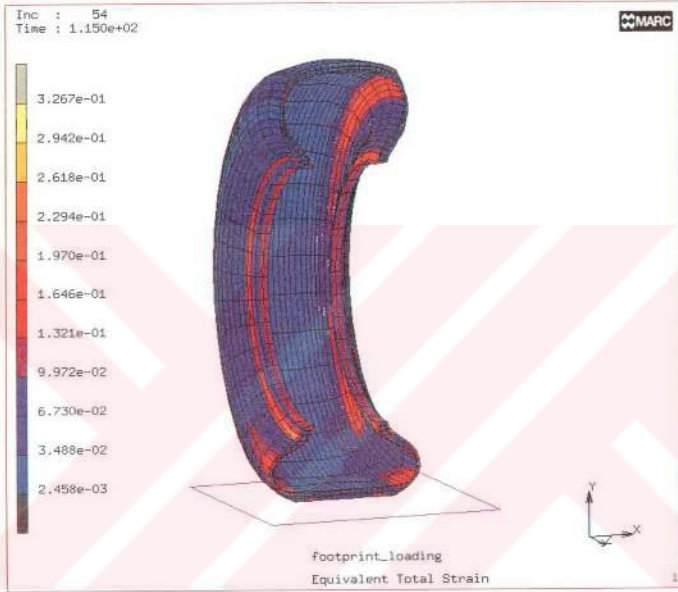
Şekil 46. Şişirme basıncı (2 Bar) etkisinde tekerde oluşan eşdeğer şekil değiştirmenin dağılımı (Model 2)



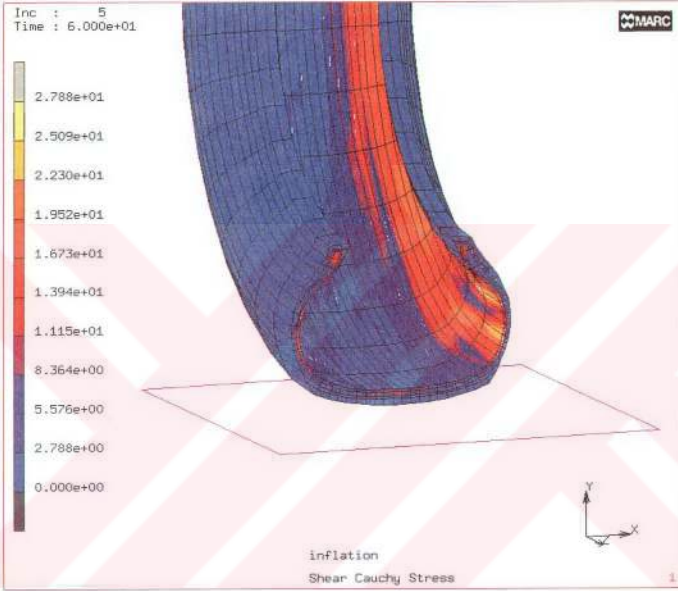
Şekil 47. Şişirme basıncı (2 Bar) + santrifuj kuvvet (80 km/h) etkisinde tekerde oluşan eşdeğer şekil değiştirmenin dağılımı (Model 2)



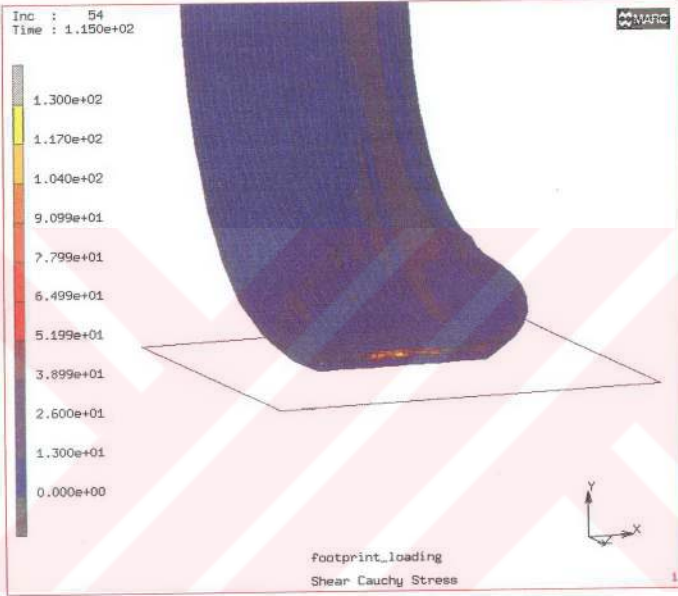
Şekil 48. Şişirme basıncı, santrifüj kuvvet ve araç yükü (20 mm'lik temas yüzey deplasmanında) etkisinde tekerde oluşan eşdeğer şekil değiştirmenin dağılımı (Model 2)



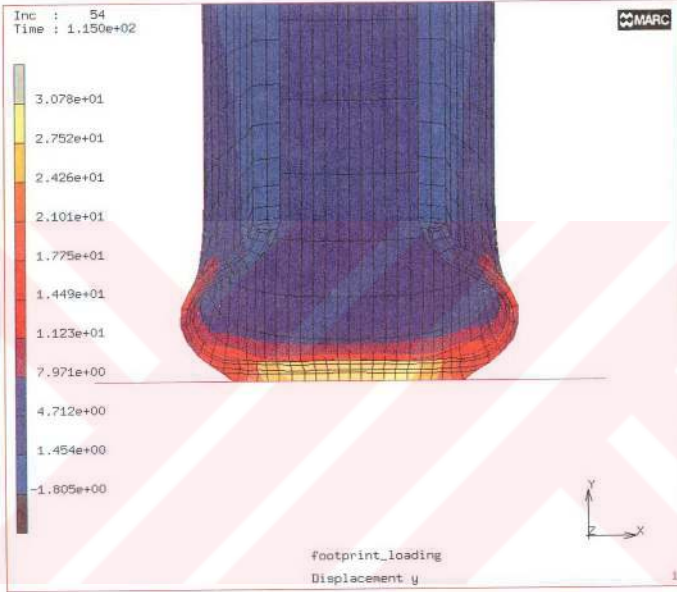
Şekil 49. Şişirme basıncı, santrifüj kuvvet ve araç yükü (25 mm'lik temas yüzey deplasmanında) etkisinde tekerde oluşan eşdeğer şekil değiştirmenin dağılımı (Model 2)



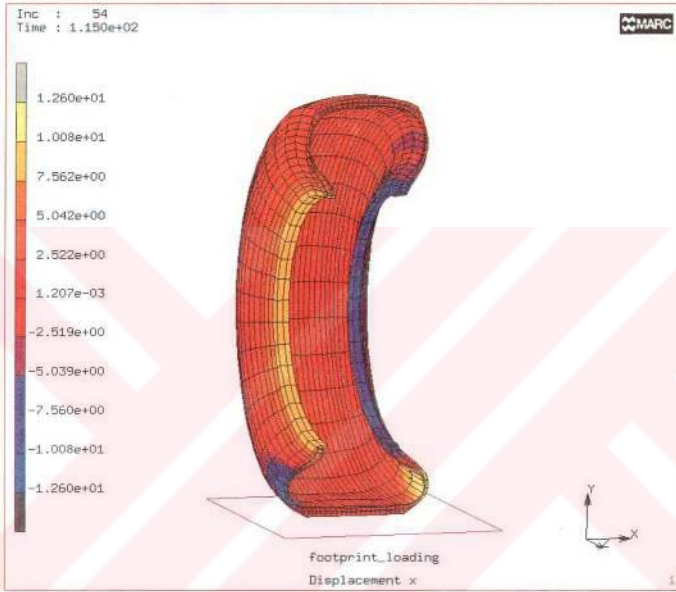
Şekil 50. Şişme basıncında (2 Bar) oluşan Cauchy kayma gerilmesi dağılımı (Model 2)



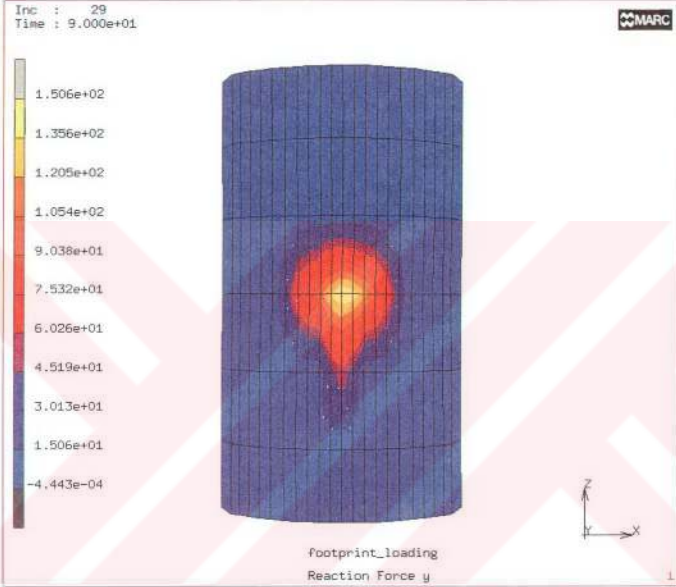
Şekil 51. 25 mm'lik temas yüzey deplasmanında oluşan Cauchy kayma gerilmesi dağılımı (Model 2)



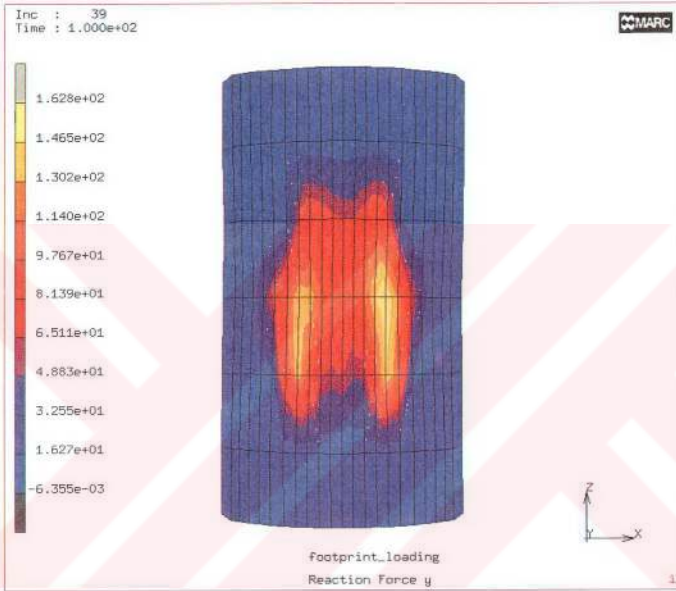
Şekil 52. 25 mm'lik temas yüzey deplasmanında oluşan radyal yer değiştirmenin dağılımı (Model 2)



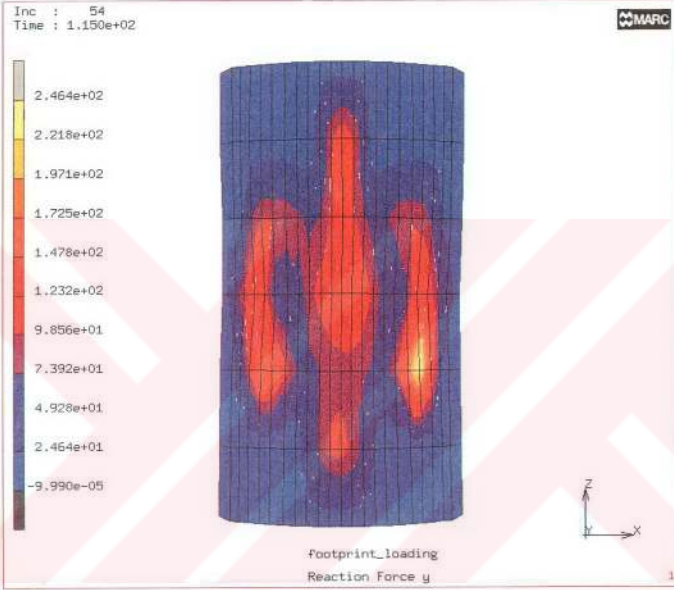
Şekil 53. 25 mm'lik temas yüzey deplasmanında oluşan aksenal yer değıştirmenin dağılımı (Model 2)



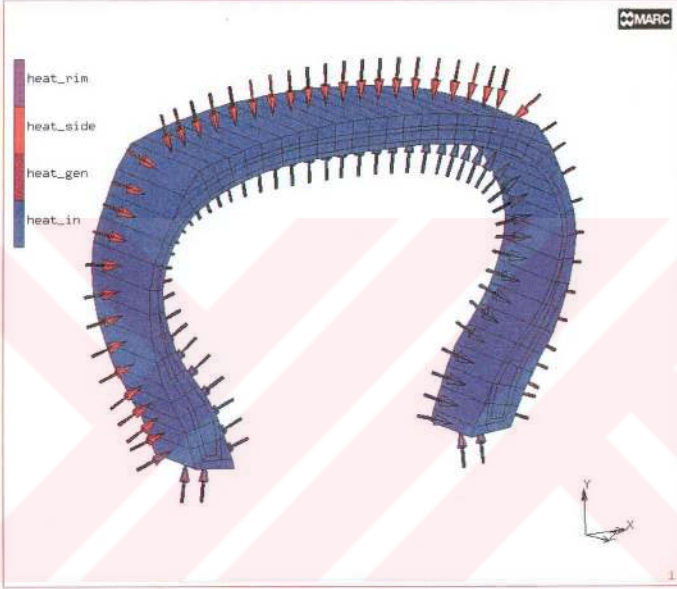
Şekil 54. 10 mm'lik temas yüzey deplasmanında oluşan temas kuvveti (Model 2)



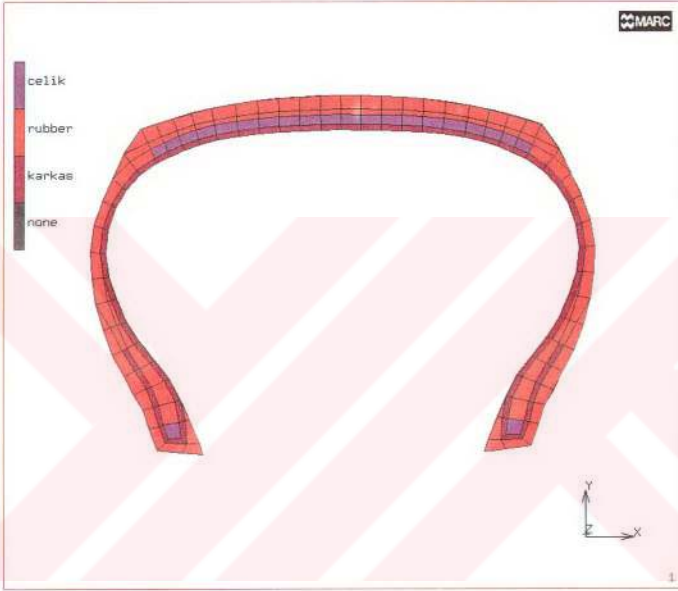
Şekil 55. 20 mm'lik temas yüzey deplasmanında oluşan temas kuvveti (Model 2)



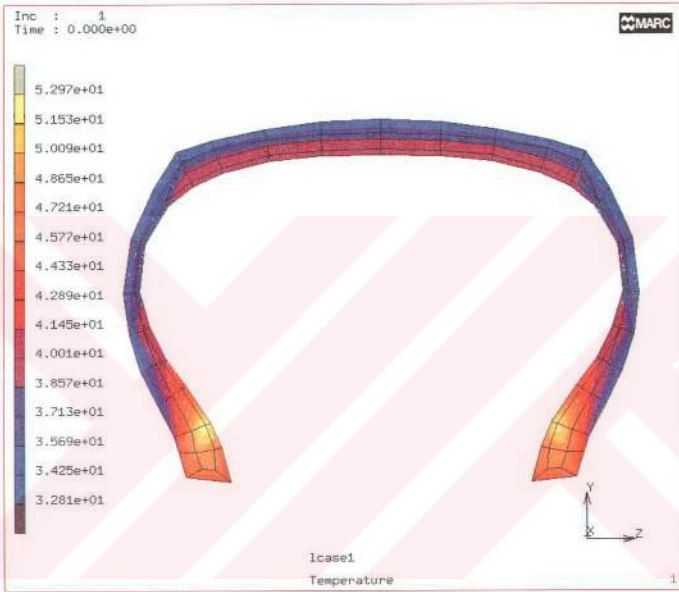
Şekil 56. 35 mm'lik temas yüzey deplasmanında oluşan temas kuvveti (Model 2)



