

POTANSİYEL TEORİ

Engin BOZKURT

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MAYIS 2007

ANKARA

Engin BOZKURT tarafından hazırlanan POTANSİYEL TEORİ adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof.Dr.İbrahim Ethem ANAR
Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof.Dr.Abdullah ALTIN.

Üye : Prof.Dr.İbrahim Ethem ANAR.

Üye : Prof.Dr.Baki İrfan YAŞAR.

Üye : Yrd.Doç.Adil MISIR.

Üye : Yrd.Doç.Fatma AYAZ.

Tarih : 22/05/2007

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Engin BOZKURT

POTANSİYEL TEORİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Engin BOZKURT

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Mayıs 2007

ÖZET

Bu tez çalışmasında ters saçılma problemi ve transmission problemi incelendi. Transmission sınır koşullu ters saçılma probleminin çözümünün tekliği gösterildi.

Bilim Kodu : 204.1.138

Anahtar Kelimeler :Saçılma problemi,transmission problemi

Sayfa Adedi : 47

Tez Yöneticisi : Prof. Dr. İbrahim Ethem ANAR

POTENTIAL THEORY**(M.Sc. Thesis)****Engin BOZKURT****GAZİ UNİVERSİTY****INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY****May 2007****ABSTRACT**

In this thesis, the inverse scattering problem and transmission problem have examined. The uniqueness of solution of the inverse scattering problem with the transmission problem boundary conditions is showed.

Science Code	: 204.1.138
Key Words	: Scattering problem, transmission problem
Page Number	: 47
Adviser	: Prof. Dr. İbrahim Ethem ANAR

TEŞEKKÜR

Çalışmalarında beni yönlendiren hocam Prof. Dr. İbrahim Ethem ANAR'a, yardımlarını esirgemeyen hocam Yrd. Doç. Ülkü Ateş DİNLEMEZ'e, manevi destekleriyle bana güç veren aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
1. GİRİŞ	1
2. TANIMLAR VE TEOREMLER	13
2.1. Helmholtz Denklemleri ve Çözümleri	13
2.2. Sobolev Uzayı	30
3. TERS PROBLEM	33
3.1. Ters problem	33
3.2. Teklik	40
KAYNAKLAR	45
ÖZGEÇMİŞ	47

1. GİRİŞ

Ses Dalgası

Saçılım teorisi matematiksel fizikte 20. yy da önemli konulardan biri oldu. Gerçekten saçılım teorisi Rayleigh'in "Gökyüzü neden mavi?" açıklamasına, Rutherford'un atom çekirdeğini keşfine, modern tıp uygulamalarına meydan okuyarak bilim adamlarını ve matematikçileri yaklaşık bir yüzyıldır cezbetti, şaşırttı ve zihinlerini karıştırdı[1].

Homogen olmayan ortamda yayılan ses dalgaları için fiziksel bazı bilgiler şöyle vrile bilir:

$\mathbb{R}^3$ de akışkanlar dinamiğindeki problemlerle ortaya çıkan, küçük genlikli ses dalgalarının yayılmasını göz önüne alalım. $V(x,t), x \in \mathbb{R}^3$ noktasındaki akışkan parçacığın t zamanındaki hız vektörü olsun. Akışkanın basıncı , yoğunluğunu ve spesifik entropi sırasıyla $p = p(x,t)$, $\rho = \rho(x,t)$ ve $S = S(x,t)$ ile gösterelim. Akışkan üzerine bir dış kuvvet etki etmiyor ise o zaman akışkan hareketi aşağıdaki denklemlerle ifade edilir.;

Akışkan hareketi (momentum korunum denklemi)

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \text{grad})V + \frac{1}{\rho} \text{grad}p = 0 \quad (1.1)$$

Euler denklemi ile ifade edilir. Bu denklemde damping (sönüm) katsayısı $\gamma = 0$ varsayılmıştır.

Süreklilik denklemi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho V) = 0 \quad (1.2)$$

Durum denklemi

$$p = f(\rho, S) \quad (1.3)$$

burada f akışkanının tabiatına bağlı bir fonksiyondur.

Adiabatic hipotez denklemi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + V \cdot \text{grad} S = 0 \quad (1.4)$$

Bu denklemler V, ρ, p ve S bilinmeyenlerine göre lineer değildir. $V(x, t)$, $p(x, t)$, $\rho(x, t)$ ve $S(x, t)$ nin küçük olduğunu kabul edelim ve bunların $V = V_0 = 0$, $p = p_0 = \text{sabit}$, $\rho = \rho(x_0)$, $S = S(x_0)$, $p_0 = (\rho_0, S_0)$ statik durumda (değerleri komşuluğunda), tedirgin (perturbe) edildiğinde aşağıdaki açılımları,

$$\begin{aligned} V(x, t) &= \varepsilon V_1(x, t) + \dots \\ p(x, t) &= p_0 + \varepsilon p_1(x, t) + \dots \\ \rho(x, t) &= \rho_0(x) + \varepsilon \rho_1(x, t) + \dots \\ S(x, t) &= S_0(x) + \varepsilon S_1(x, t) + \dots \end{aligned} \quad (1.5)$$

yazabiliriz; burada $0 < \varepsilon < 1$ ve noktalar ε na göre yüksek merkezden terimleri ifade eder. Bu açılımları (sadece ε lu terime kadar) önceki denklemlerde yerine yazarsak

1.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon V_1) + (\varepsilon V_1 \nabla)(\varepsilon V_1) + \frac{1}{\rho_0 + \varepsilon \rho_1} \nabla(\rho_0 + \varepsilon \rho_1) &= 0 \\ \varepsilon \frac{\partial V_1}{\partial t} + \varepsilon^2 (V_1 \nabla) V_1 + \frac{1}{\rho_0 + \varepsilon \rho_1} \nabla(\varepsilon \rho_1) &= 0 \\ \varepsilon \left[\frac{\partial V_1}{\partial t} + \varepsilon (V_1 \nabla) V_1 + \frac{1}{\rho_0 + \varepsilon \rho_1} \nabla \rho_1 \right] &= 0 \\ \frac{\partial V_1}{\partial t} + \varepsilon (V_1 \nabla) V_1 + \frac{1}{\rho_0 + \varepsilon \rho_1} \nabla \rho_1 &= 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

olur. $\varepsilon \rightarrow 0$ sıfıra gittiğinde

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0(x)} \nabla \rho_1(x, t) = 0$$

denklemini elde edilir.

2.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \varepsilon \rho_1) + \nabla[(\rho_0 + \varepsilon \rho_1)(\varepsilon V_1)] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_0 + \varepsilon \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla(\varepsilon \rho_0 V_1 + \varepsilon^2 \rho_1 V_1) = 0$$

$$\varepsilon \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \varepsilon \nabla(\rho_0 V_1) + \varepsilon^2 \nabla(\rho_1 V_1) = 0$$

$$\varepsilon \left[\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla(\rho_0 V_1) + \varepsilon \nabla(\rho_1 V_1) \right] = 0$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla(\rho_0 V_1) + \varepsilon \nabla(\rho_1 V_1) = 0$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ için

$$\frac{\partial \rho_1(x, t)}{\partial t} + \nabla(\rho_0(x) V_1(x, t)) = 0 \quad (1.7)$$

olur.

3.

$$p(x, t) = f(\rho(x, t), S(x, t)), \quad p_0 = f(p_0, S_0)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} \bigg|_{\rho=\rho_0+\varepsilon\rho_1} = \left(\frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial t} \right) \bigg|_{\substack{\rho=\rho_0+\varepsilon\rho_0 \\ S=S_0+\varepsilon S_1}}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}(p_0 + \varepsilon p_1) = \left[\frac{\partial}{\partial \rho} f(\rho_0 + \varepsilon \rho_1, S_0 + \varepsilon S_1) \right] \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \varepsilon \rho_1)$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial S} f(\rho_0 + \varepsilon \rho_1, S_0 + \varepsilon S_1) \right] \frac{\partial}{\partial t}(S_0 + \varepsilon S_1)$$

$$\varepsilon \frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \rho} f(\rho_0 + \varepsilon \rho_1, S_0 + \varepsilon S_1) \varepsilon \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial S} f(\rho_0 + \varepsilon \rho_1, S_0 + \varepsilon S_1) \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial t}$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ için limit alınır

$$\frac{\partial p_1(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \rho} f(\rho_0(x), S_0(x)) \frac{\partial \rho_1(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial S} f(\rho_0(x), S_0(x)) \frac{\partial S_1(x,t)}{\partial t}$$

veya ses hızı c ,

$$c^2(x) = \frac{\partial}{\partial \rho} f(\rho_0(x), S_0(x))$$

ile tanımlanırsa

$$\frac{\partial p_1(x,t)}{\partial t} = c^2(x) \frac{\partial \rho_1(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial S} f(\rho_0(x), S_0(x)) \frac{\partial S_1(x,t)}{\partial t} \quad (1.8)$$

Diğer yandan,

$$\begin{aligned} \nabla p_0 &= \nabla f(\rho_0(x, t), S_0(x, t)) \\ 0 &= \frac{\partial f(\rho_0, S_0)}{\partial \rho} \nabla \rho_0 + \frac{\partial f(\rho_0, S_0)}{\partial S} \nabla S_0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

yazılabilir. Eş.1.4 denklemi Eş.1.5 açılımlarıyla

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} + V_1 \nabla S_0 = 0 \quad (1.10)$$

olur. Son iki denklemden

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} = -V_1 \nabla S_0, \quad \frac{\partial f(\rho_0, S_0)}{\partial S} \nabla S_0 = -\frac{\partial f(\rho_0, S_0)}{\partial \rho} \nabla \rho_0$$

değerleri Eş.1.8' de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p_1(x,t)}{\partial t} &= c^2(x) \frac{\partial \rho_1(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial f(\rho_0, S_0)}{\partial S} (-V_1 \nabla S_0) \\
&= c^2(x) \frac{\partial \rho_1(x,t)}{\partial t} - V_1(x,t) \frac{\partial f(\rho_0, S_0)}{\partial S} \nabla S_0 \\
&= c^2(x) \frac{\partial \rho_1(x,t)}{\partial t} + c^2(x) V_1(x,t) \nabla \rho_0(x)
\end{aligned}$$

veya

$$\frac{\partial p_1(x,t)}{\partial t} = c^2(x) \left[\frac{\partial \rho_1(x,t)}{\partial t} + V_1(x,t) \nabla \rho_0(x) \right] \quad (1.11)$$

elde edilir. Şimdi son denklemi t' ye göre türetelim

$$\frac{\partial^2 p_1(x,t)}{\partial t^2} = c^2(x) \left[\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} + \frac{\partial V_1}{\partial t} \nabla \rho_0(x) + V_1 \left(\nabla \frac{\partial \rho_0(x)}{\partial t} \right) \right] \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial^2 p_1(x,t)}{\partial t^2} = c^2(x) \left[\frac{\partial^2 \rho_1(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial V_1(x,t)}{\partial t} \nabla \rho_0(x) \right]$$

olur. Eş.1.7 t' ye göre türetilirse

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \rho_1(x,t)}{\partial t} + \nabla [\rho_0(x) V_1(x,t)] \right) &= 0 \\
\frac{\partial^2 \rho_1(x,t)}{\partial t^2} &= -\nabla \left[\rho_0(x) \frac{\partial V_1(x,t)}{\partial t} + V_1(x,t) \frac{\partial \rho_0(x)}{\partial t} \right] \\
&= -\nabla \left[\rho_0(x) \frac{\partial V_1(x,t)}{\partial t} \right] \quad (1.13)
\end{aligned}$$

de

$$\frac{\partial V_1(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0(x)} \nabla p_1(x,t)$$

yi kullanırsak

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \rho_1(x, t)}{\partial t} &= -\nabla \left[\rho_0(x) \left(-\frac{1}{\rho_0(x)} \nabla \rho_1(x, t) \right) \right] \\
\frac{\partial^2 \rho_1(x, t)}{\partial t} &= \nabla^2 p_1(x, t)
\end{aligned} \tag{1.14}$$

olur.

