

**T.C.
ADİYAMAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI**

**PROTOTİP OLMAYAN GEOMETRİ ÖĞRETİMİNİN 7. SINIF
ÖĞRENCİLERİNİN KAVRAMSAL ÖĞRENMELERİNE ETKİLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MUHAMMED GÜVEN

**DANIŞMAN
Doç. Dr. Emrullah ERDEM**

ADİYAMAN, 2025

ÖZET

PROTOTİP OLMAYAN GEOMETRİ ÖĞRETİMİNİN 7. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN KAVRAMSAL ÖĞRENMELERİNE ETKİLERİ

Muhammed GÜVEN

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı

Adıyaman Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Ağustos/2025

Danışman: Doç. Dr. Emrullah ERDEM

Bu araştırmanın amacı, prototip olmayan geometri öğretiminin 7. sınıf öğrencilerinin dörtgenlere ilişkin kavramsal öğrenmeleri üzerindeki etkisini incelemektir. Araştırma, tek gruplu öntest-sontest yarı deneysel desen çerçevesinde yürütülmüştür. Çalışmanın örneklemini, Türkiye'nin bir ilindeki bir devlet ortaokulunda öğrenim gören 7. sınıf düzeyindeki 35 öğrenci oluşturmaktadır. Araştırmanın verileri açık uçlu sorular, çizim görevleri ve iki aşamalı gerekçelendirme temelli sorular olmak üzere üç aşamalı ölçme aracıyla toplanmıştır. Uygulama süreci, Millî Eğitim Bakanlığı 7. sınıf matematik öğretim programı kazanımlarına uygun biçimde yürütülmüştür. Öğretim sürecinde öğrencilerin sıklıkla karşılaştığı prototipik şekillerin yanı sıra, tanımsal özelliklere dayalı olarak hazırlanmış, prototip olmayan örneklerle de yer verilmiştir. Böylece öğrencilerin dörtgen kavramını yalnızca görsel temsillere bağlı kalmadan kavramsal düzeyde anlamlandırmaları hedeflenmiştir. Araştırma sonuçları, prototip olmayan öğretimin öğrencilerin kavramsal öğrenmelerinde anlamlı bir gelişim sağladığını ortaya koymuştur. Öğrencilerin, dörtgenlerin tanımlarını daha doğru ifade edebildikleri, farklı biçimlerdeki çizimleri tanıyabildikleri ve çizimlerinde tanımsal özelliklere dayalı bir yaklaşım sergiledikleri gözlenmiştir. Ayrıca öğrencilerin dörtgenler arasındaki kapsayıcılık ilişkilerini fark etme ve gerekçelendirme becerilerinde de olumlu gelişmeler tespit edilmiştir. Elde edilen veriler doğrultusunda, sadece görsel benzerliklere dayalı öğretimden ziyade şekillerin tanımsal özelliklerini öne çıkaran öğretim stratejilerinin işe koşulması gerektiği söylenebilir.

Anahtar Kelimeler: Prototip olmayan geometri öğretimi; 7. Sınıf öğrencileri; Kavramsal öğrenme; Dörtgenler.

ABSTRACT

THE EFFECTS OF NON-PROTOTYPE GEOMETRY INSTRUCTION ON 7TH-GRADE STUDENTS' CONCEPTUAL LEARNING

Muhammed GÜVEN

**Department of Mathematics and Science Education
Adıyaman University, Graduate Education Institute, August/2025
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Emrullah ERDEM**

This study aims to examine the effects of non-prototypical geometry teaching on 7th-grade students' conceptual learning about quadrilaterals. The study employed a single- group pretest-posttest quasi-experimental design. The study was carried out with 35 7th-grade students studying in a state middle school in a province in Turkey. Data were collected using a three-stage measurement tool: open-ended questions, drawing tasks, and two-stage reasoning-based questions. The implementation process was conducted in accordance with the learning outcomes of the Ministry of National Education's 7th-grade mathematics curriculum. In addition to prototypical shapes frequently encountered by students, non-prototypical examples based on definitional properties were also included during the process. This aimed to enable students to understand the concept of quadrilateral at a conceptual level, without relying solely on visual representations. The results of the study revealed that non-prototypical teaching led to significant improvement in students' conceptual learning. Students were observed to express definitions of quadrilaterals more accurately, to recognize different shapes, and to adopt a definitional property-based approach in their drawings. Additionally, positive improvements were observed in students' ability to recognize and justify inclusionary relationships among quadrilaterals. Based on results, it can be argued that instructional strategies that emphasize the descriptive properties of geometric shapes should be employed rather than teaching based solely on visual similarities.

Keywords: Non-prototypical geometry teaching; 7th-grade students; Conceptual learning; Quadrilaterals.

TEŞEKKÜR

Lisansüstü eğitim sürecim boyunca akademik rehberliği ve özverili yönlendirmeleriyle çalışmama büyük katkı sağlayan değerli tez danışmanım Doç. Dr. Emrullah ERDEM'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım Prof. Dr. Ali BOZKURT ile Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Alper ARDIÇ hocalarıma akademik katkılarından dolayı teşekkür ederim.

Bu yolculukta her zaman yanımda olan, sabrı, desteği ve sevgisiyle bana güç veren hayatımdaki en değerli insan ve meslektaşım sevgili eşim Ayşe Nur GÜVEN'e gönülden teşekkür ederim.

Ayrıca her koşulda yanımda olup başarı yolculuğumda bana daima destek olan babam Hasan GÜVEN, annem Aliye GÜVEN ve kardeşlerime sonsuz sevgi ve minnet duygularıyla teşekkür ederim.

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Adıyaman Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

(İmza)

Muhammed GÜVEN

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
BAŞLIK SAYFASI	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR.....	v
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
TABLolar DİZİNİ	x
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xii
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Problem Durumu	4
1.2. Problem Cümlesi.....	6
1.3. Alt Problemler	6
1.4. Araştırmanın Amacı	6
1.5. Araştırmanın Önemi.....	7
1.6. Sayıtlar	8
1.7. Sınırlılıklar	8
1.8. Tanımlar	8
2. KURAMSAL TEMEL VE YAPILAN ÇALIŞMALAR	10
2.1. Matematiksel Kavramların Anlamlandırılmasında Tanımların Önemi	41
2.2. Dörtgenlerin Tanımları ve Sınıflandırmaları	43
2.2.1. Geometrik hiyerarşi bağlamında deltoid, eşkenar dörtgen ve karenin konumlandırılması.....	48
2.2.2. Deltoid tanımlarına genel bakış	51
2.2.2.1. Kapsayıcı tanımlar.....	51
2.2.2.2. Harici tanımlar	54
2.2.3. Eşkenar dörtgenin tanımları.....	54
2.2.3.1. Kareyi dışarıda bırakan eşkenar dörtgen tanımları.....	56
2.2.3.2. Karenin özelliklerine dayalı tanımları	56
2.2.4. İkizkenar yamuk tanımının kapsayıcı yaklaşımlarla ele alınması	58

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
2.2.4.1. İkizkenar yamuk kavramının farklı tanımlarla inşası	59
2.2.4.2. İkizkenar yamuk tanımında kirişler dörtgeni yaklaşımı	61
2.2.4.3. İkizkenar yamuk için hariç tutan tanımlar	62
2.2.5. Dikdörtgenin hariç tutan tanımları	63
2.2.5.1. Paralelkenar, dikdörtgen, eşkenar dörtgen ve karenin birbirleriyle olan yapısal ilişkisi.....	64
2.2.6. Paralelkenarın tanımları.....	65
2.2.6.1. Kapsayıcı yaklaşımlar.....	65
2.2.6.2. Hariç tutan tanımlar	66
2.2.6.3. Dikdörtgen, eşkenar dörtgen ve karenin paralelkenar tabanlı tanımları	66
2.2.6.4. Dikdörtgen, eşkenar dörtgen ve karenin paralelkenar temelli tanımları	66
2.2.6.5. Eşkenar dörtgenin paralelkenar temelli tanımları	67
2.2.6.6. Karenin paralelkenar temelli tanımı.....	67
2.2.7. Yamuk kavramı ve paralelkenarlarla olan bağı	67
2.2.8. Yamuğa dayalı özel dörtgen tanımları	68
2.2.9. Tanımda incelik: Kareyi ayırt etmek	68
2.2.10. Kavram tanımlarının genişletilebilirliği ve dörtgenlerin tarihsel gelişimi.....	68
2.2.11. Tanım ve sınıflandırma ilişkisi.....	69
2.2.12. Tarihsel süreçte dörtgen tanımları	69
2.3. Prototip ve Prototip Olmayan Sorular Yoluyla Geometrik Kavramların Sorgulanması	71
3. MATERYAL VE YÖNTEM	74
3.1. Araştırmanın Deseni.....	74
3.2. Çalışma Grubu.....	75
3.3. Verilerin Toplanması Süreci	75
3.4. Verilerin Analizi	76
3.4.1. Açık uçlu tanım sorularının puanlanması	79
3.4.2. İki aşamalı soruların puanlanması	80

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
3.4.3. Çizim sorularının puanlanması	80
3.5. Araştırmacının Rolü	103
3.6. Tezin Yazım Aşamaları	104
4. BULGULAR VE YORUM	105
4.1. Öğrencilerin Ön Test ve Son Test Ağırlıklı Puanlarına İlişkin Betimsel Bulgular	106
4.2. Normallik Varsayımına İlişkin Bulgular	107
4.3. t-Testi Ölçümüne İlişkin Bulgular	110
4.4. Birinci Alt Probleme Ait Bulgular: Prototip Olmayan Geometri Öğretiminin Kavramsal Öğrenmeye Etkisi.....	111
4.5. İkinci Alt Probleme İlişkin Bulgular: PoGÖ Uygulamasının Öğrenci Tanımlarına Etkisine Yönelik Bulgular	112
4.6. Üçüncü Alt Probleme İlişkin Bulgular.....	118
4.7. Dördüncü Alt Probleme İlişkin Bulgular.....	121
5. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER.....	127
5.1. Genel Sonuçlar.....	127
5.2. Sonuçların Literatür ile Karşılaştırılması	130
5.3. Uygulamanın Öğretim Sürecine Katkısı.....	132
5.4. Öneriler.....	133
KAYNAKÇA.....	135
EKLER	
ÖZGEÇMİŞ	

TABLÖLAR DİZİNİ

	Sayfa
Tablo 2.1. Dörtgenler arasındaki kapsayıcılık ilişkilerinin anlaşılma düzeyleri	29
Tablo 3.1. Öğrencilerin deneme sınavı puanları	76
Tablo 3.2. Deneme sınavı sonuçlarına ait Shapiro-Wilk testi sonuçları	77
Tablo 3.3. Sorulara ait ağırlıklandırılmış puanlar	79
Tablo 3.4. Dörtgen Tanımlarının Puanlama Ölçeği	82
Tablo 3.5. Yamuk Tanımlarının Puanlama Ölçeği	84
Tablo 3.6. Eşkenar Dörtgen Tanımlarının Puanlama Ölçeği.....	86
Tablo 3.7. Paralelkenar Tanımlarının Puanlama Ölçeği	88
Tablo 3.8. Dikdörtgen Tanımlarının Puanlama Ölçeği	90
Tablo 3.9. Kare Tanımlarının Puanlama Ölçeği	92
Tablo 3.10. Çizim Sorularını Puanlama Ölçeği	94
Tablo 3.11. Dörtgen Çizimlerine Ait Puanlama Ölçeği	95
Tablo 3.12. Yamuk Çizimlerine Ait Puanlama Ölçeği	96
Tablo 3.13. Eşkenar Dörtgen Çizimlerine Ait Puanlama Ölçeği.....	97
Tablo 3.14. Paralelkenar Çizimlerine Ait Puanlama Ölçeği.....	98
Tablo 3.15. Dikdörtgen Çizimlerine Ait Puanlama Ölçeği	99
Tablo 3.16. Kare Çizimlerine Ait Puanlama Ölçeği	100
Tablo 3.17. İki Aşamalı Sorulara Ait Puanlama Ölçeği.....	101
Tablo 4.1. Ön test ve son teste ait ağırlıklı puanlar(Ö1;1 numaralı öğrenci,Ö2; 2 numaralı öğrenci,...).....	105
Tablo 4.2. Öğrencilerin ön test ve son test ağırlıklı puanlarına ilişkin betimsel bulgular	106
Tablo 4.3. Normallik testi.....	107
Tablo 4.4. Normallik testi terimlerinin anlamları	108
Tablo 4.5. Ölçümlere Ait t-Testi sonuçları.....	110

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 2.1. Öğrencilerin sıklıkla tercih ettiği prototip üçgen modeli ile nadiren kullanılan prototip olmayan üçgen modellerinin karşılaştırılması	12
Şekil 2.2. Prototip paralelkenar	13
Şekil 2.3. Prototip olmayan paralelkenarlar	13
Şekil 2.4. Dört kenarı olan şekil tanımı örneği	46
Şekil 2.5. Kenarları doğru parçası olan dört kenarlı şekil' tanımı için bir örnek	46
Şekil 2.6. Kenarları doğru parçası olan dört kenarlı kapalı şekil' tanımı için bir örnek..	47
Şekil 2.7. Prototip deltoid (uçurtmabenzetmesinedayalı)	49
Şekil 2.8. Deltoid, eşkenar dörtgen ve karenin hiyerarşisini gösterir şema	50
Şekil 2.9. “Deltoid, köşegenleri birbirini dik kesen bir dörtgendir” tanımına dayalı çizim örneği	51
Şekil 2.10. “Deltoid, bitişik iki kenar çifti eşit uzunlukta olan dörtgendir” tanımına göre hazırlanmış çizim örneği	53
Şekil 2.11. İki iç açısı 90 derece olan deltoid.....	57
Şekil 2.12. İkizkenar Yamuk, dikdörtgen ve karenin hiyerarşik yapısını gösterir şema .	58
Şekil 2.13. İkizkenar yamuğun çevrel dörtgen (kirişler dörtgeni) olarak gösterimi	61
Şekil 2.14. Kare ve dikdörtgenin kirişler dörtgeni olarak temsili	62
Şekil 2.15. Özel dörtgenler arasındaki kapsayıcı ilişkilerin hiyerarşik gösterimi	70
Şekil 2.16. Özel dörtgenler arasındaki hariç tutulan ilişkilerin hiyerarşik gösterimi	70
Şekil 3.1. Birinci deneme sınavına ait normal dağılım grafiği.....	78
Şekil 3.2. İkinci deneme sınavına ait normal dağılım grafiği	78
Şekil 3.3. İki aşamalı sorulardan 5 puan alan öğrenci cevapları(3.şekilde dikdörtgen için köşegenleri birbirini ortaltayan ikizkenar yamuktur ifadesi ile kapsayıcı bir tanımda da bulunmuştur.)	102
Şekil 3.4. İki aşamalı sorulardan 5 puan alan öğrenci cevapları (Kare için “özel bir dikdörtgendir” ifadesi ile kapsayıcı bir tanımda da bulunmuştur.)	102
Şekil 3.5. İki aşamalı sorulardan 5 puan alan öğrenci cevapları (Kare için “bir iç açısı 90 derece olan eşkenar dörtgendir.” ifadesi ile kapsayıcı bir tanımda da bulunmuştur.).....	103
Şekil 3.6. İki aşamalı sorulardan 5 puan alan öğrenci cevapları (Paralelkenar için Doğru Cevap - Doğru Açıklama'dır.)	103

Şekil 4.1. Ön test ile son test arasındaki fark puanlarına ilişkin Q-Q grafiği.	109
Şekil 4.2. Ö2'nin (2 nolu öğrencinin) ön test dikdörtgen tanımına ait cevabı	113
Şekil 4.3. Ö2'nin (2 nolu öğrencinin) son test dikdörtgen tanımına ait cevabı	113
Şekil 4.4. Ö1'in (1 nolu öğrencinin) ön test dörtgen tanımına ait cevabı	114
Şekil 4.5. Ö1'in (1 nolu öğrencinin) son test dörtgen tanımına ait cevabı	114
Şekil 4.6. Ö13'ün (13 nolu öğrencinin) ön test yamuk tanımına ait cevabı	115
Şekil 4.7. Ö13'ün (13 nolu öğrencinin) son test yamuk tanımına ait cevabı	115
Şekil 4.8. Ö19'un (19 nolu öğrencinin) ön test eşkenar dörtgen tanımına ait cevabı ...	115
Şekil 4.9. Ö19'un (19 nolu öğrencinin) son test eşkenar dörtgen tanımına ait cevabı ..	116
Şekil 4.10. Ö35'in (35 nolu öğrencinin) ön test paralelkenar tanımına ait cevabı	116
Şekil 4.11. Ö35'in (35 nolu öğrencinin) son test paralelkenar tanımına ait cevabı	116
Şekil 4.12. Ö35'in (35 nolu öğrencinin) ön test kare tanımına ait cevabı	117
Şekil 4.13. Ö35'in (35 nolu öğrencinin) son test kare tanımına ait cevabı	117
Şekil 4.14. Ö2'nin (2 numaralı öğrenci) ön testte dörtgen çizimi sorusuna ait cevabı .	118
Şekil 4.15. Ö2'nin (2 numaralı öğrenci) son testte dörtgen çizimi sorusuna ait cevabı .	119
Şekil 4.16. Ö17'nin ön testte yamuk çizimi sorusuna ait cevabı	120
Şekil 4.17. Ö17'nin son testte yamuk çizimi sorusuna ait cevabı	120
Şekil 4.18. Prototipik şekillere bağlı kalan Ö7'nin dikdörtgen için ön test prototipik cevabı	122
Şekil 4.19. Ö7'nin dikdörtgen için son test cevabı	123
Şekil 4.20. Ö11'in Ön testte paralelkenar için verdiği cevap	124
Şekil 4.21. Ö11'in Son testte paralelkenar için verdiği cevap	124
Şekil 4.22. PoGÖ öncesi testte öğrencilerin kare tanımına yönelik görsel değerlendirmeleri.	125
Şekil 4.23. PoGÖ sonrası testte öğrencilerin kare tanımına yönelik görsel değerlendirmeleri.	125

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

%	: Yüzde
f	: Frekans
FARRA	: Fraction Arithmetic Reflects Rules and Associations
JASP	: Jeffreys's Amazing Statistics Program
MEB	: Millî Eğitim Bakanlığı
Ö	: Katılımcı öğrencilere verilen kod
vd.	: Ve diğerleri



1. GİRİŞ

Matematik, bireyin yaşamında karşılaştığı problemlere çözüm üretmesine olanak sağlayan ve mantıksal düşünme becerilerini geliştiren temel disiplinlerden biridir. Bu disiplin, bireyin analitik düşünme, problem çözme ve akıl yürütme gibi zihinsel süreçlerini geliştirirken aynı zamanda günlük yaşamda karşılaştığı durumları yorumlama ve değerlendirme becerisine de katkı sağlamaktadır. Nitekim yapılan araştırmalar, matematiksel başarının bireylerin bilişsel yetileri üzerinde önemli bir etki yarattığını (Kliziene vd., 2022) ve matematik eğitiminin mantıksal düşünme ile akıl yürütme becerilerini anlamlı düzeyde geliştirdiğini ortaya koymaktadır (Cresswell ve Speelman, 2020). Matematik eğitimi bu bağlamda yalnızca akademik başarıyı değil, bireyin düşünsel gelişimini de desteklemektedir. Matematik öğretimi içerisinde yer alan alt alanlardan biri olan geometri, öğrencilerin uzamsal ilişkileri fark etmelerini, görsel düşünme becerilerini geliştirmelerini ve çevresindeki şekilleri tanımlamalarını sağlayan önemli bir öğrenme alanıdır. Geometri, öğrencinin yalnızca şekillerle ilgili bilgi edinmesini değil, bu şekiller arasındaki ilişkileri anlamasını ve bu ilişkileri kullanarak mantıksal çıkarımlar yapabilmesini amaçlamaktadır. Bu yönüyle geometri, öğretim programlarında merkezî bir konumda yer almaktadır. Ancak tüm bu öneme rağmen, öğrencilerin geometri konularındaki başarı düzeylerinin istenilen seviyede olmadığı gözlemlenmektedir. İlköğretim matematik derslerinde öğrenciler çeşitli matematiksel kavramlarla karşılaşmaktadır. Bunlardan bazıları geometriye dair kavramlarla ilgilidir ve bu kavramlar öğretim programlarında önemli bir yer tutmaktadır. Türkiye’de öğrencilerin geometri alanında yaşadığı eksiklik, ulusal sınavlar (örneğin SBS, LYS) ile uluslararası ölçme araçları (TIMSS, PISA) sonuçlarında açıkça ortaya çıkmaktadır. Yapılan meta-sentez çalışmaları, geometri başarısının uluslararası ortalamanın gerisinde olduğunu göstermekte; özellikle uygulama ve akıl yürütme becerileri gerektiren sorularda Türk öğrencilerin zorlandığı vurgulanmaktadır (Gur, 2016; Pamukkale Üniversitesi, 2015). OECD’ye bağlı TIMSS ve PISA değerlendirmeleri, Türkiye’nin sayılar ve ölçme gibi alanlarda görece yüksek başarıya sahip olsa da geometri alanında daha düşük başarı düzeylerine sahip olduğunu göstermektedir. Özellikle TIMSS 2011 ve TIMSS 2019 verileri, öğrencilerin uygulama ve akıl yürütme gerektiren geometri sorularında uluslararası ortalamanın altında kaldığını ortaya koymaktadır.

Bu veriler ışığında, Türkiye’deki öğrencilerin geometri performansının zayıf olduğu, bunun hem ulusal hem de uluslararası sınav sonuçlarında tutarlı biçimde gözlemlendiği, geometri öğretimindeki yaklaşım ve yeterliliklerin yeniden yapılandırılması gerektiğini

göstermektedir. İlköğretim düzeyindeki öğrencilerin bazı geometrik kavramlarda yanılgıya düştükleri ve bu durumun geometri öğrenimini olumsuz etkilediği çeşitli araştırmalarda vurgulanmaktadır (Doğan vd., 2012; Küçük ve Demir, 2009; Yenilmez ve Yaşa, 2008).

Günümüzde öğrencilerin matematik derslerine karşı geliştirdikleri tutumlar ve bu derslerde karşılaştıkları kavramsal zorluklar, öğrenme süreçlerini doğrudan etkilemektedir. Özellikle geometri öğreniminde öğrenciler, şekilleri yalnızca görsel prototiplere dayalı olarak anlamlandırma eğiliminde olmakta; bu da kavramların yüzeysel kavranmasına yol açmaktadır (Haj-Yahya ve Hershkowitz, 2024). Bu bağlamda prototip dışı örneklerin sistemli kullanımı, öğrencilerin geometrik kavram tanımlarında ve sınav bazlı problem çözme süreçlerinde daha derin ve doğru düşünmelerine katkı sağlamıştır. Van Hiele modeline göre öğrenciler, geometri kavramlarının içsel ilişkilerini kavramadan yalnızca görsel benzerliklerle yüzeysel gruptama yapma eğilimindedirler (Van Hiele, 1959; Akt. Wikipedia, t.y.). Bu durum, özellikle prototipik örnekler dışındaki şekilleri tanıma ve kavrama konusunda önemli bir sınırlama oluşturmaktadır. Dolayısıyla yalnızca tanımsal anlatımlar değil, farklı temsil biçimleri (örneğin şekil oryantasyonları, ölçeksiz çizimler, prototip olmayan örnekler) ile kavram sunumu, anlamlı öğrenmeyi desteklemektedir.

Ayrıca literatürde, geometrik kavramların yalnızca tanıma değil; aynı zamanda anlamlı öğrenme ilkeleri doğrultusunda ele alınması gerektiği vurgulanmaktadır. Novak ve Mintzes gibi araştırmacılar, kavram haritaları ya da çoklu temsil stratejileri gibi yöntemlerle öğrenilen bilgilerin birbiriyle ilişkilendirilmesinin kalıcılığı artırdığını belirtmiştir (Novak, Mintzes ve Wandersee, 2005; Akt. Wikipedia, t.y.). Bu yaklaşım sayesinde öğrenciler, yeni kavramları önceki bilgileriyle ilişkilendirerek yapılandırılmış bilgi ağları oluşturabilmekte ve böylece geometrik kavramlarda yüzeysel bilgi yerine derin kavrayış kazanabilmektedir. Bu yaklaşımlar doğrultusunda literatür, geometri öğretiminde prototipik temsillerin ötesine geçilmesini, öğrencilerin kavramların yapıyla ilişkiselliklerini keşfetmelerini destekleyen öğretim stratejilerinin (örneğin modelleme, somutlaştırma, farklı görseller) etkisini öne çıkarmaktadır (Haj-Yahya ve Hershkowitz, 2024; Novak vd., 2005; Akt. Wikipedia, t.y.; Van Hiele, 1959; Akt. Wikipedia, t.y.)

Matematik eğitimi literatürü, geleneksel öğretim yöntemlerinin öğrencilerin görsel-uzamsal düşünme becerilerini yeterince desteklemediğini ve bu durumun geometri öğrenimindeki etkinliği olumsuz etkilediğini göstermektedir. Örneğin Özen (2009), Türkiye’de yapılan çalışmasında geometri derslerine öğrencilerin ilgisinin düşük olduğunu, araç-gereç kullanımının sınırlı olması nedeniyle dersleri sıkıcı bulduklarını ve dolayısıyla

kavramların ezberlemeye dayalı öğrenildiğini vurgulamıştır. Bu çerçevede öğrencilerin yalnızca prototipik temsil kalıplarıyla kavramları anlamlandırmaya çalışması, öğrenmelerinin yüzeysel kalmasına neden olabilir. Yabancı literatürde yapılan çalışmalar da benzer bulgular sunmaktadır. Fastame (2021) tarafından yürütülen kapsamlı bir çalışmada, öğrencilerin görsel-uzamsal imgeleme becerilerinin geometri başarılarıyla doğrudan ilişkili olduğu; geleneksel yöntemlerle yürütülen eğitim yaklaşımlarının bu becerileri geliştirmekte yetersiz kaldığı ortaya konmuştur (Fastame, 2021). Ayrıca Konyalıoğlu ve Aksu (2012), öğrencilerin geometri konularında yaşadığı güçlüklerin temel nedeninin görsel-uzamsal becerilerdeki eksiklik olduğunu belirtmiş; geleneksel öğretim stratejilerinin zihinsel modelleme becerilerini geliştirmede yetersiz kaldığını ve kavramların yalnızca ezber yoluyla öğrenildiğini ifade etmiştir (Konyalıoğlu ve Aksu, 2012). Dahası, Burte ve diğerlerinin “Think3d!” adlı araştırmasında, uzamsal eğitim programlarının öğrencilerin hem mekânsal hem matematiksel düşünme becerilerini anlamlı biçimde geliştirdiği, geleneksel yöntemlerle yürütülen müfredatın bu etkiyi sağlayamadığı gözlemlenmiştir (Burte vd., 2017). Bu bulgular bir arada değerlendirildiğinde, yalnızca tanımlamalar üzerine kurulu geleneksel geometri öğretiminin, öğrencilerin kavramsal öğrenmesini desteklemede yetersiz kaldığı, öğrencilerin şekilleri anlamlı ve kalıcı biçimde öğrenebilmeleri için deneyim temelli, uzamsal modelleme içeren yaklaşımlara ihtiyaç duydukları ortaya konmaktadır.

Yapılan araştırmalarda, öğrencilerin dörtgenler gibi temel geometrik kavramlara ilişkin çeşitli kavramsal yanlışlar sergileyebildiklerine dair bulgulara rastlanmaktadır (Baktemur, Ayan Civak ve Işıksal Bostan, 2021; Fujita, 2012; Zeybek, 2018). Bu yanlışların temelinde genellikle öğretim sürecinde kullanılan örneklerin sınırlı olması (Fujita, 2012), öğrencilere soyut kavramları farklı temsil yollarıyla sunma eksikliği (Elia ve Gagatsis, 2003; Haj Yahya ve Hershkowitz, 2024) ve bireysel anlamlandırma fırsatlarının yeterince tanınmaması (Tall ve Vinner, 1981; Vinner, 2002) yer almaktadır. Bu yanlışların temelinde genellikle öğretim sürecinde kullanılan örneklerin sınırlı olması (Fujita, 2012), öğrencilere soyut kavramları farklı temsil yollarıyla sunma eksikliği (Elia ve Gagatsis, 2003; Haj Yahya ve Hershkowitz, 2024) ve bireysel anlamlandırma fırsatlarının yeterince tanınmaması (Tall ve Vinner, 1981; Vinner, 2002) yer almaktadır. Örneğin, Kemankaşlı ve Gür (2005), öğrencilerin dörtgenler konusundaki hata analiz çalışmalarında, aç ve kenar ilişkilerini doğru kuramadıklarını, eşkenar dörtgenin alan-bağıntılarını karıştırdıklarını, verilen bilgileri analiz etmekte zorlandıklarını ve bu nedenle soruda isteneni tam olarak belirleyemediklerini ortaya koymuştur.

Bu çalışma, dörtgenler konusundaki prototipik düşünme eğilimlerini ve kavramsal öğrenme düzeylerini inceleyerek 7. sınıf öğrencilerine yönelik mevcut boşluğu doldurmayı amaçlamaktadır. Araştırmada, öğrencilerin aynı geometrik kavramlara ilişkin geliştirdikleri farklı anlamlandırmaların derinlemesine analiz edilmesi hedeflenmektedir. Böylece, öğrencilerin geometri öğrenme sürecinde karşılaştıkları kavramsal farklılıkların kökenine inmek ve bu farklılıkların öğretim süreciyle olan ilişkisini ortaya koymak amaçlanmaktadır.

1.1. Problem Durumu

Öğrenciler, geometri derslerinde çoğunlukla belirli kalıplaşmış örnekler (prototip şekiller) üzerinden öğretimle karşılaşmaktadırlar. Bu öğretim yaklaşımı, öğrencilerin şekilleri sadece görsel özelliklerine göre tanımalarına neden olmakta; şeklin tanımsal özelliklerini yeterince anlamamalarına yol açmaktadır. Bu durum, öğrencilerin yeni ve farklı biçimlerde verilen geometrik şekilleri tanımakta zorlanmalarına, şekiller arası ilişkileri kuramamalarına ve kavramsal anlamda yetersiz kalmalarına neden olabilmektedir.

Geometri, öğrencilerin uzamsal düşünme becerilerini geliştirmeyi amaçlayan temel disiplinlerden biridir. Özellikle şekillerin tanımlanması, sınıflandırılması ve aralarındaki ilişkilerin kavranması, öğrencilerin matematiksel düşünce sistemlerini yapılandırmalarında önemli bir rol oynamaktadır. Ancak yapılan araştırmalar, öğrencilerin geometri derslerinde sıklıkla yüzeysel ve kalıplaşmış öğrenmeler sergilediklerini göstermektedir. Bu durum, çoğunlukla öğretim sürecinde kullanılan prototipik şekillere aşırı odaklanılmasıyla ilgilidir. Geleneksel öğretim yaklaşımı, öğrencilere geometrik kavramları yalnızca belirli görsel temsiller (örneğin, eşkenar dörtgenin sadece yatık ve düzgün biçimde gösterilmesi) üzerinden sunmakta ve bu da öğrencilerin kavramları sınırlı biçimde algılamalarına yol açmaktadır.

Özellikle dörtgenler konusu, öğrencilerin kavramsal hatalar yapmaya en yatkın oldukları alanlardan biridir. Dörtgenler, farklı özelliklere sahip birçok alt sınıfı içermekte ve bu alt sınıflar arasında belirli kapsayıcılık ilişkileri bulunmaktadır. Ancak öğrenciler genellikle bu ilişkileri doğru kurmakta zorlanmakta, örneğin her karenin aynı zamanda bir dikdörtgen ya da eşkenar dörtgen olduğunu fark edememektedirler (Fujita, 2012). Bu tür kavramsal eksiklikler, öğrencilerin geometriyi anlamlandırma düzeylerini düşürmekte ve matematiksel akıl yürütmelerini sınırlamaktadır.

Zeybek (2018) tarafından yapılan çalışmada, öğrencilerin dörtgenlere ilişkin prototipik temsillere dayalı düşünme eğilimlerinin yaygın olduğu ve bu durumun kavramsal

öğrenmelerini olumsuz etkilediği tespit edilmiştir. Benzer şekilde Baktemur, Ayan Cıvak ve Işıksal Bostan (2021); öğretmen adaylarının bile dörtgenlerin tanım, sınıflandırma ve kapsayıcılık ilişkilerine yönelik ciddi kavram yanılgılarına sahip olduğunu ortaya koymuştur. Bu çalışmalar, geometri öğretiminde yalnızca şeklin görsel özelliklerine odaklanmanın, şekillerin tanımsal (matematiksel) özelliklerini göz ardı etmeye neden olduğunu göstermektedir.

Yabancı literatürde de benzer bulgulara rastlanmaktadır. Örneğin, Elia ve Gagatsis (2003), öğrencilerin geometrik şekillerin sadece yüzeysel görünüşleri üzerinden genelleme yaptıklarını, farklı temsillerle karşılaşmadıklarında kavramları tanıyamadıklarını ifade etmektedir. Aynı şekilde Burte vd. (2017) uzamsal eğitim programlarının öğrencilerin geometri öğrenmelerinde anlamlı gelişmeler sağladığını, özellikle şekillerin farklı açılardan görselleştirilmesi ve manipüle edilmesinin kavramsal derinliği artırdığını vurgulamaktadır. Bu bulgular, öğrencilerin sadece çizim veya isimlendirme düzeyinde değil, anlam kurma düzeyinde de desteklenmeleri gerektiğini ortaya koymaktadır.

Güncel araştırmalardan biri olan Haj-Yahya ve Hershkowitz (2023), öğrencilerin dörtgenler konusundaki kavramsal açıklamalarının figüral düşünme ile şekillendiğini, dolayısıyla öğretim sürecinde bu tür figüral yaklaşımların analiz edilmesi gerektiğini belirtmiştir. Ayrıca Tall ve Vinner'in (1981) "concept image" ve "concept definition" ayrımı da öğrencilerin zihinlerinde oluşan şekil imgeleri ile matematiksel tanımlar arasındaki farklara dikkat çekerek bu ayrımın kavram öğretiminde dikkate alınması gerektiğini göstermektedir.

Yerli çalışmalarda da bu konuya ilişkin bulgular oldukça çarpıcıdır. Özen (2009), ortaokul öğrencilerinin dörtgenleri sınıflandırma sürecinde büyük ölçüde görsel özelliklere dayandıklarını, matematiksel tanımları kullanmakta zorlandıklarını belirtmiştir. Kemankaşlı ve Gür (2005) ise Van Hiele kuramı bağlamında öğrencilerin dörtgenler konusundaki düzeylerini belirleyerek birçok öğrencinin hâlâ tanıma ve analiz düzeyinde takıldığını, soyutlama yapamadığını ortaya koymuştur.

Tüm bu çalışmalar göstermektedir ki öğrencilerin geometri derslerinde karşılaştıkları kavramsal güçlükler, öğretim sürecinin yapısından ve kullanılan temsil biçimlerinden kaynaklanmaktadır. Öğrenciler sıklıkla sadece prototipik örneklerle karşılaştıklarında farklı biçimlerde verilen geometrik şekilleri tanıyamamakta ve bu durum kavramsal öğrenmeyi sekteye uğratmaktadır. Özellikle dörtgenler konusu, içerdiği çoklu kapsayıcılık ilişkileri ve farklı tanımlar nedeniyle bu kavramsal hataların en sık gözlemlendiği alanlardan biridir.

Bu bağlamda, geometrik şekillerle yapılan prototip olmayan öğretimin, öğrencilerin kavramsal anlamalarını artırıp artırmadığı önemli bir araştırma problemidir. Araştırma, bu eksiklikten yola çıkarak prototip olmayan şekillerin kullanıldığı öğretimin öğrencilerin kavramsal öğrenmeleri üzerindeki etkisini ortaya koymayı amaçlamaktadır.

1.2. Problem Cümlesi

Prototip olmayan geometri öğretimi (PoGÖ) 7. sınıf öğrencilerin dörtgenler konusundaki kavramsal öğrenmelerini nasıl etkilemektedir?

1.3. Alt Problemler

- Prototip olmayan geometri öğretiminin (PoGÖ) 7. sınıf öğrencilerinin dörtgenlerdeki kavramsal öğrenimlerini geliştirmeye etkisi var mıdır?
- Prototip Olmayan Geometri Öğretiminin (PoGÖ) öğrencilerin dörtgen, yamuk, eşkenar dörtgen, paralelkenar, dikdörtgen ve kare şekillerine yönelik tanımlarını geliştirmeye etkisi var mıdır?
- Prototip Olmayan Geometri Öğretiminin (PoGÖ) öğrencilerin dörtgen, yamuk, eşkenar dörtgen, paralelkenar, dikdörtgen ve kare şekillerine yönelik çizimleri geliştirmeye etkisi var mıdır?
- Prototip Olmayan Geometri Öğretiminin (PoGÖ) öğrencilerin dörtgen, yamuk, eşkenar dörtgen, paralelkenar, dikdörtgen ve kare şekillerine yönelik görsel-geometrik şekil eşleştirmelerini geliştirmeye etkisi var mıdır?

1.4. Araştırmanın Amacı

Bu araştırmanın amacı, 7. sınıf öğrencilerinin dörtgenler konusuna ilişkin kavramsal öğrenme düzeylerini ve prototipik düşünme eğilimlerini belirlemektir. Bu bağlamda, öğrencilerin dörtgenleri tanımlama, sınıflandırma ve bu şekillere ilişkin temel özellikleri kavrama süreçleri detaylı bir biçimde analiz edilmiştir. Özellikle öğrencilerin dörtgen kavramını zihinsel olarak nasıl yapılandırdıkları ve bu yapılandırmaların sahip oldukları prototiplere göre farklılaşıp farklılaşmadığı ortaya konmaya çalışılmıştır. Araştırmada ayrıca, öğrencilerin dörtgenleri anlamlandırırken hangi örnekleri tipik prototipik olarak benimsedikleri ve bu örneklerin kavramsal öğrenme süreçlerine etkisi incelenmiştir. Bu doğrultuda, öğrencilerin tanım üretme biçimleri, geometrik düşünme becerileri ve şekilsel

temsil yetenekleri değerlendirilmiştir. Çalışmanın bir diğer amacı ise öğrenciler arasında gözlemlenen kavramsal anlamlandırma farklılıklarını ortaya koymak ve bu farklılıkların eğitim sürecine olan olası katkılarını tartışmaktır. Bu kapsamda araştırma, fenomenografik yaklaşım doğrultusunda yapılandırılmış ve öğrencilerin aynı kavrama ilişkin farklı düşünme biçimleri nitel olarak analiz edilmiştir. Bunlara ek olarak, gerçekleştirilen öğretim sürecinin öğrencilerin öğrenmelerine olan etkisi ön test-son test uygulamaları ile nicel olarak da değerlendirilmiş, böylece uygulamaya dayalı öğretimin kavramsal öğrenmeye katkısı hem nitel hem de nicel verilerle ortaya konmuştur.

