

34612.

**POZİTİF OPERATÖRLER İÇİN
RADON - NİKODYM ÖNERMESİ**

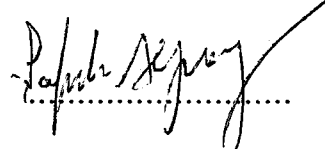
**YÜKSEK LİSANS TEZİ
(MATEMATİK EĞİTİMİ)**

**Ayşe UYAR
Eylül 1994**

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM BAKANLIĞI
ULUSLARARASI İLİŞKİLER MERKEZİ**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.



Danışman

Prof. Dr. Şafak ALPAY

Sınav Jürisi

Başkan : Prof. Dr. Şafak Alpay



Üye : Doç. Dr. Cemil Yıldız



Üye : Yrd. Doç. Dr. Zafer Eroğlu



Bu Tez Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım
Esaslarına uygundur.



İÇİNDEKİLER

ÖZ	I
ABSTRACT	II
TEŞEKKÜR	III
SEMBOLLER	IV
GİRİŞ	1
BÖLÜM 1	
TEMEL KAVRAMLAR VE BAZI SONUÇLAR.....	2
1.1. Sıralı Sınırlı Operatörler	2
1.2. Genelleştirilmiş Orthomorfizmalar ve Özellikleri	5
1.3. $\text{Orth}^\infty(L)$ nin Cebir Yapısı	12
BÖLÜM 2	
MAHARAM ÖZELLİĞNE SAHİP OPERATÖRLER İÇİN HAHN	
AYRIŞIM ÖNERMESİ	20
BÖLÜM 3	
RADON - NİKODYM ÖNERMESİ	34
BÖLÜM 4	
DUAL RADON - NİKODYM ÖNERMESİ	43

BÖLÜM 5

RİESZ HOMOMORFİZMALARI İÇİN RADON - NİKODYM

ÖNERMESİ 50

KAYNAKLAR 57

ÖZGEÇMİŞ 59



**POZİTİF OPERATÖRLER İÇİN
RADON - NİKODYM ÖNERMESİ**

(Yüksek Lisans Tezi)

Ayşe UYAR

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Eylül 1994

ÖZ

Bu tez çalışmasında W.A.J. Luxemburg - A.R. Schep'in "A Radon-Nikodym type theorem for positive operators and a dual" ve W.A.J. Luxemburg - C.B. Huijmans'ın "An alternative proof of a Radon-Nikodym theorem for lattice homomorphisms" adlı makaleleri incelenmiştir. Adı geçen makalelerde klasik Hahn ayrışım önermesi ve Radon-Nikodym önermesi pozitif operatörler için genelleştirilmiştir. Buradaki çalışmada konuyla ilgili ön bilgiler bir araya getirilmiş, kanıtlardaki boşluklar doldurularak gerekli bütün bilgiler verilmiştir.

**A RADON - NIKODYM THEOREM
FOR POSITIVE OPERATORS**

(M. Sc. Thesis)

Ayşe UYAR

**GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

September 1994

ABSTRACT

In this thesis work we have studied the following papers by W.A.J. Luxemburg - A.R. Schep: "A Radon-Nikodym type theorem for positive operators and a dual" and by W.A.J. Luxemburg - C.B. Huijmans: "An alternative proof of a Radon-Nikodym theorem for lattice homomorphisms" In the above papers the classical Hahn decomposition theorem and Radon-Nikodym theorem have been generalized for positive operators. In the present work, we have collected the necessary definitions and results about the subject. We have given detailed proofs of their theorems.

TEŞEKKÜR

Çalışma yaptığım bu konuyu bana öneren, fikirleriyle yol gösteren, kaynaklarla beni destekleyen ve her konuda kendisinden çok şey öğrendiğim Sayın Prof. Dr. Şafak ALPAY'a teşekkür ederim. Ayrıca benden yardımlarını esirgemeyen Sayın Dr. Bahri TURAN'a ve bu seviyeye gelmemi sağlayan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Ayşe UYAR

SEMBOLLER

Sembol	Anlam
$[x, y]$	Sıralı aralık
$x \vee y$	x ve y 'nin supremumu
$x \wedge y$	x ve y 'nin infimumu
x^+	x ve 0 (vektör uzayının sıfırı) ın supremumu
x^-	$-x$ ve 0 'in supremumu
$ x $	$-x$ ve x 'in supremumu
$x \perp y$	$ x $ ve $ y $ nin infimumu 0 'dır
$u_\tau \downarrow u$	(u_τ) aşağıya yönlendirilmiş sistemdir ve infimumu u dur.
$u_\tau \uparrow u$	(u_τ) yukarıya yönlendirilmiş sistemdir ve supremumu u dur.
$x_\alpha \xrightarrow{o} x$	(x_α) neti x 'e sıralı yakınsak
$\mathcal{L}_b(L, M)$	Sıralı sınırlı operatörlerin kümesi
$\mathcal{L}_n(L, M)$	Sıralı sürekli operatörlerin kümesi
$\text{Hom}(L, M)$	Riesz homomorfizmalarının kümesi
$L^\sim$	L 'nin sıralı duali

Sembol	Anlam
$L_n^{\sim}$	L 'nin sıralı sürekli dualı
$T^{\sim}$	T dönüşümünün eşleği
A^d	A kümesinin diki $(A^d = \{x \in L: x \perp y \ \forall y \in A \text{ için} \})$
$A \perp B$	Her $x \in A$ ve her $y \in B$ için $x \perp y$ dir.
$S \ll T$	S, T 'ye göre mutlak süreklidir.
$\text{Orth}^{\infty}(L)$	Genelleştirilmiş orthomorfizmaların kümesi
$\text{Orth}(L)$	Orthomorfizmaların kümesi
$Z(L)$	$\text{Orth}(L)$ içinde birim operatörü tarafından üretilen ideal
$\mathfrak{B}(L)$	L 'nin band projeksiyonlarının kümesi

GİRİŞ

Radon-Nikodym önermesinin keşfinden sonra, literatürde değişik kanıtlara ve vektör değerli ölçülere yapılan genellemelere rastlanır. W.A.J. Luxemburg ve A.R. Schep tarafından klasik Radon-Nikodym önermesi, bir Riesz uzayından başka bir Riesz uzayına olan pozitif operatörler için genelleştirilmiştir (4).

Bu genel incelemede Radon-Nikodym türevleri, güçlü yerel özelliklere sahip olan ve genelleştirilmiş orthomorfizmalar olarak adlandırılan bazı Riesz homomorfizmaları olarak ortaya çıkar.

W.A.J. Luxemburg ve C.B. Huijmans, Riesz homomorfizmaları için Radon-Nikodym önermesini farklı bir metod uygulayarak kanıtlamıştır (5).

Bu tez çalışmasında ilk olarak genelleştirilmiş orthomorfizmaların uzayı $\text{Orth}^\infty(L)$ 'nin temel özellikleri ele alınmıştır. "Maharam özelliği" olarak adlandırılan önemli bir özelliğe yer verilmiş ve klasik Hahn ayrışım önermesi, Maharam özelliğine sahip operatörler için genelleştirilmiştir.

Radon-Nikodym önermesi üçüncü bölümde tartışılmış ve önermenin sağlanması için Maharam özelliğine sahip olmaları gerektiği gösterilmiştir. Kanıt Hahn ayrışım önermesinin verilen genellemesine dayandırılmış ve klasik Radon-Nikodym önermesinin kanıtındaki yol izlenmiştir.

Daha sonra "Bir Riesz homomorfizması başka bir Riesz homomorfizmasına göre ne zaman mutlak süreklidir?" sorusuna cevap verilmiştir. Son olarak Riesz homomorfizmaları için Radon-Nikodym önermesinin farklı bir kanıtı verilmiştir.

BÖLÜM 1

TEMEL KAVRAMLAR VE BAZI SONUÇLAR

Bu bölümde çalışma boyunca kullanılan temel kavramlar ve bazı sonuçlar verilmiştir. Sürekliliği bozmamak amacıyla Riesz uzayları kuramında kullanılan semboller ve özelliklere değinilmemiş, bunlar (1 - 2, 3) deki gibi kullanılmıştır.

1.1. Sıralı Sınırlı Operatörler

L ve M Riesz uzayı olsun. $[x, y] = \{ z \in L : x \leq z \leq y \}$ kümesine sıralı aralık, $D \subset L$ için $D \subset [x, y]$ olacak şekilde $x, y \in L$ varsa D 'ye sıralı sınırlı küme denir.

Tanım 1.1.1. $T : L \rightarrow M$ lineer dönüşüm olmak üzere her $D \subset L$ sıralı sınırlı küme için $T(D)$, M içinde sıralı sınırlı ise T 'ye sıralı sınırlı operatör denir.

L 'den M 'ye bütün sıralı sınırlı operatörlerin kümesi $\mathcal{L}_b(L, M)$ ile gösterilir. $T_1, T_2 \in \mathcal{L}_b(L, M)$ için " $T_1 \leq T_2 \Leftrightarrow$ her $0 \leq x \in L$ için $T_1 x \leq T_2 x$ " sıralama bağıntısıyla $\mathcal{L}_b(L, M)$ sıralı lineer uzaydır. T , L 'den M 'ye herhangi bir operatör (lineer dönüşüm) olsun. Her $0 \leq x \in L$ için $Tx \geq 0$ ise T 'ye pozitif operatör denir. Her pozitif operatör sıralı sınırlıdır. Dolayısıyla iki pozitif operatörün farkı da sıralı sınırlı olur. M Dedekind tam ise $\mathcal{L}_b(L, M)$ Dedekind tam Riesz uzayıdır.

Tanım 1.1.2. $T: L \rightarrow M$ bir operatör olsun. Her $x, y \in L$ $x \wedge y = 0$ için $Tx \wedge Ty = 0$ oluyorsa T 'ye Riesz homomorfizması denir.

L 'den M 'ye bütün Riesz homomorfizmalarının kümesi $\text{Hom}(L, M)$ ile gösterilir. Her Riesz homomorfizması pozitiftir.

Tanım 1.1.3. $T: L \rightarrow M$ bir operatör olsun. Her $x, y \in L$ $x \perp y$ için $Tx \perp Ty$ oluyorsa T 'ye dikliği koruyan operatör denir.

L ve M Arşimedyan $T \in \mathcal{L}_b(L, M)$ dikliği koruyan bir operatör olsun. O zaman $|T|, T^+, T^-$ var; $|T|, T^+, T^- \in \text{Hom}(L, M)$ ve $0 \leq u, v \in L$ $w \in L$ için

$$(Tu)^+ = T^+u, (Tu)^- = T^-u, T^+u \wedge T^-v = 0$$

$$|T| |w| = |T|w = |T|w| = |Tw| \quad \text{olur (1 - 8, 9).}$$

Tanım 1.1.4. $T \in \mathcal{L}_b(L, M)$, $(u_r) \subset L$ ve $u_r \downarrow 0$ iken $\inf |Tu_r| = 0$ oluyorsa T 'ye sıralı sürekli operatör denir.

L 'den M 'ye bütün sıralı sürekli operatörlerin kümesi $\mathcal{L}_n(L, M)$ ile gösterilir. $\mathcal{L}_n(L, M)$, $\mathcal{L}_b(L, M)$ nin bir alt uzayıdır. M Dedekind tam ise $\mathcal{L}_n(L, M)$, $\mathcal{L}_b(L, M)$ içinde banddır. $M = \mathbb{R}$ alınırsa $\mathcal{L}_b(L, \mathbb{R}) = L^\sim$, $\mathcal{L}_n(L, \mathbb{R}) = L_n^\sim$ ile gösterilir. $L_n^\sim$ nın elemanlarına normal integral denir. Eğer $x \in L$ her $\phi \in L_n^\sim$ için $\phi(|x|) = 0$ iken $x = 0$ oluyorsa L 'ye aşırı ayrık denir. L Dedekind tam ve aşırı ayrık ise $L, (L_n^\sim)_n$ nın bir sıralı yoğun idealine özdeştir. M Dedekind tam ve $T \in \mathcal{L}_n(L, M)$ olmak üzere

$T^\sim : M_n^\sim \rightarrow L_n^\sim$, $x \in L$, $\phi \in M_n^\sim$ için $(T^\sim \phi)(x) = \phi(Tx)$ ile tanımlı dönüşüme T 'nin eşleği denir ve $T^\sim \in \mathcal{L}'_n(M_n^\sim, L_n^\sim)$ dır.

Tanım 1.1.5. M Dedekind tam ve $T \in \mathcal{L}'_b(L, M)$ olsun. $N_T := \{x \in L : |T||x| = 0\}$ olarak tanımlanan kümeye T 'nin sıfır ideali denir. $(N_T)^d$ ne T 'nin dayanağı denir ve C_T ile gösterilir.

T sıralı sürekli iken N_T banddır. T, L 'den M 'ye pozitif operatör olmak üzere her $0 < x \in L$ için $Tx > 0$ oluyorsa T 'ye kesin pozitif denir. Her pozitif operatör dayanağı üzerinde kesin pozitifdir.

Tanım 1.1.6. $T : L \rightarrow M$ pozitif operatör olsun. Her $0 \leq x \in L$ için $T[0, x] = [0, Tx]$ oluyorsa T Maharam özelliğine sahiptir denir.

Bir Riesz uzayı üzerinde tanımlı her pozitif fonksiyonel Maharam özelliğine sahiptir. Her band projeksiyonu Maharam özelliğine sahiptir. M Dedekind tam olmak üzere $T \in \mathcal{L}'_b(L, M)$ olsun. P, M 'nin band projeksiyonu ise P sıralı sürekli olduğundan $(PT)^+ = PT^+$ ve Q, L 'nin band projeksiyonu ise Q Maharam özelliğine sahip olduğundan $(TQ)^+ = T^+Q$ olur.

Tanım 1.1.7. $S, T : L \rightarrow M$ pozitif operatörler olsun. Her $0 \leq u \in L$ için $Su \in \{Tu\}^{dd}$ oluyorsa S, T 'ye göre mutlak süreklidir denir ve $S \ll T$ olarak gösterilir.

Ψ_1 ve Ψ_2 L üzerinde pozitif fonksiyonel olmak üzere $\Psi_2 \ll \Psi_1$ olması için gerekli ve yeterli koşul her $0 \leq u \in L$ için $\Psi_1 u = 0$ iken $\Psi_2 u = 0$ olmasıdır.

Bunu görmek için önce $\Psi_2 \ll \Psi_1$ ve her $0 \leq u \in L$ için $\Psi_1 u = 0$ olsun. O zaman $\Psi_2 u \in \{\Psi_1 u\}^{dd}$ ve böylece $\Psi_2 u = 0$ dır. Tersine ; $0 \leq u \in L$ ve $v \in \{\Psi_1 u\}^d$ olsun. $|v| \wedge \Psi_1 u = 0$ olduğundan ya $v = 0$ veya $\Psi_1 u = 0$ dır. Her iki durumda $|v| \wedge \Psi_2 u = 0$ olduğundan $\Psi_2 u \in \{\Psi_1 u\}^{dd}$ ve böylece $\Psi_2 \ll \Psi_1$ olur.

1.2. Genelleştirilmiş Orthomorfizmalar ve Özellikleri

Tanım 1.2.1. L Arşimedyan Riesz uzayı, $D_\pi \subset L$ sıralı yoğun ideal, $\pi : D_\pi \rightarrow L$ lineer dönüşüm olsun. Eğer her $0 \leq u \in D_\pi$ için $\pi u \geq 0$ ve $0 \leq u \in D_\pi$, $0 \leq v \in L$ $u \perp v$ iken $\pi u \perp v$ oluyorsa π 'ye pozitif genelleştirilmiş orthomorfizma denir.

Önerme 1.2.2. L , Arşimedyan Riesz uzayı, $D_\pi \subset L$ sıralı yoğun ideal, $\pi : D_\pi \rightarrow L$ pozitif operatör olsun. O zaman aşağıdaki koşullar denktir.

- (i) π pozitif genelleştirilmiş orthomorfizmadır.
- (ii) Her $f \in D_\pi$ için $\pi f \in \{f\}^{dd}$ dir.
- (iii) Her $B \subset L$ bandı için $\pi(B \cap D_\pi) \subset B$ dir.

Kanıt. (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i) olduğunu gösterelim.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Herhangi bir $f \in D_\pi$ alalım. D_π ideal olduğundan $0 \leq f^+$, f^- , $|f| \in D_\pi$ ve $f^+ \perp f^-$ olduğundan (i) den dolayı $\pi f^+ \perp \pi f^-$ dir. $|\pi f^+ - \pi f^-| = |\pi f^+ + \pi f^-|$ olduğundan $|\pi f| = |\pi| f| = \pi |f|$ olur.

Şimdi bir $g \in \{f\}^d$ alalım. O zaman $|g| \perp |f|$ ve $\pi|f| \perp |g|$ dir. Böylece $\pi f \perp g$ bulunur. Yani $\pi f \in \{f\}^{dd}$ dir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $B \subset L$ herhangi bir band olsun. L , Arşimedyen olduğundan $B^{dd} = B$ dir. $f \in B \cap D_\pi$ için $\{f\}^{dd} \subset B^{dd} = B$ dir. (ii) den $\pi f \in \{f\}^{dd}$ ve böylece $\pi f \in B$ olur.