Böylece

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 p_1(x, t)}{\partial t} &= c^2(x) \left[\nabla^2 p_1(x, t) + \frac{\partial V_1(x, t)}{\partial t} \nabla \rho_0 \right] \\
&= c^2(x) \left[\nabla^2 p_1(x, t) - \frac{1}{\rho_0(x)} \nabla p_1(x, t) \nabla \rho_0 \right] \\
\frac{\partial^2 \rho_1(x, t)}{\partial t} &= c^2(x) \rho_0(x) \nabla \left[\frac{1}{\rho_0(x)} \nabla \rho_1(x, t) \right]
\end{aligned} \tag{1.15}$$

elde edilir.

Eğer $p_1(x, t)$ zaman harmonik ise yani

$$\rho_1(x, t) = \text{Re} \left\{ u(x) e^{-i\omega t} \right\} = u(x) \cos \omega t \tag{1.16}$$

biçiminde ise son denklem, ω –frekans olmak üzere,

$$\begin{aligned}
u(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \cos \omega t &= c^2(x) \rho_0(x) \nabla \left[\frac{1}{\rho_0(x)} \nabla u(x) \cos \omega t \right] \\
&= c^2(x) \rho_0(x) \cos \omega t \nabla \left[\frac{1}{\rho_0(x)} \nabla u(x) \right] \\
&= c^2(x) \cos \omega t \rho_0(x) \left[\frac{\rho_0(x) \nabla^2 u(x) - \nabla \rho_0(x) \nabla u}{\rho_0^2(x)} \right]
\end{aligned}$$

veya değişkenlerine ayrılmış hali

$$\frac{\frac{\partial^2}{\partial t^2} Coswt}{Coswt} = \frac{c^2(x) \left[\nabla^2 u(x) - \frac{1}{\rho_0(x)} \nabla \rho_0(x) \nabla u(x) \right]}{u(x)} = -\omega^2$$

olur. $-\omega^2$ ayırma sabitidir. Böylece

$$\frac{\partial^2 Coswt}{\partial t^2} + \omega^2 Coswt = 0 \quad (1.17)$$

$$\nabla^2 u(x) + \frac{\omega^2}{c^2(x)} u(x) = \frac{1}{\rho_0(x)} \nabla \rho_0(x) \nabla u(x) \quad (1.18)$$

denklemleri elde edilir. Son denklem, küçük genlikli zaman harmonik akustik dalgaların homogen olmayan bir ortamda yayılmasını belirtir.

Serbest uzayda yayılma durum denkleminin ρ yoğunluğuna göre türevinin (ρ_0, S_0) daki değeri $c(x) = c_0$ sabittir. Dalga sayısını ve kırılma indeksini sırasıyla

$$k = \frac{\omega}{c_0} > 0 \text{ ve } n(x) = \frac{c_0^2}{[c(x)]^2} \quad (1.19)$$

ile tanımlayalım.

Bu değerlerde Eş.1.18 denklemi

$$\nabla^2 u(x) + k^2 n(x) u(x) = \frac{1}{\rho_0(x)} \nabla \rho_0(x) \nabla u(x) \quad (1.20)$$

olur.

Damping katsayısı $\gamma \neq 0$ ise o zaman Euler denklemi;

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla) V + \gamma V + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \quad (1.21)$$

olur. Eş.1.5 açılımları ile Eş.1.21 denklemi

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + \gamma V_1 + \frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 = 0 \quad (1.22)$$

olur.

Eş.1.12 de

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial \rho_1^2}{\partial t^2} + \frac{\partial V_1}{\partial t} \nabla \rho_0 \right)$$

denkleminde $\frac{\partial V_1}{\partial t} = -\gamma V_1 - \frac{1}{\rho_0} \nabla p_1$ değeri ve

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} = -\nabla \left(\rho_0 \frac{\partial V_1}{\partial t} \right) = \gamma \nabla (\rho_0 V_1) + \nabla^2 p_1$$

yerine yazılırsa

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = c^2 \left[\underbrace{\gamma \nabla (\rho_0 V_1)}_{= -\frac{\partial \rho_1}{\partial t}} + \nabla^2 p_1 + \nabla \rho_0 \left(-\gamma V_1 - \frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 \right) \right]$$

olur; veya

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = c^2 \left[-\gamma \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla^2 p_1 - \gamma V_1 \nabla \rho_0 - \frac{1}{\rho_0} \nabla \rho_0 \nabla p_1 \right]$$

olur. Son denklemde $\frac{\partial \rho_1}{\partial t}$ yerine

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + V_1 \nabla \rho_0 \right) \Rightarrow \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial p_1}{\partial t} - c^2 V_1 \nabla \rho_0 \right)$$

konulursa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} &= c^2 \left[-\frac{\gamma}{c^2} \left(\frac{\partial p_1}{\partial t} - c^2 V_1 \nabla \rho_0 \right) + \nabla^2 p_1 - \gamma V_1 \nabla \rho_0 - \frac{1}{\rho_0} \nabla \rho_0 \nabla p_1 \right] \\ \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} &= -\gamma \frac{\partial p_1}{\partial t} + c^2 \left(\nabla^2 p_1 - \frac{1}{\rho_0} \nabla \rho_0 \nabla p_1 \right) \end{aligned}$$

veya

$$\frac{\partial^2 p_1(x,t)}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial p_1(x,t)}{\partial t} = c^2(x) \rho_0(x) \nabla \left[\frac{1}{\rho_0(x)} \nabla p_1(x,t) \right] \quad (1.23)$$

elde edilir. $p_1(x,t)$ zaman harmonik ise yani;

$$p_1(x,t) = \text{Re} \{ u(x) e^{-i\omega t} \}, \quad \omega - \text{frekans}$$

ise o zaman Eş.1.23 denklemi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \text{Cos} \omega t}{\partial t^2} + \omega^2 \text{Cos} \omega t &= 0 \\ \nabla^2 u(x) + \frac{\omega^2}{[c(x)]^2} \left(1 + i \frac{\gamma}{\omega} \right) u(x) &= \frac{1}{\rho_0(x)} \nabla \rho_0(x) \nabla u(x) \end{aligned} \quad (1.24)$$

denklemleri elde edilir. Dalga sayısı ve kırılma indeksi sırasıyla

$$k = \frac{\omega}{c_0} > 0 \quad \text{ve} \quad n(x) = \frac{c_0^2}{[c(x)]^2} \left(1 + i \frac{\gamma}{\omega} \right)$$

ile tanımlayalım. Eş.1.24 denklemi

$$\nabla^2 u(x) + k^2 n(x) u(x) = \frac{1}{\rho_0(x)} \nabla \rho_0(x) = \frac{1}{\rho_0(x)} \nabla \rho_0(x) \nabla u(x) \quad (1.25)$$

olur. Burada $n(x)$ kompleks değerli bir fonksiyondur ve

$$\operatorname{Re}(n(x)) \geq 0 \quad \text{ve} \quad \operatorname{Im}(n(x)) \geq 0$$

dır. Eş.1.25 denklemi $\mathbb{R}^3$ deki her serbest kaynak bölgesinde sağlanır. Biz bu çalışmada $\gamma = 0$ kabul edeceğiz.

Eş.1.25 denklemi $\mathbb{R}^3$ deki her serbest kaynak bölgesinde sağlanır. Kabul edelim ki $|x| \geq a$ için $c(x) = c_0$ yani $|x| \geq a$ için $n(x) = 1$ olacak biçimde $a > 0$ sayısı mevcut olsun. Bunun anlamı, homogen olmayan,

$$\beta = \{x \in \mathbb{R}^3 : n(x) \neq 1\} \quad (1.26)$$

Ortamin (bölgenin), a yarıçaplı $K(0, a) = \{y \in \mathbb{R}^3 : |y| < a\}$ yuvarının içinde yatmasıdır. $K(0, a)$ nın kapanışı, $K[0, a] = \{y \in \mathbb{R}^3 : |y| \leq a\}$ olur. Ek olarak kaynağın $K[0, a]$ yuvarının dışında olduğunu kabul edelim. Bu kaynaklar, u^s gelen dalgayı veya olay dalgayı üretir; öyleki u^s ler $K[0, a]$ yuvarının içinde,

$$\Delta u^i + k^2 u^i = 0 \quad (1.27)$$

Helmholtz denklemini sağlar. Biz u^s yi noktasal kaynak veya düzlem dalga olarak alacağız; yani, zamana bağımlı olay (incident) dalga, kaynak z de ise

$$p_1^i(x, t) = \frac{1}{|x-z|} \operatorname{Re} e^{ik|x-z|-i\omega t} \quad \text{yani} \quad u^i(x) = \frac{e^{ik|x-z|}}{|x-z|}, |z| > a \quad (1.28)$$

veya $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^3$ birim vektör olmak üzere,

$$p_1^i(x, t) = \operatorname{Re} e^{ik\hat{\theta}x-i\omega t} \quad \text{yani} \quad u^i(x) = e^{ik\hat{\theta}x} \quad (1.29)$$

olarak alacağız.

Her durumda $K[0, a]$ yuvarının içinde $u^i, \Delta u^i + k^2 u^i = 0$ Helmholtz denkleminin bir çözümüdür. Eş.1.24 denklemleriyle tanımlanan $p_1^i(x, t)$ bir küresel dalgayı tanımlar öyle ki küresel dalga, kaynaktan c_0 hızıyla uzaklaşır.

İkinci durumda yani Eş.1.29' de tanımlanan $p_1^i(x, t)$ bir düzlemsel dalgadır. Öyleki $\hat{\theta}$ doğrultusunda c_0 hızıyla yayılır.