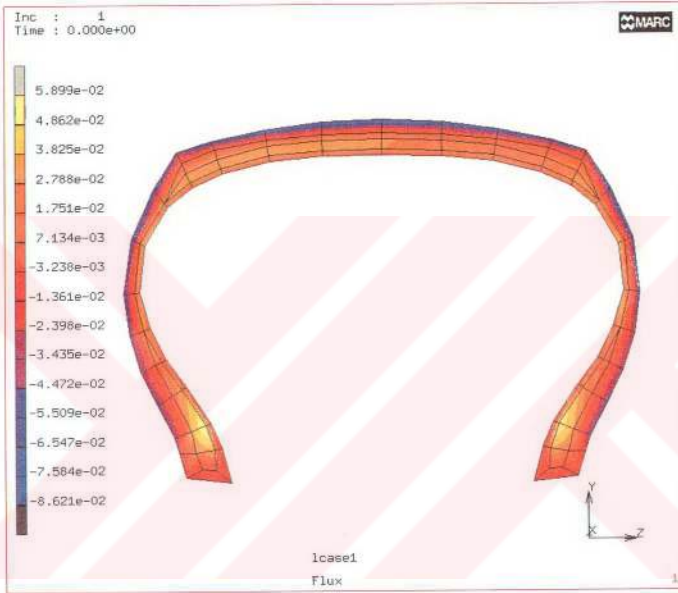
Şekil 57. Termal analizde kullanılan sonlu elemanlar modeli ve sınır koşulları (Model 2)



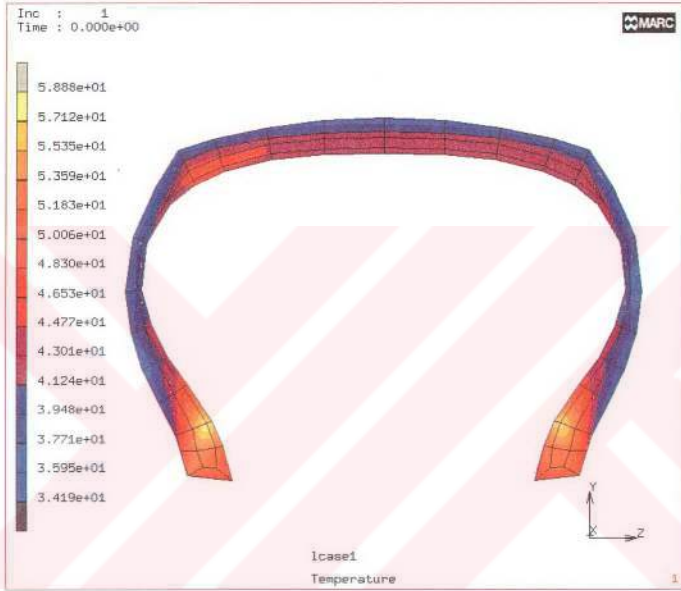
Şekil 58. Termal analizde kullanılan malzeme bölgeleri (Model 2)



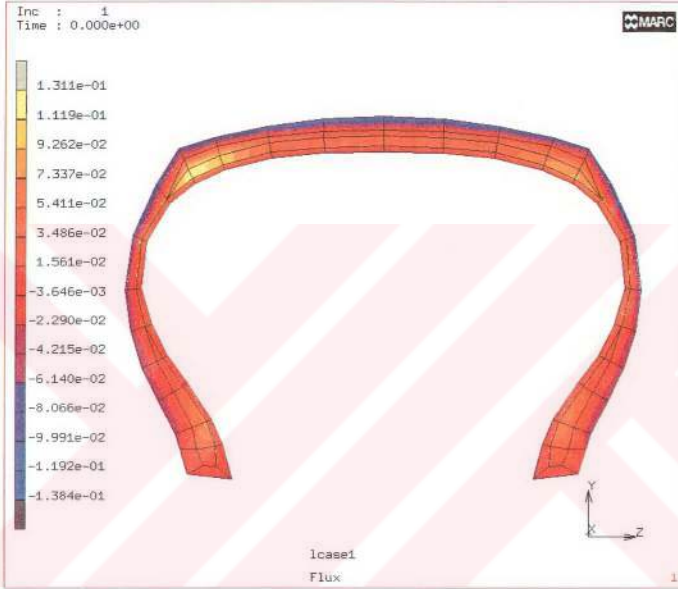
Şekil 59. 20 mm'lik temas yüzeyi deplasmanında oluşan sıcaklık dağılımı (80 km/h)(Model 1)



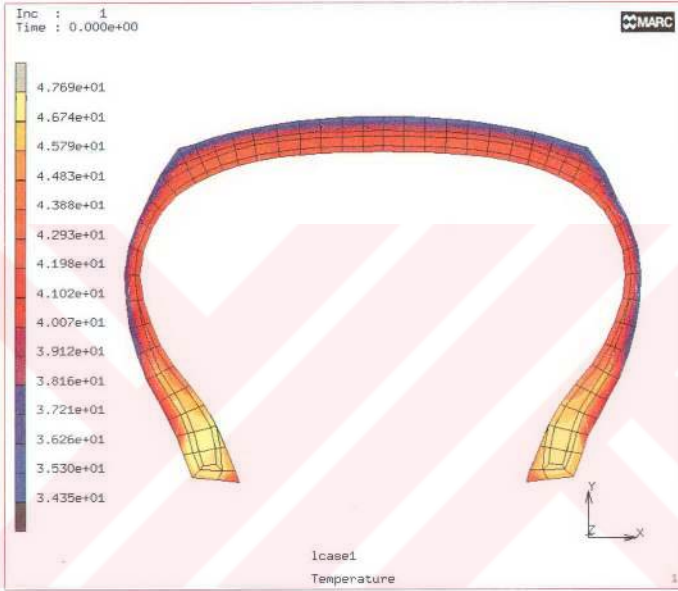
Şekil 60. 20 mm'lik temas yüzeyi deplasmanında ısı akısı (80 km/h)  
(Model 1)



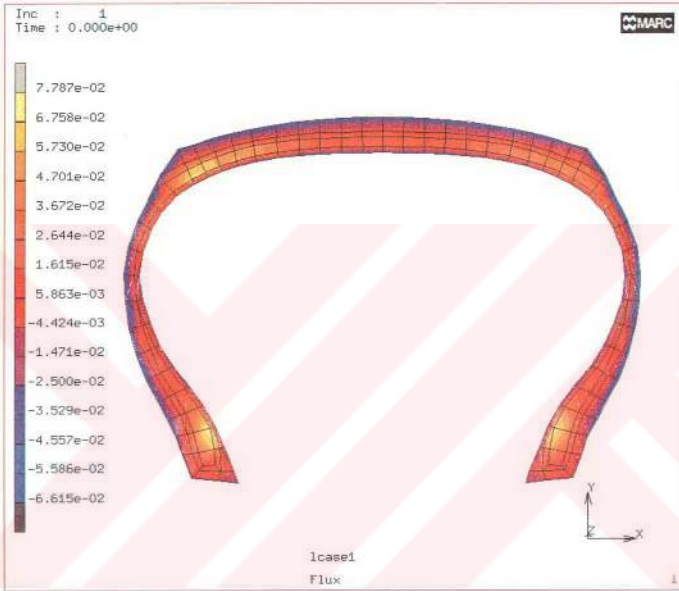
Şekil 61. 25 mm'lik temas yüzeyi deplasmanında oluşan sıcaklık dağılımı (80 km/h)(Model 1)



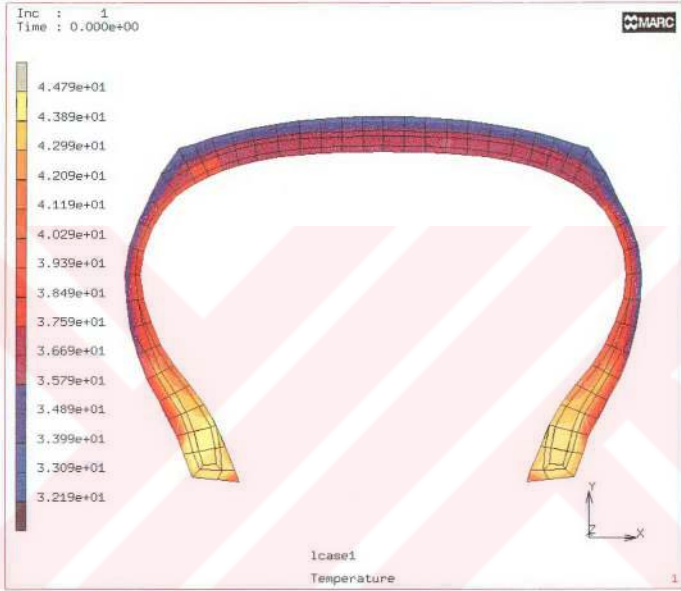
Şekil 62. 25 mm'lik temas yüzeyi deplasmanında ısı akısı (80 km/h)  
(Model 1)



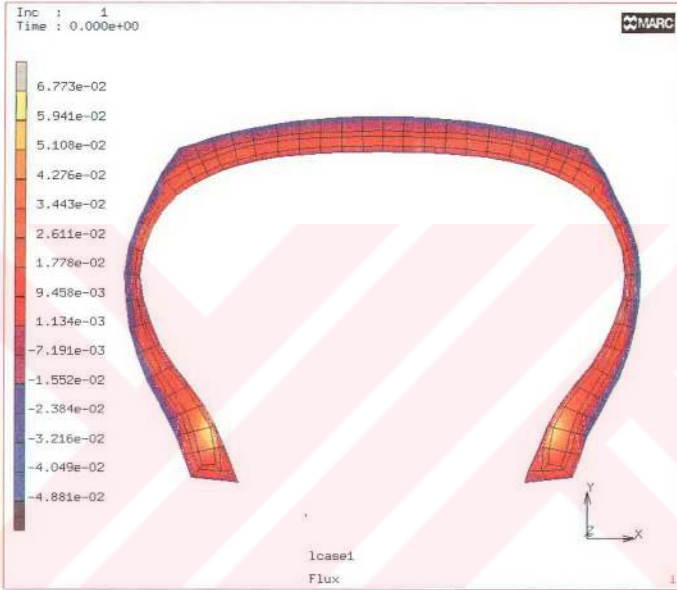
Şekil 63. 20 mm'lik temas yüzeyi deplasmanında oluşan sıcaklık dağılımı (80 km/h)(Model 2)



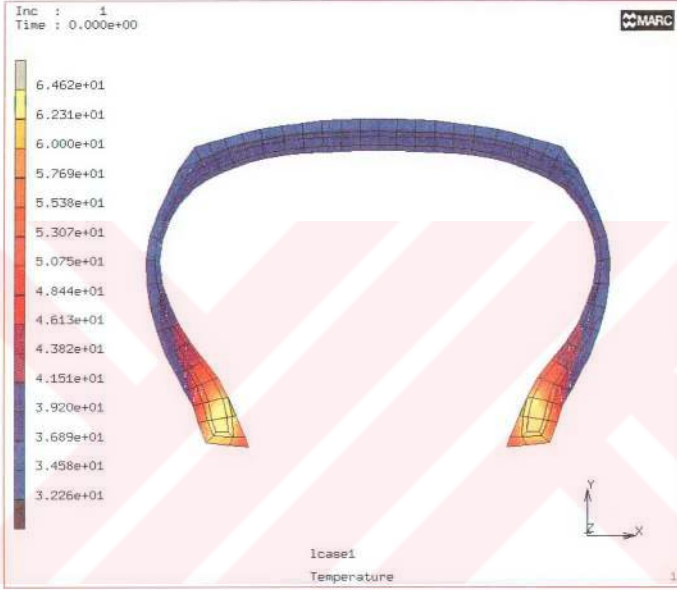
Şekil 64. 20 mm'lik temas yüzeyi deplasmanında ısı akısı (80 km/h)  
(Model 2)



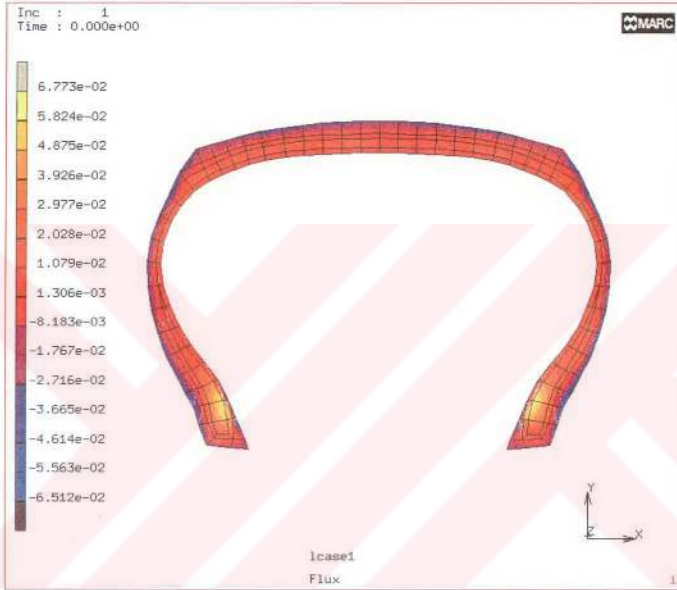
Şekil 65. 25 mm'lik temas yüzeyi deplasmanında oluşan sıcaklık dağılımı (80 km/h)(Model 2)



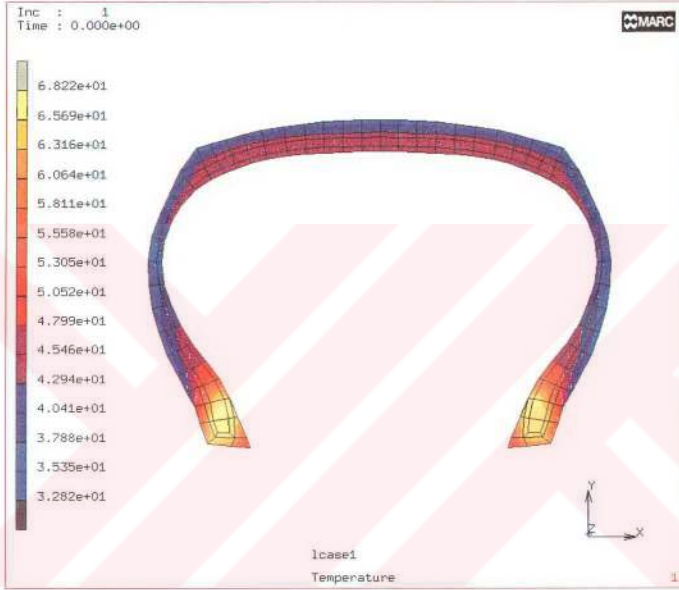
Şekil 66. 25 mm'lik temas yüzeyi deplasmanında ısı akısı (80 km/h)  
(Model 2)



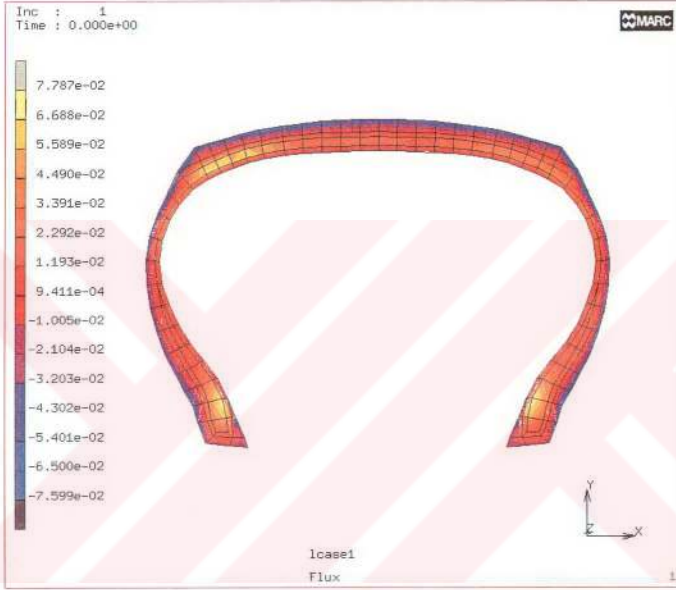
Şekil 67. 20 mm'lik temas yüzeyi deplasmanında oluşan sıcaklık dağılımı (100 km/h)(Model 2)



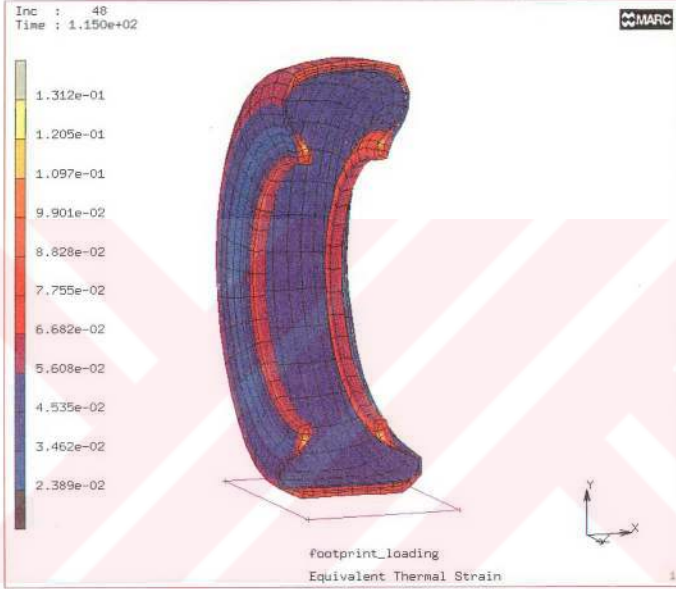
Şekil 68. 20 mm'lik temas yüzeyi deplasmanında ısı akısı (100 km/h)  
(Model 2)



