

**POZİTİF LİNEER OPERATÖRLER VE İSTATİSTİKSEL
A - TOPLANABİLME**

ARİFE YAPICIOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

T.C.
SİNOP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

POZİTİF LİNEER OPERATÖRLER VE İSTATİSTİKSEL

A - TOPLANABİLME

ARİFE YAPICIOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
YRD. DOÇ. DR. SEVDA AKDAĞ

SİNOP – 2014

T.C.
SİNOP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bu çalışma, jürimiz tarafından 08/01/2014 tarihinde yapılan sınav ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Kamil DEMİRCİ



Üye : Doç. Dr. Şeyhmus YARDIMCI



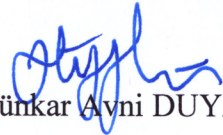
Üye : Yrd. Doç. Dr. Sevda AKDAĞ



ONAY :

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

7.2/2014


Doç. Dr. Hünkar Ayni DUYAR
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

POZİTİF LİNEER OPERATÖRLER VE İSTATİSTİKSEL

A - TOPLANABİLME

ÖZET

Bu yüksek lisans tezi üç bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrıldı. İkinci bölümde sırasıyla pozitif lineer operatörler, istatistiksel yakınsaklık ve A - istatistiksel yakınsaklık kavramları tanıtıldı ve bu kavramlar ile ilgili bazı bilinen sonuçlar verildi. Ayrıca istatistiksel yakınsaklık ve A - istatistiksel yakınsaklık kavramları kullanılarak klasik Korovkin tipi teorem ve periyodik fonksiyonlar için Korovkin tipi teorem ispatlandı. Üçüncü bölümün ilk kısmında A - istatistiksel yakınsaklık' tan daha kuvvetli olan istatistiksel A - toplanabilme ile ilgili bazı kavramlar tanıtıldı. İkinci ve üçüncü kısmında istatistiksel A - toplanabilme kavramı kullanılarak pozitif lineer operatörler için Korovkin tipi yaklaşım teoremi ispatlandı ve süreklilik modülü yardımı ile yakınsama oranı hesaplandı. Dördüncü kısmında ise istatistiksel A - toplanabilme kavramı kullanılarak $\mathbb{R}$ ' de sürekli ve 2π periyotlu fonksiyonların uzayı üzerinde tanımlı pozitif lineer operatörlerin dizileri için Korovkin tipi yaklaşım teoremi incelendi ve bu teoremin bu uzaydaki klasik Korovkin tipi yaklaşım teoreminden daha kuvvetli olduğu gösterildi. Son olarak periyodik fonksiyonlar için süreklilik modülü yardımı ile yakınsama oranı hesaplandı.

Anahtar Kelimeler: Pozitif lineer operatör, istatistiksel yakınsaklık, A - istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel A - toplanabilme, Korovkin tipi yaklaşım teoremi, süreklilik modülü.

POSITIVE LINEAR OPERATORS AND STATISTICAL

A - SUMMABILITY

ABSTRACT

This master thesis consists of three chapters. The first chapter was devoted to the introduction. In the second section, respectively, positive linear operators, statistical convergence and A - statistical convergence were introduced and some of the results known about these concepts were given. Furthermore, classic Korovkin type theorem and Korovkin type theorem for periodic functions was proven using statistical convergence and A - statistical convergence. In the first section of the third chapter some concepts about statistical A - summability which are stronger than A - statistical convergence were introduced. In the second and third section Korovkin type approximation theorem for positive linear operators was proven using statistical A - summability and convergence rate was calculated with the help of modulus of continuity. In the fourth section Korovkin type approximation theorem for positive linear operators examined using statistical A - summability on continuous 2π - periodic functions space on $\mathbb{R}$ and this theorem was shown to be stronger than classical Korovkin type approximation theorem in this space. Finally, convergence rate of periodic functions was calculated with the help of modulus of continuity.

Key Words: Positive linear operator, statistical convergence, A - statistical convergence, statistical A - summability, Korovkin type approximation theorem, modulus of continuity.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın belirlenmesi ve yürütülmesi esnasında ilgi ve desteğini eksik etmeyen, ortaya çıkan her türlü bilimsel problemin çözümünde önerileriyle beni yönlendiren danışman hocam, Sayın Yrd. Doç. Dr. Sevda AKDAĞ(Sinop Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi)' a ve çalışmalarımın her aşamasında büyük tecrübesiyle bana yol gösteren, beni özveriyle dinleyen ve yardımlarını esirgemeyen Sayın Prof. Dr. Kamil DEMİRCİ(Sinop Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi)' ye, çalışmalarım boyunca bana yardımcı olan arkadaşlarım Araş. Gör. Sevda ORHAN ve Araş. Gör. Ayşenur UÇAR' a en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca desteğini her zaman hissettiğim ve hep yanımda olan annem İftade KANAR' a, babam Mustafa KANAR' a ve eşim İlker YAPICIOĞLU' na sonsuz teşekkür ederim.

Arife YAPICIOĞLU

Ocak, 2014

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ	v
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	2
2.1. Pozitif Lineer Operatörler	2
2.2. Korovkin Tipi Teorem	3
2.3. İstatistiksel Yakınsaklık	5
2.4. İstatistiksel Korovkin Tipi Teorem	7
2.5. A - İstatistiksel Yakınsaklık	9
2.6. A - İstatistiksel Korovkin Tipi Teorem	12
2.7. Periyodik Fonksiyonlar İçin Korovkin Tipi Teorem	14
3. MATERYAL VE YÖNTEM	18
4. BULGULAR	19
4.1. İstatistiksel A - Toplanabilme	19
4.2. Pozitif Lineer Operatörlerin İstatistiksel A - Toplanabilmesi	21
4.3. İstatistiksel A - Toplanabilme Yardımı İle Yakınsama Oranı	26
4.4. İstatistiksel A - Toplanabilme Yardımı İle Periyodik Fonksiyonlar İçin Korovkin Tipi Teorem	29
4.5. İstatistiksel A - Toplanabilme Yardımı İle Periyodik Fonksiyonlar İçin Yakınsama Oranı	32
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	42
6. KAYNAKLAR	43
ÖZGEÇMİŞ	45

SEMBOLLER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$ A $	: A kümesinin eleman sayısı
$Ax := (Ax)_n : \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \right)$	dönüşüm dizisi
$B[a, b]$	: $[a, b]$ üzerindeki sınırlı fonksiyonların uzayı
$C_M[a, b]$	: $[a, b]$ üzerinde sürekli ve reel eksen üzerinde sınırlı fonksiyonların uzayı
$C^*(\mathbb{R})$	: $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde sürekli ve 2π periyotlu fonksiyonların uzayı
C_1	: Birinci mertebeden Cesáro matrisi
$\ \cdot\ _B$	: $B[a, b]$ uzayının alışılmış supremum normu
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
c	: Yakınsak diziler uzayı
s	: Tüm diziler uzayı
st	: İstatistiksel yakınsak diziler uzayı
st_A	: A - istatistiksel yakınsak diziler uzayı
$((A)_{st})$	: İstatistiksel A - toplanabilir dizilerin uzayı
$\delta(K)$	: K kümesinin doğal yoğunluğu
$\delta_A(K)$	: K kümesinin A - yoğunluğu
χ_K	: K kümesinin karakteristik fonksiyonu
$\omega(f; \delta)$	: f fonksiyonunun süreklilik modülü
$(\overline{N}, p)$	: Riesz toplanabilme metodu
$\{B_n(f; x)\}$	: Bernstein polinomlar dizisi
$\{S_n(f; x)\}$	: Szasz operatörler dizisi
$\{F_n(f; x)\}$	: Fejér operatörler dizisi
$\{U_n(f; x)\}$	: Bernstein- Kantorovich operatörler dizisi

1. GİRİŞ

Toplanabilme Teorisi, Fourier Serileri, Fonksiyonel Analiz ve Yaklaşım Teorisi'nde önemli bir yer tutan istatistiksel yakınsaklık kavramı ilk olarak 1951 yılında Fast tarafından tanımlanmıştır. İstatistiksel yakınsaklığın sıkça kullanıldığı bir alan olan yaklaşım teorisi polinomların yaklaşımında ve Fonksiyonel Analiz' de önemli uygulamalara sahiptir. Korovkin tipi teoremler Yaklaşım Teorisi' nin temelini oluşturmaktadır (Korovkin, 1960; Devore, 1972). Pozitif lineer operatörlerin bir f fonksiyonuna yaklaşması problemi ilk olarak 1951 yılında Bohman tarafından incelenmiştir. 1953 yılında Korovkin, Bohman' ın koşullarının genel halde de gerçekleştiğini ispatlamıştır. Gadjiev ve Orhan tarafından 2002 yılında istatistiksel yakınsaklık yardımı ile istatistiksel Korovkin tipi teorem incelenmiş ve sonrasında A - istatistiksel Korovkin tipi yaklaşım teoremi elde edilmiştir. Ayrıca 2009 yılında Edely ve Mursaleen A - istatistiksel yakınsaklıktan daha kuvvetli olan istatistiksel A - toplanabilme kavramını tanımlamışlar ve A - istatistiksel yakınsaklık ile ilişkisini incelemişlerdir. Daha sonra Demirci ve Karakuş tarafından istatistiksel A - toplanabilme yardımı ile klasik Korovkin tipi teorem ve periyodik fonksiyonlar için Korovkin tipi teorem çalışılmıştır.

Hazırlanan bu yüksek lisans tezinde öncelikle pozitif lineer operatörler tanıtılacak, daha sonra istatistiksel yakınsaklık ve A - istatistiksel yakınsaklık kavramları verilerek bu kavramlar yardımı ile Korovkin tipi teoremler incelenecektir. Sonrasında ise Edely ve Mursaleen tarafından tanıtılan istatistiksel A - toplanabilme kavramı kullanılarak, Demirci ve Karakuş tarafından çalışılan klasik Korovkin tipi teorem ve periyodik fonksiyonlar için benzeri verilecektir.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde tez boyunca ihtiyaç duyulacak olan pozitif lineer operatörler, istatistiksel yakınsaklık ve A - istatistiksel yakınsaklık kavramları tanıtılacak ve bu kavramlar yardımı ile Korovkin tipi teoremler ispatlanacaktır. Ayrıca periyodik fonksiyonlar için Korovkin tipi yaklaşım teoremi incelenecektir.

2.1. Pozitif Lineer Operatörler

Öncelikle gerekli olan bazı fonksiyon uzaylarını hatırlatalım.

$C[a,b]$ uzayının elemanları aralığın iç noktalarında sürekli, a ve b uç noktalarında ise sağdan ve soldan sürekli fonksiyonlardır. $f \in C[a,b]$ için

$$\|f\|_{C[a,b]} = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

alışılmış supremum normu ile birlikte $C[a,b]$ uzayı bir Banach uzayı olur.

$C_M[a,b]$ ile $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli ve tüm reel eksen üzerinde sınırlı olan fonksiyonların uzayı gösterilecektir.

$D \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $B(D)$, D üzerindeki tüm sınırlı fonksiyonların uzayıdır. $f \in B(D)$ için

$$\|f\|_B = \sup_{x \in D} |f(x)|$$

olacak şekildeki alışılmış supremum normu ile birlikte $B(D)$ bir Banach uzayı olup bu norma göre yakınsaklık düzgün yakınsaklıktır.

2.1.1. Tanım: X ve Y iki fonksiyon uzayı olsun. X uzayından alınan herhangi bir f fonksiyonuna Y uzayında bir ve yalnız bir g fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralı varsa bu durumda X uzayından Y uzayına bir operatör tanımlanmıştır denir ve bu $L(f(t);x) = g(x)$ şeklinde gösterilir. Burada $L(f(t);x)$ gösterimi yerine $L(f;x)$ gösterimi kullanılacaktır.

X uzayına “ L operatörünün tanım kümesi” denir ve $X = D(L)$ ile gösterilir. $L(f;x) = g(x)$ olacak şekildeki g fonksiyonlarının kümesine de “ L operatörünün değer kümesi” denir ve $R(L)$ ile gösterilir. Burada $R(L) \subset Y$ olur. X uzayı lineer bir uzay olduğundan lineer operatörün tanımı verilebilir.

2.1.2. Tanım: f ve g , X uzayında herhangi iki fonksiyon, her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve her $x \in X$ için L operatörü

$$L(\alpha f + \beta g; x) = \alpha L(f; x) + \beta L(g; x)$$

koşulunu gerçekleştiriyor ise L operatörüne “lineer operatör” denir. Tanımdan da görüleceği gibi L lineer operatörü için $L(0; x) = 0$ olur.

Lineer operatörler kümesi içinde önemli bir alt sınıf olan pozitif lineer operatörler aşağıdaki şekilde tanımlanır:

2.1.3. Tanım: $X^+ = \{f \in X : f(x) \geq 0\}$, $Y^+ = \{g \in Y : g(x) \geq 0\}$ olsun. Eğer X uzayında tanımlanmış bir L lineer operatörü X^+ kümesindeki herhangi bir f fonksiyonunu Y uzayında pozitif bir fonksiyona dönüştürüyor ise L operatörüne “pozitif lineer operatör” denir.