Olay (incident) dalga, $n(x)$ kırılma indeksiyle tanımlanan homogen olmayan ortamda, u^s saçılan (scattered wave) dalgayı üretir.

$$u = u^i + u^s$$

toplam alanı, kaynağın dışında,

$$\Delta u(x) + k^2 n(x) u(x) = \frac{1}{\rho_0(x)} \nabla \rho_0(x) \nabla u(x) \quad (1.30)$$

denklemini sağlar. Biz u^s saçılan dalganın homojen olmayan B ortamından, bir küresel dalga olarak uzaklaştığını beklemeliyiz. Bu nedenle u^s , düzgün olarak her doğrultuda

$$\frac{x}{|x|} \in S = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$$

için $r = |x|$ olmak üzere

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u^s}{\partial t} - iku^s \right) = 0 \quad (1.31)$$

Sommerfeld yayılma koşulunu sağlar[1].

Şimdi,direkt ve ters(inverse) saçılma problemlerini tanımlayalım.

Direkt saçılma problemi; $k > 0$ dalga sayısı, $n(x)$ kırılma indeksi ($|x| \geq a$ için $n(x)=1$ sağlayan) ve u^i olay dalga verilsin. Kaynak alanın dışında, Eş.1.30 denklemini sağlayan $u = u^i + u^s$ toplam alanı, öyle ki , $u^s = u - u^i$ saçılan alan Eş.1.31 yayılma koşulunu sağlamak üzere; belirme problemine direkt saçılma problemi denir.

Ters saçılma problemi; $B(a,r)$ yuvarının dışında, çok sayıda farklı u^i olay dalga ve (veya) farklı k dalga sayılarına karşılık gelen $u = u^i + u^s$ toplam alanın değerlerinden(veya ölçümlerinden) $n(x)$ kırılma indeksinin belirmesine ters saçılma problemi denir.

Bu çalışmada yukarıda tanımladığımız ters saçılma problemi ile verilen transmission denklemleri sınır şartları için aynı far fieldde patterne sahip çözümleri için iç dalga sayısının tekliği gösterilirken ikinci bölümde gerekli tanımlar ve teoremler ile ispatları verildi. Üçüncü bölümde ters saçılma problemi ile verilen transmission denklemleri kurularak çözümler için verilen far field patterlerden faydalanarak C^2 sınıfından bir bölgede verilen ters problemi ve transmission sınır şartları için içdalga sayısının tekliği gösterildi. Çalışmamıza temel olarak [1] ve [14] alınmıştır.

2.TANIMLAR VE TEOREMLER

2.1 .Helmholtz Denklemi ve Çözümleri

$\Delta u + k^2 u = 0$ Helmholtz denklemi ile pozitif dalga sabiti k için bazı temel çözümlerin özetiyle başlayalım.

$$\phi(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}, x \neq y \quad (2.1)$$

temel çözümden bunların çoğu çıkarılabilir. Kolaylıkla türev alınarak gösterilebilir ki sabit $y \in \mathbb{R}^3$ için temel çözüm $\mathbb{R}^3 \setminus \{y\}$ de Helmholtz denklemini sağlar.

$D \subset \mathbb{R}^3$ açık bağlantılı bir bölgeye C^k sınıftandır denir; eğer $k \in \mathbb{N}$ için ∂D nin herhangi bir z noktası için z nin bir V_z komşuluğu ile birlikte $V_z \cap \bar{D}$ den $\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1, x_3 \geq 0\}$ yarım küresine birebir ve örten bir dönüşüm ve tersi k kere sürekli türevlenebilir ve $V_z \cap \partial \bar{D}$ kümesi $\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1, x_3 = 0\}$ diskinde dönüşürse. D bölgesinin C^k sınıfından denildiğinde ∂D sınırının C^k sınıfından olması anlaşılacaktır. $C^k(D)$ ile D de biz reel veya kompleks değerli k kere sürekli türevlenebilen fonksiyonların lineer uzayını gösterelim. $C^k(\bar{D})$ ile $C^k(D)$ ile sürekli k mertebeden türevlerini $\bar{D}$ kapanışa taşınabilenleri gösterelim.

Helmholtz denklemi çalışırken temel bir ihtiyaç Green integral teoremleridir. D sınırlı C^1 sınıfından ve $\nu = \partial D$ sınırının D nin dışına yönlendirilmiş birim normali olsun. $u \in C^1(\bar{D})$ ve $v \in C^2(\bar{D})$ için Birinci Green teoremi,

$$\int_D \{u \Delta v + \text{gradu} \cdot \text{grad} v\} dx = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial \nu} ds, \quad (2.2)$$

ve $u, v \in C^2(\bar{D})$ için ikinci Green Teoremi

$$\int_D \{u \Delta v - v \Delta u\} dx = \int_{\partial D} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) ds, \quad (2.3)$$

ile verilir.

$\mathbb{R}^3$ veya $\mathbb{C}^3$ için $a = (a_1, a_2, a_3)$ ve $b = (b_1, b_2, b_3)$ vektörleri için $a.b := a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ ile bilineer skaler çarpım ve $|a| := \sqrt{a.a}$ ile Euclid normunu gösterelim. Bizim kabul ettiğimiz şartlar Green teoremleri için zayıftır.

2.1 Teorem:

D , C^2 sınıfından sınırlı bir bölge, ν D nin sınırı ∂D nin birim dış normali olsun.

$u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ olan bir fonksiyon, normal doğrultusundaki türevi olan limit

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \nu(x) \text{grad}(u - h\nu(x)), x \in \partial D$$

∂D de düzgün olsun. Buradan Green formülü ile

$$\begin{aligned} u(x) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \phi(x, y) - u(y) \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y) \\ - \int_D \{ \Delta u(y) + k^2 u(y) \} \phi(x, y) dy, x \in D \end{aligned} \quad (2.4)$$

dir, burada hacim integrali belirli integraldir. Özel olarak u , D de

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

Helmholtz denkleminin bir çözümü ise bu durumda

$$u(x) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \phi(x, y) - u(y) \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y), x \in D \quad (2.5)$$

İspat

Öncelikle $u \in C^2(D)$ olduğunu kabul edelim. Keyfi sabit bir nokta $x \in D$ merkezli bir yuvar $\Omega(x, \rho) = \{y \in \mathbb{R}^3 : |x - y| = \rho\}$ D nin içinde kalsın ve birim normal $v, \Omega(x, \rho)$ nin içine yönlensin. Şimdi u ve $\phi(x_1)$ fonksiyonları için Eş.2.3 Green teoremini uygulayabileceğimiz $D_\rho = \{y \in D : |x - y| > \rho\}$ bölgesini elde ederiz.

$$\begin{aligned} & \int_{\partial D \cup \Omega(x, \rho)} \left\{ \frac{\partial u}{\partial v}(y) \phi(x, y) - u(y) \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial v(y)} \right\} ds(y) \\ &= \int_{D_\rho} \{ \Delta u(y) + k^2 u(y) \} \phi(x, y) dy \end{aligned} \quad (2.6)$$

Öncelikle $\rho \rightarrow 0$ için sağ taraftaki integral

$$\int_D \{ \Delta u(y) + k^2 u(y) \} \phi(x, y) dy$$

olması gerekir. Bu integralin yakınsaklığını gösterelim. D nin çapı

$diaD = a$ ve $D_a = \{y = |y - x| \leq a\}$ olsun

$$\begin{aligned} \left| \int_{D_\rho} \{ \Delta u(y) + k^2 u(y) \} \phi(x, y) dy \right| &\leq \max_{y \in D_a} |\Delta u(y) + k^2 u(y)| \int_{D_a} \phi(x, y) dy \\ &\leq \underbrace{\max_{y \in D_a} |\Delta u(y) + k^2 u(y)|}_{M \in \mathbb{R}^+} \int_0^a \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} r^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} \sin\phi d\phi \\ &\leq M \frac{1}{4\pi} \left[\frac{re^{ikr}}{ik} - \frac{e^{ikr}}{ik} \right] \Big|_0^a 4\pi, M \in \mathbb{R}^+ \\ &\leq M \frac{1}{ik} [(a-1)e^{ika} - 1] \end{aligned}$$

olduğundan yakınsatır.

Böylece

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{D_\rho} \left\{ \Delta u(y) + k^2 u(y) \right\} \phi(x, y) dy = \int_D \left\{ \Delta u(y) + k^2 u(y) \right\} \phi(x, y) dy$$

olur.

Şimdi

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Omega(x, \rho)} \left\{ u(y) \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u}{\partial \nu(y)} \phi(x, y) \right\} ds(y) = u(x)$$

olduğunu gösterelim. $\Omega(x, \rho)$ da

$$\phi(x, y) = \frac{e^{ik\rho}}{4\pi\rho} \text{ ve } \text{grad}_y \phi(x, y) = \left(\frac{1}{\rho} - ik \right) \frac{e^{ik\rho}}{4\pi\rho} \nu(y)$$

yerine yazılır.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(x, \rho)} \left\{ [u(y) - u(x) + u(x)] \frac{\partial \phi}{\partial \nu} - \frac{\partial u}{\partial \nu} \phi(x, y) \right\} ds(y) \\ &= \int_{\Omega(x, \rho)} u(x) \left(\frac{1}{\rho} - ik \right) \frac{e^{ik\rho}}{4\pi\rho} ds(y) + \int_{\Omega(x, \rho)} \left\{ (u(y) - u(x)) \left(\frac{1}{\rho} - ik \right) \frac{e^{ik\rho}}{4\pi\rho} - \frac{\partial u}{\partial \nu} \frac{e^{ik\rho}}{4\pi\rho} \right\} ds(y) \\ &= u(x) - u(x) \rho e^{ik\rho} + \int_{\Omega(x, \rho)} \left\{ (u(y) - u(x)) \left(\frac{1}{\rho} - ik \right) \frac{e^{ik\rho}}{4\pi\rho} - \frac{\partial u}{\partial \nu} \frac{e^{ik\rho}}{4\pi\rho} \right\} ds(y) \end{aligned}$$

olur.

Ayrıca

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\Omega(x,\rho)} \left\{ \left(\frac{1}{\rho} - ik \right) \frac{e^{ik\rho}}{\rho} (u(y) - u(x)) - \frac{e^{ik\rho}}{\rho} \frac{\partial u(y)}{\partial v} \right\} ds(y) \right| \\
& \leq \left(\frac{1}{\rho} - k \right) \frac{e^{ik\rho}}{\rho} \int_{\Omega(x,\rho)} |u(y) - u(x)| ds(y) + \frac{e^{ik\rho}}{\rho} \int_{\Omega(x,\rho)} \left| \frac{\partial u(y)}{\partial v} \right| ds(y) \\
& \leq 4\pi\rho \left(\frac{1}{\rho} - k \right) e^{ik\rho} \max_{y \in \Omega(x,\rho)} |u(y) - u(x)| + 4\pi\rho e^{ik\rho} \max_{y \in D} |\text{gradu}(y)|
\end{aligned}$$

$\rho \rightarrow 0$ için sıfıra gider.