(iii) $\Rightarrow$ (i) $0 \leq f \in D_\pi$, $0 \leq g \in L$, $f \perp g$ olsun. O zaman $f \in \{g\}^d$ ve $\{g\}^d \subset L$ banddır. (iii) den $\pi f \in \{g\}^d$ ve böylece $\pi f \perp g$ dir.

Her pozitif genelleştirilmiş orthomorfizma (ii) koşulundan birim operatöre göre mutlak süreklidir.

Örnek 1.2.3. $L = L_p(X, \mu)$ ($1 \leq p < \infty$) μ pozitif ölçüm olsun. Negatif olmayan bir $g \in L$ için $D = \{f \in L : fg \in L\}$ kümesi sıralı yoğun ideal ve $\pi : D \rightarrow L$, her $f \in D$, $x \in X$ için $(\pi f)(x) := g(x) f(x)$ olarak tanımlı dönüşüm pozitif genelleştirilmiş orthomorfizmadır.

Önerme 1.2.4. L , Dedekind tam Riesz uzayı, $D_\pi \subset L$ içinde sıralı yoğun ideal, $\pi : D_\pi \rightarrow L$ pozitif operatör olsun. Bu durumda π 'nin pozitif genelleştirilmiş orthomorfizma olması için gerekli ve yeterli koşul L 'nin her band projeksiyonu P için, D_π üzerinde $\pi P = P \pi$ olmasıdır.

Kanıt. $\pi : D_\pi \rightarrow L$ pozitif genelleştirilmiş orthomorfizma ve P , L nin herhangi bir band projeksiyonu olsun. O zaman P 'nin tanımından $P(L)$ band ve π pozitif genelleştirilmiş orthomorfizma olduğundan, $\pi(P(L) \cap D_\pi) \subset P(L)$ dir. $0 \leq u \in D_\pi$ olsun. $0 \leq Pu \leq u$ ve D_π ideal

olduğundan, $Pu \in P(L) \cap D_\pi$ dir. Böylece $\pi Pu \in P(L)$ ve $P\pi Pu = \pi Pu$ olur.

D_π nin ideal olmasından bu eşitlik her $u \in D_\pi$ ve L 'nin her band projeksiyonu için doğrudur. I , birim operatörü göstermek üzere $Q = I - P$, P 'ye dik band projeksiyonu olduğundan, her $u \in D_\pi$ için $Q\pi Qu = \pi Qu$ olur. $PQ = 0$ olduğundan her $u \in D_\pi$ için,

$$\begin{aligned} P\pi u &= P\pi (Pu + u - Pu) = P\pi (Pu + Qu) = P\pi Pu + P\pi Qu \\ &= P\pi Pu + PQ\pi Qu = P\pi Pu = \pi Pu \end{aligned}$$

elde edilir.

Tersine ; $\pi: D_\pi \rightarrow L$, L 'nin her P band projeksiyonu için, D_π üzerinde $P\pi = \pi P$ eşitliğini sağlayan pozitif operatör olsun. L Dedekind tam olduğundan esas projeksiyon özelliğine sahiptir. $0 \leq u \in D_\pi$ tarafından üretilen esas band üzerindeki projeksiyonu P_u ile gösterelim. Böylece her $0 \leq y \in L$ için $P_u(y) = \sup(y \wedge nu)$ olur. $0 \leq v \in L$ olmak üzere $u \perp v$ iken;

$$\begin{aligned} \pi u \wedge v &= \pi P_u(u) \wedge v = P_u(\pi u) \wedge v = (\sup(\pi u \wedge nu)) \wedge v \\ &= \sup(\pi u \wedge nu \wedge v) = 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece π , pozitif genelleştirilmiş orthomorfizmadır.

Pozitif genelleştirilmiş orthomorfizmaların temel özelliklerinden biri sıralı sürekli olmalıdır. Bunu kanıtlamak için aşağıdaki önönermeye ihtiyacımız vardır.

Önönerme 1.2.5. L içinde $u_0 \geq u_\tau \downarrow 0$ ve $0 < \varepsilon < 1$ ise $\cap_\tau \{(u_\tau - \varepsilon u_0)^+\}^{dd} = \{0\}$ dir.

Kanıt. $0 \leq v \in \cap_\tau \{(u_\tau - \varepsilon u_0)^+\}^{dd}$ olsun. $(u_\tau - \varepsilon u_0)^- \in \{(u_\tau - \varepsilon u_0)^+\}^d$ olduğundan her τ için $v \perp (u_\tau - \varepsilon u_0)^-$ dir. $0 \leq u_\tau \downarrow 0$ olduğundan $(u_\tau - \varepsilon u_0)^- \uparrow \varepsilon u_0$ ve böylece $v \perp u_0$ bulunur. $0 \leq (u_\tau - \varepsilon u_0)^+ \leq u_\tau \leq u_0$ eşitsizliğinden her τ için $v \perp (u_\tau - \varepsilon u_0)^+$ elde edilir. Böylece her τ için $v \in \{(u_\tau - \varepsilon u_0)^+\}^d \cap \{(u_\tau - \varepsilon u_0)^+\}^{dd}$ olduğundan $v = 0$ bulunur.

Önerme 1.2.6. L Arşimedian Riesz uzayı olmak üzere bir sıralı yoğun idealden L içine tanımlı her pozitif genelleştirilmiş orthomorfizma sıralı sürekli dir.

Kanıt. $\pi: D_\pi \rightarrow L$ pozitif genelleştirilmiş orthomorfizma, $0 \leq u_\tau \in D_\pi$ ve $u_\tau \downarrow 0$ olsun. Her τ için $u_\tau \leq u_0$ olacak şekilde bir $u_0 \in D_\pi$ olduğunu kabul etmek genelliği bozmaz. $0 < \varepsilon < 1$ ise $(u_\tau - \varepsilon u_0)^+ \in D_\pi$ ve böylece $\pi(u_\tau - \varepsilon u_0)^+ \in \{(u_\tau - \varepsilon u_0)^+\}^{dd}$ dir. Her τ için $\inf \pi(u_\tau - \varepsilon u_0)^+ \leq \pi(u_\tau - \varepsilon u_0)^+$ ve $\{(u_\tau - \varepsilon u_0)^+\}^{dd}$ band olduğundan $\inf \pi(u_\tau - \varepsilon u_0)^+ \in \{(u_\tau - \varepsilon u_0)^+\}^{dd}$ dir. Böylece $\inf \pi(u_\tau - \varepsilon u_0)^+ = 0$ 'dır.

$0 \leq u_\tau \leq u_\tau \vee \varepsilon u_0 = (u_\tau - \varepsilon u_0)^+ + \varepsilon u_0$ eşitsizliğinden her τ ve her $0 < \varepsilon < 1$ için $0 \leq \pi u_\tau \leq \pi(u_\tau - \varepsilon u_0)^+ + \varepsilon \pi u_0$ ve böylece ; $0 \leq \inf \pi u_\tau \leq \inf \pi(u_\tau - \varepsilon u_0)^+ + \varepsilon \pi u_0$ bulunur. Her $0 < \varepsilon < 1$ için

$0 \leq \inf \pi u_\tau \leq \varepsilon \pi u_0$ ve L Arşimedyan olduğundan $\inf \pi u_\tau = 0$ elde edilir.

Böylece π , sıralı süreklidir.

Önerme 1.2.7. $\pi : D_\pi \rightarrow L$ pozitif genelleştirilmiş orthomorfizma, $N_\pi := \{f \in D_\pi : \pi f = \pi |f| = 0\}$ olsun. $N_\pi \subset D_\pi$ band ve $N_\pi = D_\pi \cap \{\pi(D_\pi)\}^d$, $(N_\pi)^d = \{\pi(D_\pi)\}^{dd}$ dir.

Kanıt. π sıralı sürekli olduğundan N_π nin band olduğu açıktır. Önce $N_\pi = D_\pi \cap \{\pi(D_\pi)\}^d$ olduğunu göstereyim. $0 \leq f \in D_\pi \cap \{\pi(D_\pi)\}^d$ olsun. O zaman $f \perp \pi f$ ve π pozitif genelleştirilmiş orthomorfizma olduğundan $\pi f \perp \pi f$ dir. Böylece $\pi f = \pi |f| = 0$ ve $f \in N_\pi$ olur.

Şimdi $0 \leq f \in D_\pi$ olsun. $N_\pi \oplus (N_\pi)^d \subset D_\pi$ sıralı yoğun idealdir (burada dik tümleyen D_π içinde alınmıştır). O zaman $0 \leq u_\tau + v_\tau \uparrow f$ olacak şekilde $\{u_\tau + v_\tau\} \subset N_\pi \oplus (N_\pi)^d$ vardır. π sıralı sürekli olduğundan $\pi(u_\tau + v_\tau) \uparrow \pi f$ ve böylece $\pi v_\tau \uparrow \pi f$ dir. π pozitif genelleştirilmiş orthomorfizma olduğundan her τ için $\pi v_\tau \in (N_\pi)^d$ ve buradan $\pi f \in (N_\pi)^d$ olur. Böylece $\pi(D_\pi) \subset (N_\pi)^d$ bulunur. D_π içinde tekrar dik tümleyen alınırsa, $N_\pi = (N_\pi)^{dd} \subset \{\pi(D_\pi)\}^d = D_\pi \cap \{\pi(D_\pi)\}^d$ olur. Böylece, $N_\pi = D_\pi \cap \{\pi(D_\pi)\}^d$ dir.

Yukardaki eşitlikten $\{\pi(D_\pi)\}^{dd} \subset (N_\pi)^d$ olduğu açıktır. $f \in (N_\pi)^d$ ve $0 \leq h \in \{\pi(D_\pi)\}^d$ olsun. D_π sıralı yoğun ideal olduğundan $0 \leq g_\tau \uparrow h$ olacak şekilde $\{g_\tau\} \subset D_\pi$ vardır. Her τ için $g_\tau \leq h$ olduğundan

$g_\tau \in D_\pi \cap \{\pi(D_\pi)\}^d = N_\pi$ dir. Her τ için $f \perp g_\tau$ olduğundan $f \perp h$ ve böylece $f \in \{\pi(D_\pi)\}^{dd}$ bulunur.

N_π π 'nin sıfır ideali, $C_\pi = D_\pi \cap (N_\pi)^d$, π 'nin dayanağıdır. π_1 ve π_2 genelleştirilmiş pozitif orthomorfizmalar olmak üzere $\pi_1(D_{\pi_1}) \perp \pi_2(D_{\pi_2})$ iken $(N_{\pi_1})^d \perp (N_{\pi_2})^d$ dir.

Tanım 1.2.8. L Arşimedyan Riesz uzayı, $D_\pi \subset L$ sıralı yoğun ideal ve $\pi : D_\pi \rightarrow L$ lineer dönüşüm olsun. π_1 ve π_2 $D_\pi \subset D_{\pi_1} \cap D_{\pi_2}$ koşulunu sağlayan kümeler üzerinde tanımlı pozitif genelleştirilmiş orthomorfizmalar olmak üzere $\pi = \pi_1 - \pi_2$ şeklinde yazılabiliyorsa π 'ye genelleştirilmiş orthomorfizma denir.

Böylece bir genelleştirilmiş orthomorfizma sıralı sürekli ve dikliği koruyan bir operatördür. Bütün genelleştirilmiş orthomorfizmaların kümesi $\text{Orth}^\infty(L)$ ile gösterilir. L üzerinde tanımlı bütün genelleştirilmiş orthomorfizmaların kümesi $\text{Orth}(L)$ ile gösterilir ve $\text{Orth}(L)$ nin elemanlarına orthomorfizma denir. $\text{Orth}(L)$ içinde I birim operatörü tarafından üretilen ideal $Z(L)$ ile gösterilir ve buna L 'nin ideal merkezi denir. L 'nin bütün band projeksiyonlarının Boole cebiri $\mathfrak{B}(L)$ ile gösterilir. Böylece,

$$\mathfrak{B}(L) \subset Z(L) \subset \text{Orth}(L) \subset \text{Orth}^\infty(L)$$

olur.

Tanım ideallerinin arakesitinde eşit olan genelleştirilmiş orthomorfizmalar eşit kabul edilirse verilen $\pi \in \text{Orth}^\infty(L)$ için aşağıdaki teklik vardır.

Önerme 1.2.9. Her genelleştirilmiş orthomorfizma bir tek maksimal sıralı yoğun ideale genişletilebilir.

Kanıt. $\pi : D_\pi \rightarrow L$ pozitif genelleştirilmiş orthomorfizma,

$\mathcal{A} = \{(D, \hat{\pi}) : D_\pi \subset D \subset L \text{ sıralı yoğun ideal, } \hat{\pi} \text{ pozitif genelleştirilmiş orthomorfizma ve her } u \in D_\pi \text{ için } \hat{\pi}u = \pi u\}$ olsun. $(D_1, \hat{\pi}_1), (D_2, \hat{\pi}_2) \in \mathcal{A}$ için “ $(D_1, \hat{\pi}_1) < (D_2, \hat{\pi}_2) \Leftrightarrow D_1 \subset D_2$, her $x \in D_1$ için $\hat{\pi}_1 x = \hat{\pi}_2 x$ ” sıralamasıyla $\mathcal{A}$ kısmi sıralı bir kümedir. $(D_\pi, \pi) \in \mathcal{A}$ olduğundan $\mathcal{A}$ boş değildir. $\Omega \subset \mathcal{A}$ bir zincir olmak üzere $\Phi = \{D : (D, \pi) \in \Omega\}$ ve $H = \bigcup_{D \in \Phi} D$ olsun. O zaman $D_\pi \subset H \subset L$ sıralı yoğun idealdir. Her $x \in H$ için, Φ içinde $x \in D$ olacak şekilde bir $(D, \hat{\pi}) \in \Omega$ ikilisi vardır.

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_H : H &\rightarrow L \\ x &\rightarrow \hat{\pi}_H(x) = \hat{\pi}x \end{aligned}$$

olarak tanımlanırsa $(H, \hat{\pi}_H) \in \mathcal{A}$ ve $(H, \hat{\pi}_H)$, Ω ‘nın üst sınırıdır. Zorn önermesinden $\mathcal{A}$ kümesinin bir maksimal elemanı vardır.

$(D_1, \hat{\pi}_1), (D_2, \hat{\pi}_2)$, $\mathcal{A}$ ‘nın maksimal elemanları olsun. $0 \leq u \in D_1 \cap D_2$ için D_π sıralı yoğun ideal olduğundan $0 \leq u_\tau \uparrow u$ olacak şekilde $\{u_\tau\} \subset D_\pi$ vardır. $\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2$ sıralı sürekli olduğundan $\hat{\pi}_1 u_\tau \uparrow \hat{\pi}_1 u$, $\hat{\pi}_2 u_\tau \uparrow \hat{\pi}_2 u$ ve her τ için $\hat{\pi}_1 u_\tau = \hat{\pi}_2 u_\tau = \pi u_\tau$ olduğundan $\hat{\pi}_1 u = \hat{\pi}_2 u$ olur. İki genelleştirilmiş orthomorfizmanın eşitliği tanımından $\mathcal{A}$ ‘nın bir tek maksimal elemana sahip olduğu kabul edilebilir.

Böylece her pozitif genelleştirilmiş orthomorfizma bir tek maksimal tanım kümesi D_π^m 'ye genişletilebilir. $\pi \in \text{Orth}^\infty(L)$ olmak üzere; $\pi = \pi_1 - \pi_2$ ve $D_\pi \subset D_{\pi_1} \cap D_{\pi_2}$ dir.

$$\begin{aligned} \hat{\pi} : D_{\pi_1}^m \cap D_{\pi_2}^m &\rightarrow L \\ u &\rightarrow \hat{\pi}(u) = \hat{\pi}_1 u - \hat{\pi}_2 u \end{aligned}$$

olarak tanımlanırsa $\hat{\pi} \in \text{Orth}^\infty(L)$ ve her $u \in D_\pi$ için $\hat{\pi} u = \pi u$ olur.

1.3. $\text{Orth}^\infty(L)$ nin Cebir Yapısı

Önerme 1.3.1. L , Arşimedyan Riesz uzayı olmak üzere $\text{Orth}^\infty(L)$, noktasal cebir ve kafes işlemleri altında Arşimedyan Riesz uzayıdır. Yani, $\pi_1, \pi_2 \in \text{Orth}^\infty(L)$ olmak üzere her $0 \leq u \in D_{\pi_1} \cap D_{\pi_2}$ için

$$\begin{aligned} (\pi_1 \vee \pi_2) u &= \pi_1 u \vee \pi_2 u \quad \text{ve} \\ (\pi_1 \wedge \pi_2) u &= \pi_1 u \wedge \pi_2 u \end{aligned}$$

olur.