L pozitif lineer operatörü için $L(X^+) \subset Y^+$ sağlanır. Yani $f(x) \geq 0$ olduğunda $L(f; x) \geq 0$ olur. O halde L pozitif lineer operatör ise her $x \in X$ için $f(x) \leq g(x)$ olduğunda $L(f; x) \leq L(g; x)$ olacağından bu bize pozitif lineer operatörün monoton olduğunu gösterir.

2.2. Korovkin Tipi Teorem

1951 yılında Bohman, toplam şeklindeki pozitif lineer operatörler dizisinin $[0,1]$ aralığında sürekli $f(x)$ fonksiyonuna yakınsaması problemini incelemiştir. 1953 yılında ise Korovkin $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyona yakınsayan pozitif lineer operatörler dizisinin var olduğunu ispatlamış ve Bohman’ın koşullarının genel halde de gerçekleştiğini göstermiştir.

Şimdi literatürde “Korovkin Teoremi” olarak bilinen bu teoremi hatırlayalım.

2.2.1. Teorem: $L_k : C_M[a,b] \rightarrow B[a,b]$ pozitif lineer operatörler dizisi

$$(i) \lim_{k \rightarrow \infty} \|L_k(1; x) - 1\|_B = 0$$

$$(ii) \lim_{k \rightarrow \infty} \|L_k(t; x) - x\|_B = 0$$

$$(iii) \lim_{k \rightarrow \infty} \|L_k(t^2; x) - x^2\|_B = 0$$

koşullarını sağlıyor ise her $f \in C_M[a,b]$ için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|L_k(f; x) - f(x)\|_B = 0$$

olur (Korovkin, 1960).

Şimdi Korovkin tipi teoreminin koşullarını sağlayan bir örnek verelim.

$S_k : C_M[0,1] \rightarrow B[0,1]$ ve $f \in C_M[0,1]$ olmak üzere

$$S_k(f; x) = e^{-kx} \sum_{n=0}^{\infty} f\left(\frac{n}{k}\right) \frac{(kx)^n}{n!}, \quad x \in [0,1] \quad (2.2.1.1)$$

ile tanımlanan Szasz operatörü $\frac{(kx)^n}{n!} \geq 0$ ve $e^{-kx} \geq 0$ olduğundan pozitif lineer bir operatördür. Bu operatörün Korovkin tipi teoremin koşullarını sağladığını gösterelim.

$$(i) \quad S_k(1; x) = e^{-kx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kx)^n}{n!} = e^{-kx} e^{kx} = 1$$

$$\begin{aligned} (ii) \quad S_k(t; x) &= e^{-kx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{k} \frac{(kx)^n}{n!} \\ &= e^{-kx} x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(kx)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= e^{-kx} x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kx)^n}{n!} \\ &= e^{-kx} x e^{kx} = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (iii) \quad S_k(t^2, x) &= e^{-kx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{k^2} \frac{(kx)^n}{n!} \\ &= e^{-kx} x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{k} \frac{(kx)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= e^{-kx} x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{k} \frac{(kx)^{n-1}}{(n-1)!} + e^{-kx} \frac{x}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(kx)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= e^{-kx} x^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(kx)^{n-2}}{(n-2)!} + e^{-kx} \frac{x}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kx)^n}{n!} \\ &= e^{-kx} x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kx)^n}{n!} + e^{-kx} \frac{x}{k} e^{kx} = x^2 + \frac{x}{k} \end{aligned}$$

olur. O halde $k \rightarrow \infty$ için

$$(i) \lim_{k \rightarrow \infty} \|S_k(1; x) - 1\|_B = 0$$

$$(ii) \lim_{k \rightarrow \infty} \|S_k(t; x) - x\|_B = 0$$

$$(iii) \lim_{k \rightarrow \infty} \|S_k(t^2; x) - x^2\|_B = 0$$

olduğundan Korovkin tipi teoremin koşulları sağlanır. Dolayısıyla her $f \in C_M[0,1]$ için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|S_k(f; x) - f(x)\|_B = 0$$

gerçeklenir.

2.3. İstatistiksel Yakınsaklık

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir alt kümesi A olmak üzere $A_j := \{k \leq j : k \in A\}$ şeklinde tanımlansın ve A_j kümesinin eleman sayısı $|A_j|$ ile gösterilsin.

2.3.1. Tanım: $\mathbb{N}$ kümesinin bir A alt kümesi için

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|A_j|}{j}$$

limiti mevcut ise, bu limit değerine A kümesinin “yoğunluğu (veya doğal yoğunluğu)” denir ve $\delta(A)$ ile gösterilir (Niven ve Zuckerman, 1980).

(a_k) pozitif tamsayıların bir dizisi ve $K = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $\delta(K)$ mevcut ise

$$\delta(K) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{a_k}$$

ile verilir (Niven ve Zuckerman, 1980).

$$\text{Örneğin; } \delta(\mathbb{N}) = 1, \quad \delta\{2j : j \in \mathbb{N}\} = \delta\{2j+1 : j \in \mathbb{N}\} = \frac{1}{2}, \quad \delta\{j^2 : j \in \mathbb{N}\} = 0$$

olduğu kolayca görülebilir. Doğal sayıların her bir sonlu alt kümesi sıfır yoğunluktadır. Hatta bir A kümesi yoğunluğa sahip ise bu durumda $\delta(\mathbb{N} - A) = 1 - \delta(A)$ olur (Niven ve Zuckerman, 1980; Freedman ve Sember, 1981).

2.3.2. Tanım: $x := (x_k)$ reel yada kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} \left| \{k \leq j : |x_k - L| \geq \varepsilon\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa bu durumda x dizisi L sayısına “istatistiksel yakınsaktır” denir ve $st - \lim x = L$ ile gösterilir (Fast, 1951; Steinhaus, 1951).

Eğer x dizisi bir L sayısına istatistiksel yakınsak ise, bu durumda L sayısının herhangi bir $\varepsilon > 0$ komşuluğunda dizinin sonsuz çoklukta terimi bulunurken bu komşuluğun dışında da, indis kümesinin yoğunluğu sıfır olmak koşulu ile yine diziye ait sonsuz çoklukta terim bulunabilir. Bu durum istatistiksel yakınsaklığın bilinen anlamdaki yakınsaklıktan daha genel olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla yakınsak diziler uzayı c ve istatistiksel yakınsak diziler uzayı st olmak üzere $c \subset st$ olduğu açıktır. Yani istatistiksel yakınsaklık bilinen anlamdaki yakınsaklıktan daha kuvvetlidir.

Şimdi istatistiksel yakınsaklık kavramı için gerekli aşağıdaki karakterizasyonu hatırlatalım.

2.3.3. Teorem: $x = (x_k)$ dizisinin bir L sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\delta\{j_k : k \in \mathbb{N}\} = 1$ ve $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{j_k} = L$ olacak şekilde en az bir (j_k) indis dizisinin var olmasıdır (Salat, 1980; Fridy, 1985; Cannor, 1989).

Bu teoremden de anlaşılaçağı üzere x dizisinin bir L sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ için $\delta(A) = 1$ olacak şekilde doğal sayıların öyle bir A alt kümesi ve en az bir $j_0 = j_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyle ki $j \geq j_0$ olacak şekildeki her $j \in A$ için $|x_j - L| < \varepsilon$ sağlanır. Yani 1 yoğunluklu indis kümesi üzerinde (veya 0 yoğunluklu indis kümesi dışında) x dizisi L sayısına alışılmış anlamda yakınsak ise x dizisi L sayısına istatistiksel yakınsak olur.

2.3.4. Örnek: $x = (x_k)$ dizisinin genel terimi

$$x_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad k = j^2 \\ 0 & , \quad k \neq j^2 \end{cases} , \quad (j = 1, 2, \dots)$$

şeklinde tanımlansın. $K_1 := \{k = j^2 : j \in \mathbb{N}\}$, $K_2 := \{k \neq j^2 : j \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $\delta(K_1) = 0$ ve $\delta(K_2) = 1$ olur ki 2.3.3. Teorem’ den x dizisinin 0 sayısına istatistiksel yakınsak olduğu kolayca görülebilir. Hâlbuki burada x dizisi alışılmış anlamda yakınsak değildir. Bu örnek bir dizinin sınırlı ıraksak olmasına rağmen istatistiksel yakınsak olduğunu gösterir.

Yakınsak her dizinin sınırlı olduğu biliniyor, fakat istatistiksel yakınsak dizilerin sınırlı olması gerekmez.

2.3.5. Örnek: $u = (u_k)$ dizisinin genel terimi

$$u_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = j^2 \\ 0, & k \neq j^2 \end{cases}, \quad (j = 1, 2, \dots)$$

şeklinde tanımlansın. $u = (u_k)$ dizisi için $st - \lim u = 0$ olmasına rağmen bu dizi üstten sınırsızdır. Bu örnekten de görüleceği gibi u dizisi sınırsız ıraksak olmasına rağmen istatistiksel yakınsaktır.

2.4. İstatistiksel Korovkin Tipi Teorem

İstatistiksel yakınsaklık yardımı ile Korovkin tipi yaklaşım teoremi ilk kez Gadjiev ve Orhan tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir.

2.4.1. Teorem: Eğer $L_k : C_M[a, b] \rightarrow B[a, b]$ pozitif lineer operatörler dizisi

$$(i) \quad st - \lim_{k \rightarrow \infty} \|L_k(1; x) - 1\|_B = 0$$

$$(ii) \quad st - \lim_{k \rightarrow \infty} \|L_k(t; x) - x\|_B = 0$$

$$(iii) \quad st - \lim_{k \rightarrow \infty} \|L_k(t^2; x) - x^2\|_B = 0$$

koşullarını sağlıyor ise her $f \in C_M[a, b]$ için

$$st - \lim_{k \rightarrow \infty} \|L_k(f; x) - f(x)\|_B = 0$$

olur (Gadjiev ve Orhan, 2002).

2.4.2. Örnek: $B_k : C_M[0, 1] \rightarrow B[0, 1]$, $\{B_k\}$ Bernstein polinomları

$$B_k(f; x) = \sum_{n=0}^k f\left(\frac{n}{k}\right) \binom{k}{n} x^n (1-x)^{k-n}, \quad x \in [0, 1] \quad (2.4.2.1)$$

olmak üzere, (u_k) dizisi

$$u_k := \begin{cases} \sqrt{k}, & k = j^2 \\ 0, & k \neq j^2 \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots)$$

şeklinde tanımlansın. 2.3.5 Örnek' ten (u_k) dizisi yakınsak değildir. Fakat $st - \lim u_k = 0$ olur. Ayrıca (2.4.2.1) ile tanımlı Bernstein polinomu için gerekli hesaplamalar yapıldığında (Lorentz, 1986)

$$B_k(1; x) = 1$$

$$B_k(t; x) = x$$

$$B_k(t^2; x) = x^2 + \frac{x - x^2}{k}$$

olduğu görülür.

Şimdi Bernstein polinomu ve yukarıda tanımlanan (u_k) dizisi yardımı ile

$$D_k(f; x) = (1 + u_k) B_k(f; x)$$

şeklinde tanımlı $\{D_k\}$ pozitif lineer operatörünü göz önüne alalım ve bu operatörün 2.4.1. Teorem' in (i), (ii) ve (iii) koşullarını gerçeklediğini gösterelim.

(i) $D_k(1; x) = (1 + u_k)$ olup $\|D_k(1; x) - 1\|_B = 1 + u_k - 1 = u_k$ olur ki $st - \lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 0$ olduğundan $st - \lim_{k \rightarrow \infty} \|D_k(1; x) - 1\|_B = 0$ bulunur.

(ii) $D_k(t; x) = (1 + u_k)x$ olup

$$\|D_k(t; x) - x\|_B = \sup_{x \in [0,1]} |D_k(t; x) - x| = \sup_{x \in [0,1]} |u_k x| = u_k \text{ olur ki}$$

$st - \lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 0$ olduğundan $st - \lim_{k \rightarrow \infty} \|D_k(t; x) - x\|_B = 0$ bulunur.

(iii) $D_k(t^2; x) = (1 + u_k) \left(x^2 + \frac{x - x^2}{k} \right)$ olup

$$\begin{aligned} \|D_k(t^2; x) - x^2\|_B &= \sup_{x \in [0,1]} |D_k(t^2; x) - x^2| = \sup_{x \in [0,1]} \left| (1 + u_k) \left(x^2 + \frac{x - x^2}{k} \right) - x^2 \right| \\ &= \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{x - x^2}{k} + u_k x^2 + u_k \frac{x - x^2}{k} \right| \leq \frac{1}{4k} + u_k + u_k \frac{1}{4k} \end{aligned}$$

olur ki $st - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{4k} = 0$ ve $st - \lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 0$ olduğundan $st - \lim_{k \rightarrow \infty} \|D_k(t^2; x) - x^2\|_B = 0$

bulunur.

O halde $\{D_k\}$ operatörü istatistiksel Korovkin tipi teoremin koşullarını sağlar.

Dolayısıyla her $f \in C_M[0,1]$ için

$$st - \lim_{k \rightarrow \infty} \|D_k(f, x) - f(x)\|_B = 0$$

bulunur. Fakat burada $\|D_k(1; x) - 1\|_B = 1 + u_k - 1 = u_k$ ve (u_k) dizisi alışılmış anlamda yakınsak olmadığından $\|D_k(1; x) - 1\|_B \not\rightarrow 0$ olur. O halde $\{D_k\}$ operatörü istatistiksel Korovkin tipi teoremin koşullarını sağlamasına rağmen klasik Korovkin tipi teoremin koşullarını sağlamaz.