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Omega(x,\rho)} \left\{ u(y) \frac{\partial \phi(x,y)}{\partial v(y)} - \frac{\partial u}{\partial v(y)} \phi(x,y) \right\} ds(y) = u(x)$$

olduğu görülür. Böylece $\rho \rightarrow 0$ için Eş.2.6 dan Eş.2.4' e ulaşılır.

Buradaki problem u nun sadece $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ a ait olması ve normal türevinin düzgün yakınsak olması, birinci integralin D nin sınırına paralel yüzey üzerinden alınması ve buradan ∂D ye limitle geçilmesidir.

Literatürde Eş.2.5 Green formülü Helmholtz gösterimi olarak bilinir. Teorem 2.1 in kompleks k değerleri için geçerli olduğu açıktır.

2.2 .Teorem

u , bir D bölgesinde Helmholtz denkleminin ikinci mertebeden sürekli türevlenebilir bir çözümü ise u analitiktir.

İspat

$x \in D$ de x merkezli kapalı küreyi D nin içinde alalım. Teorem 2.1 bu kürede,

uygulanabilir ve $x \neq y$ için temel çözümün analitik olmasından söylenir.

Teorem 2.2'nin bir sonucu olarak Helmholtz denkleminin bir çözümü tanım kümesinin açık bir alt kümesinde göz önüne almak tanım kümesinin tamamında göz önüne almak demektir.

Sonuçta Helmholtz denkleminin bir u çözümü denildiğinde bundan sonra bu bölüm boyunca iki kez sürekli türevlenebilen ve tanım kümesinde analitik olan u anlaşılabacaktır.

2.3. Tanım

Helmholtz denkleminin bir u çözümü herhangi bir kürenin dışında tanımlansın. $r = |x|$ olmak üzere,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0 \quad (2.7)$$

$\frac{x}{|x|}$ in her doğrultusunda düzgün olarak Sommerfeld yayılma koşulunu sağlıyor ise, u yayayılan(radiating) çözüm denir.

2.4 Teorem

Kabul edelim ki sınırlı açık D bölgesi sınırsız C^2 sınıfından bir bölgenin tümleyeni ve ν birim dış normal vektörü ∂D sınırından D nin dışına yönlendirilsin $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}), \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ da

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

Helmholtz denkleminin bir yayılan çözümünün normal doğrultusundaki türevi olan

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \nu(x) \text{gradu}(x + h\nu(x)), x \in \partial D$$

limit ∂D de düzgün olsun .Bu durumda Green formüllerinden

$$u(x) = \int_{\partial D} \left\{ u(y) \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \phi(x, y) \right\} ds(y), x \in \mathbb{R}^3 \setminus D \text{ dir} \quad (2.8)$$

İspat

ilk olarak

$$\int_{\Omega_r} |u|^2 ds = o(1), r \rightarrow \infty \quad (2.9)$$

olduğunu göstermeliyiz. Burada Ω_r merkezi orijin olan r yarıçaplı küredir Eş. 2.7 koşulundan.

$$\int_{\Omega_r} \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 + k^2 |u|^2 + 2kim \left(u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} \right) \right\} ds = \int_{\Omega_r} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} - iku \right|^2 ds \rightarrow 0, r \rightarrow \infty$$

Burada ν, Ω_r nin dış normalidir. Bu eşitliği gösterelim.

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} - iku \right|^2 &= \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} - iku \right| \left| \overline{\frac{\partial u}{\partial \nu} - iku} \right| = \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 + k^2 |u|^2 + ik \left(\bar{u} \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} \right) \\ &= \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 + k^2 |u|^2 + k \left(\bar{u} \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} \right) i \\ &= \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 + k^2 |u|^2 + 2kimu \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} \end{aligned}$$

Bu eşitliğin her iki yanını Ω_r integrallersek

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_r} \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 + k^2 |u|^2 + 2kimu \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} \right\} ds &= \int_{\Omega_r} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} - iku \right|^2 ds \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} - iku \right|^2 \sin \phi d\phi dr \rightarrow 0, r \rightarrow \infty \end{aligned}$$

bulunur.

r yi D , Ω_r de kalacak şekilde yeteri kadar büyütür ve Eş.2.2 Green teoremini

$Dr := \{y \in \mathbb{R}^3 \setminus D : |y| < r\}$ bölgesinde $v = \bar{u}$ için uygulanırsa

$$\begin{aligned} \int_{Dr} \left\{ u \Delta \bar{u} + |\nabla u|^2 \right\} dy &= \int_{\partial Dr} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds \\ &= \int_{\Omega_r} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds - \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds \\ \Rightarrow - \int_{Dr} k^2 |u|^2 dy + \int_{Dr} |\nabla u|^2 dy &= \int_{\Omega_r} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds - \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds \\ \int_{\Omega_r} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds &= \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds - k^2 \int_{Dr} |u|^2 dy + \int_{Dr} |\nabla u|^2 dy \end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi önceki denklemde imajiner kısmın içine son denklemi koyarsak

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Omega_r} \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 + k^2 |u|^2 \right\} ds = -2kIm \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds \quad (2.10)$$

$u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$ olduğundan

$$\int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds \leq M |\partial D|$$

olacak şekilde $M \in \mathbb{R}^+$ vardır.

Eş.2.10'nun sol yanındaki her iki terim negatif değildir. Böylece $r \rightarrow \infty$ için sınırlılık özelliğinden toplam sonludur. Bu nedenle

$$\int_{\Omega_r} |u|^2 ds = o(1), r \rightarrow \infty \quad (2.9)$$

ispatlanır.

Eş.2.9 ve yayılma şartından, $y \in \Omega_r$ için

$$\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial v(y)} - ik\phi(x, y) = o\left(\frac{1}{r^2}\right), r \rightarrow \infty$$

düzgündür. Schwars eşitsizliğinden[2]

$$I_1 = \int_{\Omega_r} u(y) \left\{ \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial v(y)} - ik\phi(x, y) \right\} ds(y) \rightarrow 0, r \rightarrow \infty$$

$$\left| \int_{\Omega_r} u(y) \left\{ \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial v(y)} - ik\phi(x, y) \right\} ds(y) \right|^2 \leq \int_{\Omega_r} |u(y)|^2 \int_{\Omega_r} \left| \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial v(y)} - ik\phi(x, y) \right|^2 ds(y)$$

ve u için Eş. 2.7 yayılma koşulundan $y \in \Omega_r$ için $\phi(x, y) = o\left(\frac{1}{r}\right)$

$$\phi(x, y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}, y \in \Omega_r$$

$$|x-y| = \sqrt{(x-y)^2} = \sqrt{|x|^2 - 2xy + |y|^2}, |y| = r \text{ olduğundan}$$

$$|x-y| = r \sqrt{1 - \left[\frac{2x}{r} \cos(x, y) - \frac{|x|^2}{r^2} \right]} \text{ olur.}$$

$x \in Dr$ için $\frac{|x|}{r} < 1$ olacağından

$$\left[\frac{2x}{r} \cos(x, y) - \frac{|x|^2}{r^2} \right] < 1 \text{ olur}$$

$|z| < 1$ için

$$\sqrt{1-z} = 1 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2^2 2!}z^2 - \frac{1.3}{2^3 3!}z^3 \dots\dots$$

seri açılımını kullanarak,

$$\begin{aligned}
|x-y| &= r \sqrt{1 - \left[\frac{2x}{r} \cos(x, y) - \frac{|x|^2}{r^2} \right]} \\
&= r \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[\frac{2x}{r} \cos(x, y) - \frac{|x|^2}{r^2} \right] - \frac{1}{2^2 2!} \left[\frac{2x}{r} \cos(x, y) - \frac{|x|^2}{r^2} \right]^2 - \dots \right\} \\
&= r \left[1 + o\left(\frac{1}{r}\right) \right] \\
\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} &= o\left(\frac{1}{r}\right)
\end{aligned}$$

$$I_2 = \int_{\Omega_r} \phi(x, y) \left\{ \frac{\partial u}{\partial v}(y) - iku(y) \right\} ds(y) \rightarrow 0, r \rightarrow \infty$$

yi verir. Bundan sonra

$$\int_{\Omega_r} \left\{ u(y) \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial v(y)} - \frac{\partial u}{\partial v}(y) \phi(x, y) \right\} ds(y) = I_1 - I_2 \rightarrow 0, r \rightarrow \infty$$

dir. Şimdi Teorem 2.1 sınırlı Dr bölgesinde uygulanırsa

$$\begin{aligned}
u(x) &= \int_{\partial Dr} \left\{ \frac{\partial u}{\partial v}(y) \phi(x, y) - u(y) \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial v(y)} \right\} ds(y), x \in Dr \\
&= \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u}{\partial v}(y) \phi(x, y) - u(y) \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial v(y)} \right\} ds(y) \\
&\quad - \int_{\Omega_r} \left\{ \frac{\partial u}{\partial v}(y) \phi(x, y) - u(y) \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial v(y)} \right\} ds(y)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$r \rightarrow \infty$ için limite geçilirse

$$u(x) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u}{\partial v}(y) \phi(x, y) - u(y) \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial v(y)} \right\} ds(y), x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$$

bulunur.

Teorem 2.4'den Helmholtz denkleminin yayılan çözümü otomatik olarak her yön için düzgün olan Sommerfeld'in sonluluk şartını

$$u(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right), |x| \rightarrow \infty \quad (2.11)$$

sağladığını çıkarabiliriz ve Eş. 2.7 Sommerfeld yayılma koşulu orijine öteleme altında değişmezdir.

Helmholtz denkleminin $\mathbb{R}^3$ ün tamamında tanımlanan çözümüne tam çözüm denir. Helmholtz denkleminin bir tam çözümü yayılma koşulunu sağlıyor olarak göz önüne alınır.

Şimdi uzak olan modeli(far field pattern) tanımı veya saçılan dalga genliğini verelim.

2.5 Teorem

Helmholtz denkleminin yayılan her bir çözümünün uzaklaşan küresel dalga olarak asimptotik davranışları her $\hat{x} = \frac{x}{|x|}$ doğrultusunda düzgün olarak

$$u(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \left\{ u_\infty(\hat{x}) + o\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, |x| \rightarrow \infty, \quad (2.12)$$

dir, burada u_∞ fonksiyonu Ω birim küresi üzerinde tanımlıdır ve u nun uzak alan modeli(far field pattern) olarak bilinir, Teorem 2.4' in kabulleri altında

$$u_{\infty}(\hat{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left\{ u(y) \frac{\partial e^{-ik\hat{x}y}}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) e^{-ik\hat{x}y} \right\} ds(\hat{y}), \hat{x} \in \Omega \quad (2.13)$$

dır.