Kanıt. $\text{Orth}^\infty(L)$ nin noktasal toplama ve skalerle çarpmaya göre lineer uzay olduğu açıktır.

$$\pi_1, \pi_2 \in \text{Orth}^\infty(L) \text{ için } \pi_1 \leq \pi_2 \Leftrightarrow \text{Her } 0 \leq u \in D_{\pi_1} \cap D_{\pi_2} \text{ için}$$

$\pi_1 u \leq \pi_2 u$ ” sıralama bağıntısıyla $\text{Orth}^\infty(L)$ sıralı lineer uzaydır. $\pi \in \text{Orth}^\infty(L)$ sıralı sınırlı, dikliği koruyan operatör olduğundan (1) Önerme 8.6 ‘dan her $u \in D_\pi$ için;

$$|\pi| |u| = |\pi(|u|)| = |\pi u| \quad \text{dir.}$$

Böylece $|\pi| \in \text{Orth}^\infty(L)$ ve $\text{Orth}^\infty(L)$ Riesz uzayıdır. $\pi_1, \pi_2 \in \text{Orth}^\infty(L)$ olmak üzere her $0 \leq u \in D_{\pi_1} \cap D_{\pi_2}$ için;

$$\begin{aligned} (\pi_1 \vee \pi_2)u &= \frac{1}{2} (\pi_1 + \pi_2 + |\pi_1 - \pi_2|)u \\ &= \frac{1}{2} (\pi_1 u + \pi_2 u + |\pi_1 u - \pi_2 u|) \\ &= \pi_1 u \vee \pi_2 u \\ (\pi_1 \wedge \pi_2)u &= \frac{1}{2} (\pi_1 + \pi_2 - |\pi_1 - \pi_2|)u \\ &= \frac{1}{2} (\pi_1 u + \pi_2 u - |\pi_1 u - \pi_2 u|) \\ &= \pi_1 u \wedge \pi_2 u \end{aligned}$$

olur. Her $0 \leq \pi \in \text{Orth}^\infty(L)$, $0 \leq u \in D_\pi$ için $n^{-1} \pi u \downarrow 0$ olduğundan $n^{-1} \pi \downarrow 0$ dır. Böylece $\text{Orth}^\infty(L)$ Arşimedyan Riesz uzayıdır.

Bütünlüğü sağlamak amacıyla aşağıdaki tanımları verelim.

Tanım 1.3.2. L Riesz uzayı birleşmeli bir cebir olsun. Eğer $0 \leq u, v \in L$ iken $0 \leq u.v \in L$ oluyorsa L ‘ye Riesz cebiri denir.

Tanım 1.3.3. L Riesz cebiri olmak üzere eğer $0 \leq u, v \in L$ için $u \wedge v = 0$ iken her $0 \leq w \in L$ için $u \cdot w \wedge v = w \cdot u \wedge v = 0$ oluyorsa L 'ye f - cebiri denir.

Arşimedyan f - cebirleri değişmelidir. L bir f - cebiri olmak üzere her $f \in L$ için $\pi_f(g) = f g$ ($g \in L$) operatörü bir orthomorfizma tanımlar.

Şimdi $\text{Orth}^\infty(L)$ de çarpımsal yapı oluşturalım. Bunun için; $\pi_1, \pi_2 \in \text{Orth}^\infty(L)$ olsun. O zaman $\pi_2^{\leftarrow}(D_{\pi_1}) = \{ f \in D_{\pi_2} : \pi_2(f) \in D_{\pi_1} \}$ olarak tanımlanan küme sıralı yoğun idealdir. Böylece $\pi_2^{\leftarrow}(D_{\pi_1})$ den L içine $\pi_1 \circ \pi_2$, çarpma işlemi olarak tanımlanabilir. İki pozitif genelleştirilmiş orthomorfizmanın çarpımı pozitif genelleştirilmiş orthomorfizmadır. Böylece $\text{Orth}^\infty(L)$, I birim operatörü olmak üzere toplama, çarpma, skalerle çarpma işlemleri altında birimli bir Riesz cebiridir.

Tanım 1.3.4. L bir Riesz uzayı olsun. Eğer her $0 \leq u_\tau \in L$ dik sistem için $\sup u_\tau \in L$ oluyorsa L 'ye ayrık tam denir.

Önerme 1.3.5.

- (i) $\text{Orth}^\infty(L)$ ayrık tam f - cebiridir.
- (ii) $\text{Orth}(L)$, $\text{Orth}^\infty(L)$ nin f - altcebiridir. L Dedekind tam Riesz uzayı ise $\text{Orth}^\infty(L)$ Dedekind tam Riesz uzayıdır ve bu durumda $\text{Orth}(L)$, $\text{Orth}^\infty(L)$ içinde sıralı yoğun idealdir.

Kanıt.

(i) Önce $\text{Orth}^\infty(L)$ nin f - cebiri olduğunu gösterelim. $\text{Orth}^\infty(L)$ nin Riesz cebiri olduğu açıktır. Şimdi $0 \leq \pi_1, \pi_2, \pi \in \text{Orth}^\infty(L)$ ve $\pi_1 \wedge \pi_2 = 0$ olsun. O zaman her $0 \leq u \in D_{\pi_1} \cap D_{\pi_2}$ için $(\pi_1 \wedge \pi_2)u = \pi_1 u \wedge \pi_2 u = 0$ dır. $0 \leq u \in \pi_1^\leftarrow(D_{\pi_1}) \cap D_{\pi_2}$ için $0 \leq \pi_1 u \in D_\pi$, $\pi_1 u \perp \pi_2 u$ ve π pozitif genelleştirilmiş orthomorfizma olduğundan $\pi \pi_1 u \wedge \pi_2 u = 0$ dır. Böylece $\pi \pi_1 \wedge \pi_2 = 0$ olur.

$0 \leq u \in \pi_1^\leftarrow(D_{\pi_1}) \cap D_{\pi_2}$ olsun. O zaman $0 \leq \pi u \in D_{\pi_1}$ ve $D_{\pi_1} \cap D_{\pi_2}$ sıralı yoğun ideal olduğundan $0 \leq f_\tau \uparrow \pi u$, $0 \leq g_\sigma \uparrow u$ olacak şekilde, $\{f_\tau\}, \{g_\sigma\} \subset D_{\pi_1} \cap D_{\pi_2}$ vardır. π_1 ve π_2 sıralı sürekli olduğundan $\pi_1 f_\tau \uparrow \pi_1 \pi u$, $\pi_2 g_\sigma \uparrow \pi_2 u$ elde edilir. Her τ ve σ için;

$$0 \leq \pi_1(f_\tau) \wedge \pi_2(g_\sigma) \leq \pi_1(f_\tau + g_\sigma) \wedge \pi_2(f_\tau + g_\sigma) = 0$$

olduğundan $\pi_1(f_\tau) \wedge \pi_2(g_\sigma) = 0$ dır. Buradan $\sup \pi_1(f_\tau) \wedge \sup \pi_2(g_\sigma) = 0$ ve böylece $\pi_1 \pi u \wedge \pi_2 u = 0$ bulunur. Böylece $\text{Orth}^\infty(L)$ f - cebiridir.

$\text{Orth}^\infty(L)$ nin ayrık tam olduğunu göstermek için $0 \leq \pi_\tau \in \text{Orth}^\infty(L)$ dik sistem olduğunu kabul edelim. O zaman her $0 \leq u \in D_{\pi_\tau} \cap D_{\pi_\sigma}$ için $\pi_\tau(u) \perp \pi_\sigma(u)$ olur. $0 \leq v, w \in D_{\pi_\tau} \cap D_{\pi_\sigma}$ için $\pi_\tau(v+w) \perp \pi_\sigma(v+w)$ olduğundan $\pi_\tau(v) \perp \pi_\sigma(w)$ bulunur. $0 \leq g \in D_{\pi_\tau}$, $0 \leq h \in D_{\pi_\sigma}$ için $D_{\pi_\tau} \cap D_{\pi_\sigma}$ sıralı yoğun ideal olduğundan $0 \leq g_\alpha \uparrow g$, $0 \leq h_\beta \uparrow h$ olacak şekilde $\{g_\alpha\}, \{h_\beta\} \subset D_{\pi_\tau} \cap D_{\pi_\sigma}$ vardır. $\pi_\tau(g_\alpha) \uparrow \pi_\tau(g)$, $\pi_\sigma(h_\beta) \perp \pi_\sigma(h)$

ve her α, β için $\pi_\tau(g_\alpha) \perp \pi_\sigma(h_\beta)$ olduğundan $\pi_\tau(g) \perp \pi_\sigma(h)$ elde edilir. Böylece $\pi_\tau(D_{\pi_\tau}) \perp \pi_\sigma(D_{\pi_\sigma})$ ve buradan $(N_{\pi_\tau})^d \perp (N_{\pi_\sigma})^d$ bulunur. π_τ nun dayanağını C_τ ile gösterelim. $C_\tau = (N_{\pi_\tau})^d \cap D_{\pi_\tau}$ olduğundan C_τ idealleri kesin olarak diktir. O zaman $f_\sigma \in C_\sigma \cap D_{\pi_\tau}$ için $C_\sigma \cap D_{\pi_\tau} \subset (C_\tau)^d \cap D_{\pi_\tau} = N_{\pi_\tau}$ olduğundan $\pi_\tau(f_\sigma) = 0$ dır.

$A = \{f \in L : \exists n \in \mathbb{N} ; f = f_{\tau_1} + \dots + f_{\tau_n}, f_{\tau_i} \in C_{\tau_i} \text{ } i = 1, 2, \dots, n\}$.
 $B = \{ \cup_\tau C_\tau \}^d$ olmak üzere $A \oplus A^d \subset A \oplus B$ ve A ideal olduğundan $A \oplus B \subset L$ içinde sıralı yoğun idealdir. $f \in A, g \in B$ olmak üzere,

$$\pi_o : A \oplus B \rightarrow L$$

$$f + g \rightarrow \pi_o(f + g) = \pi_{\tau_1}(f_{\tau_1}) + \dots + \pi_{\tau_n}(f_{\tau_n})$$

biçiminde tanımlansın. C_τ idealleri dik olduğundan π_o iyi tanımlı ve $0 \leq \pi_o \in \text{Orth}^\infty(L)$ dir.

$\tau \in \{\tau\}$ ve $0 \leq f \in D_{\pi_o} \cap D_{\pi_\tau}$ olsun. $f = f_{\tau_1} + \dots + f_{\tau_n} + g$
 $i = 1, 2, \dots, n$ $f_{\tau_i} \in C_{\tau_i} \cap D_{\pi_\tau}$ ve $g \in (\cap_\tau (C_\tau)^d) \cap D_{\pi_\tau}$ yani $g \in N_{\pi_\tau}$ olur.
 Bir i_o için $f_{\tau_{i_o}} \in C_\tau$ olduğunu kabul edelim. $\pi_\tau(f) = \pi_\tau(f_{\tau_{i_o}}) \leq \pi_o(f)$
 ve böylece her τ için $\pi_\tau \leq \pi_o$ olur.

Şimdi her τ için $\pi_\tau \leq \pi$ olacak şekilde bir $\pi \in \text{Orth}^\infty(L)$ olduğunu kabul edelim. $0 \leq f \in D_{\pi_o} \cap D_\pi$ olsun. O zaman;

$$\begin{aligned}
\pi_o (f) &= \pi_{\tau_1} (f_{\tau_1}) + \dots + \pi_{\tau_n} (f_{\tau_n}) \\
&= \pi_{\tau_1} (f_{\tau_1}) \vee \dots \vee \pi_{\tau_n} (f_{\tau_n}) \\
&\leq \pi (f_{\tau_1}) \vee \dots \vee \pi (f_{\tau_n}) \\
&\leq \pi (f)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $\pi_o \leq \pi$ yani $\pi_o = \sup \pi_\tau$ elde edilir.

(ii) $\text{Orth}(L)$ f - cebiri olduğundan, $\text{Orth}^\infty(L)$ nin f - altcebiridir. Şimdi L Dedekind tam olsun. Önce $\text{Orth}^\infty(L)$ nin Dedekind tam olduğunu gösterelim. Bunun için $\text{Orth}^\infty(L)$ içinde $0 \leq \pi_\alpha \uparrow \leq \pi$ olsun. $\alpha \in \{\alpha\}$ olmak üzere $0 \leq u \in D_\pi$ için $0 \leq u_\tau \uparrow u$ olacak şekilde $\{u_\tau\} \subset D_{\pi_\alpha} \cap D_\pi$ vardır. O zaman her τ için $\pi_\alpha(u_\tau) \leq \pi u_\tau \leq \pi u$ olur. L Dedekind tam olduğundan $\sup_\tau \pi_\alpha(u_\tau)$ var ve $\hat{\pi}_\alpha u := \sup_\tau \pi_\alpha(u_\tau)$ olarak tanımlanırsa her α için $\hat{\pi}_\alpha u \leq \pi u$ olduğundan $\sup_\alpha \hat{\pi}_\alpha u \in L$ dir.

Böylece her $0 \leq u \in D_\pi$ için $\pi_o u := \sup \hat{\pi}_\alpha u$ olarak tanımlanırsa π_o , D_π 'den L 'ye genişler ve $0 \leq \pi_o \in \text{Orth}^\infty(L)$ dir. Önermenin ilk kısmında olduğu gibi $\pi_o = \sup \pi_\alpha$ elde edilir.

Şimdi $\text{Orth}(L)$ nin $\text{Orth}^\infty(L)$ içinde sıralı yoğun ideal olduğunu gösterelim. Bunun için $0 \leq \pi_1 \leq \pi$, $\pi \in \text{Orth}(L)$ ve $\pi_1 \in \text{Orth}^\infty(L)$ olsun. D_{π_1} sıralı yoğun ideal olduğundan $0 \leq u \in L$ için $0 \leq u_\tau \uparrow u$ olacak şekilde $\{u_\tau\} \subset D_{\pi_1}$ vardır. Her τ için $\pi_1(u_\tau) \uparrow \leq \pi u_\tau \leq \pi u$ olur. L Dedekind tam olduğundan $\sup \pi_1(u_\tau)$ vardır. $\hat{\pi}_1 u := \sup \pi_1(u_\tau)$ olarak

tanımlanırsa, π_1 'in $\text{Orth}(L)$ nin bir elemanına genişlediği görülür. Böylece $\text{Orth}(L)$ idealdir.

$0 \leq \pi \in \text{Orth}^\infty(L)$ olsun. $n = 1, 2, \dots$ için $0 \leq \pi \wedge n I \leq n I$ ve böylece $\pi \wedge n I \in \text{Orth}(L)$ dir. $\text{Orth}^\infty(L)$ birimli Arşimedyen f - cebiri olduğundan $0 \leq \pi - \pi \wedge n I \leq \frac{1}{n} \pi^2$ dir. Böylece $\pi - \pi \wedge n I \downarrow 0$ ve buradan $\pi \wedge n I \uparrow \pi$ bulunur.

Bir vektör uzayından Dedekind tam Riesz uzayına tanımlı pozitif operatörler için bilinen Hahn - Banach önermesinden aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 1.3.6. L Dedekind tam Riesz uzayı olsun. $K \subset L$ Riesz altuzayı ve $\pi : K \rightarrow L$, her $0 \leq u \in K$ için $0 \leq \pi u \leq u$ olacak şekilde bir lineer dönüşüm ise $0 \leq \pi_0 \leq I$ ve her $f \in K$ için $\pi_0 f = \pi f$ olacak şekilde $\pi_0 \in \text{Orth}(L)$ vardır.

Kanıt. Her $f \in L$ için $\rho(f) = f^+$ olan bir ρ fonksiyonu tanımlansın. Her $f, g \in L$ $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$ için $\rho(f + g) = (f + g)^+ \leq f^+ + g^+$ ve $\rho(\lambda f) = (\lambda f)^+ = \lambda f^+$ olduğundan ρ altlineerdir. Şimdi $f \in K$ olsun. O zaman $\pi f \leq \pi f^+ \leq f^+$ olduğundan $\pi f \leq \rho f$ dir. Hahn - Banach önermesinden her $f \in K$ için $\pi_0 f = \pi f$ ve her $f \in L$ için $\pi_0 f \leq \rho f$ olacak şekilde $\pi_0 : L \rightarrow L$ lineer dönüşümü vardır (1). $0 \leq f \in L$ için $-\pi_0(f) = \pi_0(-f) \leq \rho(-f) = (-f)^+ = 0$ ve $\pi_0(f) \leq f^+ = f$ dir. Böylece $0 \leq \pi_0 \leq I$ ve $0 \leq f, g \in L$ $f \perp g$ için $\pi_0 f \leq f$ olduğundan $\pi_0 f \perp g$, yani $\pi_0 \in \text{Orth}(L)$ dir.

Önerme 1.3.7. $\pi_1, \pi_2 \in \text{Orth}(L)$ ve bir $0 \leq u \in L$ için $\pi_1 u = \pi_2 u$ olsun. O zaman π_1 ve π_2 , u tarafından üretilen B_u bandı üzerinde eşittir.

Kanıt. $\pi_1, \pi_2 \in \text{Orth}(L)$ ve bir $0 \leq u \in L$ için $\pi_1 u = \pi_2 u$ olsun. O zaman $(\pi_1 - \pi_2)u = 0$ olduğundan $u \in \text{Ker}(\pi_1 - \pi_2)$ dir. $\pi_1 - \pi_2$ sıralı sürekli olduğundan $\text{Ker}(\pi_1 - \pi_2)$ banddır. u 'yu içeren en küçük band B_u olduğundan $B_u \subset \text{Ker}(\pi_1 - \pi_2)$ dir. Böylece her $f \in B_u$ için $(\pi_1 - \pi_2)f = 0$ ve $\pi_1 f = \pi_2 f$ elde edilir.