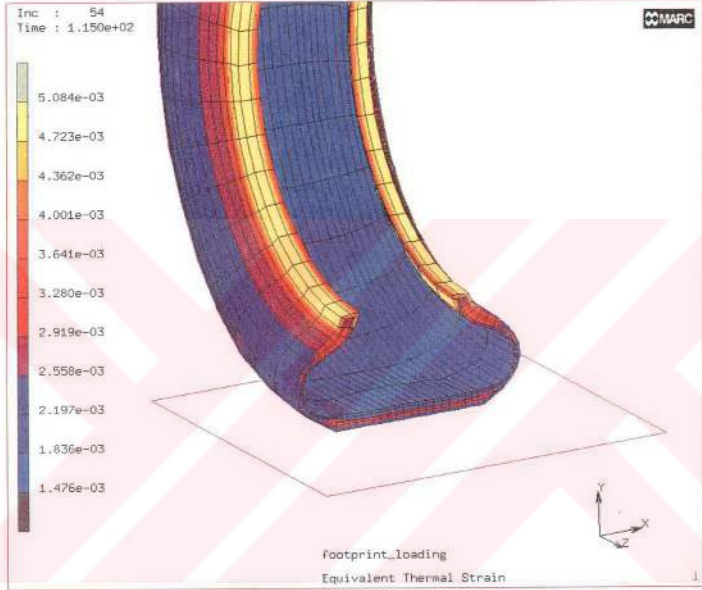
Şekil 69. 25 mm'lik temas yüzeyi deplasmanında oluşan sıcaklık dağılımı (100 km/h)(Model 2)



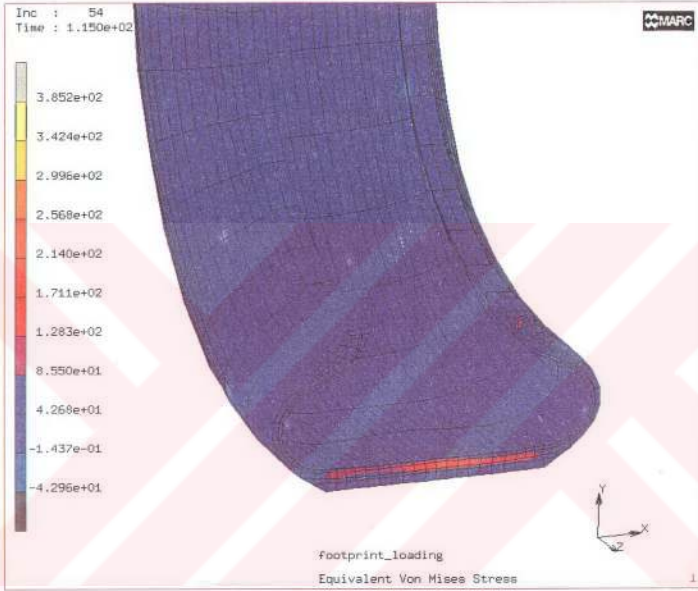
Şekil 70. 25 mm'lik temas yüzeyi deplasmanında ısı akısı  
(100 km/h)(Model 2)



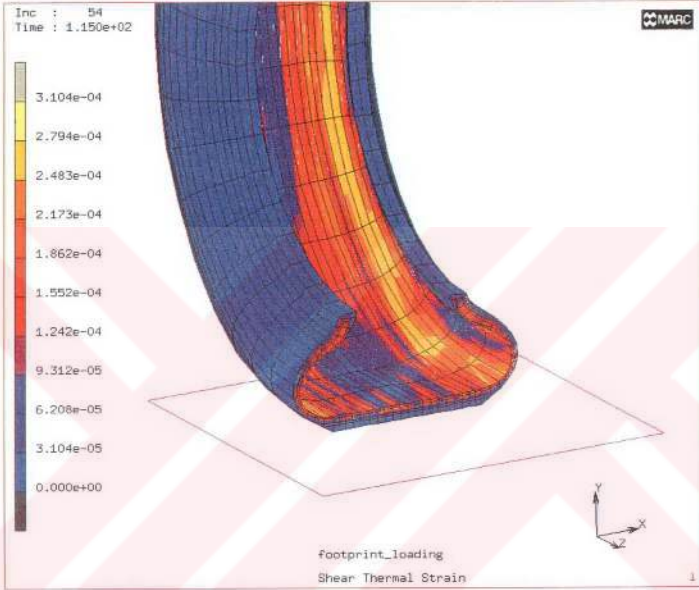
Şekil 71. 25mm'lik temas yüzeyi deplasmanında eşdeğer termal  
şekil değiştirme dağılımı (Model 1)



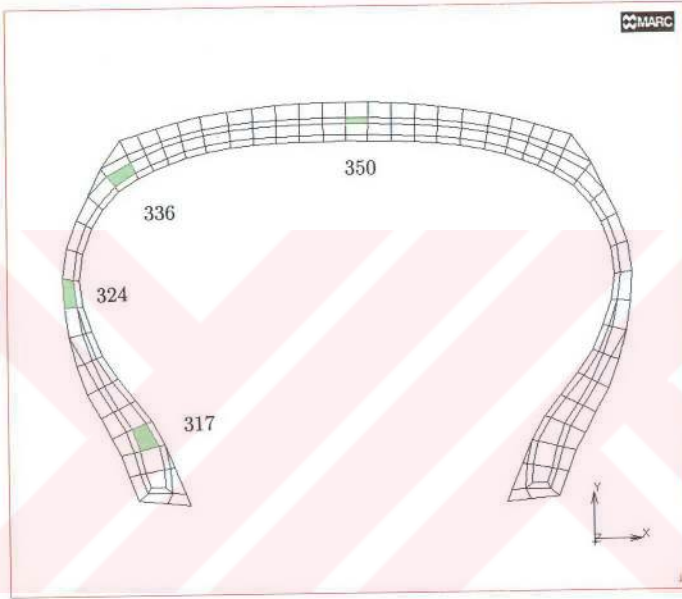
Şekil 72. 25mm'lik temas yüzeyi deplasmanında eşdeğer termal  
şekil değiştirme dağılımı (Model 2)



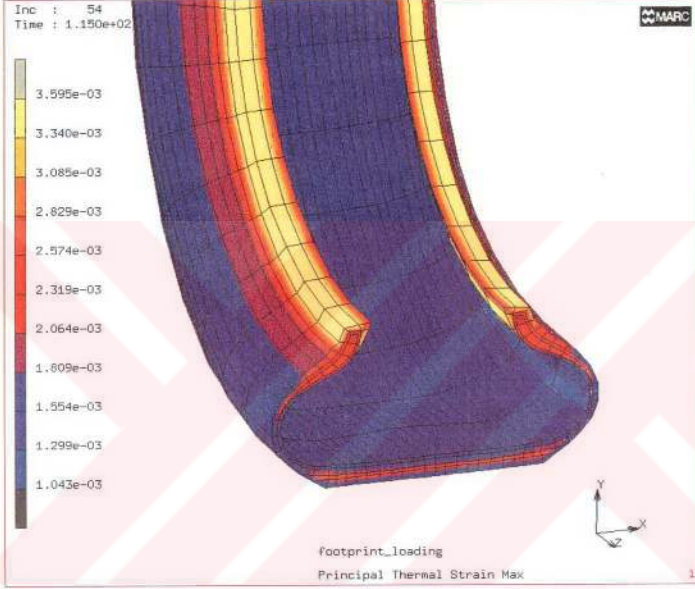
Şekil 73. 25mm'lik temas yüzeyi deplasmanında termal yüklemenden sonra oluşan Von Mises gerilmeleri (Model 2)



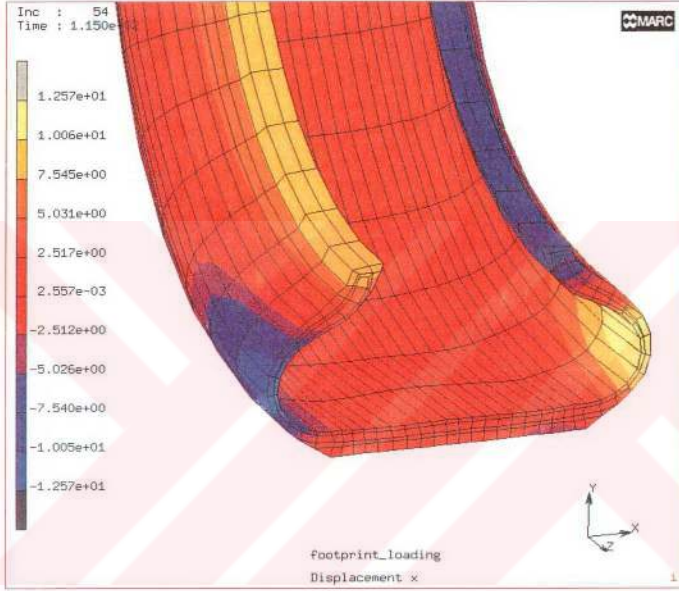
Şekil 74. 25mm'lik temas yüzeyi deplasmanında termal yüklemekten sonra oluşan kayma gerilmeleri (Model 2)



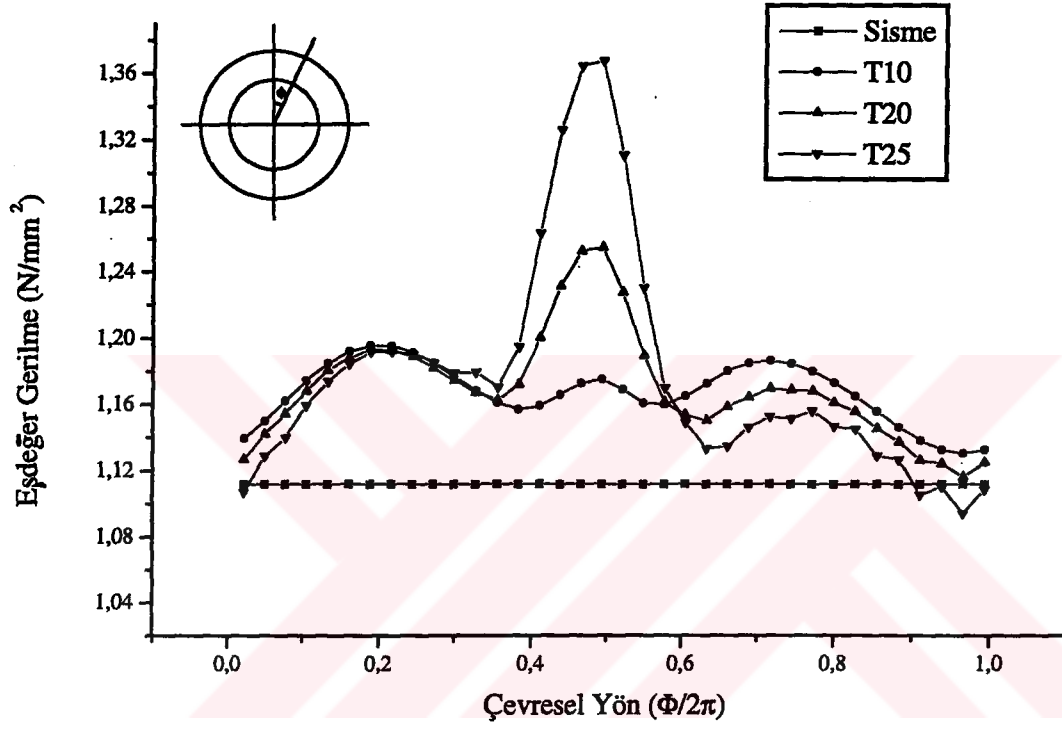
Şekil 75. Teker kesiti üzerinde seçilen elemanlar



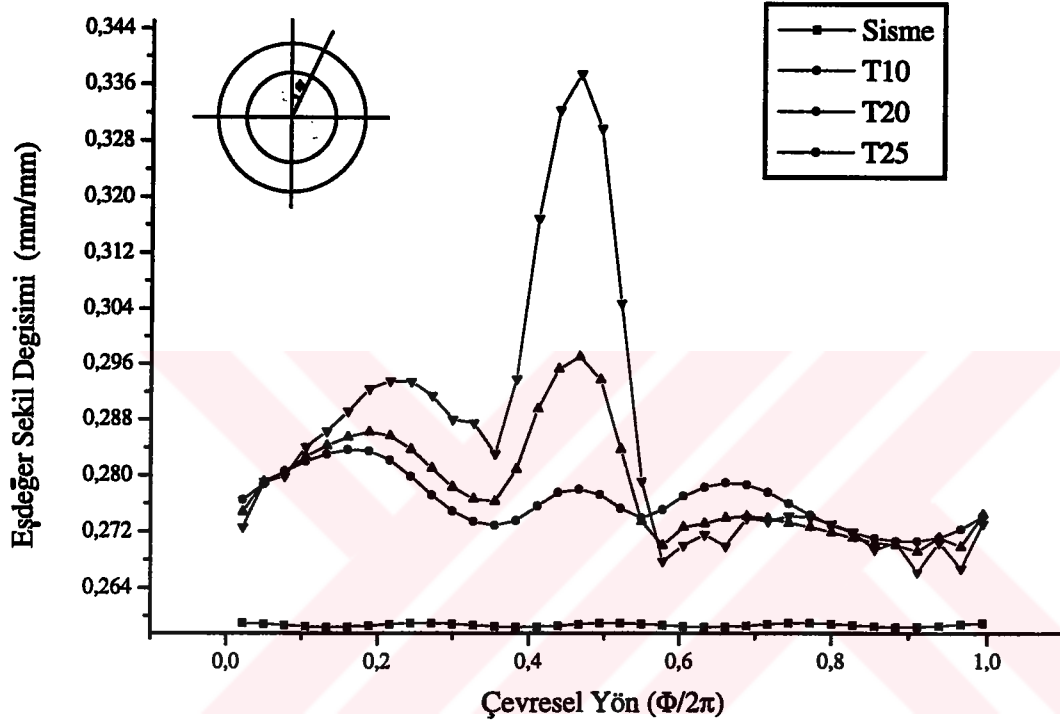
Şekil 76. 25mm'lik temas yüzeyi deplasmanında termal yüklemekten sonra oluşan maksimum şekil değişimi (Model 2)



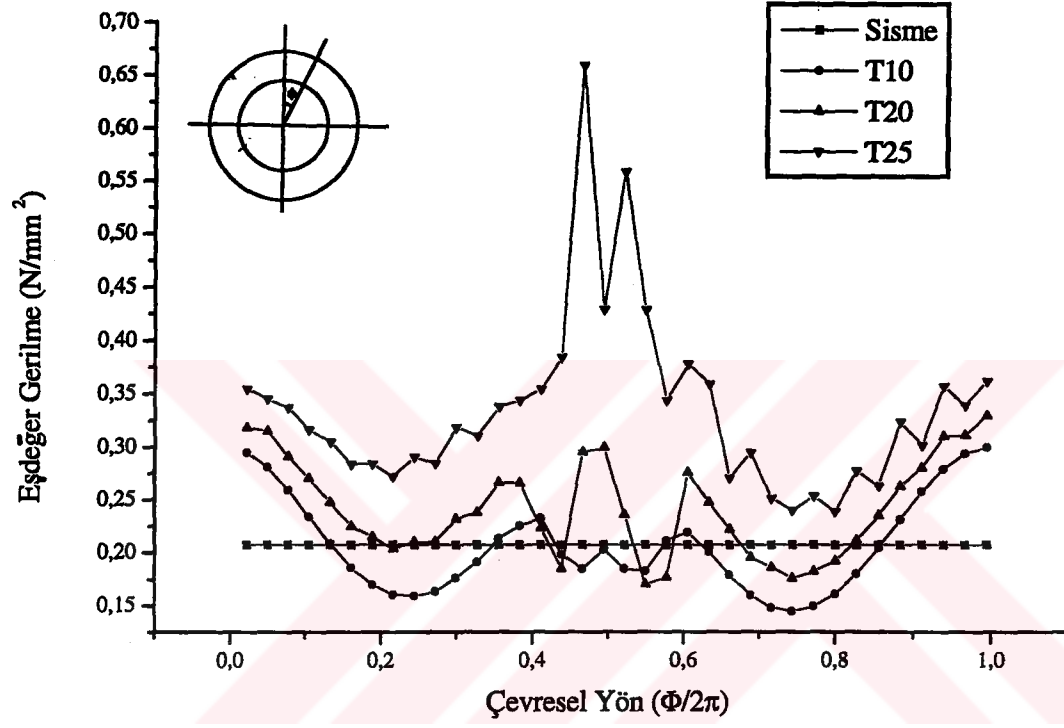
Şekil 77. 25mm'lik temas yüzeyi deplasmanında termal yüklemekten sonra oluşan maksimum yanak deplasmanı (Model 2)