1.5. Araştırmanın Önemi

Dörtgenler konusu, öğrencilerin geometrik kavramları yapılandırmasında hem temel hem de karmaşık ilişkiler içermesi bakımından özel bir yere sahiptir. Bu alanda yapılan çalışmalar, öğrencilerin çoğunlukla dörtgenler arasındaki kapsayıcılık ilişkilerini anlayamadıklarını, şekilleri sadece prototipik temsillere dayalı olarak tanıdıklarını göstermektedir (Fujita, 2012; Zeybek, 2018). Bu durum, matematiksel tanımların kavranmasında ciddi engellere yol açmakta ve öğrencilerin geometrik akıl yürütme becerilerini sınırlandırmaktadır.

Araştırmalar, öğretim sürecinde kullanılan görsel temsillerin ve öğretmenlerin sunduğu örneklerin, öğrencilerin zihinlerinde oluşan kavram imgelerini doğrudan etkilediğini ortaya koymaktadır (Haj-Yahya ve Hershkowitz, 2023; Tall ve Vinner, 1981). Özellikle yalnızca “prototip” olarak nitelendirilebilecek sınırlı örneklerin kullanılması, öğrencilerin dörtgenleri tanımada esnek düşüncemelerine neden olmaktadır. Bu da kavram yanılgılarını pekiştirmekte ve öğrenmeyi yüzeyselleştirmektedir.

Bu bağlamda, “Prototip Olmayan Geometri Öğretiminin Kavramsal Öğrenmeye Etkileri” başlıklı bu araştırma, öğrencilerin şekil tanım ve sınıflandırmalarını nasıl anlamlandırdığını ortaya koyarak, öğretim süreçlerinde sıklıkla göz ardı edilen kavramsal engelleri görünür kılmayı amaçlamaktadır. Öğrencilerin sadece şekli tanıyıp adlandırmaları değil, aynı zamanda şekillerin tanımsal özelliklerini anlayıp ilişkilendirmeleri gerektiği dikkate alındığında bu araştırma, öğretim stratejilerinin yeniden yapılandırılması açısından önemli katkılar sağlayacaktır.

Ayrıca bu çalışma, kavramsal öğrenmenin derinleşmesi için öğretmenlerin dikkat etmesi gereken temsil çeşitliliği, tanım-temsil bütünlüğü ve prototip dışı örneklerin rolü gibi önemli noktaları da ortaya koyacaktır. Böylece hem öğretmen yetiştirme programlarına hem

de sınıf içi öğretim uygulamalarına rehberlik edebilecek nitelikte özgün veriler sunması beklenmektedir.

1.6. Sayıtlar

- Öğrenciler, uygulama sürecine istekli ve dikkatli şekilde katılmışlardır.
- Uygulanan ölçme aracı öğrencilerin kavramsal öğrenme düzeylerini geçerli ve güvenilir biçimde ölçmektedir.
- Katılımcılar, sorulara kendi bilgi ve anlayışlarına göre cevap vermiştir.
- Araştırmaya katılan öğrencilerin, sorulara içtenlikle ve bilgi düzeylerine uygun biçimde yanıt verdikleri, cevaplarını rastlantısal değil sahip oldukları bilgi ve deneyimlere dayalı olarak oluşturdukları varsayılmaktadır.

1.7. Sınırlılıklar

- Araştırma sadece bir devlet ortaokulunda öğrenim gören 7. sınıf öğrencileriyle sınırlıdır.
- Uygulama, dörtgenler konusuyla sınırlıdır.
- Uygulama süresi Mart-Haziran aylarını kapsamaktadır. (Bu tarih aralığının seçilme nedeni materyal ve yöntem bölümünde detaylıca ele alınmıştır.)

1.8. Tanımlar

Kavramsal Öğrenme: Kavramsal öğrenme, bireyin yeni bilgileri ön bilgileriyle ilişkilendirerek ve kavramlar arasındaki anlamlı ilişkileri kurarak yapılandığı öğrenme biçimidir (Ausubel, 1968; Novak ve Canas, 2008). Bu öğrenme süreci, kavramların tanınmasından öte, bunların sınıflandırılması, karşılaştırılması ve bağlamsal kullanımlarını içerir (Özden, 2003).

Dörtgen: Dörtgen, kenarları doğru parçası olan, tüm köşeleri aynı düzlemde bulunan, üç köşesi doğrusal olmayan ve dört kenardan oluşan kapalı bir şekildir. Bu tanım, dörtgenin temel geometrik özelliklerini belirtmekte ve tanımı diğer çokgenlerden ayırt edici biçimde sunmaktadır (Öztoprakçı ve Çakıroğlu, 2013).

Yamuk: Yamuk, dört kenarlı bir geometrik şekildir ve bu kenarların en az bir çifti birbirine paraleldir. Diğer kenarlar paralel olmak zorunda değildir (Erel, 2014).

Eşkenar Dörtgen: Eşkenar dörtgen, bir çift komşu kenarı eşit uzunlukta olan ve karşılıklı kenarları paralel olan özel bir dörtgendir. Bu özellikleri sayesinde eşkenar dörtgen hem paralelkenar hem de yamuk sınıfına dâhil edilir. Ayrıca eşkenar dörtgende köşegenler birbirini dik keser ve açıortaydır. Bu geometrik özellikler, eşkenar dörtgeni diğer dörtgen türlerinden ayıran belirgin niteliklerdir (Öztoprakçı ve Çakıroğlu, 2013, s. 257).

Paralelkenar: Paralelkenar, karşılıklı iki kenar çifti birbirine paralel olan dörtgen türüdür (Erel, 2014).

Dikdörtgen: Dikdörtgen, karşılıklı kenarları hem eşit uzunlukta hem de paralel olan, tüm iç açıları 90 derece olan bir dörtgendir (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2013).

Kare: Bir dörtgen, kenarlarının ve açılarının eşit olması durumunda “eşkenar ve eşaçıya sahip dört kenarlı şekil” olarak tanımlanabilir (Fujita ve Jones, 2007).

2. KURAMSAL TEMEL VE YAPILAN ÇALIŞMALAR

Kavramsal öğrenme sürecinde öğrenciler, yalnızca bilgiyi ezberlemekle kalmaz; bu bilgiyi anlamlandırarak zihinsel yapılarında yeniden inşa ederler (Karadüz, 2004). Matematik bilgisinin muhakeme yoluyla yapılandırılması, bilginin hem kalıcılığını hem de farklı bağlamlara aktarılabilirliğini artırmaktadır (Erdem, 2023). Bu çerçevede geometrik kavramlar, öğrenciler tarafından önce sezgisel olarak algılanmakta, daha sonra ise matematiksel bağlamda anlamlandırılmaktadır (Baki, 2019).

Özellikle okul öncesi dönemde çocuklar, çevrelerinde karşılaştıkları şekilleri çoğunlukla görsel özelliklerine göre sınıflandırmakta, bu süreçte prototipik şekillere dayalı genellemelerde bulunmaktadır (Güven vd., 2019). Prototipik örnekler, belirli bir kavramın zihinde canlandırılmasına yardımcı olsa da yalnızca bu örneklerle sınırlı kalan kavram imgeleri, farklı açılardan sunulan örneklerin tanınmasını ve kavramlar arası ilişkilerin kurulmasını zorlaştırmaktadır (Fujita, 2012; Türnüklü, Alaylı ve Akkaş, 2013). Bu durum, kavramsal öğrenmenin derinliğini olumsuz etkilemekte, geometrik genelleme yapmayı zorlaştırmaktadır.

Geometri öğretiminde Duval (1998) tarafından önerilen üç temel bilişsel süreç ön plana çıkmaktadır: görselleştirme, inşa ve muhakeme. Görselleştirme, geometrik bir fikrin zihinsel ya da görsel temsili; inşa, öğrencilerin ölçme araçlarıyla şekil üretme becerisi; muhakeme ise mantıksal çıkarımlarla düşüncelerin gerekçelendirilmesidir. Bu süreçler, öğrencilerin analiz, değerlendirme ve problem çözme gibi üst düzey becerilerinin gelişmesine katkı sağlamaktadır (Köse vd., 2012).

Freudenthal (1971), matematiği yalnızca hazır tanım ve kurallar bütünü olarak değil, bireyin etkin olarak katıldığı bir yapılandırma süreci olarak görür. Ona göre, matematiksel öğrenme, öğrencinin deneyimlediği problemler üzerinden, yerel düzeyde örgütlenme ve yeniden keşfetme yoluyla gerçekleşir. Bu süreçte tanımlar, öğretimin başlangıç noktası değil, öğrenme sürecinin doğal bir ürünü olarak ortaya çıkar. Van Hiele düzeyleriyle uyumlu olarak, öğrenci başlangıçta somut etkinlikler (örneğin katı cisimleri katlama, kesme, yapıştırma gibi) üzerinden kavramları sezgisel olarak tanır ve zamanla bu deneyimlerini sözel, sembolik ve aksiyomatik düzeyde yapılandırır. Freudenthal'e (1971) göre geometrinin öğretimi, öğrencilerin yaşadığı fiziksel uzama dayalı olmalı ve soyut aksiyomatik yapılara geçiş, ancak yeterli sezgisel ve deneyimsel temelin ardından mümkün kılınmalıdır. Bu bağlamda, Tanımların didaktik olarak öğrenciden önce verilmesi, öğrenmenin doğasını tersine çevirir (antididaktik inversiyon) ve öğrencinin keşfetme isteğini zayıflatır.

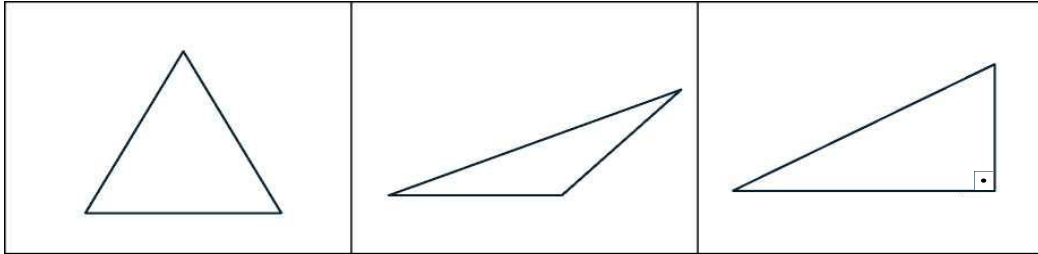
Bu yaklaşım, sadece matematik öğretimine değil, öğrencinin tüm öğrenme sürecine ilişkin derin bir felsefi bakış sunmakta; kavramlaştırma, tanımlama, akıl yürütme ve soyutlama gibi bilişsel süreçlerin öğrenci merkezli ve etkinlik temelli bir yapıda gelişmesi gerektiğini savunmaktadır.

Etkili bir geometri öğretimi, yalnızca prototipik örneklerle sınırlı kalmamalı; prototip dışı örnekler ve kavram dışı durumlar da öğrencilere sunulmalıdır. Bu sayede öğrenciler, kavramların özelliklerini daha doğru analiz edebilir ve farklı örnekler arasında geçiş kurabilir (Güven ve Karpuz, 2016). Ayrıca tartışma ortamlarının sunulması, öğrencilerin hatalarını fark ederek kendi anlam yapılarını inşa etmelerine fırsat verir. Geometrik öğrenme ortamlarında, öğrencilerin daha derin bir kavrayış geliştirebilmeleri için prototipik, dinamik ve deneysel yaklaşımların birlikte sunulması önerilmektedir (De Villiers, 1998; Fujita ve Jones, 2007; Vinner ve Dreyfus, 1989). Bu çerçevede Athanasopoulou (2008), *Geometer's Sketchpad* yazılımı ile öğrencilerin dörtgen özelliklerini keşfetmeye yönelik dinamik etkinlikler yürüttüğünü belirtmiştir. Bu öneri, yalnızca şekillerin görsel temsilleriyle sınırlı kalmayan, aynı zamanda kavramların altında yatan ilişkileri ortaya çıkaran, bütüncül bir öğretim anlayışını yansıtmaktadır. Bu bağlamda, matematik eğitiminde uzun yıllardır tartışılmakta olan kavramsal ve işlemsel anlama arasındaki ilişki de önem kazanmaktadır. Her ne kadar kavramsal anlama, işlemsel anlama karşısında daha öncelikli bir konumda görülse de alan yazınındaki birçok araştırmacı, bu iki tür bilginin birbirini tamamladığını ve birlikte ele alınması gerektiğini vurgulamaktadır (Glaser, 1979; Hiebert ve Lefevre, 1986; Hiebert ve Carpenter, 1992). Nitekim Ulusal Araştırma Konseyi (2001) de matematiksel anlamanın yalnızca kavramları bilmekle değil, aynı zamanda bu kavramlarla ilişkili işlemleri anlayarak aralarındaki güçlü bağları kurabilme becerisiyle doğrudan ilişkili olduğunu belirtmektedir.

NOT: Kavramsal anlama ile ilgili çalışmaların büyük ölçüde 1980'li ve 1990'lı yıllara dayanmasının nedeni, bu dönemde matematik eğitiminde bilişsel yaklaşımların öne çıkması ve öğrenmenin yalnızca prosedürel bilgiyle sınırlı olmadığını, kavramsal yapıların da merkezî bir rol oynadığını vurgulayan paradigma değişiminin yaşanmış olmasıdır.

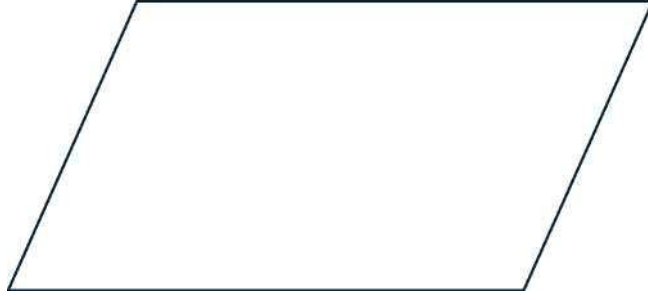
Prototip kavramı bilişsel psikoloji kökenlidir. Eleanor Rosch tarafından geliştirilen bu kavram, bireylerin zihnindeki en tipik örnek üzerinden kavramları temsil ettiğini öne sürer. Matematik eğitiminde Rina Hershkowitz tarafından geometriye uyarlanmıştır (Güven vd., 2019). Prototipler, bireylerin bir kavramı anlamlandırırken başvurdukları bilişsel referans noktalarıdır. Zihin, bir kavramla karşılaştığında onu yorumlamak ve değerlendirmek için

bellekte yer alan en belirgin ve tanıdık örneğe yönelir. Özellikle geometri öğretiminde bu prototipler, öğrencilerin sıkça karşılaştıkları ve alışkın oldukları model şekiller üzerinden temsil edilir. Örneğin, dörtgen kavramı öğretildiğinde akla gelen ilk şekiller genellikle eşkenar dörtgen ya da dikdörtgen gibi düzenli, simetrik ve açıkça tanımlı örneklerdir. Bu prototipler, ilgili geometrik kavramın temel özelliklerini yansıttıkları için öğretimin başlangıç aşamasında oldukça işlevseldir. Ancak yalnızca bu prototip örnekler üzerinden yürütülen öğretim, öğrencilerin daha az alışıldık ya da prototip dışı örnekleri tanıma ve anlama becerilerini sınırlayabilir. Bu durum, öğrencilerin kavramsal esneklik kazanmalarını ve farklı bağlamlarda geometrik düşünme yetilerini geliştirmelerini engeller (Güven vd., 2019). Bu nedenle, prototiplerin öğrenme sürecinde güçlü bir başlangıç noktası sunduğu kabul edilmekle birlikte, öğretim sürecinde prototip olmayan örneklerle de yer verilmesi, öğrencilerin daha kapsamlı ve derinlikli bir kavrayış geliştirmeleri açısından büyük önem taşımaktadır. Bu bağlamda prototipler öğretimde kolaylık sağlasa da yalnızca bunlarla sınırlı kalmak öğrencilerin kavramları dar kalıplarla öğrenmesine neden olabilir. Örneğin üçgenin yüksekliği genellikle dik üçgenlerde öğretilir. Bu durum, geniş açılı üçgenlerde ya da yüksekliklerin dıştan çizilmesi gereken örneklerde öğrencilerin zorlanmasına neden olmaktadır (Güven vd., 2019).

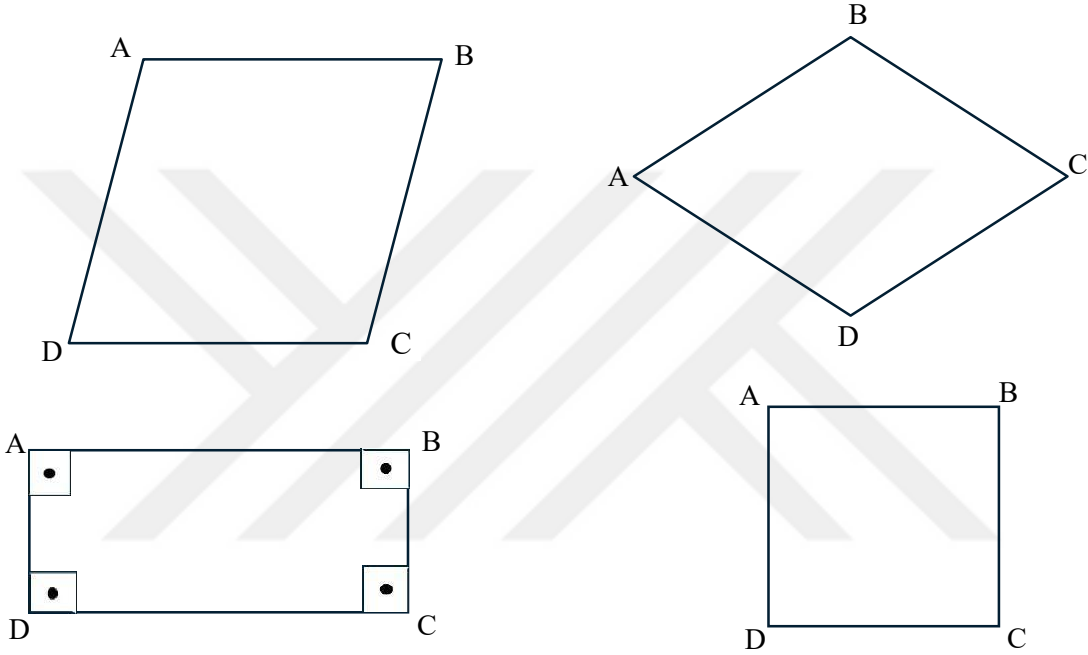


Şekil 2.1. Öğrencilerin sıklıkla tercih ettiği prototip üçgen modeli ile nadiren kullanılan prototip olmayan üçgen modellerinin karşılaştırılması (**Kaynak:** Güven, Öztürk ve Bülbül, 2019: 180'den uyarlanmıştır)

Benzer şekilde, ikizkenar üçgenin yalnızca belirli bir yönelimle sunulması farklı açılardaki örneklerin tanınmasını güçleştirmektedir. Aynı durum, dörtgen türlerinin (kare, dikdörtgen, paralelkenar, yamuk) öğretiminde de geçerlidir.



Şekil 2.2. Prototip paralelkenar (**Kaynak:** Güven, Öztürk ve Bülbül, 2019: 180'den uyarlanmıştır)



Şekil 2.3. Prototip olmayan paralelkenarlar (**Kaynak:** Güven, Öztürk ve Bülbül, 2019: 180'den uyarlanmıştır)

Öğrenciler yalnızca alışılmış prototiplerle sınırlı kaldıklarında, bu türleri doğru sınıflandıramamakta ve aralarındaki ilişkileri kavrayamamaktadır. Bu bağlamda Haj- Yahya ve Hershkowitz (2024), prototipik temsillere bağımlılığın, öğrencilerin kavram oluşturma ve ispat yapma süreçlerindeki etkilerini incelemiştir. 91 lise öğrencisinin katıldığı bu çalışmada, kavram imgeleri ile kavram tanımlarının uyuşmaması nedeniyle hatalı genellemeler ve ispat yetersizlikleri gözlenmiştir. Araştırmada Van Hiele Modeli temel alınmış, öğrencilerin geometrik düşünme düzeyleri bu bağlamda değerlendirilmiştir. Beş görev içeren araştırmada öğrenciler, paralelkenar, eşkenar dörtgen, üçgen eşliği ve alan oranlaması konularında değerlendirilmiştir. İlk görevde öğrencilerin çoğu hatayı fark etmiş ancak yalnızca %7,7'si geçerli bir ispat yapabilmıştır. İkinci görevde yalnızca üçte biri dış

yükseklik çizimiyle ispatı doğru yapmıştır. Üçüncü görevde, öğrencilerin büyük kısmı eş alanı, eşlik kavramıyla karıştırmış; dördüncü görevde ise ortak yüksekliği belirlemekte zorlanmışlardır. Beşinci görevde oran hesaplamalarında yükseklik dikkate alınmamış, yalnızca kenar uzunluklarına dayalı genellemeler yapılmıştır. Araştırmanın sonuçları üç temel bilişsel zorluğu ortaya koymuştur: (1) prototipik temsillere aşırı bağıllık, (2) ortak elemanları belirlemede güçlük ve (3) eş alanlı fakat eş olmayan şekillerin karıştırılması. Bu durumlar, öğrencilerin kavramları görsel temsillere dayalı biçimde değerlendirdiklerini ve tanım-temelli düşünme becerilerinin eksik olduğunu göstermektedir. Sonuç olarak, kavram öğretiminde prototipik örneklerle sınırlı kalınmamalı; farklı yönelimlerde, prototip dışı ve zengin temsillere dayalı öğretim stratejileri geliştirilmelidir. Tartışma ortamları, yapılandırma temelli materyaller (ör. tangram) ve bağlamsal görevler bu süreci desteklemelidir. Bu sayede öğrencilerin kavram imgeleri esnetilebilir ve kavram-tanım ilişkisi daha sağlam temellere oturtulabilir.

Haj-Yahya ve Hershkowitz (2023), gerçekleştirdikleri çalışmada, prototipik geometrik temsillerin öğrencilerin doğru geometrik kavramlar oluşturma becerileri ile bu kavramlara dayalı ispat yapma başarıları üzerindeki etkilerini incelemişlerdir. Araştırma, öğrencilerin geometrik kavram tanımlarını anlama düzeylerinin, bu tanımlar doğrultusunda oluşturdukları ispat süreçleri üzerindeki etkilerini ortaya koymayı amaçlamaktadır. Bu kapsamda, öğrencilerin geometrik tanımlar hakkındaki bilgi düzeyleri ile bu tanımların matematiksel ispat içerisindeki rolüne dair farkındalıkları değerlendirilmiştir. Çalışmanın kuramsal çerçevesi, “kavram tanımı” (concept definition) ve “kavram imgesi” (concept image) kavramları temelinde şekillendirilmiştir. Bu çerçevede kavram tanımı, öğrencilerin matematiksel bir kavramı nasıl sözlü olarak ifade ettiklerini belirtirken kavram imgesi, bireylerin zihninde bu kavrama dair oluşan örnekler, özellikler, şekiller ve deneyimlerin bütününe ifade etmektedir. Özellikle geometri öğretiminde bu iki kavramsal yapının birbiriyle örtüşmemesi, öğrencilerin kavramsal eksiklikler yaşamalarına yol açabilmektedir. Araştırma, İsrail’de bir Arap lisesinde öğrenim görmekte olan 91 on birinci sınıf öğrencisi ile gerçekleştirilmiştir. Nicel veri toplama aracı olarak özgün biçimde geliştirilen bir anket uygulanmış, ayrıca katılımcıların yaklaşık %10’u ile yarı yapılandırılmış görüşmeler gerçekleştirilerek nitel veri elde edilmiştir. Bu yöntemle hem nicel hem de nitel analiz yöntemleri bütünleştirilerek daha derinlemesine bir değerlendirme yapılmıştır. Elde edilen bulgular, öğrencilerin çoğu durumda yalnızca aşına oldukları ve prototipik olarak gördükleri örneklerle sınırlı kaldıklarını göstermektedir. Bu durum, öğrencilerin daha soyut kavramlara

ulaşmalarını ve geçerli ispatlar geliştirmelerini güçleştirmektedir. Örneğin, dik üçgeni sadece dik kenarları yatay veya düşey doğrultuda olan biçimiyle ilişkilendiren öğrenciler, bu yaklaşım nedeniyle diğer örneklerde ispat yapmada zorlanmışlardır. Araştırmacılar, öğrencilerin kavram tanımlarında sıklıkla karşılaştıkları üç temel problemi tanımlamışlardır: “tam olmayan tanım”, “ekonomik olmayan tanım” ve “eş değer tanımları kabul edememe”. Tam olmayan tanımlar, ispat süreçlerinde eksik veya hatalı çıkarımlara neden olmakta; buna karşılık gereğinden fazla bilgi içeren ekonomik olmayan tanımlar, öğrencilerde kavramsal yükü artırarak bilişsel karmaşaya yol açmaktadır. Bu bağlamda tanımların yalın fakat yeterli düzeyde bilgi içeren “ekonomik” biçimde oluşturulmasının önemi vurgulanmıştır. Ayrıca öğrencilerin “geometrik doğru tanım”ı oluşurmada ciddi eksiklik yaşadıkları görülmüştür. Bu eksiklik, öğrencilerin tanımın mantıksal yapısını kavrayamamaları ile ilişkilendirilmiştir. Örneğin, paralelkenar tanımında yer alması gereken “karşılıklı kenar çiftleri paraleldir” ifadesi, öğrenciler tarafından yalnızca “bir çift kenar paraleldir” şeklinde eksik biçimde ifade edilmiştir. Bu durum, öğrencilerin eksik tanımları geçerli sayarak yanlış ispatlar yapmalarına neden olmaktadır. Çalışmada dikkat çekilen diğer önemli bir bulgu, öğrencilerin farklı fakat matematiksel olarak eş değer tanımları kavrama ve kabul etme konusunda yaşadıkları güçlüklerdir. Örneğin, bir dörtgenin “üç açısı dik açıdır” ifadesi ile “paralelkenar olup bir açısı diktir” ifadesi bazı durumlarda aynı anlama gelebilmektedir. Ancak öğrenciler, bu tür tanımların eş değerliğini fark edememekte ve bu durum ispat süreçlerine olumsuz yansımaktadır. Literatürde bu durumu destekleyen pek çok çalışma bulunmaktadır. Özellikle Vinner, Hershkowitz ve Tall tarafından 1980’li ve 1990’lı yıllarda gerçekleştirilen araştırmalar, kavram tanımlarının yapısal özellikleri ve öğrenme sürecindeki rolü konusunda önemli kuramsal katkılar sunmuştur. Tanımın yalnızca dilsel bir ifade olmadığı; öğrencinin kavramı sınıflandırma, örnekleme ve ispat etme kapasitesini şekillendiren temel bir yapı olduğu vurgulanmaktadır. Çalışmanın genel sonuçları, öğrencilerin geometrik kavramlara dair sahip oldukları tanım anlayışlarının, ispat yapabilme becerileri üzerinde doğrudan etkili olduğunu göstermektedir. Kavram tanımı sunulsa dahi öğrenciler, ispatın bu tanıma dayandığı mantıksal yapıyı yeterince dikkate almamaktadır. Öğrenciler dört temel zorluk yaşamaktadır: Birincisi, eksik tanımları doğru kabul ederek yanlış ispatlar yapmalarıdır. İkincisi, ekonomik olmayan tanımlar karşısında mantıksal ilişkileri kurmakta zorlanmalarıdır. Üçüncüsü, eş değer tanımları kavrayamama ve bu tanımların ispat açısından aynı geçerliliğe sahip olduklarını içselleştirememe durumlarıdır. Dördüncüsü ise kapsayıcı ilişkileri kavramada ve yapılandırıcı tanımların içsel yapısını anlayarak kavramsal bütünlük

oluşturmada yaşadıkları güçlüklerdir. Bu durumlar, öğrencilerin parçalı bir kavram görüşü geliştirmesine ve ispat süreçlerinde mantıksal tutarsızlıklar yaşamasına yol açmaktadır.

Araştırmanın sonunda, elde edilen bulgular doğrultusunda bazı öneriler sunulmuştur. Gelecek çalışmalarda farklı sosyokültürel geçmişe sahip öğrencilerin veya öğretmen adaylarının da dâhil edildiği geniş örneklem grupları ile araştırmalar yapılması tavsiye edilmiştir. Ayrıca sınıf içi gözlem gibi nitel yöntemlerin daha çok kullanılması ve öğretmen-öğrenci etkileşimlerinin derinlemesine incelenmesi önerilmiştir. Öğretim uygulamaları açısından, geometri eğitiminin yıllara yayılan bütüncül bir yapıda sunulması, öğrencilere tanıma dayalı örnek ve karşı örnek üretme görevleri verilmesi, ayrıca öğrencilerin ispat süreçlerinde "Neden?" sorusuna mantıklı açıklamalar getirmeleri yönünde teşvik edilmeleri gerektiği vurgulanmıştır. Bu yaklaşım, öğrencilerin yalnızca kavramları tanımaları değil, aynı zamanda bu kavramları ispat süreçlerine nasıl entegre edeceklerini de anlamalarına katkı sağlayacaktır.

David Tall ve Shlomo Vinner (1981) tarafından gerçekleştirilen bir çalışmada, bireylerin belirli bir matematiksel kavrama ilişkin zihinsel temsilleri “kavram imgesi (concept image)”, bu kavramı tanımlamak amacıyla kullanılan sözel ya da sembolik ifadeler ise “kavram tanımı (concept definition)” şeklinde kavramsallaştırılmıştır. Çalışma, özellikle limit ve süreklilik gibi temel matematiksel kavramlar ekseninde bu iki yapının öğrenciler arasında nasıl farklılaştığını ve bu farklılıkların bilişsel süreçlerde ne tür çatışmalara yol açtığını ayrıntılı biçimde ortaya koymaktadır. Araştırmada, kavram imgesinin bireyin önceki öğrenme deneyimleri, zihinsel temsilleri ve kavramla ilgili çağrışımlarının toplamı olduğu vurgulanmaktadır. Bu yapılar, bireyden bireye farklılık gösterebilmekte ve çoğu zaman resmî kavram tanımı ile örtüşmemektedir. Bu uyumsuzluk, özellikle yeni kavramlarla karşılaşıldığında veya karmaşık işlemler yürütüldüğünde bilişsel çatışmalara neden olabilmektedir. Kavram tanımı ise kavramın kesin ve açık bir biçimde tanımlanmasına olanak sağlayan, genellikle matematiksel topluluk tarafından üzerinde uzlaşılan yapıdır. Araştırmacılar, öğrencilerin bir kavramı anlamlandırırken kişisel deneyimlerine dayalı olarak geliştirdikleri tanımlar ile resmî tanımlar arasında belirgin farklar olduğunu belirtmektedir. Bu doğrultuda “kişisel kavram tanımı (personal concept definition)” ve “resmî kavram tanımı (formal concept definition)” ayrımı, öğrenme süreçlerinde karşılaşılan bilişsel engellerin temelini oluşturmaktadır. Öğrencinin, deneyimlerine dayalı bir dille oluşturduğu tanım, resmî tanım ile örtüşmediğinde kavramın doğru şekilde uygulanması da sekteye uğrayabilmektedir. Süreklilik ve limit kavramları özelinde yapılan analizlerde,

öğrencilerin zihninde oluşan kavramsal anlamların, resmî tanımlardan önemli ölçüde farklılık taşıdığı görülmektedir. Örneğin, “ $s_n \wedge s$ ” biçimindeki bir limit ifadesi, bazı öğrenciler tarafından “sn hiçbir zaman s’ye eşit olamaz” şeklinde yanlış anlaşılabilir. Bu tür yorumlar, kavram imgesi ile kavram tanımı arasındaki tutarsızlıkların öğrenmeyi nasıl olumsuz etkilediğini açıkça göstermektedir. Yazarlar, öğrencilerin zihninde yer etmiş kavramsal temsillerin, onların öğrenme süreçlerinde farkında olmadan rehberlik ettiğini ve bu temsillerin çoğu zaman resmî tanımlarla çeliştiğini belirtmektedir. Örneğin, çıkarma işlemini yalnızca pozitif sayılarla ilişkilendiren bir öğrenci, negatif sayılarla işlem yaparken kavramsal düzeyde çatışma yaşayabilmektedir. Bu tür deneyimler, öğrencilerin geçmiş öğrenmeleri ile yeni kavramsal yapılar arasında uyumsuzluk yaratarak öğrenmenin önünde engel oluşturur. Araştırmada dikkat çekilen önemli bir nokta da kavram imgesinin kendi içinde de çatışmalar barındırabileceğidir. Örneğin, bir öğrenci aynı cebirsel ifadeyi çözmek için iki farklı yöntemi çelişkili biçimde kullanabilir ancak bu çelişkinin farkında olmayabilir. Bu durum, öğrencinin doğru sonuca ulaşsa bile kavramsal tutarlılığı sağlayamamasına yol açar. Bazı durumlarda bu tür çatışmalar, yalnızca bir rahatsızlık hissi olarak tezahür edebilir ve öğrenciler, bu huzursuzluğun kaynağını ancak zamanla fark edebilir. Özellikle limit ve süreklilik konularında yaşanan kavramsal çatışmaların, genellikle kavram imgesi içerisinde yer alan ancak resmî tanımlarla örtüşmeyen öğelerden kaynaklandığı belirtilmiştir. Örneğin bazı öğrenciler, V_2 ’yi karmaşık sayı olarak görmezken aynı zamanda onu “imajiner kısmı sıfır olan karmaşık sayı” şeklinde tanımlayabilmektedir. Bu tür çelişkili anlayışlar, öğrencinin aynı kavramı farklı bağlamlarda farklı şekillerde yorumlamasına ve böylece kavramsal çatışma yaşamasına neden olmaktadır. Araştırmanın bulguları, kavram tanımının yalnızca ezberlenmesinin yeterli olmadığını, öğrencinin bu tanımı kendi bilişsel yapısına entegre edebilmesi gerektiğini ortaya koymaktadır. Aksi halde öğrenci, formel tanımı bilse dahi onu içselleştiremeyecek ve etkin biçimde kullanamayacaktır. Bu durum, öğretim süreçlerinin yalnızca tanım aktarımına değil, aynı zamanda öğrencinin kavramsal yapılarını derinleştirmeye yönelik şekilde düzenlenmesi gerektiğine işaret etmektedir. Öğrenciler, zaman zaman güçlü sezgisel kavram imgelerine sahip olsalar da bu imgeler resmî tanımlarla uyuşmadığında, öğrencinin teoremleri anlaması kolaylaşsa bile bu teoremlerin ispatlarını kavraması zorlaşmaktadır. Böyle bir durumda, başarılı öğrenciler dahi analiz alanındaki soyut yapılar karşısında daha şüpheli bir tutum sergileyebilir. İleri düzeyde konulara geçildikçe öğrencilerin kavramları zihinsel imgelerle temsil etmesi güçleşir ve bu temsillerin doğruluğuna olan güven azalır. Kavram imgeleri, zamanla sezgisel ama formel tanımla

çelişen yapılar haline gelebilir. Örneğin, her noktada sürekli ama hiçbir noktada türevlenemeyen bir fonksiyonun ya da türevi mevcut ancak süreksiz bir fonksiyonun nasıl zihinde canlandırılacağı gibi sorular bu çatışmaların açık göstergesidir. Bruner'in görüşlerine atıfla, görsel temelli düşüncenin kavramsal gelişimi sınırlandırabileceği ve öğrencilerin soyut ve sembolik düzeye geçmekte zorlanabileceği ifade edilmektedir. Bu bağlamda, yetersiz kavram imgeleri nedeniyle soyut matematiksel düşünme gelişimi sekteye uğrayabilmekte, kavram tanımına aykırı ancak zihinsel olarak güçlü imgelerin baskınlığı öğrencinin formel teorileri içselleştirmesini zorlaştırmaktadır.

Tall ve Vinner (1981), kavram oluşumu sürecinin yalnızca kavram tanımını ezberlemekten ibaret olmadığını, bunun ötesinde bireyin zihninde bu kavrama ilişkin bir kavram imajı (concept image) inşa etmesi gerektiğini vurgulamışlardır. Yazarlara göre, bir kavramı gerçekten anlayabilmek, o kavrama dair zihinsel bir imgeye sahip olmakla mümkündür. Örneğin, bir kümenin kuvvet kümesinin, o kümenin tüm alt kümelerinin kümesi olduğunu bilmek, bireyin gerçekten bu alt kümeleri inşa edememesi hâlinde anlamlı bir öğrenme oluşturmaz. Bu nedenle, "kuvvet kümesi" kavramına ilişkin kavram imajı, bireyin daha önceki alt küme oluşturma deneyimlerinden kaynaklanan zihinsel temsilleri içerebilir. Çalışmada, günlük yaşamdaki pek çok kavramın (ev, portakal, kedi vb.) herhangi bir tanım gereksizsin edinildiği belirtilmiştir. Ancak bazı kavramlar -hatta günlük kavramlar dahi- tanımlar aracılığıyla öğrenilebilir. Örneğin "orman" kavramı, küçük bir çocuğa "bir arada duran birçok ağaç" şeklinde tanıtıldığında bu tanım, çocuğun zihninde bir kavram imajının oluşmasına yardımcı olabilir. Fakat bu imaj bir kez oluştuğunda, söz konusu tanım artık gereksiz hâle gelir; kavramı anlamlandırmak için tanımın aktif olarak hatırlanması gerekmez. Yazarlar, bu durumu "iskele (scaffolding) metaforu" ile açıklamışlardır: Nasıl ki bir bina inşa edildikten sonra dıştaki iskele sökülüyorsa kavram imajı oluştuğunda da tanım arka planda kalır. Bu yaklaşım, kavram tanımlarının öğrenmenin ilk evrelerinde destekleyici bir araç olduğunu ancak anlamlı öğrenmenin, bireyin zihinsel kavram yapısını inşa etmesiyle gerçekleştiğini ortaya koymaktadır.

Tall ve Vinner (1981), "kavram tanımı"nı bir kavramı belirtmek için kullanılan sözcükler bütünü olarak tanımlar. Kavram tanımı, öğrenme sürecinde bireyin kavrama dair zihinsel yapısını (kavram imgesini) destekleyici ve düzenleyici bir rol oynar. Araştırmacılar bu tanımı ikiye ayırmıştır:

- **Kişisel Kavram Tanımı** (Personal Concept Definition): Öğrencinin, kendi zihninde canlanan (uyarılan) kavram imgesine göre oluşturduğu tanımdır.

- **Resmî Kavram Tanımı** (Formal Concept Definition): Matematik topluluğu tarafından kabul görmüş ve standartlara dayanan tanımdır.