2.5. A- İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda A - yoğunluk ve A - istatistiksel yakınsaklık kavramları tanıtılacaktır. İlk olarak A - İstatistiksel yakınsaklığın tanımı için gerekli olan bazı tanım ve notasyonları verelim.

X ve Y , tüm diziler uzayı olan s' nin alt kümeleri ve $A = (a_{jk})$ reel yada kompleks terimli bir sonsuz matris olmak üzere $x = (x_k) \in X$ ve her $j \in \mathbb{N}$ için

$$(Ax)_j := \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} x_k$$

serisi yakınsak ise $Ax := ((Ax)_j)$ dönüşüm dizisi mevcuttur denir. Eğer her $x \in X$ için Ax dönüşüm dizisi mevcut ve $Ax \in Y$ ise $A = (a_{jk})$ matrisi X uzayından Y uzayına bir matris dönüşümü tanımlar denir. Eğer bir x dizisi için Ax dönüşüm dizisi mevcut ve bir L sayısına yakınsak ise x dizisi L sayısına “ A - toplanabilir” denir ve bu durum $A\text{-}\lim x = L$ şeklinde gösterilir.

2.5.1. Tanım: $A = (a_{jk})$, $(j, k = 1, 2, \dots)$ sonsuz bir matris olmak üzere verilen bir (x_k) dizisi için $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = L$ olduğunda $\lim_{j \rightarrow \infty} (Ax)_j = L$ koşulu gerçekleşiyor ise A matrisine “regüler matris” denir (Hardy, 1949).

Bir matrisin regüler olması için gerek ve yeter şartları veren Silverman- Teopltz Teoremi aşağıdaki şekilde verilmiştir.

2.5.2. Teorem (Silverman- Teopltz): Bir $A = (a_{jk})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter koşul,

$$(i) \quad \|A\| := \sup_j \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}| < \infty,$$

$$(ii) \quad \text{Her } k \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{j \rightarrow \infty} a_{jk} = 0,$$

$$(iii) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} = 1,$$

koşullarının sağlanmasıdır (Hardy, 1949; Boos, 2000).

2.5.3. Örnek: Aritmetik ortalamaya karşılık gelen $C_1 = (c_{jk})$

$$c_{jk} = \begin{cases} \frac{1}{j}, & 1 \leq k \leq j \\ 0, & k > j \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots)$$

yani;

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & . & . & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & . & . & \dots \\ . & . & . & \dots & . & . & \dots \\ . & . & . & \dots & . & . & \dots \\ . & . & . & \dots & . & . & \dots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} & 0 & \dots \\ . & . & . & \dots & . & . & \dots \\ . & . & . & \dots & . & . & \dots \\ . & . & . & \dots & . & . & \dots \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanan Cesáro matrisi regülerdir.

Bir $x = (x_k)$ dizisinin L sayısına istatistiksel yakınsak olması demek her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} |\{k \leq j : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olması demektir. Ya da buna denk olarak $K := K(\varepsilon) = \{k \leq j : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (C_1 \chi_K)_j = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j \chi_{K(\varepsilon)}(k) = 0$$

olmasıdır. Burada χ_K , K kümesinin karakteristik fonksiyonunu göstermektedir.

Freedman ve Sember 1981 yılında bu düşüncüyü kullanarak istatistiksel yakınsaklık tanımındaki Cesáro matrisi yerine negatif olmayan regüler bir $A = (a_{jk})$ sonsuz matrisini alarak istatistiksel yakınsaklığı A - istatistiksel yakınsaklığa genişletmişlerdir.

2.5.4. Tanım: $A = (a_{jk})$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. $K \subseteq \mathbb{N}$ için

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k \in K} a_{jk} = \lim_{j \rightarrow \infty} (A \chi_K)_j$$

limiti mevcut ise bu limit değerine K kümesinin “ A - yoğunluğu” denir ve $\delta_A(K)$ ile gösterilir (Freedman ve Sember, 1981).

Eğer bir K kümesi A - yoğunluğa sahip ise bu durumda $\delta_A(\mathbb{N} - K) = 1 - \delta_A(K)$ olacaktır. Eğer K kümesi sonlu elemanlı bir küme ise $\delta_A(K) = 0$ olacağı açıktır.

2.5.5. Örnek:

$$a_{jk} = \begin{cases} 1, & k = j^2 \\ 0, & k \neq j^2 \end{cases}, (j=1,2,\dots)$$

şeklinde tanımlanan $A = (a_{jk})$ matrisi göz önüne alınsın. A matrisi negatif olmayan regüler bir matristir. Bu durumda $K_1 = \{k = j^2 : j \in \mathbb{N}\}$ ve $K_2 = \{k \neq j^2 : j \in \mathbb{N}\}$ kümeleri için $\delta_A(K_1) = 1$ ve $\delta_A(K_2) = 0$ olduğu kolayca görülür.

2.5.6. Tanım: $A = (a_{jk})$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $K := K(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ olmak üzere

$$\delta_A(K) = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \chi_{K(\varepsilon)}(k) = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k \in K} a_{jk} = 0$$

gerçekleniyor ise bu durumda $x = (x_k)$ dizisi L sayısına “ A - istatistiksel yakınsaktır” denir ve $st_A - \lim x = L$ şeklinde gösterilir (Freedman ve Sember, 1981; Kolk, 1993; Miller, 1995).

Bu tanımda eğer A matrisi yerine I birim matrisi alınırsa alışılmış anlamdaki yakınsaklık elde edilir. Hatta A matrisi yerine C_1 Cesáro matrisi alındığında ise A - istatistiksel yakınsaklık istatistiksel yakınsaklığa indirgenir.

2.3.3. Teorem’in bir benzeri A - istatistiksel yakınsaklık için şu şekilde verilebilir.

2.5.7. Teorem: Bir x dizisinin L sayısına A - istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\delta_A\{j_k : k \in \mathbb{N}\} = 1$ ve $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{j_k} = L$ olacak şekilde en az bir (j_k) indis dizisinin var olmasıdır (Kolk, 1993; Miller, 1995).

2.5.8. Örnek: $A = (a_{jk})$ matrisi

$$a_{jk} = \begin{cases} 1, & k = j^2 + 1 \\ 0, & k \neq j^2 + 1 \end{cases} \quad (j=1,2,\dots)$$

şeklinde tanımlansın. A matrisi negatif olmayan regüler bir matristir. $x = (x_k)$ dizisi

$$x_k = \begin{cases} \frac{1}{5}, & k = j^2 + 1 \\ 0, & k \neq j^2 + 1 \end{cases} \quad (j=1,2,\dots)$$

ile verilsin. Her $\varepsilon > 0$ için $K(\varepsilon) = \left\{ k \in \mathbb{N} : \left| x_k - \frac{1}{5} \right| \geq \varepsilon \right\}$ olmak üzere

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \chi_{K(\varepsilon)}(k) = 0$$

olacağından $st_A - \lim x = \frac{1}{5}$ elde edilir.

Yukarıdaki örnekte x dizisi alışılmış anlamda yakınsak değildir. Dolayısıyla A -istatistiksel yakınsak bir dizinin klasik anlamda yakınsak olması gerekmez.

2.6. A - İstatistiksel Korovkin Tipi Teorem

A - istatistiksel yakınsaklık yardımı ile Korovkin tipi yaklaşım teoremi aşağıdaki şekilde verilmiştir.

2.6.1. Teorem: $A = (a_{jk})$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. Eğer

$L_k : C_M[a, b] \rightarrow B[a, b]$ pozitif lineer operatörler dizisi

$$(i) \quad st_A - \lim_{k \rightarrow \infty} \|L_k(1, x) - 1\|_B = 0$$

$$(ii) \quad st_A - \lim_{k \rightarrow \infty} \|L_k(t, x) - x\|_B = 0$$

$$(iii) \quad st_A - \lim_{k \rightarrow \infty} \|L_k(t^2, x) - x^2\|_B = 0$$

koşullarını sağlıyor ise her $f \in C_M[a, b]$ için

$$st_A - \lim_{k \rightarrow \infty} \|L_k(f, x) - f(x)\|_B = 0$$

olur (Duman ve ark., 2003).

İspat : (i), (ii) ve (iii) koşulları sağlansın. $f \in C_M[a, b]$ ve $x \in [a, b]$ sabit olsun. f fonksiyonu tüm $\mathbb{R}$ üzerinde sınırlı olduğundan bir M pozitif sayısı vardır öyle ki tüm t ve x değerleri için

$$|f(t) - f(x)| \leq 2M \quad (2.6.1.1)$$

yazılabilir.

$f \in C_M[a, b]$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ öyleki $t \in (-\infty, \infty)$ ve $x \in [a, b]$ için $|t - x| < \delta$ olduğunda

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon \quad (2.6.1.2)$$

olur. Çünkü: $t, x \in [a, b]$ ise (2.6.1.2) eşitsizliği f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli olduğundan gerçekleşir. $t \notin [a, b]$ ve $x \in [a, b]$ olduğunda ise (2.6.1.2) eşitsizliği f fonksiyonu a ve b noktalarında sırası ile soldan ve sağdan sürekli olduğu için sağlanır. (2.6.1.1) ve (2.6.1.2) eşitsizliklerinden dolayı her $\varepsilon > 0$ için $t \in (-\infty, \infty)$ ve $x \in [a, b]$ olmak üzere

$$|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 \quad (2.6.1.3)$$

eşitsizliği gerçekleşir. Çünkü; $|t-x| < \delta$ ise (2.6.1.3) eşitsizliği $\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2$ ifadesi pozitif olduğu için sağlanır. $|t-x| \geq \delta$ olduğunda ise $\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq 1$ olduğundan $\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 \geq 2M$ olur ki (2.6.1.1) eşitsizliğinden dolayı (2.6.1.3) eşitsizliği gerçekleşir.

Diğer taraftan $\{L_k\}$ operatörünün pozitif lineer operatör olduğunu kullanılırsa

$$\begin{aligned} |L_k(f; x) - f(x)| &= |L_k(f; x) - L_k(f(x); x) + L_k(f(x); x) - f(x)| \\ &= |L_k(f(t) - f(x); x) + f(x)(L_k(1; x) - 1)| \\ &\leq |L_k(f(t) - f(x); x)| + |f(x)| |L_k(1; x) - 1| \\ &\leq L_k(|f(t) - f(x)|; x) + M |L_k(1; x) - 1| \end{aligned}$$

elde edilir. Burada her $\varepsilon > 0$ için $c := \max\{|a|, |b|\}$ olduğu ve (2.6.1.3) eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} |L_k(f; x) - f(x)| &\leq L_k(|f(t) - f(x)|; x) + M |L_k(1; x) - 1| \\ &\leq L_k\left(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2; x\right) + M |L_k(1; x) - 1| \\ &= \varepsilon L_k(1; x) + \frac{2M}{\delta^2} L_k((t-x)^2; x) + M |L_k(1; x) - 1| \\ &= \varepsilon L_k(1; x) + \frac{2M}{\delta^2} (L_k(t^2; x) - 2xL_k(t; x) + x^2L_k(1; x)) + M |L_k(1; x) - 1| \\ &\leq \varepsilon + \left(\varepsilon + M + \frac{2M}{\delta^2} c^2\right) |L_k(1; x) - 1| + \frac{4M}{\delta^2} c |L_k(t; x) - x| \\ &\quad + \frac{2M}{\delta^2} |L_k(t^2; x) - x^2| \end{aligned}$$

olur ki $K = \max \left\{ \varepsilon + M + \frac{2M}{\delta^2} c^2, \frac{4M}{\delta^2} c, \frac{2M}{\delta^2} \right\}$ seçilirse

$$|L_k(f; x) - f(x)| \leq \varepsilon + K \left\{ |L_k(1; x) - 1| + |L_k(t; x) - x| + |L_k(t^2; x) - x^2| \right\}$$

bulunur. O halde $x \in [a, b]$ üzerinden supremum norm alınır

$$\|L_k(f; x) - f(x)\|_B \leq \varepsilon + K \left\{ \|L_k(1; x) - 1\|_B + \|L_k(t; x) - x\|_B + \|L_k(t^2; x) - x^2\|_B \right\}$$

elde edilir. Verilen bir $r > 0$ için $\varepsilon > 0$ seçilsin öyle ki $\varepsilon < r$ olsun. O zaman

$$D := \left\{ k : \|L_k(f; x) - f(x)\|_B \geq r \right\}$$

$$D_1 := \left\{ k : \|L_k(1; x) - 1\|_B \geq \frac{r - \varepsilon}{3K} \right\}$$

$$D_2 := \left\{ k : \|L_k(t; x) - x\|_B \geq \frac{r - \varepsilon}{3K} \right\}$$

$$D_3 := \left\{ k : \|L_k(t^2; x) - x^2\|_B \geq \frac{r - \varepsilon}{3K} \right\}$$

ise $D \subset D_1 \cup D_2 \cup D_3$ olduğu kolayca görülebilir. Buradan

$$\sum_{k \in D} a_{jk} \leq \sum_{k \in D_1} a_{jk} + \sum_{k \in D_2} a_{jk} + \sum_{k \in D_3} a_{jk}$$

olmak üzere $j \rightarrow \infty$ limit alınır (i), (ii) ve (iii)' den

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|L_k(f; x) - f(x)\|_B = 0$$

elde edilir.