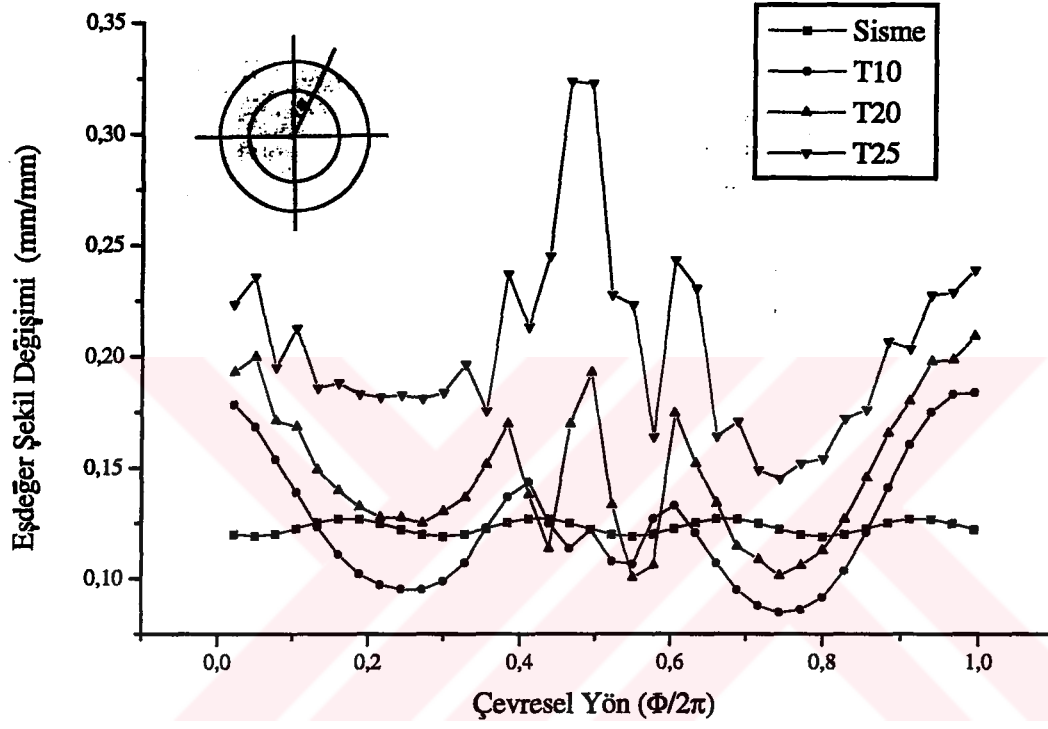
Şekil 78. Eleman 317'nin çevresel yöndeki eşdeğer gerilme değişimi.



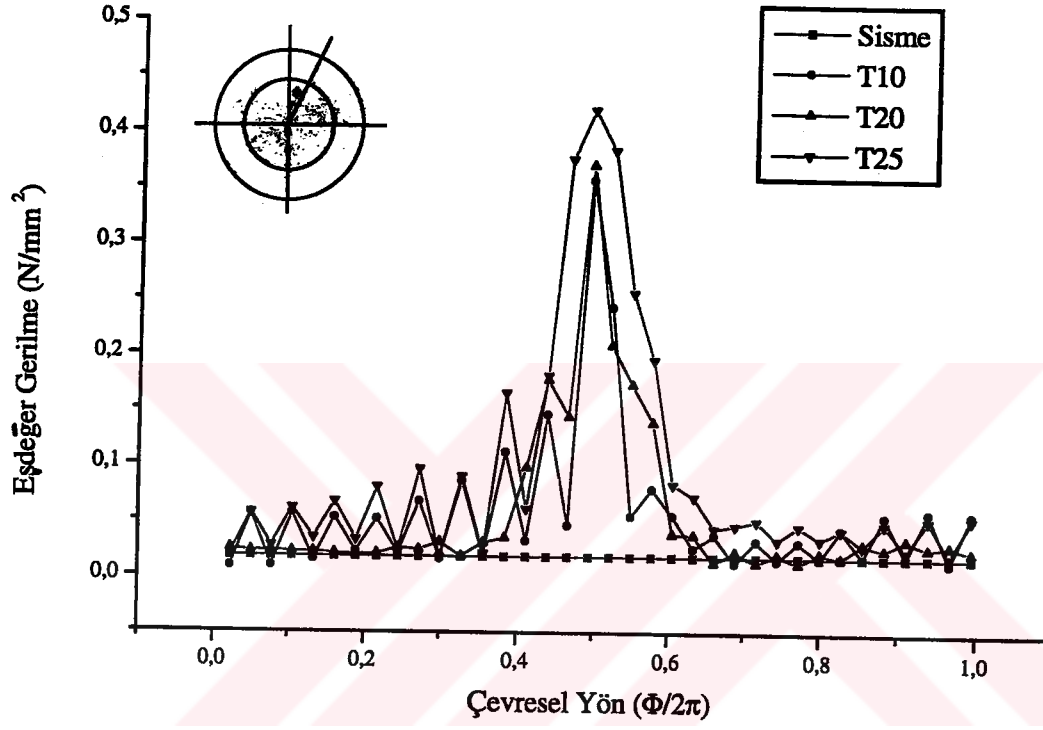
Şekil 79. Eleman 317'nin çevresel yöndeki eşdeğer şekil değişimi



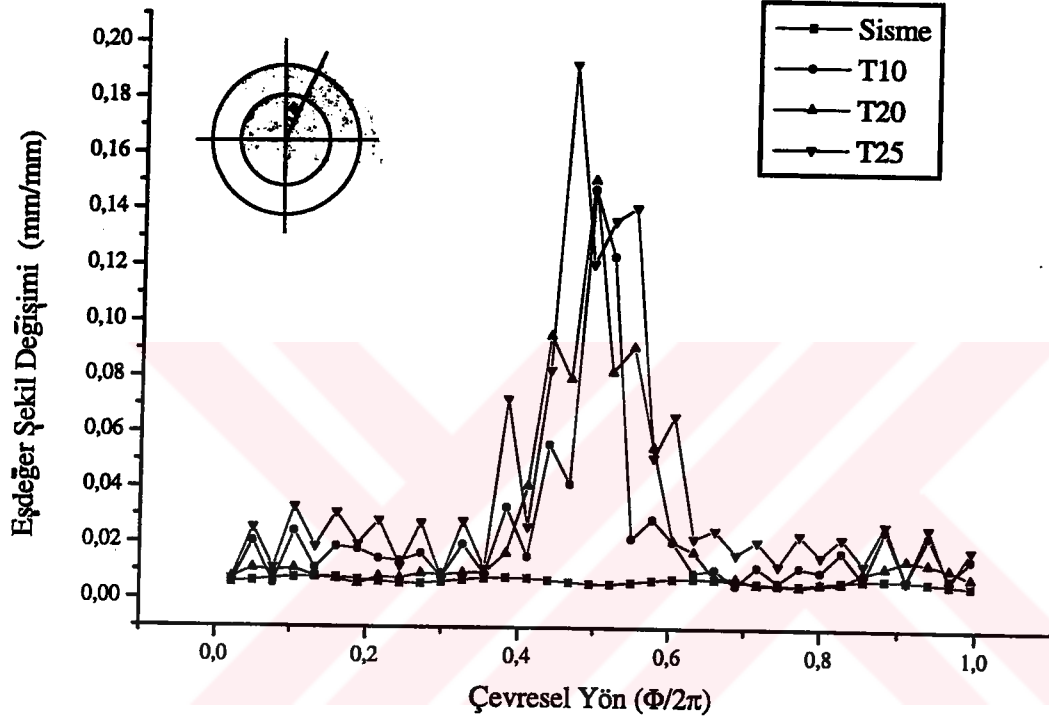
Şekil 80. Eleman 324'ün çevresel yöndeki eşdeğer gerilme değişimi.



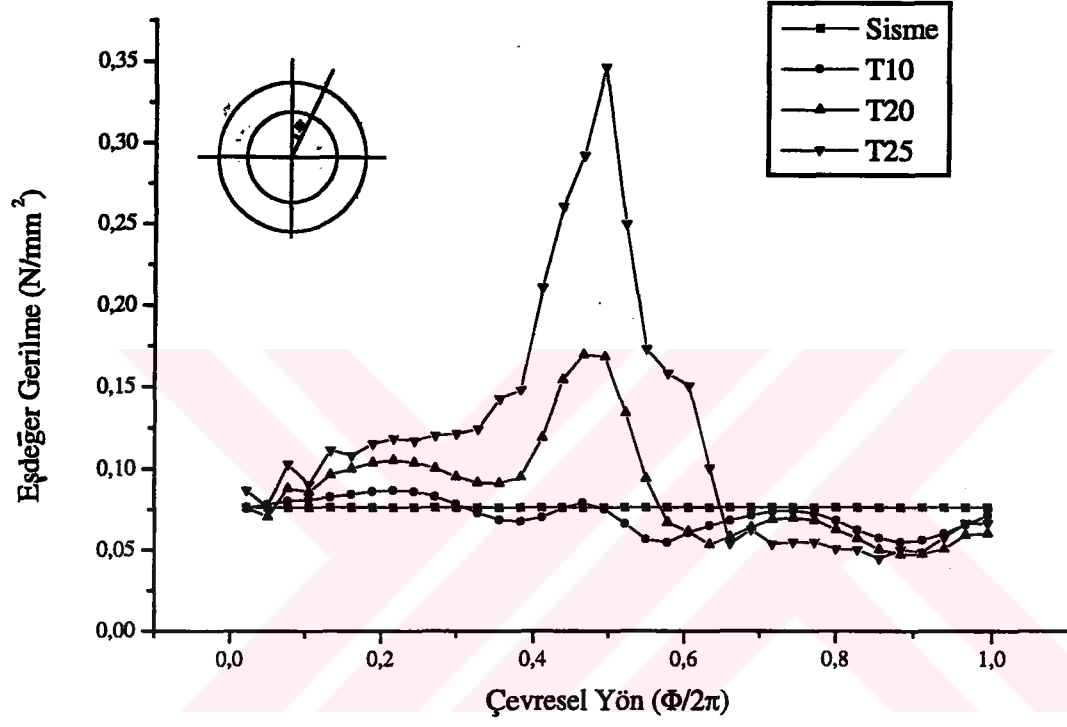
Şekil 81. Eleman 324'ün çevresel yöndeki eşdeğer şekil değişimi



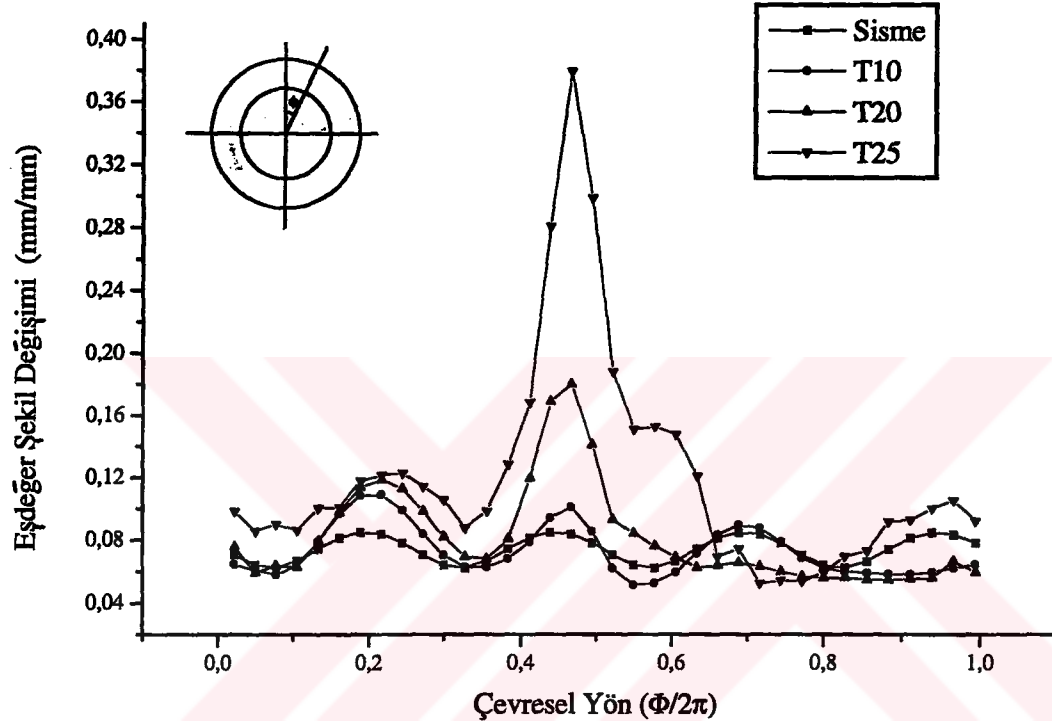
Şekil 82. Eleman 336'nın çevresel yöndeki eşdeğer gerilme değişimi.



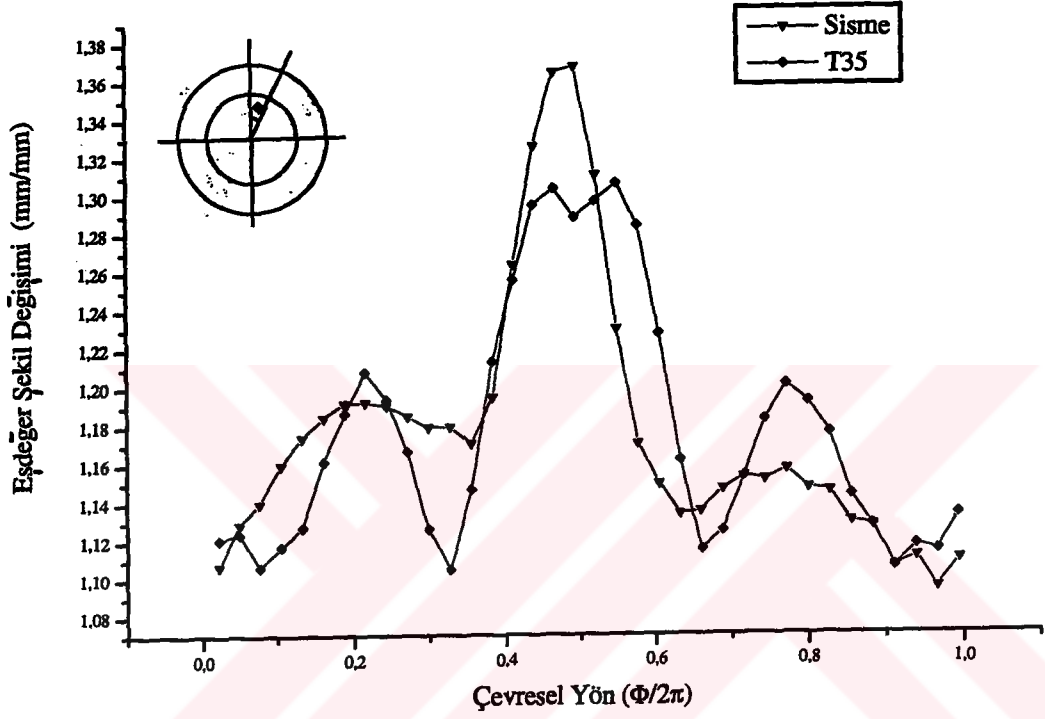
Şekil 83. Eleman 336'nın çevresel yöndeki eşdeğer şekil değişimi



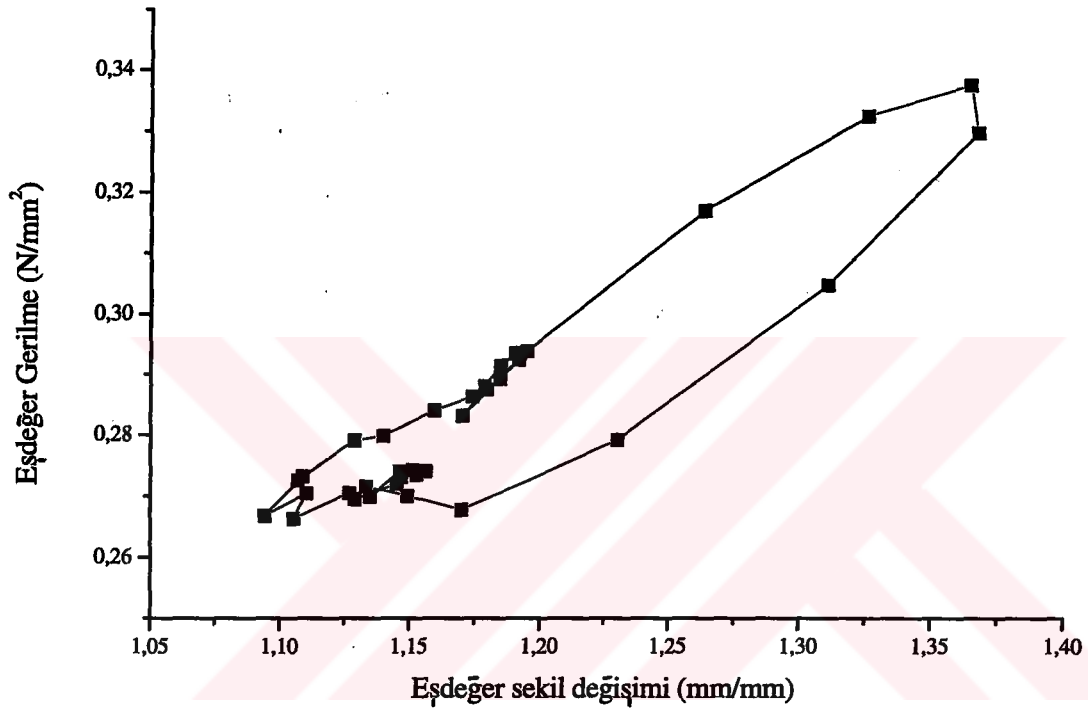
Şekil 84. Eleman 350'nin çevresel yöndeki eşdeğer gerilme değişimi.