BÖLÜM 2

MAHARAM ÖZELLİĞİNE SAHİP OPERATÖRLER

İÇİN HAHN AYRIŞIM ÖNERMESİ

$\lambda, (X, \Sigma)$ ölçü uzayı üzerinde gerçel değerli bir ölçüm olsun. $P \in \Sigma$ kümesi, her $E \in \Sigma$ için $\lambda(E \cap P) \geq 0$ ise λ 'ya göre pozitif, her $E \in \Sigma$ için $\lambda(E \cap P) \leq 0$ ise λ 'ya göre negatiftir denir. Klasik Hahn ayrışım önermesi; $X = P \cup N$ ve $P \cap N = \emptyset$ olacak şekilde λ 'ya göre pozitif P , λ 'ya göre negatif N kümelerinin varlığını bildirir. Bu P ve N kümelerine λ gerçel ölçümünün Hahn ayrışımı denir.

Bu bölümde klasik Hahn ayrışım önermesi Maharam özelliğine sahip operatörler için genelleştirilmiştir.

Önerme 2.1. L ve M Dedekind tam Riesz uzayları $T: L \rightarrow M$ sıralı sürekli, pozitif operatör olsun. T Maharam özelliğine sahipse her $P \in \mathcal{B}(M)$ ve her $0 \leq u \in L$ için $P Tu = T Qu$ olacak şekilde P, T ve u 'ya bağlı bir $Q \in \mathcal{B}(L)$ vardır.

Kanıt. $L = N_T \oplus C_T$ olduğundan her $0 \leq u \in L$ için $u = v + w$ olacak şekilde $0 \leq v \in C_T$ ve $0 \leq w \in N_T$ vardır. Her $P \in \mathcal{B}(M)$ için $P Tu = P Tv$ dir. Bir $Q \in \mathcal{B}(L)$ için $P Tv = T Qv$ olduğunu kabul edelim. O zaman;

$$T Qu = T Qv + T Qw = P Tv + P Tw = P Tu$$

olur. Böylece T 'yi kesin pozitif kabul etmek genelliği bozmaz. Yani C_T üzerinde önermeyi kanıtlamak yeterlidir.

Her $P \in \mathcal{B}(M)$, her $0 \leq u \in C_T$ için $0 \leq P Tu \leq Tu$ ve T Maharam özelliğine sahip olduğundan $0 \leq v \leq u$, $P Tu = Tv$ olacak şekilde bir $v \in L$ vardır. C_T band olduğundan $v \in C_T$ dir. $K = \{\lambda u: \lambda \in \mathbb{R}\} \subset C_T$ Riesz altuzayını ele alalım.

$$\pi_o : K \rightarrow C_T$$

$$\lambda u \rightarrow \pi_o(\lambda u) = \lambda v$$

olarak tanımlansın. Her $0 \leq \lambda u$ için $\lambda \geq 0$ ve böylece $\lambda v \leq \lambda u$ olduğundan $0 \leq \pi_o(\lambda u) \leq \lambda u$ bulunur. C_T Dedekind tam olduğundan Önerme 1.3.6 π_o için uygulanabilir. Böylece $0 \leq \pi \leq I$ ve $\pi u = \pi_o u = v$ olacak şekilde bir $\pi \in \text{Orth}(C_T)$ vardır. Buradan $P Tu = T \pi u$ bulunur ve aynı zamanda $\pi; T, P$ ve u 'ya bağlıdır.

$$0 = P Tu \wedge (I - P) Tu = T \pi u \wedge T (I - \pi) u \geq T (\pi u \wedge (I - \pi) u) \geq 0$$

ve T kesin pozitif olduğundan $\pi u \wedge (I - \pi)u = 0$ dir. Önerme 1.3.7 'den $B_u \subset C_T$ üzerinde $\pi \wedge (I - \pi) = 0$ dir. $\pi' : C_T \rightarrow C_T$, her $f \in B_u$, $g \in (B_u)^d$ için $\pi'(f + g) = \pi f$ olarak tanımlansın. $0 \leq \pi' \leq I$, $\pi' \in \text{Orth}(C_T)$ ve $P Tu = T \pi' u$ olur. $0 \leq f \in B_u$, $0 \leq g \in (B_u)^d$ için $\pi f \wedge g = 0$ olduğundan;

$$0 \leq (\pi' \wedge (I - \pi'))(f + g) = \pi f \wedge (g + (I - \pi) f)$$

$$\leq \pi f \wedge g + \pi f \wedge (I - \pi) f = 0$$

bulunur. Böylece $\pi' \in \mathcal{B}(C_T)$ dir.

Şimdi $Q : L \rightarrow L$ her $f \in C_T$ ve $g \in N_T$ için $Q(f + g) = \pi' f$

olarak tanımlansın. O zaman $0 \leq Q \leq I$ $Q^2 = Q$ olduğundan $Q \in \mathcal{B}(L)$ ve $P Tu = T Qu$ elde edilir.

Önerme 2.2. L ve M Dedekind tam Riesz uzayları $T : L \rightarrow M$ sıralı sürekli, pozitif operatör ve her $P \in \mathcal{B}(M)$, $0 \leq u \in L$ için $P Tu = T Qu$ olacak şekilde $Q \in \mathcal{B}(L)$ olsun. O zaman $\mathcal{B}(\{T(L)\}^{dd})$ den $\mathcal{B}(L)$ içine bir h Boole izomorfizması vardır, $S : L \rightarrow M$ sıralı sürekli pozitif ve T 'ye göre mutlak sürekli bir dönüşüm olmak üzere her $P \in \mathcal{B}(\{T(L)\}^{dd})$ için $PS = Sh(P)$ ve S Maharam özelliğine sahiptir.

Özellikle, T Maharam özelliğine sahip ve her $P \in \mathcal{B}(\{T(L)\}^{dd})$ için $PT = Th(P)$ dir.

Kanıt. Önerme 2.1.'in kanıtında olduğu gibi T 'yi kesin pozitif kabul etmek genelliği bozmaz. $\epsilon > 0$ L 'nin maksimal dik sisteminin bir elemanı olmak üzere B_ϵ üzerinde önermeyi kanıtlamak yeterlidir. $M = \{T(B_\epsilon)\}^{dd}$ kabul etmek genelliği bozmaz. Böylece her $P \in \mathcal{B}(M)$ için $P Te = T Qe$ olacak şekilde bir $Q \in \mathcal{B}(B_\epsilon)$ vardır. Önermenin kanıtı, kolaylık sağlamak amacıyla birkaç adımda yapılmıştır.

(i) Her $Q_1 \in \mathcal{B}(B_\epsilon)$ için $PT Q_1 e = TQ Q_1 e$ dir. Gerçekten,

$$(I - P) TQ Q_1 e \leq (I - P) T Q e = (I - P) P T e = 0$$

olduğundan $TQ Q_1 e = PTQ Q_1 e$ ve

$$PT (I - Q) Q_1 e \leq PT (I - Q) e = P T e - PT Q e = 0$$

olduğundan $PT Q_1 e = PTQ Q_1 e$ ve böylece $PT Q_1 e = TQ Q_1 e$ 'dir.

- (ii) Her $P \in \mathcal{B}(M)$ için $P T e = T Q e$ olacak şekilde bir ve yalnız bir $Q \in \mathcal{B}(B_e)$ vardır.

$P T e = T Q e = T Q_1 e$ olduğunu kabul edelim. O zaman $T Q e = P T e = P (P T e) = P (T Q_1 e) = T Q Q_1 e$ olur, burada son eşitlik (i) den elde edilir. Böylece T kesin pozitif $Q Q_1 e \leq Q e$ ve $T (Q e - Q Q_1 e) = 0$ olduğundan $Q e = Q Q_1 e$ dir. (i) de Q ve Q_1 'in rolleri değiştirilirse $P T Q e = T Q_1 Q e$ olacağından

$$T Q_1 e = P T e = P (P T e) = P T Q e = T Q_1 Q e$$

ve böylece $Q_1 e = Q_1 Q e$ dir. Önerme 1.2.4 'den $Q_1 e = Q e$ dir. Önerme 1.3.7 den B_e üzerinde $Q = Q_1$ dir. Böylece $h, \mathcal{B}(M)$ den $\mathcal{B}(B_e)$ içine bir $P \in \mathcal{B}(M)$ için $h(P) = Q$; $P T e = T Q e$ olarak tanımlanabilir.

- (iii) $h : \mathcal{B}(M) \rightarrow \mathcal{B}(B_e)$ Boole homomorfizmasıdır.

$h, \mathcal{B}(M)$ nin birim ve sıfır elemanını sırasıyla $\mathcal{B}(B_e)$ nin birim ve sıfır elemanına götürür. $P_1, P_2 \in \mathcal{B}(M)$ ise (i) den dolayı,

$$(P_1 \wedge P_2) T e = P_1 P_2 T e = P_1 (T h(P_2) e) = T (h(P_1) h(P_2) e)$$

ve h 'nin tanımından;

$$h(P_1 \wedge P_2) = h(P_1) h(P_2) = h(P_1) \wedge h(P_2)$$

dir.

$$(I - P) T e = T e - P T e = T e - T h(P) e = T (I - h(P)) e$$

olduğundan $h(I - P) = I - h(P)$ dir. Böylece h Boole homomorfizmasıdır.

(iv) h , bire - bir ve sıralı süreklidir.

$P_1, P_2 \in \mathcal{B}(M)$ ve $h(P_1) = h(P_2)$ olsun. O zaman

$$P_1 Te = T h(P_1) e = T h(P_2) e = P_2 Te$$

ve Önerme 1.3.7 'den B_{Te} üzerinde $P_1 = P_2$ dir. T pozitif ve sıralı sürekli olduğundan $B_{Te} = \{T(B_e)\}^{dd} = M$ dir. Böylece $P_1 = P_2$ ve h bire-bir dir.

h 'nın sıralı sürekli olduğunu görmek için $P_\tau \downarrow 0$ olduğunu kabul edelim. O zaman $Q_\tau = h(P_\tau)$ olmak üzere $0 \leq Q_\tau$ ve $\text{Orth}(B_e)$ Dedekind tam olduğundan $Q_\tau \downarrow Q$ olacak şekilde bir $Q \in \text{Orth}(B_e)$ vardır. Her τ için $0 \leq T Q_e \leq T Q_\tau e = P_\tau Te$ olduğundan $0 = \inf P_\tau Te \geq T Q_e \geq 0$ ve böylece $T Q_e = 0$ bulunur. T kesin pozitif olduğundan $Q_e = 0$, Önerme 1.3.7 'den $Q = 0$ dir.

(v) $S : L \rightarrow M$ pozitif ve T 'ye göre mutlak sürekli ise her $P \in \mathcal{B}(M)$ için $P Se = S h(P) e$ dir.

$P \in \mathcal{B}(M)$ ve $h(P) = Q$ olsun. $S \ll T$ olduğundan

$$S Q_e \in \{T Q_e\}^{dd} = \{P Te\}^{dd} \subset P(M)$$

ve böylece $(I - P) S Q_e = 0$ yani $S Q_e = P S Q_e$ dir.

$$S(I - Q)e \in \{T(I - Q)e\}^{dd} = \{(I - P)Te\}^{dd} \subset (I - P)(M)$$

ve buradan $P S(I - Q)e = 0$ yani $P Se = P S Qe$ dir. Böylece $P Se = S h(P)e$ bulunur.

(vi) S , (v) deki hipotezlere ek olarak sıralı sürekli ise her $P \in \mathcal{B}(M)$ ve her $0 \leq u \in B_e$ için $P S u = S h(P) u$ dur.

e tarafından üretilen ideal A_e olmak üzere her $0 \leq u \in A_e$ için $P S u = S h(P) u$ olduğu gösterilirse her $0 \leq u \in B_e$ için;

$$\begin{aligned} P S u &= P S (\sup u \wedge ne) = \sup P S (u \wedge ne) \\ &= \sup S h(P) (u \wedge ne) = S h(P) (\sup u \wedge ne) \\ &= S h(P) u \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $0 \leq u \in A_e$ olsun. O zaman $0 \leq u \leq \lambda e$ olacak şekilde $\lambda > 0$ vardır. $K = \{\theta e : \theta \in \mathbb{R}\} \subset L$ Riesz altuzayını ele alalım.

$$\begin{aligned} \pi_o : K &\rightarrow L \\ \theta e &\rightarrow \pi_o(\theta e) = \theta u \end{aligned}$$

olarak tanımlanırsa her $0 \leq \theta e$ için $0 \leq \pi_o(\theta e) = \theta u \leq \lambda \theta e$ bulunur.

Önerme 1.3.6 'nın kanıtında $\rho(f) = \lambda f^+$ alınrsa $0 \leq \pi \leq \lambda I$ ve $\pi e = u$ olacak şekilde $\pi \in \text{Orth}(L)$ elde edilir. $S' = S \circ \pi$, $0 \leq v \in L$ olsun. $S' v \leq \lambda S v$ olduğundan $S' v \in \{T v\}^{dd}$ yani $S' \ll T$ dir. (v) den $P S' e = S' h(P)e$ ve böylece,

$$P Su = P S \pi e = S \pi h(P) e = S h(P) \pi e = S h(P) u$$

bulunur. Burada üçüncü eşitlik Önerme 1.2.4 'den elde edilir.

(vii) S, (v) ve (vi) daki hipotezler altında Maharam özelliğine sahiptir.

$0 \leq u \in L$, $0 \leq v \in M$ ve $0 \leq v \leq Su$ olsun. $K = \{\lambda Su : \lambda \in \mathbb{R}\} \subset M$ Riesz altuzayını ele alalım. Daha önce gösterildiği gibi $0 \leq \pi \leq I$ ve $\pi Su = v$ olacak şekilde $\pi \in \text{Orth}(M)$ vardır. $0 \leq \pi \leq I$ olduğundan ve Freudenthal'ın spektral önermesinden $\pi_n \uparrow \pi$ olacak şekilde π_n dizisi vardır. Burada π_n ; $1 \leq i \leq p$ $0 < c_i \leq 1$ ve $\{P_i\} \subset \mathcal{B}(M)$ $i \neq j$ için $P_i P_j = 0$ olmak üzere $\sum_{i=1}^p c_i P_i$ biçimindedir. Böylece $\pi_n Su \uparrow \pi Su$ olur. $h_n = \sum_{i=1}^p c_i h(P_i)$ olmak üzere $i \neq j$ için $h(P_i) h(P_j) = 0$ ve böylece; $\sum_{i=1}^p c_i h(P_i) = \bigvee_{i=1}^p c_i h(P_i) \leq I$ dir. $\text{Orth}(L)$ Dedekind tam olduğundan $\sup h_n$ var ve $\sup h_n \leq I$ dir.

Yukarıdaki açıklamalar S 'nin sıralı sürekliliği ve (vi) dan,

$$\begin{aligned} v = \pi Su &= \sup \pi_n Su = \sup \sum_{i=1}^p c_i P_i Su \\ &= \sup \sum_{i=1}^p c_i Sh(P_i) u = \sup S \left(\sum_{i=1}^p c_i h(P_i) u \right) \\ &= S \left(\sup \sum_{i=1}^p c_i h(P_i) \right) u \end{aligned}$$

elde edilir. $w = \sup \sum_{i=1}^p c_i h(P_i)$ u olmak üzere $v = Sw$ ve $0 \leq w \leq u$ olur.

Böylece S Maharam özelliğine sahiptir.

Önermenin son kısmı S yerine T alınarak elde edilir.

Önerme 2.3. Önerme 2.2 'deki hipotezler altında, T 'nin Maharam özelliğine sahip olması için gerekli ve yeterli koşul $K = \{T(L)\}^{dd} \subset M$ olmak üzere bir $h: \text{Orth}^\infty(K) \rightarrow \text{Orth}^\infty(L)$ aşağıdaki özellikleri doğrulayan sıralı sürekli f-cebir izomorfizmasının olmasıdır.

$$(a) \quad h(\mathfrak{B}(K)) \subset \mathfrak{B}(L)$$

$$(b) \quad h(Z(K)) \subset Z(L)$$

(c) $S: L \rightarrow M$ sıralı sürekli, pozitif ve T 'ye göre mutlak sürekli bir dönüşüm olmak üzere her $\pi \in \text{Orth}^\infty(K)$ ve $f \in D_{h(\pi)}$ için $\pi S f = S h(\pi) f$ dir. Bu durumda S Maharam özelliğine sahiptir.

Kanıt. Önce Önerme 2.2 'deki hipotezler altında T Maharam özelliğine sahip olsun. O zaman $h: \mathfrak{B}(K) \rightarrow \mathfrak{B}(L)$ Boole izomorfizması vardır. h 'nın $\text{Orth}^\infty(K)$ dan $\text{Orth}^\infty(L)$ ye $h(Z(K)) \subset Z(L)$ olacak şekilde sıralı sürekli f-cebir izomorfizmasına genişletilebileceğini gösterelim.

Eğer $0 \leq \pi \in Z(K)$ ise $0 \leq \pi \leq \lambda I$ olacak şekilde $\lambda > 0$ vardır.