İspat

$$|x - y| = \sqrt{|x|^2 - 2xy + |y|^2} = |x| \sqrt{1 - \left(2\hat{x} \frac{y}{|x|} - \frac{|y|^2}{|x|^2} \right)}$$

$|x| > 1$ için $|y| = 1$ olduğundan $\frac{|y|}{|x|} < 1$ ve yeteri kadar büyük $|x|$ için

$$\left| 2\hat{x} \frac{y}{|x|} - \frac{|y|^2}{|x|^2} \right| < 1$$

ve $|z| < 1$ için

$$\sqrt{1-z} = 1 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2^2 2!}z^2 - \frac{1.3}{2^3 3!}z^3 - \dots$$

açılımından

$$\begin{aligned} |x - y| &= |x| \sqrt{1 - \left(2\hat{x} \frac{y}{|x|} - \frac{|y|^2}{|x|^2} \right)} \\ &= |x| \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(2\hat{x} \frac{y}{|x|} - \frac{|y|^2}{|x|^2} \right) - \frac{1}{2^2 2!} \left(2\hat{x} \frac{y}{|x|} - \frac{|y|^2}{|x|^2} \right)^2 - \dots \right\} \\ &= |x| \left\{ 1 - \hat{x} \frac{y}{|x|} + \frac{1}{2} \frac{|y|^2}{|x|^2} - \dots \right\} \end{aligned}$$

$$= |x| \left\{ 1 - \hat{x} \frac{y}{|x|} + o\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}$$

$$= |x| - \hat{x}y + o\left(\frac{1}{|x|}\right)$$

Ayrıca $|z| < 1$ için

$$\frac{1}{\sqrt{1-z}} = 1 + \frac{z}{2} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{2!} z^2 + \dots$$

açılımından

$$\frac{1}{|x-y|} = \frac{1}{|x| \sqrt{1 - \left(2\hat{x} \frac{y}{|x|} - \frac{|y|^2}{|x|^2}\right)}} = \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[2\hat{x} \frac{y}{|x|} - \frac{|y|^2}{|x|^2} \right] + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{2!} \left[2\hat{x} \frac{y}{|x|} - \frac{|y|^2}{|x|^2} \right]^2 + \dots \right\}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} &= e^{ik|x|} e^{-ik\hat{x}y} e^{iko\left(\frac{1}{|x|}\right)} \frac{1}{|x|} \left\{ 1 + \left[2\hat{x} \frac{1}{|x|} - \frac{|x|^2}{|y|^2} \right] + \dots \right\} \\ &= \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \left\{ e^{-ik\hat{x}y} e^{iko\left(\frac{1}{|x|}\right)} e^{-ik\hat{x}y} + o\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\} \\ &= \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \left\{ e^{-ik\hat{x}ey} o\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\} \end{aligned} \tag{2.14}$$

elde edilir[3-5].

$$\frac{\partial}{\partial v(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} = \frac{\partial}{\partial v(y)} \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \left\{ e^{-ik\hat{x}\hat{y}} + o\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\} = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \left\{ \frac{\partial e^{-ik\hat{x}\hat{y}}}{\partial v(y)} + o\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\} \quad (2.15)$$

her $y \in \partial D$ için düzgündür. Eş.2.8' de bu ifade yazılırsa

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\partial D} \left\{ u(y) \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial v(y)} - \frac{\partial u}{\partial v}(y) \phi(x, y) \right\} ds(y) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left\{ u(y) \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \left[\frac{\partial e^{-ik\hat{x}\hat{y}}}{\partial v(y)} + o\left(\frac{1}{|x|}\right) \right] - \frac{\partial u}{\partial v}(y) \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \left[e^{-ik\hat{x}\hat{y}} + o\left(\frac{1}{|x|}\right) \right] \right\} ds(y) \\ &= \frac{e^{ik|x|}}{4\pi} \left\{ \int_{\partial D} \left\{ u(y) \frac{\partial e^{-ik\hat{x}\hat{y}}}{\partial v(y)} - \frac{\partial u}{\partial v}(y) e^{-ik\hat{x}\hat{y}} \right\} ds(y) + o\left(\frac{1}{|x|}\right) \int_{\partial D} \left(1 - \frac{\partial u}{\partial v}(y) \right) ds(y) \right\} \end{aligned}$$

olduğundan ispat tamamlanır.

2.6. Lemma (Rellich)

Kabul edelim ki D , bir sınırsız bölgenin açık sınırlı tümleyeni ve $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$ Helmholtz denkleminin

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{|x|=r} |u(x)|^2 ds = 0 \quad (2.16)$$

yı sağlayan çözümü olsun. Bu durumda $(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$ da $u = 0$ dır.

İspat

Yeteri kadar büyük $|x|$ için, küresel harmoniklerin

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_n^m(|x|) Y_n^m(\hat{x})$$

şeklinde bir Fourier açılımı vardır, burada $\hat{x} = \frac{x}{|x|}$ dir[1].

Katsayılar

$$a_n^m(r) = \int_{\Omega} u(r\hat{x}) \overline{Y_n^m(\hat{x})} ds(\hat{x}) \quad (\text{Burada } Y_n^m \text{ ler küresel harmoniklerdir.})$$

ile verilir ve

$$\int_{|x|=r} |u(x)|^2 ds = r^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n |a_n^m(r)|^2 \quad (1)$$

Parseval eşitliğini¹ sağlar[6].Eş.2.16 kabulümüzden her zaman için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^2 |a_n^m(r)|^2 = 0 \quad (2.17)$$

olur.

$u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$ olduğundan integral altında türevlenebilir ve integral kısmında

$\Delta u + k^2 u = 0$ kullanılır ve a_n^m lerin küresel Bessel denklemi

$$\frac{d^2 a_n^m}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{da_n^m}{dr} + \left(k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) a_n^m = 0 (*)$$

nin çözümleri olduğu,yani

1 Parseval Eşitliği; $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$, $f, [-\pi, \pi]$ de tanımlı sürekli fonksiyon $\{a_n\}$ ler

Fourier katsayılarıdır.

$$\alpha_n^m(r) = \alpha_n^m h_n^{(1)}(kr) + \beta_n^m h_n^{(2)}(kr)$$

sonucuna varılır, burada α_n^m ve β_n^m sabitler $h_n^{(1)}$ ve $h_n^{(2)}$ ler n ci mertebeden birinci ve ikinci çeşit küresel Henkel fonksiyonlarıdır.

(*) ı gösterelim.

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_n^m(|x|) Y_n^m(\hat{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(a_n^{-n}(|x|) Y_n^{-n}(\hat{x}) \right) + \dots + \left(a_n^n(|x|) Y_n^n(\hat{x}) \right) \right] \\ \Delta u &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ \left[\frac{d^2 a_n^m(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{da_n^m}{dr} \right] Y_n^m + \left[\frac{d^2 Y_n^m}{d\theta^2} + \cot\theta \frac{dY_n^m}{d\theta} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{d^2 Y_n^m}{d\varphi^2} \right] \frac{a_n^m(r)}{r^2} \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ \frac{d^2 a_n^m(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{da_n^m}{dr} - \frac{n(n+1)a_n^m}{r^2} \right\} Y_n^m \\ \Delta u + k^2 u &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ \frac{d^2 a_n^m(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{da_n^m}{dr} + \left(k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) a_n^m \right\} Y_n^m = 0 \end{aligned}$$

Eş.2.17 yerine konulur ve küresel harmonik Henkel fonksiyonlarının

$$\begin{aligned} h_n^{(1,2)}(t) &= \frac{1}{t} e^{\pm i(t - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{2})} \left\{ 1 + o\left(\frac{1}{t}\right) \right\}, t \rightarrow \infty, \\ h_n^{(1,2)'}(t) &= \frac{1}{t} e^{\pm i(t - \frac{n\pi}{2})} \left\{ 1 + o\left(\frac{1}{t}\right) \right\}, t \rightarrow \infty \end{aligned}$$

asimptotik açılımı kullanılırsa her n ve m için $\alpha_n^m = \beta_n^m = 0$ olur.

$$\begin{aligned} |a_n^m(r)|^2 &= [\alpha_n^m h_n^{(1)}(kr) + \beta_n^m h_n^{(2)}(kr)]^2 \\ r^2 |a_n^m(r)|^2 &= r^2 [\alpha_n^m h_n^{(1)}(kr) + \beta_n^m h_n^{(2)}(kr)]^2 \\ 0 &= r^2 \left[\alpha_n^m \frac{1}{kr} e^{+i(kr - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{2})} + \beta_n^m \frac{1}{kr} e^{+i(kr - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{2})} \right] \left\{ 1 + o\left(\frac{1}{kr}\right) \right\}, r \rightarrow \infty \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha_n^m = 0 = \beta_n^m$$

buradan yeterince büyük bir kürenin dışında $u = 0$ ve böylece analitikten $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ da $u = 0$ olur .

Sınır değer problemi çözümü için teklik teoremi Rellich Lemması sayesinde verilir.

2.7. Teorem

D bölgesi Lemma 2.11 de ki gibi, $\partial D, C^2$ sınıfından ayrıca ν D nin sınırından içine yönlendirilsin ve kabul edelim ki $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ dalga sayısı k olan Helmholtz denkleminin

$$\operatorname{Im} \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds \geq 0$$

için normal türevi düzgün yakınsak bir yayılan çözümü olsun. Bu durumda $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ da $u = 0$ olur.

İspat

Eş.2.10' a benzer olarak ve teoremin kabülllerinden Eş.2.16' nın sağlandığı aşıkardır.

$$\text{Eş.2.10: } \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Omega_r} \left\{ \left| \frac{du}{dv} \right|^2 + k^2 |u|^2 \right\} ds = -2kim \int_{\partial D} \frac{u d\bar{u}}{dv} ds \leq 0$$

$\Rightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Omega_r} |u|^2 ds = 0$ dır. Buradan Rellich-Lemma Eş.2.6 dan teorem ispatlanır.

2.2.Sobolev Uzayı

2.8. Tanım (Sobolev Uzayı)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n, H^m(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) \mid D^\alpha f \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\}$ m pozitif bir tamsayı uzayına m. mertebeden sobolev uzayı denir.

$H^m(\Omega)$,

$$\langle f, g \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha f, D^\alpha g \rangle_{L^2(\Omega)}$$

iç çarpımına göre bir Hilbert uzayıdır, burada $L^2(\Omega)$, Ω da karesi intergallane bilir fonksiyonların uzayı, $\mathbb{R}^n$ de

$$D^\alpha f = \left(\frac{\partial^\alpha f}{\partial x_1^\alpha}, \dots, \frac{\partial^\alpha f}{\partial x_n^\alpha} \right)$$

dır. $H^m(\partial\Omega) = \{f \in L^2(\partial\Omega) \mid D^\alpha f \in L^2(\partial\Omega), |\alpha| \leq m\}$

olarak tanımlanır[7].

2.9. Tanım

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere f, Ω bir fonksiyon olsun.

$$A = \{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}$$

kümesinin kapanışı $\bar{A} \subset \Omega$ ise, $\bar{A}$ ya f nin Ω daki kompakt desteği denir.

2.10.Tanım

Kompakt destekleri $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de olan her mertebeden türevlenebilen fonksiyonların kümesi $C_0^\infty(\Omega)$ ile gösterilir.