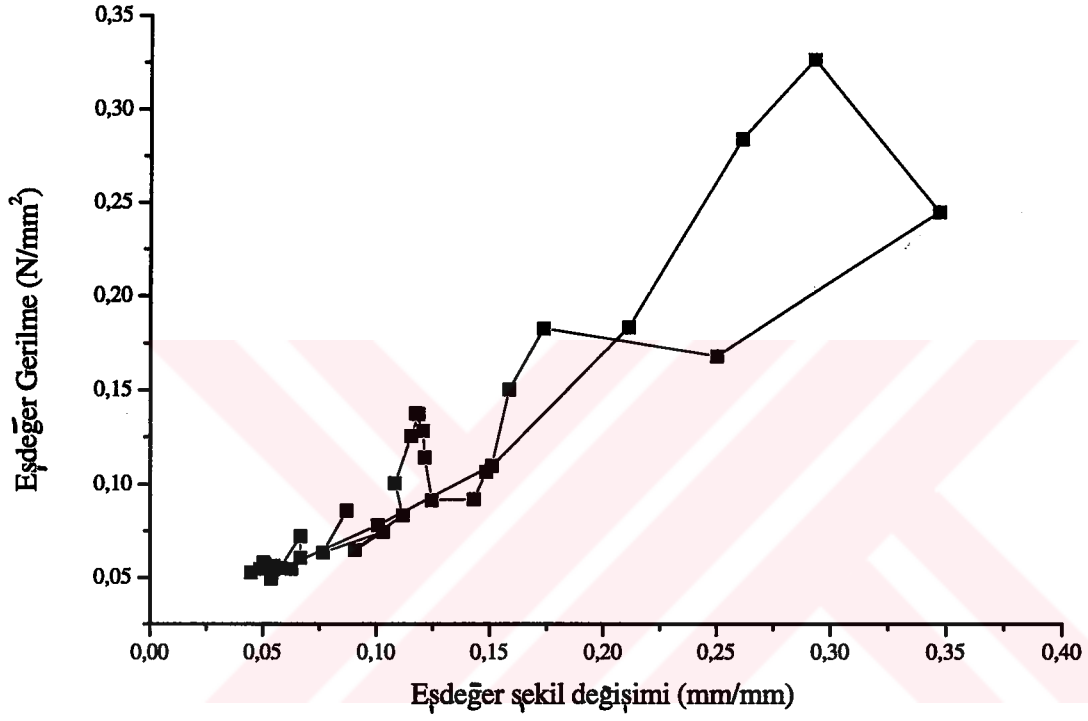
Şekil 85. Eleman 350'nin çevresel yöndeki eşdeğer şekil değişimi



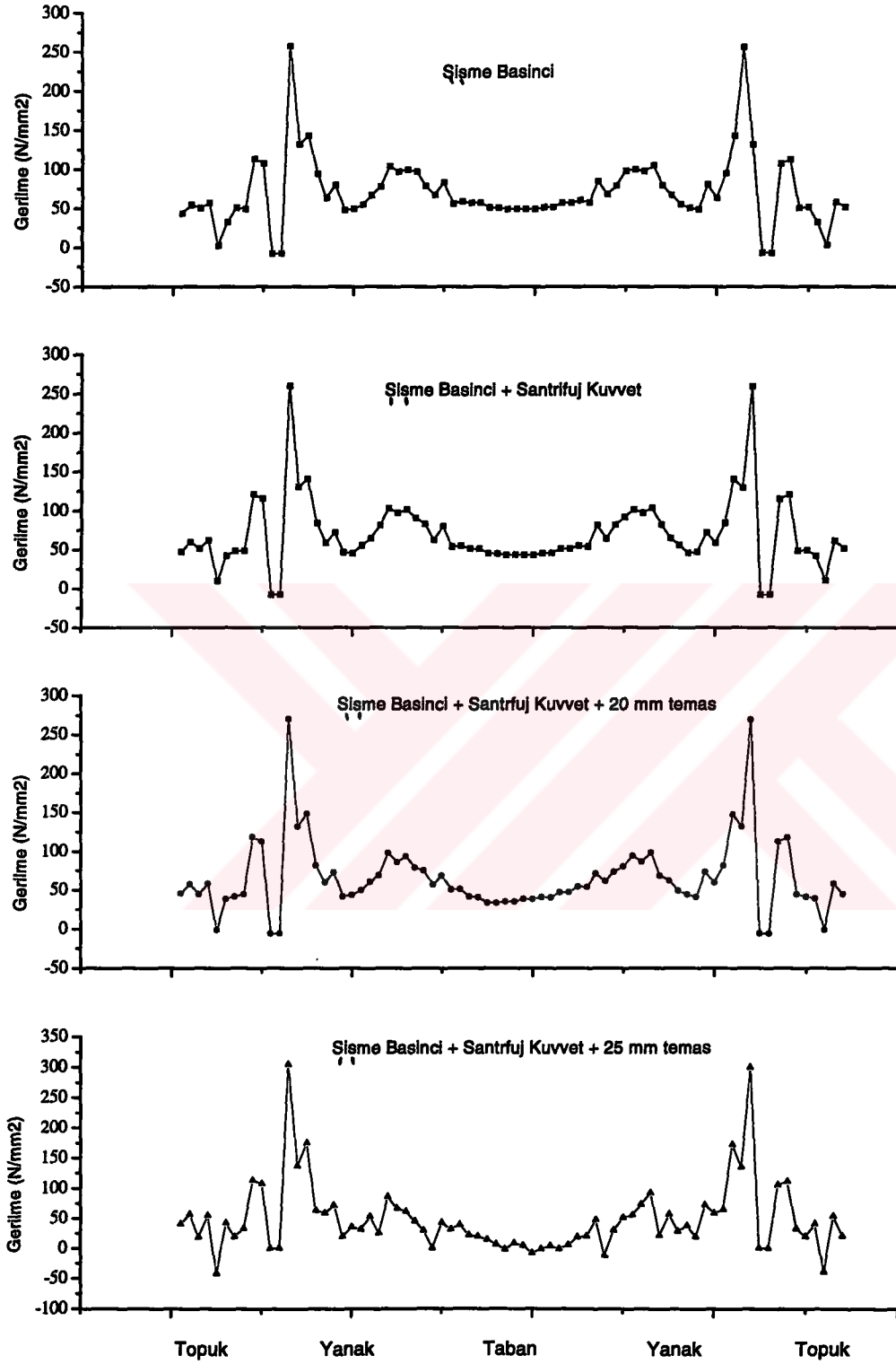
Şekil 86. Eleman 317 çevresel vöndeki eşdeğer gerilme değişimine uydurulan harmonik fonksiyon.



Şekil 87. Eleman 317'nin oluşturmuş olduğu histeresis çevrimi



Şekil 88. Eleman 350'nin oluşturmuş olduğu histeresis çevrimi



Şekil 89 Karkas kordlarında farklı yüklemelerde oluşan gerilmeler (Model 1)

### 3.2. Deformasyon modülünün irdelenmesi

Deformasyon modülünde, tekerin kauçuk bölümleri, üç boyutlu sekiz düğüm noktalı ve sekiz integrasyon noktalı, sıkıştırılamaz özelliğe sahip katı elemanlar kullanılarak modellenmiştir (Şekil 21-24 ). Karkas ve kuşak katların modellenmesinde ise yine üç boyutlu sekiz düğüm noktalı, dört integrasyon noktasına sahip rebar elemanlar kullanılmıştır. Rebar elemanların en büyük avantajı kompozit yapıyı oluşturan bileşenleri ayrı ayrı değerlendirebilme şansı tanınmasıdır. Tekerde yalnızca kauçuk bölümler viskoelastik etkiler nedeni ile ısı üreteceğinden, bu bölümlerdeki gerilme ve şekil değişimlerinin diğer bileşenlerin etkisi olmaksızın elde edilebilmesi önem kazanmaktadır. Bu durum teker kesiti üzerinden seçilen kauçuk elemanların çevresel yön doğrultusunda elde edilen gerilme ve şekil değişimleri ile (Şekil 79,87), kordların gerilme ve şekil değişimleri (Şekil 78-86) karşılaştırıldığında belirgin bir şekilde görülmektedir. Kauçuğa etki eden eşdeğer gerilmeler  $1.8-2 \text{ N/mm}^2$  değerlerindeyken korddaki eşdeğer gerilmeler  $100-150 \text{ N/mm}^2$  değerlerine ulaşabilmektedir. Bu nedenle rebar elemanların kullanıldığı teker modelleri, kompozit yapının eşdeğer malzeme özelliklerinden yararlanılarak kurulan termomekanik teker modellerinden daha gerçekçi sonuç verecektir. Yine aynı düşünceyle, kuşak katında oluşan gerilme ve şekil değişimleri de kolaylıkla elde edilmesi ve üzerinde çalışılması rebar elemanlar ile kolaylaşmış olmaktadır.

Deformasyon modülünde, öncelikle şişme basıncı ile birlikte janta takılma işlemini simüle etmek için topuk bölgesinin içeri doğru ötelenmesi işlemi yapılmıştır. Janta takma işlemi sistemde bir ön gerilme oluşturacağından modele ilave edilmiş olması gerilme-deformasyon davranışının daha gerçekçi modellenmesi açısından önemlidir. Bu çalışmada 2 barlık iç basınç değeri için çalışılmış, yalnızca temas yükü artırılmak suretiyle yüklemenin tekerdeki etkileri incelenmiştir. Temas yükü tekere düşey yönde öteleme yapılarak elde edilmiştir. Model 1 ve Model 2 'yi karşılaştırabilmek amacıyla her iki modelde de eşit temas yüzey deplasmanları kullanılmıştır. Aynı şekilde mevcut model yardımıyla farklı hız etkisi, santrifüj kuvvetinin değiştirilmesiyle belirlenebilmektedir. Santrifüj kuvvetinin Şekil 89 'dan da görüleceği gibi karkas kordlarına aşırı bir yük getirmediği tersine yanak bölgesinin içe doğru hareketlenmesiyle korddaki gerilmelerin düştüğü belirlenmiştir. Buna karşılık kuşak katmanındaki gerilmeler artmaktadır. Bu durum yüksek hız indeksli araç tekerlerinin kesit yüksekliğinin diğer tekerlere oranla

daha az olmasının nedenlerinden biridir. Ek olarak kullanılan rebar elamanlar sayesinde farklı kuşak açıları, farklı epi değerlerinin etkileri kurulan modelin işlevselliği sayesinde kolaylıkla modele aktarılarak görülebilmektedir.

Şişme analizinin sonucunda, beklendiği gibi karkas bölge yükün önemli bir kısmını, özellikle yanak bölgesinde, üzerine almaktadır. Karkas katının kuşak altında kalan bölgesinde ise yükün büyük bölümünün kuşak katmanlarca taşındığı görülmektedir (Şekil 25 ve Şekil 41). Bu durum karkas yükünün teker kesiti boyunca çizdirildiği Şekil 89 'da da belirgin bir şekilde görülmektedir. Özellikle şişme analizinde yanak bölgesindeki karkas gerilmeleri oldukça yüksekken, kuşağın altında kalan karkas katta gerilme değeri temas yükü arttıkça sıfıra kadar düşmektedir. Bu etkinin modellerde gayet belirgin olarak görülmesinin en önemli nedeni kullanılan rebar elamanlardır. Bu çeşit geçişlerin açık bir şekilde elde edilmesini sağlaması diğer modellere göre rebar modellerin bir üstünlüğüdür. Yine grafikten maksimum kord gerilmelerinin topuk tellerinin etrafından döndüğü bölgede olduğu görülmektedir, fakat literatürde kullanılan bazı modellerde özellikle bu bölgenin dikkate alınmadığı göze çarpan bir ayrıntı olarak dikkat çekmektedir. Bu bölgede, aynı zamanda çok farklı yönelmelere sahip karkas ve kuşak katmanları birlikteliğinden dolayı, kayma gerilmeleri yüksek değerlere ulaşmaktadır (Şekil 35 ve Şekil 50). Model 1 ve Model 2 deki şişme analizi sonucunda elde edilen Von Mises gerilmeleri maksimum değerleri incelendiğinde Model 2'nin sonuçlarının Model 1'e göre daha düşük olduğu görülmektedir. Aynı durum santrifuj kuvvetin uygulandıktan sonraki sonuçlar içinde geçerli olduğu görülmüştür. Bu değerlere dikkat edilirse tekerin jant bölgesindeki sınır koşullarının uygulandığı düğümlerde olduğu görülür. Oysaki yanak bölgesindeki sonuçlar karşılaştırıldığında Model 2 'nin sonuçları Model 1'den yaklaşık %10 oranında daha fazladır. Tekerin temasa başlaması ile birlikte, her bir yükleme durumunda Model 2'den elde edilen maksimum Von Mises gerilmeleri Model 1'deki değerlerden yüksek çıkmaktadır ve her iki modelde de bu değerler jant bölgesinde oluşmaktadır. Buna karşın Model 2'den elde edilen eşdeğer şekil değişim değerleri Model 1'deki eşdeğer şekil değişim değerlerinden daha fazla çıkmaktadır. Bunun nedeni ise özellikle topuk bölgesinde Model 2'de kullanılan ağ yapısının, Model 1'e oranla daha fazla şekil değişimine izin verebilmesidir. Bir başka deyişle bu bölgedeki kauçuklar daha fazla çalışmaktadır. 25 mm 'lik temas yüzeyinde oluşan maksimum

yanak deplasman miktarı Model 1 'de yaklaşık 10 mm, Model 2'de ise yaklaşık 12 mm dir. Yaklaşık 10 mm civarındaki bu değerlerin araç üzerinde yapılan gözlemler doğrultusunda kabul edilebilir olduğu düşünülmektedir.

Kuşak katmanları tekerin taban kısımlarının dairesel bir form almasını engellemektedir. Kuşak silindirik yapıya sahip bir eleman gibi davranarak eksenel yönde tekerin yerdeğişimini engellemekte tekerin taban kısmının düzgün bir formda kalmasını sağlamaktadır. Bu ise radyal tekerlerin yere basma yüzeylerinin çapraz katlı tekerlere göre daha geniş olmasını sağlamaktadır (Şekil 25,30,41,46 ). Bu özellik ise aracın yola tutunma kabiliyetini yükseltmektedir. Temas bölgesindeki kuvvetlerin incelenmesinden görüleceği gibi oluşan reaksiyon kuvvetleri simetrik değildir. Bu durum literatürde yayınlanan deneysel sonuçlarla [35] tam bir uyum göstermektedir. Bu nedenle gerçekçi bir gerilme-şekil değiştirme davranışının elde edilmesi yalnızca üç boyutlu tam ölçekli bir model ile mümkün olabilir.