Böylece $1 \leq i \leq p$, $0 < c_i \leq 1$, $\{P_i\} \subset \mathfrak{B}(K)$ ve $i \neq j$ için $P_i P_j = 0$ olmak

üzere $\pi_n = \sum_{i=1}^p c_i P_i$ dizisi vardır; $\pi = \sup \pi_n$ dir. $h(\pi_n) := \sum_{i=1}^p c_i h(P_i) \in Z(L)$

olarak tanımlanırsa $n = 1, 2, \dots$ için $h(\pi_n) \leq \lambda I$ dir. Böylece $\sup h(\pi_n)$

vardır ve $\sup h(\pi_n) \in Z(L)$ dir. O zaman $h(\pi) := \sup h(\pi_n)$ olarak tanım-

lanabilir. h toplamsal olduğundan $Z(K)$ dan $Z(L)$ ye pozitif operatöre genişletilebilir. $\pi, s \in Z(K)$ $\pi = \sup \pi_n$, $s = \sup s_n$ ve $\pi \wedge s = 0$ olsun.

Her $n, m = 1, 2, \dots$ için $\pi_n \wedge s_m = 0$ dır. $\pi_n = \sum_{i=1}^p c_i P_i$, $s_m = \sum_{i=1}^q d_i Q_i$

olmak üzere $1 \leq i \leq p$ $1 \leq j \leq q$ için $P_i \wedge Q_j = 0$ ve böylece $h(P_i) \wedge h(Q_j) = 0$ dır. Buradan her $n, m = 1, 2, \dots$ için $h(\pi_n) \wedge h(s_m) = 0$ bulunur. Böylece $h(\pi) \wedge h(s) = 0$ dır. Şimdi $0 \leq \pi \in Z(K)$ ve $h(\pi) = 0$ olsun. O zaman $n = 1, 2, \dots$ için $h(\pi_n) = \sum_{i=1}^p c_i h(P_i) = 0$ böylece $1 \leq i \leq p$ için $h(P_i) = 0$ ve buradan $P_i = 0$ bulunur. Böylece $\pi = 0$ dır.

Şimdi $0 \leq \pi \in \text{Orth}^\infty(K)$ olsun. O zaman $n = 1, 2, \dots$ için $\pi_n \in Z(K)$, $\pi_n \leq nI$ ve $n \neq m$ için $\pi_n \wedge \pi_m = 0$ olacak şekilde π_n dizisi vardır; $\pi = \sup \pi_n$ dir. Böylece $n \neq m$ için $h(\pi_n) \wedge h(\pi_m) = 0$ ve $h(\pi_n) \leq nI$ dir. $\text{Orth}^\infty(L)$ ayrık tam olduğundan $\sup h(\pi_n) \in \text{Orth}^\infty(L)$ dir. O zaman $h(\pi) := \sup h(\pi_n)$ olarak tanımlanabilir. Buradan genel $\pi \in \text{Orth}^\infty(K)$ için $h(\pi) = h(\pi^+) - h(\pi^-)$ dır. $\pi, s \in \text{Orth}^\infty(K)$ $\pi = \sup \pi_n$, $s = \sup s_n$ ve $\pi \wedge s = 0$ olsun. O zaman $n, m = 1, 2, \dots$ için $\pi_n \wedge s_m = 0$ olduğundan $h(\pi_n) \wedge h(s_m) = 0$ ve böylece $h(\pi) \wedge h(s) = 0$ bulunur. Böylece h , birimi birime götüren Riesz homomorfizması ve buradan h cebir homomorfizmasıdır (12).

$\text{Ker } h = \{0\}$ olduğundan h bire-bir ve $\text{Ker } h$ band olduğundan h sıralı süreklidir (1). Böylece $h, h(\mathcal{B}(K)) \subset \mathcal{B}(L)$ ve $h(Z(K)) \subset Z(L)$ olacak şekilde sıralı sürekli, f-cebir homomorfizmasıdır.

$S : L \rightarrow M$ sıralı sürekli, pozitif ve T 'ye göre mutlak sürekli bir dönüşüm olsun. Önerme 2.2 'den her $\pi \in Z(K)$ için $\pi S = S h(\pi)$ olduğu açıktır. $0 \leq \pi \in \text{Orth}^\infty(K)$ ve $f \in D_{h(\pi)}$ olsun. O zaman $\pi = \sup \pi_n$, $n = 1, 2, \dots$ için $\pi_n \in Z(K)$ dır.

$$\begin{aligned} \pi S f &= \sup \pi_n S f = \sup S h(\pi_n) f = S \sup h(\pi_n) f \\ &= S h(\pi) f \end{aligned}$$

elde edilir. h nın tanımından genel $\pi \in \text{Orth}^\infty(K)$, $f \in D_{h(\pi)}$ için $\pi S f = S h(\pi) f$ dir. Önerme 2.2 'de olduğu gibi S Maharam özelliğine sahiptir.

Önermenin diğer kısmı S yerine T alınarak elde edilir.

Önerme 2.4. L ve M Dedekind tam Riesz uzayları, $T : L \rightarrow M$ sıralı sürekli olsun. $|T|$ nin Maharam özelliğine sahip olması için gerekli ve yeterli koşul her $P \in \mathfrak{B}(M)$ ve her $0 \leq u \in L$ için $P T u = T Q u$ olacak şekilde $Q \in \mathfrak{B}(L)$ olmasıdır.

Kanıt. $|T|$ Maharam özelliğine sahip olsun. T^+ , T^- sıralı sürekli, pozitif ve $|T|$ ne göre mutlak sürekli. Önerme 2.2 'den her $P \in \mathfrak{B}(M)$ için $P T^+ = T^+ h(P)$ ve $P T^- = T^- h(P)$ dir. $h(P) = Q \in \mathfrak{B}(L)$ olmak üzere $(PT)^+ = (TQ)^+$ ve $(PT)^- = (TQ)^-$ dir. Böylece her $0 \leq u \in L$ için;

$$P T u = (PT)^+ u - (PT)^- u = (TQ)^+ u - (TQ)^- u = T Q u$$

elde edilir.

Tersine; $P \in \mathfrak{B}(M)$ ve $0 \leq u \in L$ için $P T u = T Q u$ olacak şekilde $Q \in \mathfrak{B}(L)$ olsun. O zaman;

$$\begin{aligned} P |T| u &= P T^+ u + P T^- u = (PT)^+ u + (PT)^- u \\ &= |PT| u = |TQ| u = (TQ)^+ u + (TQ)^- u \\ &= T^+ Q u + T^- Q u = |T| Q u \end{aligned}$$

olur. Önerme 2.2 'den $|T|$ Maharam özelliğine sahiptir.

Önerme 2.5. (Hahn Ayrışım Önermesi) L ve M Dedekind tam Riesz uzayları, $T : L \rightarrow M$ sıralı sürekli ve $|T|$ Maharam özelliğine sahip olsun. O zaman her $0 \leq u \in L$ için $T Q_0 u \geq 0$ ve $T (I - Q_0) u \leq 0$ olacak şekilde $Q_0 \in \mathfrak{B}(L)$ vardır.

Kanıt. $\mathcal{A} = \{Q \in \mathfrak{B}(L) : \text{her } 0 \leq u \in L \text{ için } T Q u \geq 0\}$ olsun. $\mathcal{A}$ boş değil ve $Q_1, Q_2 \in \mathcal{A}$ için $Q_1 \vee Q_2 \in \mathcal{A}$ dır. Gerçekten, $0 \in \mathcal{A}$ ve $Q_1, Q_2 \in \mathcal{A}$ ise her $0 \leq u \in L$ için $0 \leq Q_2 u, (I - Q_2)u, (I - Q_1)u \in L$ olduğundan $T Q_1 Q_2 u \geq 0$, $T Q_1 (I - Q_2)u \geq 0$ ve $T Q_2 (I - Q_1)u \geq 0$ dır. Böylece $Q_1 Q_2, Q_1 (I - Q_2), Q_2 (I - Q_1) \in \mathcal{A}$ dır.

$$\begin{aligned} Q_1 \vee Q_2 &= Q_1 + Q_2 - Q_1 Q_2 = Q_1 Q_2 + Q_1 - Q_1 Q_2 + Q_2 - Q_2 Q_1 \\ &= Q_1 Q_2 + Q_1 (I - Q_2) + Q_2 (I - Q_1) \end{aligned}$$

ve burudan $Q_1 \vee Q_2 \in \mathcal{A}$ dır. L Dedekind tam ve $\mathcal{A}$ yukarıya yönlendirilmiş sistem olduğundan $\sup (R : R \in \mathcal{A})$ vardır. $Q_0 = \sup (R : R \in \mathcal{A})$ olmak üzere (2) Önerme 30.5 'den $Q_0 \in \mathfrak{B}(L)$ dir. Böylece her $0 \leq u \in L$

için $Ru \uparrow Q_0u$ ve buradan $Ru \xrightarrow{0} Q_0u$ olur. T sıralı sürekli olduğundan $T Ru \xrightarrow{0} T Q_0u$ ve böylece $(T Ru)^+ \xrightarrow{0} (T Q_0u)^+$ elde edilir. Böylece $T Q_0u = (T Q_0u)^+ \geq 0$ bulunur. Yani $Q_0 \in \mathcal{A}$ dır.

Şimdi $S = T(I - Q_0)$ olmak üzere her $0 \leq u \in L$ için $Su \leq 0$ olduğunu gösterelim. Bir $0 < u_0 \in L$ için $S u_0 \not\leq 0$ yani $(S u_0)^+ > 0$ olduğunu kabul edelim.

$\mathcal{B} = \{Q \in \mathcal{B}(L) : S Q u_0 \leq 0\}$ kümesini ele alalım. $0 \in \mathcal{B}$ olduğundan $\mathcal{B}$ boş değildir. $\Omega \subset \mathcal{B}$ 'nin bir zinciri olsun. O zaman $Q' = \sup(R : R \in \Omega)$ olmak üzere $Q' \in \mathcal{B}(L)$ dir. Böylece $R u_0 \uparrow Q' u_0$ ve S sıralı sürekli olduğundan yukarıda yapıldığı gibi $(S R u_0)^+ \xrightarrow{0} (S Q' u_0)^+$ elde edilir. $S R u_0 \leq 0$ olduğundan $(S Q' u_0)^+ = 0$ olur. Böylece $S Q' u_0 \leq 0$ ve $Q' \in \mathcal{B}$ dir. Zorn önermesinden $\mathcal{B}$ 'nin bir maksimal elemanı vardır. Bu elemanı Q_1 ile gösterelim. $S u_0 \not\leq 0$ kabul edildiğinden $I \notin \mathcal{B}$ ve böylece $Q_2 = I - Q_1 \neq 0$ dır. $Q \in \mathcal{B}(L)$, $Q \leq Q_2$ için $S Q u_0 \leq 0$ ise $Q \in \mathcal{B}$ ve böylece $Q \leq Q_1 \wedge (I - Q_1)$ olduğundan $Q = 0$ olur. O zaman her $Q \in \mathcal{B}(L)$ $0 \neq Q \leq Q_2$ için $S Q u_0 \not\leq 0$ dır. Şimdi her $Q \in \mathcal{B}(L)$ $0 \neq Q \leq Q_2$ için $S Q u_0 > 0$ olduğunu gösterelim. Bunun için bir $Q \in \mathcal{B}(L)$ $0 \neq Q \leq Q_2$ olmak üzere $S Q u_0 \not\leq 0$ olduğunu kabul edelim. $S Q u_0 \not\leq 0$ olduğundan ve $S Q u_0 \not\leq 0$ kabul edildiğinden $S Q u_0 \not\leq 0$ dır. Böylece $(S Q u_0)^- > 0$ dır. $P \in \mathcal{B}(M)$, $(S Q u_0)^-$ tarafından üretilen band üzerindeki projeksiyon olmak üzere $P(S Q u_0) = -(S Q u_0)^- < 0$ elde edilir.

Her $0 \leq u \in L$ için $S^+ Q u = T^+(I - Q_0) Q u \leq |T|u$ ve $S^- Q u = T^-(I - Q_0) Q u \leq |T|u$ olduğundan $S^+ Q \ll |T|$, $S^- Q \ll |T|$ dir. Önerme 2.2 'den;

$$\begin{aligned} P S Q u_0 &= P S^+ Q u_0 - P S^- Q u_0 = S^+ h(P) Q u_0 - S^- h(P) Q u_0 \\ &= S h(P) Q u_0 \end{aligned}$$

olur. Böylece $S h(P) Q u_0 < 0$ ve $h(P) Q u_0 \neq 0$ bulunur. $0 \neq h(P) Q \leq Q_2$ olduğundan $S h(P) Q u_0 \not\leq 0$ dır. Bu ise $S h(P) Q u_0 < 0$ olmasıyla çelişir. Böylece her $Q \in \mathfrak{B}(L)$ $0 \neq Q \leq Q_2$ için $S Q u_0 > 0$ ve buradan $S Q_2 u_0 > 0$ dır.

Freudenthal'ın spektral önermesinin kanıtı incelenirse, u_0 tarafından üretilen ideal A_{u_0} olmak üzere $0 \leq y \in A_{u_0}$ için $u_n \xrightarrow{0} y$ olacak şekilde $u_n = \sum_{i=1}^p \alpha_{i-1} (P_{\alpha_{i-1}} - P_{\alpha_i}) u_0$ dizisi vardır. Burada $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_p = 1$, $i = 0, 1, 2, \dots, p$ için P_{α_i} , $(y - \alpha_i u_0)^+$ tarafından üretilen band üzerindeki projeksiyondur ve $B_{(y - \alpha_i u_0)^+} \subset B_{(y - \alpha_{i-1} u_0)^+}$ olduğundan $P_{\alpha_{i-1}} - P_{\alpha_i} \in \mathfrak{B}(L)$ dir. $i = 0, 1, 2, \dots, p$ için $0 \leq Q_2 (P_{\alpha_{i-1}} - P_{\alpha_i}) \leq Q_2$ olduğundan $S Q_2 (P_{\alpha_{i-1}} - P_{\alpha_i}) u_0 \geq 0$ ve böylece $n = 1, 2, \dots$ için $S Q_2 u_n \geq 0$ bulunur. $S Q_2$ sıralı sürekli olduğundan $S Q_2 y \geq 0$ dır. u_0 tarafından üretilen band B_{u_0} olmak üzere $A_{u_0} \subset B_{u_0}$ sıralı yoğun ideal olduğundan her $0 \leq w \in B_{u_0}$ için $S Q_2 w \geq 0$ dır. Q_{u_0} , B_{u_0} üzerindeki band projeksiyonu olsun. Her $0 \leq u \in L$ için $0 \leq Q_{u_0}(u) \in B_{u_0}$ ve böylece $S Q_2 Q_{u_0}(u) \geq 0$ dır. $Q_{u_0}(u_0) = u_0$ olduğundan $S Q_2 Q_{u_0}(u_0) = S Q_2 u_0 > 0$ dır. S 'nin tanımından her $0 \leq u \in L$ için $T(I - Q_0) Q_2 Q_{u_0}(u) \geq 0$ ve $T(I - Q_0) Q_2 Q_{u_0}(u_0) > 0$ dır. Böylece $(I - Q_0) Q_2 Q_{u_0} \neq 0$ dır. $Q'_0 = Q_0 + (I - Q_0) Q_2 Q_{u_0}$ olmak üzere $Q'_0 \in \mathfrak{B}(L)$ ve her $0 \leq u \in L$ için $T Q'_0 u \geq 0$ olduğundan $Q'_0 \in \mathcal{A}$ dır. Q'_0 ve Q_0 in tanımından

$Q'_0 = Q_0$ bulunur. Bu ise $(I - Q_0) Q_2 Q_{u_0} \neq 0$ olmasıyla çelişir. O halde her $0 \leq u \in L$ için $Su = T(I - Q_0)u \leq 0$ dır.



BÖLÜM 3

RADON - NIKODYM ÖNERMESİ

$\mu, (X, \Sigma)$ ölçü uzayı üzerinde pozitif ölçüm olsun. $X = \cup E_n$ olduğunda her n için $\mu(E_n) < \infty$ ise μ 'ye σ - sonludur denir.

$\lambda, \mu (X, \Sigma)$ ölçü uzayı üzerinde pozitif ölçümler olsun. Her $E \in \Sigma$ $\mu(E) = 0$ iken $\lambda(E) = 0$ oluyorsa λ, μ 'ye göre mutlak süreklidir denir ve $\lambda \ll \mu$ olarak gösterilir.

(X, Σ, μ) ölçüm uzayında negatif olmayan, ölçülebilir fonksiyonların kümesini M_+ ile gösterelim. $f \in M_+$ olmak üzere her $E \in \Sigma$ için $\lambda(E) = \int_E f d\mu$ şeklinde tanımlanan λ pozitif ölçümdür ve $\lambda \ll \mu$ dir.

Klasik Radon-Nikodym önermesi bunun tersini söyler. Yani, $\lambda, \mu (X, \Sigma)$ ölçü uzayı üzerinde σ - sonlu ölçümler ve $\lambda \ll \mu$ olsun. M_+ içinde her $E \in \Sigma$ için $\lambda(E) = \int_E f d\mu$ koşulunu sağlayan μ - hemen hemen her yerde tek f fonksiyonu vardır. Bu f fonksiyonuna λ 'nın μ 'ye göre Radon-Nikodym türevi denir.

Bu bölümde pozitif operatörler için Radon-Nikodym önermesi verilmiştir.

Önerme 3.1. L ve M Dedekind tam Riesz uzayları, $T : L \rightarrow M$ sıralı sürekli, pozitif operatör olsun. O zaman aşağıdaki koşullar denktir.