2.7. Periyodik Fonksiyonlar İçin Korovkin Tipi Teorem

$C^*(\mathbb{R})$ ile $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde sürekli ve 2π periyotlu fonksiyonların uzayı gösterilsin. f fonksiyonu $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde 2π periyotlu ise

$$f(x) = f(x + 2\pi k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

sağlanır. Bu uzay

$$\|f\|_{C^*(\mathbb{R})} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$$

supremum normu ile donatılmıştır.

Bu bölümde $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = \sin x$ test fonksiyonları kullanılacaktır.

$A = (a_{jk})$ negatif olmayan regüler bir matris olmak üzere $C^*(\mathbb{R})$ uzayında tanımlı pozitif lineer operatör dizilerinin klasik ve istatistiksel durumlarda yaklaşım özelliklerini inceleyelim.

2.7.1. Teorem: $L_k : C^*(\mathbb{R}) \rightarrow C^*(\mathbb{R})$ pozitif lineer operatörler dizisi olsun. Bu durumda

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|L_k(f_i; x) - f_i(x)\|_{C^*(\mathbb{R})} = 0, \quad (i = 0, 1, 2) \quad (2.7.1.1)$$

olması için gerek ve yeter koşul her $f \in C^*(\mathbb{R})$ için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|L_k(f; x) - f(x)\|_{C^*(\mathbb{R})} = 0 \quad (2.7.1.2)$$

olmasıdır (Korovkin, 1960).

2.7.2. Teorem: $A = (a_{jk})$ negatif olmayan regüler matris ve $L_k : C^*(\mathbb{R}) \rightarrow C^*(\mathbb{R})$ tanımlı pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} (a) \quad st_A - \lim_{k \rightarrow \infty} \|L_k(1; x) - 1\|_{C^*(\mathbb{R})} &= 0, \\ (b) \quad st_A - \lim_{k \rightarrow \infty} \|L_k(\cos t; x) - \cos x\|_{C^*(\mathbb{R})} &= 0, \\ (c) \quad st_A - \lim_{k \rightarrow \infty} \|L_k(\sin t; x) - \sin x\|_{C^*(\mathbb{R})} &= 0, \end{aligned} \quad (2.7.2.1)$$

olması için gerek ve yeter koşul her $f \in C^*(\mathbb{R})$ için

$$st_A - \lim_{k \rightarrow \infty} \|L_k(f; x) - f(x)\|_{C^*(\mathbb{R})} = 0 \quad (2.7.2.2)$$

olmasıdır (Duman, 2003).

İspat : (2.7.2.2) ise (2.7.2.1) durumu f_i ($i = 0, 1, 2$) fonksiyonları $C^*(\mathbb{R})$ ' ye ait olduğundan açıktır.

Şimdi (2.7.2.1) koşulu sağlansın. $f \in C^*(\mathbb{R})$ ve $I, \mathbb{R}$ kümesinin 2π uzunluklu kapalı alt aralığı olmak üzere $x \in I$ sabit olsun. f fonksiyonu sürekli olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ öyle ki $|t - x| < \delta$ koşulunu sağlayan limit değerleri için $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ elde edilir. f sınırlı olduğundan tüm $t \in \mathbb{R}$ için $|f(t) - f(x)| \leq 2\|f\|_{C^*(\mathbb{R})}$ olur. Burada 2π uzunluklu $(x - \delta, 2\pi + x - \delta]$ aralığı ele alınırsa her $t \in \mathbb{R}$ için $\psi(t) := \sin^2\left(\frac{t-x}{2}\right)$ olmak üzere

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon + \frac{2\|f\|_{C^*(\mathbb{R})}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \psi(t) \quad (2.7.2.3)$$

elde edilir. Burada iki durum söz konusudur.

1. Durum: $t \in (x - \delta, x + \delta)$ ise $|t - x| < \delta$ olur ve bu durumda $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ ve $\frac{2\|f\|_{C^*(\mathbb{R})}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \geq 0$ olduğundan sağlanır.

2. Durum : $t \in [x - \delta, 2\pi + x - \delta]$ ise $\delta \leq t - x \leq 2\pi - \delta$ dolayısıyla $\frac{\sin^2\left(\frac{t-x}{2}\right)}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \geq 1$

olduğundan sağlanır.

Dolayısıyla $f(t)$ ve $\psi(t)$ fonksiyonları 2π periyodik olduklarından her $t \in \mathbb{R}$ için (2.7.2.3) eşitsizliği sağlanır. $\{L_k\}$ operatörünün pozitif lineer operatör olduğu ve (2.7.2.3) eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} |L_k(f; x) - f(x)| &\leq L_k(|f(t) - f(x)|; x) + |f(x)| |L_k(1; x) - 1| \\ &\leq L_k\left(\varepsilon + \frac{2\|f\|_{C^*(\mathbb{R})}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \psi(t); x\right) + |f(x)| |L_k(1; x) - 1| \\ &= \varepsilon + \varepsilon |L_k(1; x) - 1| + \frac{2\|f\|_{C^*(\mathbb{R})}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} L_k(\psi(t); x) + \|f\|_{C^*(\mathbb{R})} |L_k(1; x) - 1| \end{aligned}$$

elde edilir. Yapılan hesaplamalar sonucu

$$\psi(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos t \cos x - \sin t \sin x)$$

bulunur. Bu yüzden

$$L_k(\psi(t); x) \leq \frac{1}{2} \{ |L_k(1; x) - 1| + |\cos x| |L_k(\cos t; x) - \cos x| + |\sin x| |L_k(\sin t; x) - \sin x| \}$$

olur ki bu eşitsizlik kullanılırsa

$$\begin{aligned} |L_k(f; x) - f(x)| &\leq \varepsilon + \left(\varepsilon + \|f\|_{C^*(\mathbb{R})} + \frac{\|f\|_{C^*(\mathbb{R})}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \right) \{ |L_k(1; x) - 1| + |L_k(\cos t; x) - \cos x| \\ &\quad + |L_k(\sin t; x) - \sin x| \} \end{aligned}$$

elde edilir. O zaman $K := \varepsilon + \|f\|_{C^*(\mathbb{R})} + \frac{\|f\|_{C^*(\mathbb{R})}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}$ olmak üzere $x \in [a, b]$ üzerinden

supremum norm alınırsa

$$\begin{aligned} \|L_k(f; x) - f(x)\|_{C^*(\mathbb{R})} &\leq \varepsilon + K \left\{ \|L_k(1; x) - 1\|_{C^*(\mathbb{R})} + \|L_k(\cos t; x) - \cos x\|_{C^*(\mathbb{R})} \right. \\ &\quad \left. + \|L_k(\sin t; x) - \sin x\|_{C^*(\mathbb{R})} \right\} \end{aligned}$$

olur. Verilen $r > 0$ için $\varepsilon < r$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ seçilsin.

$$D := \left\{ k : \|L_k(f; x) - f(x)\|_{C^*(\mathbb{R})} \geq r \right\}$$

$$D_1 := \left\{ k : \|L_k(1; x) - 1\|_{C^*(\mathbb{R})} \geq \frac{r - \varepsilon}{3K} \right\}$$

$$D_2 := \left\{ k : \|L_k(\cos t; x) - \cos x\|_{C^*(\mathbb{R})} \geq \frac{r - \varepsilon}{3K} \right\}$$

$$D_3 := \left\{ k : \|L_k(\sin t; x) - \sin x\|_{C^*(\mathbb{R})} \geq \frac{r - \varepsilon}{3K} \right\}$$

kümeleri belirlenip $D \subset D_1 \cup D_2 \cup D_3$ olduğu kullanılırsa

$$\sum_{k \in D} a_{jk} \leq \sum_{k \in D_1} a_{jk} + \sum_{k \in D_2} a_{jk} + \sum_{k \in D_3} a_{jk}$$

yazılabilir. Burada $k \rightarrow \infty$ için limit alınırsa (a), (b) ve (c) koşullarından dolayı her

$f \in C^*(\mathbb{R})$ için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|L_k(f; x) - f(x)\|_{C^*(\mathbb{R})} = 0$$

elde edilir.

3. MATERYAL VE YÖNTEMLER

Bulgular bölümünün ilk kısmında Edely ve Mursaleen (2009) tarafından tanımlanan istatistiksel A -toplantabilme kavramı tanıtıldı. İkinci kısmında istatistiksel A -toplantabilme yardımı ile pozitif lineer operatörlerin dizileri için Korovkin tipi yaklaşım teoremi Demirci ve Karakuş (2011) çalışmasındaki yöntemler kullanılarak ispatlandı. Üçüncü kısmında ise Demirci ve Karakuş (2011) çalışmasındaki yöntemler kullanılarak istatistiksel A -toplantabilme ve süreklilik modülü yardımı ile pozitif lineer operatörlerin yakınsama oranı incelendi.

Bulgular bölümünün dördüncü ve beşinci kısmında ise Karakuş ve Demirci (2012) çalışmasındaki yöntemler kullanılarak sırası ile periyodik fonksiyonlar için istatistiksel A -toplantabilme yardımı ile Korovkin tipi teorem ve yakınsama oranı incelendi.

4. BULGULAR

4.1. İstatistiksel A - Toplanabilme

Edely ve Mursaleen 2009 yılında A - istatistiksel yakınsaklıktan daha kuvvetli olan istatistiksel A - toplanabilme kavramını tanımlamışlar ve sonrasında A - istatistiksel yakınsaklık ile ilişkisini incelemişlerdir.

4.1.1. Tanım: $A = (a_{jk})$ negatif olmayan regüler bir matris ve $x = (x_k)$ bir dizi olsun.

Her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta\left(\left\{j \leq n : |y_j - l| \geq \varepsilon\right\}\right) = 0, \quad y_j = A_j(x)$$

yani;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{j \leq n : |A_j(x) - l| \geq \varepsilon\right\} \right| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi l sayısına “istatistiksel A - toplanabilirdir” denir ve $(A)_{st} - \lim x = l$ veya $st - \lim_{j \rightarrow \infty} A_j(x) = l$ ile gösterilir (Edely ve Mursaleen, 2009).

Dolayısıyla $x = (x_k)$ dizisinin l sayısına istatistiksel A - toplanabilir olması için gerek ve yeter koşul $A_j(x)$ dönüşüm dizisinin l sayısına istatistiksel yakınsak olmasıdır. $(A)_{st}$ ile tüm istatistiksel A - toplanabilir dizilerin uzayı gösterilecektir.

4.1.2. Not: İstatistiksel A - toplanabilme tanımında;

(i) $A = (a_{jk})$ matrisi yerine I birim matrisi alındığında istatistiksel A - toplanabilme, istatistiksel yakınsaklığa indirgenir.

(ii) $C_1 = (c_{jk})$ yani;

$$c_{jk} := \begin{cases} \frac{1}{j} & , \quad 1 \leq k \leq j \\ 0 & , \quad k > j \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots)$$

şeklinde tanımlı Cesáro matrisi alındığında istatistiksel A - toplanabilme, istatistiksel C_1 - toplanabilmeye indirgenir (Moricz, 2002).

(iii) $p = (p_k)$ reel bir dizi, $p_0 > 0$, $p_k \geq 0 (k \in \mathbb{N})$ ve $p_j := \sum_{k=0}^j p_k \rightarrow \infty (j \rightarrow \infty)$

olmak üzere $A = (a_{jk})$ matrisi

$$a_{jk} = \begin{cases} \frac{p_k}{p_j} & ; \quad 0 \leq k \leq j \\ 0 & ; \quad k > j \end{cases} \quad (k, j \in \mathbb{N}^0)$$

alındığında istatistiksel A - toplanabilme, istatistiksel $(\overline{N}, p)$ - toplanabilmeye indirgenir (Moricz ve Orhan, 2004).

4.1.3. Teorem: Eğer bir dizi sınırlı ve l sayısına A - istatistiksel yakınsak ise l sayısına A - toplanabilirdir ve dolayısıyla l sayısına istatistiksel A - toplanabilirdir, fakat tersi doğru değildir (Edely ve Mursaleen, 2009).

İspat: $x = (x_k)$ sınırlı bir dizi $st_A - \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = l$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $K(\varepsilon) := \{k \leq j : |x_k - l| \geq \varepsilon\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} |A_j(x) - l| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} x_k - l \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} + l \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} - l \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} (x_k - l) \right| + \left| l \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} - l \right| \\ &= \left| \sum_{k \notin K(\varepsilon)} a_{jk} (x_k - l) \right| + \left| \sum_{k \in K(\varepsilon)} a_{jk} (x_k - l) \right| + \left| l \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} - l \right| \\ &\leq \varepsilon \sum_{k \notin K(\varepsilon)} a_{jk} + \sup_{k \in K(\varepsilon)} |x_k - l| \sum_{k \in K(\varepsilon)} a_{jk} + \left| l \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} - l \right| \end{aligned}$$

$j \rightarrow \infty$ için limit alındığında A - istatistiksel yakınsaklığın tanımı ve A matrisinin regülerliği kullanılırsa keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı için $\lim_{j \rightarrow \infty} |A_j(x) - l| = 0$ olur ve dolayısıyla $st - \lim_{j \rightarrow \infty} |A_j(x) - l| = 0$ bulunur. Yani

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ j \leq n : |A_j(x) - l| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

elde edilir. Bu ise $(A)_{st} - \lim x = l$ olduğunu gösterir. İstatistiksel A - toplanabilir dizilerin uzayı $(A)_{st}$ ile tanımlanmıştır.