Edwards ve Ward (2004), öğrencilerin matematiksel tanımları kullanma biçimlerini inceledikleri çalışmalarında, tanımların yalnızca kavramları açıklayan araçlar olarak değil, aynı zamanda matematiksel düşünmenin temel yapı taşları olduğunu vurgulamışlardır. Araştırmalarında, öğrencilerin çoğunlukla tanımların gerektirdiği tüm koşulları dikkate almak yerine, tanımlarla ilgili kişisel örneklerine veya sezgisel yargılarına dayandıkları görülmüştür. Bu durum, öğrencilerin resmî matematiksel tanımları uygularken hatalar yapmalarına neden olmaktadır. Özellikle geometri gibi görsel öğelerin ağır bastığı alanlarda, öğrencilerin kavramlara ilişkin kendi zihinsel imgeleri (concept image) ile resmî tanımlar (concept definition) arasında ciddi tutarsızlıklar olabilmektedir. Makalede, öğrencilerin “bir tanımın doğruluğunu test etmek” ile “bir tanımı bir örnek üzerinden yorumlamak” arasında ayırım yapamadıkları ve bunun kavramsal hatalara yol açtığı vurgulanmaktadır. Bu bağlamda, tanımların öğretiminde yalnızca sözel ifadelerin yeterli olmadığı; tanımların işlevi, sınırları ve kullanım bağlamlarının da açık biçimde ele alınması gerektiği ifade edilmektedir.

Chinnappan ve Lawson (2005), öğretmenlerin sahip olduğu geometrik içerik bilgisi ile öğretimsel geometri bilgisini analiz etmek amacıyla bir çerçeve önermektedir. Çalışmada, öğretmenlerin geometri konularını kavrayış düzeylerinin, bu bilgileri sınıf ortamında nasıl aktardıklarıyla yakından ilişkili olduğu vurgulanmaktadır. Yazarlar, öğretmenlerin geometrik bilgilerini örgütlenme biçimlerinin, öğretim sırasında öğrencilerin anlayışını nasıl etkilediğini değerlendirmiştir. Araştırma bulguları, güçlü kavramsal örgütlenmeye sahip öğretmenlerin, öğrencilere daha açık, tutarlı ve ilişkilendirilmiş açıklamalar sunabildiğini göstermektedir. Ayrıca, öğretmenlerin geometri bilgisinin yalnızca içerik bilgisi ile sınırlı kalmaması, bu bilginin öğrencilerin tanım yapma becerileri bağlamına nasıl uyarlanacağını bilmenin de en az içerik kadar önemli olduğu vurgulanmaktadır. Bu çerçevede geliştirilen model, öğretmen eğitimi programlarında geometri öğretimine yönelik bilgi bileşenlerinin değerlendirilmesinde kullanılabilecek kapsamlı bir araç sunmaktadır.

Tall ve Vinner (1981), öğrencilerin bir kavrama dair sahip oldukları kavram imgesi ile bu kavramın resmî tanımı arasında çelişkiler olabileceğini ve bu durumun kavramsal öğrenmeyi olumsuz etkileyebileceğini belirtmiştir. Bu çelişkiye neden olan kavramsal bileşenler, “potansiyel çatışma faktörü” olarak tanımlanmıştır. Eğer öğrencinin zihnindeki örnekler, kavramın resmî tanımıyla uyumsuzsa öğrencinin kavrama yönelik tepkisi

öğretmenin beklentisiyle örtüşmeyebilir (Tall, 1988; Vinner ve Dreyfus, 1989). Bu durum, özellikle geometrik şekillerin tanım ve prototipik örneklerle ilişkilendirilmesinde sıkça karşılaşılan bir sorundur.

Kavram tanımı ile kavram imgesi arasında ideal durumda çift yönlü bir etkileşim beklenir. Ancak Vinner (1991), öğretmenlerin çoğunlukla bu ilişkinin tek yönlü olduğunu varsaydığını belirtir. Yani öğretmenler, yalnızca kavram tanımını vererek öğrencilerin doğru kavram imgesine ulaşacağını düşünürler fakat uygulamada bu her zaman geçerli değildir. Vinner (1991), kavram tanımının özellikle problem çözme ve görev performansı süreçlerinde önemli olduğunu vurgular. Öğrencilere verilen bir problem, hem kavram imgesini hem de kavram tanımını harekete geçirebilir. Ancak öğrenciler, çoğu zaman kavram tanımını göz ardı ederek sadece kendi deneyimlerine dayalı imgeye başvururlar ve bu da hatalı sonuçlara yol açabilir. Ayrıca öğrenciler, günlük yaşamdaki alışkanlıklarına bağlı olarak kavram tanımına başvurmadan sezgisel cevaplar verebilir. Bu durum “potansiyel çatışma faktörleri”nin ortaya çıkmasına neden olur. Tall ve Vinner (1981), bir kavram tanımının, öğrencinin zihnindeki kavram imgesiyle veya diğer tanımlarla çeliştiğinde bunun bir öğrenme engeli oluşturabileceğini ifade eder. Öğrencinin bu çelişkiyi fark etmesi, doğru kavram imgesine ulaşması için gereklidir. Vinner (1991), teknik bağlamda (matematiksel öğrenme gibi) kavram tanımlarının kullanılmasının zorunlu olduğunu belirtir. Günlük yaşamda tanıma başvurmadan da kavramlar kullanılabilirken teknik alanlarda bu durum hatalara neden olabilir. Örneğin, “Tüm dikdörtgenler arasında çevresi aynı olanlar içinde, en büyük alana sahip olan kare şeklindedir.” Bu tür cümlelerde kavram tanımına başvurmadan doğru sonuca ulaşmak mümkün değildir. Sonuç olarak kavram tanımları, yalnızca kavramları tanımlamak için değil, aynı zamanda öğrencilerin hatalı kavram imgelerinden uzaklaşmasını sağlamak ve matematiksel dili günlük dilden ayırarak daha teknik bir düşünme biçimi geliştirmek için vazgeçilmezdir (Vinner, 1991).

Furinghetti ve Paola (2002), dinamik geometri yazılımı Cabri-Geometre kullanılarak yürütülen bu çalışmada, öğrencilerin dörtgenleri tanımlama ve sınıflandırma süreçlerinde gösterdikleri bilişsel davranışları incelemişlerdir. Araştırma kapsamında 21 lise öğrencisinin katılımıyla gerçekleştirilen deneysel etkinlikte öğrencilerin, çoğunlukla tanım şekillerin dış görünüşüne dayandırdıkları ve figüral imgeler üzerinden karar verdikleri görülmüştür. Öğrencilerin kare figürünü dörtgenler ailesinin başlangıç noktası olarak görmeleri ve diğer dörtgenleri onun özelliklerinden sapmalarla tanımlamaları, kavramsal hiyerarşiye dair içsel bir terslik olduğunu ortaya koymuştur. Pek çok öğrenci, çizdiği şeklin geometrik olarak

doğru olup olmadığını test etmek yerine, yalnızca Cabri'nin onayladığı makro yapıya güvenmiştir; bu da tanımın geçerliliği yerine görsel bütünlüğün ön planda tutulduğunu göstermektedir. Özellikle sürüklenme testinin kullanılmaması, öğrencilerin şeklin tanım özelliklerinin korunup korunmadığını sınamada yetersiz kaldıklarını göstermiştir. Bazı öğrenciler ise daha yüksek düzeyde düşünme becerisi göstererek şekli simetrilerle oluşturmuş, ardından bu yapı üzerinden tanım üretmiş ve özellikleri sıralayarak sınıflandırmaya gitmiştir. Ancak genel eğilim, öğrencilerin geometrik nesneleri yalnızca birer çizim ya da görsel örüntü olarak algıladığını, tanım ve teorik düşünme süreçlerinden uzaklaştığını göstermiştir. Çalışma sonucunda, dinamik ortamların öğrencinin sezgisel fikirlerini açığa çıkarma, tanım kavramına ilişkin farkındalık oluşturma ve öğretmenin öğrencideki figüral kavram-nesne ayrımını teşhis etmesine yardımcı olma açısından güçlü bir araç olduğu vurgulanmıştır. Bununla birlikte, Cabri yazılımının imkânlarının pedagojik olarak etkili kullanılabilmesi için öğrencilerin sadece araçla değil, araç üzerinden yürütülen sorgulama süreçleriyle de desteklenmesi gerektiği belirtilmiştir. Sonuç olarak bu çalışma, öğrencilerin tanım yaparken yüzeysel imgelerden yola çıkmalarının teorik düşünme eksikliğinden kaynaklandığını; etkili geometri öğretiminin, tanımın sadece sözel olarak değil, mantıksal bütünlük içinde yapılandırılması gerektiğini ortaya koymaktadır.

Elia ve Gagatsis'in (2003) gerçekleştirdiği bir başka araştırma, erken yaşlardaki çocukların çokgen şekilleri (özellikle üçgen, kare ve dikdörtgen) nasıl algıladığını ve bu şekillerin öğretiminde geometrik modellerin ne derece etkili olduğunu ortaya koymayı amaçlamaktadır. Çalışma, 4-7 yaş arasındaki çocukların çokgen şekillerle kurdukları zihinsel temsilleri anlamak ve bu temsillerin öğretimsel süreçlere olan yansımalarını değerlendirmek üzere yapılandırılmıştır. Araştırmada 0-boyutlu (noktalar), 1-boyutlu (doğru parçaları) ve 2-boyutlu (çokgen biçimler) çokyüzlüler temel alınmıştır. Katılımcı çocuklardan üçgen, kare ve dikdörtgen biçimlerini kullanarak her biri bir öncekinden büyük olacak şekilde artan bir şekil dizisi oluşturmaları istenmiştir. Elde edilen veriler, Gras'ın İmlikatif İstatistiksel Modeli kullanılarak analiz edilmiştir. Sonuçlara göre çocukların iki temel strateji benimsedikleri belirlenmiştir: Birincisi, şeklin iki boyutunu aynı anda büyütürken formu koruma stratejisi; ikincisi ise yalnızca bir boyutu artırarak şekli genişletme stratejisidir. Bu iki yaklaşımın, çocukların geometrik düşünme becerilerinin gelişimsel düzeylerini yansıttığı ve bilişsel aşamalarla ilişkili olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Araştırmada dikkat çeken bulgulardan biri de çocukların dikdörtgenlerle çalışırken karelerle çalıştıkları durumlardan daha esnek ve etkili stratejiler sergilemeleridir. Bu durum,

çocukların kare ile dikdörtgen arasındaki kavramsal ilişkiyi tam anlamıyla kuramadıklarını göstermektedir. Birçok çocuk, kareyi dikdörtgenin özel bir hali olarak değil, tamamen ayrı bir şekil kategorisi olarak değerlendirmektedir. Bu yanlış sınıflandırmanın temelinde, çocukların şekil öğrenim süreçlerinde karşılaştıkları yüzeysel, görsel odaklı ve kimi zaman yanlış yönlendirici deneyimlerin etkili olduğu ifade edilmektedir. Özellikle televizyon, kitaplar, dijital içerikler ve hatta öğretmen yönlendirmeleri, şekilleri birbirinden bağımsız kategoriler halinde sunmakta ve bu da kavramsal bütünlüğü engellemektedir. Hannibal (1999), küçük yaştaki çocukların “kare bir dikdörtgen değildir” düşüncesini çok erken yaşlarda benimsediğini belirtmekte; bu inancın, öğrenmenin ilerleyen aşamalarında çocuklar için bir tür bilişsel engel (obstacle) haline geldiğini vurgulamaktadır. Duroux (1983) tarafından tanımlanan bu tür engeller, bireyin sahip olduğu mevcut bilgilerin yeni durumlara uyum sağlamakta yetersiz kaldığı durumlarda hata üretmesine neden olur. Gagatsis (1992), bu engelin aşılması için bireyin eski bilgisini reddetmesi gerektiğini ve bunun uyum sağlamaktan daha zor bir süreç olduğunu belirtmiştir.

Bu bağlamda, çocukların kareyi dikdörtgenin özel bir türü olarak kavrayamaması, şekiller arasındaki kavramsal bağlantıları keşfetmelerine engel teşkil etmektedir. Çalışmanın ortaya koyduğu bir diğer önemli nokta ise öğretim sürecinin yalnızca şekillerin adlandırılması ile sınırlı kalmaması gerektiğidir. Bunun yerine, çocuklara şekillerin yapısal özelliklerinin (örneğin, kenar uzunluğu, açı ölçüleri gibi) sistematik ve açık bir biçimde sunulması gerektiği vurgulanmaktadır. Bu durum, çocukların görsel düzeyden tanımsal düzeye geçişlerini destekleyecek bir yaklaşım gerektirdiğini göstermektedir. Kuramsal altyapı olarak araştırma, van Hiele ve Clements’in geometrik düşünmenin gelişimsel evrelerine dair görüşlerinden yararlanmıştır. Van Hiele düzeylerinin öğrencilerin geometrik düşünme gelişimini açıklamada güçlü bir kuramsal zemin sunduğu birçok çalışmayla ortaya konmuştur. Bu bağlamda Burger ve Shaughnessy (1986), Van Hiele modelini ampirik olarak sınamak amacıyla ilköğretimden üniversiteye kadar farklı yaş gruplarından öğrencilerle klinik mülakatlar gerçekleştirmiştir. Araştırma bulguları, öğrencilerin geometrik şekilleri tanıma, analiz etme, sınıflama ve tanımlama becerilerinin Van Hiele’nin tanımladığı beş gelişim düzeyine karşılık geldiğini göstermektedir. Özellikle öğrencilerin şekilleri sadece görünümüne göre tanıdıkları görselleştirme düzeyinden başlayarak şekillerin özelliklerini fark ettikleri analiz düzeyine, bu özellikler arasında ilişki kurabildikleri soyutlama düzeyine ve buradan da mantıksal çıkarımlar yapabildikleri çıkarımsal düzeye kadar ilerleyebildikleri ortaya konmuştur. Bu bulgular, öğrencilerin şekil prototiplerine dayalı kavram imgelerinden

hareketle daha soyut ve tanıma dayalı düşünce biçimlerine geçiş yaptıklarını göstermekte, dolayısıyla Van Hiele modelinin geometri öğretiminde rehber alınabilecek etkili bir çerçeve sunduğunu desteklemektedir (Burger ve Shaughnessy, 1986). Van Hiele kuramına göre çocuklar öncelikle şekilleri görsel bütünlüklerine göre tanır ancak zamanla bu şekillerin ait olduğu sınıfları ayırt etme ve kavramsal ilişkileri kurma becerisi geliştirmelidir. Örneğin, tüm karelerin dikdörtgen olduğu yönündeki düşünce, ancak tanımlayıcı veya çıkarımsal düzeye ulaşıldığında anlam kazanabilir.

Kay (1986) tarafından gerçekleştirilen bir çalışma, küçük yaştaki öğrencilerin dörtgen kavramlarını nasıl geliştirdiklerini inceleyerek van Hiele geometrik düşünme teorisinin geçerliliğini sorgulamayı amaçlamıştır. Araştırma, 6-7 yaş aralığında 16 birinci sınıf öğrencisiyle yürütülmüş; 10 oturumluk öğretim süreci boyunca dörtgen ^ dikdörtgen ^ kare sıralamasıyla yapılandırılmış, doğrudan sınıflandırma ilişkilerine odaklanan, terminolojik olarak "dörtgen", "dikdörtgen-dörtgen" ve "kare-dikdörtgen" kavramlarının kullanıldığı bir öğretim dizisi uygulanmıştır. Öğretimde soru-cevap tekniği, kavramların tekrar edilmesi, tel modeller ve yapısal materyaller (Construct-O-Straws) gibi somut araçlar öğrencilerin kavramsal gelişimini desteklemiştir. Nicel ve nitel verilere göre, öğrenciler öğretim sonrası dörtgen türlerine ait daha fazla özelliği tanımlayabilmiş ve 15 öğrenciden 8'i, ön testte hiç tanıyamadıkları hiyerarşik sınıflandırmaları son testte doğru şekilde kurabilmiştir. Bulgular, van Hiele teorisinin küçük yaş grubundaki çocukların kavramsal gelişimini yalnızca belirli koşullarda (özülden genele öğretim) açıklayabildiğini ancak genelden özgülü giden öğretim süreçlerinde yetersiz kaldığını ortaya koymuştur. Ayrıca çalışma, bazı geometrik kavramların çocuklar tarafından doğrudan tümevarımsal ya da tündengelimsel yollarla öğrenildiğini ve bu yolların kavramın doğasına bağlı olarak değiştiğini öne sürerek kavramsal öğrenmenin iki ayrı bilişsel sürece dayanabileceğini göstermiştir.

Cannizzaro ve Menghini (2006), Van Hiele kuramını temel alarak lise düzeyindeki sekiz paralel sınıfta yürüttükleri çalışmalarında, öğrencilerin geometrik şekilleri tanıma süreçlerini analiz etmiş ve bu süreci öğretmenlerin bakış açısıyla değerlendirmiştir. Araştırmada, Geometri öğretiminin yalnızca şekillerin görsel algılanmasıyla sınırlı kalmaması, tanıma ve tanımsal düşünmeye geçişin desteklenmesi gerektiği vurgulanmaktadır. Öğrencilerin şekil algısından tanıma düzeyine geçebilmeleri için öğretmenlerin Van Hiele düzeylerini dikkate alarak öğretim tasarımları gerektiği öne sürülmüştür. Bu kapsamda öğretmenlerle iş birliği içinde yürütülen tartışma ortamlarında, öğrenci çalışma kâğıtları üzerinden yapılan kolektif analizler, öğretmenlerin öğretim

sürecini yeniden yapılandırmasına katkı sağlamıştır. Araştırma, Van Hiele kuramının öğretmenlerin öğretim hedeflerini ve stratejilerini daha bilinçli ve yapılandırılmış şekilde planlamalarına yardımcı olabileceğini ve öğrencilerin kavramsal ilerlemelerine rehberlik edecek, etkili bir yaklaşım sunduğunu ortaya koymuştur. Benzer biçimde, Crowley (1987) de Van Hiele kuramı doğrultusunda öğretim uygulamaları üzerine çalışmalar yapmıştır.

Gal ve Lew'un (2008) çalışmalarında, Van Hiele geometrik düşünme düzeylerinin özellikle 3. düzeyine (mantıksal akıl yürütme) ulaşamayan öğrencilerin özel paralelkenarları (ör. dikdörtgen, eşkenar dörtgen, kare) doğru biçimde sınıflandırmalarını sağlayacak alternatif bir öğretim stratejisi olan bypass (dolaylı geçiş) yöntemi geliştirilmiştir. Araştırma kapsamında, Kore'deki 137 ortalama-düşük başarılı dokuzuncu sınıf öğrencisinin dörtgenleri paralelkenar/olmayan şeklinde sınıflandırmaları istenmiş, yapılan hata analizleri sonucunda özellikle prototip dışı örneklerde yüksek oranlı kavram yanılgıları tespit edilmiştir. Müdahale süreci, dinamik görsel dönüşümler, figürlerin süreklilik içinde değişimi ve çoklu adlandırma (ör. hem dikdörtgen hem paralelkenar) yoluyla öğrencilerin kavramsal imgelerini genişletmeyi amaçlamıştır. Bypass yöntemi, öğrencilerin düzey atlamasını beklemek yerine, onları görsel süreklilik temelli sezgisel bir sınıflandırma sürecine dâhil ederek, doğru sınıflandırmaları mantıksal tanım ya da tümdengelimsel gerekçeye dayanmadan da gerçekleştirebileceklerini öngörür. Bu yaklaşımda öğrencilere, bir şeklin hem “özel” (ör. dikdörtgen) hem de “genel” (ör. paralelkenar) adı olabileceği durumu çelişkili bir bağlamda sunularak kavramsal çatışma yaratılır ve figürün aile içindeki yerinin görsel olarak kabul edilmesi sağlanır. Süreçte prototiplerden başlayarak dinamik geçişlerle şekillerin değişimi gösterilir ve öğrencilerin şekilleri biçimsel değil kavramsal olarak tanınması hedeflenir. Müdahale sonucunda merkez öğrenci (Nua), başlangıçta dikdörtgeni yalnızca “özel” bir şekil olarak görüp, paralelkenar saymazken, sürecin sonunda şeklin paralellik özelliklerine odaklanarak onu doğru biçimde paralelkenar sınıfına dâhil edebilmiştir. Bu çalışma, figüral süreklilik, çoklu adlandırma, kavramsal imge ve sezgisel sınıflandırmanın güçlü birer öğretim stratejisi olarak kullanılabileceğini gösterirken Van Hiele kuramına dayalı düşünmenin alternatif yollarla da desteklenebileceğini ortaya koymaktadır.

Brousseau'nun (1983, 1986) araştırmasında ise “eylem”, “ifade” ve “doğrulama”ya dayalı model kullanımına dair kuramına da yer vermektedir. Bu modele göre, sayı doğrusu gibi geometrik modeller, yalnızca işlemleri gerçekleştirmeye değil, aynı zamanda bu işlemleri anlamaya da hizmet etmektedir. Örneğin, çarpma işlemini sayı doğrusu üzerinde

görselleştirmek, öğrencinin yalnızca sonucu değil, işlemin mantığını da kavramasını kolaylaştırmaktadır. Robertson'un (1984) çokyüzlülerin sürekliliğine dair yaklaşımı da çalışmanın dinamik düşünce boyutunu desteklemektedir. Çocukların sabit şekillerden ziyade, şekillerin geçirdiği dönüşüm süreçlerini gözlemlemeleri onların "dinamik sezgi"lerini geliştirmede önem taşımaktadır. Çalışmada, bir çizgi parçasının zamanla eşkenar üçgene, ardından dar açılı ikizkenar üçgene ve tekrar çizgiye dönüşmesi gibi şekil varyasyonlarıyla bu süreç somutlaştırılmıştır. Bu değişim süreci, çocukların statik biçimler yerine, biçimlerin evrimine odaklanmalarını sağlayarak kavramsal gelişimi desteklemektedir. Sonuç olarak Elia ve Gagatsis'in çalışması, erken yaşlardaki çocukların geometrik kavrayışlarının, şekillerin yüzeysel özelliklerinden çok, bu şekiller arasındaki yapısal ilişkilerin öğretimiyle geliştirilebileceğini ortaya koymaktadır. Bu durum, özellikle dörtgenlerin sınıflandırılması ve tanımlanmasında daha bütüncül ve ilişkisel bir öğretim yaklaşımının gerekliliğine işaret etmektedir. Baktetur, Ayan Cıvak ve Isıksal Bostan (2021) tarafından yürütülen bu çalışma, öğretmen adaylarının dışbükey dörtgenlere ilişkin tanım, sınıflandırma ve kapsama ilişkileri konularındaki doğru ve yanlış kavrayışlarını analiz etmeyi amaçlamaktadır. Araştırma, bir devlet üniversitesinde "Matematik Öğretimi Yöntemleri" dersini alan 20 ortaokul matematik öğretmeni adayı ile yürütülmüş ve nitel araştırma desenlerinden "durum çalışması" kullanılmıştır. Katılımcılar, amaçlı örnekleme yöntemiyle belirlenmiş ve veri toplama aracı olarak dersin başında ve sonunda uygulanan başarı testi kullanılmıştır. Araştırma bulguları, öğretmen adaylarının ders öncesinde dörtgenlerin hiyerarşik sınıflandırılması konusunda ciddi kavram yanlışları taşıdıklarını ortaya koymuştur. Özellikle bazı dörtgen çiftleri arasındaki kapsayıcılık ilişkilerini (örneğin eşkenar dörtgenin yamuk olup olmaması) kurmada güçlük yaşamışlar ve dörtgenlere dair en yalın tanımları oluşturmakta zorlanmışlardır. Ancak dersin ardından bu yanlış anlamaların büyük ölçüde azaldığı ve adayların daha bütünlüklü kavramsal yapılar geliştirdikleri tespit edilmiştir. Çalışmada De Villiers'in (1994) dörtgen sınıflandırma modelinden yararlanılmış, özellikle kapsayıcılık ilişkilerini anlamlandırmak için hiyerarşik sınıflandırma benimsenmiştir. Bu sınıflandırma, dörtgenleri alt-üst ilişkilere göre yapılandırarak örneğin bir karenin dikdörtgen, paralelkenar ve yamuk gibi daha genel kavramların bir alt kümesi olduğunu vurgular. Çalışmanın teorik çerçevesi, Shulman'ın (1987) içerik bilgisi ve pedagojik alan bilgisi (PCK) anlayışı ile Ball ve diğerlerinin (2008) tanımladığı öğretmen bilgi alanları dikkate alınarak oluşturulmuştur. Bu kapsamda, öğretmenlerin hem geometrik şekillerin özelliklerine ilişkin sağlam kavramsal bilgiye sahip olması hem de öğrencilerinin

muhtemel yanlış anlamalarını öngörebilmesi gerektiği vurgulanmaktadır. Geçmiş literatürde de öğretmen adaylarının kare, dikdörtgen, yamuk gibi dörtgenleri tanımlamada ve aralarındaki ilişkileri kurmada zorluk yaşadıkları sıkça rapor edilmiştir. Örneğin, birçok aday karenin dikdörtgen ya da yamuğun bir alt türü olduğunu reddetmiş, bu durum prototipik düşünme eğilimlerine bağlanmıştır. Ancak araştırma, sistematik bir öğretim sürecinin bu tür kavram yanlışlarını azaltabileceğini göstermektedir. Sonuç olarak bu çalışma, öğretmen adaylarının geometrik kavramlara ilişkin bilgilerini geliştirmeye yönelik öğretimsel müdahalelerin etkili olduğunu göstermekte ve dörtgenlerin tanımı, sınıflandırması ve kapsayıcılık ilişkilerine dair daha derinlemesine bir kavrayış kazandırılmasının, öğretmenlik mesleğine hazırlık sürecinde kritik olduğunu ortaya koymaktadır. Ayrıca bu tür kazanımların, adayların kendi öğrencilerinin kavramsal hatalarını fark etme ve buna uygun öğretim planlamaları yapabilme yetilerini geliştireceği öngörülmektedir.

Heinze (2002) tarafından yürütülen farklı bir çalışma, 106 sekizinci sınıf öğrencisinin dörtgenler konusundaki kavramsal bilgi yapılarını inceleyerek, öğrencilerin matematiksel tanımları kavrama düzeylerinin kanıt öğretimine başlarken ne derece yeterli olduğunu araştırmıştır. Araştırmada öğrencilerin, özellikle kare ve dikdörtgen gibi özel dörtgenleri tanımada ve sınıflamada ciddi kavram yanlışları taşıdığı ortaya konmuştur. Öğrencilerin büyük kısmı kareyi dikdörtgen olarak görmemekte, dörtgenleri partisyonel (ayrık) biçimde sınıflandırmakta, hiyerarşik kapsama ilişkilerini tanımamaktadır. Üç ayrı soruda öğrencilerin eş değer tanımları tanıma, karşı örnek verme ve gerekli-yeterli koşulları ayırt etme becerileri ölçülmüş; sonuçlar, tanım bilgisi ile kavramsal imge arasında önemli farklar bulunduğunu ve öğrencilerin genellikle örneklere dayalı yüzeysel düşünme biçimlerinden soyut tanımlara geçemediklerini göstermiştir. “Kare dikdörtgen değildir” gibi partisyonel yargılar, öğrencilerin matematiksel dili yanlış yorumlamasından ve günlük düşünme biçimlerini matematiksel düşünceye aktaramamasından kaynaklanmaktadır. Araştırmanın sonuçları, kavramsal imgelerle tanım bilgisi arasında geçiş kuramayan öğrencilerin kanıta dayalı matematiksel düşünmeye hazır olmadığını ve bu durumun geometri öğretiminde ciddi bir engel oluşturduğunu ortaya koymaktadır. Bu nedenle, dörtgenlerin sınıflandırılmasında hiyerarşik yapıların pedagojik olarak tartışılması ve tanım, imge, kullanım üçlüsünün bilinçli olarak bütünleştirilmesi gerektiği vurgulanmaktadır.

Pickreign (2007) tarafından yapılan bir çalışma, öğretmen adaylarının dikdörtgen ve eşkenar dörtgen kavramlarına ilişkin anlayışlarını incelemiş; 40 katılımcının yalnızca 9’unun dikdörtgeni, yalnızca 1’inin eşkenar dörtgeni eksiksiz tanımlayabildiğini ortaya

koymuştur. Katılımcıların büyük kısmı, şekilleri tanımsal özelliklerine göre değil, görsel prototiplere (örneğin “uzun dikdörtgen”, “yamuk kare”) göre tanımlamış; bu da onların Van Hiele modeline göre 0. düzeyde (görsel tanıma düzeyi) olduklarını göstermektedir. Özellikle eşkenar dörtgenin “yamuk” ya da “elmas” gibi algılanması, figüral imge etkisini yansıtırken dikdörtgenin iki kenarının uzun olması gerektiği yönündeki ifadeler, kareyi dışlayan dar tanımlara işaret etmektedir. Bu durum, öğretmen adaylarının temel geometrik kavramları tanıma ve ilişkilendirme konusunda yetersiz olduklarını ve öğretmen yetiştirme programlarında bu eksikliğin sistematik olarak giderilmesi gerektiğini göstermektedir.

Zeybek’in (2018) gerçekleştirdiği çalışma, ortaokul matematik öğretmenliği eğitimi alan öğretmen adaylarının dörtgenler arası kapsayıcılık ilişkilerini nasıl kavradığını ve bu kavrayışın belirli bir öğretim süreciyle nasıl değişim gösterdiğini incelemiştir. Literatürde öğretmen adaylarının geometriye yönelik kavramsal bilgi eksiklikleri uzun süredir tartışılmakta olup özellikle dörtgenlerin sınıflandırılması ve hiyerarşik ilişkilerinin anlaşılmasında belirgin zorluklar yaşandığı ifade edilmektedir. Zeybek’in çalışması, bu eksiklikleri sadece sıkça ele alınan kare, dikdörtgen ve paralelkenar gibi şekillerle sınırlı tutmamış; aynı zamanda genellikle göz ardı edilen yamuk ve deltoid gibi özel dörtgen türlerini de kapsayarak daha geniş bir çerçevede değerlendirme sunmuştur. Çalışmanın kuramsal temelinde, van Hiele’nin geometrik düşünme düzeyleri, Tall ve Vinner’in “kavramsal imge” kuramı ve Fischbein’in “figüral kavram” yaklaşımı yer almaktadır. Bu yaklaşımlar, bireylerin şekillerle ilgili zihinsel temsillerini nasıl oluşturduklarını, prototiplere dayalı karar verme eğilimlerini ve kavramsal gelişim süreçlerini açıklamada önemli bir çerçeve sunmaktadır. Özellikle öğrencilerin şekilleri tanımlarken soyut tanımlar yerine zihinsel imgelerine başvurma eğilimi, bu kuramsal altyapının temel varsayımlarındandır. Araştırma, Türkiye’deki bir devlet üniversitesinde, ilk sınıfta öğrenim gören 48 öğretmen adayı ile yürütülmüştür. Katılımcılar, araştırmanın uygulandığı dönemde zorunlu bir geometri dersi almaktadır. Bu ders kapsamında beş hafta süren, özel olarak tasarlanmış bir dörtgen öğretim ünitesi uygulanmış; hem bu sürecin öncesinde hem de sonrasında açık uçlu sorulardan oluşan bir anketle öğretmen adaylarının dörtgen bilgisi ve ilişkilendirme becerileri ölçülmüştür. Ayrıca süreç boyunca toplanan yazılı ödevler, sınıf içi etkinlikler ve sınavlar da analiz kapsamına alınmıştır. Verilerin çözümlenmesinde Fujita’nın (2012) dörtgenler arası kapsayıcılık ilişkilerine yönelik bilişsel düzey modeli esas alınmış ancak elde edilen bulgular doğrultusunda bu modelin alt düzeyleri yeniden yapılandırılmıştır. Katılımcıların düşünme biçimleri üç temel düzeye ayrılmıştır: prototipik,

kısmi prototipik ve hiyerarşik. Özellikle kısmi prototipik düzey, kendi içinde alt gruplara bölünerek (örneğin, transitif ilişkiyi anlayan ancak çift yönlü ilişkiyi kuramayan bireyler) daha ayrıntılı analiz yapılmıştır. Çalışmanın başlangıcında, hiçbir öğretmen adayının tam anlamıyla hiyerarşik düzeyde düşünmediği, çoğunun figüral prototiplere dayalı sınıflamalar yaptığı ve yalnızca sınırlı sayıda dörtgen arasında ilişki kurabildiği tespit edilmiştir. Özellikle “yamuk” kavramı, kavramsal karışıklığın en yoğun yaşandığı alanlardan biri olarak öne çıkmıştır. Katılımcılar genellikle yalnızca yamukların prototipik görüntüsüne sahip şekilleri tanıyabilmiş, farklı görünümlerdeki yamukları ya dışlamış ya da yanlış sınıflandırmıştır. Bunun yanında, kare - eşkenar dörtgen - paralelkenar gibi transitif ilişkileri kurmada da ciddi eksiklikler gözlemlenmiştir. Beş haftalık öğretim ünitesi sonunda, öğretmen adaylarının kavrayış düzeylerinde anlamlı gelişmeler kaydedilmiştir. 29 katılımcı hiyerarşik düşünme düzeyine ulaşmış ancak yine de 18 kişinin çift yönlü kapsama ilişkilerini kurmakta zorlandığı ve şekilleri dinamik biçimde zihninde canlandırmada sıkıntı yaşadığı görülmüştür. Bu durum, kavramsal imge ile tanım arasındaki kopukluğun devam ettiğini ve öğretim sürecinin bu boşluğu tamamen kapatamadığını göstermektedir. Çalışma genel olarak, öğretmen adaylarının dörtgenler konusundaki zihinsel temsillerinin büyük oranda prototiplere dayandığını, kavram imgelerinin çoğunlukla sabit ve esnek olmayan yapılarla şekillendiğini ortaya koymuştur. Bu nedenle, öğretim süreçlerinde yalnızca tanımların aktarılması yeterli olmamakta, farklı geometrik biçimlerin temsil edildiği zengin görsel ve yapıcı öğrenme ortamlarının sunulması gerekmektedir. Şekil üzerindeki zihinsel dönüşümleri gerçekleştirebilme, kritik özellikleri koruyarak alternatif temsiller oluşturabilme gibi becerilerin geliştirilmesi ise ancak bu tür yapılandırılmış öğretim uygulamalarıyla mümkün olabilmektedir. Sonuç olarak Zeybek’in bu çalışması, öğretmen adaylarının dörtgenler arası kapsayıcılık ilişkilerini anlama düzeylerini çok boyutlu şekilde değerlendirmiş; öğretim sürecinin bu anlayış üzerindeki etkilerini somut verilerle ortaya koymuştur. Özellikle kavram imgelerinin esnetilmesi, tanım-imgeler arası denge kurulması ve geliştirilmesi açısından bu çalışmanın önerdiği yaklaşım, hem öğretmen yetiştirme hem de geometri öğretimi açısından önemli çıkarımlar sunmaktadır.

Tablo 2.1. Dörtgenler arasındaki kapsayıcılık ilişkilerinin anlaşılma düzeyleri (Kaynak: Zeybek, 2018: 608’den uyarlanmıştır)

Düzyey 1: Prototipik Düzey	Düzyey 2: Kısmi Prototipik Düzey	Düzyey 3: Hiyerarşik Düzey
Düzyeyla İstisnalı Prototipik Düşünme	Düzyey2a: Karşıt yönlü kapsama akıl yürütmesi olmadan hiyerarşik akıl yürütme Düzyey2b: Geçişli düşünme ile prototipik olmayan düşünme Düzyey2c: Geçişli düşünme	Dörtgenler arası tüm kapsama ilişkilerini, geçişli ve prototip dışı örnekleri de dâhil ederek düşünme

Leung (2008) bir çalışmasında, Hong Kong’daki yaklaşık 230 ilkököl öğrencisiyle gerçekleştirilen üç derslik bir müdahale süreci aracılığıyla, dörtgenler arasındaki kapsayıcılık (inclusion) ve geçişlilik (transitivity) ilişkilerinin öğretimi incelenmiştir. Akıllı tahta destekli animasyonlu ve etkileşimli anlatımın, öğrencilerin dörtgenlerin özelliklerini tanımlama ve bunlar arasındaki hiyerarşik ilişkileri (örneğin: karenin dikdörtgen ve eşkenar dörtgen olduğu) akıl yürüterek anlamalarına önemli ölçüde katkı sağladığı bulunmuştur. Öğrenciler ön-testte bu ilişkileri belirleyemezken son-testte yaklaşık %73’ü, şekillerin sahip olduğu özellikler üzerinden kapsayıcı yapıyı mantıksal olarak açıklayabilmiştir. Çalışmada, bazı öğrencilerin kare ve eşkenar dörtgenin ortak özelliklerini anlayarak diyagramlar oluşturduğu, “özellik ekleme/çıkarma” yoluyla şekillerin birbirine dönüşebileceğini kavradığı ve Van Hiele’nin soyutlama düzeyleriyle ilişkili olarak sezgisel-dedüktif akıl yürütmeler geliştirdiği gösterilmiştir. Sonuç olarak, akıllı tahta destekli animasyonlu öğretim, öğrencilerin geometrik kavramları daha derinlikli ve yapılandırılmış biçimde öğrenmesini desteklemekte ve dörtgenler arası ilişkileri anlamada soyuttan somuta giden geleneksel yaklaşıma alternatif olarak kullanılabilecek güçlü bir öğretim stratejisi sunmaktadır.