(i) T , Maharam özelliğine sahiptir.

(ii) Her $S : L \rightarrow M$ $0 \leq S \leq T$ için $0 \leq \pi \leq I$ $S = T \pi$ olacak şekilde $\pi \in \text{Orth}(L)$ vardır.

Kanıt. Önce (i) $\Rightarrow$ (ii) olduğunu gösterelim.

$$\Phi = \{\pi \in \text{Orth}(L) : 0 \leq \pi \leq I, \text{ her } 0 \leq u \in L \text{ için } T \pi u \leq Su\}$$

olsun. $0 \in \Phi$ olduğundan Φ boş değildir. $\pi_1, \pi_2 \in \Phi$, $Q \in \mathcal{B}(L)$ $(\pi_1 - \pi_2)^+$ nın dayanağı üzerindeki projeksiyon olsun. $0 \leq u \in L$ için $u = v + w$ olacak şekilde $0 \leq v \in C_{(\pi_1 - \pi_2)^+}$ $0 \leq w \in N_{(\pi_1 - \pi_2)^+}$ vardır. $(\pi_1 - \pi_2)^+ u = (\pi_1 - \pi_2)^+ v$ olduğundan $(\pi_1 - \pi_2)^+ u \in C_{(\pi_1 - \pi_2)^+}$ dır. $\text{Orth}(L)$ f-cebiri, $(\pi_1 - \pi_2)^+ (\pi_1 - \pi_2)^- u = 0$ ve böylece $(\pi_1 - \pi_2)^- u \in N_{(\pi_1 - \pi_2)^+}$ dır. Buradan $Q((\pi_1 - \pi_2)u) = (\pi_1 - \pi_2)^+ u$ bulunur. $0 \leq \pi_1 \vee \pi_2 \leq I$ ve her $0 \leq u \in L$ için

$$\begin{aligned} (\pi_1 \vee \pi_2)u &= \pi_2 u + (\pi_1 - \pi_2)^+ u = \pi_2 u + Q((\pi_1 - \pi_2)u) \\ &= \pi_2 u + Q \pi_1 u - Q \pi_2 u = Q \pi_1 u + (I - Q) \pi_2 u \\ &= \pi_1 Q u + \pi_2 (I - Q)u \end{aligned}$$

ve böylece

$$\begin{aligned} T((\pi_1 \vee \pi_2)u) &= T \pi_1 Q u + T \pi_2 (I - Q)u \\ &\leq S Q u + S (I - Q)u = Su \end{aligned}$$

olduğundan $\pi_1 \vee \pi_2 \in \Phi$ dir. Böylece Φ yukarıya yönlendirilmiş sistem ve Orth (L) Dedekind tam olduğundan $\sup (\pi: \pi \in \Phi)$ vardır. $\pi_0 = \sup (\pi: \pi \in \Phi)$ olmak üzere $0 \leq \pi_0 \leq I$, T sıralı sürekli pozitif olduğundan her $0 \leq u \in L$ için $T \pi_0 u = \sup (T \pi u : \pi \in \Phi) \leq Su$ ve böylece $\pi_0 \in \Phi$ olur. Şimdi $S = T \pi_0$ olduğunu gösterelim. Bunun için $S_1 = S - T \pi_0$ olsun. $S_1 \neq 0$ olduğunu kabul edelim. O zaman $S_1 u_0 > 0$ olacak şekilde $0 < u_0 \in C_{S_1}$ vardır. M Dedekind tam olduğundan Arşimedyandır ve $(S_1 u_0 - \varepsilon T u_0)^+ > 0$ olacak şekilde bir $0 < \varepsilon < 1$ vardır. $S_1, \varepsilon T$ sıralı sürekli, pozitif ve T 'ye göre mutlak süreklidir. T Maharam özelliğine sahip olduğundan Önerme 2.2 'den her $P \in \mathcal{B}(M)$ için

$$P(S_1 - \varepsilon T) = S_1 h(P) - \varepsilon T h(P) = (S_1 - \varepsilon T) h(P)$$

dir. Önerme 2.4 'den $|S_1 - \varepsilon T|$ Maharam özelliğine sahiptir. Böylece Hahn ayrışım önermesi $S_1 - \varepsilon T$ için uygulanabilir. Yani her $0 \leq u \in L$ için $(S_1 - \varepsilon T)(Q_\varepsilon u) \geq 0$ ve $(S_1 - \varepsilon T)(I - Q_\varepsilon)u \leq 0$ olacak şekilde $Q_\varepsilon \in \mathcal{B}(L)$ vardır. $P \in \mathcal{B}(M)$, $(S_1 u_0 - \varepsilon T u_0)^+$ tarafından üretilen band üzerindeki projeksiyon olsun. O zaman

$$(S_1 u_0 - \varepsilon T u_0)^+ = P(S_1 u_0 - \varepsilon T u_0) = (S_1 - \varepsilon T) h(P) u_0 > 0$$

dır. Böylece $h(P) u_0 > 0$ bulunur. $Q_\varepsilon h(P) u_0 = 0$ olduğunu kabul edelim. O zaman $(I - Q_\varepsilon) h(P) u_0 = h(P) u_0$ dır. $(S_1 - \varepsilon T)(I - Q_\varepsilon) h(P) u_0 \leq 0$ olduğundan $(S_1 - \varepsilon T) h(P) u_0 \leq 0$ bulunur. Bu ise $(S_1 - \varepsilon T) h(P) u_0 > 0$ olmasıyla çelişir. O zaman $0 < Q_\varepsilon h(P) u_0 \leq Q_\varepsilon u_0$ ve böylece $Q_\varepsilon u_0 > 0$ bulunur. Yani $Q_\varepsilon \neq 0$ dır. Her $0 \leq u \in L$ için $(S_1 - \varepsilon T) Q_\varepsilon u \geq 0$ olduğundan,

$$\varepsilon T Q_\varepsilon u \leq S_1 Q_\varepsilon u \leq S_1 u = Su - T \pi_0 u$$

ve böylece $T (\pi_0 + \varepsilon Q_\varepsilon) u \leq Su$ olur. Bir $0 < u \in C_T$ için $u < (\pi_0 + \varepsilon Q_\varepsilon) u$ olduğunu kabul edelim. T kesin pozitif olduğundan $Tu < T (\pi_0 + \varepsilon Q_\varepsilon) u \leq Su$ ve $S \leq T$ olduğundan bu bir çelişkidir. $\pi_0 + \varepsilon Q_\varepsilon, I$ ile kıyaslanabilir olduğundan C_T üzerinde $\pi_0 + \varepsilon Q_\varepsilon \leq I$ dir. Q, C_T üzerindeki projeksiyon olmak üzere $\pi_1 = (\pi_0 + \varepsilon Q_\varepsilon)Q + I - Q$ olsun. $0 \leq \pi_1 \leq I$ ve her $0 \leq u \in L$ için

$$\begin{aligned} T \pi_1 u &= T ((\pi_0 + \varepsilon Q_\varepsilon) Qu + (I - Q)u) = T (\pi_0 + \varepsilon Q_\varepsilon) Qu \\ &\leq S Qu \leq Su \end{aligned}$$

olduğundan $\pi_1 \in \Phi$ dir.

$S_1 \leq S \leq T$ olduğundan $C_{S_1} \subset C_S \subset C_T$ dir. $0 < Q_\varepsilon u_0 \leq u_0 \in C_T$ olduğundan $Q Q_\varepsilon u_0 = Q_\varepsilon u_0 > 0$ ve böylece $Q_\varepsilon Q \neq 0$ bulunur. $\pi_1 - \pi_0 \geq \varepsilon Q_\varepsilon Q$ olduğundan $\pi_1(u_0) > \pi_0(u_0)$ dir. π_0 'ın tanımından $\pi_1 \leq \pi_0$ ve böylece $\pi_1(u_0) \leq \pi_0(u_0)$ bulunur. Bu ise çelişkidir. O zaman $S_1 = 0$, yani $S = T \pi_0$ dir.

Şimdi (ii) $\Rightarrow$ (i) olduğunu gösterelim. $P \in \mathcal{B}(M)$ için $S = P T$ olsun. O zaman $0 \leq S \leq T$ ve (ii) 'den $P T = T \pi$, $0 \leq \pi \leq I$ olacak şekilde $\pi \in \text{Orth}(L)$ vardır. $L = C_T \oplus N_T$ olduğundan her $u \in L$ için $u = v + w$ olacak şekilde $v \in C_T$, $w \in N_T$ vardır. $Q \in \mathcal{B}(L)$, C_T üzerindeki projeksiyon olsun. Her $0 \leq u \in L$ için

$$\begin{aligned}
P T u &= P T v + P T w = P T v = T \pi v \\
&= T Q \pi v + T Q \pi w = T Q \pi u
\end{aligned}$$

olur. $0 \leq Q \pi \leq I$ dır ve her $0 \leq u \in L$ için

$$\begin{aligned}
0 &= P T u \wedge (I - P) T u = T Q \pi u \wedge T (I - Q \pi) u \\
&\geq T (Q \pi u \wedge (I - Q \pi) u) \geq 0
\end{aligned}$$

elde edilir. $0 \leq Q \pi u \wedge (I - Q \pi) u \in C_T$ ve T, C_T üzerinde kesin pozitif olduğundan $Q \pi u \wedge (I - Q \pi) u = 0$ dır. Böylece $P T = T Q \pi$ olacak şekilde $Q \pi \in \mathcal{B}(L)$ vardır. Önerme 2.2 'den T Maharam özelliğine sahiptir.

Radon-Nikodym önermesinin kısıtlamasız kanıtını vermeden önce bir operatör tarafından üretilen bandın elemanlarını belirleyelim.

Önerme 3.2. L ve M Dedekind tam Riesz uzayları $S, T : L \rightarrow M$ sıralı sürekli, pozitif operatörler olsun. T Maharam özelliğine sahipse $S \in \{T\}^{dd}$ olması için gerekli ve yeterli koşul her $0 \leq u \in L$ için $Su \in \{Tu\}^{dd}$, yani $S \ll T$ olmasıdır.

Kanıt. Önce $S \in \{T\}^{dd}$ olsun. O zaman $S \wedge nT \uparrow S$ dir. Her $0 \leq u \in L$ için $(S \wedge nT)u \uparrow Su$ ve her n için $(S \wedge nT)u \in \{Tu\}^{dd}$ olduğundan $Su \in \{Tu\}^{dd}$ dır.

Tersine; her $0 \leq u \in L$ için $Su \in \{Tu\}^{dd}$ olsun. $\mathcal{L}'_b(L, M)$ Dedekind tam Riesz uzayı olduğundan $S = S_1 + S_2$ olacak şekilde

$0 \leq S_1 \in \{T\}^{dd}$ ve $S_2 \perp T$ vardır. $S_2 = 0$ olduğunu göstermeliyiz. $0 \leq S_2 \leq S$ olduğundan $S_2 \ll T$ dir. O zaman $S_2 + T$ sıralı sürekli, pozitif ve T 'ye göre mutlak süreklidir. Önerme 2.2 'den $S_2 + T$ Maharam özelliğine sahiptir. $0 \leq T \leq S_2 + T$ ve $0 \leq S_2 \leq S_2 + T$ olduğundan Önerme 3.1 'den $T = (S_2 + T) \pi_1$, $S_2 = (S_2 + T) \pi_2$, $0 \leq \pi_1, \pi_2 \leq I$ olacak şekilde $\pi_1, \pi_2 \in \text{Orth}(L)$ vardır.

$$0 \leq (S_2 + T) \pi_1 \wedge \pi_2 \leq (S_2 + T) \pi_1 \wedge (S_2 + T) \pi_2 = T \wedge S_2 = 0$$

ve böylece C_{S_2+T} üzerinde $\pi_1 \wedge \pi_2 = 0$ bulunur. $C_{S_2} \subset C_{S_2+T}$ olduğundan C_{S_2} üzerinde $\pi_1 \wedge \pi_2 = 0$ dır. Her $0 \leq u, v \in C_{S_2}$ için

$$0 \leq \pi_1 u \wedge \pi_2 v \leq \pi_1 (u + v) \wedge \pi_2 (u + v)$$

oldüğundan $\pi_1 u \wedge \pi_2 v = 0$ ve böylece $\pi_1(C_{S_2}) \perp \pi_2(C_{S_2})$ dir.

$S_2 \neq 0$ olduğunu kabul edelim. O zaman $0 < u_0 \in C_{S_2}$ vardır.

$S_2 = (S_2 + T) \pi_2$ olduğundan $C_{S_2} \subset C_{\pi_2}$ ve böylece $\pi_2(u_0) > 0$ dır.

$\pi_1(u_0) > 0$ olduğunu kabul edelim. O zaman $0 < \pi_1(u_0) < u_0 \in C_{S_2}$

oldüğundan $\pi_2 \pi_1(u_0) > 0$ olur. $\pi_1(C_{S_2}) \perp \pi_2(C_{S_2})$ olduğundan

$\pi_1 \pi_2(u_0) \wedge \pi_2 \pi_1(u_0) = 0$ dır. $\text{Orth}(L)$ Arşimedyen f - cebiri

oldüğundan $\pi_1 \pi_2 = \pi_2 \pi_1$ ve böylece $\pi_1 \pi_2(u_0) = \pi_2 \pi_1(u_0) = 0$

bulunur. Bu ise $\pi_2 \pi_1(u_0) > 0$ olmasıyla çelişir. O zaman $\pi_1 u_0 = 0$

dır. Böylece $S_2 u_0 = (S_2 + T) \pi_2 u_0 > 0$ ve $T u_0 = (S_2 + T) \pi_1 u_0 = 0$

bulunur. $S_2 u_0 \in \{T u_0\}^{dd}$ olduğundan $S_2 u_0 = 0$ dır. Bu ise $S_2 u_0 > 0$

olmasıyla çelişir. O halde $S_2 = 0$ ve böylece $S = S_1 \in \{T\}^{dd}$ dir.

Önerme 3.3. (Radon-Nikodym) L ve M Dedekind tam Riesz uzayları, $S, T : L \rightarrow M$ sıralı sürekli, pozitif operatörler olsun. T Maharam özelliğine sahipse aşağıdaki koşullar denktir.

(i) $S \in \{T\}^{\text{dd}}$ dir.

(ii) S, T 'ye göre mutlak süreklidir.

(iii) Her $f \in D_\pi$ için $S f = T \pi f$ olacak şekilde $0 \leq \pi \in \text{Orth}^\infty(L)$ vardır.

(iv) Her $0 \leq f \in L$ için $S f = \sup T \pi_m f$ olacak şekilde $0 \leq \pi_m \uparrow$, $m = 1, 2, \dots$ için $\pi_m \in \text{Orth}(L)$ vardır.

Kanıt. Önerme 3.2 'de (i) ve (ii) 'nin denk olduğu gösterildi. Kanıtı tamamlamak için $(i) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i)$ olduğunu gösterelim.

Önce $(i) \Rightarrow (iii)$ olduğunu gösterelim. (i) den dolayı $n = 1, 2, \dots$ için $S_n \leq n T$, $n \neq m$ için $S_n \perp S_m$ ve $S = \sup S_n$ olacak şekilde S_n pozitif operatörleri vardır. T Maharam özelliğine sahip olduğundan her n için nT Maharam özelliğine sahiptir. Önerme 3.1 'den $n = 1, 2, \dots$ için $0 \leq \pi_n \leq I$ ve $S_n = (n T) \circ \pi_n$ olacak şekilde $\pi_n \in \text{Orth}(L)$ vardır. $n \pi_n$, yeniden π_n ile gösterilsin. O zaman $n = 1, 2, \dots$ için $0 \leq \pi_n \leq n I$, $S_n = T \pi_n$, $\pi_n \in \text{Orth}(L)$ dir. $n \neq m$ için

$$0 = S_n \wedge S_m = T \pi_n \wedge T \pi_m \geq T (\pi_n \wedge \pi_m) \geq 0$$

dir. Böylece C_T üzerinde $n \neq m$ için $\pi_n \perp \pi_m$ dir. $Q \in \mathcal{B}(L)$, C_T üzerindeki projeksiyon ve her n için $\pi_n' = \pi_n Q$ olmak üzere $\pi_n' \in \text{Orth}(L)$

dir. Her $0 \leq u \in L$ için $u = v + w$, $0 \leq v \in C_T$, $0 \leq w \in N_T$ ve

$$\begin{aligned} S_n u &= T \pi_n u = T \pi_n v + T \pi_n w = T \pi_n Q v + T \pi_n Q w \\ &= T \pi_n Q u = T \pi_n' u \end{aligned}$$

elde edilir. Her $0 \leq u \in L$ ve $n \neq m$ için $(\pi_n' \wedge \pi_m') u = \pi_n Q u \wedge \pi_m Q u = 0$ bulunur. $\text{Orth}^\infty(L)$ ayrık tam olduğundan $\sup \pi_n' \in \text{Orth}^\infty(L)$ dir. $\pi = \sup \pi_n'$ olmak üzere $n \neq m$ $\pi_n' \perp \pi_m'$ olduğundan $\pi = \sup (\pi_1' + \dots + \pi_n')$ ve T sıralı sürekli, pozitif olduğundan her $0 \leq f \in D_\pi$ için

$$\begin{aligned} T \pi f &= T \sup (\pi_1' + \dots + \pi_n') f = \sup (T \pi_1' f + \dots + T \pi_n' f) \\ &= \sup (S_1 f + \dots + S_n f) = S f \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece her $f \in D_\pi$ için $S f = T \pi f$ dir.