Tersinin doğru olmadığı aşağıdaki örneklerle gösterilebilir.

4.1.4. Örnek: $A = C_1 = (c_{jk})$ Cesáro matrisini ele alalım ve $x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} 1 & ; \quad k \text{ tek} \\ 0 & ; \quad k \text{ çift} \end{cases} \quad (4.1.4.1)$$

şeklinde tanımlayalım. O zaman

$$A_j(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} x_k = \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j x_k = \begin{cases} \frac{j+1}{2j} & ; \quad j \text{ tek} \\ \frac{1}{2} & ; \quad j \text{ çift} \end{cases}$$

olur ki $A_j(x)$ dönüşüm dizisi, $\frac{1}{2}$ sayısına istatistiksel yakınsaktır. Dolayısıyla $x = (x_k)$

dizisi $\frac{1}{2}$ sayısına istatistiksel A - toplanabilirdir. Bu durumda $x = (x_k)$ dizisi $\frac{1}{2}$

sayısına istatistiksel A - toplanabilirdir, fakat A - istatistiksel yakınsak değildir.

4.1.5. Örnek: $x = (x_k)$ dizisi (4.1.4.1)' deki gibi tanımlansın ve $A = (a_{jk})$ matrisi

$$a_{jk} = \begin{cases} 1/2 & ; \quad j \text{ karesel değil ve } k = j^2, k = j^2 + 1 \\ 1 & ; \quad j \text{ karesel ve } k = j^2 \\ 0 & ; \quad d.d. \end{cases}$$

olsun. O zaman

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} x_k = \begin{cases} 1/2 & ; \quad j \text{ tamkare değil} \\ 0 & ; \quad j \text{ çift tamkare} \\ 1 & ; \quad d.d. \end{cases}$$

olur ki $x = (x_k)$ dizisi A - toplanabilir değildir, dolayısıyla A - istatistiksel yakınsak değildir, fakat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ j \leq n : \left| A_j(x) - \frac{1}{2} \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

yani $x = (x_k)$ dizisi $\frac{1}{2}$ sayısına istatistiksel A - toplanabilirdir.

4.2. Pozitif Lineer Operatörlerin İstatistiksel A - Toplanabilmesi

Bu bölümde istatistiksel A - toplanabilme kavramı kullanılarak Korovkin tipi yaklaşım teoremi ispatlanacaktır. Sonrasında pozitif lineer operatörlerin istatistiksel A - toplanabilme yardımı ile yakınsama oranı hesaplanacaktır.

Burada $e_0(x) = 1$, $e_1(x) = x$, $e_2(x) = x^2$ test fonksiyonları kullanılacaktır.

4.2.1. Teorem: $A = (a_{jk})$ negatif olmayan regüler bir matris ve $L_k : C_M[a, b] \rightarrow B[a, b]$

pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olmak üzere $[a, b]$ aralığında

$$st-\lim_{j \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(e_i) - e_i \right\|_B = 0, \quad (i = 0, 1, 2) \quad (4.2.1.1)$$

olması için gerek ve yeter koşul her $f \in C_M[a, b]$ için

$$st-\lim_{j \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f) - f \right\|_B = 0 \quad (4.2.1.2)$$

olmasıdır (Demirci ve Karakuş, 2011).

İspat: Her bir $e_i(x) \in C_M[a, b]$, $i = 0, 1, 2$ olduğundan (4.2.1.2) ise (4.2.1.1) aşıkâr.

Şimdi (4.2.1.1) koşulunun sağlandığını kabul edelim. $f \in C_M[a, b]$ ve $x \in [a, b]$ sabit olsun. f fonksiyonu tüm reel ekseninde sınırlı olduğundan her t, x için öyle bir $H > 0$ bulabiliriz ki

$$|f(t) - f(x)| < 2H$$

sağlanır. Diğer taraftan f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ öyle ki $t \in (-\infty, \infty)$ ve $x \in [a, b]$ için $|t - x| < \delta$ olduğunda

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon \quad (4.2.1.3)$$

olur. Çünkü: $t, x \in [a, b]$ ise (4.2.1.3) eşitsizliği f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli olduğundan, $x \in [a, b]$ ve $t \notin [a, b]$ olduğunda ise f fonksiyonu a ve b noktalarında sırası ile soldan ve sağdan sürekli olduğu için gerçekleşir. Bu eşitsizliklerden dolayı her $\varepsilon > 0$ için $t \in (-\infty, \infty)$ ve $x \in [a, b]$ olmak üzere

$$|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{2H}{\delta^2} (t - x)^2 \quad (4.2.1.4)$$

bulunur. Çünkü; $|t - x| < \delta$ ise $\frac{2H}{\delta^2} (t - x)^2$ ifadesi pozitif olduğu için sağlanır.

$$|t - x| \geq \delta \text{ olduğunda ise } \frac{(t - x)^2}{\delta^2} \geq 1 \text{ dolayısıyla } \frac{2H}{\delta^2} (t - x)^2 \geq 2H \text{ ve } \varepsilon > 0$$

olduğundan gerçekleşir.

Diğer taraftan $\{L_k\}$ operatörünün pozitif lineer operatör olduğu kullanılırsa,

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f; x) - f(x) \right| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f; x) - \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f(x); x) + \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f(x); x) - f(x) \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k (f(t) - f(x); x) + f(x) \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k (e_0; x) - e_0(x) \right| \\
&\leq \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k (f(t) - f(x); x) \right| + |f(x)| \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k (e_0; x) - e_0(x) \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k (|f(t) - f(x)|; x) + H \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k (e_0; x) - e_0(x) \right|
\end{aligned}$$

bulunur. Burada (4.2.1.4) eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k (f; x) - f(x) \right| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k (|f(t) - f(x)|; x) + H \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k (e_0; x) - e_0(x) \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k \left(\varepsilon + \frac{2H}{\delta^2} (t-x)^2; x \right) + H \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k (e_0; x) - e_0(x) \right| \\
&= \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k (e_0; x) + \frac{2H}{\delta^2} \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k ((t-x)^2; x) + H \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k (e_0; x) - e_0(x) \right| \\
&= \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k (e_0; x) + \frac{2H}{\delta^2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k (t^2; x) - 2x \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k (t; x) \right. \\
&\quad \left. + x^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k (e_0; x) \right) + H \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k (e_0; x) - e_0(x) \right|
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde her $\varepsilon > 0$ için $c := \max_{x \in [a, b]} |x|$ alınırsa

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k (f; x) - f(x) \right| &\leq \varepsilon + (\varepsilon + H) \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k (e_0; x) - e_0(x) \right| + \frac{2H}{\delta^2} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k (e_2; x) - e_2(x) \right| \\
&\quad + \frac{4Hc}{\delta^2} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k (e_1; x) - e_1(x) \right| + \frac{2Hc^2}{\delta^2} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k (e_0; x) - e_0(x) \right| \\
&= \varepsilon + \left(\varepsilon + H + \frac{2Hc^2}{\delta^2} \right) \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k (e_0; x) - e_0(x) \right| \\
&\quad + \frac{4Hc}{\delta^2} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k (e_1; x) - e_1(x) \right| + \frac{2H}{\delta^2} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k (e_2; x) - e_2(x) \right|
\end{aligned}$$

olur ki $K := \max \left\{ \varepsilon + H + \frac{2Hc^2}{\delta^2}, \frac{4Hc}{\delta^2}, \frac{2H}{\delta^2} \right\}$ seçilirse

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k (f; x) - f(x) \right| &\leq \varepsilon + K \left\{ \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k (e_0; x) - e_0(x) \right| + \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k (e_1; x) - e_1(x) \right| \right. \\
&\quad \left. + \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k (e_2; x) - e_2(x) \right| \right\}
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f) - f \right\|_B \leq \varepsilon + K \left\{ \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(e_0) - e_0 \right\|_B + \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(e_1) - e_1 \right\|_B + \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(e_2) - e_2 \right\|_B \right\}$$

olur. Verilen bir $r > 0$ için $\varepsilon < r$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ seçilsin. O zaman

$$\frac{\left| \left\{ j \leq n : \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f) - f \right\|_B \geq r \right\} \right|}{n} \leq \frac{\left| \left\{ j \leq n : \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(e_0) - e_0 \right\|_B \geq \frac{r-\varepsilon}{3K} \right\} \right|}{n} + \frac{\left| \left\{ j \leq n : \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(e_1) - e_1 \right\|_B \geq \frac{r-\varepsilon}{3K} \right\} \right|}{n} + \frac{\left| \left\{ j \leq n : \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(e_2) - e_2 \right\|_B \geq \frac{r-\varepsilon}{3K} \right\} \right|}{n}$$

yazılabilir. Burada $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa hipotezden her $r > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \left\{ j \leq n : \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f) - f \right\|_B \geq r \right\} \right|}{n} = 0$$

elde edilir.

4.2.2. Örnek: $A = C_1 = (c_{jk})$ Cesáro matrisini göz önüne alalım. $\alpha := (\alpha_k)$ dizisi

$$\alpha_k := \begin{cases} 1 & , \quad k \text{ tek} \\ -1 & , \quad k \text{ çift} \end{cases} \quad (4.2.2.1)$$

ile verilsin. Bu durumda negatif olmayan regüler $A = (c_{jk})$ matrisi ve $\alpha := (\alpha_k)$ dizisi için

$$st - \lim_{j \rightarrow \infty} A_j(\alpha) = 0$$

bulunur. Bununla beraber (α_k) dizisi alışılmış anlamda yakınsak değildir.

Şimdi $x \in [0,1]$, $f \in C_M[0,1]$ ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$U_k(f; x) = (k+1) \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} x^n (1-x)^{k-n} \int_{n/(k+1)}^{(n+1)/(k+1)} f(t) dt$$

şeklinde tanımlı Bernstein- Kantorovich operatörünü göz önüne alalım. Bu operatörü kullanarak $\alpha := (\alpha_k)$ dizisi yardımıyla

$$T_k(f; x) = (1 + \alpha_k) U_k(f; x), \quad x \in [0, 1], \quad f \in C_M[0, 1]$$

şeklinde bir pozitif lineer operatör tanımlayalım. Bu operatör için gerekli hesaplamalar yapılrısa;

$$\begin{aligned} T_k(e_0; x) &= (1 + \alpha_k) U_k(e_0; x) = (1 + \alpha_k) (k+1) \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} x^n (1-x)^{k-n} \int_{n/(k+1)}^{(n+1)/(k+1)} e_0(t) dt \\ &= (1 + \alpha_k) (k+1) \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} x^n (1-x)^{k-n} \left(\frac{n+1}{k+1} - \frac{n}{k+1} \right) = (1 + \alpha_k) \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} x^n (1-x)^{k-n} \\ &= (1 + \alpha_k) e_0(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_k(e_1; x) &= (1 + \alpha_k) U_k(e_1; x) = (1 + \alpha_k) (k+1) \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} x^n (1-x)^{k-n} \int_{n/(k+1)}^{(n+1)/(k+1)} e_1(t) dt \\ &= (1 + \alpha_k) (k+1) \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} x^n (1-x)^{k-n} \frac{1}{2} \left(\left(\frac{n+1}{k+1} \right)^2 - \left(\frac{n}{k+1} \right)^2 \right) \\ &= (1 + \alpha_k) \left(\frac{1}{k+1} \right) \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} x^n (1-x)^{k-n} \left(n + \frac{1}{2} \right) \\ &= (1 + \alpha_k) \left(\frac{1}{k+1} \right) \sum_{n=0}^k n \binom{k}{n} x^n (1-x)^{k-n} + \frac{1}{2} (1 + \alpha_k) \left(\frac{1}{k+1} \right) \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} x^n (1-x)^{k-n} \\ &= (1 + \alpha_k) \left(\frac{1}{k+1} \right) e_1(x) k \sum_{n=1}^k \binom{k-1}{n-1} x^{n-1} (1-x)^{k-n} + \frac{1}{2} (1 + \alpha_k) \left(\frac{1}{k+1} \right) \\ &= (1 + \alpha_k) \left(e_1(x) \frac{k}{k+1} + \frac{1}{2(k+1)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_k(e_2; x) &= (1 + \alpha_k) U_k(e_2; x) = (1 + \alpha_k) (k+1) \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} x^n (1-x)^{k-n} \int_{n/(k+1)}^{(n+1)/(k+1)} e_2(t) dt \\ &= (1 + \alpha_k) (k+1) \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} x^n (1-x)^{k-n} \frac{1}{3} \left(\left(\frac{n+1}{k+1} \right)^3 - \left(\frac{n}{k+1} \right)^3 \right) \\ &= (1 + \alpha_k) \frac{1}{(k+1)^2} \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} x^n (1-x)^{k-n} \left(n^2 + n + \frac{1}{3} \right) \\ &= (1 + \alpha_k) \frac{1}{(k+1)^2} \left\{ \sum_{n=0}^k n^2 \binom{k}{n} x^n (1-x)^{k-n} + \sum_{n=0}^k n \binom{k}{n} x^n (1-x)^{k-n} + \frac{1}{3} \right\} \\ &= (1 + \alpha_k) \frac{1}{(k+1)^2} \left\{ e_1(x) k \sum_{n=1}^k n \binom{k-1}{n-1} x^{n-1} (1-x)^{k-n} + e_1(x) k + \frac{1}{3} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 + \alpha_k) \frac{1}{(k+1)^2} \left\{ e_2(x) k(k-1) \sum_{n=2}^k \binom{k-2}{n-2} x^{n-2} (1-x)^{k-n} + e_1(x) 2k + \frac{1}{3} \right\} \\
&= (1 + \alpha_k) \left(e_2(x) \frac{k(k-1)}{(k+1)^2} + e_1(x) \frac{2k}{(k+1)^2} + \frac{1}{3(k+1)^2} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $st - \lim_{j \rightarrow \infty} A_j(\alpha) = 0$ olduğu göz önüne alınırsa $[0,1]$ aralığında

$$st - \lim_{j \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} T_k(e_i) - e_i \right\|_B = 0, \quad (i=0,1,2)$$

olur. Bu yüzden $\{T_k\}$ operatörü 4.2.1. Teorem' in hipotezlerini gerçekler. Dolayısıyla her $f \in C_M[0,1]$ için

$$st - \lim_{j \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} T_k(f) - f \right\|_B = 0$$

bulunur. Burada (α_k) dizisi 0 sayısına klasik ve istatistiksel anlamda yakınsak olmadığından $\|T_k(e_i) - e_i\|_B$, $(i=0,1,2)$ değeri 0 sayısına klasik ve istatistiksel anlamda yakınsak değildir. Dolayısıyla $\{T_k\}$ operatörü klasik ve istatistiksel Korovkin tipi teoremin koşullarını sağlamaz.