Cybulski, Oliveira ve Cyrino (2024) tarafından gerçekleştirilen başka bir çalışma, öğretmen adaylarının dörtgenlerin hiyerarşik sınıflandırılması ve bu dörtgenlerin köşegen özelliklerine yönelik kavramsal anlayışlarını incelemiştir. Çalışma kapsamında, ortaokul ve lise düzeyinde öğretmenlik yapacak öğretmen adaylarının, sınıf içi bütün sınıf etkileşimleri çerçevesinde çeşitli görevler aracılığıyla kavramsal gelişimleri gözlemlenmiştir. Bu süreçte elde edilen veriler, öğretmenlerin yazılı yanıtları ve oturumlar sırasında kaydedilen video kayıtları aracılığıyla nitel olarak analiz edilmiştir. Araştırmacılar, dörtgenlerin hiyerarşik sınıflandırmasının öğretmen adaylarının zihinsel modellerinde genellikle prototipik örnekler üzerinden yapılandığını ve bunun sınıflandırma süreçlerini olumsuz etkilediğini ortaya koymuştur. Elde edilen bulgular, öğretmen adaylarının dörtgenleri sınıflarken genellikle

görsel olarak tanındık olan örneklerden yola çıktıklarını, bu nedenle geçerli ancak prototipik olmayan örnekleri dışlayabildiklerini göstermiştir. Örneğin, bir paralelkenarı ancak yatay duran bir dörtgen olarak düşünen katılımcılar, farklı bir konumda çizilmiş olsa bile aynı özellikleri taşıyan bir paralelkenarı doğru şekilde tanıyamamışlardır. Bu durum, kavramsal temsillerin prototiplere sıkı sıkıya bağlı olması nedeniyle ortaya çıkan sınırlılıklardan biri olarak değerlendirilmiştir. Bu sınırlılıkların, kavramsal anlayışın gelişimini engellediği ve öğretmen adaylarının dörtgenleri tanımlama ve sınıflandırma süreçlerinde hatalara yol açtığı vurgulanmaktadır. Çalışmada dikkat çeken bir diğer bulgu, öğretmen adaylarının sınıflandırma sürecinde kavramların tanımlarından çok görsel özelliklerine dayalı akıl yürütme eğiliminde olduklarıdır. Örneğin, köşegenlerle ilgili sorularda, adayların büyük çoğunluğu köşegen uzunluklarının eşitliği ya da köşegenlerin dik kesişmesi gibi özellikleri öncelikli olarak dikkate almış ancak bu özelliklerin hiyerarşik sınıflandırmadaki belirleyiciliği konusunda kavramsal bütünlüğe sahip olmadıkları gözlemlenmiştir. Bu bulgu, kavramsal özelliklerin yalnızca ezbere dayalı bilgiyle değil, mantıksal ilişkilendirmeyle inşa edilmesi gerektiğini ortaya koymaktadır. Araştırma, öğretmen adaylarının kavramları sınıflandırma ve tanımlama süreçlerinin, sıklıkla prototipik fenomen (prototypical phenomenon) ve dikotomik karşılaştırma (dichotomous comparison) gibi bilişsel engellerden etkilendiğini ortaya koymuştur. Prototipik fenomen, belirli kavramların yalnızca en yaygın veya görsel olarak tanındık temsilleri üzerinden anlaşılması durumunu ifade eder. Dörtgenler bağlamında bu durum; kare, dikdörtgen, paralelkenar gibi figürlerin sadece standart görünüşleriyle tanınması, ancak aynı kavramsal özellikleri taşıyan farklı varyasyonlarının dışlanması şeklinde kendini göstermektedir. Çalışma bulgularına göre, bu tür prototipik düşünme biçimi, öğretmen adaylarının kavramları esnek biçimde yapılandıramamasına ve alternatif temsiller arasında geçiş yapamamasına neden olmaktadır. Öte yandan, iki karşıt kavram arasında yapılan kıyaslamalar da bu çalışma kapsamında belirlenen önemli kavramsal sınırlılıklardan biridir. Bu tür karşılaştırmalarda bireyler, iki kavramı tamamen birbirine zıt olarak görür ve sadece bu zıtlık üzerinden değerlendirme yapar. Örneğin, öğretmen adaylarının bazıları, eşkenar dörtgen ve dikdörtgeni karşılaştırırken yalnızca birinin köşegenlerinin dik, diğerinin ise eşit uzunlukta olmasına odaklanmış; oysa bazı durumlarda her iki özelliği de taşıyan kare gibi figürleri gözden kaçırmışlardır. Bu durum, kavramların çok yönlü özellikleri göz önüne alınmaksızın, sınıflandırmanın yalnızca tek bir kritere göre yapılmasının doğurduğu kavramsal daralmayı göstermektedir. Araştırma sürecinde gerçekleştirilen bütün sınıf tartışmalarında, öğretmen

adaylarının tanımlama ve sınıflandırma süreçlerine nasıl yaklaştıkları derinlemesine analiz edilmiştir. Bu etkileşimler sayesinde öğretmen adaylarının ön bilgi, deneyim ve prototipik temsillerden nasıl etkilendikleri daha net bir şekilde ortaya konmuştur. Özellikle köşegenlerle ilgili özelliklerin belirlenmesinde öğretmen adaylarının büyük kısmı, "dik kesişme", "eşit uzunluk", "birbirini ortalama" gibi görsel özelliklere dayanarak karar vermiş ancak bu kararlarını kavramsal tanımlarla ilişkilendirmekte zorlanmışlardır. Bu da kavram imajı ile kavram tanımı arasındaki farkın öğretmen adaylarında ne kadar belirgin olduğunu göstermektedir. Cybulski ve diğerlerinin çalışması, öğretmen adaylarının sınıflandırma süreçlerini şekillendiren bilişsel yapıların ortaya konması bakımından literatüre önemli katkılar sunmaktadır. Özellikle kavramsal haritalar, sınıflandırma şemaları ve etkileşimli görevlerin kullanımıyla öğretmen adaylarının kavramsal gelişiminin nasıl desteklenebileceği konusunda somut öneriler sunulmuştur. Araştırmacılar, sınıf içinde yürütülen tartışmaların ve yapılandırılmış görevlerin, öğretmen adaylarının kavramları çok boyutlu ele alabilmelerini sağladığını ve prototipik düşünmenin olumsuz etkilerinin azaltılmasına katkı sunduğunu belirtmektedir. Sonuç olarak bu çalışma, dörtgenlerin hiyerarşik sınıflandırması gibi soyut bir matematiksel kavramın öğretiminde, öğretmen adaylarının sahip oldukları kavramsal imgeler, prototipik düşünme alışkanlıkları ve sınıflandırma stratejileri gibi faktörlerin dikkate alınması gerektiğini ortaya koymaktadır. Araştırma, bu tür kavramların öğretiminde yalnızca tanımlayıcı bilgi vermek yerine, farklı temsil biçimlerinin karşılaştırılması, tartışılması ve yapılandırılması süreçlerine daha fazla yer verilmesinin önemini vurgulamaktadır. Öğretmen adaylarının prototipik olmayan örneklerle tanışmaları ve bu örnekleri kavramsal çerçevede anlamlandırmaları, onların ilerideki öğretim süreçlerinde daha etkili, esnek ve bütüncül bir yaklaşım geliştirmelerine olanak sağlayacaktır. Cybulski, Oliveira ve Cyrino (2024), gerçekleştirdikleri araştırmada, ortaokul ve lise düzeyinde öğretmenlik yapacak matematik öğretmen adaylarının dörtgenlerin hiyerarşik sınıflandırmasına ve bu dörtgenlerin köşegen özelliklerine ilişkin düşüncelerini incelemişlerdir. Çalışmanın temel amacı, öğretmen adaylarının dörtgenlerin sınıflandırılmasına yönelik geliştirdikleri düşünme süreçlerini ve bu süreçlerde karşılaştıkları kavramsal güçlükleri anlamaktır. Bu doğrultuda, araştırmada öğretmen adaylarının sınıflandırma yaparken prototipik yargılara başvurdıkları ve karşılaştırma yaparken yalnızca iki kavramı karşı karşıya getiren ikili (zıt) düşünme biçimlerinden beslendikleri tespit edilmiştir. Araştırmanın katılımcılarını, bir devlet üniversitesinde öğretmenlik eğitimi alan ve “Matematik Öğretimi” dersine kayıtlı öğretmen adayları

oluşturmuştur. Araştırmada nitel yöntem benimsenmiş ve veri toplama süreci, öğretmen eğitimcileri ile yürütülen sınıf içi etkileşimli tartışmaların video kayıtlarının alınması ve öğretmen adaylarının yazılı yanıtlarının analiz edilmesi yoluyla gerçekleştirilmiştir. Bu yöntemle, öğretmen adaylarının dörtgenleri sınıflandırma süreçleri kapsamlı bir şekilde gözlemlenmiş ve elde edilen veriler betimsel analiz yoluyla çözümlenmiştir.

Tartışmalarda, dörtgenlerin özellikleriyle ilgili oluşturulan sınıflandırma şemaları üzerinden katılımcıların kavram oluşturma ve akıl yürütme biçimleri derinlemesine analiz edilmiştir. Elde edilen bulgular, öğretmen adaylarının dörtgenleri sınıflandırırken sıklıkla prototipik örnekleri referans aldıklarını ve bu örneklerden yola çıkarak sınıflandırma yaptıklarını ortaya koymaktadır. Özellikle kare, dikdörtgen ve paralelkenar gibi yaygın prototiplere dayanan bu sınıflandırma süreçlerinde, öğretmen adaylarının çoğunlukla dik açılı ve eş kenarlı yapıları dikkate aldıkları; buna karşın yamuk ya da eşkenar dörtgen gibi daha az tanınan ve prototipik olmayan şekilleri sınıflandırmakta zorlandıkları görülmüştür. Bu durum, öğretmen adaylarının dörtgenlerin bütüncül özelliklerinden çok, şekillerin görsel temsil biçimlerine ve kişisel zihinsel imgelerine dayalı değerlendirme yaptıklarını göstermektedir. Özellikle “bir kare, dört eşit kenara sahip bir dörtgendir” yargısı, birçok katılımcı tarafından kareyi dikdörtgenden ayırmak için kullanılmış ve bu durum, kavram tanımı ile kavram imajı arasındaki tutarsızlığın belirgin bir örneği olarak değerlendirilmiştir. Araştırmanın dikkat çeken diğer bir bulgusu, öğretmen adaylarının sınıflandırmalarında sıkça “ayırıcı özellik” olarak adlandırılan, kavramın temel niteliğini belirleyen ölçütleri belirlemede zorluk yaşamalarıdır. Özellikle köşegenlerin uzunlukları, birbirini dik kesip kesmemeleri ya da ortalayıp ortalamamaları gibi kritik özellikler göz önünde bulundurulduğunda öğretmen adaylarının genellikle bu özellikler arasında hiyerarşik bir ilişki kurmakta zorlandıkları belirlenmiştir. Örneğin, “paralelkenarın köşegenleri birbirini ortalar mı?” sorusuna verilen yanıtlarda tutarsızlıklar gözlemlenmiş, bazı öğretmen adayları bu özelliği yalnızca kare ve dikdörtgene ait sanarak yanlış sınıflandırmalar yapmışlardır. Bu durum, öğretmen adaylarının dörtgenlerin özelliklerini yalnızca prototip üzerinden değil, aynı zamanda bütünsel ve mantıksal olarak ilişkilendirecek düzeyde ele almadıklarını göstermektedir. Araştırmada ayrıca, öğretmen adaylarının kavramlar arasında karşılaştırma yaparken sıklıkla “dikotomik karşılaştırma” adı verilen düşünme biçiminden yararlandıkları ifade edilmiştir. Bu tür bir karşılaştırma, iki kavramın yalnızca birbirine zıt yönleriyle ele alınarak değerlendirilmesini ifade etmektedir. Örneğin, “yamuk, paralelkenarın tersi bir şekildir” gibi ifadeler, kavramlar arasındaki olası örtüşmeleri görmezden gelen indirgemeci

bir akıl yürütmenin göstergesidir. Bu bağlamda, öğretmen adaylarının kavramlar arası geçişleri anlamakta zorlandıkları ve hiyerarşik yapıyı kavramlaştırmada bilişsel engellerle karşılaştıkları sonucuna ulaşılmıştır. Cybulski, Oliveira ve Cyrino (2024), bu bulgular doğrultusunda, öğretmen adaylarının dörtgenleri sınıflandırma süreçlerinde yalnızca tanıdık ve görsel prototipler üzerinden değil, aynı zamanda tanımların dayandığı mantıksal ilişkiler üzerinden düşünme becerilerinin geliştirilmesi gerektiğini vurgulamışlardır. Özellikle, sınıf içi tartışmalar ve kavramsal harita oluşturma gibi etkileşimli öğretim yaklaşımlarının bu süreci desteklemede etkili olabileceği belirtilmiştir. Öğretmen adaylarının, sınıflandırma şeması oluşturma sürecine aktif olarak katılmaları, sadece tanım bilgisi değil, aynı zamanda kavramlar arası ilişki kurma ve özellikleri karşılaştırma becerilerini de geliştirmiştir. Bunun yanında, araştırmada kullanılan tartışma odaklı öğretim modeli, öğretmen adaylarının kavramsal çelişkileri fark etmelerine ve bu çelişkiler üzerinden anlam yapılandırmalarına imkân sağlamıştır. Sonuç olarak, çalışmanın dörtgenlerin öğretimi açısından önemli katkılar sunduğu söylenebilir. Öğretmen adaylarının sınıflandırma süreçlerinde prototipik düşünmeden uzaklaştırılarak daha kavramsal ve mantıksal temelli düşüncelerini sağlayacak öğretim stratejilerine ihtiyaç olduğu vurgulanmaktadır. Bu bağlamda, çalışmanın geometri öğretiminde sadece şekillerin tanınması değil, aynı zamanda bu şekiller arasındaki ilişkilerin anlaşılmasına yönelik öğretim hedeflerinin belirlenmesi açısından yol gösterici nitelikte olduğu ifade edilebilir. Bu yönüyle araştırma, kavram imajı ve kavram tanımı arasındaki etkileşim, prototipik düşünme ve kavramsal çelişkiler gibi kuramsal yapıların, dörtgenlerin öğretimi bağlamında nasıl somutlaştığını ortaya koymaktadır.

Morgan (2005), matematik öğretiminde kullanılan dilin, kavramların öğrenilmesi ve anlaşılması üzerindeki etkilerini ele alarak tanımların ve kelime dağarcığının yalnızca sözcük bilgisiyle sınırlı olmadığını, aynı zamanda öğrencilerin matematiksel kavramları nasıl yapılandırdıklarını etkileyen önemli bir söylem aracı olduğunu vurgulamaktadır. İngiltere'deki Matematiksel Kelime Dağarcığı kitabı üzerinden yola çıkan bu çalışma, matematiksel dilin çocukların düşünme biçimlerini şekillendirdiğini savunmakta ancak resmî belgelerde bu dilin yalnızca kelime bilgisi düzeyinde ele alınmasını eleştirmektedir. Morgan, özellikle ileri düzey metinlerde tanımların yaratıcı ve işlevsel biçimde kullanıldığını, buna karşın ortaokul düzeyindeki metinlerde sadece kesin tanımlarla sınırlı kalındığını göstermektedir. Bu durumun, öğrencilerin matematiksel anlam üretme kapasitelerini sınırlayabileceğini ve daha güçlü matematiksel ifade biçimlerinin gelişimini engelleyebileceğini ileri sürmektedir.

Mal Shield (2004) çalışmasında, matematikteki resmî tanımların öğrencilerin kavramsal anlayışlarını nasıl etkilediğini ele almaktadır. Resmî tanımlar, genellikle üç öğeden -tanımlanan öge (item), ait olduğu sınıf (class) ve ayırt edici özellikler (features)- oluşur ve bu yapı, öğrencilere şekillerin özelliklerini sınıflandırma ve akrabalık ilişkilerini kavrama imkânı sunar. Ancak tanımların yapısal olarak farklı biçimlerde sunulması, sınıf kısmının atlanması veya gereksiz ayrıntılarla karmaşılaştırılması öğrencilerde kavram karışıklığına yol açabilir. Yazar, öğrencilerin tanım oluşturarak kavramları keşfetmesinin, tanımları yalnızca ezberlemekten çok daha etkili olduğunu vurgular. Ayrıca bir tanımın yalnızca gerekli ve yeterli koşulları içermesi gerektiği, fazla ayrıntının kavramsal yükü artırabileceği belirtilmektedir. Şekil sınıflandırmalarında kavram haritaları ve karşılıklı tanım değiştirme etkinlikleri gibi yöntemlerin öğrencilerin yapısal ilişkileri kavramasına katkı sağlayabileceği ifade edilir. Öte yandan oran, değişken gibi bazı matematiksel kavramların resmî tanımlarla ifade edilmesinin sınırlı kaldığı ve bu tür soyut kavramların yalnızca tanımlarla değil, çeşitli dilsel etkinliklerle pekiştirilmesi gerektiği savunulmaktadır. Sonuç olarak tanımlar, matematik öğreniminde önemli bir araç olmakla birlikte, her kavram için tek başına yeterli değildir; öğrencilerin anlam inşa etmeleri için tanım üretimi ve dilsel etkinliklerle desteklenmeleri gereklidir.

Driskell (2004), dördüncü sınıf öğrencilerinin iki boyutlu geometrik şekillerin özellikleri hakkındaki akıl yürütmelerini incelediği çalışmada, öğrencilerin şekilleri tanıma, sınıflandırma ve tanımlama süreçlerinde özellikle prototipik temsillere dayandıklarını ortaya koymuştur. Araştırma bulgularına göre, öğrenciler şekilleri genellikle görsel görünümlerine göre değerlendirirken özellik temelli tanımlamaya yeterince odaklanamamaktadır. Özellikle kare ve dikdörtgen gibi şekillerde, öğrencilerin açılar yerine kenar uzunluklarına odaklandığı, bu nedenle şekilleri tanıma ve ayırt etmede zorluk yaşadıkları belirtilmiştir. Ayrıca öğrencilerin, şekillerin temel özelliklerini soyutlama ve genelleme konusunda sınırlı bir kavrayışa sahip oldukları; bu durumun da onların kavramsal anlamalarını etkilediği vurgulanmıştır. Driskell, geometri öğretiminde yalnızca prototipik örneklerle sınırlı kalınmaması gerektiğini, farklı oryantasyonlarda ve biçimlerde sunulan örneklerin öğrencilerin kavramsal esneklik kazanmalarında önemli rol oynayacağını ifade etmektedir. Bu doğrultuda, öğrencilerin şekillerin tanımlarına dayalı olarak düşüncelerini teşvik eden öğretim yaklaşımlarının benimsenmesi gerektiği önerilmiştir.

Fujita (2011) tarafından gerçekleştirilen kapsamlı çalışma, öğrencilerin dörtgenlere ilişkin kapsama ilişkilerini ve bu ilişkilerin kavramsal gelişim süreci içerisindeki yerini

derinlemesine incelemiştir. Bu çalışma, Van Hiele'nin geometrik düşünme düzeyleri kuramı, kavram imajı ve kavram tanımı ayrımı (Tall ve Vinner, 1981) ile prototipik fenomen (Hershkowitz, 1990) gibi çeşitli kuramsal çerçeveleri bir araya getirerek dörtgenlerin içerme ilişkilerinin anlaşılmasını açıklamak üzere bütüncül bir model ortaya koymaktadır. Fujita'nın amacı, öğrencilerin dörtgenlerin özelliklerine ilişkin düşünme biçimlerini, görsel imajları, tanımlar ve özellikleri nasıl ilişkilendirdiklerini ortaya çıkarmaktır. Araştırma kapsamında hem öğretmen adaylarından hem de ortaokul öğrencilerinden elde edilen veriler kullanılmıştır. Çalışmanın bulguları, öğrencilerin çoğunlukla dörtgenleri tanımlarken ve sınıflandırırken prototipik örnekleri temel aldıklarını, buna karşın resmî tanımlara rağmen bu örnekleri esnetemediklerini ortaya koymaktadır. Örneğin, birçok öğrenci kareyi dikdörtgen olarak kabul etmemekte, çünkü kareyi daha çok “tüm kenarları eşit olan” bir özel şekil olarak zihinsel olarak sabitlemiş durumdadır. Bu durum, ‘kapsama ilişkilerinin ters yönde kurulması’ olarak adlandırılan kavramsal sınırlılığı da beraberinde getirmektedir. Öğrenciler, bir şeklin daha genel bir sınıfın özel hali olduğunu anlasalar bile daha genel sınıftan özel sınıfa geçişte zorlanmakta ve iki yönlü kapsama ilişkisini kuramamaktadır. Fujita'nın önerdiği kuramsal model kapsamında dörtgenlerin anlaşılması; görsel imgeler (image), tanımlar (definition) ve özellikler (attributes) olmak üzere üç ana bileşen üzerinden incelenmektedir. Bu bileşenler, kavramların zihinsel temsillerini oluşturan temel yapı taşlarıdır. Çalışmada, öğrencilerin bu üç bileşeni nasıl ilişkilendirdiği, birbirleriyle ne derece tutarlı ya da çelişkili düşündükleri ayrıntılı biçimde analiz edilmiştir. Özellikle, “prototipik fenomen” kavramı bu analizde önemli bir yere sahiptir. Buna göre öğrenciler, kare gibi sıkça gördükleri ve standart hale gelen örnekleri, diğer dörtgenlerle olan ilişkilerini göz ardı ederek algılamakta ve bu durum kavramsal öğrenmeyi olumsuz etkilemektedir. Yürütülen pilot çalışma kapsamında 19 üniversite öğrencisinin ‘Q- Level’ olarak adlandırılan düzeylerdeki başarıları değerlendirilmiştir. Bulgulara göre, öğrencilerin yalnızca %10'u ‘hiyerarşik’ düzeye ulaşabilmiş, büyük bir çoğunluk ise prototipik ya da geçişli olmayan düşünme düzeylerinde kalmıştır. Özellikle öğrencilerin yarısından fazlası, bir paralelkenarın tanımını verebilmiş olsa dahi kare veya dikdörtgen gibi özel durumları bu tanıma dâhil edememektedir. Bu durum, öğrencilerin tanımla görsel imajı birbirine bağlayamadığını ve kavramları yalnızca ezber düzeyinde ele aldığını göstermektedir. Fujita'nın çalışmasında ayrıca, öğrenenlerin düşünme yapılarındaki kavramsal çatışmalar (cognitive conflict) da detaylı şekilde ele alınmıştır. Öğrencilerin sahip olduğu görsel imgeler ve kavram tanımları arasındaki tutarsızlık, dörtgenlerin özelliklerinin öğrenilmesini ve içerme ilişkilerinin

kurulmasını önemli ölçüde zorlaştırmaktadır. Örneğin, bazı öğrenciler “yamuk, paralelkenar değildir çünkü sadece bir çift paralel kenarı vardır” şeklinde ifade kullanmakta, oysa bu özellik zaten yamuğun tanımıdır. Aynı şekilde bazı öğrenciler, “bir şeklin tüm kenarları eşit uzunlukta ise kare olmalıdır” gibi ifadelerle yalnızca görsel benzerlik üzerinden sınıflama yapmaktadır. Çalışmanın önemli bulgularından biri de öğrencilerin sadece prototipik örneklerle sınırlı kaldıklarında öğrenmenin yüzeysel kaldığı ve genellenebilir bilgi üretilmediğidir. Bu bağlamda Fujita, öğretim programlarında dörtgenlerin farklı temsil biçimlerinin (örneğin, uzunlamasına dikdörtgenler, eğik paralelkenarlar, sivri köşeli yamuklar gibi) daha sık kullanılması gerektiğini vurgulamaktadır. Ayrıca, kavramsal öğrenmenin yalnızca görsel örneklerle değil, tanım-özellik ilişkileri üzerinden yapılandırılması gerektiği ifade edilmektedir. Çalışmanın önerdiği çözüm yolları arasında öğrencilere kavram tanımlarını sözel olarak ifade ettirme, ‘kritik’ ve ‘kritik olmayan’ özellikler arasındaki ayrımı öğretme ve çeşitli geometrik şekiller arasında ilişkiler kurmalarını sağlayacak analogi (benzetim) temelli etkinlikler yer almaktadır. Örneğin, kareyi dikdörtgen ailesine dâhil ettikten sonra bu benzetimi rombusa genişletmek, kavramsal yapının esnetilmesine yardımcı olabilir. Sonuç olarak Fujita (2011), dörtgenler arasındaki içerme ilişkilerinin öğretilmesinde, yalnızca şekil tanımına dayalı öğretimin yetersiz kaldığını, bunun yerine şeklin tüm görsel, sözel ve özellik boyutlarıyla birlikte ele alınması gerektiğini ortaya koymuştur. Öğrencilerin hem kavramsal düşünme becerilerinin hem de görsel temsillerle ilişkili anlamalarının geliştirilmesi için daha derinlemesine ve bütüncül bir öğretim süreci tasarlanmalıdır. Bu çalışma, hem ilköğretim düzeyindeki öğrencilerin hem de öğretmen adaylarının dörtgen kavramlarını nasıl anlamlandırdıklarını analiz eden önemli bir kaynak niteliği taşımaktadır. Fujita’nın sunduğu model, özellikle prototipik düşünmenin sınırlandırıcı etkilerinin giderilmesi ve kavramsal esnekliğin kazandırılması açısından eğitimcilere rehberlik edecek niteliktedir.

Soldano ve Sabena (2022), gerçekleştirdikleri çalışmada, ilkokul düzeyindeki öğrencilerin dörtgen alanlarının eşitliği konusundaki düşüncelerini sorgulamak amacıyla dinamik geometri ortamlarında (Dynamic Geometry Environment- DGE) tasarlanmış bir sorgulama-oyun yaklaşımı geliştirmişlerdir. Bu yaklaşım, Hintikka’nın semantik oyunlarına dayalı olup öğrencilerin hem figüral hem de sayısal temsiller arasında geçiş yapabilme becerilerini geliştirmeyi amaçlamaktadır. Çalışma, özellikle prototipik olmayan şekil örnekleriyle alan eşitliğinin kavratılmasını hedeflemekte ve dörtgenlerin yalnızca tipik görünümüyle değil, daha farklı yapılandırmalarla da kavranabileceği fikrini

desteklemektedir. Araştırmada öne çıkan en önemli katkılardan biri, öğrencilerin geometrik düşüncelerini teşvik etmek için kullanılan “mantık oyunları” (logic of inquiry) olmuştur. Bu oyunlar, doğrulayıcı (verifier) ve çürütücü (falsifier) rollerini içeren bir oyun kurgusu çerçevesinde yapılandırılmıştır. Öğrencilerden biri, verilen bir geometrik önermeyi doğru kılacak bir konfigürasyon üretmeye çalışırken diğeri bu önermeyi çürütecek örnekler oluşturmaktadır. Bu yapı, öğrencilerin yalnızca şekilleri tanımlarını değil, aynı zamanda alan eşitliği gibi matematiksel ilişkileri sorgulamalarını da sağlamaktadır. Çalışmada, özellikle paralelkenar ve dikdörtgenler arasında kurulan alan eşitliği ilişkisi üzerinden öğrencilerin geometrik akıl yürütme süreçleri incelenmiştir.

Araştırma bulguları, öğrencilerin sıklıkla prototipik örneklerle sınırlı kaldıklarını ve alan eşitliği gibi kavramları yalnızca geleneksel görsel temsiller üzerinden değerlendirdiklerini göstermiştir. Örneğin öğrenciler, bir paralelkenarı ancak yatay kenarları olan klasik bir şekil olarak tanımlamakta, eğik kenarlı veya alışılmadık konfigürasyonlara sahip şekilleri tanımakta zorlanmaktadırlar. Bu durum, öğrencilerin figüral temsillerde sınırlı sayıda örnekle öğrenim gördüklerini ve bu sınırlı örneklerin kavramsal genellemeyi engellediğini göstermektedir. Soldano ve Sabena, öğrencilerin bu tür prototipik algılardan kurtulabilmeleri için, figüral temsillerin değiştirilebilirliğini ve farklı yapılandırmalarla oluşturulan eş değer alanların sayısal temsillerle birlikte ele alınmasını önermektedir. Özellikle GeoGebra gibi dinamik geometri araçları, öğrencilerin alan kavramını yeniden yapılandırmalarına olanak tanımaktadır. Özellikle GeoGebra gibi dinamik geometri araçları, öğrencilerin alan kavramını yeniden yapılandırmalarına olanak tanımaktadır. Bu tür dinamik ortamlar, öğrencilere yalnızca şekillerin görsel temsillerini inceleme fırsatı sunmakla kalmaz; aynı zamanda matematiksel özellikler arasında ilişkiler kurmalarını ve bu ilişkileri keşfederek gerekçelendirmelerini destekler. Connor ve Moss’un (2007) yürüttüğü çalışmada da bu durum açık biçimde ortaya konmuş; öğrencilerin dinamik geometri yazılımları aracılığıyla gerçekleştirdikleri geometrik incelemelerde hipotez kurma, test etme ve sonuç çıkarma gibi üst düzey matematiksel düşünme süreçlerine aktif biçimde katıldıkları gözlemlenmiştir. Öğrenciler, özellikle şekillerin dönüşüm sürecinde alanın değişip değişmediğini sorgulayarak bu kavrama ilişkin önceki sezgisel düşüncelerini yeniden yapılandırmış ve daha soyut düzeyde genellemelere ulaşmışlardır. Bu bağlamda dinamik geometri araçlarının kullanımı, kavramların yüzeysel düzeyde algılanmasının ötesine geçerek derinlemesine bir anlam inşasına zemin hazırlamaktadır. Örneğin, paralelkenarın bir kenarı sabit tutulup, diğer köşesi sürüklendiğinde şeklin biçimi değişmekte fakat alanı sabit

kalabilmektedir. Bu durum, öğrencilere “alan eşitliği” kavramının şeklin görünümünden bağımsız bir özellik olduğunu somut olarak gösterebilmektedir. Araştırma sürecinde öğrenciler, paralelkenar ve dikdörtgen arasındaki alan ilişkisini anlamaya yönelik etkinliklerde öncelikle prototipik olmayan örneklerle yüzleşmişlerdir. Bunun sonucunda, alan eşitliği ilişkisini yalnızca şeklin simetrik ya da dik görünmesine bağlamamayı öğrenmişlerdir. Oyunun bir diğer önemli katkısı, öğrencilerin alan eşitliğini iki farklı kayıt düzleminde (register) düşünmelerini sağlamasıdır: figüral düzlem (şekil görünümü) ve sayısal düzlem (alan ölçüleri). Bu geçiş sayesinde öğrenciler, geometrik dönüşümlerle oluşan şekillerin hem görsel hem de sayısal yönlerini bütünleştirebilmişlerdir. Çalışma kapsamında, beş ayrı DGE etkinliği uygulanmış ve her biri yaklaşık 2 saat sürmüştür. Öğrenciler oyunları çiftler hâlinde oynamış, ardından öğretmen rehberliğinde sınıf tartışmaları gerçekleştirilmiştir. Bu süreçte toplanan veriler (öğrenci konuşmaları, çizimler, ekran kayıtları ve çalışma kâğıtları) çok modlu analiz yöntemleriyle değerlendirilmiştir. Bu analizler, öğrencilerin oyun sırasında kullandıkları dilin ve jestlerin onların geometrik anlamalarını nasıl etkilediğini ortaya koymuştur. Araştırmanın sonuçlarına göre, DGE ortamında gerçekleştirilen bu sorgulama-oyun temelli etkinlikler, öğrencilerin sadece alan kavramını değil, aynı zamanda dörtgenler arası ilişkileri de daha derinlemesine anlamalarına olanak tanımıştır. Özellikle prototipik olmayan şekillerle karşılaştıklarında da anlam çıkarabilmeleri, kavramsal esnekliklerinin geliştiğini göstermektedir. Bu durum, matematiksel kavramların öğrenilmesinde farklı temsillerin birlikte kullanılmasının ne kadar önemli olduğunu vurgulamaktadır.

Favilli ve Romanelli (2006) tarafından geliştirilen “Geometrical Puzzles” etkinliği, öğrencilerin geometrik şekilleri betimleme, tanımlama ve geometrik dili etkin biçimde kullanma becerilerini geliştirmeyi amaçlayan, yapılandırılmış bir öğretim etkinliğidir. Etkinlikte öğrenciler ikili gruplara ayrılır; bir öğrenciye gizli bir geometrik şekil adı verilir ve bu öğrenci, diğerine şekli çizmeye yönelik bir dizi yönerge verir. Ancak yalnızca "birimsel" (tek adımlı) yönergeler kullanabilir ve çizim süreci sırasında hiçbir düzeltme yapılmasına izin verilmez. Yönergeyi alan öğrenci, şekli çizer ve sürecin sonunda her iki öğrenci de şekli adlandırır, betimler ve tanımlar. Bu süreçte doğal dil, geometrik dil ve grafiksel temsiller arasında dönüşüm sağlanması amaçlanır. Etkinlik, geometrik kavramların yalnızca betimlenmesiyle yetinmeyip tanımına ulaşmanın ne denli karmaşık ve zihinsel açıdan talepkâr bir süreç olduğunu doğrudan deneyimler.

Çalışmanın üç ayrı pilot uygulaması gerçekleştirilmiştir: Pisa, Siena ve Paris'teki üniversitelerde öğretmen adaylarıyla ve ortaokul öğrencileriyle yürütülen uygulamalarda, özellikle yönerge veren bireyin görevinin daha zorlayıcı olduğu vurgulanmıştır. Katılımcılar, geometrik şekli zihinsel olarak canlandırma, dilsel olarak açık ve tek anlamlı biçimde ifade etme ve bu ifadelerin çizimle örtüşmesini sağlama konusunda çeşitli güçlükler yaşamıştır. Ayrıca, birçok katılımcının şekli tahmin ettikten sonra yönergelere sadık kalmaksızın doğru çizim yapmaya çalıştığı gözlenmiş ve bu durumun yönerge-çizim ilişkisinin zayıflamasına neden olduğu belirtilmiştir.

Uygulamalarda öğrencilerin şekil tanımı ile betimlemesini sıklıkla karıştırdığı, tanım olarak yalnızca adlandırma ya da gereksiz çoklukta özellik sıraladıkları görülmüştür. Bu bağlamda, matematiksel tanım ile şeklin özellikleri arasında ayırım yapabilmenin, öğrencilerin kavramsal gelişimi açısından kritik bir eşik olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca tanımların “dâhil edici” (inclusive) mi yoksa “ayırıcı” (partitional) mı olduğu üzerine yapılan tartışmalar, dörtgenlerin sınıflandırılması gibi konulara doğrudan katkı sunmaktadır. Katılımcıların çoğu, eşkenar dörtgeni “köşegenleri dik kesişen paralelkenar” şeklinde tanımlayarak kareyi dışlayıcı bir yaklaşım sergilemiş, bu da sınıflandırmada kapsayıcılığın önemini bir kez daha göstermiştir.

Bu etkinlik, öğrencilerin matematiksel dili doğru ve tutarlı biçimde kullanma gerekliliğini ortaya koyarken betimlemeden tanıma ve tanıdan tanıma yönündeki zihinsel geçişi desteklemekte; yönlendirici tartışmalarla tanım, sınıflandırma ve temsil dönüşümü gibi soyut kavramların somut öğrenme deneyimleri aracılığıyla içselleştirilmesini sağlamaktadır. Tez kapsamında ele alınan tanım-kavram imgesi ilişkisi, prototipik ve prototip olmayan temsillerin kullanımı, dörtgenlerin sınıflandırılması gibi konularla bu etkinliğin doğrudan ilişki içinde olduğu söylenebilir. Dolayısıyla bu etkinlik, hem öğretmen eğitimi hem de öğrenci kavram gelişimi açısından güçlü bir didaktik araç olarak değerlendirilmiştir.

Geometri eğitiminde dinamik yazılımlarla şekil manipülasyonu, öğrencilerin kavramsal anlamalarını derinleştirme potansiyeline sahiptir. Erez ve Yerushalmy (2006) tarafından yürütülen çalışmada, sürükleme aracı aracılığıyla dörtgenler arasındaki dönüşüm ve hiyerarşik ilişkilerin üç farklı öğrenci -Shiri adlı öğrenci, Ran adlı öğrenci ve Gali adlı öğrenci- üzerinden nasıl kavramsallaştırıldığı incelenmiştir. Shiri adlı öğrenci, dörtgen türlerini hiyerarşik olarak sınıflandırabilmekte; şekillerin kritik özelliklerini (eş kenarlılık, paralellik, dik açı gibi) dikkate alarak sürükleme sürecini yönlendirmekte ve Van Hiele'nin

üçüncü düzeyine özgü soyutlama becerisi sergilemektedir. Shiri; kare, dikdörtgen, eşkenar dörtgen ve paralelkenar gibi dörtgenlerin birbirine dönüşümünü mantıklı gerekçelerle açıklayarak kavramsal sürüklenme modeli ile hedef sistemin dinamiğini örtüştürmüştür. Buna karşılık Ran adlı öğrenci, şekillerin görsel özelliklerine odaklanarak dörtgenleri yalnızca bölmeli tanımlarla sınıflandırmakta ve sürüklenme sırasında ortaya çıkan dönüşümleri geometrik mantıkla değil, dışsal ölçümler veya benzerlik izlenimlerine göre değerlendirmektedir. Ran'ın sürüklenme modelinde şeklin elemanları birbirinden bağımsızca değişebilen birer “lastik bant” gibi düşünülmekte, bu da onun şekiller arası hiyerarşik ilişkiyi kuramamasına neden olmaktadır. Gali adlı öğrenci ise başlangıçta Ran'a benzer şekilde bölmeli tanımlara dayalı kavramsal imgeler taşımakta ancak sürüklenme sürecinde geometrik mantığı yavaş yavaş devreye sokmakta ve şekil dönüşümlerini anlamlandırmaya başlamaktadır. Gali'nin kavramsal ilerleyişi, sürüklenme aracının uygun rehberlikle birlikte kavram değişimine katkı sunabileceğini göstermektedir.

Bu üç vaka çalışmasının genel sonucu olarak, öğrencilerin dinamik geometri ortamlarında gerçekleştirdikleri sürüklenme işlemlerinin, onların şekiller arasındaki kavramsal ilişkileri keşfetmelerinde kritik bir rol oynadığı vurgulanmıştır. Ancak bu potansiyelin etkili bir biçimde kullanılabilmesi için, öğretim sürecinde uygun yönlendirme ve yapılandırılmış rehberliğin sunulması gerektiği ortaya konmuştur. Sürüklenme aracının sadece görsel oynama aracı olarak değil, matematiksel düşünmeyi tetikleyen bir öğrenme stratejisi olarak kullanılması, kavramsal gelişim açısından belirleyici bir unsur olarak değerlendirilmiştir.

Zeybek'in (2018) gerçekleştirdiği çalışma, öğretmen adaylarının dörtgenler arası kapsayıcılık ilişkilerini nasıl kavradığını ve bu kavrayışın belirli bir öğretim süreciyle nasıl dönüşüm geçirdiğini çok boyutlu biçimde ortaya koymuştur. Bu çalışmanın kuramsal temelinde van Hiele'nin geometrik düşünme düzeyleri, Tall ve Vinner'in kavramsal imge kuramı ile Fischbein'in figüral kavram yaklaşımı birlikte değerlendirilmiştir. Özellikle figüral kavram kuramı, bireylerin geometrik şekillerle ilgili soyut tanımlarla birlikte görsel temsilleri nasıl harmanladığını ve bu iki bileşenin çatışmasının kavramsal hatalara nasıl yol açtığını açıklamada kritik bir rol oynamaktadır. Fischbein ve Nachlieli'nin (1998) ortaya koyduğu gibi, öğrenciler bir kavramın tanımını doğru ifade edebildikleri hâlde, bu tanımları figüral düzeyde soyutlayamamakta; özellikle prototip dışı ya da birden fazla sınıfa ait figürlerde tanımdan saparak görsel örüntülere dayalı kararlar verebilmektedir. Zeybek'in araştırmasında da öğretmen adaylarının büyük ölçüde prototiplere dayalı düşündükleri,

özellikle yamuk gibi daha az temsil edilen dörtgenlerde sınıflama hataları yaptıkları, kavram imgelerinin çoğunlukla sabit ve esnek olmayan yapılarla şekillendiği gözlemlenmiştir. Beş haftalık özel öğretim süreci sonrasında dahi bazı katılımcıların, çift yönlü kapsayıcılık ilişkilerini kurmakta zorlandığı, bu durumun kavramsal imge ile tanım arasındaki kopukluğun tamamen giderilemediğini gösterdiği ifade edilmiştir. Benzer biçimde, Fischbein ve Nachlieli'nin (1998) çalışmasında da yaşı tek başına bu figüral-tanımsal gerilimi azaltmada etkili olmadığı, öğrencilerin geometrik akıl yürütmesinde asıl belirleyici unsurun formel matematiksel yeterlik düzeyi olduğu vurgulanmıştır. Bu bütüncül çerçevede her iki çalışma, geometrik kavramların öğretiminde yalnızca tanımların aktarılmasının yeterli olmadığını, figüral çeşitlilikle anlam kurmalarını destekleyen yapılandırılmış öğretim ortamlarının gerekliliğini açık biçimde ortaya koymaktadır. Öğrencilerin şekil üzerindeki zihinsel dönüşümleri gerçekleştirebilme, elemanlar arasındaki kritik özellikleri fark ederek alternatif temsiller oluşturabilme gibi üst düzey becerileri ancak kavramsal imgeyi esneten ve figüral kavramları zenginleştiren öğretim yaklaşımlarıyla geliştirilebileceği sonucuna ulaşılmıştır.