Şimdi (iii) $\Rightarrow$ (iv) olduğunu gösterelim. (iii) den dolayı D_π üzerinde $S = T \pi$ olacak şekilde bir $\pi \in \text{Orth}^\infty(L)$ vardır. Önerme 1.3.5 den $\text{Orth}(L)$ sıralı yoğun ideal ve $\pi_n \uparrow \pi$ olacak şekilde $0 \leq \pi_n \in \text{Orth}(L)$ vardır. O zaman her $0 \leq f \in D_\pi$ için $\sup T(\pi_n f) = S f$ dir. D_π sıralı yoğun ideal olduğundan her $0 \leq u \in L$ için $f_\tau \uparrow u$ olacak şekilde $0 \leq f_\tau \in D_\pi$ vardır. O zaman her n ve τ için

$$T \pi_n f_\tau \leq \sup_n T \pi_n f_\tau = S f_\tau \leq S u$$

ve böylece $\sup_\tau T \pi_n f_\tau \leq S u$ bulunur. T sıralı sürekli olduğundan her n

için $T \pi_n u \leq Su$ ve $\sup_n T \pi_n u \leq Su$ olur. Her n ve τ için $T \pi_n f_\tau \leq T \pi_n u$ ve $S f_\tau = \sup_n T \pi_n f_\tau \leq \sup_n T \pi_n u$ olduğundan $Su = \sup_\tau S f_\tau \leq \sup_n T \pi_n u$ dur. Böylece $Su = \sup_n T \pi_n u$ elde edilir.

Son olarak (iv) $\Rightarrow$ (i) olduğunu gösterelim. Her $0 \leq u \in L$ için T sıralı sürekli, pozitif olduğundan $T(\{u\}^{dd}) \subset \{Tu\}^{dd}$ dir. (iv) den her $0 \leq u \in L$ için $Su = \sup_n T \pi_n u$ olacak şekilde $0 \leq \pi_n \uparrow$, $n = 1, 2, \dots$ için $\pi_n \in \text{Orth}(L)$ vardır. Her $0 \leq u \in L$ ve her n için $\pi_n u \in \{u\}^{dd}$ olduğundan $T \pi_n u \in \{Tu\}^{dd}$ ve böylece $Su \in \{Tu\}^{dd}$ bulunur.

Önerme 3.3 'de $M = \mathbb{R}$ alınırsa aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 3.4. L Dedekind tam Riesz uzayı $0 \leq \varphi, \psi \in L$ üzerinde normal integraller olsun. O zaman aşağıdaki koşullar denktir.

(i) ψ, φ 'ye göre mutlak süreklidir.

(ii) Her $f \in D_\pi$ için $\psi f = \varphi \pi f$ olacak şekilde $0 \leq \pi \in \text{Orth}^\infty(L)$ vardır.

(iii) Her $0 \leq f \in L$ için $\psi f = \sup_m \varphi \pi_m f$ olacak şekilde $0 \leq \pi_m \uparrow, m = 1, 2, \dots$ için $\pi_m \in \text{Orth}(L)$ vardır.

BÖLÜM 4

DUAL RADON - NIKODYM ÖNERMESİ

Önerme 4.1. L ve M Dedekind tam, aşırı ayrık Riesz uzayları, $T: L \rightarrow M$ sıralı sürekli, pozitif operatör olsun. T 'nin Maharam özelliğine sahip olması için gerekli ve yeterli koşul $\tilde{T}$ 'nin sıralı sürekli Riesz homomorfizması olmasıdır.

Kanıt. Önce T 'nin Maharam özelliğine sahip olduğunu kabul edelim. T sıralı sürekli olduğundan $\tilde{T}$ sıralı süreklidir (1, 3).

$\tilde{T}$ 'nin Riesz homomorfizması olduğunu gösterelim. Bunun için $0 \leq \varphi, \chi \in M_{\Pi}^{\sim}$ ve $\varphi \wedge \chi = 0$ olsun. Her $0 \leq u \in L$ için,

$$\begin{aligned} (\tilde{T} \varphi \wedge \tilde{T} \chi) u &= \inf (\tilde{T} \varphi v + \tilde{T} \chi w : 0 \leq v, w \text{ ve } u = v + w) \\ &= \inf (\varphi T v + \chi T w : T v + T w = u, u = v + w) \end{aligned}$$

olur.

$$A = \{\varphi T v + \chi T w : T v + T w = T u, u = v + w\} \text{ ve}$$

$$B = \{\varphi v' + \chi w' : 0 \leq v', w' \in M, v' + w' = T u\}$$

olmak üzere $A = B$ olduğunu gösterelim. $A \subset B$ olduğu açıktır. Şimdi $0 \leq v', w' \in M, v' + w' = T u$ olsun. T Maharam özelliğinin sahip olduğundan

$0 \leq v \leq u$, $Tv = v'$ olacak şekilde $v \in L$ vardır. $w = u - v$ olsun. $0 \leq w \leq u$ ve $Tw = Tu - Tv = w'$ dır. O halde $v' = Tv$, $w' = Tw$, $u = v + w$ ve böylece $\varphi v' + \chi w' \in A$ dır. Bu durumda her $0 \leq u \in L$ için,

$$\begin{aligned} (T^{\sim}\varphi \wedge T^{\sim}\chi)u &= \inf (\varphi v' + \chi w': 0 \leq v', w' \in M, v' + w' = Tu) \\ &= (\varphi \wedge \chi) Tu = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Yani, $T^{\sim}$ Riesz homomorfizmasıdır.

Tersine; $T^{\sim}$ Riesz homomorfizması ve $0 \leq v \leq Tu$, $0 \leq u \in L$, $0 \leq v \in M$ olsun. $T^{\sim}$ Riesz homomorfizması olduğundan $T^{\sim}(M_n^{\sim})$, $L_n^{\sim}$ nin Riesz altuzayıdır. Her $\varphi \in M_n^{\sim}$ için $w(T^{\sim}\varphi) = \varphi v$ olarak tanımlansın. O zaman w , $T^{\sim}(M_n^{\sim})$ üzerinde pozitif fonksiyonel tanımlar. Gerçekten $T^{\sim}\varphi = 0$ iken $T^{\sim}$ Riesz homomorfizması olduğundan $T^{\sim}|\varphi| = 0$ dır. Her $0 \leq u \in L$ için $T^{\sim}|\varphi|u = |\varphi|Tu = 0$ ve $|\varphi v| \leq |\varphi|v \leq |\varphi|Tu$ olduğundan $\varphi v = 0$ bulunur. Yani w iyi tanımlıdır. $T^{\sim}\varphi \geq 0$ olmak üzere $T^{\sim}|\varphi| = T^{\sim}\varphi$ olduğundan $w(T^{\sim}\varphi) = |\varphi|v \geq 0$ bulunur. Böylece $w \geq 0$ dır. $0 \leq T^{\sim}\varphi$ için

$$w(T^{\sim}\varphi) = |\varphi|v \leq |\varphi|Tu = u(T^{\sim}|\varphi|) = u(T^{\sim}\varphi)$$

dir. Yani, $T^{\sim}(M_n^{\sim})$ üzerinde $0 \leq w \leq u \in L$ dir. Böylece w , $0 \leq w \leq u \in L$

olacak şekilde $L_n^\sim$ 'ya genelleştirilebilir ve buradan $w \in L_n^\sim$ üzerinde normal integraldir (1). L , Dedekind tam ve aşırı ayrık olduğundan $(L_n^\sim)_n^\sim$ 'nın bir sıralı yoğun idealine denktir. Böylece $0 \leq w \in L$ dir. Her $\varphi \in M_n^\sim$ için $\varphi(Tw) = w(T^\sim \varphi) = \varphi v$ dir. $f = Tw - v$ olmak üzere her $\varphi \in M_n^\sim$ için $\varphi(f) = 0$ dir. Her $0 \leq \varphi \in M_n^\sim$ için

$$\varphi(f^+) = \max \{Sf : S \in \mathcal{L}'_b(M, \mathbb{R}), 0 \leq S \leq \varphi\}$$

$$\varphi(f^-) = \max \{-Sf : S \in \mathcal{L}'_b(M, \mathbb{R}), 0 \leq S \leq \varphi\}$$

dir. $0 \leq S \leq \varphi$ olduğundan $S \in M_n^\sim$ ve böylece $Sf = 0$ dir. Buradan $\varphi(f^+) = \varphi(f^-) = 0$ ve $\varphi(|f|) = 0$ elde edilir. Her $\varphi \in M_n^\sim$ için $\varphi(|f|) = \varphi^+(|f|) - \varphi^-(|f|) = 0$ ve M aşırı ayrık olduğundan $f = 0$ bulunur. Yani $Tw = v$ dir.

Maharam özelliğinin yukarıdaki betimlenişinden Radon-Nikodym önermesinin aşağıdaki halini verebiliriz.

Önerme 4.2. L Arşimedyen, M Dedekind tam Riesz uzayları ve $S, T : L \rightarrow M$ pozitif operatörler olsun. Eğer T Riesz homomorfizması ise aşağıdaki koşullar denktir.

(i) $S \in \{T\}^{dd}$ dir.

(ii) Her $0 \leq u \in L$ için $Su \in \{Tu\}^{dd}$ dir.

(iii) Her $f \in L$ için $Sf = \pi Tf$ olacak şekilde $0 \leq \pi \in \text{Orth}^\infty(M)$ vardır.

Bu durumda S 'de Riesz homomorfizmasıdır.

Kanıt. (i) $\Rightarrow$ (ii) ve (iii) $\Rightarrow$ (ii) olduğunu görmek kolaydır. Kanıtı tamamlamak için (ii) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (iii) olduğunu gösterelim.

Önce (ii) $\Rightarrow$ (i) olduğunu görelim. Bunun için $u \wedge v = 0$ olsun. $Tu \wedge Tv = 0$ olduğundan $\{Tu\}^{dd} \perp \{Tv\}^{dd}$ ve (ii) den $Su \wedge Sv = 0$ bulunur. Yani, S Riesz homomorfizmasıdır. $\mathcal{L}'_b(L, M)$ Dedekind tam Riesz uzayı olduğundan $S = S_1 + S_2$ olacak şekilde $0 \leq S_1 \in \{T\}^{dd}$, $S_2 \perp T$ vardır. $0 \leq S_2 \leq S$ olduğundan S_2, T 'ye göre mutlak sürekli ve S_2 Riesz homomorfizmasıdır. Böylece $u \wedge v = 0$ için $S_2u \wedge S_2v = 0$, $S_2u \wedge Tv = 0$, $Tu \wedge S_2v = 0$, $Tu \wedge Tv = 0$ ve buradan $(S_2 + T)u \wedge (S_2 + T)v = 0$ bulunur. Böylece $S_2 + T$ Riesz homomorfizmasıdır. O zaman $(S_2 + T)(L)$, $T(L)$ ve $S_2(L)$ M 'nin Riesz altuzaylarıdır.

$$\pi : (S_2 + T)(L) \rightarrow S_2(L)$$

$$(S_2 + T)f \rightarrow \pi(S_2 + T)f = S_2f$$

olacak şekilde π tanımlanabilir. Gerçekten $f \in L$ için $(S_2 + T)f = 0$ ise $(S_2 + T)|f| = 0$ ve $0 \leq S_2 \leq S_2 + T$ olduğundan $S_2|f| = |S_2f| = 0$ ve böylece $S_2f = 0$ bulunur. Böylece π iyi tanımlıdır. $(S_2 + T)f \geq 0$ için $(S_2 + T)f = |(S_2 + T)f| = (S_2 + T)|f|$ ve $0 \leq \pi(S_2 + T)f = S_2|f| \leq (S_2 + T)|f|$ dir. Önerme 1.3.6 'dan π 'nin M 'ye bir genişlemesi vardır. Bu genişlemeyi tekrar π ile gösterirsek, $0 \leq \pi \leq I$, $\pi \in \text{Orth}(M)$ ve $S_2 = \pi \circ (S_2 + T)$ dir. Benzer şekilde;

$$\pi' : (S_2 + T)(L) \rightarrow T(L)$$

$$(S_2 + T)f \rightarrow \pi'(S_2 + T)f = Tf$$

olarak tanımlanırsa $0 \leq \pi' \leq I$, $T = \pi' \circ (S_2 + T)$ olacak şekilde $\pi' \in \text{Orth}(M)$ vardır. $S_2 \perp T$ olduğundan $\pi \circ (S_2 + T) \perp \pi' \circ (S_2 + T)$ dir. Her $0 \leq u \in L$ için,

$$\begin{aligned} 0 &= \inf (\pi (S_2 + T)v + \pi' (S_2 + T)w : u = v + w) \\ &\geq \inf (\pi v' + \pi' w' : v' + w' = (S_2 + T)u) \\ &= (\pi \wedge \pi') (S_2 + T)u \geq 0 \end{aligned}$$

dir. Böylece her $0 \leq u \in L$ için

$$\begin{aligned} S_2 u \wedge Tu &= \pi (S_2 + T) u \wedge \pi' (S_2 + T) u \\ &= (\pi \wedge \pi') (S_2 + T) u = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Yani her $0 \leq u \in L$ için $S_2 u \in \{Tu\}^d$ dir. $S_2 \ll T$ olduğundan $S_2 = 0$ dir. Böylece $S = S_1 \in \{T\}^{dd}$ elde edilir.

Şimdi (i) $\Rightarrow$ (iii) olduğunu gösterelim. (i) den dolayı $n = 1, 2, \dots$ için $S_n \leq n T$, $n \neq m$ için $S_n \perp S_m$ ve $S = \sup S_n$ olacak şekilde S_n pozitif operatörleri vardır. Her n için $S_n \leq n T$ olduğundan S_n Riesz homomorfizmasıdır. Böylece her n için $S_n(L)$, M 'nin Riesz altuzayıdır. $n = 1, 2, \dots$ için,

$$\begin{aligned} \pi_n : T(L) &\rightarrow S_n(L) \\ T f &\rightarrow \pi_n (T f) = S_n f \end{aligned}$$

olarak tanımlanırsa (ii) $\Rightarrow$ (i) durumunda olduğu gibi $0 \leq \pi_n \leq I$, $\pi_n \circ T = S_n$ olacak şekilde $\pi_n \in \text{Orth}(M)$ vardır. $0 \leq u \in L$, $n \neq m$ için,

$$\begin{aligned}
0 &= (S_n \wedge S_m) u = \inf (S_n v + S_m w : v + w = u) \\
&= \inf (\pi_n T v + \pi_m T w : v + w = u) \\
&\geq \inf (\pi_n v' + \pi_m w' : v' + w' = T u) = (\pi_n \wedge \pi_m) T u \geq 0
\end{aligned}$$

olduğundan $T(L)$ üzerinde $\pi_n \wedge \pi_m = 0$ dır. Önerme 1.3.7 'nin kanıtında yapıldığı gibi $\{T(L)\}^{dd}$ üzerinde $n \neq m$ için $\pi_n \wedge \pi_m = 0$ elde edilir. M Dedekind tam olduğundan her $u \in M$ için $u = v + w$ olacak şekilde $v \in \{T(L)\}^d$ ve $w \in \{T(L)\}^{dd}$ vardır. $n = 1, 2, \dots$ için;

$$\pi_n' : M \rightarrow M$$

$$u \rightarrow \pi_n'(u) = \pi_n(w)$$

olarak tanımlanırsa, $0 \leq \pi_n' \in \text{Orth}(M)$, $S_n = \pi_n' T$ ve $n \neq m$ için $\pi_n' \perp \pi_m'$ elde edilir. $\text{Orth}^\infty(M)$ ayrık tam olduğundan $\sup \pi_n' \in \text{Orth}^\infty(M)$ dir. $\pi = \sup \pi_n'$ olmak üzere her $f \in L$ için

$$\begin{aligned}
S f &= \sup S_n f = \sup (\pi_n' T f) = \sup \pi_n' (T f) \\
&= \pi T f
\end{aligned}$$

bulunur.

L, M Dedekind tam ve aşırı ayrık Riesz uzayları olsun. $S, T : L \rightarrow M$ sıralı sürekli, pozitif operatörler olmak üzere Önerme 4.2 'nin $T^\sim$ için sağlandığı kabul edilirse (i) $\Rightarrow$ (iii) nin kanıtındaki yol izlenerek Radon-Nikodym Önermesi elde edilir. Tersine; Radon-Nikodym Önermesinden, Önerme 4.2 'nin $T^\sim$ için sağlandığı görülür.

Önerme 4.3. L Arşimedyan, M Dedekind tam Riesz uzayları, $T : L \rightarrow M$ pozitif operatör olsun. T 'nin Riesz homomorfizması olması için gerekli ve yeterli koşul $0 \leq S \leq T$ için $S = \pi T$ olacak şekilde $0 \leq \pi \in \text{Orth}(M)$ olmasıdır.