4.3. İstatistiksel A - Toplanabilme Yardımı İle Yakınsama Oranı

Bu bölümde istatistiksel A - toplanabilme kavramı kullanılarak süreklilik modülü yardımı ile pozitif lineer operatörlerin yakınsama oranı incelenecektir.

4.3.1. Tanım: $A = (a_{jk})$ negatif olmayan regüler bir matris olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \left\{ j \leq n : |A_j(x) - L| \geq \varepsilon \right\} \right|}{n^{1-\beta}} = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına “ $\beta \in (0,1)$ oranında istatistiksel A - toplanabilirdir” denir ve bu durum $x_k - L = o(n^{-\beta}) \left((A)_{st} \right)$ ile gösterilir (Demirci ve Karakuş, 2011).

Bu tanım yardımı ile aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.3.2. Lemma: $A = (a_{jk})$ negatif olmayan regüler bir matris $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ sınırlı diziler olsun. Burada $x_k - L_1 = o(n^{-\beta_1}) \left((A)_{st} \right)$, $y_k - L_2 = o(n^{-\beta_2}) \left((A)_{st} \right)$ ve $\beta := \min\{\beta_1, \beta_2\}$ olduğunda

- (i) $(x_k - L_1) \pm (y_k - L_2) = o(n^{-\beta}) \left((A)_{st} \right)$
(ii) $\lambda(x_k - L_1) = o(n^{-\beta_1}) \left((A)_{st} \right)$, herhangi $\lambda \in \mathbb{R}$ için

sağlanır (Demirci ve Karakuş, 2011).

İspat : (i) $x_k - L_1 = o(n^{-\beta_1}) \left((A)_{st} \right)$ ve $y_k - L_2 = o(n^{-\beta_2}) \left((A)_{st} \right)$ olsun. O zaman her $\varepsilon > 0$ için $\beta := \min\{\beta_1, \beta_2\}$ olmak üzere

$$\frac{\left| \left\{ j \leq n : \left| (A_j(x) - L_1) \pm (A_j(y) - L_2) \right| \geq \varepsilon \right\} \right|}{n^{1-\beta}} \leq \frac{\left| \left\{ j \leq n : \left| A_j(x) - L_1 \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right|}{n^{1-\beta_1}} + \frac{\left| \left\{ j \leq n : \left| A_j(y) - L_2 \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right|}{n^{1-\beta_2}}$$

bulunur. Bu eşitsizlikte $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa hipotezden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \left\{ j \leq n : \left| (A_j(x) - L_1) \pm (A_j(y) - L_2) \right| \geq \varepsilon \right\} \right|}{n^{1-\beta}} = 0$$

olacağından istenilen sonuç elde edilir.

(ii) Herhangi $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda(x_k - L_1) = o(n^{-\beta_1}) \left((A)_{st} \right)$ olsun. $\lambda = 0$ durumunda sonuç açıktır. $\lambda \neq 0$ olsun. Her $\varepsilon' > 0$ için $n_0 \in \mathbb{N}$ öyle ki her $n > n_0$ için

$$\frac{\left| \left\{ j_0 \leq n : \left| A_j(x) - L_1 \right| \geq \frac{\varepsilon}{|\lambda|} \right\} \right|}{n^{1-\beta_1}} < \varepsilon'$$

olur ki bu ise herhangi $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda(x_k - L_1) = o(n^{-\beta_1}) \left((A)_{st} \right)$ olduğunu gösterir.

Şimdi bir f fonksiyonu için süreklilik modülü kavramını hatırlatalım.

4.3.3. Tanım: $f \in C_M[a, b]$ olmak üzere f fonksiyonunun süreklilik modülü $\omega(f, \delta)$ ile gösterilir ve

$$\omega(f, \delta) := \sup \{ |f(y) - f(x)| : y, x \in [a, b], |y - x| \leq \delta \}, \quad (\delta > 0)$$

şeklinde tanımlanır. $f \in C_M[a, b]$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $\delta > 0$ sabitleri için

$$(a) \quad \omega(f; \lambda \delta) \leq (1 + \llbracket \lambda \rrbracket) \omega(f; \delta)$$

$$(b) \quad |f(y) - f(x)| \leq \omega(f; |y - x|)$$

eşitsizlikleri mevcuttur. Burada $\llbracket \lambda \rrbracket$ sembolü, λ sayısının tam kısmını göstermektedir (Korovkin, 1960).

4.3.4. Teorem: $A = (a_{jk})$ negatif olmayan regüler bir matris ve $L_k : C_M[a, b] \rightarrow B[a, b]$ tanımlı pozitif lineer opertörlerin bir dizisi olsun.

$$(i) \quad \|L_k(e_0) - e_0\|_B = o(n^{-\beta}) \quad ((A)_{st})$$

$$(ii) \quad \varphi(t) = (t - x)^2 \text{ ve } \gamma_j := \sqrt{\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(\varphi) \right\|_B} \text{ için}$$

$$\omega(f, \gamma_j) = o(n^{-\beta_2}) \quad ((A)_{st})$$

şartları gerçekleşirse, bu durumda her $f \in C_M[a, b]$ için $\beta := \min\{\beta_1, \beta_2\}$ olmak üzere

$$\|L_k(f) - f\|_B = o(n^{-\beta}) \quad ((A)_{st})$$

olur (Demirci ve Karakuş, 2011).

İspat : $f \in C_M[a, b]$ ve $x \in [a, b]$ sabit olsun. 4.2.1 Teorem'in ispatındaki benzer yöntem ve süreklilik modülünün (a), (b) özellikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f; x) - f(x) \right| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(|f(t) - f(x)|; x) + |f(x)| \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(e_0; x) - e_0(x) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k\left(\omega\left(f; \frac{|t-x|}{\delta}\right); x\right) + H \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(e_0; x) - e_0(x) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k\left(\left(1 + \left\| \frac{t-x}{\delta} \right\| \right) \omega(f, \delta); x\right) + H \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(e_0; x) - e_0(x) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k\left(\left(1 + \frac{(t-x)^2}{\delta^2}\right); x\right) \omega(f, \delta) + H \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(e_0; x) - e_0(x) \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(e_0; x) - e_0(x) \right| \omega(f, \delta) + \frac{\omega(f, \delta)}{\delta^2} \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(\varphi; x) \\ &\quad + H \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(e_0; x) - e_0(x) \right| + \omega(f, \delta) \end{aligned}$$

olur ki $x \in [a, b]$ üzerinden supremum alınır,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f) - f \right\|_B &\leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(e_0) - e_0 \right\|_B \omega(f, \delta) + \frac{\omega(f, \delta)}{\delta^2} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(\varphi; x) \right\|_B \\ &\quad + H \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(e_0) - e_0 \right\|_B + \omega(f, \delta) \end{aligned}$$

bulunur. Burada $\delta := \gamma_j := \sqrt{\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(\varphi) \right\|_B}$ olduğu kullanılırsa

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f) - f \right\|_B \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(e_0) - e_0 \right\|_B \omega(f, \delta) + 2\omega(f, \delta) \\ + H \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(e_0) - e_0 \right\|_B$$

elde edilir. Dolayısıyla verilen $\varepsilon > 0$ için $\beta := \min\{\beta_1, \beta_2\}$ olmak üzere

$$\frac{\left| \left\{ j \leq n : \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f) - f \right\|_B \geq \varepsilon \right\} \right|}{n^{1-\beta}} \leq \frac{\left| \left\{ j \leq n : \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(e_0) - e_0 \right\|_B \geq \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} \right\} \right|}{n^{1-\beta_1}} \\ + \frac{\left| \left\{ j \leq n : \omega(f, \delta) \geq \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} \right\} \right|}{n^{1-\beta_2}} + \frac{\left| \left\{ j \leq n : \omega(f, \delta) \geq \frac{\varepsilon}{6} \right\} \right|}{n^{1-\beta_2}} \\ + \frac{\left| \left\{ j \leq n : \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(e_0) - e_0 \right\|_B \geq \frac{\varepsilon}{3H} \right\} \right|}{n^{1-\beta_1}}$$

olur ve $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa (i) ve (ii) koşullarından dolayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \left\{ j \leq n : \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f) - f \right\|_B \geq \varepsilon \right\} \right|}{n^{1-\beta}} = 0$$

yani, $x \in [a, b]$ üzerinde

$$\left\| L_k(f) - f \right\|_B = o(n^{-\beta}) \quad ((A)_{st})$$

bulunur .

4.4. İstatistiksel A - Toplanabilme Yardımı İle Periyodik Fonksiyonlar İçin Korovkin Tipi Teorem

Bu bölümde A - istatistiksel yakınsaklıktan daha kuvvetli olan istatistiksel A - toplanabilme kavramı kullanılarak $A = (a_{jk})$ negatif olmayan regüler bir matris olmak üzere $C^*(\mathbb{R})$ uzayında tanımlı pozitif lineer operatörlerin dizileri için Korovkin tipi yaklaşım teoremini ispatlayacağız. Sonrasında pozitif lineer operatörlerin dizilerinin istatistiksel A - toplanabilme oranını hesaplayacağız.

Bu bölümde $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = \sin x$ test fonksiyonları kullanılacaktır.

4.4.1. Teorem: $A = (a_{jk})$ negatif olmayan regüler matris ve $L_k : C^*(\mathbb{R}) \rightarrow C^*(\mathbb{R})$ pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. Bu durumda

$$st - \lim_{j \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f_i) - f_i \right\|_{C^*(\mathbb{R})} = 0, \quad (i = 0, 1, 2) \quad (4.4.1.1)$$

olması için gerek ve yeter koşul her $f \in C^*(\mathbb{R})$ için

$$st - \lim_{j \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f) - f \right\|_{C^*(\mathbb{R})} = 0 \quad (4.4.1.2)$$

olmasıdır (Karakuş ve Demirci, 2012).

İspat : Her $f_i \in C^*(\mathbb{R})$, $(i = 0, 1, 2)$ olduğundan (4.4.1.2) ise (4.4.1.1) açıktır.

Şimdi (4.4.1.1) koşulları sağlansın. $f \in C^*(\mathbb{R})$ ve $I, \mathbb{R}$ kümesinin 2π uzunluklu kapalı alt aralığı olmak üzere $x \in I$ sabit olsun. f fonksiyonu sürekli olduğundan her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ var öyle ki $t \in (-\infty, \infty)$ ve $x \in [a, b]$ için $|t - x| < \delta$ olduğunda $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ olur. Aynı şekilde f fonksiyonu sınırlı olduğundan $t \in \mathbb{R}$ için

$$|f(t) - f(x)| < 2\|f\|_{C^*(\mathbb{R})}$$

sağlanır. O halde her $t \in \mathbb{R}$ için $\psi(t) := \sin^2\left(\frac{t-x}{2}\right)$ olmak üzere

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon + \frac{2\|f\|_{C^*(\mathbb{R})}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \psi(t) \quad (4.4.1.3)$$

bulunur. Burada iki durum söz konusudur.

$$1. \text{ Durum: } t \in (x - \delta, x + \delta) \text{ ise } |t - x| < \delta \text{ dolayısıyla } |f(t) - f(x)| < \varepsilon \text{ ve } \frac{2\|f\|_{C^*(\mathbb{R})}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \geq 0$$

oldüğundan sağlanır.

$$2. \text{ Durum : } t \in [x - \delta, 2\pi + x - \delta] \text{ ise } \delta \leq t - x \leq 2\pi - \delta \text{ dolayısıyla } \frac{\sin^2\left(\frac{t-x}{2}\right)}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \geq 1$$

oldüğundan sağlanır. Dolayısıyla $f(t)$ ve $\psi(t)$ fonksiyonları 2π periyodik olduklarından her $t \in \mathbb{R}$ için (4.4.1.3) eşitsizliği sağlanır.