2.11. Tanım

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ olsun. $C_0^\infty(\Omega)$ nın $H^m(\Omega)$ daki kapanışı $H_0^m(\Omega)$ ile gösterilir.

Daha genel olarak $H^{m,p}(\Omega)$, $f \in L^p(\Omega)$ da $D^\alpha f \in L^p(\Omega)$

$1 \leq p \leq \infty$, $|\alpha| \leq m$ sağlayan f fonksiyonlarının Hilbert uzayını gösterir. $H_0^{m,p}(\Omega)$, $C_0^\infty(\Omega)$ nın $H^{m,p}(\Omega)$ deki kapanışıdır [7].

2.12. Teorem

($H^m(\Omega)$ için trace teoremi): Ω , $\mathbb{R}^n$ nin düzgün sınırlı açık bir alt kümesi ve $\partial\Omega$ sınırı olsun. Buradan γ_k , $0 \leq k \leq m-1$ trace operatörü $H^m(\Omega)$ dan $H^{m-k-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ ya sürekli lineer bir dönüşümdür, burada $H^m(\Omega)$ hilbert uzayı ve $U \in H^m(\Omega)$ için n , $\partial\Omega$ nın normal vektörü olmak üzere,

$$\gamma_k U = \frac{\partial^k U}{\partial n^k} (x_1, \dots, x_n) \Big|_{x_n=0} \text{ dır [8,9].}$$

2.13. Sonuç

2.12 Teorem den her δ , $0 \leq j \leq m-1$ için C_1 ve C_2 sabitleri vardır. Öyle ki;

$$C_2 \|U\|_{H^m(\Omega)} \leq \|\gamma_j U\|_{H^{m-j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq C_1 \|U\|_{H^m(\Omega)} \text{ dır [8].}$$

2.14 Tanım

(Gömme (Embedding) Operatörü):

X ve Y Banach uzayları, $X \subseteq Y$ olsun. Her $x \in X$ için gömme operatörü $J: X \rightarrow Y$, $J(x)=x$ biçiminde tanımlanır.

$X \subseteq Y$ gömmesinin sürekli olması için gerek ve yeter j nin sürekli olması, bu her $x \in X$ ve k sabiti için $\|x\|_Y \leq k \|x\|_X$ dir.

$X \subseteq Y$ gönmülümüne kompakt denir, gerek ve yeter koşul j kompaktır, bu sürekli ve X de herhangi bir $\{x_n\}$ sınırlı dizisinin $\{x_{n_k}\}$ alt dizisinin Y de yakınsak olması anlamına gelir [7].

2.15 Teorem

(Sobolev Embedding): $n \geq 1$, Ω , $\mathbb{R}^n$ de sınırlı bir bölge olsun. Buradan;

a) $\|f\|_{1,2}$ ve $\|f\|_{1,2,0}$. $H_0^{1,2}(\Omega)$ da denktir.

$$\|f\|_{1,2} = \left(\int_{\Omega} \left(f^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|f\|_{1,2,0} = \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

b) $H(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$ gömmesi kopmaktır.

c) $m-j > \frac{n}{2}$ için $H^{m,2} \subseteq C^j(\bar{\Omega})$ gömülümü vardır [7].

2.16. Tanım

Sesquilinear Form;

V , Wreel ya da kompleks F cismi üzerinde iki vektör uzayı olsun. $B: V \times W \rightarrow F$ dönüşümü her $\alpha, \beta \in F$, $x, y \in V$, $w, z \in W$ için

$$i) B(\alpha x + \beta y, z) = \alpha B(x, z) + \beta B(y, z)$$

$$ii) B(x, \alpha w + \beta z) = \bar{\alpha} B(x, w) + \bar{\beta} B(x, z)$$

şartları sağlanıyorsa B ye bir sesquilinear form denir.[10]

3. TERS PROBLEM

3.1. Ters Problem

Düzlem ses dalgalarının saçılmasında geçirgen bölge D nin yoğunluğu ρ_D ve ses hızı C_D , $\mathbb{R}^3 \setminus D$ ortamının çevresindeki yoğunluk ρ ve ses hızı C , Helmholtz denklemleri için bir transmissyon (geçiş) problemi:

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2 u &= 0, \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \text{ da} \\ \Delta v + k_D^2 v &= 0, D \text{ de} \end{aligned} \quad (3.1)$$

ile transmission (geçirme) sınır şartları ∂D üzerinde

$$\begin{aligned} u &= v \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= \lambda \frac{\partial v}{\partial \nu} \end{aligned} \quad (3.2)$$

burada ν dışarıdan ∂D ye yönlendirilmiş normali $k_D^2 = k^2 c^2 / c_D^2 \neq k^2$ ve $\lambda = \rho / \rho_D$ yi göstermektedir.

Burada u saçılan dalga u^s ve verilmiş düzlem $u^i = e^{ikx \cdot d}$ dalgaının süper pozisyonudur veya $u = u^s + u^i$ ve u^s saçılan dalga

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u^s}{\partial \nu} - i k u^s \right) = 0, r = |x| \quad (3.3)$$

Sommerfeld yayılma şartını $\hat{x} = \frac{x}{|x|}$ in her yönünde düzgün olarak sağlar. Bu şart

sınır değer probleminin çözümünün tekliği için sağlanmalıdır ve

$$u^s|_x = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \left\{ u_\infty(\hat{x}) + o\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (3.4)$$

formunda bir asimptotik davranışı vardır. $u_\infty(\hat{x})$ fonksiyonu saçılan dalga'nın uzak olan modeli (far field patterni) (hatta saçılan dalga genliği veya scattering amplitude) dir.

Green gösterilim teoremi ve temel çözümün

$$\phi(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}, \quad x \neq y \quad (3.5)$$

asimptotik gösterilimden far field patterin

$$u_\infty(\hat{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left\{ u^s(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} e^{-k\hat{x} \cdot y} - \frac{\partial u^s}{\partial \nu_y}(y) e^{ik\hat{x} \cdot y} \right\} ds_y$$

formunda bir gösteriliminin olduğunu 2 .bölümde göstermiştik. Çözümün varlığı ve geçiş (transmisyon) problemi için iyi tanımlılık sonlu integral denklemlerden kurulabilir [1].

Bu bölüm boyunca saçılma sınırı ∂D yi C^2 sınıfından kabul edeceğiz. Sonuçta olay yönü d deki bağılılığı göstermek için sıra ile $u = u(\cdot; d)$, $u^i = u^i(\cdot; d)$, $u^s = u^s(\cdot; d)$ ve $u_\infty = u_\infty(\cdot; d)$ yazabiliriz.

İlgilendiğimiz ters problem: Bütün d olay yönleri için verilen $u_\infty(\cdot; d)$ far field patternleri, saçılımın ∂D küresini ve $\mathbb{R}^3 \setminus D$ deki k dış dalga sayısı k_p iç dalga sayısını belirler.

Önemli bir başlangıç sonucu yayılan dalga ve far field patternler arasındaki birebir benzerliklerdir. Rellich lemmasından [1] aşağıdaki lemmayı elde ederiz.

3.1 Lemma

Kabul edelim ki D açık sınırsız bir bölgenin tümleyeni ve göze alınan far field pattern için $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$ Helmholtz denkleminin bir yayılan çözümü olsun. Bu durumda $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ de $u=0$ dır.

İspat

$u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$, Helmholtz denkleminin bir yayılan çözümü ise Sommerfeld yayılma şartından

$$\int_{|x|=r} |u|^2 ds = o(1), r \rightarrow \infty$$

dır. (2.4 Teorem Eş.2.9) Dolayısıyla Rellich lemmasının Eş.2.16 şartı sağlanır ve $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ de $u=0$ olur

Daha sonra, yaklaşımımızda gerekli transmission probleminin zayıf çözümlerinin tanımımızdır. $\Omega_R = \{x \in \mathbb{R}^3; |x| < R\}$ Green teoremi ile $\bar{D} \subseteq \Omega_R$,

Eş.3.1, Eş.3.2 nin çözümleri

$$\int_{\Omega_R} (\mu \nabla u \nabla y - K^2 u \varphi) dx = \int_{\partial \Omega_R} \frac{\partial u}{\partial \nu} \varphi ds, \varphi \in H^1(\Omega_R) \quad (3.6)$$

ile

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus D \\ \lambda, & x \in D \end{cases} \quad (3.7)$$

ve

$$K^2(x) = \begin{cases} k^2, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus D \\ \lambda k^2, & x \in D \end{cases} \quad (3.8)$$

varyasyonel denklemlerini sağlar. Burada $H^1(\Omega_R)$ birinci mertebeden ve $s \in \mathbb{R}$ için $H^s(\partial\Omega_R)$ sobolev uzaylarıdır.

$$\int_D \{u \Delta v + \nabla u \nabla v\} dx = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial \nu} ds$$

birinci Green özdeşliği Eş.3.1 ve Eş.3.2 deki u , v ve φ fonksiyonları için kullanırsa

$$\int_{\Omega_R} \{\nabla u \nabla \varphi + \mu \Delta u\} dx = \int_{\partial\Omega_R} \frac{\partial u}{\partial \nu} \varphi ds$$

Buradan

$$\int_{\Omega_R} (\mu \nabla u \nabla \varphi - K^2 u \varphi) dx = \int_{\partial\Omega_R} \frac{\partial u}{\partial \nu} \varphi ds$$

elde edilir.

$L: H^{1/2}(\partial\Omega_R) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega_R)$ Dirichlet'den Neumanna gönderimi yani

$$L\psi = \frac{\partial \psi_1}{\partial \nu}, \quad (3.9)$$

burada ψ_1 ,

$$\psi_1 + k^2 \psi_1 = 0 \quad \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_R \quad \text{de} \quad (3.10)$$

$$\psi_1 = \psi \quad \partial\Omega_R \quad \text{de}$$

dış Dirichlet probleminin tekil çözümüdür. (Trace teoreminde $m=1, k=0$ alınarak yukarıdaki uzaylar elde edilir.)

$|m| \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere Y_n^m n . mertebeden küresel harmonik ve $h_n^{(1)}$

n . mertebeden birinci çeşit Henkel fonksiyonlarını gösterebilirsin. $\{z \in \mathbb{R}^3: |z| > R\}$ için

$$(Lg)(R, \hat{x}) = \sum_{n=\sigma}^{\infty} \sum_{|m| \leq n} g_n^m \frac{kh_n^{(1)}(kR)}{h_n^{(1)}(kR)} Y_n^m(\hat{x})$$

burada $g(R, \hat{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|m| \leq n} g_n^m Y_n^m(\hat{x})$, g_n^m ler [1] deki Teorem 2.7 deki

katsayılarıdır. $k=0$ dalga sayısına uyan operatör L_0 dır. Yukarıda verildiği gibi her iki operatörde küresel harmonikler ve Bessel fonksiyonları ile verilebilir.