Kanıt. Önce T Riesz homomorfizması, $S : L \rightarrow M$ $0 \leq S \leq T$ olsun. O zaman S de Riesz homomorfizmasıdır. Böylece $S(L)$, $T(L)$ M 'nin Riesz altuzayıdır.

$$\begin{aligned}\pi : T(L) &\rightarrow S(L) \\ T(f) &\rightarrow \pi(Tf) = Sf\end{aligned}$$

olarak tanımlanırsa, Önerme 4.2 'de yapıldığı gibi $0 \leq \pi \leq I$, $\pi T = S$ olacak şekilde $\pi \in \text{Orth}(M)$ bulunur.

Tersine; $0 \leq S \leq T$ için $S = \pi T$ olacak şekilde $0 \leq \pi \in \text{Orth}(M)$ olsun. $u \wedge v = 0$ ve T_1 , T 'nin u tarafından üretilen A_u idealine kısıtlamasının en küçük pozitif genişlemesi olsun. Yani her $0 \leq w \in L$ için

$$T_1 w = \sup (Tz : 0 \leq z \leq w, z \in A_u)$$

olur (1). Böylece $0 \leq z \leq v$, $z \in A_u$ için $z = z \wedge v = 0$ olduğundan $T_1(v) = 0$ dir. $0 \leq T_1 \leq T$ olduğundan $T_1 = \pi T$ olacak şekilde $0 \leq \pi \in \text{Orth}(M)$ vardır. $\pi T u = T_1 u = Tu$ olduğundan Önerme 1.3.7 'den Tu tarafından üretilen band B_{Tu} üzerinde $\pi = I$ dir. $Tu \wedge Tv \in B_{Tu}$ olduğundan,

$$Tu \wedge Tv = \pi(Tu \wedge Tv) = \pi Tu \wedge \pi Tv = Tu \wedge T_1 v = 0$$

bulunur. Böylece T Riesz homomorfizmasıdır.

BÖLÜM 5

RIESZ HOMOMORFİZMALARI İÇİN

RADON - NIKODYM ÖNERMESİ

Bu bölümde Önerme 4.2.'nin (i) ve (ii) koşullarının denkliği farklı bir yolla kanıtlanmıştır.

Önerme 5.1. L ve M Arşimedyan Riesz uzayları olmak üzere $S, T \in \text{Hom}(L, M)$ ise $S + T \in \text{Hom}(L, M)$ olması için gerekli ve yeterli koşul her $0 \leq u, v \in L$, $u \wedge v = 0$ için $Su \wedge Tv = 0$ olmasıdır.

Kanıt. $S + T \in \text{Hom}(L, M)$ ve $0 \leq u, v \in L$ $u \wedge v = 0$ olsun. O zaman

$$0 \leq Su \wedge Tv \leq (S + T)u \wedge (S + T)v = 0$$

dır. Böylece $Su \wedge Tv = 0$ elde edilir.

Tersine; $0 \leq u, v \in L$ $u \wedge v = 0$ olsun. $S, T \in \text{Hom}(L, M)$ olduğundan $Su \wedge Sv = 0$, $Tu \wedge Tv = 0$ ve hipotezden $Su \wedge Tv = 0$, $Tu \wedge Sv = 0$ dır.

$$0 \leq (S + T)u \wedge (S + T)v$$

$$\leq Su \wedge Sv + Su \wedge Tv + Tu \wedge Sv + Tu \wedge Tv = 0$$

olduğundan $S + T \in \text{Hom}(L, M)$ bulunur.

Ön önerme 5.2. L ve M Arşimedyan Riesz uzayları $T \in \text{Hom}(L, M)$, $S : L \rightarrow M$ pozitif operatör ve her $0 \leq u \in L$ için $Su \in \{Tu\}^{dd}$ olsun. O zaman $S \in \text{Hom}(L, M)$ dir.

Özellikle, $S \in \{T\}^{dd}$ ise $S \in \text{Hom}(L, M)$ dir.

Kanıt. $0 \leq u, v \in L$ $u \wedge v = 0$ olsun. $Su \in \{Tu\}^{dd}$, $Sv \in \{Tv\}^{dd}$ olduğundan $Su \wedge n Tu \uparrow_n Su$ ve $Sv \wedge m Tv \uparrow_m Sv$ dir. Her n, m için

$$0 \leq (Su \wedge n Tu) \wedge (Sv \wedge m Tv) \leq (n + m) (Tu \wedge Tv)$$

olduğundan $(Su \wedge n Tu) \wedge (Sv \wedge m Tv) = 0$ dır. Böylece $Su \wedge Sv = 0$ elde edilir.

Şimdi $S \in \{T\}^{dd}$ olsun. Önerme 3.2 'nin kanıtında yapıldığı gibi her $0 \leq u \in L$ için $Su \in \{Tu\}^{dd}$ bulunur. Böylece $S \in \text{Hom}(L, M)$ dir.

Aşağıdaki önerme ve sonuç Riesz homomorfizmaları için Radon-Nikodym önermesinin kanıtında önemli bir rol oynar.

Önerme 5.3. L Arşimedyan, M Dedekind tam Riesz uzayları, $T \in \text{Hom}(L, M)$ ve $0 \leq S_1, S_2 \in \{T\}^{dd}$ ise her $0 \leq u \in L$ için

$$(S_1 \wedge S_2)u = S_1 u \wedge S_2 u$$

olur.

Kanıt. $S_1' = S_1 - S_1 \wedge S_2 = (S_1 - S_2)^+$, $S_2' = S_2 - S_1 \wedge S_2 = (S_1 - S_2)^-$ ve $S' = S_1' - S_2'$ olsun. $S_1', S_2' \in \{T\}^{dd}$ olduğundan $|S'| \in \{T\}^{dd}$ dir. Önerme 5.2. 'den $|S'| \in \text{Hom}(L, M)$ dir. Her $0 \leq u, v \in L$ $u \wedge v = 0$ için,

$$0 \leq |S'u| \wedge |S'v| \leq |S'|u \wedge |S'|v = 0$$

dir. Şimdi $u, v \in L$ $u \perp v$ olsun. O zaman $|u| \wedge |v| = 0$ olduğundan $u^+ \wedge v^+ = 0$, $u^+ \wedge v^- = 0$, $u^- \wedge v^+ = 0$, $u^- \wedge v^- = 0$ dir. Böylece

$$\begin{aligned} 0 &\leq |S'u| \wedge |S'v| = |S'u^+ - S'u^-| \wedge |S'v^+ - S'v^-| \\ &\leq (|S'u^+| + |S'u^-|) \wedge (|S'v^+| + |S'v^-|) \\ &\leq |S'u^+| \wedge |S'v^+| + |S'u^+| \wedge |S'v^-| + |S'u^-| \wedge |S'v^+| + |S'u^-| \wedge |S'v^-| \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Yani S' sıralı sınırlı ve dikliği koruyan operatördür. Üstelik $S_1' \wedge S_2' = 0$ olduğundan $S_1' = (S')^+$ ve $S_2' = (S')^-$ dir. Böylece her $0 \leq u \in L$ için $S_1'u \wedge S_2'u = 0$ bulunur. S_1' ve S_2' nün tanımından her $0 \leq u \in L$ için

$$\begin{aligned} S_1u \wedge S_2u - (S_1 \wedge S_2)u &= (S_1u - (S_1 \wedge S_2)u) \wedge (S_2u - (S_1 \wedge S_2)u) \\ &= S_1'u \wedge S_2'u = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece her $0 \leq u \in L$ için $(S_1 \wedge S_2)u = S_1u \wedge S_2u$ dur.

Not 5.4. Önerme 5.3 Maharam özelliğine sahip operatörler için genel olarak sağlanmaz. Örneğin; $L = L_1([0,1])$ $M = \mathbb{R}$ alalım. Her $f \in L$ için

$$Tf = \int_0^1 f(x)dx, \quad S_1f = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx, \quad S_2f = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx$$

olarak tanımlansın. S_1 , S_2 ve T L üzerinde pozitif fonksiyonellerdir. Böylece S_1 , S_2 ve T Maharam özelliğine sahiptir. Üstelik $0 \leq S_1, S_2 \leq T$ olduğundan $S_1, S_2 \in \{T\}^{dd}$ dir. $[0,1]$ üzerindeki 1 birim fonksiyonu 1 ile gösterilsin. $A = [0, \frac{1}{2}]$, $B = (\frac{1}{2}, 1]$ olmak üzere $0 \leq \chi_A, \chi_B \in L$ ve $\chi_A + \chi_B = 1$ dir.

$$\begin{aligned} 0 \leq (S_1 \wedge S_2) 1 &= \inf (S_1 g + S_2 h : 0 \leq g, h \in L, g + h = 1) \\ &\leq S_1 \chi_B + S_2 \chi_A = \int_0^{\frac{1}{2}} \chi_B(x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \chi_A(x) dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır. Ancak $S_1 1 \wedge S_2 1 = \frac{1}{2}$ ve böylece $(S_1 \wedge S_2) 1 \neq S_1 1 \wedge S_2 1$ bulunur.

Sonuç 5.5. L Arşimedyen ve M Dedekind tam Riesz uzayları olsun. $S_1, S_2 : L \rightarrow M$ pozitif operatörler ve $S_1 + S_2 \in \text{Hom}(L, M)$ ise aşağıdaki koşullar denktir.

- (i) $S_1 \wedge S_2 = 0$ dır.
- (ii) Her $0 \leq u \in L$ için $S_1 u \wedge S_2 u = 0$ dır.
- (iii) Her $0 \leq u, v \in L$ için $S_1 u \wedge S_2 v = 0$ dır.
- (iv) $S_1(L) \perp S_2(L)$ dir.

Kanıt. $S_1 + S_2 \in \text{Hom}(L, M)$ olsun. O zaman $0 \leq u, v \in L$
 $u \wedge u = 0$ için

$$0 \leq S_1 u \wedge S_1 v \leq (S_1 + S_2) u \wedge (S_1 + S_2) v = 0$$

$$0 \leq S_2 u \wedge S_2 v \leq (S_1 + S_2) u \wedge (S_1 + S_2) v = 0$$

olduğundan $S_1, S_2 \in \text{Hom}(L, M)$ dir. Şimdi (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (ii)
ve (i) $\Leftrightarrow$ (ii) olduğunu gösterelim.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $0 \leq u, v \in L$ için $0 \leq S_1 u \wedge S_2 u \leq S_1(u+v) \wedge S_2(u+v)$
olduğundan ve (ii) den $S_1 u \wedge S_2 v = 0$ dır.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Her $u, v \in L$ için $S_1, S_2 \in \text{Hom}(L, M)$ olduğundan
ve (iii) den $|S_1 u| \wedge |S_2 v| = S_1 |u| \wedge S_2 |v| = 0$ bulunur.
Böylece $S_1(L) \perp S_2(L)$ dir.

(iv) $\Rightarrow$ (ii) Her $0 \leq u \in L$ için (iv) den $S_1 u \perp S_2 u$ ve S_1, S_2
pozitif operatörler olduğundan $S_1 u \wedge S_2 u = 0$ elde edilir.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) olduğunu görmek için Önerme 5.3 'de $T = S_1 + S_2$ alalım.
O zaman $0 \leq S_1, S_2 \leq T$ olduğundan $S_1, S_2 \in \{T\}^{dd}$ ve her $0 \leq u \in L$
için

$$(S_1 \wedge S_2)u = S_1 u \wedge S_2 u$$

olur. Buradan (i) ve (ii) nin denkliği kolayca görülür.

Şimdi Riesz homomorfizmaları için Radon - Nikodym önermesini verebiliriz.

Önerme 5.6. L Arşimedyan ve M Dedekind tam Riesz uzayları $T \in \text{Hom}(L, M)$, $S : L \rightarrow M$ pozitif operatör olsun. O zaman aşağıdaki koşullar denktir.

(i) $S \in \{T\}^{dd}$ dir.

(ii) Her $0 \leq u \in L$ için $Su \in \{Tu\}^{dd}$ dir.

Kanıt. (i) $\Rightarrow$ (ii) kolayca görülür. Şimdi (ii) $\Rightarrow$ (i) olduğunu gösterelim. Önerme 5.2 'den $S \in \text{Hom}(L, M)$ dir. Her $0 \leq u, v \in L$ $u \wedge v = 0$ için $Su \wedge Tv = 0$ dir. Gerçekten, $Tu \wedge Tv = 0$ olduğundan $\{Tu\}^{dd} \subset \{Tv\}^d$ ve (ii) den $Su \in \{Tv\}^d$ dir. Önerme 5.1 'den $S + T \in \text{Hom}(L, M)$ dir. $L_b(L, M)$ Dedekind tam Riesz uzayı olduğundan $S = S_1 + S_2$ olacak şekilde $0 \leq S_1 \in \{T\}^{dd}$, $S_2 \wedge T = 0$ vardır. $0 \leq S_2 + T \leq S + T$ olduğundan $S_2 + T \in \text{Hom}(L, M)$ dir. Sonuç 5.5 'den her $0 \leq u \in L$ için $S_2 u \wedge Tu = 0$, yani $S_2 u \in \{Tu\}^d$ dir. $0 \leq S_2 \leq S$ olduğundan her $0 \leq u \in L$ için $S_2 u \in \{Tu\}^{dd}$ ve böylece $S_2 u = 0$ bulunur. Böylece $S_2 = 0$ ve $S = S_1 \in \{T\}^{dd}$ dir.

Not 5.7. Önerme 5.6 'daki denklik $T \in \text{Hom}(L, M)$ tarafından üretilen A_T ideali için genel olarak sağlanmaz. $0 \leq S \in A_T$ için $S \leq \lambda T$ olacak şekilde $\lambda > 0$ var ve her $0 \leq u \in L$ için $Su \leq \lambda Tu$

olduğundan $Su \in A_{Tu}$ dir. Ancak tersi genel olarak doğru değildir.

Örneğin, $L = M = (C_{oo})$ ve $a = (a_n) \subset \mathbb{R}$ pozitif, sınırsız bir dizi olsun.

$$S : L \rightarrow M$$

$$x \rightarrow S(x) = ax = (a_n x_n)$$

olarak tanımlansın. $0 \leq u \in L$ için $u = (u_1, u_2, \dots, u_k, 0, 0, \dots)$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ vardır. $\max \{a_1, a_2, \dots, a_k\} = \lambda$ olsun. O zaman $Su = au \leq \lambda u$ olur. Böylece $Su \in A_u$ elde edilir.

Şimdi $S \in A_I$ olduğunu kabul edelim. O zaman bir $\lambda > 0$ için $S \leq \lambda I$ dir. a sınırsız bir dizi olduğundan $\lambda < a_{n_0}$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. u , ilk n_0 terimi 1, diğer terimleri 0 olan dizi olsun. Kabulden dolayı $Su \leq \lambda u$ olmalıdır. O zaman $a_{n_0} u_{n_0} \leq \lambda u_{n_0}$ ve böylece $a_{n_0} \leq \lambda$ bulunur. Bu ise $\lambda < a_{n_0}$ olmasıyla çelişir. O halde $S \notin A_I$ dir.

KAYNAKLAR

1. Aliprantis, C.D. and Burkinshaw, O., Positive Operators, Academic Press, London, 1985
2. Luxemburg, W.A.J. and Zaanen, A.C., Riesz Space, I, North-Holland, Amsterdam, 1971
3. Zaanen, A.C., Riesz Spaces , II, North-Holland, Amsterdam, 1983
4. Luxemburg, W.A.J. and Schep, A.R., "A Radon-Nikodym type theorem for positive operators and a dual" Indag. Math., 40 (=Proc. K.N.A.W. 81), 357-375, (1978)
5. Huijmans, C.B. and Luxemburg, W.A.J., "An alternative proof of a Radon-Nikodym theorem for lattice homomorphisms" Acta Applicandae Mathematicae, 27, 67-71, (1992)
6. Maharam, D., "On kernel representation of linear operators" Trans. Am. Math. Soc., 79, 229-255, (1955)
7. Schaefer, H.H., Banach Lattice and Positive Operators , Springer Verlag, Berlin, 1974
8. Bernau, S.J., "Orthomorphisms of Archimedean vector lattices" Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 89, 119-128, (1980)

9. Meyer, M., "Le stabilisateur d'un espace vectoriel reticulé" C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A, 283, 249-250, (1976)
10. Wickstead, A.W., "Representation and duality of multiplication operators on Archimedean Riesz spaces" Compositio Math., 35, 225-238, (1977)
11. Huijmans, C.B. and Pagter, B., "Disjointness preserving and diffuse operators" Compositio Math., 79, 351-374, (1991)
12. Huijmans, C.B. and Pagter, B., "Subalgebras and Riesz subspaces of an f-algebra" Proc. London Math. Soc., 48, (3), 161-174, (1984)

ÖZGEÇMİŞ

Ayşe Uyar 1970 yılında Ankara’da doğdu.

İlk öğrenimini Bandırma’da Evyapan İlkokulu’nda, orta öğrenimini Ankara’da Yalçın Eskiyan Ortaokulu ve Ankara Gazi Lisesi’nde tamamladı. Yüksek öğrenimini 1992 yılında Gazi Üniversitesi, Gazi Eğitim Fakültesi, Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Matematik Anabilimdalında tamamladı.

1992 yılında Gazi Üniversitesi, Gazi Eğitim Fakültesi, Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Matematik Anabilim Dalına Araştırma Görevlisi olarak atandı. Halen burada görev yapmaktadır.