2.1. Matematiksel Kavramların Anlamlandırılmasında Tanımların Önemi

Pek çok araştırmacı, matematik öğretimi ve öğreniminde tanımların rolünü son derece önemli olarak değerlendirmiştir. Tanım oluşturma; problem çözme, tahmin yürütme ve ispat yapma kadar temel bir matematiksel etkinliktir (De Villiers, 1998). Çünkü bu süreç, öğrencilerin genelleme yapma, sentezleme, soyutlama gibi zihinsel becerilerini geliştirmelerine, kavramın bileşenleri arasındaki ilişkileri keşfetmelerine olanak tanır (Ko, Lee ve Lew, 2007; Mariotti ve Fischbein, 1997). Teknik terimlerle gerçekleştirilen tanım oluşturma, yalnızca var olan bir kavramı anlamayı sağlamakla kalmaz, aynı zamanda kavramın farklı bağlam ve amaçlara göre şekillendirilmesini de mümkün kılar (Morgan, 2005; Wilson, 1990). Tanımlar, birçok matematiksel etkinliğin temelini oluşturmanın yanı sıra, öğrencilerin sezgisel kavram imgelerini yeniden yapılandırmaları sürecinde de kritik öneme sahiptir. Bu süreçte, sezgisel kavram imgeleri ile resmî tanımlar arasında bir uyumun sağlanması amaçlanır (Vinner, 1991). Başka bir ifadeyle, tanım ve sezgi bir araya geldiğinde öğrencinin öğrenme sürecinde etkili bir rol üstlenir (Rolka ve Rösken, 2007). Dolayısıyla, öğrencilerin matematiksel kavram tanımlarını daha iyi kavrayabilmeleri, hem kavram imgelerini doğru inşa edebilmeleri hem de farklı matematiksel görevlerde başarılarını artırılabilmeleri açısından önemlidir (Vinner, 1991). Bunun yanında, tanım oluşturma

etkinlikleri, öğrencilerin tanımları matematiksel teoremin birer yapı taşı olarak görmelerine olanak tanır (Furinghetti ve Paola, 2002). Tanımlar, çoğunlukla öğretim sürecinde ihmal edilse de, aslında matematiksel bir kuramın içerisine giriş kapısı olarak kabul edilir (Furinghetti ve Paola, 2002: 392). Çünkü tanımlar, bir kuram içerisindeki var olan ya da yeni ilişkileri ve özellikleri keşfetmeyi sağlayan çıkarım sürecinin temel unsurudur (Mariotti ve Fischbein, 1997; Morgan, 2005). Bu nedenle, öğrencilere zihinsel süreçlerine uygun tanımlama yolları sunularak matematiksel kuramları oluşturmalarına katkı sağlanmalıdır (Furinghetti ve Paola, 2002). Ayrıca tanımlar, matematiksel kuramın iskelet yapısının temel öğelerindendir ve matematiğin tümdengelsel bir yapı kazanabilmesi için gerekli olan kuram ve ispat inşasının ön koşullarını oluşturur (Heinze, 2002; Vinner, 1991). Tanımlar, evrensel ispat yapısının temelini oluşturur; çünkü mantıksal argümanların kurulmasına zemin hazırlar (Knapp, 2006). Bir argümanın ispatla sonuçlanıp sonuçlanmadığını belirlemek için gerekli dört temel unsurdan biri olan "temellendirme", doğrudan tanımlarla ilişkilidir (Stylianides, 2007). Bu nedenle öğrencilerin resmî tanımlarla etkileşimde bulunabilecekleri ve ispat süreçlerini anlayabilecekleri etkinliklere dâhil olmaları önemlidir (Knapp, 2006). Moreno (2003) da öğrencilerin yazılı tanımları ile matematiksel ifadeleri ispat edebilme becerileri arasında pozitif bir ilişki olduğunu vurgulamıştır. Kavram tanımları, yıllar içinde matematikçilerin çabalarıyla evrensel bir geçerlilik kazanmıştır ve bu tanımlar sıradan kelimelere anlam ve yapı kazandırır. Örneğin “çözüm” gibi bir kelime, cebirden diferansiyel denklemlere kadar farklı bağlamlarda anlam kazanabilir (Raychaudhuri, 2008). Ayrıca tanımlar; “aksiyom, teorem, ispat, önerme, sonuç” gibi metamatematiksel işaretleyiciler arasında yer alır (Pimm, 1993). Dilsel açıdan bakıldığında, tanımlar matematiksel kavramların anlamını iletmek için kullanılan en önemli araçlardır ve yazılı ya da sözlü matematiksel iletişimde temel rol oynarlar (Shir ve Zaslavsky, 2001; Thompson ve Rubenstein, 2000). Tanımlar, kavramların anlamında birlik sağlayarak anlamlı bir iletişime zemin hazırlar (Shir ve Zaslavsky, 2001). Bu birlik sayesinde öğrenciler, matematiksel durumları daha iyi görüp kavrayabilir, kavrama ait örnekleri ve örnek olmayanları ayırt edebilir ve doğru matematiksel dili kullanma konusunda farkındalık geliştirebilir (Morgan, 2005; Pimm, 1993). Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (NCTM) tarafından da desteklenen bir görüşe göre, öğrencilerin günlük ve sıradan dilden resmî matematik diline geçiş yapmaları gerektiği vurgulanmaktadır. Bu geçiş sürecinde tanımlar kilit rol oynar. Öğrenciler, küçük yaşlarda tanıdık ve gündelik ifadeleri kullanarak matematiksel düşüncelerini açıklamaya başlar. Öğretmenler; “benzer, çarpan, alan,

fonksiyon” gibi kelimelerin matematikte daha kesin ve farklı anlamlara geldiğini gösterebilir. Bu da öğrencilerin matematiksel tanımların önemini anlamaları için bir temel oluşturur. Ortaokuldan itibaren ise öğrencilerin matematiksel tanımların işlevini anlamaları ve bu tanımları matematiksel çalışmalarda kullanmaları gerekmektedir (NCTM, 2000a). Dolayısıyla matematik dili, öğretiminde çok önemli bir yer tuttuğundan, öğrencilerin gündelik dille matematiksel dil arasında anlam farkını kavramaları sağlanmalıdır. Vinner’a (1991) göre, matematik öğretiminin amacı da gündelik dili resmî matematik diline dönüştürmektir. Bu bağlamda tanımlar, matematiksel kavramların anlamını aktaran temel araçlar olarak düşünülebilir. Bu nedenle öğrencilerin tanımlarla kuracakları etkileşimler, hem matematiksel dilin önemini kavrayabilmeleri hem de bu dili kullanma becerilerini geliştirebilmeleri için özenle desteklenmelidir. Sonuç olarak, literatürdeki pek çok çalışma, tanımların matematik öğretimi ve öğrenimindeki merkezî rolünü vurgulamıştır. Tanımların, matematiksel yapının temel unsurları olduğu ve tanımlar olmadan teorem kurma, ispat yapma, problem çözme, kavramın örneklerini ve örnek olmayanlarını ayırt etme, genelleme, tanımlama gibi süreçlerin gerçekleştirilemeyeceği ifade edilmiştir. Tanım oluşturma; matematiksel, psikolojik, pedagojik ve dilsel yönleri kapsayan çok boyutlu bir süreçtir (Silfverberg ve Matsuo, 2008; Van Dormolen ve Zaslavsky, 2003) ve bu yönüyle matematik öğretiminde göz ardı edilmemelidir. Dolayısıyla, öğretmen ve öğrencilerin tanımların işlevi konusunda bilinçlendirilmesi, bu sürecin ihmal edilmesini önleyebilir.

2.2. Dörtgenlerin Tanımları ve Sınıflandırmaları

Bu bölümde, özel dörtgenlerin farklı şekillerde tanımlanmasına ilişkin yaklaşımlar ele alınmakta ve bu tanımların matematik eğitimindeki işlevi irdelenmektedir. Kavram tanımlarının matematiksel düşünmenin yapı taşı olduğu sıklıkla vurgulanmakla birlikte, bu konunun öğretim süreçlerinde yeterince öne çıkarılmadığı görülmektedir (De Villiers, 1998; Furinghetti ve Paola, 2002; Vinner, 1976). De Villiers (1998), tanım oluşturma sürecini yalnızca kavramsal bir işlem değil, aynı zamanda problem çözme, ispat üretme ve genelleme yapma gibi üst düzey matematiksel etkinliklerle doğrudan ilişkili bir bilişsel süreç olarak ele almaktadır. Tanımlar, bir kavramı hem tanıtmak hem de diğer kavramlardan ayırma işlevi taşıırken matematiksel akıl yürütmelerde kullanılan temel dayanak noktalarını da oluşturur (Silfverberg, 2003). Bu çerçevede, çalışmanın amacı bazı özel dörtgenleri farklı tanımlama biçimleriyle inceleyerek bu tanımların kavramlar arası ilişkiler üzerindeki etkilerini ortaya koymaktır. Özel dörtgenlerin birbiriyle olan ilişkisi, büyük ölçüde nasıl tanımlandıklarına

bağlıdır. Bir kavram tanımlanırken onun diğer öncül kavramlarla olan ilişkisi göz önünde bulundurulmalıdır. Örneğin dikdörtgen, paralelkenar, eşkenar dörtgen, deltoid ve yamuk gibi geometrik şekiller arasındaki bağlar, kullanılan tanım biçimine göre farklılık gösterebilir. Usiskin ve Griffin'in (2008) ifade ettiği üzere, eğer bu kavramlar yalnızca birbirlerinden bağımsız biçimde tanımlanırsa ortaya ayrık bir sınıflandırma çıkar. Buna karşılık, kapsama ilişkileri temelinde oluşturulan tanımlar, kavramlar arasında hiyerarşik bir yapı kurulmasını sağlar.

Literatürde kapsayıcı (inclusion-based) tanımlar daha yaygın şekilde benimsenmiştir. Fujita ve Jones'a (2007) göre, bu tür tanımlar, daha ekonomik ve işlevsel olup bir kavrama ait doğruluğu kabul edilen bir özelliğin, o kavramın kapsadığı diğer alt kavramlar için de geçerli olması avantajını taşır. Bu da öğretim sürecinde tekrar gereksinimini azaltmakta ve öğrenmeyi sistematik hale getirmektedir. Hiyerarşik sınıflandırmalar aynı zamanda kavramlar arasındaki geçişli, asimetric ve zıt asimetric ilişkilerin anlaşılmasına da katkı sağlar. Örneğin, kare bir dikdörtgenin özel bir durumu olarak tanımlanırsa ve dikdörtgen de ikizkenar yamuğun özel bir örneği olarak ele alınırsa kare aynı zamanda özel bir ikizkenar yamuk olarak da değerlendirilebilir. Bu, geçişlilik ilişkisini ortaya koyar. Asimetric ilişki ise karenin özel bir dikdörtgen olması durumunda, tersinin doğru olmamasıyla açıklanır. Yani her kare bir dikdörtgendir ancak her dikdörtgen bir kare değildir. Zıt asimetric ise iki kavramın birbirinin tüm özelliklerini taşılamaması durumunu ifade eder (Schwarz ve Hershkowitz, 1999).

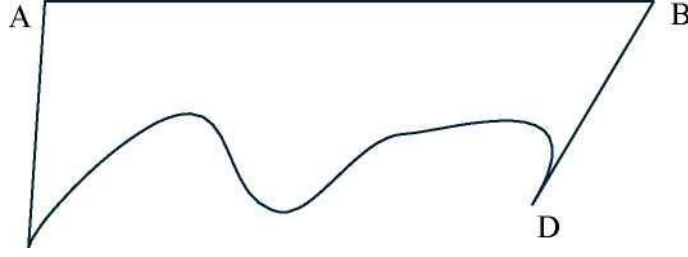
De Villiers (1994), hem kapsayıcı hem de hariç tutan tanımların matematiksel bağlamda geçerliliğini vurgulamaktadır. Her iki yaklaşımın da farklı öğretim amaçları için uygun olabileceğini belirtmekle birlikte, özellikle son yıllarda kapsayıcı tanımlara dayalı öğretim yaklaşımları daha çok kabul görmektedir. Kapsayıcı ilişkilerin dikkate alındığı tanımlar, öğretim sürecinde daha ekonomik ve verimli yapılar kurmayı mümkün kılar. Bu tür tanımlar, tümdengelimsel akıl yürütme süreçlerini destekler, daha genel kavramlardan yola çıkarak özel kavramların özelliklerine ulaşmayı kolaylaştırır ve problem çözme sırasında kullanılabilecek zihinsel şemaların oluşumuna katkı sunar. Ayrıca farklı açılardan alternatif tanımların üretimine zemin hazırlar. Bu yönüyle kapsayıcı tanımlar, zihinsel beceri gelişimini destekleyen, üst düzey düşünmeyi teşvik eden ve öğrenme kalitesini artıran nitelikler taşımaktadır (Öztoprakçı ve Çakıroğlu, 2013).

Buna karşılık, hariç tutan tanımların belirli dezavantajları bulunmaktadır. Bu tanımlar, kavramları diğerlerinden soyutlayarak ele alır ve aralarındaki ilişkiyi göz ardı eder. Bu

durum, bireylerin zihninde yalnızca belirli bir görsel forma dayalı prototip temsillerin oluşmasına ve diğer olasılıkların fark edilememesine yol açabilir (Kondratieva ve Radu, 2009; Schwarz ve Hershkowitz, 1999). Öğrenciler, zihninde oluşturdıkları bu tipik kavram imgeleri doğrultusunda benzer özellikleri taşıyan fakat farklı görünüme sahip şekilleri reddedebilirler. Örneğin, karenin tüm kenarlarının eşit olması nedeniyle, öğrenciler onu dikdörtgen olarak algılamakta zorlanabilir. Bu durum, kavramlar arası ilişkilerin anlaşılmasını güçleştirerek kavramsal gelişimi sınırlandırabilir. Ancak De Villiers'ın (1994) da belirttiği gibi, eğitsel hedeflere bağlı olarak bazı durumlarda hariç tutan tanımların tercih edilmesi gerekebilir. Özellikle, zihinsel gelişim düzeyi henüz ilişkilendirme yapacak olgunlukta olmayan küçük yaş grupları için kavramların tek tek ve açık bir şekilde tanıtılması daha işlevsel olabilir. Bu nedenle hem kapsayıcı hem de hariç tutan tanım yaklaşımlarını karşılaştırmalı biçimde ele almak ve aralarındaki farkları anlayarak kullanmak, öğrenme süreci açısından önemli bir zihinsel beceridir. Bölümde dörtgen kavramına yönelik farklı tanım biçimleri ve bu tanımlar doğrultusunda geliştirilen sınıflandırmalar ayrıntılı biçimde incelenecek; tanımların matematiksel düşünceyi nasıl yapılandırdığı ve kavramlar arası ilişkileri nasıl etkilediği değerlendirilecektir. Matematikte kavramların yapısı genellikle hiyerarşik bir düzene dayanır. Bu yapı doğrultusunda, yeni bir kavram tanımlanırken daha önce tanımlanmış olan ve kapsayıcılığı daha yüksek bir üst kavrama başvurulur (Winicki-Landman ve Leikin, 2000). Dolayısıyla, bir kavramın tanımının tüm bireyler için aynı anlamı taşıyabilmesi, bu tanımda kullanılan temel terimlerin herkes tarafından ortak bir biçimde anlaşılmasına bağlıdır.

Bu kısımda özel dörtgen türleri ele alınacağından, öncelikle "dörtgen" kavramının ne olduğuna dair ortak bir anlayış oluşturmak gerekmektedir. Çünkü dörtgen kavramına dair geliştirilecek tanım, daha sonra yapılacak olan özel dörtgen tanımlarının temelini oluşturacaktır. Açık ve ortak bir dörtgen tanımı olmadan dikdörtgen, kare, paralelkenar, yamuk gibi özel dörtgenlere dair yapılacak tanımlar hem tutarsızlık hem de kavramsal karmaşa yaratma riski taşır.

Bu çerçevede Pereira-Mendoza'nın (1993) çalışması dikkat çekicidir. Söz konusu çalışmada, dörtgen kavramı karşıt (non-example) örnekler yoluyla incelenmiş ve bu sayede bir kavramın tanımının yalnızca olumlu örnekler üzerinden değil, aynı zamanda ne olmadığını da anlamaya yönelik olumsuz örnekler üzerinden de inşa edilmesi gerektiği vurgulanmıştır. Bu yaklaşım, kavramsal sınırların daha net çizilmesine ve öğrencilerin ilgili kavramı daha doğru biçimde anlamlandırmalarına olanak sağlar.



Şekil 2.4. Dört kenarlı olan şekil tanımı örneği (Kaynak: Öztoprakçı ve Çakıroğlu, 2013; Pereira-Mendoza 1993: 774’ten uyarlanmıştır)

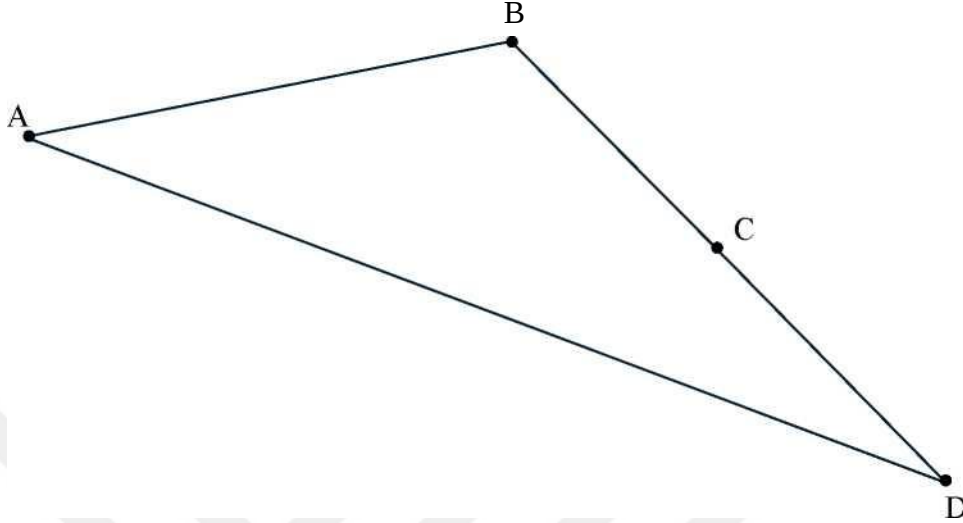
Dörtgeni yalnızca “dört kenarlı olan bir şekil” olarak tanımladığımızda, bu tanımın yeterince açık ve kesin olmadığını fark ederiz. Böyle bir tanım, kenarların doğrusal olup olmadığını belirtmediğinden, örneğin Şekil 2.4’teki gibi doğrusal olmayan kenarlara sahip şekillerin de dörtgen olarak kabul edilmesine yol açabilir. Oysa burada ifade edilmek istenen kavram, klasik anlamda bir dörtgen olup bu tür şekiller bu kapsamın dışında kalmaktadır. Bu nedenle, bu tanım eksik ve belirsizdir. Tanımı biraz daha netleştirmek adına, dörtgeni “kenarları doğru parçası olan, dört kenarlı şekil” şeklinde yeniden ifade ettiğimizde, bu kez de şeklin kapalı olup olmadığına dair bir açıklık bulunmamaktadır. Örneğin, Şekil 2.2.2’deki gibi açık kalan bir yapı da bu tanıma dâhil edilebilir. Dolayısıyla bu tanım da hâlâ dörtgen kavramını tam anlamıyla karşılayamamaktadır. Tanımın eksiksiz ve doğru olması, kavramın doğru anlaşılması açısından büyük önem taşımaktadır.



Şekil 2.5. Kenarları doğru parçası olan dört kenarlı şekil' tanımı için bir örnek (Kaynak: Öztoprakçı ve Çakıroğlu, 2013; Pereira-Mendoza 1993: 774’ten uyarlanmıştır)

Şu hâlde halen bazı eksiklikler vardır ve bunları ortadan kaldırmak amacıyla tanıma, şeklin kapalı olması koşulunu da eklememiz gerekir. Böylece tanım, “kenarları doğru parçasından oluşan, dört kenarlı kapalı şekil” biçimine kavuşur. Ancak bu tanım da hâlâ yetersizdir; çünkü bu ifadeyle, üç köşesi aynı doğru üzerinde bulunan şekillerin dörtgen sayılıp sayılmayacağı belirsiz kalmaktadır. Örneğin, Şekil 2.5’te gösterilen yapıda olduğu

gibi, üç köşesi doğrusal olan şekiller de bu tanıma dâhil olabilir ve bu da dörtgen kavramının matematiksel doğruluğu açısından uygun değildir.



Şekil 2.6. *Kenarları doğru parçası olan dört kenarlı kapalı şekil’ tanımı için bir örnek*
(Kaynak: Pereira-Mendoza 1993: 774’ten uyarlanmıştır)

Bu durumda dörtgeni yeniden tanımlamamız gerekirse “kenarları doğru parçası olan, dört kenarı bulunan, kapalı bir şekil olup, bu dört kenardan herhangi üçünün aynı doğru üzerinde yer almaması” gerektiğini söyleyebiliriz. Ancak bu tanım da yeni bir belirsizliği beraberinde getirir. Eğer şeklin dört köşesinden biri, diğer üç köşenin yer aldığı düzlemde farklı bir düzlemde bulunuyorsa tıpkı Şekil 2.6’daki gibi bu şekli hâlâ dörtgen olarak kabul edebilir miyiz? Bu durumu açıklığa kavuşturmak için tanıma bir unsur daha eklemek gerekir: Dört köşenin de aynı düzlem üzerinde yer alması koşulu.

Usiskin ve Griffin’e (2008) göre “dörtgen” (quadrangle) terimi bazen “dörtkenar” (quadrilateral) ile eş anlamlı olarak kullanılsa da dörtgen kavramı kimi zaman üçü doğrusal olmayan dört noktanın düzlemde doğru parçalarıyla birleştirilmesiyle oluşan kapalı bir şekli ifade eder. Euclid, *Elements* adlı eserinde dörtgenleri sınıflandırmış fakat bu şekilleri ne tanımlamış ne de yorumlamıştır; yalnızca betimleyici bir şekilde ifade etmiştir (Usiskin ve Griffin, 2008: 9, 19). Öte yandan Pereira-Mendoza (1993), dörtgen tanımlarını karşıt örnekler aracılığıyla incelemiş ve dörtgeni “kenarları doğru parçası olan, tüm köşeleri aynı düzlem üzerinde bulunan ve üç köşesi doğrusal olmayan dört kenarlı kapalı şekil” olarak tanımlamıştır (Akt. Öztoprakçı ve Çakıroğlu, 2013: 253). Buna karşılık MEB 10. sınıf ders kitabında dörtgen, “Herhangi üçü doğrusal olmayan dört noktayı birleştiren doğru parçalarının oluşturduğu kapalı şekil” olarak tanımlanmakta ancak bu tanımda tüm köşelerin

aynı düzlemde olduğu vurgusu yer almamaktadır. Bu da bazı özel durumların (örneğin, Şekil 2.1'deki gibi) göz ardı edilmesine neden olmaktadır.

Sonuç olarak, dörtgen kavramını daha açık ve kesin bir biçimde tanımlamak gerekirse “kenarları doğru parçasından oluşan, tüm köşeleri aynı düzlemde yer alan, üç köşesi aynı doğru üzerinde bulunmayan ve dört kenarlı kapalı şekil” ifadesi tercih edilebilir. Bu tanım, dörtgenin sahip olması gereken temel nitelikleri açıkça ortaya koymakta ve kavramın sınırlarını belirginleştirmektedir.

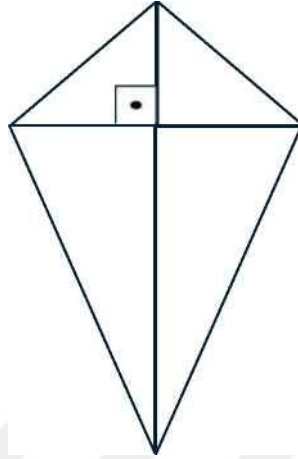
Bu sürecin gösterdiği üzere, bir matematiksel kavramı tanımlamak yalnızca onu adlandırmakla kalmaz, aynı zamanda o kavramın hangi özellikleri taşıdığını ve neyle karıştırılmaması gerektiğini de ortaya koyar. Tanım eksik ya da belirsiz olduğunda farklı bireyler bu tanımı farklı şekillerde yorumlayabilir ve kavramın yanlış anlaşılmasına neden olabilir. Bu nedenle, kavram tanımları ortak bir anlayışı sağlayacak şekilde açık, yeterli ve tanımlayıcı olmalıdır. İzleyen bölümlerde, bu açık tanım üzerine inşa edilen özel dörtgen türleri ele alınacaktır. Bu kapsamda, özel dörtgenlerin yeterli tanımlayıcı özellikleri belirlenerek kapsayıcı ve hariç tutan tanım biçimlerinin bu dörtgenler arasındaki hiyerarşik ilişkileri nasıl etkilediği tartışılacaktır. Ancak bu bölümde odak noktası yalnızca dörtgenlerin tanımı olduğundan dolayı, bu kavramlara yardımcı olabilecek köşegen gibi yan kavramların tanımı ayrıca yapılmayacaktır.

2.2.1. Geometrik hiyerarşi bağlamında deltoid, eşkenar dörtgen ve karenin konumlandırılması

Deltoid kavramını tanımlayabilmek için öncelikle bu geometrik şeklin sahip olduğu özellikleri incelemek ve ardından bu özelliklerden hangilerinin gerek ve yeter tanımlayıcı nitelikte olduğunu belirlemek gerekir. Deltoidlerin genel olarak korudukları temel özellikler kenar, açı, köşegen ve simetri açısından şöyle sıralanabilir:

- İki çift bitişik (komşu) kenarı birbirine eşittir.
- Karşılıklı açılardan bir çifti eşit açı ölçüsüne sahiptir.
- Köşegenlerinden biri diğer köşegeni dik açıyla ortalar.
- Bu dik ortalayan köşegen, aynı zamanda eş olan karşılıklı açılar çiftinin açıortayıdır.
- Açıortay olan köşegen, deltoidin simetri eksenidir.

Bu özellikler deltoidi diğer dörtgenlerden ayıran ve onu karakterize eden niteliklerdir. Deltoidin tanımı yapılırken bu özelliklerin hangilerinin tanım için vazgeçilmez (gerekli) ve hangilerinin tanımı tamamlamaya yettiği (yeterli) olduğuna dikkat edilmelidir.



Şekil 2.7. *Prototip deltoid (uçurtma benzetmesine dayalı)*

Deltoid dörtgenin sahip olduğu temel özelliklerin, bazı diğer dörtgen türlerinde de korunup korunmadığı sorusu karşımıza çıktığında bu özellikleri bütünüyle taşıyan şekillerin eşkenar dörtgen ve kare olduğu görülmektedir. Deltoide ait tüm tanımlayıcı nitelikler, hem eşkenar dörtgende hem de karede bulunur ancak bu iki şekil, deltoidin özelliklerine ek olarak kendilerine özgü bazı niteliklerle de tanımlanırlar. Bu nedenle, "Her eşkenar dörtgen aynı zamanda bir deltoiddir" ve "Her kare bir deltoiddir" ifadesi geçerlidir.

Eşkenar dörtgen, deltoidden farklı olarak aşağıdaki özellikleri de taşır:

- Tüm kenar uzunlukları birbirine eşittir.
- Karşılıklı kenarlar paraleldir.
- Karşılıklı açıların ikişer ikişer ölçüleri eşittir.
- Köşegenleri hem birbirini dik keser hem de birbirlerini ortalar.
- Her iki köşegene göre simetriye sahiptir.
- 180° 'lik bir dönme simetrisine sahiptir.

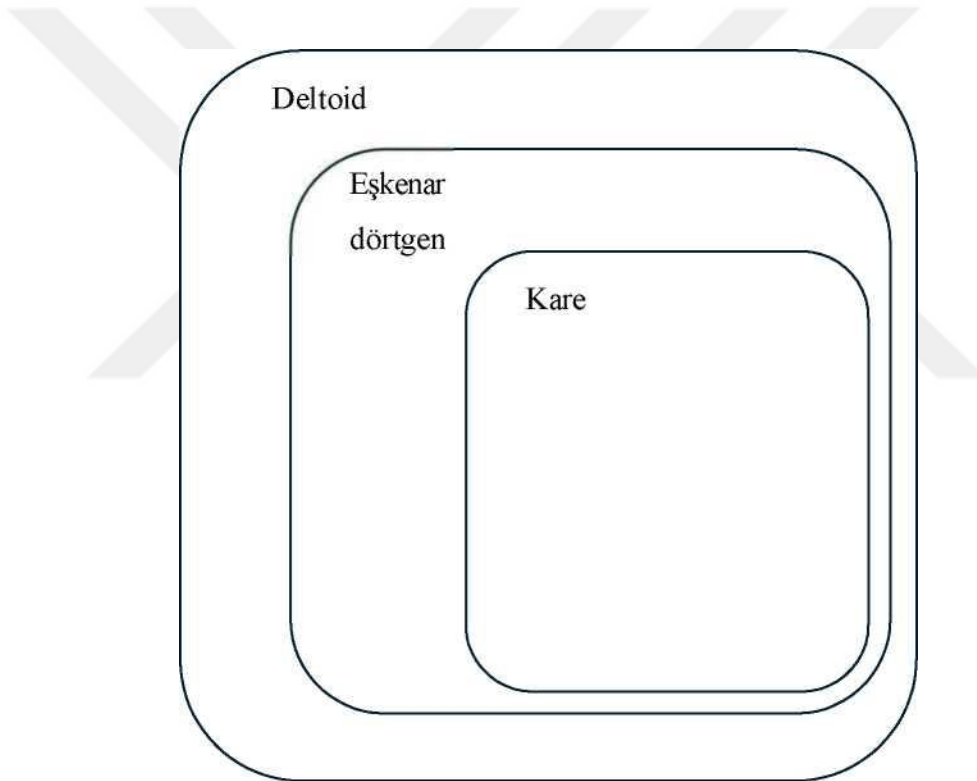
Kare ise deltoid ve eşkenar dörtgene ait tüm özellikleri taşımasının yanı sıra şu ek özelliklere de sahiptir:

- Hem tüm kenarları eşit uzunluktadır hem de tüm açıları 90° 'dir.
- Karşılıklı kenarlar paraleldir.

- Köşegenleri yalnızca birbirini dik kesmekle kalmaz, aynı zamanda uzunlukları da eşittir ve birbirlerini ortalar.
- Her iki köşegene ve kenarların orta noktalarından geçen doğrulara göre simetriktir.
- 90° 'lik bir dönme simetrisine sahiptir.

Tüm bu özellikler birlikte değerlendirildiğinde, kare hem eşkenar dörtgenin hem de deltoidin özel bir durumu olarak konumlanır. Çünkü kare, eşkenar dörtgenin tüm gereksinimlerini karşılamakla kalmaz, onu daha da özel kılan nitelikler içerir.

Dolayısıyla kare, eşkenar dörtgenin bir alt kümesi, eşkenar dörtgen ise deltoidin bir alt kümesi olarak düşünülebilir. Bu ilişki, dörtgenler arasında hiyerarşik bir yapı kurmamıza olanak sağlar.



Şekil 2.8. Deltoid, eşkenar dörtgen ve karenin hiyerarşisini gösterir şema

Deltoid, eşkenar dörtgen ve kare gibi dörtgenler arasında kurulan hiyerarşik ilişkiye bakıldığında en genel yapının deltoid olduğu görülmektedir. Eşkenar dörtgen, deltoidin tüm özelliklerini taşıdığı gibi, ona özgü ek nitelikler de barındırır. Kare ise eşkenar dörtgenin özelliklerine sahip olmakla birlikte daha katı ve belirgin özellikler içerdiğinden bu üçlü yapı içinde en özel şekli temsil eder. Başka bir ifadeyle kare, eşkenar dörtgenin özel bir örneği; eşkenar dörtgen ise deltoidin daha özel bir biçimidir. Bu hiyerarşi, en genel figürden en özel

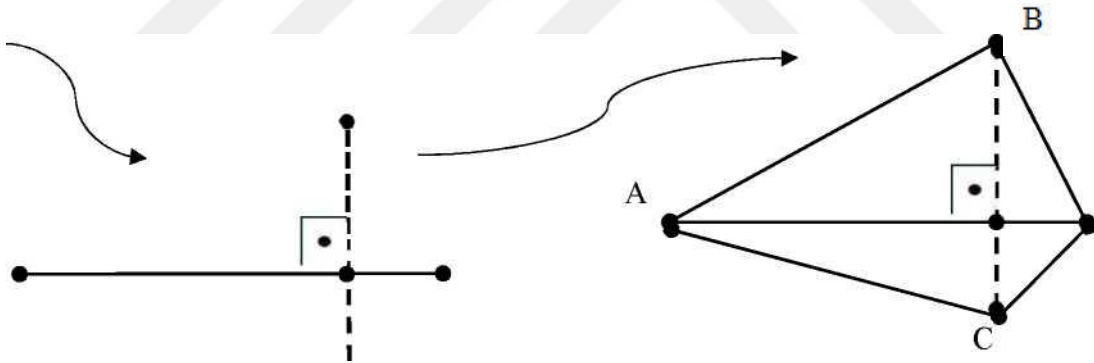
olana doğru bir sınıflandırma yapılmasına olanak tanır ve Şekil 2.8’de bu yapının görsel bir temsili sunulmaktadır.

2.2.2. Deltoid tanımlarına genel bakış

Deltoid kavramı, farklı özellikleri temel alınarak çeşitli şekillerde tanımlanabilir. Bu tanımların bazıları, deltoidi diğer dörtgenlerden ayırmaya yardımcı olurken bazıları, yalnızca deltoid için gerekli ama tanım için yeterli olmayan nitelikleri ifade eder.

2.2.2.1. Kapsayıcı tanımlar

Örneğin, deltoidin köşegenlerine ilişkin bir özelliğe dayanarak “Deltoid, köşegenleri birbirini dik kesen dörtgendir” şeklinde bir tanım yapılabilir. Ancak bu ifadeyi temel olarak bir şekil çizilmeye çalışıldığında köşegenleri dik kesişen ancak deltoid olmayan başka dörtgenlerin de elde edilmesi mümkündür (bkz. Şekil 2.9). Bu durum, köşegenlerin dik kesişmesinin deltoid için gerekli bir koşul olduğunu gösterse de bu özelliğin deltoidi tanımlamak için tek başına yeterli olmadığını ortaya koymaktadır.



Şekil 2.9. “Deltoid, köşegenleri birbirini dik kesen bir dörtgendir” tanımına dayalı çizim örneği

Köşegenlerin yalnızca dik kesiştiğini belirten tanım, deltoidi tanımlamak için yeterli olmadığından bu tanıma başka bir özellik daha eklemek gerekir. Bu noktada, köşegenlerin konumlarına dair ek bir bilgi, tanımı daha belirleyici hale getirebilir. Örneğin, "Deltoid, köşegenlerinden birinin diğerköşegeni dik açıyla ortaladığı dörtgendir" şeklindeki bir ifade, tanımlayıcı olarak daha güçlü görünebilir. Ancak bu tanımın da doğruluğunu test etmek için yalnızca bir köşegenin diğerköşegeni dik olarak ortaladığı bir dörtgen çizdiğimizde ortaya çıkan şekil yine deltoid dışında başka dörtgenleri de kapsayabilir (bkz. Şekil 2.9). Bu durumda, tanım hâlâ deltoid için yeterli koşulları sağlamamaktadır.

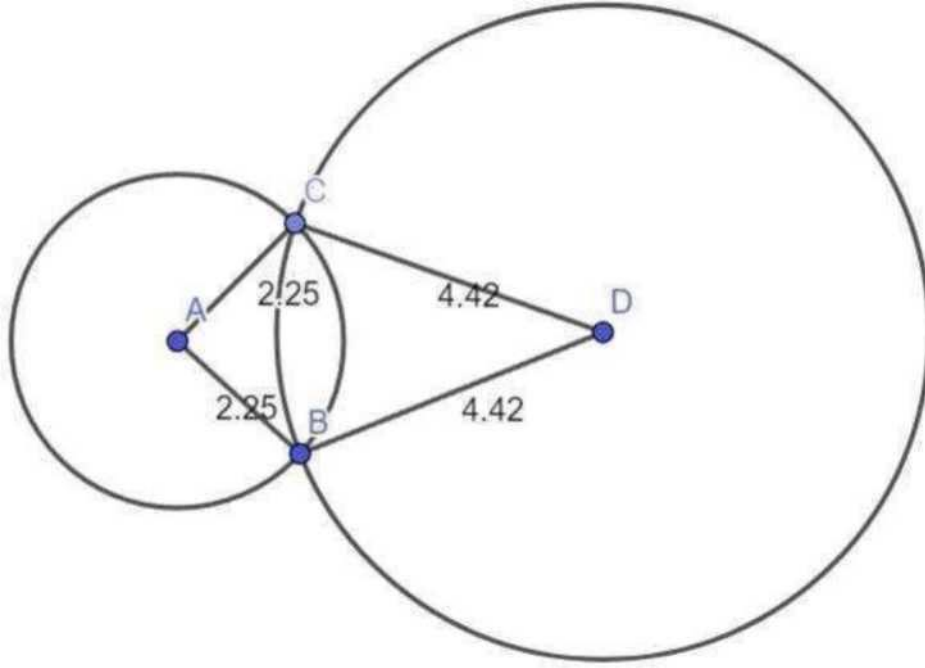
Bu dörtgenin iki çift komşu kenarının eşit uzunlukta olması, köşegenlerden biri ortalanmazken diğerine göre simetrik olması ve ayrıca bir çift karşılıklı açının eşit olması gibi özellikler, kullanılan tanımın deltoidi betimlemeye yettiğini göstermektedir. Bu durumda yalnızca iki temel özellik, bir şekli deltoid olarak tanımlamak için hem gerekli hem de yeterli koşulları sağlar. Diğer deltoid özellikleri ise bu temel niteliklerden türetilir.

Bu noktada, "sadece bir köşegen diğerini dik ortalar" şeklindeki tanımla "en az bir köşegen diğerini dik ortalar" ifadesi arasında ne gibi bir fark olduğu sorulabilir. Daha önce belirtildiği gibi eşkenar dörtgen ve kare de birer özel deltoid olduğundan, deltoide ait tüm temel özellikler bu şekillerde de korunur. Dolayısıyla, eğer hiyerarşik bir ilişki kurmak istiyorsak deltoid tanımına eşkenar dörtgen ve kareyi de dâhil edecek bir çerçeve oluşturmalıyız.