Diğer taraftan $\{L_k\}$ operatörünün pozitif lineer bir operatör olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f; x) - f(x) \right| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(|f(t) - f(x)|; x) + |f(x)| \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f_0; x) - f_0(x) \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k \left(\varepsilon + \frac{2 \|f\|_{C^*(\mathbb{R})}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \psi(t); x \right) + |f(x)| \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f_0; x) - f_0(x) \right| \\
&= \varepsilon + \varepsilon \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f_0; x) - f_0(x) \right| + \frac{2 \|f\|_{C^*(\mathbb{R})}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(\psi(t); x) \\
&\quad + \|f\|_{C^*(\mathbb{R})} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f_0; x) - f_0(x) \right|
\end{aligned}$$

bulunur. Yapılan hesaplamalar sonucu

$$\psi(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos t \cos x - \sin t \sin x)$$

olup

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(\psi(t); x) &\leq \frac{1}{2} \left\{ \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f_0; x) - f_0(x) \right| + |\cos x| \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f_1; x) - f_1(x) \right| \right. \\
&\quad \left. + |\sin x| \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f_2; x) - f_2(x) \right| \right\}
\end{aligned}$$

olur ki, bu eşitsizlik kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f; x) - f(x) \right| &\leq \varepsilon + \left(\varepsilon + \|f\|_{C^*(\mathbb{R})} + \frac{\|f\|_{C^*(\mathbb{R})}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \right) \left\{ \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f_0; x) - f_0(x) \right| \right. \\
&\quad \left. + \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f_1; x) - f_1(x) \right| + \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f_2; x) - f_2(x) \right| \right\}
\end{aligned}$$

bulunur. O zaman $K := \varepsilon + \|f\|_{C^*(\mathbb{R})} + \frac{\|f\|_{C^*(\mathbb{R})}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}$ olmak üzere $x \in [a, b]$ üzerinden

supremum alınır

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f) - f \right\|_{C^*(\mathbb{R})} &\leq \varepsilon + K \left\{ \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f_0) - f_0 \right\|_{C^*(\mathbb{R})} + \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f_1) - f_1 \right\|_{C^*(\mathbb{R})} \right. \\
&\quad \left. + \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f_2) - f_2 \right\|_{C^*(\mathbb{R})} \right\}
\end{aligned}$$

olur. Verilen $r > 0$ için $\varepsilon < r$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ seçilsin. Bu durumda yukarıdaki eşitsizlikten

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left| \left\{ j \leq n : \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f) - f \right\|_{C^*(\mathbb{R})} \geq r \right\} \right| &\leq \frac{1}{n} \left| \left\{ j \leq n : \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f_0) - f_0 \right\|_{C^*(\mathbb{R})} \geq \frac{r-\varepsilon}{3K} \right\} \right| \\ &+ \frac{1}{n} \left| \left\{ j \leq n : \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f_1) - f_1 \right\|_{C^*(\mathbb{R})} \geq \frac{r-\varepsilon}{3K} \right\} \right| \\ &+ \frac{1}{n} \left| \left\{ j \leq n : \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f_2) - f_2 \right\|_{C^*(\mathbb{R})} \geq \frac{r-\varepsilon}{3K} \right\} \right| \end{aligned}$$

olur ki $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa hipotezden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ j \leq n : \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f) - f \right\|_{C^*(\mathbb{R})} \geq r \right\} \right| = 0$$

bulunur.

4.5. İstatistiksel A- Toplanabilme Yardımı İle Periyodik Fonksiyonlar İçin Yakınsama Oranı

Bu bölümde istatistiksel A- toplanabilme kavramı kullanılarak süreklilik modülü yardımı ile $C^*(\mathbb{R})$ uzayı üzerinde tanımlı pozitif lineer operatörlerin yakınsama oranı incelenecektir.

Demirci ve Karakuş tarafından tanımlanan istatistiksel A- toplanabilme oranı ile ilgili özellikler 4.3.1. Tanım ve 4.3.2. Lemma 'da tanıtılmıştı.

$f \in C^*(\mathbb{R})$ olmak üzere f fonksiyonunun süreklilik modülü olan

$$\omega(f, \delta) := \sup_{|t-x| \leq \delta_1} |f(t) - f(x)| \quad (\delta_1 > 0)$$

göz önüne alalım.

Karakuş ve Demirci 2012 yılında $C^*(\mathbb{R})$ üzerinde tanımlı pozitif lineer operatörlerin dizileri için istatistiksel A- toplanabilme yardımı ile yakınsama oranını veren sonucu aşağıdaki gibi tanımlamışlardır.

4.5.1. Teorem: $A = (a_{jk})$ negatif olmayan regüler bir matris ve $L_k : C^*(\mathbb{R}) \rightarrow C^*(\mathbb{R})$

tanımlı pozitif lineer opertörlerin bir dizisi olsun. Bu durumda

$$(i) \quad \|L_k(f_0) - f_0\|_{C^*(\mathbb{R})} = o(n^{-\beta_1}) \quad ((A)_{st})$$

$$(ii) \quad \varphi(y) = \sin^2\left(\frac{t-x}{2}\right) \text{ ve } \gamma_j := \sqrt{\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(\varphi)\right\|_{C^*(\mathbb{R})}} \text{ için } \omega(f, \gamma_j) = o(n^{-\beta_2}) \quad ((A)_{st})$$

şartları gerçekleşirse, bu durumda her $f \in C^*(\mathbb{R})$ için $\beta := \min\{\beta_1, \beta_2\}$ olmak üzere

$$\|L_k(f) - f\|_{C^*(\mathbb{R})} = o(n^{-\beta}) \quad ((A)_{st})$$

olur (Karakuş ve Demirci, 2012).

İspat : $f \in C^*(\mathbb{R})$ ve $x \in \mathbb{R}$ sabit olsun. (i), (ii) koşulları ve $\{L_k\}$ operatörünün pozitif lineer bir operatör olduğu kullanılırsa, herhangi $\delta_1 > 0$ ve $j \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f; x) - f(x) \right| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(|f(t) - f(x)|; x) + |f(x)| \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f_0; x) - f_0(x) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k\left(\omega\left(f; \frac{|t-x|}{\delta_1}\right); x\right) + \|f\|_{C^*(\mathbb{R})} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f_0; x) - f_0(x) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k\left(\left(1 + \left\|\frac{|t-x|}{\delta_1}\right\|\right) \omega(f, \delta_1); x\right) + \|f\|_{C^*(\mathbb{R})} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f_0; x) - f_0(x) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k\left(\left(1 + \frac{(t-x)^2}{\delta_1^2}\right); x\right) \omega(f, \delta_1) + \|f\|_{C^*(\mathbb{R})} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f_0; x) - f_0(x) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k\left(\left(1 + \frac{\pi^2}{\delta_1^2} \sin^2\left(\frac{t-x}{2}\right)\right); x\right) \omega(f, \delta_1) \\ &\quad + \|f\|_{C^*(\mathbb{R})} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f_0; x) - f_0(x) \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f_0; x) - f_0(x) \right| \omega(f, \delta_1) + \frac{\pi^2}{\delta_1^2} \omega(f, \delta_1) \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(\varphi; x) \\ &\quad + \|f\|_{C^*(\mathbb{R})} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f_0; x) - f_0(x) \right| + \omega(f, \delta_1) \end{aligned}$$

olur ki $x \in [a, b]$ üzerinden supremum alınırsa,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f) - f \right\|_{C^*(\mathbb{R})} &\leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f_0) - f_0 \right\|_{C^*(\mathbb{R})} \omega(f, \delta_1) + \frac{\pi^2}{\delta_1^2} \omega(f, \delta_1) \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(\varphi; x) \right\|_{C^*(\mathbb{R})} \\ &\quad + \|f\|_{C^*(\mathbb{R})} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f_0) - f_0 \right\|_{C^*(\mathbb{R})} + \omega(f, \delta_1) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\delta := \gamma_j := \sqrt{\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(\varphi)\right\|_{C^*(\mathbb{R})}}$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f) - f \right\|_{C^*(\mathbb{R})} &\leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f_0) - f_0 \right\|_{C^*(\mathbb{R})} \omega(f, \delta) + (1 + \pi^2) \omega(f, \delta) \\ &\quad + H \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(e_0) - e_0 \right\|_{C^*(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $K := \max\{1 + \pi^2, H\}$ seçilirse

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f) - f \right\|_{C^*(\mathbb{R})} &\leq K \left(\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f_0) - f_0 \right\|_{C^*(\mathbb{R})} \omega(f, \delta) + \omega(f, \delta) \right. \\ &\quad \left. + \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(e_0) - e_0 \right\|_{C^*(\mathbb{R})} \right) \end{aligned}$$

olup, verilen $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} \frac{\left| \left\{ j \leq n : \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f) - f \right\|_{C^*(\mathbb{R})} \geq \varepsilon \right\} \right|}{n^{1-\beta}} &\leq \frac{\left| \left\{ j \leq n : \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f_0) - f_0 \right\|_{C^*(\mathbb{R})} \geq \sqrt{\frac{\varepsilon}{3K}} \right\} \right|}{n^{1-\beta}} \\ &\quad + \frac{\left| \left\{ j \leq n : \omega(f, \delta) \geq \sqrt{\frac{\varepsilon}{3K}} \right\} \right|}{n^{1-\beta}} + \frac{\left| \left\{ j \leq n : \omega(f, \delta) \geq \frac{\varepsilon}{3K} \right\} \right|}{n^{1-\beta}} \\ &\quad + \frac{\left| \left\{ j \leq n : \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f_0) - f_0 \right\|_{C^*(\mathbb{R})} \geq \frac{\varepsilon}{3K} \right\} \right|}{n^{1-\beta}} \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla $\beta := \min\{\beta_1, \beta_2\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{\left| \left\{ j \leq n : \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f) - f \right\|_{C^*(\mathbb{R})} \geq \varepsilon \right\} \right|}{n^{1-\beta}} &\leq \frac{\left| \left\{ j \leq n : \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f_0) - f_0 \right\|_{C^*(\mathbb{R})} \geq \sqrt{\frac{\varepsilon}{3K}} \right\} \right|}{n^{1-\beta_1}} \\ &\quad + \frac{\left| \left\{ j \leq n : \omega(f, \delta) \geq \sqrt{\frac{\varepsilon}{3K}} \right\} \right|}{n^{1-\beta_2}} + \frac{\left| \left\{ j \leq n : \omega(f, \delta) \geq \frac{\varepsilon}{3K} \right\} \right|}{n^{1-\beta_2}} \\ &\quad + \frac{\left| \left\{ j \leq n : \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f_0) - f_0 \right\|_{C^*(\mathbb{R})} \geq \frac{\varepsilon}{3K} \right\} \right|}{n^{1-\beta_1}} \end{aligned}$$

olur ki $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa (i) ve (ii) koşullarından dolayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \left\{ j \leq n : \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f) - f \right\|_{C^*(\mathbb{R})} \geq \varepsilon \right\} \right|}{n^{1-\beta}} = 0$$

yani;

$$\left\| L_k(f) - f \right\|_{C^*(\mathbb{R})} = o(n^{-\beta}) \quad ((A)_{st})$$

elde edilir.

Şimdi $C^*[-\pi, \pi]$ uzayı üzerinde istatistiksel A - toplanabilme yardımı ile Korovkin tipi teoremin, klasik ve istatistiksel Korovkin tipi teoremlerden daha kuvvetli olduğunu ve istatistiksel A - toplanabilme yardımı ile yakınsama oranının klasik yakınsama oranından daha kuvvetli olduğunu gösteren örnekler verelim.

4.5.2. Not: $f \in C^*[-\pi, \pi]$, $k \in \mathbb{N}$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt$$

katsayıları olmak üzere

$$S_m(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

kısmi toplamların aritmetik ortalaması olan

$$F_k(f; x) = \frac{S_0(f; x) + S_1(f; x) + \dots + S_{k-1}(f; x)}{k}$$

şeklinde tanımlı operatöre Fejér operatörü denir.

$$D_k(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos kx = \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}} \quad (4.5.2.1)$$

$$F_k(x) = \sin \frac{1}{2}x + \sin \frac{3}{2}x + \dots + \sin \frac{2k-1}{2}x = \frac{\sin^2 \frac{k}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \quad (4.5.2.2)$$

olduğunu göz önüne alınırsa $\{S_m(f; x)\}$ için gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$\begin{aligned}
S_m(f; x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^m \left\{ \cos kx \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ktdt + \sin kx \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ktdt \right\} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^m \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \{\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx\} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^m \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos k(t-x) dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \cos(t-x) + \dots + \cos m(t-x) \right\} dt
\end{aligned}$$

olur ki (4.5.2.1) eşitliğinden

$$S_m(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)(t-x)}{2 \sin\left(\frac{t-x}{2}\right)} dt \quad (4.5.2.3)$$

elde edilir.

(4.5.2.2) ve (4.5.2.3) eşitlikleri yardımı ile $\{F_k(f; x)\}$ operatörü için gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$\begin{aligned}
F_k(f; x) &= \frac{S_0(f; x) + S_1(f; x) + \dots + S_{k-1}(f; x)}{k} \\
&= \frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin \frac{1}{2}(t-x) + \sin \frac{3}{2}(t-x) + \dots + \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)(t-x)}{2 \sin\left(\frac{t-x}{2}\right)} dt \\
&= \frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin^2\left(\frac{k}{2}(t-x)\right)}{2 \sin^2\left(\frac{t-x}{2}\right)} dt
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla Fejér operatörü

$$F_k(f; x) = \frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin^2\left(\frac{k}{2}(t-x)\right)}{2 \sin^2\left(\frac{t-x}{2}\right)} dt$$

şeklinde tanımlanabilir.