L_0 bir strictly coercive sesquilinear form yani, her $\psi \in H^{1/2}(\partial\Omega_R)$ için

$$-\langle L_0 \psi, \psi \rangle \geq c \|\psi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega_R)}^2 \quad (3.11)$$

dir. Burada $\langle, \rangle$ dual parantezi ve c pozitif bir sabiti göstermektedir.

$$(L_0 g)(R, \hat{x}) = -\frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|m| \leq n} (n+1) g_n^m Y_n^m(\hat{x})$$

$L-L_0$, $H^{1/2}(\partial\Omega_R)$ den $H^{-1/2}(\partial\Omega_R)$ ye bir kompakt operatördür. ([11] deki Teorem 2.1 den)

3.2.Tanım

$u \in H^1(\Omega_R)$ fonksiyonu Eş(3.1), (3.2) deki transmission probleminin bir zayıf çözümüdür, eğer Ω_R de

$$\int_{\Omega_R} (\mu \nabla u \nabla \bar{\varphi} - K^2 u \bar{\varphi}) dx - \langle Lu, \varphi \rangle = \int_{\partial\Omega_R} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} - Lu \right) \bar{\varphi} ds \quad (3.12)$$

varyasyonel denklemini her $\varphi \in H^1(\Omega_R)$ için sağlıyor ise.

3.3.Lemma

μ, K, k, k_D, λ , Eş.3.2, Eş.3.7 ve Eş.3.8 deki gibi tanımlansın. Bu durumda herhangi bir $f \in H^1(\Omega_R)$, her $\varphi \in H^1(\Omega_R)$ için

$$\int_{\Omega_R} (\mu \nabla u \nabla \bar{\varphi} - K^2 u \bar{\varphi}) dx - \langle Lu, \varphi \rangle = (f, \varphi)_{H^1(\Omega_R)} \quad (3.13)$$

denklemini sağlayan bir tek $u \in H^1(\Omega_R)$ çözümü vardır.

Lemma 3.3. 'nın ispatını [12] daki Teorem 2.1 de $\lambda=0$ alarak yapılabilir.

Ters problemin tekliğinin d'nin her yönüne bağlı far field patternlerinin bilgisinden kurulması için transsmisyon denkleminin iki çözümünün far field patternleri arasında benzerlik kurulmasına ihtiyaç duyarız.

Öncelikle kabul edelim ki D_1 ve D_2 iki bölge k dış dalga sayısı k_j ler iç dalga sayıları ve λ_j ler sıçrama parametreleri ($j=1,2$) olsun.

$$\lambda_j = \frac{\rho}{\rho_j}, \quad k_j^2 = \frac{k^2 c^2}{c_j^2}$$

den eğer dikkat edilirse $\lambda_1 = \lambda_2$ ve buradan $\rho_1 = \rho_2$, $c_1 = c_2$ ve $k_1 = k_2$ dir.

Şimdi Lemma 3.1 in koşullarını kabul edelim. $\mathbb{R}^3 \setminus (\overline{D_1 \cup D_2})$ nin bağlantılı sınırsız parçasını $\Omega_c \subset \mathbb{R}^3$ ile gösterelim ve $\Omega_0 = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_c}$ tümleyeni gösterebiliriz, buradan iki Lemma elde ederiz.

3.4.Lemma

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ sınırlı bir bölge, $\overline{\Omega_0} \subseteq \Omega$ olsun. d'nin sabit bir yönü için kabul edelim ki $u_\infty(\cdot; d) = u_{\infty,2}(\cdot; d)$ olsun. Buradan

$$\int_{\Omega} \left[-\tilde{\mu}_2 \nabla \tilde{v}_2 \nabla \varphi + \tilde{K}_2^2 \tilde{v}_2 \varphi \right] dx = 0, \quad \varphi \in H_0^1(\Omega) \quad (3.14)$$

varyasyonel denkleminin her $\tilde{v}_2 \in H^1(\Omega)$ çözümü için

$$\begin{aligned} & \int_{D_1} \left[(1 - \lambda_1) \nabla u_2 \nabla \tilde{v}_2 + (K_1^2 - k^2) u_2 \tilde{v}_2 \right] dx \\ &= \int_{D_2} \left[(1 - \lambda_2) \nabla u_2 \nabla \tilde{v}_2 + (K_2^2 - k^2) u_2 \tilde{v}_2 \right] dx \end{aligned} \quad (3.15)$$

dir. Burada $\tilde{\mu}_2, \tilde{K}_2 \in L^\infty(\Omega)$ katsayıları Ω_0 da $\tilde{\mu}_2 = \mu_2, \tilde{K}_2 = K_2$ yi sağlar.

İspat

$w_2 = u_2(\cdot; d) - u_1(\cdot; d)$ olsun. w Helmholtz denkleminin Ω_C de bir yayılan çözümü ve Lemma 3.1 den Ω_C de $w=0$ dır. Transmission denkleminin zayıf çözümlerinin tanımı kullanılırsa her $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $j=1,2$ için

$$\int_{\Omega} [\mu_j \nabla u_j \nabla \bar{\varphi} - K_j^2 u_j \bar{\varphi}] dx - \langle Lu_j, \varphi \rangle = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u_j^i}{\partial \nu} - Lu_j^i \right) \bar{\varphi} ds$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} (\mu_j \nabla u_j \nabla \bar{\varphi} - K_j^2 u_j \bar{\varphi}) dx = 0$$

dır ve buradan,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [-\mu_2 \nabla w \nabla \varphi + K_2^2 w \varphi] dx \\ &= \int_{\Omega} [(\mu_1 - \mu_1 - \mu_2) \nabla w \nabla \varphi + (K_2^2 - K_1^2 + K_1^2) w \varphi] dx \\ &= \int_{\Omega} [(\mu_1 - \mu_2) \nabla w \nabla \varphi + (K_2^2 - K_1^2) w \varphi] dx + \int_{\Omega} [-\mu_1 \nabla w \nabla \varphi + K_1^2 w \varphi] dx \\ &= \int_{\Omega} [(\mu_2 - \mu_1) \nabla u_1 \nabla \varphi + (K_1^2 - K_2^2) u_1 \varphi] dx \\ &+ \int_{\Omega} [(\mu_1 - \mu_2) \nabla u_2 \nabla \varphi + (K_2^2 - K_1^2) u_2 \varphi] dx \\ &+ \int_{\Omega} [-\mu_1 \nabla u_2 \nabla \varphi + K_1^2 u_2 \varphi] dx - \underbrace{\int_{\Omega} [-\mu_1 \nabla u_1 \nabla \varphi + K_1^2 u_1 \varphi] dx}_{=0} \\ &= \int_{\Omega} [(\mu_2 - \mu_1) \nabla u_1 \nabla \varphi + (K_1^2 - K_2^2) u_1 \varphi] dx \text{ dir.} \end{aligned}$$

Şimdi diğer $\bar{\Omega}_0 \subseteq \Omega_i$, $\bar{\Omega}_i \subseteq \Omega$ bölgesini ve $x \in \Omega_0$ da $\psi(x)=1$ ve $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_j$ de

$\psi(x)=0$ olan $\psi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ fonksiyonunu seçelim. Eğer $\tilde{v}_2$ Eş.3.14' in bir çözümü ise

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [(\mu_2 - \mu_1) \nabla u_1 \nabla (\psi \tilde{v}_2) + (K_1^2 - K_2^2) u_1 \psi \tilde{v}_2] dx \\ &= \int_{\Omega} [-\mu_2 \nabla w \nabla (\psi \tilde{v}_2) + K_2^2 w \psi \tilde{v}_2] dx \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$= \int_{\Omega} \left[-\tilde{\mu}_2 \nabla w \nabla \tilde{v}_2 + K_2^2 w \tilde{v}_2 \right] dx = 0 \text{ dır.}$$

Eş.3.6 varyasyonel denkleminin diğer tarafından her $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega} \left[(\lambda_j - 1) \chi(D_j) \nabla u_j \nabla \varphi - (\lambda_j k_j^2 - k^2) \chi(D_j) u_j \varphi \right] dx = 0$$

dır. Burada $\chi(D_j) = \begin{cases} 1, & x \in D_j \\ 0, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus D_j \end{cases}$ karakteristik fonksiyonu göstermektedir.

$$\mu_2 - \mu_1 = (\lambda_2 - 1) \chi(D_2) - (\lambda_1 - 1) \chi(D_1) \quad (3.17)$$

$$K_1^2 - K_2^2 = (\lambda_1 k_1^2 - k^2) \chi(D_1) - (\lambda_2 k_1^2 - k^2) \chi(D_2) \quad (3.18)$$

olarak yazılır. Eş.3.16-Eş.3.18 den Eş.3.15 elde edilir.

3.5.Lemma

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, sınırlı bir bölge $\bar{\Omega}_0 \subseteq \Omega$ olsun.

Her d olay yönü için kabul edelim ki $u_{\infty,1}(\cdot; d) = u_{\infty,2}(\cdot; d)$ olsun. Buradan

$$\int_{D_1} \left[(1 - \lambda_2) \nabla \tilde{v}_1 \nabla \tilde{v}_2 + (K_1^2 - k^2) \tilde{v}_1 \tilde{v}_2 \right] dx = \int_{D_2} \left[(1 - \lambda_2) \nabla \tilde{v}_1 \nabla \tilde{v}_2 + (K_1^2 - k^2) \tilde{v}_1 \tilde{v}_2 \right] dx,$$

dır burada $\tilde{v}_j \in H^1(\Omega)$, $j=1, 2$

$$\int_{\Omega} \left[\tilde{\mu}_j \nabla \tilde{v}_j \nabla \varphi + \tilde{K}_j^2 \tilde{v}_j \varphi \right] dx = 0, \quad \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

denkleminin çözümleri, $\tilde{\mu}_j, \tilde{K}_j \in L^\infty(\Omega)$, Ω_0 da $\tilde{\mu}_j = \mu_j$, $\tilde{K}_j = K_j$ eşitliklerini sağlamaktadır.

Lemma3.5'in ispatı 3.4 Lemma deki metod ve [12] daki teorem 3.2 deki düşünceden yapılabilir.

3.2.Teklik

Bu bölümde transmission probleminin aynı far field patternlere sahip çözümler için tek olarak belirlendiğini inceleyeceğiz.

Kabul edelim ki ∂D sınırı C^2 sınıfından, $x_0 \in \partial D$ herhangi bir nokta, x_0 ın bir V_{x_0} komşuluğu var, öyleki $\partial D \cap V_{x_0}$ kesimine herhangi $U \subset \mathbb{R}^2$ açık kümesinden birebir gönderimi var ve bu gönderim iki kez sürekli diffeerensiyellenebilir olsun.

Bu dönüşümü $\tau(z)=(x^1(z_1, z_2), x^2(z_1, z_2), x^3(z_1, z_2))$

formunda gösterelim, burada

$$\tau:U=\{z \in \mathbb{R}^2, |z| < 1\} \rightarrow \mathbb{R}^3, \tau(0)=x_0$$

dır.Ayrıca ∂D ye paralel ∂D_h yüzeyini göz önüne alalım.

$$y=x+h\nu(x), x \in \partial D,$$

burada h , ∂D genel yüzeyinden ∂D_h nın uzaklığını gösterebilir.