Burada dikkat çeken "en az" ifadesi, eşkenar dörtgen ve karedeki durumları da kapsar. Çünkü bu şekillerde her iki köşegen de birbirini dik olarak ortalayabilir. Dolayısıyla bu tür bir tanım, yalnızca deltoid için değil, aynı zamanda kare ve eşkenar dörtgen gibi daha özel durumlar için de geçerlidir. Bu sebeple, bu tür bir tanım hem daha kapsayıcıdır hem de şekiller arası hiyerarşiyi dikkate alan bir anlayışı yansıtır.

Bu tanıma uygun şekilde çizilecek bir şekil, en genel biçimiyle deltoid prototipi olacaktır. Ancak bu şeklin dışındaki bazı örneklerde, örneğin köşegen uzunluklarının eşit olmaması durumunda veya farklı simetri özellikleri taşıyan durumlarda, elde edilen şeklin kare olup olmayacağı da sorgulanmalıdır.

Şimdi de deltoid kavramını tanımlamak için farklı özellikleri bir araya getirerek alternatif bir tanım oluşturalım. Örneğin, "Deltoid, iki çift komşu kenarının uzunlukları eşit olan ve bir çift karşılıklı açısının ölçüleri birbirine eşit olan dörtgendir" şeklinde bir tanım önerilebilir. Bu tanımda hem kenar hem de açı özelliği kullanılmıştır. Ancak burada sorgulanması gereken önemli noktalar vardır: Bu iki özellik deltoidi tanımlamak için gerçekten gerekli ve yeterli midir? Bu tanımla oluştururken başka bir özelliğin eklenmesine ihtiyaç var mıdır? Ya da bu iki özellikten biri çıkarılsa tanım geçerliliğini korur mu?



Şekil 2.10. “Deltoid, bitişik iki kenar çifti eşit uzunlukta olan dörtgendir” tanımına göre hazırlanmış çizim örneği

Bu soruları adım adım inceleyelim. Öncelikle, yalnızca “bir çift karşılıklı açının eş olması” özelliğini içeren bir tanım yaparsak bu tanım deltoid için yeterli olmaz. Çünkü sadece karşılıklı açıların eş olması, deltoide özgü diğer yapısal özelliklerin -örneğin köşegenlerin dik kesişmesi ya da komşu kenarların uzunluklarının eşit olması gibi- gerçekleşeceğini garanti etmez. Bu nedenle bu özellik tek başına deltoidi ayırt edici şekilde tanımlamak için yetersizdir.

Diğer yandan, “iki çift komşu kenarın uzunluklarının eşit olması” özelliğini içeren bir tanım yaparsak bu durum daha güçlü bir tanımlayıcı ifade olabilir. Nitekim yalnızca bu bilgiyle çizilen bir şekil incelendiğinde deltoide özgü diğer özelliklerin (örneğin simetri ekseni, köşegenlerin birbirini dik kesmesi gibi) kendiliğinden ortaya çıktığı gözlemlenebilir. Şekil 2.10’da gösterilen durum buna örnektir. Bu nedenle, “iki çift komşu kenar uzunluğu eşittir” ifadesi, deltoidi tanımlamak için hem gerekli hem de yeterli bir koşul sağlamaktadır. Dolayısıyla, bu özellik üzerinden yapılan tanım, deltoid için geçerli ve doğru bir tanımdır. Deltoid, sahip olduğu simetri özelliği temel alınarak da tanımlanabilir. Örneğin, “en az bir köşegenine göre simetrik olan dörtgendir” ifadesi, yalnızca deltoidi değil, aynı zamanda deltoidin özel durumları olan eşkenar dörtgen ve kareyi de kapsayan genel bir tanım sunar. Bu tanım doğrultusunda, bir doğru parçası simetri ekseni olarak kabul edildiğinde, bu doğrunun bir tarafında belirlenen bir noktanın simetriğini alarak ve elde edilen noktaları uç

noktalarla birleştirerek bir deltoid oluşturulabilir. Bu durum gösteriyor ki bir köşegene göre simetri özelliği, deltoidi tanımlamak için yeterlidir; çünkü bu özellikten yola çıkarak deltoide özgü diğer tüm nitelikler de türetilebilir.

Ayrıca, deltoidin hem yatay hem dikey köşegenlerine göre simetrik olduğu durumlarda eşkenar dörtgen ve kare gibi daha özel şekiller elde edilir. Bunun yanında, deltoidi tanımlamak için kullanılan bir başka yaklaşım da "taban uzunlukları eşit olan iki ikizkenar üçgenin tabanlarının çakıştırılmasıyla elde edilen dörtgendir" ifadesidir. Bu tanım da yalnızca deltoidi değil, onun özel halleri olan eşkenar dörtgeni ve kareyi de kapsayan kapsayıcı bir tanım niteliğindedir.

2.2.2.2. Harici tanımlar

Daha önce üzerinde durduğumuz deltoid tanımları, eşkenar dörtgen ve kare gibi deltoidin özel örneklerini de kapsayan genelleyici ifadelerdir. Ancak bu kapsayıcı yaklaşımların dışında, deltoidi bu özel şekillerden ayıran sınırlayıcı tanımlar da yapılabilir. Örneğin, “komşu kenar çiftlerinin uzunlukları farklı olan, iki çift eş uzunluklu kenarı bulunan dörtgen” biçimindeki bir tanım, deltoidi eşkenar dörtgen ve kareden ayırarak onları dışarda bırakır ve yalnızca daha dar bir sınıfı işaret eder. Bu tür tanımlar, şekillerin içerdiği küçük bir ayrıntının tanıma eklenmesiyle bk anlam farkları yaratabildiğini ortaya koymaktadır. Alternatif olarak “deltoid, iki çift eş uzunluktaki komşu kenara sahip olan ve karşılıklı kenarlarının uzunlukları birbirine eşit olmayan dörtgendir” ifadesi de bir hariç tutan tanım niteliğindedir. Simetri özelliğine dayalı bir hariç tutma yapılmak istendiğinde ise “yalnızca bir köşegenine göre simetrik olan dörtgen” ifadesi yeterli olacaktır. Bu tür ifadeler, deltoidi kare ya da eşkenar dörtgen gibi özel şekillerden bağımsız bir kavram olarak sınıflandırır.

2.2.3. Eşkenar dörtgenin tanımları

Bu noktada, deltoidin özel bir rneği olan eşkenar dörtgen için çeşitli tanım biçimlerini inceleyebiliriz.

İlk olarak kenar özelliklerinden yola çıkıldığında, “bütün kenar uzunlukları birbirine eşit olan dörtgen” ifadesi, eşkenar dörtgeni tanımlamada yeterli olacaktır. Ayrıca bu tanım, eşkenar dörtgenin daha özel bir hali olan kareyi de içine alacak biçimde kapsayıcıdır. Bu tanım temel alındığında en genel haliyle tüm kenarları eşit uzunlukta olan her dörtgen, eş Usiskin ve Griffin (2008), eşkenar dörtgen tanımlarına ilişkin yaptığı incelemelerde,

literatürde en sık karşılaşılan tanımları üç grupta toplamıştır: (i) “Dört eş kenarı olan paralelkenar” tanımı, eşkenar dörtgeni bir paralelkenarın özel durumu olarak ele alırken (ii) “En az iki ardışık kenarı eş olan paralelkenar” ifadesi, eşkenar dörtgeni daha geniş bir perspektiften tanımlar; (iii) “Dört kenarı da eşit uzunlukta olan dörtgen” biçimindeki tanım ise paralellik koşulunu içermediği için daha kapsayıcıdır. Bu tanımlar arasında, bazıları kapsayıcı, bazıları ise hariç tutucu özellikler taşımaktadır. Örneğin, üçüncü tanım dört kenarı eşit tüm dörtgenleri kapsarken ilk tanım yalnızca paralelkenarların alt sınıfı olan eşkenar dörtgenleri tanımlar. Dolayısıyla, eşkenar dörtgenin nasıl tanımlandığı, onu diğer dörtgen türleriyle ilişkilendirme biçimini ve sınıflandırma anlayışını doğrudan etkilemektedir. Eşkenar dörtgen diye adlandırılırken dik açı içeren hali kareyi temsil eder.

Bir başka tanım biçimi, “bir çift komşu kenarı eşit uzunlukta ve karşılıklı kenarları paralel olan dörtgen” ifadesidir. Burada tüm kenar çiftlerinin eşitliği açıkça belirtilmese de paralel olma koşulu bu sonucu zaten içerdiğinden, ifade yeterlidir.

Simetri özellikleri dikkate alınarak yapılacak tanımlarda, “birbirine dik iki simetri doğrusuna sahip dörtgen” tanımı düşünülebilir. Ancak bu tanım, bazı dikdörtgenleri de kapsayabileceği için yeterince ayırt edici değildir. Bunun yerine, “eşkenar dörtgen, karşılıklı köşelerden geçen ve birbirine dik iki simetri doğrusuna sahip dörtgendir” şeklindeki ifade, eşkenar dörtgeni diğer dörtgenlerden net biçimde ayırır. Ayrıca “her iki köşegenine göre simetrik olan dörtgen” şeklinde de tanımlanabilir.

Köşegenlere dayalı bir tanım yapmak gerekirse “köşegenleri hem dik kesişen hem de birbirini ortaltayan dörtgen” şeklindeki ifade, eşkenar dörtgeni tanımlamak için yeterli olur ve kareyi de kapsar.

Şimdiye kadar verilen tanımların tümü dörtgen kavramı üzerine inşa edilmiştir. Ancak bir kavramın daha genel bir kavrama dayanarak tanımlanması da mümkündür. Örneğin, “eşkenar dörtgen, köşegenleri birbirini ortaltayan bir deltoiddir” ifadesi, önceden tanımlanmış olan deltoid kavramına dayanır ve bu yolla eşkenar dörtgeni niteleyen ek bir özellik katılmış olur. Benzer şekilde, “eşkenar dörtgen, iki çift karşılıklı açısı eş olan deltoiddir” tanımı da geçerlidir. Deltoide yalnızca bir çift karşılıklı açı eşkenar olduğundan, eşkenar dörtgeni özel yapan diğer çiftin de eşitliğidir. Böylece daha genel bir kavram üzerinden yapılan tanımda, yalnızca özel durumu belirten nitelik vurgulanarak tanım oluşturulmuş olur.

2.2.3.1. Kareyi dışarıda bırakan eşkenar dörtgen tanımları

Eşkenar dörtgen kavramını kareyi kapsamadan tanımlamak istersek bazı sınırlayıcı ifadelere başvurmak gerekir. Örneğin “kenar uzunlukları birbirine eşit ama dik açı içermeyen dörtgen” veya “kenarları eşit uzunlukta olup, köşegen uzunlukları farklı olan dörtgen” şeklinde yapılan tanımlar, kareyi dışarıda bırakır.

Simetri üzerinden düşünürsek “her iki köşegenine göre simetrik olan ancak karşılıklı kenarlarının orta noktalarından geçen doğrulara göre simetrik olmayan dörtgen” ifadesi de kareyi kapsamayacak şekilde eşkenar dörtgeni tanımlar. Benzer şekilde, “farklı uzunluklara sahip köşegenlere sahip ve bu köşegenlere göre simetrik olan dörtgen” tanımı da kullanılabilir.

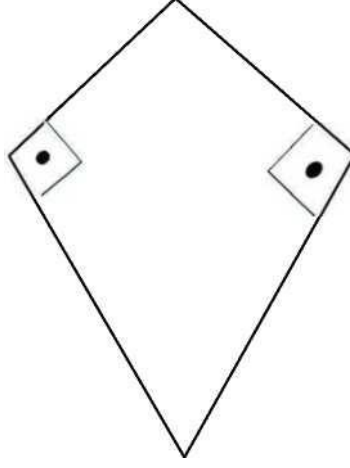
Alternatif olarak, “yalnızca köşegenlerine göre simetrik olan dörtgendir” ifadesi de doğrudur; çünkü kare, köşegenlere ek olarak kenarların orta dikmelerine göre de simetriğe sahiptir.

Eğer tanım köşegenlere odaklanacaksa “farklı uzunluktaki köşegenleri birbirini dik kesen ve ortalayan dörtgendir” şeklinde ifade edilen tanım kareyi kapsamaz ve yalnızca eşkenar dörtgeni belirtir.

2.2.3.2. Karenin özelliklerine dayalı tanımları

Karenin tanımında birden fazla özellik grubu dikkate alınabilir. Kenar özelliğine odaklanıldığında, “tüm kenarları eşit uzunlukta olan ve bir açısı 90 derece olan dörtgen” tanımı yapılabilir. Bu tanıma göre, diğer üç açının da dik olduğu teoremler yoluyla gösterilebilir. Simetri üzerinden tanım yapılacaksa “köşegenleri eşit uzunlukta olan ve bu köşegenlere göre simetrik olan dörtgendir” ya da “köşegenlerine ve kenarlarının orta dikmelerine göre simetrik olan dörtgendir” ifadeleri doğru olur. Köşegen temelinde yapılacak bir tanımda ise “köşegenleri eşit uzunlukta olup, dik kesişerek birbirini ortalayan dörtgendir” denilebilir. Kare aynı zamanda eşkenar dörtgen ya da deltoid özellikleri kullanılarak da tanımlanabilir. Örneğin “bir açısı 90 derece olan eşkenar dörtgendir” ya da “köşegenleri eşit uzunlukta olan eşkenar dörtgendir” tanımları bu duruma örnektir.

Deltoid temel alınarak yapılabilecek tanımlar arasında “köşegenleri eşit uzunlukta olan deltoiddir” veya “üç açısı 90 derece olan deltoiddir” gibi ifadeler yer alabilir. Burada özellikle “üç açı 90 derece” vurgusu yapılmaktadır çünkü sadece iki dik açıya sahip bir deltoid şeklen kare olmayabilir. Dolayısıyla üçüncü dik açı, kareyi tanımlamak açısından belirleyici rol oynar.



Şekil 2.11. İki iç açısı 90 derece olan deltoid

2.2.4. İkizkenar yamuktan kareye uzanan kavramsal hiyerarşi

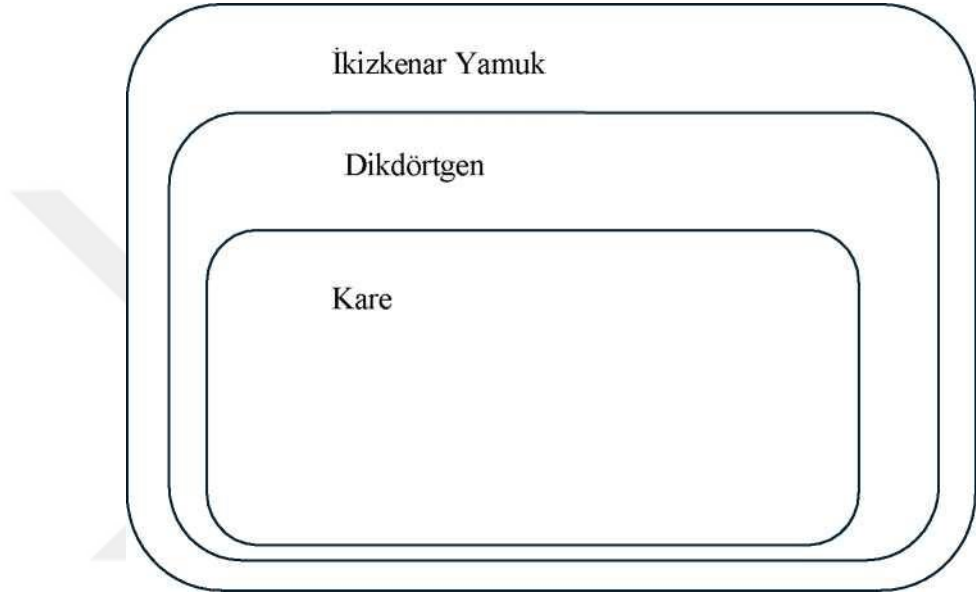
İkizkenar yamuk kavramını anlamadan önce, bu dörtgen türüne ait temel ve karakteristik özellikleri hatırlamak gerekir. İkizkenar yamuk, yapısal olarak belirli kenar, açı, köşegen ve simetri niteliklerini taşır. Bu özellikler şöyle sıralanabilir:

- Bir çift kenarı birbirine paraleldir,
- Diğer çift kenar (paralel olmayanlar) eşit uzunluktadır,
- Komşu açılar çiftler halinde birbirine eşittir,
- Karşılıklı açılar bütünler açılardır (toplamları 180°),
- Köşegenleri eşit uzunluktadır,
- Köşegenler, paralel kenarların uzunlukları oranında birbirini böler,
- Paralel kenarların orta noktalarından geçen doğru, şeklin simetri eksenidir.

Bu tanımsal özellikleri incelediğimizde, aynı niteliklerin dikdörtgen ve karede de mevcut olduğunu görürüz. Bu durum, dikdörtgen ve kareyi ikizkenar yamuğun özel halleri olarak sınıflandırmamıza imkân verir. Yani, her dikdörtgen bir ikizkenar yamuktur; aynı şekilde kare de dikdörtgenin özel bir türü olarak ikizkenar yamuğun tüm özelliklerini taşımakla kalmaz, fazladan bazı niteliklere de sahiptir.

Karenin yalnızca karşılıklı kenarları değil, tüm kenarları eşit uzunluktadır ve köşegenleri birbirini dik keser. Bu fazladan özellikler, kareyi yalnızca özel bir dikdörtgen değil, aynı zamanda ikizkenar yamuğun da en özel örneği haline getirir. Böylece bu üç şekil arasındaki kavramsal hiyerarşi, genelden özele doğru sırasıyla ikizkenar yamuk $\wedge$ dikdörtgen $\wedge$ kare şeklinde tanımlanabilir. Bu ilişki Şekil 2.12 ile görsel olarak da desteklenmektedir.

Öte yandan, paralelkenar, deltoid ve eşkenar dörtgen gibi diğer dörtgen türleri bu hiyerarşide yer almaz. Bunun nedeni, ikizkenar yamukta bulunan bazı kritik özelliklere sahip olmamalarıdır. Örneğin; bu şekillerde paralel kenarların orta noktalarından geçen doğru simetri eksenidir, köşegenleri eşit uzunlukta değildir ya da eş taban açıları bulunmamaktadır. Bu nedenle, söz konusu şekiller ikizkenar yamuğun özel halleri olarak kabul edilemezler.



Şekil 2.12. *İkizkenar Yamuk, dikdörtgen ve karenin hiyerarşik yapısını gösterir şema*

2.2.4. İkizkenar yamuk tanımının kapsayıcı yaklaşımlarla ele alınması

Daha önce dikdörtgenin ve karenin, ikizkenar yamuğa özgü tüm özellikleri taşıdığı ve bu nedenle bu dörtgenlerin ikizkenar yamuk sınıfına dâhil edilebileceği belirtilmişti. Bu çerçevede, şimdi de bu sınıfa ait dörtgenlerin kapsayıcı ve dışlayıcı (hariç tutan) tanımları üzerinde durulacaktır.

İkizkenar yamuk, dikdörtgen ve kare gibi özel durumları da içine alan genel bir tanım geliştirmeye çalışalım. Örneğin, "en az bir çift karşılıklı kenarı eşit uzunlukta olan dörtgen" tanımı düşünüldüğünde bu ifade, ikizkenar yamuk için gerekli bir koşul sunar; ancak tek başına yeterli bir tanım değildir. Çünkü bu koşulu sağlayan bazı dörtgenler, örneğin paralelkenar ve ikizkenar, yamuk değildir. Bu durum, paralelkenarın tanıma uygun olup kavrama ait olmaması sebebiyle karşıt örnek işlevi görür ve tanımın yetersizliğini ortaya koyar.

Tanımı biraz daha geliştirmek adına "en az bir çift karşılıklı kenarı eşit uzunlukta ve en az bir çift açısı eş olan dörtgen" gibi bir ifade kullanıldığında ise yine paralelkenarın bu koşulları sağladığı görülür. Çünkü paralelkenarın yalnızca karşılıklı kenar uzunlukları değil, aynı zamanda açılı ölçüleri de birbirine eşittir. Bu nedenle tanım hâlâ yeterli ayırt ediciliğe sahip değildir.

Bu eksikliği gidermek için, eş açıların "komşu açılar" olduğunu açıkça belirttiğimizde tanım daha özgül hâle gelir. Böylelikle karşılıklı açıların eşitliği durumunu dışlamış oluruz ve paralelkenar gibi karşıt örneklerin kapsam dışında kalması sağlanır. Bu bağlamda tanım şu şekilde yeniden yapılandırılabilir:

"En az bir çift karşılıklı kenarı eşit uzunlukta ve en az bir çift komşu açısı eş olan dörtgen." Bu tanım, ikizkenar yamuk kavramını hem yeterli hem de geçerli biçimde tanımlayan kapsayıcı bir tanım olur.

2.2.4.1. İkizkenar yamuk kavramının farklı tanımlarla inşası

Usiskin ve Griffin'e (2008) göre yamuk, iki farklı şekilde tanımlanabilir: Kapsayıcı tanım, "en az bir çift kenarı paralel olan dörtgen" ifadesiyle paralelkenarları da içine alarak, onları özel birer yamuk türü olarak değerlendirirken hariç tutan tanım ise "tam olarak bir çift kenarı paralel olan dörtgen" şeklindedir ve paralelkenarları yamuğun dışında bırakarak iki ayrı dörtgen sınıfı oluşturur. MEB 5. sınıf ve lise 2. sınıf ders kitaplarında yer alan tanımlar ise kapsayıcı tanımı esas alarak, paralelkenarların da yamuk türü olarak değerlendirilmesini sağlar. Bu bağlamda yamuk kavramı, tanım tercihlerine bağlı olarak ya daha geniş bir çerçevede ele alınmakta ya da sınırlı bir şekilde tanımlanarak paralelkenarlardan ayrılmaktadır. Daha önce elde ettiğimiz tanımlarda olduğu gibi, "en az" ifadesi ile oluşturulan kapsayıcı tanımlar, yalnızca ikizkenar yamukları değil, bu sınıfa dâhil olan özel dörtgenleri de (örneğin dikdörtgen ve kare) kapsamaktadır. Böylelikle, "en az bir çift karşılıklı kenarı eşit uzunlukta ve en az bir çift komşu açısı eş olan dörtgen" şeklindeki tanım, bu sınıfın hem genel (prototip) hem de özel örneklerini içeren geçerli ve yeterli bir tanım olarak kabul edilebilir. Alternatif bir yaklaşımda, kenar özellikleri üzerinden ilerleyerek "en az bir çift karşılıklı kenarı eşit uzunlukta ve en az bir çift kenarı paralel olan dörtgen" şeklinde bir tanım önerilebilir. Ancak bu ifade, yalnızca gerekli koşulları karşılamakta, tanım açısından yeterli olmamaktadır. Çünkü paralelkenar, bu koşulları sağlamakla birlikte ikizkenar yamuk kategorisine girmez. Dolayısıyla, bu ifade, geçerli bir tanım oluşturmak için yeterli değildir.

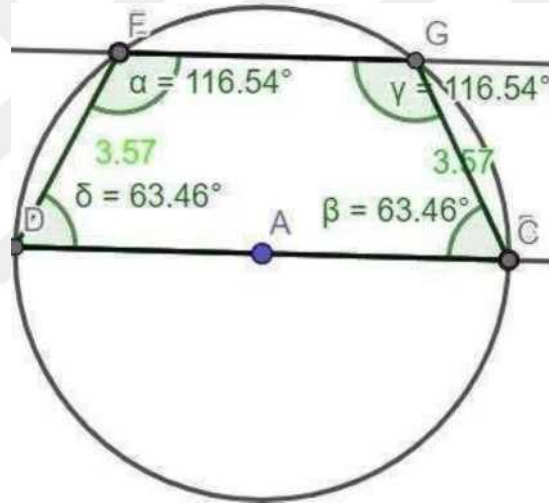
Bu eksikliği gidermek adına, paralelkenarın dışarıda bırakılmasını sağlayacak ek bir özellik tanıma eklenebilir. Örneğin "en az bir çift kenarı paralel olan ve köşegenleri eşit uzunlukta olan dörtgen" tanımı, paralelkenar ve diğer bazı dörtgen türlerini dışarda bırakırken yalnızca ikizkenar yamukları kapsar. Benzer şekilde, "karşılıklı kenarları eşit uzunlukta olan ve köşegenleri eşit olan dörtgen" ifadesi de ikizkenar yamuk için geçerli ve yeterli bir tanım sunar. Deltoid ve eşkenar dörtgen gibi diğer dörtgenler bu tanım dışındadır çünkü köşegenleri eşit değildir. Kenar ve açı özelliklerini birlikte kullanmak da tanım açısından güçlü bir yaklaşımdır. Örneğin, "en az bir çift kenarı paralel ve karşılıklı açıları bütünler olan dörtgen" ya da "karşılıklı kenarları eşit ve karşılıklı açıları bütünler olan dörtgen" ifadeleri, ikizkenar yamuğu tanımlamada kullanılabilir. Bu özelliklerin tamamı ikizkenar yamuklarda mevcuttur ve diğer dörtgen türleri tarafından sağlanmaz. Paralelkenarda komşu açılar bütünlerdir, karşılıklı olanlar değil. Eşkenar dörtgende karşılıklı açılar eşit olduğu için bütünler olabilmesi için açılarının 90 derece olması gerekir ki bu da sadece kare için geçerlidir. Zaten kare, ikizkenar yamuk sınıfına dâhildir. Deltoid ise ne paralel kenar taşır ne de karşılıklı kenarları eşittir; bu nedenle bu sınıfa dâhil edilemez.

Köşegenler üzerinden de tanım oluşturmak mümkündür. "Köşegenleri eşit uzunlukta olan dörtgen" ifadesi, ikizkenar yamuk için gerekli bir özellik sunsa da tek başına yeterli değildir. Çünkü herhangi bir dörtgende köşegenler, eşit uzunlukta olabilir ama diğer gerekli özellikleri taşımayabilir. Bu nedenle, tanımı daha belirleyici kılmak için "köşegenleri eşit uzunlukta ve birbirini aynı oranda kesen dörtgen" şeklinde ifade edilmelidir. Bu özellikler bir arada verildiğinde çizilecek dörtgen, ikizkenar yamuğun tüm karakteristik özelliklerini taşır. Bu da gösteriyor ki tanımda belirtilen nitelikler, diğer tanımlayıcı özelliklerin de varlığını zorunlu kılar.

Sadece açı özelliğini dikkate alarak bir tanım yapmak istersek "iki çift eşit ölçüye sahip komşu açıları bulunan dörtgen" ifadesi yeterli ve geçerli bir tanım sunar. Bu ifade, ikizkenar yamuğun yapısal özelliklerini yansıtmak açısından işlevseldir; çünkü bir çift eş komşu açıya sahip olacak şekilde bir şekil oluşturulduğunda diğer çiftin de eşit olması gerekliliği, aynı zamanda karşılıklı kenarların paralel olması anlamına gelir. Bu durum ise ikizkenar yamuğun temel niteliklerinden biridir. Tanımın gerektirdiği koşullar sağlandığında ortaya çıkan en genel dörtgen türü ikizkenar yamuk olur. Özel durumlar olarak dikdörtgen ve kare de bu tanımın kapsama alanına girer.

Simetri özelliği esas alındığında "en az bir çift karşılıklı kenarın orta noktalarından geçen doğruya göre simetrik olan dörtgen" ifadesi, ikizkenar yamuğu tanımlamak için

yeterlidir. Bu simetri özelliği, yalnızca ikizkenar yamuklarda bulunmakla kalmaz; aynı zamanda bu tanımlı sağlayan başka bir özel dörtgen türü de yoktur. Tanımda yer alan "en az" ifadesi sayesinde, iki çift karşılıklı kenarın orta noktalarından geçen doğrulara göre simetrik olan dörtgenler de bu tanım kapsamına dâhil edilir. Bu durumda kare ve dikdörtgen gibi özel durumlar da ikizkenar yamuk sınıfına dâhil edilebilir. Bu tanım, ikizkenar yamuğun sadece prototipini değil, aynı zamanda onu kapsayan daha özel dörtgenleri de içeren genişletilmiş bir tanımlama örneğidir. Şu ana kadar ikizkenar yamuk tanımlarını hep dörtgen temelinde inşa ettik. Ancak farklı bir bakış açısıyla, açı özelliklerinden yola çıkarak ikizkenar yamuğun "kirişler dörtgeni" özelliği taşıdığını da söyleyebiliriz. Çünkü ikizkenar yamukta karşılıklı açılar birbirini 180° 'ye tamamladığı için, köşeleri bir çember üzerine yerleştirilebilecek bir dörtgen (yani çevrel dörtgen) olarak da tanımlanabilir.



Şekil 2.13. *İkizkenar yamuğun çevrel dörtgen (kirişler dörtgeni) olarak gösterimi*

2.2.4.2. İkizkenar yamuk tanımında kirişler dörtgeni yaklaşımı

İkizkenar yamuk, kirişler dörtgeni temel alınarak da tanımlanabilir. Örneğin; “karşılıklı kenarlarından en az biri eşit uzunlukta olan bir kirişler dörtgeni” ya da “en az bir çift paralel kenara sahip bir kirişler dörtgeni” şeklinde yapılan tanımlar, bu dörtgenin temel özelliklerini içermektedir. Burada kullanılan “kirişler dörtgeni” kavramı, karşılıklı açılarının toplamının 180° olması özelliğini doğrudan içerdiği için, bu özellik ayrıca belirtilmeden tanıma dâhil edilmiş olur. Aslında bu tanımlar, ikizkenar yamuk daha önce dörtgen temelli tanımlanırken de yapılmıştı ancak orada kirişler dörtgeni ifadesi yer almadığı için, karşılıklı açılar bütünlerdir özelliği ayrıca belirtilmişti. Benzer şekilde, “komşu açılarından en az biri eşit olan bir kirişler dörtgeni” ya da “köşegen uzunlukları eşit olan bir kirişler dörtgeni”

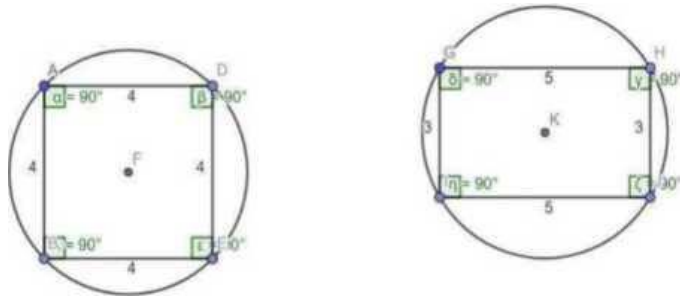
tanımları da ikizkenar yamuk için yeterli özellikleri sağlar; çünkü bu özelliklerden diğer özelliklerin türetilmesi mümkündür.

2.2.4.3. İkizkenar yamuk için hariç tutan tanımlar

Bu kez, yalnızca ikizkenar yamukları tanımlayan ve özel durumlarını (dikdörtgen, kare) kapsam dışı bırakan tanımlar ele alınabilir. Örneğin; “bir çift kenarı paralel olan, diğer çift kenarı eşit uzunlukta fakat paralel olmayan dörtgendir” şeklindeki bir tanım, kare ve dikdörtgeni dışarıda bırakır ve doğrudan ikizkenar yamuğun prototipine ulaşılmasını sağlar. Burada daha önce kullandığımız “en az” ifadesi yerine “yalnızca” ya da “sadece” gibi sınırlayıcı ifadeler tercih edilirse özel durumları hariç tutan tanımlar oluşturulabilir. Bu bağlamda şu tanımlar örnek verilebilir:

- Sadece bir çift kenarı paralel ve köşegenleri eşit uzunlukta olan dörtgendir.
- Sadece bir çift kenarı paralel ve karşılıklı açıları bütünler olan dörtgendir.
- Sadece bir çift karşılıklı kenarın orta noktalarından geçen doğruya göre simetrik olan dörtgendir.
- Sadece bir çift eşit uzunluktaki karşılıklı kenarı olan bir kirişler dörtgenidir.

Bu tür hariç tutan tanımların oluşturulmasında bir başka yöntem ise daha kapsayıcı tanımlardan dikdörtgen ve kareye özgü olan nitelikleri çıkarmaktır. Örneğin; “eşit uzunluktaki köşegenleri birbirini aynı oranda kesen, fakat bu oran birim olmayan dörtgendir” ya da “eşit uzunluktaki köşegenleri birbirini ortalamayan dörtgendir” şeklinde tanımlar bu şekilde elde edilebilir. Alternatif olarak “iki çift komşu açısı eşit olan fakat hiçbir açısı dik olmayan dörtgendir” tanımı da kare ve dikdörtgeni kapsam dışında bırakır.



Şekil 2.14. Kare ve dikdörtgenin kirişler dörtgeni olarak temsili

Dikdörtgen, geometrik olarak hem ikizkenar yamuk hem de kirişler dörtgeni özelliklerini taşıyan bir şekildir. Örneğin, "iki çift kenarı paralel olan bir kirişler dörtgenidir"

tanımı, bu iki özelliği bir araya getirerek en genel haliyle dikdörtgeni tanımlar. Bu tanıma dayalı bir çember üzerine iki çift paralel kenar yerleştirildiğinde ortaya çıkan şekil klasik dikdörtgendir. Eğer bu kenar çiftleri eşit uzunlukta çizilirse elde edilen özel durum kare olur. Bu bakımdan söz konusu tanım, kareyi de içeren kapsayıcı bir dikdörtgen tanımıdır.

Kirişler dörtgeni temel alınarak yapılabilecek diğer tanımlar ise şunlar olabilir:

- "Köşegenleri birbirini ortalayan bir girişler dörtgenidir."
- "Her iki köşegeni çemberin çapı olan bir girişler dörtgenidir."

Dikdörtgeni yalnızca dörtgen temelinde tanımlamak istersek şu tanımları kullanabiliriz:

- "Üç açısı 90° olan dörtgendir" (dördüncü açının da 90° olduğu, geometrik olarak kanıtlanabilir).
- "Karşılıklı kenarları paralel ve en az bir açısı dik olan dörtgendir."
- "Köşegenleri eşit uzunlukta olan ve birbirini ortalayan dörtgendir."

Ayrıca dikdörtgeni ikizkenar yamuk üzerinden tanımlayarak şöyle de ifade edebiliriz:

- "Köşegenleri birbirini ortalayan bir ikizkenar yamuktur."
- "İki çift kenarı paralel olan bir ikizkenar yamuktur."

2.2.5. Dikdörtgenin hariç tutan tanımları

Eğer dikdörtgeni, kareyi kapsamayan şekilde yalnız başına tanımlamak istersek tanımın içine kareyi dâhil eden özellikleri özellikle dışarıda bırakmamız gerekir. Bu doğrultuda bazı özgün tanımlar şunlar olabilir:

- "İki çift kenarı paralel olan ancak karşılıklı kenarlarının uzunlukları birbirinden farklı olan bir girişler dörtgenidir."
- "Komşu kenar uzunlukları eşit olmayan, iki çift paralel kenara sahip bir girişler dörtgenidir."
- "Köşegenleri birbirini ortalayan fakat dik kesmeyen bir girişler dörtgenidir."
- "Her iki köşegeni de çemberin çapı olan ancak birbirini dik kesmeyen bir girişler dörtgenidir."
- "Karşılıklı kenar uzunlukları eşit olan ancak komşu kenarları eşit olmayan bir girişler dörtgenidir."

Bu tanımlar, kareye ait olan simetri ve eşitlik özelliklerini dışlayarak yalnızca prototip dikdörtgeni kapsayacak şekilde yapılandırılmıştır.

Dörtgen ve İkizkenar Yamuk Temelli Hariç Tutan Dikdörtgen Tanımları

Dikdörtgeni, kareyi dışlayacak biçimde tanımlamak amacıyla yapılan hariç tutan tanımlar, onu diğer özel dörtgenlerden ayırmaya yönelik belirleyici özellikler içerir. Örneğin, "üç açısı 90° olan ve köşegenleri birbirini dik kesmeyen dörtgendir" ifadesi, kareyi dışarda bırakacak biçimde sadece dikdörtgene özgü bir tanım sunar. Benzer şekilde, "köşegenleri birbirini ortalayan ancak dik kesmeyen bir ikizkenar yamuktur" ya da "komşu kenar uzunlukları farklı olan, iki çift kenarı paralel bir ikizkenar yamuktur" tanımları da kare kapsamını dışarda bırakan alternatif tanımlardır. Bu tür ifadeler, dikdörtgenin yalnız başına tanımlanmasını ve kareden ayrıştırılmasını sağlar.

Karenin İkizkenar Yamuk ve Kirişler Dörtgeni Bağlamında Tanımlanması

Kare, daha önce dörtgen ve eşkenar dörtgen temelinde tanımlanmıştı. Bunun yanında, kareyi girişler dörtgeni veya ikizkenar yamuk yapısı üzerinden tanımlamak da mümkündür. Bu bağlamda kare şu şekilde tanımlanabilir:

- “Tüm kenar uzunlukları eşit olan bir girişler dörtgenidir.”
- “Köşegenleri birbirini dik olarak ortalayan bir girişler dörtgenidir.”
- Aynı biçimde, kareyi ikizkenar yamuk temelinde tanımlayacak olursak şu ifadeler uygun olur:
- “Bütün kenar uzunlukları eşit olan bir ikizkenar yamuktur.”
- “Köşegenleri birbirini dik kesip ortalayan bir ikizkenar yamuktur.”

Bu tanımlar sayesinde kare, kendinden daha genel olan dörtgen sınıfları içerisinde yapılandırılarak hem özel hem de kapsayıcı yönleriyle daha sistematik biçimde kavranabilir.

2.2.5.1. Paralelkenar, dikdörtgen, eşkenar dörtgen ve karenin birbirleriyle olan yapısal ilişkisi

Usiskin ve Griffin (2008), bir dörtgenin paralelkenar olarak kabul edilebilmesi için aşağıdaki koşullardan en az birini sağlamasının yeterli olduğunu belirtmişlerdir:

- İki çift karşılıklı kenarın eşit uzunlukta olması,
- İki çift karşılıklı açının eş ölçüde olması,
- Köşegenlerin birbirini ortalaması,
- Şeklin dönme simetrisine sahip olması. Ayrıca, şu koşullar da paralelkenar tanımlamak için yeterlidir:
- Bir çift karşılıklı kenarın hem paralel hem de eşit uzunlukta olması,

- İki çift komşu açının bütünler olması,
- Köşegenin dörtgeni aynı yönlü iki eş üçgene ayırması (Usiskin ve Griffin, 2008: 22).

Paralelkenar geometrik şekli, taşıdığı temel özellikler bakımından birçok özel dörtgeni içinde barındıran genel bir yapıdır. Bu özellikler şu şekilde sıralanabilir:

- Karşılıklı iki kenar çifti birbirine paraleldir.
- Karşılıklı kenar çiftlerinin uzunlukları eşittir.
- Karşılıklı açı çiftleri ölçü bakımından birbirine eşittir.
- Köşegenleri birbirini tam ortadan iki eş parçaya böler.

Bu dört temel özellik, dikdörtgen, eşkenar dörtgen ve kare gibi daha özel dörtgen türlerinde de aynen korunur. Dolayısıyla dikdörtgen, eşkenar dörtgen ve kare, paralelkenarın özel alt kümeleri olarak değerlendirilir.