Yine şişme analizinde dikkati çeken önemli noktalardan birisi; topuk tellerinin, modelde beklendiği gibi, çevresel yönde en büyük gerilmeleri üzerine alıp tekerin jant bölgesine sıkıca bağlanmasını sağlamasıdır. Bu durum özellikle teker kesiti boyunca daha fazla elemanın kullanıldığı model 2'de daha belirgin olarak görülebilir (Şekil 41). Topuk tellerinin bu özelliği sayesinde teker ile jant arasında güçlü bir bağ oluşmaktadır. Ara yüzeyde oluşacak olan basınç değeri özellikle araçların viraj alma esnasındaki performansını etkileyeceğinden önemlidir. Gerçekte jant ile topuk arasında da temas problemi olmasına karşın, hesaplama maliyetlerini azaltmak için bu bölge temas problemi olarak modellenmemiştir. Jant teker birleşim yeri modellenmesi, topuk kısmında, jant bölgesinde kalan düğüm noktalarının hareketinin engellenmesiyle (deplasman sınır koşuluyla) sağlanmıştır.

Tekerin zemin ile temasa geçmeye başlaması ile, özellikle temas bölgesinde kuşak katmanlar çevresel yükü, yanak bölgesinde ise karkas katmanlar meridyenal yöndeki yükü üzerlerine almaktadırlar. Bu durum özellikle Şekil 68'de karkas katmanın taşımış olduğu yüklerin meridyenal yöndeki değişimini gösteren grafikte görülebilmektedir. Yük miktarı arttıkça basma bölgesindeki temas yükleri kuşak uçlarına doğru artmakta ve taban bölgesinin ortası içe doğru hareketlenmekte ve araç yükünün çoğu kuşak kenarlarınca taşınır hale gelmektedir. Bu nedenle gerilme analizi açısından kuşak uçları

kritik bölgelerden birini oluşturmaktadır. Bu durum aşırı yükte kullanılmakta olan tekerlerde aşınmanın kuşak uçlarından başlamasının nedenini açıklamaktadır (Şekil 27-29,43-45).

Temas bölgesindeki temas kuvvetleri incelendiğinde, tekerin eksenel bir simetriye sahip olmadığı görülmektedir (Şekil 38-40,54-56). Kuşak katlarındaki tellerin +/- açılı olarak yönlemesi nedeniyle teker temasa girdiğinde, eksenel simetri bozulmaktadır. Bu nedenle tüm tekerin modellenmesi yoluyla elde edilen gerilme şekil değiştirme değerleri kayıp enerjinin daha doğru hesaplanmasını sağlamaktadır. Temas bölgesindeki temasa giren düğümlerdeki reaksiyon kuvvetlerinin toplanmasıyla araç yükü elde edilebilir. Bu işlem 10, 20 ve 25 mm 'lik temas yüzey deplasmanlarında hesaplandığında; 10 mm'lik deplasmanda Model 2'de 1250 N Model 1'de 840 N, 20 mm 'lik deplasmanda Model 2'de 3348 N Model 1'de 2996 N, 25 mm'lik deplasmanda ise Model 2 'de 6290 N Model 1'de ise 6006 N olarak elde edilmiştir. Sonuçların incelenmesinden görüleceği gibi araç yük değerlerinde temas yüzey deplasmanının artmasıyla elde edilen araç yük değerleri birbirine yaklaşmaktadır. 10 mm lik temas yüzey deplasmanında oluşan araç reaksiyon kuvvetleri arasındaki farkın en büyük nedeni temas bölgesinde Model 1 ve Model 2 'deki eleman sayılarının farklılığıdır. Artan deplasman değeri ile yük değerinin eşitlenmesi ise temasa giren düğüm sayılarının artmasıyla gerçek temas yüzeyine yakın bir formun elde edilmesi olarak düşünülmektedir. Tekerin temasa geçmesiyle birlikte, her bir elemanın integrasyon noktası için elde edilen çevresel yöndeki eşdeğer gerilme ve eşdeğer şekil değişimleri Şekil 78-86 da görülmektedir. Grafiklerin incelenmesi sonucunda çevresel yönde bir simetrinin olmadığı görülmektedir. Bu durum ise tekerin temasa başlaması ile eksenel simetrinin bozulduğu düşüncesinin doğruluğunu göstermektedir.

Her iki ağ yapısındaki modellerde teker, 360° çevresel yönde, 10° 'lik dilimler halinde modellenmiştir (Şekil 23). Aslında temas bölgesine yaklaşıldığında, literatürdeki bir çok çalışmada olduğu gibi farklı açı kombinasyonları kullanılarak bu bölgede daha iyi sonuçların elde edilebilmesi mümkündür. Fakat bu durum tekerin düşey eksen boyuncası alt ve üst parçasına etki eden kuvvet miktarlarını etkilemektedir. Bunun nedeni, etki eden iç basınç değerinin eleman yüzeyleri üzerinden hesaplanmasıdır. Yukarıda belirtildiği gibi temas bölgesinde yoğunlaşan sayıda eleman kul-

lanılması durumunda tekerin alt ve üst yüzey alanlarındaki farklılık, etki eden kuvvet miktarını etkilemiş olmaktadır. Fakat ısı yaklaşım gereği, çevresel yönde özdeş noktalar üzerinden hesaplamalara gidileceğinden şişme analizi sonucu, yaklaşım gereği, gerilme şekil değişimlerinin çevresel yönde homojen olmalıdır.

Deformasyon modülünde, tekerin dönme etkisi santrifuj kuvvetlerin uygulanmasıyla dikkate alınmıştır. Modelde ardışık olarak yüklemeler yapıldığı için, şişmiş haldeki tekerdeki gerilme durumu ile şişme+santrifuj kuvvetlerin uygulandığındaki durum yine şişme+santrifuj+temas yükü uygulandığındaki gerilme durumu Şekil 26,27, 42,43 'de görülmektedir. Ayrıca santrifuj kuvvetinin etkisiyle karkas ve kuşaklardaki gerilmelerin incelenmesinden, karkas yükünün azaldığı (bu nedenle yanak bölgesinin içe doğru hareket ettiği), bunun yanında kuşak tellerindeki gerilmenin ise arttığı görülmektedir.

Deformasyon modülü ayrıca, ısı analiz sonucu hesaplanacak olan her bir integrasyon noktasındaki sıcaklık değerini alarak,  $\Delta T$  sıcaklık farkından dolayı oluşacak olan termal gerilmelerin hesaplanması için düzenlenmiştir. Bu nedenle öncelikle başlangıç koşulu olarak, çevre sıcaklık değeri bütün elemanların integrasyon noktalarına kullanıcı alt programıyla atanmıştır. Modüller arasındaki işlemlerde de yazılan kullanıcı alt programlarından yararlanılmıştır. Oldukça fazla eleman kullanıldığı için modüller arasındaki veri alış verişi sırasında veri işleme programı (Clipper) kullanılmıştır. Analizlerden elde edilen sonuçlar bu veri işleme programına aktarılabilir şekilde kullanıcı alt programlarıyla düzenlendikten sonra işlenmekte ve bir sonraki modüle aktarılacak verileri sonraki modül için kullanıcı altprogramı şeklinde oluşturabilmektedir. Geliştirilen bu yapı sayesinde sonuçların işlenmesi hızlandırılmış olmaktadır. Elde edilen termal etkilerin neden olduğu termal şekil değişimleri Şekil 71,72 'de görülmektedir. Kullanılan malzeme özelliklerinin sıcaklık bağımlı olmaması nedeni ile tek bir çevrim yapılarak yaklaşım sonlandırılmıştır.

Analiz sonucu elde edilen gerilme değerlerinin eksen takımından bağımsız değerlendirilebilmesi için Von Mises gerilmeleri şeklinde grafiklerle verilmiştir. Model 1'den elde bu gerilme değerleri incelendiğinde özellikle jant bölgesindeki düğüm noktalarındaki değerlerin oldukça yüksek çıktığı görülebilir. Burada deplasman sınır koşulu kullanılması nedeni ile Sen Venant prensibi gereği bu noktadaki sonuçlar tam gerçeği

yansıtılmamaktadır. Yanak bölgesinde şişme basıncının üzerine uygulanan santrifüj kuvvetiyle oluşan Von Mises gerilme değerleri %10 oranında artarken, 25 mm'lik temas yüzey deplasmanı uygulanmasıyla temas bölgesindeki elemanlardaki bu değerler yaklaşık %300 oranında artmaktadır. Kuşak altında kalan karkas bölgesinde santrifüj kuvvetinin uygulanması sonucu Von Mises gerilmeleri yaklaşık %40 oranında azalmaktadır. Aynı şekilde Model 2'den elde edilen sonuçlara bakıldığında şişme basıncının üzerine santrifüj kuvvetinin uygulanmasıyla gerilme değerleri %20 oranında artmaktadır. Fakat kuşak altında kalan karkas bölümlerde ise Model 1'deki gibi belirgin bir azalma görülmemektedir. Bunun nedeninde Model 2'deki bu bölgenin farklı modellenmesinin bir sonucu olduğu söylenebilir.

Oluşan Cauchy kayma gerilmeleri incelendiğinde ise özellikle şişme basıncı etkisinde yanak ve topuk teli bölgesinde Model 2'de kayma gerilmesi yaklaşık  $24 \text{ N/mm}^2$  'ye ulaşmaktadır, santrifüj kuvvetinin etkisi ile bu değerler yine yaklaşık olarak %1-2 mertebesinde artmaktadır. Topuk teli civarında kayma gerilmelerinin yüksek çıkmasının en büyük nedeni, çevresel yönde yönelmiş topuk tellerinin etrafından meridyenal yönde yönelmiş karkas kordlarının geçmesidir. Analizden önce beklenimiz farklı yönlerde yük taşıma eğiliminde olan bu katmanlar arasında kayma gerilmelerinin yüksek çıkmasıydı. Yanak bölgesinde ise karkas kordları ile bu bölgedeki kauçuk arasındaki etkileşim nedeni ile kayma gerilmeleri oluşmaktadır. Temasın başlamasıyla, temasa giren kuşak katmanında kayma gerilmeleri belirgin bir şekilde artmaktadır. Örneğin 25 mm'lik temas yüzey deplasmanında şişme basıncı etkisinde oluşan kayma gerilmeleri değerleriyle karşılaştırıldığında bu oran %400 'e kadar çıkmaktadır. Kuşak tellerinin +/- yönde yönelmiş olmaları, aynı zamanda bu bölgede bunlara tamamıyla dik doğrultuda karkas kordlarının olması kayma gerilmelerinin artmasının doğal sonucu olmaktadır. Model 1'de de aynı bölgelerde kayma gerilmeleri ön plana çıkmaktadır. Farklı olarak Model 1'deki jant bölgesindeki sınır koşullarının uygulandığı düğümlerde ki kayma gerilmeleri Model 2'ye oranla %40 mertebesinde daha fazla çıkmaktadır. Hem kayma gerilmelerinin, hemde Von Mises gerilmelerinin bu bölgedeki değerlerinden, özellikle jant bölgesinde kullanılan sonlu elemanlar ağının çözüme bu bölgede büyük oranda etki ettiği belirlenmiş olmaktadır.

### 3.3. Kayıp Modülünün İrdelenmesi

Pnömatik tekerlerde, viskoelastik etkilerden oluşan kayıp enerjinin bulunmasına yönelik, literatürde çeşitli yaklaşımlar mevcuttur. Bu çalışmaların büyük bir kısmında, kayıp enerji için deneysel yöntemler kullanılarak ampirik bağıntılar elde edilmeye çalışılmıştır. Bazı çalışmalarda belli bir değerin üzerindeki şekil değişimleri dikkate alınmakta iken bazılarında da yalnızca kayma gerilmelerinin ısı üretiminde etkin olduğu düşünülerek yalnızca bu değerlere göre hesaplamalar yapılmaktadır. Doğal olarak yapılan çalışmalar özellikle üzerinde çalışılan tekerin geometrik yapısına bağlı olduğundan bu ampirik ifadeleri genel olarak kullanmak aynı şartlar sağlanmadığı sürece doğru olmayacaktır.

Bu çalışmada ise kayıp enerji, gerilme-şekil değiştirme ilişkisinden yararlanılarak hesaplanmıştır. Bu yöntemde kauçuk malzemeler için kullanılan viskoelastik model önemlidir. Eğer dinamik yüklemekten dolayı oluşan gerilme genlikleri küçük olsaydı, oluşacak olan histeresis çevrimi elips şeklinde olacaktı ve ilk bölümde anlatılan lineer viskoelastik malzemeler için elde edilen ifade kullanılarak kayıp enerji hesaplanabilirdi. Fakat tekerde deformasyonlar büyük olduğu için, oluşacak olan histeresis çevrimi düzgün bir formda olmamaktadır. Şekil 78,80,82 'de tekerin topuk, yanak ve omuz bölgesinden seçilmiş elemanların yalnızca bir integrasyon noktasında farklı yükleme durumları için elde edilen gerilme şekil değiştirme değerleri, Şekil 86 'da ise topuk bölgesindeki bir elemanın çevresel yöndeki eşdeğer gerilme değerine en küçük kareler yöntemi ile uydurulan eğri görülmektedir. Bu işlemler analizde her bir integrasyon noktası için gerçekleşmektedir. Doğal olarak çok farklı karakterlerde eğriler olduğundan uydurulan sinüzoidal eğrilerin bazıları çevresel yöndeki değişimi çok iyi temsil ederken bazı integrasyon noktalarında bu durum tam olarak sağlanamamaktadır. Bu tez çalışmasında mevcut bilgisayar olanaklarının kısıtlı olması nedeni ile oluşan eşdeğer gerilme ve eşdeğer şekil değiştirme değerleri üzerinde çalışılmıştır. Her bir gerilme bileşeni içinde bu işlemler yapılarak daha hassas bir sonuç elde edilmesi mümkündür. Gerilme ve şekil değiştirmeler için elde edilen bu fonksiyonlar kullanılarak oluşturulan histeresis çevriminin oluşturduğu kapalı alanlar (Şekil 87 ve 88) herbir elemanın herbir integrasyon noktasında hesaplanmaktadır. Sonuçlardan görüleceği üzere oluşan histeresis çevrimleri oldukça karmaşık formlarda oluşabilmektedir. Bu nedenle daha anlamlı kayıp enerji hesabı yapabilmek için elde edilen gerilme ve şekil değiştirme fonksiyon-

larının yardımıyla, şekil değişimleri üzerinden gerilmeler integre edilerek kayıp enerji hesabı yapılmıştır.

Teker kesitindeki bir noktanın çevresel yönde, temas girip teker eski konumuna gelinceye kadar maruz kaldığı gerilme-şekil değiştirme değerlerine, harmonik kosinüs fonksiyonu uydurulmuştur. Dolayısı ile bu fonksiyonlar kullanılarak yapılan kayıp enerji hesabında, tekerin dönmeye başlayıp belli bir süre geçtikten sonraki, yani gerilme ve şekil değişimlerinin kararlı hale gelmesinden sonraki durum, göz önüne alınmış olmaktadır. Fakat gerçekte kauçuk malzemeler kararlı hale gelinceye kadarki lineer olmayan bir viskoelastik davranış gösterirler. Bu tez çalışmasında bu kararsız bölgedeki kauçuk davranışı dikkate alınmamış yalnızca kararlı çalışma bölgesine geçtikten sonraki davranış dikkate alınmıştır. Kauçuk malzemelerin zamana bağlı viskoelastik davranışının modellenenebilmesi için zaman bağımlı deneysel verilere ihtiyaç duyulmaktadır. Bu konudada literatürde özellikle tekerde kullanılan kauçuk malzemeler için yeterli bir data mevcut değildir. Kauçuk malzemelerle ilgili dikkat edilmesi gereken noktalardan biri de bu tür malzemelerin bazı eşik sıcaklık değerlerinde son derece değişken mekanik özellikler gösterebilmesidir.

Hesaplarda kullanılan tanjant modülü (kayıp modülü), tekerde kullanılan kauçuk malzemeler için, ticari gizlilik nedeni ile yayınlanmamış olmasından dolayı, yine literatürde olan normal kauçuklar için verilen değerlerden yararlanılmıştır. Gerçekte her teker bölgesine ait tanjant modülü değerleri ile çalışmak daha gerçekçi bir kayıp enerjinin elde edilmesini sağlayacaktır. Bu çalışmada  $\delta = 0.3$  olarak kullanılmıştır. Bu değer enerjinin yaklaşık olarak yüzde 30 'unun kaybolduğunu ifade etmektedir. Tekerdeki farklı kauçuk bölgeleri için bu değerler değişmektedir, fakat bu çalışmada bu değişim dikkate alınmamıştır. Diğer bir açıdan kayıp modülü gerçekte sıcaklık bağımlı bir malzeme özelliğidir, yani değişen sıcaklık değeri ile kauçuk malzemenin viskoelastik olarak ürettiği enerji miktarı değişmektedir. Bu tez çalışmasında, yine tekerlerde kullanılan kauçuk malzemeler için elde edilemediğinden, modelde sıcaklıkla kayıp modülünün değişimi dikkate alınmamıştır.