3.6.Lemma

∂D_1 , C^2 sınıfından olsun. Buradan ∂D_h , yeterince küçük h parametresi için C^1 sınıfındandır [13].

Verilen $D=D_1=D_2$ ve $j=1,2$ için transmission problemi

$$\Delta u_j + k^2 u_j = 0 \quad \mathbb{R}^3 \setminus D \text{ de}$$

$$\Delta u_j + k_j^2 u_j = 0 \quad D \text{ de}$$

ve

$$u_j|_+ = u_j|_-, \quad \partial D \text{ de}$$

$$\left. \frac{\partial u_j}{\partial \nu} \right|_+ = \lambda_j \left. \frac{\partial u_j}{\partial \nu} \right|_-, \quad \partial D \text{ de}$$

dır. Burada $g|_{+(-)}$ g nin ∂D den dışına (içine) limiti gösterebilir.

3.7.Teorem

k , k_j ve λ_j $D=D_1=D_2$ bölgeleri için transmission probleminin katsayıları olsun. Kabul edelim ki d nin her yönüne bağlı olan $u_{\infty, 1}(.;d)=u_{\infty, 2}(.;d)$ far field patternleri için iki iç dalga sayısı k_1, k_2 olsun. Bu durumda $k_1=k_2$ dir.

İspat

İspatı iki bölüme ayıralım. İlk olarak k_1, k_2 iç dalga sayılı transmission problemleri için Γ_1, Γ_2 Green fonksiyonlarını kuralım. Daha sonra $k_1 \neq k_2$ olmasından bir çelişki elde edeceğiz.

Bir $x_0 \in \partial D$ noktasını ve x_0 in V_{x_0} komşuluğunu seçelim. Sıra ile transmission probleminin düzgün sınırlı çözümlerini kurulumunu D nin düzgün perturbationu $\tilde{D}$ da düşünelim. $\tau(z)$ gösterilimi $\partial D \cup V_{x_0}$ in $\tau: \{z \in \mathbb{R}^2 \mid |z| < 1\} \rightarrow \mathbb{R}^3, \tau(0)=x_0$ in bir parametrisasyonudur.

Üstelik $\psi \in C^\infty[0, 1]$ düzgün bir fonksiyon

$$\max_{t \in (0,1)} \{\psi(t)\} = \varepsilon > 0$$

$$\psi(t) > 0, \quad 0 \leq t < \frac{1}{2},$$

$$\psi(t) = 0, \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1$$

olsun. Eğer V_{x_0} ve ε yeteri kadar küçük ise

$$B = \{\tau(z) + t\psi(|z|) \cdot \nu(\tau(t)) : z \in \mathbb{R}^2, |z| < \frac{1}{2}, t \in (0, 1)\}$$

bölgesi iyi tanımlıdır. Lemma 3.6 dan $\bar{D} \cup \bar{B}$ in sınırı C^1 sınıfındandır.

$\tilde{D} = (\bar{D} \cup \bar{B})^0$ olsun. Lemma 3.2 den transmission problemi $\tilde{D}$ bölgesi için tekil çözülebilir.

x_0 in bir $U_{x_0} \subseteq \tilde{D}$ komşuluğunda bir x noktasını seçelim ve devamında,

$$\Delta w_j(.,x) + k^2 w_j(.,x) = 0, \quad \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\tilde{D}} \text{ da}$$

$$\Delta w_j(.,x) + k_j^2 w_j(.,x) = 0 \quad \tilde{D} \text{ da}$$

problemleri ile

$$w_j|_+ (.,x)=w_j|_-(.,x)+\phi_j (.,x), \partial \tilde{D} \text{ da}$$

sınır şartlarını düşünelim. Burada $D=D_1=D_2$, w_j , ler istenildiği gibi (3.4) yayılma şartını sağlıyor ve ϕ_j ler k_j dalga sayıları için Helmholtz denkleminin, temel çözümleridir.

$\bar{D} \subset \Omega_1, \Omega \subset \mathbb{R}^3$ ve $x \in (U_{x0} \cap B) \setminus \bar{\Omega}$ olan bölgesini seçelim. Buradan Γ_1 ve Γ_2 fonksiyonları

$$\Gamma_j(y, x) = \begin{cases} w_j(y, x), y \in \mathbb{R}^3 \setminus \tilde{D} \\ w_j(y, x) + \phi_j(., x), y \in \tilde{D} \setminus \{x\} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. $\Gamma_j(y, x)$ lerin

$$\int_{\Omega} \left[-\tilde{\mu}_j \nabla \Gamma_j(y, x) \nabla \varphi + \tilde{K}_j^2 \Gamma_j(y, x) \varphi \right] dx = 0, \quad \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

varyasyonel denklemlerinin çözümleri olduğunu gösterebiliriz.

Burada

$$\tilde{\mu}_j(y) = \begin{cases} \mu_j(y), y \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{B} \\ \lambda_j, y \in B \end{cases}$$

$$\tilde{K}_j^2 = \begin{cases} K_j^2(y), y \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{B} \\ \lambda_j k_j^2, y \in B \end{cases}$$

dir. Birinci Green özdeşliğini Γ_j ve φ fonksiyonları için uygularsak.

$$\int_{\Omega} \left[\nabla_y \Gamma_j(y, x) \nabla \varphi + \varphi \Delta_y \Gamma_j(y, x) \right] dx = \int_{\partial \Omega} \varphi \frac{\partial \Gamma_j(y, x)}{\partial x(y)} ds$$

$$\int_{\Omega} \left[\tilde{\mu}_j \nabla_y \Gamma_j(y, x) \nabla \varphi - \tilde{K}_j^2 \Gamma_j(y, x) \varphi \right] dx = 0$$

$$\int_{\Omega} \left[-\mu_j \nabla_y \Gamma_j(y, x) \nabla \varphi + K_j^2 \Gamma_j(y, x) \right] dx = 0$$

Şimdi $\tilde{v}_1 = \Gamma_1$ ve $\Gamma_2 = \tilde{v}_2$ ile Lemma 3.5 i uygulayalım. $D = D_1 = D_2$ olduğundan her $x \in U_{x_0} \setminus \bar{D}$ için

$$\int_D \left[(\lambda_1 - \lambda_2) \nabla_y \Gamma_1(., x) \nabla_y \Gamma_2(., x) + (k_2^2 - k_1^2) \Gamma_1(., x) \Gamma_2(., x) \right] dy = 0 \text{ dir.}$$

$\tilde{D}$ nin tanımından ve transmission probleminin iyi kurulumundan $w_j \in H^1(\Omega \setminus \tilde{\bar{D}})$ ve $w_j \in H^1(\tilde{D})$ ların $x \in U_{x_0}$ da düzgün sınırlılığı sonucu çıkarılabilir. Gerçekte $w_j(., x)$ fonksiyonları U_{x_0} da Helmholtz denkleminin düzgün çözümleridir. Sobolev embedding teoreminden $w_j(., x)$, $C^1(U_{x_0})$ da düzgün sınırlıdır. Eğer yeteri kadar küçük $x_t = x_0 + t\nu(x_0) \in U_{x_0}$, $t > 0$ ve pozitif C_0 sabiti için

$$\left| \int_{D \cap U_{x_0}} \nabla_y \Gamma_1(., x_t) \nabla_y \Gamma_2(., x_t) dy \right| \geq C_0 |x_0 - x_t|^{-1}$$

gösterilebilir. Fakat integralin diğer terimleri, yani

$$\int_D \nabla_y \Gamma_1(., x) \nabla_y \Gamma_2(., x_t) dy \text{ ve } \int_D \Gamma_1(., x_t) \Gamma_2(., x_t) dy$$

sınırlıdır. Böylece $t \rightarrow 0$ da $k_1 \neq k_2$ ve buradan $\lambda_1 \neq \lambda_2$ çelişkisine varırız. Bu da 3.6 Teorem'nin ispatını tamamlar[14].

KAYNAKLAR

1. Colton D., Kress R., Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Thory **Springer -Verlag** ,New York,13-36, (1992).
2. Bayraktar M., Fonksiyonel Analiz, *Atatürk Üniversitesi Yayınları*, No:7Erzurum 198, (1996)
3. Anar.İ.E.,Kısmi Diferensiyel Denklemler,*Palme Yayıncılık*, Ankara ,187-386, (2005).
4. Kaplan W.,Advanced Calculus 4th.Ed ., *Addison-Wesley Publishing Company*, New York,449-519 ,(1991).
5. Colton D., Paritial Differential Equations An Introduction,*Random House*,New York, 151-235, (1988) .
6. Yaşar İ.B., Uygulamalı Matematik, *Gazi Üniversitesi*, YayınNo:127,Ankara220, (1988).
7. Sıddıqı A.H., Applied Functional Analysis Numerical Methods, Wavelet Methods and Image Processing, *Marcel Dekker*, New York – Bassel ,232-240, (2004).
8. Reddy J. N., An Introduction to The Mathematical Theory of Finite Elements, *A.Willey – Interscience Publication*, 79-87,141-143, (1976)
9. Reddy J. N., Functional Analysis and Boundary Value: An Intro Ductory *Copullishe in the United Staty with John Wielly and Sons* , NewYork,170-181, (1986).
10. Mukherjea A. and POTHOVEN K., Real and Functional Analysis Part B Functional Analysis, *Dkunum Press* , New York, 123-125 (1984).
11. Kirsch A., The Domain Derivative and Two Application in Inverse Scattering Theory, *Inverse Problems 9*, 81–86 (1993).
12. Hettich F., On The Uniqueness in Inverse Conductive Scattring Problem for The Helmholtz Equation, *Inevrse Problems 10*, 129–144 (1994).
13. Colton D., Kress R. ,İntegral Equation Methods In Scottering Theory *A.Willey – Interscience Publication John Willey and Sons*, New York, 35-37,(1983).

14. Yan G. and Pang P.Y.H., The Uniqueness of the Inverse Obstacle Scattering Problem with Transmission Boundary Conditions, *Computers Math. Applic.*, 36(3):63-69(1998).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : BOZKURT, Engin
 Uyruğu : T.C.
 Doğum Tarihi ve Yeri : 19.06.1977 Ankara
 Medeni Hali : Bekar
 Telefon : 0 (312) 338 62 85
 e-mail : enginbozkurt_77@hotmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Gazi Üniversitesi Matematik	1999
Lise	Aydınlıkevler Lisesi	1994

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
1999-2001	Erzincan Kemah Y.İ.B.O	Öğretmen
2001-2004	Ankara Doğanatepe Ç.P.L	Öğretmen
2004-2006	Ankara Aydınlıkevler Lisesi	Öğretmen
2006-	Ankara Pursaklar İ.M.K.B A.M.L ve E.M.L	Öğretmen