Daha önce de ifade edildiği üzere kare, hem dikdörtgenin hem de eşkenar dörtgenin tüm niteliklerini taşıyan özel bir dörtgendir; dolayısıyla her iki şeklin de daha sınırlı ama birleşik bir örneğidir. Öte yandan, dikdörtgen ve eşkenar dörtgen arasında doğrudan bir hiyerarşik ilişki kurulamaz. Bunun nedeni, her iki şeklin birbirinden farklı ayırt edici özellikler taşımasıdır. Örneğin:

- Dikdörtgende tüm açıların ölçüsü 90° iken eşkenar dörtgende bu koşul sağlanmaz.
- Eşkenar dörtgende tüm kenar uzunlukları birbirine eşittir, ancak bu özellik dikdörtgende geçerli değildir. Bu farklılıklara rağmen kare, bu iki özel dörtgenin ortak özelliklerini bünyesinde toplar ve bu açıdan hiyerarşinin en özel örneği olarak değerlendirilir.

2.2.6. Paralelkenarın tanımları

2.2.6.1. Kapsayıcı yaklaşımlar

Paralelkenarı, sahip olduğu temel özellikler doğrultusunda ve bu özelliklerin dikdörtgen, eşkenar dörtgen ve kare gibi özel şekillerde de geçerli olduğunu göz önünde bulundurarak daha geniş bir çerçevede tanımlamak mümkündür. Örneğin:

- “Karşılıklı iki kenar çifti paralel olan dörtgendir” “İki çift karşılıklı kenarı Uzunluk bakımından eşit olan dörtgendir”
- “Köşegenleri birbirini ortalamayan dörtgendir” gibi tanımlar, paralelkenarların tüm türlerini, dolayısıyla onların özel halleri olan dikdörtgeni, eşkenar dörtgeni ve

kareyi de kapsamaktadır. Bu tür tanımlara dayanarak çizilecek en genel dörtgen, paralelkenarın prototipi olan klasik paralelkenardır.

2.2.6.2. Hariç tutan tanımlar

Paralelkenarı, onu diğer özel dörtgenlerden ayırarak tanımlamak istersek onun bazı karakteristik özelliklerini vurgulayıp diğerlerinden ayırtırmak gerekir. Bu bağlamda:

- “Köşegenleri birbirini ortalayan ancak eşit uzunlukta olmayan ve dik kesişmeyen dörtgendir”

tanımı, kare ve dikdörtgen gibi köşegenleri eşit uzunlukta olan şekilleri, aynı zamanda eşkenar dörtgen ve kare gibi köşegenleri dik kesişen dörtgenleri kapsam dışı bırakır. Böylelikle bu tanım, yalnızca prototip paralelkenara özgü bir yapı oluşturur ve diğer özel durumları hariç tutarak daha dar bir kapsama ulaşır.

2.2.6.3. Dikdörtgen, eşkenar dörtgen ve karenin paralelkenar tabanlı tanımları

Paralelkenar, bu üç özel dörtgenin kapsayıcı bir modeli olarak kabul edildiğinden dikdörtgeni, eşkenar dörtgeni ve kareyi paralelkenarın taşıdığı temel özellikler üzerine inşa ederek tanımlamak mümkündür. Örneğin:

- Dikdörtgen: “Karşılıklı kenarları paralel olan ve tüm iç açıları 90° olan paralelkenardır.”
- Eşkenar Dörtgen: “Tüm kenar uzunlukları eşit olan ve karşılıklı kenarları paralel olan paralelkenardır.”
- Kare: “Hem tüm kenarları eşit uzunlukta hem de tüm açıları 90° olan özel bir paralelkenardır.”

Bu tanımlar, paralelkenar kavramını temel alarak özel dörtgenlerin karakteristik farklarını belirginleştirmekte ve hiyerarşik yapıyı net biçimde ortaya koymaktadır.

2.2.6.4. Dikdörtgen, eşkenar dörtgen ve karenin paralelkenar temelli tanımları

Bir açısı 90° olan paralelkenardır.

→ Bu tanım kareyi de içine alır çünkü kare hem bir paralelkenar hem de tüm açıları 90° olan özel bir durumdur.

Bir açısı 90° olan fakat komşu kenarları eşit olmayan paralelkenardır.

→ Kareyi hariç tutan bu tanım, yalnızca prototip dikdörtgeni kapsamaktadır.

Köşegen uzunlukları eşit olan paralelkenardır.

→ Kare, bu özelliği taşıdığı için bu tanım da kareyi kapsar.

Köşegenleri eşit ama dik kesişmeyen paralelkenardır.

→ Kareyi dışarda bırakan bir tanımdır; çünkü karede köşegenler hem eşit hem de dik kesişir.

2.2.6.5. Eşkenar dörtgenin paralelkenar temelli tanımları

- Tüm kenar uzunlukları eşit olan paralelkenardır.

→ Bu ifade kareyi de kapsar çünkü karede tüm kenarlar eşittir.

- Tüm kenarları eşit ancak dik açı içermeyen paralelkenardır.

→ Kare dışlanmış olur çünkü karede tüm açılar diktir.

- Köşegenleri birbirini dik kesen paralelkenardır.

→ Kareyi içine alan bu tanım, eşkenar dörtgenin belirleyici simetri özelliğini temel alır.

- Köşegenleri dik kesen ama eşit uzunlukta olmayan paralelkenardır.

→ Kareyi kapsamayan bu tanım yalnızca prototip eşkenar dörtgenleri içerir.

2.2.6.6. Karenin paralelkenar temelli tanımı

- Köşegenleri hem eşit uzunlukta hem de dik kesişen paralelkenardır.

- Bu tanım kareye özgü bir betimlemedir; çünkü kare, paralelkenarların tüm temel özelliklerini taşımanın yanı sıra, bu iki koşulu aynı anda sağlayan tek özel dörtgendir.

2.2.7. Yamuk kavramı ve paralelkenarlarla olan bağı

Yamuk dışındaki dörtgen türleri, genellikle kapsayıcı tanımlara dayanan ve hiyerarşiyi esas alan bir sınıflandırma sistemiyle açıklanır. Bu durum, özellikle deltoid ve paralelkenar gibi dörtgenler arasındaki sınıf ilişkilerinde genel bir uzlaşa bulunduğunu gösterir (Usiskin ve Griffin, 2008). Ancak yamuk için yapılan tanımlarda literatürde farklı görüşler mevcuttur. Bazı yaklaşımlar, yamuğu "yalnızca bir çift kenarı paralel olan dörtgen" olarak tanımlayarak paralelkenarları yamuğun dışında bırakır. Bu tür tanımlar, yamuğu bağımsız bir dörtgen sınıfı olarak değerlendirir. Buna karşılık, "en az bir çift kenarı paralel olan dörtgen"

şeklindeki tanım ise paralelkenarları da yamuğun özel bir durumu olarak kabul eden, daha kapsayıcı bir yaklaşımı temsil eder (Usiskin ve Griffin, 2008).

2.2.8. Yamuğa dayalı özel dörtgen tanımları

Yamuk tanımının kapsayıcı versiyonu temel alındığında bazı özel dörtgenler, bu yapı üzerinden yeniden tanımlanabilir. Örnek olarak:

- İkizkenar yamuk, köşegen uzunlukları birbirine eşit olan yamuktur. *(Bu tanım, dikdörtgeni ve kareyi de kapsar.)*
- İkizkenar yamuk, karşılıklı açı ölçülerinin birbirini 180° tamamladığı yamuktur. *(Bu da dikdörtgen ve kareyi içine alır.)*
- Paralelkenar, köşegenleri birbirini ortalayan yamuktur. *(Dikdörtgen, eşkenar dörtgen ve kare de bu tanıma dâhildir.)*
- Dikdörtgen, köşegenleri hem eşit uzunlukta hem de birbirini ortalayan yamuktur. *(Bu tanım, kareyi de içerir.)*
- Eşkenar dörtgen, köşegenleri birbirini dik ve ortalayacak şekilde kesen yamuktur. *(Bu da kareyi kapsar.)*
- Kare, ardışık üç kenarı eşit uzunlukta olan ve bir açısı 90° olan yamuktur. *(Bu tanım karenin hem kenar hem açı özelliklerini içerir.)*

2.2.9. Tanımda incelik: Kareyi ayırt etmek

Karenin tanımında kullanılan her özellik özenle seçilmelidir. Örneğin, sadece "üç ardışık kenarı eşit uzunlukta olan yamuk" ifadesi kullanılsaydı bu tanım eşkenar dörtgeni kapsardı. Yine, "üç açısı 90° olan yamuk" tanımı da dikdörtgenle örtüşeceğinden kare için yeterli olmayacaktı. Benzer şekilde, "iki ardışık kenarı eşit uzunlukta ve iki açısı 90° olan dörtgen" şeklindeki bir tanım ise kare dışındaki dik yamuklara da uyan bir tanım olurdu. Bu nedenle, karenin ayırt edici tanımı, hem kenar hem de açı özelliklerinin birlikte ve özgün biçimde kullanılmasıyla mümkündür.

2.2.10. Kavram tanımlarının genişletilebilirliği ve dörtgenlerin tarihsel gelişimi

Bir geometrik kavramın tanımı, o kavramın ne kadar genel ya da ne kadar özel konumlandığına bağlı olarak, farklı üst kavramlar temel alınarak çeşitlendirilebilir. Özellikle özel dörtgenler söz konusu olduğunda, tanımlayıcı özelliklerin farklı şekillerde bir araya

getirilmesiyle çok sayıda alternatif tanım üretmek mümkündür. Bu durum, kavramsal düşünmenin esnekliğini ve geometri öğretiminde tanımın ne kadar merkezî bir rol oynadığını gösterir.

2.2.11. Tanım ve sınıflandırma ilişkisi

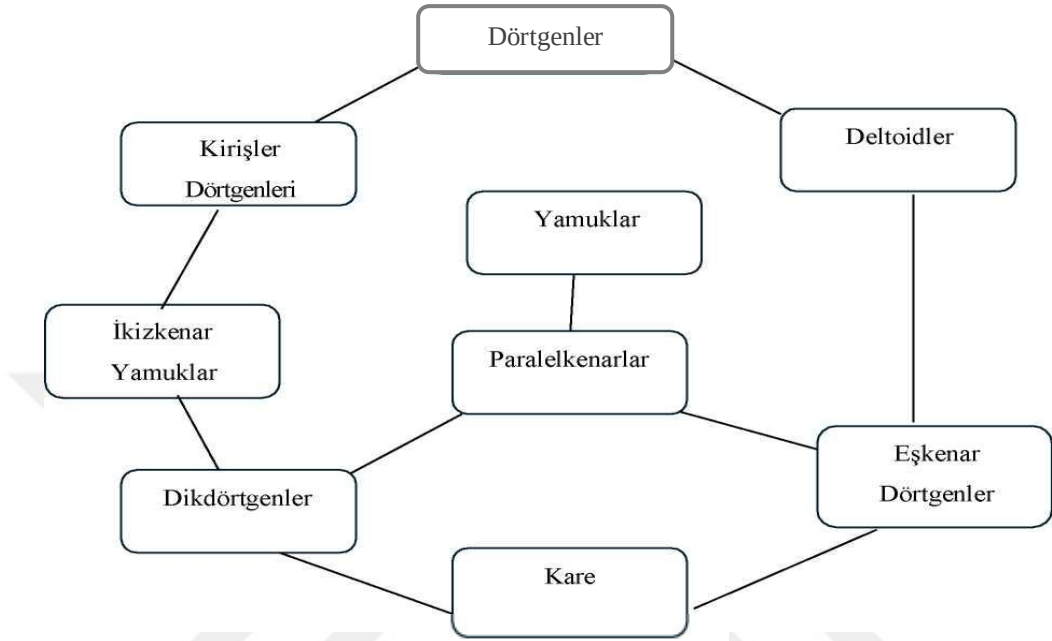
Poincare (1952), bir tanımın temel amacının, tanımlanan nesneyi diğerlerinden ayırt edebilmek olduğunu vurgular. Anlamlı ve işlevsel bir tanım için yalnızca o nesneye ait özellikleri belirlemek yetmez, aynı zamanda bu nesnenin ait olmadığı sınıflarla da karşılaştırılması gerekir. Bu bakış açısı, tanım ile sınıflandırma kavramları arasındaki yakın ilişkinin önemini ortaya koyar. Bu ilişkinin en iyi gözlemlenebileceği alanlardan biri, geometrik şekillerin sınıflandırılmasıdır. Dörtgenler konusu, hem sözel hem de görsel olarak eş değer tanımları ve hiyerarşik yapı ilişkilerini analiz edebilmek için zengin bir örnek alan sunar (Furinghetti ve Paola, 2002).

2.2.12. Tarihsel süreçte dörtgen tanımları

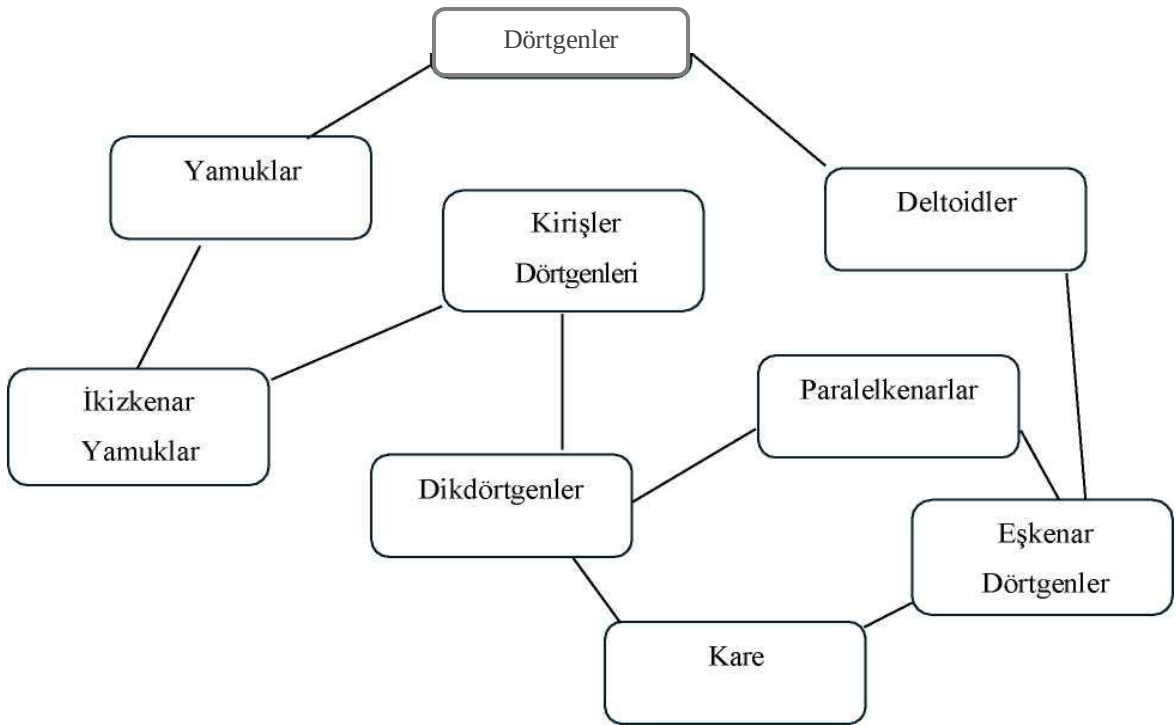
Athanasopoulou (2008), dörtgenlerin tarihsel gelişimi üzerine yaptığı incelemede, tanım farklılıklarının sınıflandırma biçimlerini de etkilediğini ortaya koymuştur. Benzer şekilde Usiskin ve Griffin (2008), 1868 yılından günümüze kadar kullanılan birçok ders kitabını inceleyerek dörtgenler için çok çeşitli tanımların kullanıldığını ve bu çeşitliliğin zamanla evrildiğini belirtmiştir. Araştırmacılara göre özellikle yamuk tanımı üzerindeki farklılıklar, dörtgenlerin genel sınıflandırmasında önemli rol oynamıştır. Usiskin ve Griffin'in (2008) analizine göre, 1930 yılı öncesinde yayımlanan birçok geometri kitabında, dörtgen sınıfları birbirinden bağımsız biçimde, hiyerarşi gözetmeksizin ve hariç tutan tanımlara dayanarak ele alınmıştır. Bu anlayış, her dörtgeni kendi başına, diğerlerinden ayrı bir nesne olarak değerlendiren yaklaşımın bir ürünüdür. Athanasopoulou'nun (2008), Öklid'in tanımlarını incelediği çalışmasına göre ise Öklid, "paralel doğrular" kavramını kare, oblong, eşkenar dörtgen, rhomboid ve yamuk gibi dörtgen türlerinin tanımından sonra ele aldığı için paralelkenar kavramına sistematik bir yer ayırmamıştır. Bu da Öklid'in sınıflandırmasında modern anlamdaki paralelkenar kavramının eksik kalmasına neden olmuştur.

Hem Athanasopoulou (2008) hem de Usiskin ve Griffin (2008), tarih boyunca Öklid'in tanım ve sınıflandırmalarının etkili olduğunu belirtmektedir. Ancak günümüz eğitim literatüründe, özellikle modern ders kitaplarında, daha çok kapsayıcı tanımlara ve bu

tanımların üzerine kurulu hiyerarşik sınıflandırmalara yer verildiği gözlemlenmektedir. Yine de bu modern tanımlar, özü itibarıyla Öklid'in tanımlarının yenilenmiş ve yeniden yapılandırılmış halleri olarak değerlendirilebilir.



Şekil 2.15. Özel dörtgenler arasındaki kapsayıcı ilişkilerin hiyerarşik gösterimi (**Kaynak:** Usiskin ve Griffin, 2008: 69'dan uyarlanmıştır)



Şekil 2.16. Özel dörtgenler arasındaki hariç tutulan ilişkilerin hiyerarşik gösterimi (**Kaynak:** Usiskin ve Griffin, 2008: 69'dan uyarlanmıştır)

Graumann (2005), dörtgenlerin sınıflandırılmasında sadece temel özelliklerle yetinmeyip çok daha ayrıntılı ve çeşitli kriterleri esas alan bir yaklaşım geliştirmiştir. Açı, kenar, köşegen ve simetri gibi özelliklerin yanı sıra kiriş ve teğet olma durumlarını da dikkate alarak daha ayrıntılı bir sınıflandırma sunmuştur. Bu kapsamlı yapı, Graumann'ın "dörtgenler evi" olarak adlandırdığı sınıflandırma modeliyle somutlaştırılmıştır.

Graumann'ın bu modeli, Usiskin ve Griffin'in (2008) ortaya koyduğu sınıflandırmalara kıyasla daha detaylıdır. Örneğin, deltoidler yalnızca tek bir kategori altında toplanmamış; eğik, dik açılı ve yana yatırılmış gibi alt kategorilere ayrılarak değerlendirilmiştir. Benzer biçimde yamuğun da sadece bir tür olarak değil, dik açılı ve simetrik yamuklar gibi alt ayrımları yapılmıştır. Bu çalışmadan çıkarılabilecek temel sonuç, geometrik tanımlar ile sınıflandırmaların birbiriyle sıkı biçimde bağlantılı olduğudur. Literatürde, zaman içinde pek çok farklı sınıflandırma önerilmiş olsa da bu sınıflandırmaların temelinde Öklid'in ortaya koyduğu ilk geometrik tanımlar yatmaktadır. Daha sonraki çalışmalar ise bu tanımları geliştirerek ya da dönüştürerek yeni sınıflandırma sistemleri oluşturmuştur. Bu da geometri öğretiminde tanımın biçiminin, şekiller arası ilişkilerin kurulmasında ne denli belirleyici olduğunu göstermektedir.

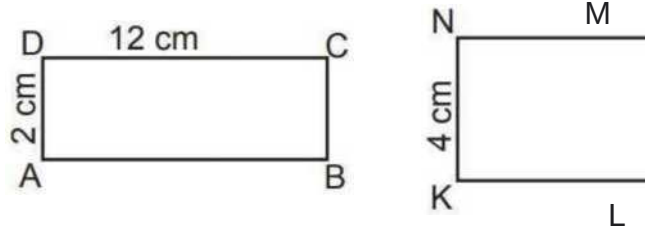
2.3. Prototip ve Prototip Olmayan Sorular Yoluyla Geometrik Kavramların Sorgulanması

Geometri öğretiminde öğrencilerin kavramsal anlamalarını derinleştirmek amacıyla kullanılan soru türleri oldukça önemlidir. Özellikle prototip sorular, öğrencilerin daha önceden aşina oldukları standart şekil ve ilişkilere dayandığı için genellikle ezberlenmiş bilgilerle çözülür. Bu nedenle bu tür sorular prototip olarak adlandırılır.

Bu bağlamda, prototip olmayan sorular devreye girmektedir. Aşağıdaki görselde yer alan sorular, bu geçişin nasıl yapılabileceğini somut bir biçimde göstermektedir. İlk soruda, klasik bir dikdörtgen olan ABCD ile yine dikdörtgen formunda verilmiş KLMN şekli sunulmuştur. Alanlarının eşit olduğu bilgisi verilerek KLMN dikdörtgeninin çevresi sorulmuştur. Öğrenciler bu soruda genellikle daha rahat işlem yapabilmektedir.

İkinci soruda ise şekiller aynı gibi görünse de KLMN artık dikdörtgen değil, bir paralelkenar olarak tanımlanmıştır. Aynı uzunluk verileri kullanılarak bu kez KLMN'nin çevresi değil, paralelkenar tanımı üzerinden değerlendirme yapılması beklenmiştir. Bu tür sorular, öğrencinin şeklin görünüşüne değil, tanım bilgisine ve şekilsel ilişkileri kavrama

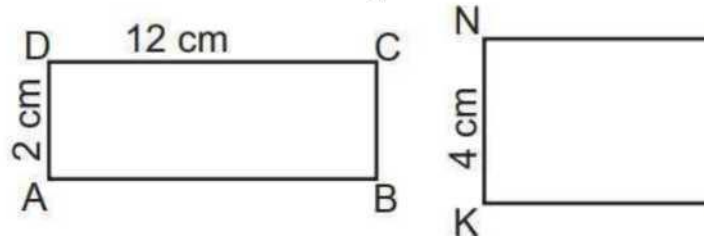
düzeyine dayalı bir çözüm stratejisi geliştirmesini gerektirir. Dolayısıyla bu tarz sorular prototip olmayan sorular kategorisine girer.



Şekildeki ABCD ve KLMN dikdörtgenlerinin alanları birbirine eşittir.

|AD| = 2 cm, |DC| = 12 cm ve |KN| = 4 cm olduğuna göre, KLMN dikdörtgeninin çevresinin uzunluğu kaç santimetredir?

Prototip olan sorudan prototip olmayan geometri öğretimine uygun soruya geçiş



Şekildeki ABCD ve KLMN birer iç açıları 90° olan alanları birbirine eşit iki paralelkenardır.

|AD| = 2 cm, |DC| = 12 cm ve |KN| = 4 cm olduğuna göre, KLMN paralelkenarının çevresinin uzunluğu kaç santimetredir?

Bu iki soru arasında yer alan, okla gösterilen açıklama kutusu da öğretim açısından çok önemli bir didaktik hamleyi temsil eder: Öğrenciyi aşına olduğu yapıdan çıkararak kavramı derinlemesine sorgulamaya yönlendirmek. Bu bağlamda:

- Prototip sorular, öğrencinin yüzeysel bilgiyle çözüm üretmesini sağlar.
- Prototip olmayan sorular ise öğrenciden şeklin tanımsal özelliklerine hâkim olmasını ve farklı bakış açılarıyla çözüm üretmesini bekler.

Araştırmalar (örneğin: Güven, Öztürk ve Bülbul, 2019; Erdem, Gökkurt ve Soylu, 2020) göstermektedir ki öğrenciler, prototip olmayan sorularda (örneğin şeklin yarısını taramak yerine %45'inin taranmasının istendiği sorular) daha fazla zorlanmakta ancak bu sorular uzun vadeli öğrenmenin temelini oluşturan kavram değişimi ve bilişsel çatışma gibi süreçleri de tetiklemektedir.



3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde araştırmanın deseni, çalışma grubu, verilerin toplanması süreci ve veri analizi süreçleri detaylıca ele alınacaktır.

3.1. Araştırmanın Deseni

Bu çalışmada tek gruplu öntest-sontest deseni kullanılmıştır. Tek gruplu öntest-sontest deseni, yalnızca bir çalışma grubuna deney öncesinde ve sonrasında ölçüm yapılmasına dayanan bir araştırma desendir. Bu desen, deneysel uygulamanın etkisini ölçmek için kullanılır. Tek gruplu öntest-sontest deseninin önemli avantajlarından biri, uygulama sürecinin etkisini doğrudan gözlemleme imkânı sunmasıdır. Ancak bu desenin en temel sınırlılığı, kontrol grubunun bulunmaması nedeniyle iç geçerliği tehdit eden bazı unsurlara açık olmasıdır. Bu tehditler arasında tarihsel etkiler, olgunlaşma (maturation), teste alışma, istatistiksel regresyon ve dışsal müdahaleler sayılabilir (Campbell ve Stanley, 1963).

Bu sınırlılıkları en aza indirmek amacıyla araştırmada aşağıdaki önlemler alınmıştır:

- Uygulama süresi kısa tutulmuştur; bu sayede öğrencilerin zaman içerisinde gösterebileceği doğal gelişimden kaynaklı etkiler minimize edilmiştir.
- Aynı ölçme araçları, öntest ve sontestte kullanılmış; böylece ölçümler arasında tutarlılık ve karşılaştırılabilirlik sağlanmıştır.
- Ara test, ek öğretim ya da pekiştirme uygulamaları yapılmamış, yalnızca araştırmaya özgü öğretim süreci işletilmiştir.
- Katılımcılar, uygulama öncesinde benzer akademik düzey, yaş grubu ve öğretim geçmişine sahip bireyler arasından seçilmiş ve homojen bir örneklem oluşturulmuştur.
- Araştırma süresince aynı öğretmen, aynı sınıf ortamı ve aynı öğretim materyalleri kullanılmış; böylece dışsal değişkenlerin etkisi kontrol altında tutulmaya çalışılmıştır.

Bu önlemler doğrultusunda, araştırma deseninin sahip olduğu sınırlılıklar olabildiğince azaltılmaya çalışılmış ve elde edilen verilerin geçerliğine katkı sağlanmıştır.

Bu desende elde edilen son test sonuçları ile ön test sonuçları karşılaştırılarak deneysel sürecin etkisi değerlendirilir. Uygulaması pratik ve gelişimi izlemek için uygun olması nedeniyle özellikle eğitim bilimleri alanında sıklıkla tercih edilmektedir (Büyüköztürk vd., 2020).

3.2. Çalışma Grubu

Araştırmada, 2023-2024 eğitim-öğretim yılında Akdeniz Bölgesi'ndeki bir devlet ortaokulunda öğrenim gören 7. sınıf öğrencileri arasından seçilen 35 kişi örneklem grubunu oluşturmaktadır. Çalışmanın başlangıcında 39 öğrenci ile başlanmış ancak 4 öğrenci son test uygulamasına katılamadığı için veri toplama süreci 35 öğrenci ile tamamlanmıştır.

Örneklem belirleme sürecinde kolay ulaşılabilir örnekleme ve amaçlı örnekleme yöntemlerinden yararlanılmıştır. Kolay ulaşılabilir örnekleme, araştırmacının görev yaptığı kurumda çalışması ve zaman, maliyet, kaynak açısından avantaj sağlaması nedeniyle tercih edilmiştir. Amaçlı örnekleme ise bilgi açısından zengin bireylerin bilinçli olarak seçilmesine olanak tanır.

Sınıf seçiminde, öğrencilerin başarı düzeylerinin heterojen olması ve normal dağılım göstermesi dikkate alınmıştır. Bu nedenle, dönem başında uygulanan iki deneme sınavının puanları esas alınarak Shapiro-Wilk normallik testi uygulanmış ve verilerin normal dağılıma uygun olduğu belirlenmiştir (Deneme 1: $p = 0.787$; Deneme 2: $p = 0.965$). Shapiro-Wilk testi, özellikle $n < 50$ olan örneklemelerde normallik varsayımını test etmek için önerilen güçlü bir istatistiksel yöntemdir.

3.3. Verilerin Toplanması Süreci

Bu araştırmada veriler, Ayaz (2016) tarafından geliştirilen "Kavram İmajı Testi 1 (KİT-1)" ve "Kavram İmajı Testi 2 (KİT-2)" temel alınarak hazırlanan ölçme araçlarıyla toplanmıştır. Söz konusu testler, dörtgenler konusuna ilişkin kavramsal öğrenmeleri değerlendirmeye yönelik olup, bu çalışmada gerekli izinler alınarak kullanılmıştır. Ölçme araçları, ön test ve son test olarak iki aşamalı biçimde uygulanmıştır. Böylece, öğrencilerin kavramsal öğrenmelerinde süreç boyunca meydana gelen değişimlerin gözlemlenmesi amaçlanmıştır.

Veri toplama süreci, araştırmacının görev yaptığı ortaokulda gerçekleştirilmiştir. Öğrencilere uygulanan ön test ve son test, sınıf ortamında ve araştırmacının gözetiminde bireysel olarak uygulanmıştır. Test uygulamaları sırasında öğrencilerin test maddelerine verdikleri yanıtların gerekçelerini de yazmaları sağlanmıştır. Bu sayede sadece doğru-yanlış analizinin ötesine geçilerek öğrencilerin kavramsal düzeydeki açıklamaları da değerlendirilmiştir.

Elde edilen veriler, Erdem (2011) tarafından geliştirilen "açık uçlu soruları değerlendirme ölçeği" esas alınarak puanlanmıştır. Bu ölçek doğrultusunda; öğrenci

yanıtları "Doğru Açıklama", "Kısmen Doğru Açıklama", "Yanlış Açıklama" ve "Açıklama Yok" gibi kategoriler altında sınıflandırılmış ve her kategoriye belirli bir puan aralığı atanmıştır. Bu sistem sayesinde, öğrencilerin kavramsal öğrenme düzeyleri ayrıntılı ve sistematik biçimde değerlendirilmiştir.

Veri analizinde ise eşleştirilmiş örneklem t-testi kullanılmıştır. Bu test, aynı bireylerin iki farklı zamandaki (ön test ve son test) puan ortalamaları arasında anlamlı bir fark olup olmadığını belirlemek amacıyla kullanılan parametrik bir testtir. Eşleştirilmiş örneklem t-testi, gruplar arasında ilişki olduğu ve ölçümlerin bağımlı olduğu durumlarda tercih edilir. Bu çalışmada da aynı öğrencilerin ön test ve son testten aldıkları puanlar karşılaştırıldığından dolayı bu testin kullanılması uygun bulunmuştur.

3.4. Verilerin Analizi

Bu çalışmada araştırmaya başlanmadan önce, araştırma grubunun heterojen yapıda olup olmadığı ve başarı düzeylerinin normal dağılım gösterip göstermediği incelenmiştir. Bu kapsamda dönem başında yapılan iki deneme sınavına ait puanlar;

Tablo 3.1. Öğrencilerin deneme sınavı puanları

Öğrenci Adı Soyadı	Deneme 1 puanı	Deneme 2 puanı
Ö1	410,006	347,896
Ö2	355,34	316,296
Ö3	388,059	380,044
Ö4	442,182	385,407
Ö5	368,331	348,4
Ö6	389,694	324,726
Ö7		426,919
Ö8	289,878	211,141
Ö9		247,141
Ö10	488,496	472,326
Ö11	293,52	
Ö12	361,238	258,548
Ö13	309,68	282,696
Ö14	399,512	396,311
Ö15	408,979	377,556
Ö16	320,046	259,022
Ö17	432,845	386,385
Ö18	359,127	321,689
Ö19		246,163
Ö20	455,994	434,8
Ö21	383,309	344,015
Ö22		218,533

Tablo 3.1. (Devam) *Öğrencilerin deneme sınavı puanları*

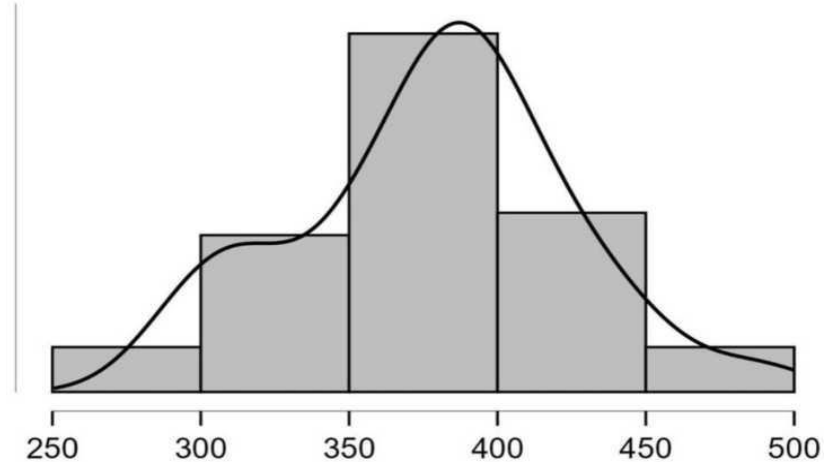
Ö23	332,137	298,978
Ö24	312,441	334,563
Ö25	415,773	409,17
Ö26	391,556	318,296
Ö27	348,251	288,178
Ö28	396,099	318,741
Ö29	396,142	310,4
Ö30	347,38	288,637
Ö31	429,518	420,044
Ö32	375,603	299,037
Ö33	379,143	286,681
Ö34	401,887	381,541
Ö35	310,38	
Ö36	378,787	298,03
Ö37	382,668	333,126
Ö38	376,495	363,763
Ö39	419,183	345,896

Tablo 3.2’de görüldüğü şekildedir. Bu tablo üzerinden Shapiro-Wilk normallik testi uygulanmıştır.

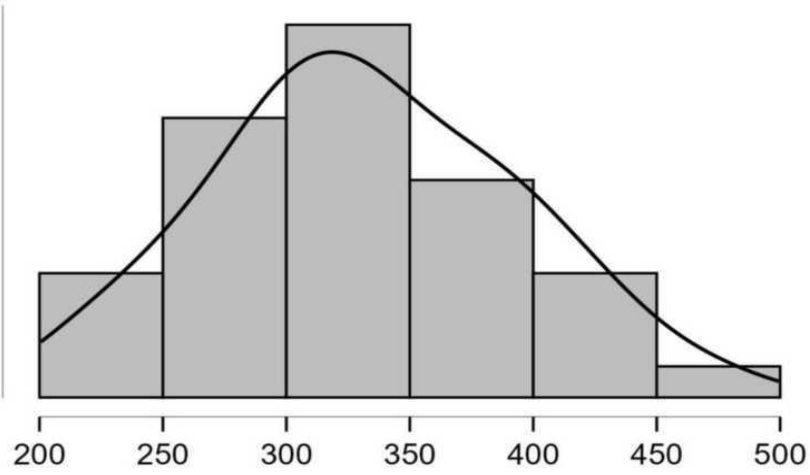
Tablo 3.2. *Deneme sınavı sonuçlarına ait Shapiro-Wilk testi sonuçları*

	Ort. (Mean)	Std. Sapma	Shapiro-Wilk	Shapiro-Wilk Anlamlılık (p)	Min.	Maks.
Deneme 1	378.562	46.117	0.981	0.787	289.878	488.496
Deneme 2	331.921	61.748	0.989	0.965	211.141.	472.326

Birinci deneme sınavı için $W = 0.981$, $p = 0.787$, ikinci deneme sınavı için $W = 0.989$, $p = 0.965$ olarak elde edilmiştir. Her iki deneme sınavı için $p > 0.05$ olduğundan, verilerin normal dağılım gösterdiği kabul edilmiştir. Ayrıca Q-Q grafiklerinde puanların teorik kuantil çizgisine yakın bir dağılım sergilediği gözlemlenmiş ve bu durum normallik varsayımını desteklemiştir. Bu bulgular doğrultusunda sınıfın heterojen yapıda olduğu ve araştırmada parametrik testlerin kullanılabileceği sonucuna ulaşılmıştır.



Şekil 3.1. Birinci deneme sınavına ait normal dağılım grafiği



Şekil 3.2. İkinci deneme sınavına ait normal dağılım grafiği

Bu araştırmada verilerin analiz süreci hem nitel hem nicel yöntemlerin bütünleştirilmesiyle yürütülmüştür. Araştırma kapsamında kullanılan ölçme aracı, toplam 44 açık uçlu sorudan oluşmaktadır. Bu doğrultuda, açık uçlu soruların ve iki aşamalı soruların sorunun maksimum puanı 5 ve çizim sorularının maksimum puanı 2 olarak belirlenmiş ve bu durumda toplam testten alınabilecek en yüksek puan 202, en düşük puan ise 0 olarak hesaplanmıştır.

Bu araştırmada her bir soru grubu farklı sayıda sorudan oluşmaktadır. Örneğin, dörtgenlere ilişkin soru grubu 12 soru içerirken kareye ilişkin grup yalnızca 4 sorudan oluşmaktadır. Bu farklılık, soru gruplarının araştırma bulgularına katkısını orantısız hâle getirebileceğinden, doğrudan aritmetik ortalama ile değerlendirme yapılması uygun değildir. Çünkü aritmetik ortalama, tüm grupların eşit sayıda soru içerdiği ve değerlendirmeye eşit etki ettiği varsayımına dayanır.

Bu nedenle, öğrencilerin her bir dörtgen türüne ilişkin kavramsal bilgi düzeylerinin daha sağlıklı biçimde değerlendirilmesi amacıyla **ağırlıklı ortalama yöntemi** kullanılmıştır. Ağırlıklı ortalama, her bir soru grubunun içerdiği soru sayısı oranında genel ortalamaya katkı yapmasını sağlayarak analizlerin adil ve anlamlı biçimde gerçekleştirilmesine imkân tanımaktadır. Böylece, her dörtgen türüne ait başarı düzeyleri, o türe ilişkin soruların değerlendirme kapsamındaki ağırlığına göre hesaplanmış ve bulguların yorumlanmasında yöntemsel bir tutarlılık sağlanmıştır.

Aşağıda, her bir dörtgen türüne ait soru sayısı ve alınabilecek maksimum puanlar yer almaktadır:

Tablo 3.3. Sorulara ait ağırlıklandırılmış puanlar

Soru Grubu	Soru Sayısı	Grubtan Alınabilecek En Yüksek Puan	Ağırlık=Grubun Soru Sayısı/Toplam	Ağırlıklı Katkı=Ağırlık x Maksimum Puan
Dörtgen	12	57	$12/44=0,273$	$0,273 \times 57=15,56$
Yamuk	10	47	$10/44=0,227$	$0,227 \times 47=10,68$
Eşkenar	6	27	$6/44=0,136$	$0,136 \times 27=3,68$
Dörtgen Paralelkenar	7	32	$7/44=0,159$	$0,159 \times 32=5,05$
Dikdörtgen	5	22	$5/44=0,114$	$0,114 \times 22=2,51$
Kare	4	17	$4/44=0,091$	$0,091 \times 17=1,54$
Toplam	44	202	1(Yani normalize olmuş sonuç)	39,05

39,05 değeri, tüm soru gruplarındaki her bir soruya en yüksek puanın verilmesi durumunda elde edilebilecek azami başarı düzeyini temsil etmektedir. Araştırmada öğrencilerin bireysel başarı düzeyleri de aynı yöntemle hesaplanmış ve bu maksimum değerle karşılaştırılarak yorumlanmıştır.