Enerji üretimi, düşük yüklerde topuk bölgesinde daha fazla iken, yükün artmasıyla birlikte, omuz bölgesindeki şekil değişimlerinin fazlalaşmasıyla bu bölgede de belirgin bir şekilde artmaya başlamaktadır. Bunun nedeni, artan yük miktarı ile kuşak

sonlarında gerilmelerin ve şekil değişimlerinin artması, buna paralel olarakta, serbest kuşak uçlarının omuz bölgesine girip çıkmasıyla birlikte şekil değişimlerinin artmasıdır (Şekil 48 ve 49).

### 3.4. Termal Modülünün İrdelenmesi

Teker kesiti boyunca, deformasyon modelinde kullanılan sonlu elemanlar ağı, ısı analizinde aynen kullanılmıştır. Yalnızca burada 10°'lik teker dilimi, üç boyutlu ısı transfer elemanlarıyla modellenmiştir. Kullanılan sınır koşulları Şekil 57'de görülmektedir. Çevresel yöndeki sınır koşulundan da anlaşılacağı üzere, çevresel yönde simetri sınır koşulu kullanılarak, bu yönde sıcaklığın değişmediği kabulü yapılmıştır.

Termal analizde kullanılan, kauçuk, çelik ve karkas iplerinin ısı iletim katsayıları, özgül ısı değerleri ve ısı taşınım katsayıları literatürden alınmıştır. Analiz sonuçlarında özellikle ısı taşınım katsayılarının çok etken olduğu gözlenmiştir. Özellikle yanak bölgesindeki ısı taşınım katsayısı tekerdeki sıcaklık dağılımında etken bir değerdir. Ticari gizlilik gereği çok net bilgilerin yayınlanmamış olması nedeniyle, bu çalışmada yaklaşık değerler ile çalışmakla yetinilmiştir. Tüm bunlar göz önünde tutulduğunda elde edilen sıcaklık dağılımları daha çok belli bir eğilimi temsil etmektedir. Fakat kullanılan modüller yaklaşımın sunmuş olduğu avantaj gereği, bu olumsuzlukların giderilerek ısıl modülün iyileştirilmesi ve modele ilave edilmesi mümkündür.

Termal model, kayıp modeliyle elde edilen şekil değiştirme enerjisine oldukça bağımlılık göstermektedir. Nitekim düşük yüklerde topuk bölgesinin hemen üst tarafında sıcaklık diğer bölgelere oranla daha yüksektir. Yük arttıkça, omuz bölgesinde de sıcaklık bölgesi oluşmaya başlamaktadır. Bu nedenle teker kesitinin bu bölgelerinde kullanılan kauçuk malzemenin düşük histeresis özelliği göstermesi beklenmelidir (Şekil 59-66). Özellikle uzun süre aşırı yükte çalışan otobüs ve kamyon tekerlerinde bu konuya dikkat edilmelidir.

Artan araç hızı da tekerdeki sıcaklık artışına sebep olmaktadır. Bu durum modele santrifüj kuvveti ve değişen ısı taşınım katsayıları şeklinde aktarılmaktadır. Fakat santrifüj kuvvetinin gerilme deformasyon mekanizmasına olan etkisiyle oluşan enerji artışının fazla olmaması nedeniyle, hesaplama maliyetleride düşünülerek çalışmada yalnızca değişen hızlardaki ısı taşınım katsayıları dikkate alınmıştır. 80 km/h ve 100

$km/h$  araç hızlarında ısı transfer analizlerinin sonuçları Şekil 67-70 'da görülmektedir. Artan araç hızı ile birlikte yanak ve taban bölgesindeki ısı taşınım katsayısının artması (Tablo 2) sıcaklık artışına sebep olmaktadır. Çalışmada kullanılan ısı taşınım katsayı değerleride literatürdeki benzer çalışmalardan alınmış olduğu için elde edilen sonuçlar daha çok bir eğilimi temsil etmektedir.

Teker kesitinde elde edilen sıcaklıklar, artan yük miktarı ile birlikte arttığı görülmektedir. Örneğin Model 1'de 20 mm'lik temas yüzeyi deplasmanında en yüksek sıcaklık  $52^{\circ}C$  olarak hesaplanmışken, 25 mm'lik temas yüzey deplasmanında bu değer  $58^{\circ}C$  'ye çıkmıştır. Özellikle kuşak bölgesi ve topuk bölgesinde bu artış daha belirgin olarak gözlemlenmektedir. Bunun en önemli nedeni, artan yük miktarı ile bu bölgelerdeki gerilme ve şekil değişimlerinin artmasıdır. Özellikle kamyon tekerlerinin aşırı yükte uzun süre kullanılması nedeniyle kuşak bölgesindeki sıcaklık artışı tabanın kolaylıkla kuşak katmanından ayrılmasına neden olmaktadır. Farklı yüklemelerde Model 1 ve Model 2 'den elde edilen sıcaklıklar incelendiğinde, artan yükte teker kesitinde sıcaklığın arttığı görülmektedir. Model 1 ve Model 2'de 20 mm'lik 25 mm'lik temas yüzey deplasmanında elde edilen sıcaklık değerlerini karşılaştırıldığında oluşan sıcaklık bölgelerinin tekerin aynı bölgelerinde olduğu (topuk ve kuşak sonları) görülmektedir. Fakat sıcaklık değerleri incelendiğinde özellikle topuk bölgesinde Model 1'deki değerlerin daha yüksek olduğu görülmektedir. Halbuki Model 2 'nin gerilme şekil değiştirme sonuçlarına göre daha fazla enerji üreteceği düşünülse de, Model 2'de topuk bölgesindeki tekerin deformasyon mekanizması daha iyi belirlendiğinden daha doğru sonuç verdiği düşünülmektedir. İki modelin yanak bölgelerindeki sonuçları ise birbirlerine yakın olduğu fakat Model 2'nin kesit boyunca daha fazla eleman içermesi nedeniyle kesitteki sıcaklık dağılımını daha iyi belirlediğini söylemek mümkündür. Omuz bölgesinde ise Model 2 'deki sıcaklıklar Model 1'e oranla daha yüksektir. Bu durumunda bu bölgedeki deformasyon şeklinin daha hassas belirlenmiş olması ile orantılı olduğu söylenebilir (Şekil 59-66 ).

#### 4. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında, sistematik bir yöntem geliştirilerek kararlı halde dönmekte olan pnömatik tekerlerde sıcaklık dağılımı ve bu dağılımından kaynaklanan gerilme ve şekil değişimleri belirlenmeye çalışılmıştır.

Problemin karmaşıklığı nedeniyle tam bir analitik modelin kurulması oldukça zordur. Bu nedenle çözümde iteratif modüler bir yaklaşım kullanılmıştır. Bu modüller sırasıyla, deformasyon, kayıp ve termal modül olarak isimlendirilmiştir. Tekerdeki gerilme-şekil değiştirme mekanizması deformasyon modülüyle belirlendikten sonra, bu verilerin yardımıyla oluşan histerisis çevriminin oluşturduğu kapalı alan hesaplanarak kaybolan (açığa çıkan) enerji miktarı hesaplanmaktadır. Üçüncü modülde ise hesaplanan, kaybolan enerji miktarının yardımıyla, ısı analiz yapılmaktadır. Son olarak elde edilen sıcaklık dağılımının, yeniden deformasyon modülüne aktarılmasıyla sıcaklık farkından oluşan gerilme ve şekil değişimlerinin hesaplanmasıyla döngü tamamlanmaktadır.

Problemin sağlıklı bir şekilde irdelenip incelenebilmesi için öncelikle,

1. Sıkıştırılmaz malzeme mekaniği
2. Sonlu şekil değişim teorisi
3. Doğrusal olmayan malzeme yapısı
4. Şekil değişimine bağımlı sınır koşulları
5. Kompozit malzeme mekaniği
6. Doğrusal olmayan (malzeme ve geometrik) sonlu elemanlar formülasyonu
7. Temas analizi
8. Isı transfer analizleri için sonlu elemanlar formülasyonu
9. Viskoelastisite

gibi teorik ve uygulamalı mekaniğin farklı bölümleri üzerinde yeterli bir bilgi düzeyine gereksinim vardır.

Problemi biraz olsun basitleştirebilmek için çalışma sırasındaki yapılan kabul-leri aşağıdaki gibi özetleyebiliriz. Burada dikkat edilmesi gereken noktalardan biri, yaklaşımın ardışık işlemler gerektirmesi nedeniyle yapılan kabullerden kaynaklanan hataların diğer çözümleri de etkileyecek olmasıdır.

1. Tekerin üretimi esnasında kalıpta pişirilme işlemi yapıldıktan sonra soğutulmaya bırakılır, bu sırada tekerde artık gerilmeler oluşmaktadır. Bu artık gerilmeler modelde dikkate alınmamıştır.
2. Model olarak kullanılan tekere ait malzeme verileri mevcut olmadığından analizlerde literatürdeki benzer çalışmalarda kullanılan malzeme değerlerinden faydalanılmıştır.
3. Teker ile jant arasındaki temas problemi hesaplama maliyetleri nedeniyle dikkate alınmamıştır.
4. Teker ile zemin arasındaki temas, sürtünmesiz kabul edilmiştir.
5. Isıl analizde tekerin çevresel yönde sıcaklığının değişmediği kabul edilmiştir.
6. Isıl analiz kararlı hal durumu (steady state) için yapılmıştır.
7. Kullanılan malzemelerin ısı özelliklerinin sıcaklık bağımlı olmadığı kabul edilmiştir.
8. Radyasyonla ısı taşınımı küçük değerlerde olacağı için hesaplamalarda ihmal edilmiştir.

Sayısal çalışmalar, radyal bir otomobil tekeri için farklı hız, yük ve kuşak açıları olmak üzere iki farklı ağ yapısı kullanılarak incelenmiştir. Elde edilen sonuçlardan probleme ait değerlendirmeleri aşağıda başlıklar halinde sıralayabiliriz.

- Bu tez çalışmasında mevcut çalışmalardan farklı olarak modüler termomekanik yaklaşımda, üç boyutlu tam ölçekli bir teker üzerinde rebar elemanlar başarıyla kullanılmıştır.

- Çalışmada kayıp modülünde modüler termomekanik yaklaşımlardan farklı olarak, harmonik fonksiyonlar üzerinden çalışılarak viskoelastik davranış modellenmiştir.
- Kullanılan modelleme stratejisi ve geliştirilen kullanıcı alt programları yardımıyla, gerilme ve sıcaklık analizlerinden elde edilen sonuçlar bir teker tasarımcısı için beklentileri karşılayacak düzeydedir.
- Pnömatik tekerlerin sonlu elemanlar modeli için verilmesi gereken en önemli kararlardan biri mevcut kompozit yapının nasıl modelleneceğidir. Bu tez çalışmasında kompozit yapı için, malzeme verilerinin modele aktarılmasına getirmiş olduğu kolaylıklar, bunun yanında daha az eleman kullanılması ve termomekanik yaklaşımda sağladığı avantajlar nedeniyle "rebar" elemanlar kullanılmıştır.
- Analizde kullanılan teker ve jant geometrisinin modele doğru bir şekilde aktarılması gerekmektedir. Geometrideki yapılan değişiklikler özellikle topuk bölgesindeki sonuçları doğrudan etkilediği çalışılan farklı iki model sayesinde belirlenmiştir.
- Mooney-Rivlin malzeme model sabitlerine bakılarak, kauçuğun sert veya yumuşak olması gibi fiziksel özelliği hakkında yorum yapılamaz. Dolayısı ile literatürden alınan Mooney-Rivlin malzeme model sabitleri ile çalışılırken dikkat edilmelidir. Bu nedenle üzerinde çalışılan kauçuk malzemelerin mekanik özelliklerinin tam olarak belirlenmiş olması yapılan farklı uygulamalar ile belirlenmiştir.
- Pnömatik tekerde, yaklaşık 9 ila 11 birbirinden farklı fiziksel özelliğe sahip kauçuk malzeme kullanılmaktadır. Dolayısı ile sonlu elemanlar ağı kurulurken bu geçiş bölgeleri dikkate alınmalıdır. Bu nedenle kullanılan ağ yapısı bu açıdan da sonuçlara doğrudan etki etmektedir. Bu bölge geçişlerini tam temsil edebilecek bir ağ yapısı ile çalışılması durumunda, sayısal doğruluğun iyileşmesi yanında fiziksel olarak ta bölgeler arasındaki geçişlerin daha iyi değerlendirilmesi sağlanacaktır.
- Yük uygulama stratejisi, problemin lineer olmayan özellikleri nedeniyle çözümün elde edilmesi ve sonuçların yorumlanması açısından oldukça önemlidir. Çalışmada yükleme, çeşitli yüklerin farklı kombinasyonlar şeklinde uygulanırken, aynı za-

manda da yükün çeşidine göre farklı; sabit adım veya adaptif lineer olmayan denklem takım çözüm prosedürleri kullanılmıştır.

- Kullanılan "rebar" elemanlar sayesinde, teker bileşenlerinin yapıda üstlendikleri roller hakkında konstrüktif açıdan daha net bilgiler elde edilmektedir. Örneğin kuşak katmanların tekerin formunu almasını sağlayarak, temas yükünü taşıdığı kolaylıkla belirlenebilmektedir. Aynı şekilde karkas katlarında yanak bölgesinde hem şişme anında hemde temas yükü altında yanak bölgesinde iç basınç yükünü taşıdığı belirlenebilmektedir.
- Problemin üç boyutlu olması ve tam teker boyutlarında çalışıldığı için elde edilen sonuçların mevcut donanım ile istenilen şekilde düzenlenmesi büyük problem oluşturmaktadır. Bu nedenle bir veri işleme programından yararlanmak yoluyla daha güvenli ve hızlı çalışma sağlanmıştır.
- Deformasyon modülüyle elde edilen sonuçlar, literatürde mevcut benzer çalışmalarda [41-47] elde edilen sonuçlarla karşılaştırıldığında eğilim açısından uyum içindedir. Karşılaştırmada özellikle tekerin şişme analizi ve temas analizi sonrası oluşan yanak miktarları ve yarı çaptaki değişim miktarları dikkate alınmıştır.
- Düşük yük değerlerinde, ısıl açıdan tekerin topuk bölgesinin üst kısmıyla, yanak bölgesine yakın bir bölgede yüksek sıcaklık bölgesinin oluştuğu, yükün artmasıyla birlikte omuz (kuşak uçlarında) bölgesinde de ikinci bir yüksek sıcaklık bölgesinin oluştuğu belirlenmiştir.
- Artan araç hızı ile, ısı taşınım katsayılarının özellikle tekerin yanak ve taban bölgesinde değişmesiyle, teker kesitinde sıcaklıklar önemli ölçülerde artmaktadır.

## 5. ÖNERİLER

- Yüksek hızlı ve yeterli depolama alanına sahip olan bir iş istasyonu kullanılması durumunda mevcut sonlu elemanlar modellerinde jant ile topuk bölgesi temas problemi olarak çözülebilir ve bu sayede topuk bölgesinin daha hassas gerilme deformasyon mekanizması elde edilebilir.
- Kullanılan üç boyutlu katı eleman ve üç boyutlu rebar elemanların formülasyonu kartezyen koordinatlarda hazırlanmıştır. Bu elemanların formülasyonu silindirik koordinatlara aktarılarak sonuçlardaki hata miktarı azaltılabileceği gibi bu sayede sonuçların değerlendirilmesi de kolaylaşacaktır.
- Kauçuk için kullanılan Mooney-Rivlin malzeme sabitleri üzerinde çalışılan her bir karışım için ayrı ayrı belirlenerek modele aktarılması sonuçların iyileşmesini sağlayacaktır.
- Çalışma sırasında özellikle kauçuk malzemelerin termomeknaik analizler için sıcaklık bağımlı malzeme özellikleri hakkında doğrudan kullanılabilecek değerlerle karşılaşılmanmıştır. Bu nedenle bu konuda sayısal çalışmalara yardımcı olması açısından deneysel çalışmalara gereksinim vardır.
- Çalışmada kayıp enerji modeli için lineer viskoelastik yaklaşım kullanılmıştır. Lineer olmayan viskoelastik yaklaşımın kullanıldığı bir kayıp modülü kullanılarak analizler tekrarlanabilir.
- Isıl analiz için kullanılan ısı taşınım katsayıları araç tekerleri için kurulacak olan özel deney düzenekleriyle hassas bir şekilde belirlenebilir.
- Teker yol ve jant topuk temasında sürtünmelerde modele aktararak, sürtünmenin tekerin ısıl performansına etkisi incelenebilir.
- Taban bölgesinde dış profillerinin de dikkate alındığı modeller kurularak gerilme deformasyon mekanizması daha hassas şekilde belirlenebilir.