4.5.3. Örnek: (a) $A = C_1 = (c_{jk})$ Cesáro matrisini, (4.2.2.1)' de tanımlanan $\alpha = (\alpha_k)$ dizisini ve 4.5.2. Not'ta tanımlanan Fejér operatörünü göz önüne alalım.

(i) $f_0(t) = 1$ için

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_0(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt = \frac{1}{\pi} (\pi - (-\pi)) = 2$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_0(t) \cos(kt) dt = \frac{1}{k\pi} (\sin(k\pi) - \sin(-k\pi)) = 0, (\forall k \geq 1 \text{ için})$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_0(t) \sin(kt) dt = -\frac{1}{k\pi} (\cos(k\pi) - \cos(-k\pi)) = 0, (\forall k \geq 1 \text{ için})$$

olur ki bu durumda

$$S_0(f_0; x) = \frac{a_0}{2} = 1$$

$$S_1(f_0; x) = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) = 1$$

$$S_2(f_0; x) = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) = 1$$

$\vdots$

$$\begin{aligned} S_{k-1}(f_0; x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{k-1} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \\ &= \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \dots + (a_{k-1} \cos(k-1)x + b_{k-1} \sin(k-1)x) = 1 \end{aligned}$$

olup,

$$F_k(f_0; x) = \frac{S_0(f_0; x) + S_1(f_0; x) + \dots + S_{k-1}(f_0; x)}{k} = \frac{1+1+\dots+1}{k} = 1$$

bulunur.

(ii) $f_1(t) = \cos t$ için

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos t dt = \frac{1}{\pi} (\sin \pi - \sin(-\pi)) = 0$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \cos(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2\pi} \left[\left(\pi + \frac{\sin 2\pi}{2} \right) - \left(-\pi + \frac{\sin(-2\pi)}{2} \right) \right] = 1$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(t) \cos(kt) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(k+1)t + \cos(k-1)t) dt = 0, (\forall k \geq 2 \text{ için})$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(t) \sin(kt) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(k+1)t - \sin(k-1)t) dt = 0, (\forall k \geq 1 \text{ için})$$

olup

$$S_0(f_1; x) = \frac{a_0}{2} = 0$$

$$S_1(f_1; x) = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) = \cos x$$

$$S_2(f_1; x) = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) = \cos x$$

$\vdots$

$$\begin{aligned} S_{k-1}(f_1; x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{k-1} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \\ &= \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \cdots + (a_{k-1} \cos(k-1)x + b_{k-1} \sin(k-1)x) = \cos x \end{aligned}$$

olduğundan

$$F_k(f_1; x) = \frac{S_0(f_1; x) + S_1(f_1; x) + \cdots + S_{k-1}(f_1; x)}{k} = \frac{0 + \cos x + \cdots + \cos x}{k} = \frac{k-1}{k} \cos x$$

bulunur.

(iii) $f_2(t) = \sin t$ için

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin t dt = -\frac{1}{\pi} (\cos \pi - \cos(-\pi)) = 0$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \cos(kt) dt = 0, (\forall k \geq 1 \text{ için})$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \sin t dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2t) dt = 1$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \sin(kt) dt = 0, (\forall k \geq 2 \text{ için})$$

olup

$$S_0(f_2; x) = \frac{a_0}{2} = 0$$

$$S_1(f_2; x) = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) = \sin x$$

$\vdots$

$$\begin{aligned} S_{k-1}(f_2; x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{k-1} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \\ &= \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \cdots + (a_{k-1} \cos(k-1)x + b_{k-1} \sin(k-1)x) = \sin x \end{aligned}$$

olduğundan

$$F_k(f_2; x) = \frac{S_0(f_1; x) + S_1(f_1; x) + \dots + S_{k-1}(f_1; x)}{k} = \frac{0 + \sin x + \dots + \sin x}{k} = \frac{k-1}{k} \sin x$$

elde edilir.

Şimdi Fejér operatörü ve

$$\alpha_k := \begin{cases} 1 & , \quad k \text{ tek} \\ -1 & , \quad k \text{ çift} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $\alpha = (\alpha_k)$ dizisi yardımı ile $C^*[-\pi, \pi]$ uzayı üzerinde

$$L_k(f; x) = (1 + \alpha_k) F_k(f; x)$$

şeklinde bir operatör tanımlayalım. $\{L_k\}$ operatörü pozitif lineer bir operatördür. 4.2.2.

Örnek' ten $\alpha := (\alpha_k)$ dizisi için

$$st - \lim_{j \rightarrow \infty} A_j(\alpha_k) = 0$$

olduğu kullanılırsa

$$st - \lim_{j \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} L_k(f_i) - (f_i) \right\|_{C^*[-\pi, \pi]} = 0, \quad (i = 0, 1, 2)$$

bulunur. Dolayısıyla her $f \in C^*[-\pi, \pi]$ için 4.4.1. Teorem' den

$$st - \lim_{j \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} L_k(f) - (f) \right\|_{C^*[-\pi, \pi]} = 0$$

elde edilir. Fakat burada $\alpha := (\alpha_k)$ dizisi 0 sayısına klasik anlamda ve istatistiksel anlamda yakınsak olmadığından $\{L_k\}$ operatörü 2.7.1. Teorem ve 2.7.2. Teorem' in koşullarını sağlamaz.

(b) $C^*[-\pi, \pi]$ üzerinde tanımlı $\{L_k\}$ pozitif lineer operatörü ele alınırsa

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} L_k(f_0) - (f_0) \right\|_{C^*[-\pi, \pi]} = \left| \frac{1}{j} \sum_{k=1}^{\infty} (1 + \alpha_k) - 1 \right| = \left| \frac{1}{j} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \right|$$

olur. O zaman

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} L_k(f_0) - f_0 \right\|_{C^*[-\pi, \pi]} = 0$$

olduğundan her $\beta_1 \in (0, 1)$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1-\beta_1}} \left\{ j \leq n : \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} L_k(f_0) - f_0 \right\|_{C^*[-\pi, \pi]} \geq \varepsilon \right\} = 0$$

yani;

$$\|L_k(f_0) - f_0\|_{C^*[-\pi, \pi]} = o(n^{-\beta_1}) \quad ((A)_{st}) \quad (4.5.2.1)$$

bulunur. O halde $\varphi(t) = \sin^2\left(\frac{t-x}{2}\right)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} L_k(\varphi; x) &= L_k\left(\sin^2\left(\frac{t-x}{2}\right); x\right) = (1+\alpha_k) F_k\left(\sin^2\left(\frac{t-x}{2}\right); x\right) \\ &= (1+\alpha_k) \frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2\left(\frac{t-x}{2}\right) \frac{\sin^2\left(\frac{k}{2}(t-x)\right)}{2 \sin^2\left[\frac{t-x}{2}\right]} dt \\ &= (1+\alpha_k) \frac{1}{2k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2\left(\frac{k}{2}(t-x)\right) dt = (1+\alpha_k) \frac{1}{4k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos(k(t-x))) dt \\ &= (1+\alpha_k) \frac{1}{2k} \end{aligned}$$

elde edilir. O zaman $\delta := \gamma_j := \sqrt{\left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} L_k(\varphi) \right\|_{C^*[-\pi, \pi]}} = \sqrt{\left| \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j \frac{1+\alpha_k}{2k} \right|}$ alınır,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sqrt{\left| \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j \frac{1+\alpha_k}{2k} \right|} = 0 \text{ olduğundan}$$

$$st\text{-}\lim_{j \rightarrow \infty} \sqrt{\left| \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j \frac{1+\alpha_k}{2k} \right|} = 0$$

bulunur. f fonksiyonu $[-\pi, \pi]$ aralığında düzgün sürekli olduğu için her $\beta_2 \in (0,1)$ olmak üzere

$$\omega(f; \gamma_j) = o(n^{-\beta_2}) \quad ((A)_{st}) \quad (4.5.2.2)$$

elde edilir. Bu durumda (4.5.2.1) ve (4.5.2.2)' den dolayı $\{L_k\}$ pozitif lineer operatörü 4.5.1. Teorem' in (i) ve (ii) koşullarını sağlar. Bu yüzden her $f \in C^*[-\pi, \pi]$ için $\beta = \min\{\beta_1, \beta_2\}$ olmak üzere

$$\|L_k(f) - f\|_{C^*[-\pi, \pi]} = o(n^{-\beta}) \quad ((A)_{st})$$

elde edilir.

Fakat $\alpha := (\alpha_k)$ dizisi alışılmış anlamda yakınsak olmadığından $\{L_k\}$ operatörü $f \in C^*[-\pi, \pi]$ fonksiyonuna düzgün yakınsak değildir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında A - istatistiksel yakınsaklıktan daha kuvvetli olan istatistiksel A - toplanabilme kavramı Korovkin tipi teoremlere uygulanmış, klasik ve istatistiksel durumlardan daha kuvvetli sonuçların elde edildiği gösterilmiştir.

İstatistiksel A - toplanabilme kavramı kullanılarak farklı uzaylar üzerinde daha az koşul altında Korovkin tipi teorem incelenebilir.

6. KAYNAKLAR

- Bernstein, S. 1912. Demonstration du Theoreme de Weierstrass fondee sur le calcul des probabilités. Comm. Soc. Math. Kharkov, 13: 1-2.
- Bohman, H. 1951. On Approximation Of Continuous and Analytic Functions. *Arkiv für Math.*, 2(3): 43-56.
- Boos, J. 2000. Classical and Modern in Summability. Oxford Science Publications.
- Connor, J. S. 1989. On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence. *Canad. Math. Bull.*, 32: 194-198.
- Demirci, K., Karakuş, S. 2011. Statistical A - Summability of Positive Linear Operators, *Mathematical and Computer Modelling*, 53: 189-195.
- Devore, R. A. 1972. The Approximation of Continuous Functions by Positive Linear Operators; *Lecture Notes in Mathematics*, Springer- Verlag, 293 , Berlin.
- Duman, O. 2003. Statistical Approximation For Periodic Functions, *Dem. Math.*, : 873-878.
- Duman, O., Khan, M. K., Orhan, C. 2003. A -Statistical Convergence Of Approximating Operators. *Mathematical Inequalities and Applications*, 6(4): 689-699.
- Edely, O. H. H., Mursaleen, M. 2009. On Statistical A - Summability, *Mathematical and Computer Modelling*, 49: 672-680.
- Fast, H. 1951. Sur la convergence statistique. *Colloq. Math.*, 2: 241-44.
- Freedman, A. R., Sember, J. J. 1981. Density and summability. *Pacific J. Math.*, 95: 293-305.
- Fridy, J. A. 1985. On statistical convergence. *Analysis*, 5: 301-313.
- Gadjiev, A. D., Orhan, C. 2002. Some approximation theorems statistical convergence. *Rocky Mountain J. Math.*, 32: 129-138.

- Hardy, G. H. 1949. *Divergent series*. Oxford Univ. Press, London.
- Karakuş, S., Demirci, K. 2012. Approximation for periodic functions via statistical A - summability, *Acta Math. Univ. Comenianae* Vol., 81, 2: 159-169.
- Kolk, E. 1993. Matrix summability of statistical convergent sequences. *Analysis*, 13: 77-83.
- Korovkin, P. P. 1960. *Linear Operators and Approximation Theory*. Hindustan Publ. Co., Delhi.
- Lorentz, G. G. 1986. *Bernstein Polynomials*. Chelsea Publishing Company, 2nd ed. New York.
- Maddox, I. J. 1970. *Elements of functional analysis*. Cambridge University Pres.
- Miller, H. I. 1995. A measure theoretical subsequence characterization of statistical convergence. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 347: 1811-1819.
- Moricz, F., Orhan, C. 2004. Tauberian conditions under which statistical convergence follows from statistical summability by weighted means, *Studia Sci. Math. Hung.*, 41 (4) : 391-403.
- Moricz, F. 2002. Tauberian conditions under which statistical convergence follows from statistical summability $(C,1)$, *J. Math. Anal. Appl.*, 275 : 277-287.
- Niven, I., Zuckerman, H.S. 1980. *An introduction on the theory of numbers*. John Waley & Sons, 4th ed. New York.
- Salat, T. 1980. On statistically convergent sequences of real numbers. *Math. Slovaca*, 30 (no:2): 139-150.
- Steinhaus, H. 1951. Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique. *Colloq. Math.*, 2: 73-74.
- Szasz, O. 1950. Generalization of S. Bernstein's Polynomials to the infinite interval. *Journ. of Resarch of the Nat. Bureau of Stand.*, 45: 239-245.

ÖZGEÇMİŞ

Arife YAPICIOĞLU 1989 yılında İzmir’ de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini İzmir’ de tamamladı. 2006 yılında girdiği Ondokuz Mayıs Üniversitesi Sinop Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’ nden 2010 yılında mezun oldu. Aynı yıl Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’ nda yüksek lisans öğrenimine başladı ve halen yüksek lisans öğrenimine devam etmektedir.