## 6. KAYNAKLAR

1. Morton, G.F. and Quinton, G.B., Tire Manufacturing Techniques, Rubber Technology and Manufacture, Edited by Blow, C.M., and Hepburn, B., Second edition, Butterworth Scientific, London, 1982
2. Gupta, N.P., Tyre Mechanics, Rubber India, 37, (1985) 41-47
3. Walter, J.D., Cord-Rubber Tire Components : Theory and Applications, Rubber Chemistry and Technology , 51, (1978) 24-576
4. Helnwein, P., Lui, C.H., Meschke, G. and Mang, H.A., A New 3-D Finite Element Model for Cord-Reinforced Rubber Composites - Application to Analysis of Automobile Tires, Finite Element in Analysis and Design, 14, (1993) 1-16
5. Ridha, R.A. and Clark, S.K., Tire Stress and Deformation, Mechanics of Pneumatic Tires, editor Clark, S.K., U.S. Department of Transportation, Washington, D.C., 1981
6. Frank, F., and Hofferberth, W., Mechanics of Pneumatic Tire, Rubber Chemistry and Technology, 40, (1967) 271-322
7. Noor, A.K., and Tanner, J.A., Advances and Trends in the Development of Computational Models for Tires, Computer and Structures, 20, 1-3 (1985) 517-533
8. Robecchi, E., and Amici, L., Mechanics of Pneumatic Tires, Tire Science and Technology, 1, (1973) 290-345
9. Ridha, R.A., Analysis for Tire Mold Design, Tire Science and Technology, 2, 3 (1974) 195-210
10. DeEskinazi, J., Yang, T.Y., and Soedel, W., Displacement and Stresses Resulting from Contact of a Steel Belted Radial Tire with a Flat Surface, Tire Science and Technology, 6, 1 (1978) 48-70
11. Kennedy, R.H., Patel, H.P., and McMinin, M.S., Radial Truck Tire Inflation Analysis : Theory and Experiment, Rubber Chemistry and Technology, 54, (1981) 751-766

12. DeEskinazi, J., and Ridha, R.A., Finite Element Analysis of Giant Earth-mover Tire, Rubber Chemistry and Technology, 55, (1982) 1044-1054
13. Trinko, M.J., Ply and Rubber Stresses and Contact Forces for a Loaded Radial Tire, Tire Science and Technology, 11, 1-4 (1984) 20-38
14. Kabe, K., Hanada, R., and Akasaka, T., Lateral Stiffness of a Radial Tire, Tire Science and Technology, 11, 6 (1984) 242-247.
15. Rothert, H., Idelberger, H., Jacobi, W., and Laging, G., On the Finite Element Solution of the Three-Dimensional Tire Contact Problem, Nuclear Engineering and Design, 78, (1984) 363-375
16. Rothert, H., Idelberger, H., Jacobi, W., and Laging, G., On the Contact Problem of Tires, Including Friction, Tire Science and Technology, 13, 2 (1985) 111-123
17. Rothert, H., and Gall, R., On the Three Dimensional Computation of Steel-Belted Tires, Tire Science and Technology, 14, 2 (1986) 116-124
18. Ridha, R.A., Satyamurthy, K., and Hirschfeld, L.R., Finite Element Modelling of a Homogeneous Pneumatic Tire Subjected to Footprint Loading, Tire Science and Technology, 13, 2 (1985) 91-110
19. Stechschulte, R.A., and Luchini, J.R., A Laminated Composite Solid Element and its Application to Tire Analysis, Tire Science and Technology, 15, 1 (1987) 42-57
20. Kenny, T.M., and Stechschulte, R.A., Application of Finite Element Analysis in Tire Design, Tire Science and Technology, 16, 2 (1988), 96-117
21. Satyamurthy, K., and Hirschfeld, An Axisymmetric Finite Element and Its Use to Examine the Effects of Construction Variables on Radial Tires, Tire Science and Technology, 15, 2 (1987) 97-112
22. Tseng, N.T., Finite Element Analysis of Freely Rotating Tires, Tire Science and Technology, 15, 2 (1987) 134-158
23. Chang, J.P., Satyamurthy, K., and Tseng, N.T., An Efficient Approach for the Three-Dimensional Finite Element Analysis of Tires, Tire Science and Technology, 16, 4 (1988) 249-273
24. Faria, L.O., Bass, J.M., Oden, J.T., and Becker, E.B., A Three Dimensional Rolling Contact Model for a Reinforced Rubber Tire, Tire Science and Technology, 17, 3 (1989) 217- 233

25. Faria, L.O., Oden, J.T., Yavari, B., Tworzydło, W.W., Bass, J.M., and Becker, E.B., Tire Modelling by Finite Elements, Tire Science and Technology, 20, 1 (1992) 33-56
26. Domscheit, A., Rothert, H., and Winkelmann, T., Refined Methods for Tire Computation, Tire Science and Technology, 17, 4 (1989) 291-304
27. Huh, H., and Kwak, K., Finite Element Stress Analysis of the Reinforced Tire Contact Problem, Computers and Structures, 36, 5 (1990) 871-881
28. Ishihara, K., Development of Three Dimensional Membrane Element for the Finite Element Analysis, Tire Science and Technology, 19, 1 (1991) 23-36
29. Noor, A.K., Tanner, J.A., and Peters, J.M., Reduced Basis Technique for Evaluating Sensivity Derivatives of the Nonlinear Response of the Space Shuttle Orbiter Nose-Gear Tire, Tire Science and Technology, 21, 4 (1993) 232-259
30. Noor, A.K., and Peters, J.M., Reduction Technique for Tire Contact Problems, Computers and Structures, 60,2 (1996) 223-233
31. Danielson, K.T., Noor, A.K., and Green, J.S., Computational Strategies for Tire Modelling and Analysis, Computers and Structures, 61, 4 (1996) 673-693
32. Wu, B., and Du, X., Finite Element Formulation of Radial Tires with Variable Constraint Conditions, Computers and Structures, 55, 5 (1995) 871-875
33. Gall, R., Tabaddor, F., Robbins, D., Majors, P. Sheperd, W. and Johnson, S., Some Notes on the Finite Element Analysis of Tires, Tire Science and Technology, 23, 3 (1995) 175-188
34. I'Anson, R., Pena, J., Postic, R., and Barret, J-P., Finite Element Analysis Applied to Radial Aircraft Tyre Engineering, Proc. Instn. Mechanical Engineers, 210, (1996) 109-116
35. Meschke, G., Payer, H.J. and Mang, H.A., 3D Simulation of Automobile Tires: Material Modeling, Mesh Generation, and Solution Strategies, Tire Science and Technology, 25, 3 (1997) 232-259
36. Trivisonno, N.M., Nonsteady-State Thermal Analysis of a Rolling Aircraft Tire, SAE, 720871, (1972) 2615-2620
37. Segalman, D.J., Modeling Tire Energy Dissipation for Power Loss Calculations, SAE, 810162, (1981) 673-682

38. Browne, A.L., Modeling the Thermal State of Tires for Power Loss Calculations, SAE, 810163, (1981) 683-694
39. Whicker D., Browne, A.L. and Segelman D.J., The Structure and Use of The GMR Combined Thermo-Mechanical Tire Power Loss Model, SAE, 810164, (1981) 695-704
40. Clark, S.K., and Dodge, R.A., Heat Generation in Aircraft Tires, Computers and Structures, 20, 1-3 (1985) 535-544
41. Clark, J.D. and Schuring, D.J., Load, Speed and Inflation Pressure Effects on Rolling Loss Distribution in Automobile Tires, Tire Science and Technology, 16, 2 (1988) 78-95
42. Yavari, B., Tworzydło, W.W. and Bass, J.M., A Thermomechanical Model to Predict the Distribution of Steady State Rolling Tires, Tire Science and Technology, 21, 3 (1993) 163-178
43. Oh, B.S., Kim, N.J., Moon, H.Y. and Park, H.W., Internal Temperature Distribution in a Rolling Tire, Tire Science and Technology, 23, 1 (1995) 11-25
44. Allen, J.M., Cuitino, A.M. and Sernas, V., Numerical Investigation of the Deformation Characteristics and Heat Generation in Pneumatic Aircraft Tires Part I Mechanical Modeling, Finite Element in Analysis and Design, 23, (1996) 241-263
45. Allen, J.M., Cuitino, A.M. and Sernas, V., Numerical Investigation of the Deformation Characteristics and Heat Generation in Pneumatic Aircraft Tires Part II Thermal Modeling, Finite Element in Analysis and Design, 23, (1996) 241-263
46. Park, H.C., Youn, S.K., Song, T.S. and Kim, N.J., Analysis of Temperature Distribution in a Rolling Tire Due to Strain Energy Dissipation, Tire Science and Technology, 25, 3 (1997) 11-25
47. Becker, A. Dorsch, V. Kaliske, M. and Rothert, H., A Material Model for Simulating the Hysteretic Behaviour of Filled Rubber for Rolling Tires, Tire Science and Technology, 26, 3 (1998) 132-148
48. Ogden, R.W., Elastic Deformation of Rubberlike Solids, Mechanics of Solids: The Rodney Hill 60th Anniversary Volume, ed. Hopkins, H.G. and Sewell, M.J., Pergamon Press, 1982
49. Arridge, R.G.C., An Introduction to Polymer Mechanics, First edition, Taylor & Francis Ltd., London, 1985

50. McCorum, N.G., Buckley, C.P. and Bucknall, C.B., Principles of Polymer Engineering, First edition, Oxford University Press, 1991
51. Rivlin, R.S., Large Elastic Deformations of Isotropic Materials, VI. Further Developments of the General Theory, Phil. Trans. Royal Society, 241, (1948) 379-397
52. Rivlin, R.S., Large Elastic Deformations of Isotropic Materials, VI. Further Results in the Theory of Torsion, Shear and Flexure, Phil. Trans. Royal Society, 242, (1949) 173-195
53. Rivlin, R.S., and Saunders, D.W., Large Elastic Deformations of Isotropic Materials, VII Experiments on the Deformation of Rubber, Phil. Trans. Royal Society, 243, (1951) 251-288
54. Fung, Y.C., Foundations of Solid Mechanics, First edition, Prentice-Hall Inc, Englewood Cliffs, 1965
55. Oden, J.T., Finite Elements of Nonlinear Continue, First edition, McGraw-Hill Book Company, New York, 1972
56. Ogden, R.W., Nonlinear Elastic Deformation, First edition, Ellis Horwood Limited, New York, 1984
57. Şuhubi, E.S., Sürekli Ortamlar Mekaniği, Birinci baskı, T.C. İstanbul Teknik Üniversitesi Rektörlüğü Yayın no: 1530, İstanbul, 1993
58. Treloar, L.R.G., The Mechanics of Rubber Elasticity, Journal of Polymer Science, 48, (1974) 107-123
59. Mooney, M., A Theory of Large Elastic Deformation, Journal of Applied Physics, 11, (1940) 582-592
60. Valanis, K.C., and Landel, R.F., The Strain Energy Function of a Hyperelastic Elastic Material in Terms of the Extension Ratios, Journal of Applied Physics, 38 (1967) 2997- 3002
61. Valanis, K.C., and Landel, R.F., Large Multi-Axial Deformation Behaviour of a Filled Rubber, Trans. Society of Rheology, 11, (1967) 243-256
62. Zhong, Z.H., Finite Element Procedures, Contact - Impact Problems, Oxford Science Publications, 1993
63. Bathe, K.J., Finite Element Procedures, Second edition, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1996
64. Jones, R.M., Mechanics of Composite Materials, First edition, Hemisphere publishing corporation, New York, 1975

65. Clark, S.K., Nonlinear Characteristics of Cord Rubber Composites, Society of Automotive Engineers, Paper No: 860814, 4 (1987) 230-237
66. Leknitski, S.G., Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body, First edition, Holden Day Inc., San Francisco, 1963
67. Tsai, S.W., Composites Design 1986, First edition, Think Composites, Dayton - Ohio, 1986
68. Ogden, R.W., Large Deformation Isotropic Elasticity - On the Correlation of Theory and Experiment for Incompressible Rubberlike Solids, Proc. Royal Soc. London, 326, (1972) 565-584
69. Ogden, R.W., Large Deformation Isotropic Elasticity - On the Correlation of Theory and Experiment for Compressible Rubberlike Solids, Proc. Royal Soc. London, 328, (1972) 567-583
70. Swanson, S.R., A Constitutive Model for High Elongation Elastic Solids, Transaction of ASME, Journal of Engineering Materials and Technology, 107, (1985) 110-114
71. Swanson, S.R., Large Deformation Finite Element Calculations for Slightly Compressible Hyperelastic Materials, Computers and Structures, 21, 1/2 (1985) 81-88
72. Eringen, A.C., Mechanics of Continua, First edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1967
73. Akasaka, T., Katoh, M., Nihei, S., and Hiraiwa, M., Two-Dimensional Contact Pressure Distribution of a Radial Tire, Tire Science and Technology, 18, 2 (1990) 80-103
74. Kaga, H., Okamoto, K., and Toxawa, Y., Internal Stress Analysis of the Tire under Vertical Loads Using Finite Element Method, Tire Science and Technology, 5, 1 (1977) 102- 118
75. Sarkar, K., Kwon, Y.D., and Prevorsek, D.C., A New Approach for the Thermomechanical Analysis of Tires by the Finite Element Method, Tire Science and Technology, 15, 4 (1987) 261-275
76. Schuring, D.J., and Clark, J.D., Load, Speed and Pressure Effects on Passenger Car Tire Rolling Loss Distribution, Rubber Chemistry and Technology, 61, (1987) 669-686
77. Watanabe, Y., and Kaldijan, M.J., Modelling and Analysis of Bias-Ply Motorcycle Tires, Computers and Structures, 17, 5-6 (1983) 653-658

78. Danielson, K.T., and Noor, A.K., Finite Elements Developed in Cylindrical Coordinates for Three-Dimensional Tire Analysis, Tire Science and Technology, 25, 1 (1997) 2-28
79. Ridha, R.A., Computation of Stresses, Strains and Deformation of Tires, Rubber Chemistry and Technology, 53, (1980) 849-902
80. Akasaka, T., Structural Mechanics of Radial Tires, Rubber Chemistry and Technology, 54 (1981) 461-494.
81. Brewer, H.K. Prediction of Tire Stresses, and Deformation from Composite Theory, Tire Science and Technology, 1, 1(1973) 47-76
82. Tabaddor, F. and Stafford, J.R., Some Aspects of Rubber Composite Finite Element Analysis, Computers and Structures, 21, 1/2 (1985) 327-339
83. Ridha, R.A. and Clark, S.K., Tire Stress and Deformation, Mechanics of Pneumatic Tires, editor Clark, S.K., U.S. Department of Transportation, Washington, D.C., 1981
84. Ashton, J.E., Halpin, J.C., Petit, P.H., Primer on Composite Materials: Analysis Progress in Materials Science series, First edition, Technomic Publication, Westport, 1969
85. Kao, B.G., and Razgunas, L. On the Determination of strain Energy Functions of Rubbers, Society of Automotive Engineers, Paper no: 860816, (1987), 247-256
86. Wineman, A., Some Modelling Considerations for Rubber-Like Materials in the Development of Software for Computer-Aided Design, Society of Automotive Engineers, Paper no: 860812, (1987), 213-219
87. Yeoh, O.H., Some Forms of the Strain Energy Function for Rubber, Rubber Chemistry and Technology, 66, (1993) 754-771
88. Chow, C.L., and Cundiff, C.H., On the Characterization of Mechanical Properties of Rubber Vulcanizates, Tire Science and Technology, 15, 2 (1987) 73-96
89. Sarkar, A., Dutta, D., Bhowmick, A.K., and Majumdar, S., Analysis of Nonlinear Stress-Strain Relationship of Large Elastic Deformation of Rubber and Studies on Rubber-Rubber Composites, Rubber Chemistry and Technology, 64 (1991) 696-707
90. Erdener, M., İç basınç ve araç yükü altında çalışan pünomatik tekerlerin Doğrusal olmayan Sonlu Elemanlar Yöntemiyle Analizi, Doktora Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2000

## ÖZGEÇMİŞ

1969 yılında Artvin, Arhavi 'de doğmuşum. İlk ve orta eğitimimi Ankara 'ya bağlı Sarıyar Kasabasında, lise eğitimimi Kütahya 'da Kütahya Lisesinde tamamladım. 1988 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Makina Mühendiliği Bölümüne girdim. 1992 yılında bölüm birincisi olarak mezun oldum. Aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Makina Mühendisliği Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans Eğitimine Başladım. 1993 yılında Sürmene Yabancı Dil Hazırlık Okulunda İngilizce hazırlığı bitirdim. Aynı yıl KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsünde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladım. Yüksek Lisans eğitimimi 1995 yılında tamamladıktan sonra aynı bölümde doktora çalışmama başladım. 2001 yılı Mart ayında Trabzon Meslek Yüksek Okulu Makine programına Öğretim Görevlisi olarak atandım ve aynı yıl Eylül ayında bu görevden ayrıldım. Halen özel bir şirkette Araştırma Geliştirme Mühendisi olarak çalışmaktayım.