Bu araştırmada uygulanan veri toplama aracı içerisinde yer alan tanım, çizim ve iki aşamalı soruların değerlendirilmesinde, alan yazınında geçerliliği ve güvenilirliği sağlanmış analitik dereceli puanlama anahtarlarından yararlanılmıştır. Öğrenci yanıtlarının niteliksel olarak anlamlı ve tutarlı biçimde çözümlenebilmesi amacıyla, her bir soru türüne özgü farklı puanlama ölçekleri geliştirilmiş ya da mevcut literatürden uyarlanmıştır.

3.4.1. Açık uçlu tanım sorularının puanlanması

Araştırmada yer alan 1., 4., 7., 10., 13. ve 16. sorular, öğrencilerin dörtgenlerle ilgili kavramsal bilgilerini tanımlama biçimleri üzerinden değerlendirmeyi amaçlayan açık uçlu

sorulardır. Bu soruların puanlanmasında, Erdem (2011) tarafından geliştirilen ve farklı doğruluk düzeylerine göre yapılandırılmış olan Açık Uçlu Soruları Puanlama Ölçeği (Çizelge 3.6) esas alınmıştır. Söz konusu ölçekte, öğrencilerin verdikleri cevaplar; “Tam Doğru (5 puan)”, “Kısmen Doğru A, B, C (4-3-2 puan)”, “Yanlış (1 puan)” ve “Yanıtsız (0 puan)” şeklinde sınıflandırılmıştır. Bu derecelendirme, yalnızca doğru-yanlış ayrımından öte, öğrencilerin sahip oldukları kavramsal bilgilerin derinliğini, neden-sonuç ilişkilendirme becerilerini ve açıklamalarının geçerliliğini dikkate alan çok boyutlu bir yapı sunmaktadır (Erdem, 2011: 89-90).

3.4.2. İki aşamalı soruların puanlanması

Veri toplama aracındaki 3., 6., 9., 12., 15. ve 18. sorular, öğrencilerin hem çoktan seçmeli seçenekler üzerinden karar verme süreçlerini hem de bu kararlarını gerekçelendirme biçimlerini değerlendirmeyi amaçlayan iki aşamalı soru formatında yapılandırılmıştır. Bu tür soruların değerlendirilmesinde, yine Erdem (2011) tarafından önerilen İki Aşamalı Soruları Puanlama Ölçeği (Çizelge 3.7) kullanılmıştır. Bu ölçekte, öğrencinin cevabı ve açıklaması birlikte ele alınarak “Doğru Cevap-Doğru Açıklama (5 puan)”, “Doğru Cevap-Yanlış Açıklama (1 puan)”, “Yanlış Cevap-Doğru Açıklama (4 puan)”, “Kısmen Doğru Açıklama (3 puan)”, “Yanıt veya açıklama yok (0 puan)” gibi ayrıntılı kategoriler üzerinden puanlama yapılmıştır (Erdem, 2011: 92-94). Bu sayede yalnızca doğru cevaba ulaşma yeterliliği değil, aynı zamanda bu cevabın altında yatan gerekçenin niteliği de değerlendirme kapsamına alınmıştır.

3.4.3. Çizim sorularının puanlanması

Araştırmada yer alan 2., 5., 8., 11., 14. ve 17. sorular, öğrencilerin ilgili dörtgenleri çizme becerilerini değerlendirmek üzere hazırlanmıştır. Bu soruların puanlanmasında, Tennessee Department of Education (2022) tarafından geliştirilen ve eğitim materyallerinin değerlendirilmesinde kullanılan “Geometry Mathematics Instructional Materials Scoring Rubric” adlı puanlama yaklaşımı örnek alınarak bir ölçüt geliştirilmiştir. Bu yaklaşıma uygun biçimde, çizim sorularına verilen öğrenci yanıtları:

- 0 puan: Şekil çizilmemiş ya da çizim, ilgili kavramla tamamen ilgisiz ise,
- 1 puan: Şekil çizilmiş ancak tanımsal özelliklerin bazıları eksik ya da hatalı ise,
- 2 puan: Şekil, kavramın tanımına uygun biçimde eksiksiz ve doğru çizilmişse,

şeklinde puanlanmıştır. Bu ölçek, öğrencilerin şekilsel temsillerini hem biçimsel doğruluk hem de kavramsal yeterlilik bakımından değerlendirmeyi mümkün kılan yapıdadır. Tennessee Eğitim Bakanlığının sunduğu rubrikte yer alan “0-1-2 puan” sistematığı, materyalde (Tablo 3.4) ölçütün bulunup bulunmadığını ve ne derece karşılandığını dikkate alarak karar vermeyi esas almaktadır; bu yaklaşım araştırma kapsamındaki çizim değerlendirme sistemine uyarlanmıştır (Tennessee Department of Education, 2022).

Araştırmada, uygulama öncesi ve sonrası elde edilen puanlar arasındaki farkı belirlemek amacıyla eşleştirilmiş örneklem t-testi (Paired Samples T-Test) kullanılmıştır. Bu analiz, JASP (Jeffrey’s Amazing Statistics Program) yazılımı aracılığıyla gerçekleştirilmiştir.



Tablo 3.4. Dörtgen Tanımlarının Puanlama Ölçeği

Düzey	Puan	Açıklama	Öğrenci Örnek Cevabı
Tam	5	Tamamen doğru kabul edilen ifadeler	1)Dörtgen kavramının tanımını yapınız. 3 köşesi aynı doğru üzerinde bulunmayan 4 kenarlı ve 4 köşeli kapalı şekildir. Gerekçe: Öğrenci tanımı, dörtgenin kenar ve köşe sayısını doğru vermiş, kapalı şekil olduğunu belirtmiş, çokgen olma koşulunu ifade etmiş ve herhangi bir kavramsal hata içermediği için tam doğru kabul edilerek 5 puan alır.
Kısmen Doğru-A	4	Tam doğru cevaba göre eksik ifadeler	1)Dörtgen kavramının tanımını yapınız. Dörtgen, dört kenar ve dört köşeden oluşan bir düzlem şeklidir. Ancak bu dörtgenin kenar uzunlukları ve iç açıları tamamen farklı olabilir. Hatta hiçbir kenarı birbirine paralel olmayabilir. Gerekçe: Öğrenci dörtgeni büyük ölçüde doğru tanımlamış, ayrıca dörtgenlerin farklı türlerini ayırt edebildiğini göstermiştir. Ancak tanımın kavramsal netliği ve formel bütünlüğü tam değildir.

Tablo 3.4. (Devam) Dörtgen Tanımlarının Puanlama Ölçeği

Kısmen Doğru-B	3	Doğru nedene bağlanarak yapılan kısmen doğru ifadeler	1)Dörtgen kavramının tanımını yapınız. Dört köşesi ve dört kenarı olan geometrik cisimlere dörtgen denir Gerekçe: Tanım; doğru özelliklere (kenar ve köşe sayısı) dayanmakta, ancak kapalı şekil, düzlemde olma, ya da kenarların birbirini ardışık olarak bağlaması gibi temel tanımsal unsurları içermemektedir, “Geometrik cisim” ifadesi, teknik olarak yanlış olmasa da terim açısından karışıktır, çünkü “cisim” genellikle üç boyutlu varlıkları ifade eder.
Kısmen Doğru-C	2	Yanlış nedene bağlanarak ya da herhangi bir nedene bağlanmadan yapılan kısmen doğru kabul edilebilecek ifadeler	1)Dörtgen kavramının tanımını yapınız. 2 kısa kenarı 2 uzun kenarı olan bir dikdörtgen 2 kısa kenarı birbirine 2 uzun kenarı birbirine eşit. Gerekçe: Bu bağlamda öğrenci yanıtı, dörtgenin tüm alt türlerini kapsamak yerine yalnızca dikdörtgen üzerinden tanım yaparak sınırlı bir açıklama sunmuştur. Bu durum, eksik ama kısmen geçerli bir kavram imgesine dayalıdır
Yanlış	1	Tamamıyla yanlış ya da soru ile tam ilişkisi olmayan ifadeler	1)Dörtgen kavramının tanımını yapınız. 4 köşeli bir prizma kenarları özellikleri eşit olmalı Gerekçe: Dörtgenin temel özelliklerini içermemekte, üstelik “prizma” gibi başka bir geometrik cisim tanımlayan yanlış bir kavram içermekte, ayrıca dörtgenin tanımında olmayan bir koşulu zorunluymuş gibi sunmaktadır (kenarların eşitliği). Dolayısıyla bu ifade, “tamamen yanlış ya da soru ile ilişkisiz” tanımı karşılamakta
Yanıtsız	0	Açıklamanın yapılmadığı veya sorunun aynısının cevap olarak yazıldığı ifadeler	

Tablo 3.5. Yamuk Tanımlarının Puanlama Ölçeği

Düzy	Puan	Açıklama	Öğrenci Örnek Cevabı
Tam	5	Tamamen doğru kabul edilen ifadeler	4)Yamuk kavramının tanımını yapınız. En az 4-çift kenar, paralel olan şekildir. Gerekçe: Her ne kadar “karşılıklı” kelimesi eksik olsa da, öğrencinin “çift kenar” ve “paralel” sözcüklerini bir arada kullanması, bağlamı netleştirerek kavramı doğru şekilde ifade ettiğini göstermektedir. Bu durumda "karşılıklı" ifadesinin eksikliği anlam kaybına yol açmamaktadır, dolayısıyla bu bir eksiklik değil, alternatif ama doğru bir anlatım biçimidir.
Kısmen Doğru-A	4	Tam doğru cevaba göre eksik ifadeler	4)Yamuk kavramının tanımını yapınız. iki kenarı paralel olan dörtgen yamuk denir. Gerekçe: Öğrenci doğru bir bilgi vermektedir, çünkü yamukta gerçekten bir çift kenar paraleldir. Ancak “karşılıklı” ifadesi eksiktir. Bu eksiklik, geometrik olarak hataya açık bir alan bırakır (örneğin, komşu iki kenarın paralelliği gibi yanlış anlamlara neden olabilir). Ayrıca “en az” ifadesi yerine sadece “iki kenar” demek, tanımın genelleyici gücünü azaltır.
Kısmen Doğru-B	3	Doğru nedene bağlanarak yapılan kısmen doğru ifadeler	4)Yamuk kavramının tanımını yapınız. Yamuk kenarları paralel olan şekildir. Gerekçe: Öğrenci yamuğun doğru özelliğini (paralel kenar) belirtmiştir, yani doğru nedene dayalı bir cevap vermiştir. Ancak bu tanım, eksik veya potansiyel olarak yanıltıcı olduğu için "tam doğru" kabul edilmez. Bu nedenle 3 puanlık “Kısmen Doğru-B” kategorisine girer.
Kısmen Doğru-C	2	Yanlış nedene bağlanarak ya da herhangi bir nedene bağlanmadan yapılan kısmen doğru kabul edilebilecek ifadeler	4)Yamuk kavramının tanımını yapınız. Köşeleri olan ve kenar uzunlukları eşit olmayan şekil. Gerekçe: Bu tanım, yamuğun yüzeysel görünüşü üzerinden bir özellik belirtmektedir ancak yamuğu tanımlayan geometrik özelliği (paralellik) hiç içermemektedir. Bu nedenle tanım: Yanlış nedene dayalı bir açıklamadır, Anlamca eksik ve yanıltıcı potansiyele sahiptir.

Tablo 3.5. (Devam) Yamuk Tanımlarının Puanlama Ölçeği

Yanlış	1	Tamamıyla yanlış ya da soru ile tam ilişkisi olmayan ifadeler	4)Yamuk kavramının tanımını yapınız. <i>Kenarların büyüklükleri eşit olmaması gerek ve yeterli bir setli olmayan</i>
Yanıtsız	0	Açıklamanın yapılmadığı veya sorunun aynısının cevap olarak yazıldığı ifadeler	Gerekçe: Yamukla ilgili temel özelliği (bir çift paralel kenar) hiç içermemekte, hatta yamuğu yanlış tanımlayan koşullar içermektedir. (ör. “kenar eşitsizliği gerekliliği”) Ayrıca dilsel açıdan da muğlak ve eksiktir.

Tablo 3.6. Eşkenar Dörtgen Tanımlarının Puanlama Ölçeği

Düzey	Puan	Açıklama	Öğrenci Örnek Cevabı
Tam	5	Tamamen doğru kabul edilen ifadeler	7)Eşkenar dörtgenin tanımını yapınız. Farklı uzunlukta köşegenleri olan bu köşegenleri birbirini dik kesen ve ortolayan tam kenarları eşit olan dörtgendir. Gerekçe: Köşegenlerin birbirini dik kesip ortaladığı, tüm kenarların eşit olduğu ve köşegenlerin farklı uzunlukta olabileceği bilgisiyle eşkenar dörtgenin tüm belirleyici özelliklerini doğru şekilde içerdiği için 5 puan verilmiştir.
Kısmen Doğru-A	4	Tam doğru cevaba göre eksik ifadeler	7)Eşkenar dörtgenin tanımını yapınız. Köşegenleri birbirini dik ortolayan yamuktur. Gerekçe: Doğru bir tanım olmakla birlikte bu ifade her ne kadar eşkenar dörtgenin yamuğun alt hiyerarşisinde olduğunu bize vurguluyor olsa da tam anlamıyla bir eşkenar dörtgen tanımı değildir.Nitekim kare de aynı tanıma uymaktadır.
Kısmen Doğru-B	3	Doğru nedene bağlanarak yapılan kısmen doğru ifadeler	7)Eşkenar dörtgenin tanımını yapınız. Bütün kenar uzunlukları birbirine eşit olan ve dik açısı bu tanımdan döngüsel Gerekçe: Tanım, eşkenar dörtgenin kenar eşitliği yönüyle doğru olsa da “dik açısı bulunmaz” şeklindeki yanlış genelleme nedeniyle doğru nedene dayanmayan kısmen doğru bir ifade olarak 3 puan alır.

Tablo 3.6. (Devam) Eşkenar Dörtgen Tanımlarının Puanlama Ölçeği

Kısmen Doğru-C	2	Yanlış nedene bağlanarak ya da herhangi bir nedene bağlanmadan yapılan kısmen doğru kabul edilebilecek ifadeler	7)Eşkenar dörtgenin tanımını yapınız. Baklavaya benzeyen
Yanlış	1	Tamamıyla yanlış ya da soru ile tam ilişkisi olmayan ifadeler	Gerekçe: “Baklavaya benzeyen” ifadesi, eşkenar dörtgenin prototipik görüntüsüne dayalı olup şeklin matematiksel özelliklerine (kenar eşitliği, paralellik vb.) değinmediği ve doğru nedene dayanmayan kısmen doğru bir tanım olduğu için 2 puan alır. 7)Eşkenar dörtgenin tanımını yapınız. 2 kenarı eşit diğer iki kenarı eşit değil y'dir Gerekçe: Tanım, eşkenar dörtgenin temel özelliği olan “tüm kenarların eşitliği”ni reddettiği için tamamen yanlıştır ve kavramla doğrudan çelişmektedir.
Yanıtsız	0	Açıklamanın yapılmadığı veya sorunun aynısının cevap olarak yazıldığı ifadeler	

Tablo 3.7. Paralelkenar Tanımlarının Puanlama Ölçeği

Düzey	Puan	Açıklama	Öğrenci Örnek Cevabı
Tam	5	Tamamen doğru kabul edilen ifadeler	10) Paralelkenarın tanımını yapınız. Kesgenler paralel ve aynı boyda olmalı dik kesmemiş ve birbirine ortalağan olmalıdır. Gerekçe: Tanım, paralelkenarın köşegen özelliklerinden biri olan “birbirini ortalama” özelliğini doğru şekilde belirtmiş, bazı ayrıntıları da (dik kesmeme, eşit olmama) yerinde kullanmıştır; ve kenarların paralel olmasına da değindiği için oldukça güçlü bir açıklamadır.
Kısmen Doğru-A	4	Tam doğru cevaba göre eksik ifadeler	10) Paralelkenarın tanımını yapınız. Köşegenleri birbirini ortalağan yamukdur. Gerekçe: Direkt olarak net bir paralelkenar tanımı ortaya çıkmadığından dolayı tam doğru cevaba göre eksik ifadeler kapsamındadır. Hiyerarşik olarak yamuğun altında olduğuna bir atıf yapılmıştır.
Kısmen Doğru-B	3	Doğru nedene bağlanarak yapılan kısmen doğru ifadeler	10) Paralelkenarın tanımını yapınız. Kenarları birbirine paralel olan geometrik şekillerdir. Gerekçe: Tanım, paralelkenarın temel özelliği olan paralellik unsurunu içerdiği için doğru nedene dayanır, fakat eksiktir çünkü sadece bazı kenarların paralel olduğunu belirtmek yerine tüm kenarların paralel olduğu izlenimi vermekte ve karşılıklı iki kenar çiftinin paralel olduğu detayını belirtmemektedir.
Kısmen Doğru-C	2	Yanlış nedene bağlanarak ya da herhangi bir nedene bağlanmadan yapılan kısmen doğru kabul edilebilecek ifadeler	10) Paralelkenarın tanımını yapınız. Paralelkenar kenarları eşik diktir. Gerekçe: Tanım, paralelkenarın temel özelliklerinden hiçbirine (karşılıklı kenarların eşitliği ve paralelligi gibi) yer vermemekte, yalnızca şekilsel benzerliğe dayanarak yapılmış yanlış bir nedene dayalı kısmen doğru bir ifadedir.

Tablo 3.7. (Devam) Paralelkenar Tanımlarının Puanlama Ölçeği

Yanlış	1	Tamamıyla yanlış ya da soru ile tam ilişkisi olmayan ifadeler	10) Paralelkenarın tanımını yapınız. Yataç gibi olan ama yataç olmayan şekillerdir.
Yanıtsız	0	Açıklamanın yapılmadığı veya sorunun aynısının cevap olarak yazıldığı ifadeler	Gerekçe: Tanım, paralelkenarın matematiksel özelliklerine (karşılıklı kenarların paralel ve eşit olması gibi) hiç değinmemekte ve şekilsel algıya dayalı, kavramla doğrudan ilgisiz soyut bir açıklama içermektedir.

Tablo 3.8. Dikdörtgen Tanımlarının Puanlama Ölçeği

Düzey	Puan	Açıklama	Öğrenci Örnek Cevabı
Tam	5	Tamamen doğru kabul edilen ifadeler	13)Dikdörtgenin tanımını yapınız. bir açısının ölçüsü 90 olan paraleldir. Gerekçe: Paralelkenar özelliklerine ek olarak bir iç açısının 90 derece olduğunu da vurgulaması sebebiyle tamamen doğru bir ifadedir. 13)Dikdörtgenin tanımını yapınız. 3 açısının ölçüsü 90 olan köşegenleri dik kesilmeyen dördgendir. Gerekçe: Öğrencinin “3 açısının ölçüsü 90° olan, köşegenleri dik kesilmeyen dörtgendir” ifadesi, dörtgenin iç açılarının toplamının 360° olması nedeniyle dördüncü açının da 90° olacağını ima ettiğinden ve köşegenlerin dik kesilmemesi özelliğiyle kareden ayırt edilerek yalnızca dikdörtgene özgü doğru bir tanım sunduğundan, tam doğru (5 puanlık) yanıt olarak değerlendirilmiştir.
Kısmen Doğru-A	4	Tam doğru cevaba göre eksik ifadeler	13)Dikdörtgenin tanımını yapınız. Köşegenleri birbirini ortaltayan ve karşılıklı kenarları birbirine eşit olan dörtgendir. Gerekçe: Bu tanım, dikdörtgenin temel özelliklerinden biri olan köşegenlerin ortalaması ve kenar eşitliği gibi ayırt edici nitelikleri içerdiği için kavramsal olarak doğru ancak tüm özgünlük koşullarını (örneğin, dik kesilmeme ve özel tür vurgusu gibi) barındırmadığından 4 puan değerindedir.
Kısmen Doğru-B	3	Doğru nedene bağlanarak yapılan kısmen doğru ifadeler	13)Dikdörtgenin tanımını yapınız. Karşılıklı kenar uzunlukları aynı olan dörtgendir. Gerekçe: Tanım, dikdörtgenin bazı özelliklerine (kenar eşitliği) dayansa da temel ve ayırt edici nitelikler olan dik açı veya köşegen bilgisine yer vermediği için doğru nedene kısmen dayanan ama eksik bir tanımdır ve bu nedenle 3 puan alır.
Kısmen Doğru-C	2	Yanlış nedene bağlanarak ya da herhangi bir nedene bağlanmadan yapılan kısmen doğru kabul edilebilecek ifadeler	13)Dikdörtgenin tanımını yapınız. Karşılıklı kenarları birbirine eşit olan, düzgen kenarları olan 4 kenarlı bir şekildir. Gerekçe: Tanımda dikdörtgenin sadece kenar eşitliğine odaklanılmış, temel ayırt edici özellik olan dik açığı yer verilmediği için eksik ve kısmen doğru kabul edilir.

Tablo 3.8. (Devam) Dikdörtgen Tanımlarının Puanlama Ölçeği

Yanlış	1	Tamamıyla yanlış ya da soru ile tam ilişkisi olmayan ifadeler	13)Dikdörtgenin tanımını yapınız. *Karşılıklı aygıtları aynı olan bir cisimdir. *Aynı olan iki aygıtlardan bir çifti uzundur. Gerekçe: Tanımda yer alan "karşılıklı aygıtlar" ifadesi tamamen hatalı ve anlam belirsizliği taşıdığı için tanım, dikdörtgen kavramıyla doğrudan ilişkili olmayan, doğru nedene dayanmayan ve temel özellikleri yansıtmayan tamamen yanlış bir ifade kapsamında 1 puan olarak değerlendirilir.
Yanıtsız	0	Açıklamanın yapılmadığı veya sorunun aynısının cevap olarak yazıldığı ifadeler	

Tablo 3.9. Kare Tanımlarının Puanlama Ölçeği

Düzy	Puan	Açıklama	Öğrenci Örnek Cevabı
Tam	5	Tamamen doğru kabul edilen ifadeler	16)Karenin tanımını yapınız. Tüm kenarları eşit ve iç açısı 90 derece olan karşılıklı kenarları paralel şekildedir. Gerekçe: Tanımda karenin tüm kenarlarının eşit olduğu, iç açılarının 90° olduğu ve karşılıklı kenarların paralel olduğu doğru ve eksiksiz biçimde belirtilmiştir. 16)Karenin tanımını yapınız. "Bir iç açısının ölçüsü 90 olan eşkenar dörtgendir." Gerekçe: "Bir iç açısının ölçüsü 90° olan eşkenar dörtgendir" tanımı, hem tüm kenarların eşitliğini (eşkenar dörtgen) hem de tüm açılarının dik olduğunu (bir iç açının 90° olması) ima ettiğinden kareyi tam olarak tanımlar ve bu nedenle 5 puanlık doğru bir ifadedir.
Kısmen Doğru-A	4	Tam doğru cevaba göre eksik ifadeler	16)Karenin tanımını yapınız. Tam kenar uzunlukları eşit olan dörtgendir. Gerekçe: Tanım kare için gerekli bir özelliğe (kenar eşitliği) dayanır fakat açılarla ilgili ifade eksik olduğu için tanım tam değildir.
Kısmen Doğru-B	3	Doğru nedene bağlanarak yapılan kısmen doğru ifadeler	16)Karenin tanımını yapınız. *4 köşesi, 4 kenarı olan, *Bütün kenarları aynı ve eşit olan cisimdir. Gerekçe: Tanımda karenin tüm kenarlarının eşit olduğu doğru biçimde belirtilmiş ancak dört açısının da 90° olduğu bilgisi eksik bırakılmıştır; bu da tanımın tam doğruluk düzeyine ulaşmasını engeller.

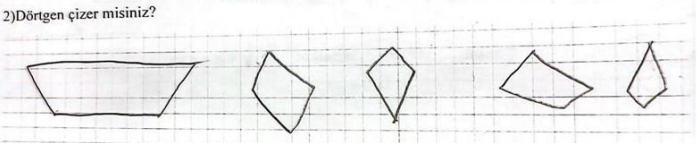
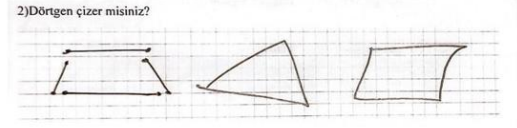
Tablo 3.9. (Devam) Kare Tanımlarının Puanlama Ölçeği

Kısmen Doğru-C	2	Yanlış nedene bağlanarak ya da herhangi bir nedene bağlanmadan yapılan kısmen doğru kabul edilebilecek ifadeler	16)Karenin tanımını yapınız. Her kenesi eşit toplam u tene kenarı vardır u tene kere Gerekçe: Karenin sadece kenar eşitliğine ve dört kenarlı oluşuna vurgu yapılmış, ancak 90° iç açı özelliği belirtilmediği ve neden-sonuç ilişkisinde eksiklik olduğu için tanım kısmen doğru kabul edilir.
Yanlış	1	Tamamıyla yanlış ya da soru ile tam ilişkisi olmayan ifadeler	16)Karenin tanımını yapınız. Tam kenarları aynı kütüden. Gerekçe: Kareye ait bir özelliği (kenar eşitliği) belirtmiş ancak bunu tanım olmaktan uzak, benzetmeye dayalı ve eksik biçimde sunmuştur.
Yanıtsız	0	Açıklamanın yapılmadığı veya sorunun aynısının cevap olarak yazıldığı ifadeler	

Tablo 3.10. Çizim Sorularını Puanlama Ölçeği

Dörtgen Türü	0 Puan	1 Puan	2 Puan
Dörtgen	Şekil çizilmemiş ya da dörtgen olmayan bir şekil çizilmiştir.	Dört kenarlı şekil çizilmiş ancak kenarlar kapalı değil veya şekil düzgün değil.	Dört kenarlı, kapalı ve genel dörtgen özelliklerini taşıyan bir şekil çizilmiştir.
Yamuk	Şekil çizilmemiş ya da yamukla ilgisiz bir şekil çizilmiştir.	Dörtgen çizilmiş ama yalnızca bir çift paralel kenar net değil ya da açı/kenar bozuk.	En az bir çift paralel kenara sahip doğru bir yamuk çizilmiştir.
Eşkenar Dörtgen	Şekil çizilmemiş ya da eşkenar dörtgen olmayan bir şekil çizilmiştir.	Dört kenarı eşit olmayan veya köşegenleri dik olmayan şekil çizilmiştir.	Tüm kenarları eşit ve köşegenleri dik kesişen bir şekil doğru şekilde çizilmiştir.
Paralelkenar	Şekil çizilmemiş ya da paralelkenar olmayan bir şekil çizilmiştir.	Karşılıklı kenarları paralel olmayan ya da açıları bozuk bir dörtgen çizilmiştir.	Karşılıklı kenarları paralel ve eşit uzunlukta olan düzgün paralelkenar çizilmiştir.
Dikdörtgen	Şekil çizilmemiş ya da dikdörtgen olmayan bir şekil çizilmiştir.	Dörtgen çizilmiş ama açılar 90° değil ya da kenarlar eşit değil.	Tüm açıları 90° olan ve karşılıklı kenarları eşit paralel dörtgen çizilmiştir.
Kare	Şekil çizilmemiş ya da kare olmayan bir şekil çizilmiştir.	Tüm kenarlar eşit ama açılar 90° değil ya da tam tersi (açılar doğru ama kenarlar eşit değil).	Tüm kenarları eşit ve tüm açıları 90° olan kare doğru şekilde çizilmiştir.

Tablo 3.11. Dörtgen Çizimlerine Ait Puanlama Ölçeği

Puan	Öğrenci Örnek Cevabı
2	2)Dörtgen çizer misiniz?  <i>Gerekçe: Öğrenci, dörtgenin tanımına uygun şekilde kapalı ve dört kenarlı farklı dörtgen türlerini eksiksiz olarak çizmiştir.</i> <i>Not: Araştırmaya katılan öğrencilerden bu puanı alan öğrenci bulunmadığı için araştırmacı tarafından dörtgene örnek olmayan çizimler yapılmıştır.</i> 2)Dörtgen çizer misiniz? 
1	
0	-

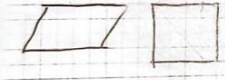
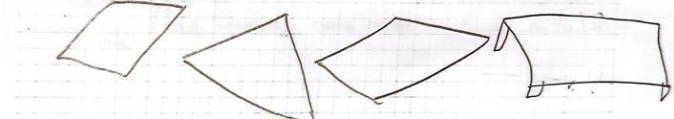
Tablo 3.12. Yamuk Çizimlerine Ait Puanlama Ölçeği

Puan	Öğrenci Örnek Cevabı
2	5)Yamuk çizer misiniz?  Ardışık 3 kenarın eşit uzunlukta olan ikizkenar yamuktur. Gerekçe: Öğrenci yalnızca doğru bir yamuk çizmekle kalmamış, kare gibi özel dörtgenlerin de ikizkenar yamuk olduğunu ifade ederek yamuğun kapsayıcı yapısını kavradığını göstermiştir.
1	5)Yamuk çizer misiniz?  Gerekçe: Öğrenci dört kenarlı kapalı bir şekil çizmiş ancak yamuğa özgü en az bir çift paralel kenar özelliğini açık biçimde göstermemiştir.
0	-

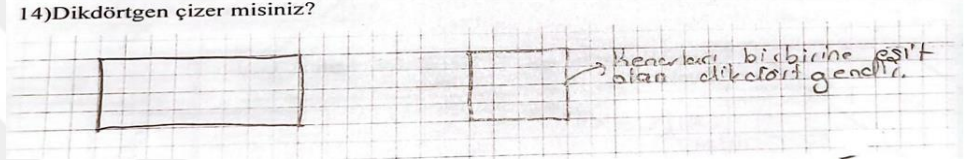
Tablo 3.13. Eşkenar Dörtgen Çizimlerine Ait Puanlama Ölçeği

Puan	Öğrenci Örnek Cevabı
2	8)Eşkenar dörtgen çizer misiniz?  Gerekçe: Öğrenci hem temel bir eşkenar dörtgen hem de özel bir eşkenar dörtgen olan kareyi çizerek kavramın hem genel hem özel örneklerini doğru bir şekilde temsil etmiştir.
1	8)Eşkenar dörtgen çizer misiniz?  Gerekçe: Öğrenci kenar uzunlukları birbirine eşit olan bir şekil çizememiştir.
0	-

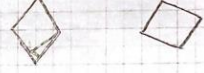
Tablo 3.14. Paralelkenar Çizimlerine Ait Puanlama Ölçeği

Puan	Öğrenci Örnek Cevabı
2	11) Paralelkenar çizer misiniz?  Gerekçe: Öğrenci, iki adet geçerli paralelkenar çizmiştir. Soldaki şekil, karşılıklı kenarları paralel olan prototip paralelkenardır. Sağdaki kare ise aynı zamanda özel bir paralelkenar türüdür (tüm kareler aynı zamanda paralelkenardır). Öğrenci, hem genel hem özel örneklerle kavramı doğru şekilde temsil etmiştir. Biçimsel doğruluk ve kavramsal yeterlik sağlanmıştır.
1	11) Paralelkenar çizer misiniz?  Gerekçe: Öğrenci istenen cevaba ilişkin paralel olma koşullarını sağlamamıştır.
0	-

Tablo 3.15. Dikdörtgen Çizimlerine Ait Puanlama Ölçeği

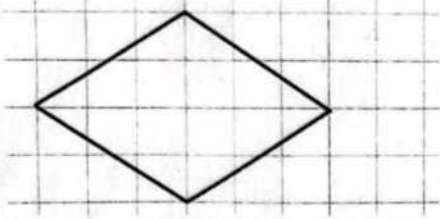
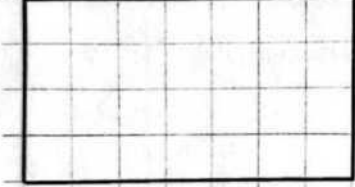
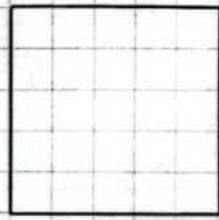
Puan	Öğrenci Örnek Cevabı
2	14)Dikdörtgen çizer misiniz?  Gerekçe: Öğrenci yalnızca dikdörtgeni doğru çizmekle kalmamış, aynı zamanda karşılıklı kenarların eşitliğini vurgulayarak tanımlayıcı bir açıklama da yapmıştır; bu nedenle 2 tam puan verilmiştir.
1	14)Dikdörtgen çizer misiniz?  Gerekçe: Öğrenci kenarların doğru parçası olmasını sağlayamamıştır
0	-

Tablo 3.16. Kare Çizimlerine Ait Puanlama Ölçeği

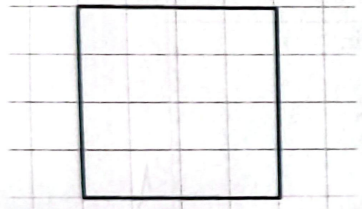
Puan	Öğrenci Örnek Cevabı
2	17)Kare çizer misiniz?  Gerekçe: Öğrenci açık ve net bir kare çizmiştir.
1	17)Kare çizer misiniz?  Gerekçe: Öğrenci kenarların dik kesişimini sağlayamamıştır.
0	-

Tablo 3.17. İki Aşamalı Sorulara Ait Puanlama Ölçeği

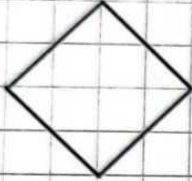
Düzey	Açıklama	Değerlendirme Kriterleri 1.Aşama- 2.	Puan
Doğru Açıklama	Geçerliliği olan açıklamanın bütün yönlerini içeren ifadeler	Doğru Cevap Doğru Açıklama	5
		Yanlış Cevap Doğru Açıklama	4
Kısmen Doğru Açıklama	Geçerli açıklamanın bütün yönlerini içermeyen ifadeler	Doğru Cevap Kısmen Doğru Açıklama	3
		Yanlış Cevap Kısmen Doğru Açıklama	2
		Doğru Cevap Yanlış Açıklama	1
Yanlış Açıklama	Doğru olmayan açıklamalar içeren ifadeler	Yanlış Cevap Yanlış Açıklama	0
Açıklama Yok	Gerekçesi yazılmayan doğru, yanlış veya yanıtsız ifadeler	Doğru Cevap Açıklama Yok	1
		Yanlış Cevap Açıklama Yok	0
		Cevap Yok Açıklama Yok	0

	Yamuktur. (☒) Çünkü; Paralellik vardır	Yamuk değildir. (☐) Çünkü;
	Yamuktur. (☒) Çünkü; 1 den fazla kenarı paraleldir	Yamuk değildir. (☐) Çünkü;
	Yamuktur. (☒) Çünkü; Köşegenleri birbirini ortalaayan ikizkenar yamuktur	Yamuk değildir. (☐) Çünkü;
	Yamuktur. (☒) Çünkü; 1 den fazla kenarı paraleldir	Yamuk değildir. (☐) Çünkü;

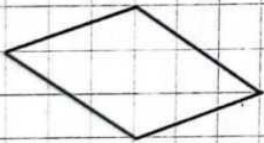
Şekil 3.3. İki aşamalı sorulardan 5 puan alan öğrenci cevapları (3.şekilde dikdörtgen için köşegenleri birbirini ortalaayan ikizkenar yamuktur ifadesi ile kapsayıcı bir tanım da bulunmuştur.)

	Dikdörtgendir. (☒) Çünkü; Kare kenarları birbirine esit olan özel dikdörtgendir	Dikdörtgen değildir. (☐) Çünkü;
---	--	---

Şekil 3.4. İki aşamalı sorulardan 5 puan alan öğrenci cevapları (Kare için “özel bir dikdörtgendir” ifadesi ile kapsayıcı bir tanım da bulunmuştur.)

	Karedir. (✓) Çünkü; Bir iç açısı 90 olan eşkenar dörtgendir.	Kare değildir. (✗) Çünkü;
---	--	------------------------------

Şekil 3.5. İki aşamalı sorulardan 5 puan alan öğrenci cevapları (Kare için “bir iç açısı 90 derece olan eşkenar dörtgendir.” ifadesi ile kapsayıcı bir tanımda da bulunmuştur.)

	Paralelkenardır. (✓) Çünkü; Kenarlar Paralel	Paralelkenar değildir. (✗) Çünkü;
---	---	--------------------------------------

Şekil 3.6. İki aşamalı sorulardan 5 puan alan öğrenci cevapları (Paralelkenar için Doğru Cevap - Doğru Açıklama'dır.)

3.5. Araştırmacının Rolü

Bu araştırmada araştırmacı, sürecin tüm aşamalarında aktif bir biçimde görev almıştır. Araştırmanın planlanması, ölçme araçlarının tespiti ve kullanımı için gereken izinlerin alınması, uygulamaların yürütülmesi, verilerin toplanması, analiz edilmesi ve yorumlanması süreçleri doğrudan araştırmacı tarafından gerçekleştirilmiştir. Araştırmacı, uygulamanın yapıldığı okulda görev yapmakta ancak araştırmanın yürütüldüğü sınıfın matematik derslerine girmemektedir. Bu durum, öğrenciler üzerinde herhangi bir akademik değerlendirme baskısı oluşturmaktan sürecin doğal akışında ilerlemesine olanak tanımıştır.

Araştırma uygulamaları, 2023-2024 eğitim-öğretim yılının ikinci döneminde, Mart ve Haziran ayları arasında, 12 hafta süreyle haftada iki ders saati olacak şekilde yürütülmüştür. Bu tarih aralığının tercih edilmesinin temel gerekçesi, 7. sınıf matematik müfredatında araştırma konusuna ilişkin içeriklerin aynı döneme denk gelmesidir. Böylece öğrencilerin mevcut öğrenme süreçlerinden kopmadan, araştırma kapsamındaki ders içeriklerini daha bütüncül ve anlamlı bir şekilde kavramaları hedeflenmiştir. Bu bağlamda, araştırma süreci öğrencilerin dersle doğrudan ilişkili içeriklerle karşılaştığı dönemle örtüşecek şekilde planlanmış ve yürütülmüştür.

Veri toplama sürecinde, ölçme araçlarının uygulanması bizzat araştırmacı tarafından gerçekleştirilmiş ve tüm öğrencilere eş zamanlı olarak uygulanmıştır. Öğrencilerin soruları

doğru anlamaları ve eşit koşullarda cevaplamaları için gerekli yönlendirmeler yapılmış, veri toplama süreci etik ilkeler doğrultusunda tamamlanmıştır.

3.6. Tezin Yazım Aşamaları

Bu çalışmanın yazım süreci sistematik bir biçimde planlanmış ve bilimsel araştırma ilkelerine uygun olarak yürütülmüştür. Tez yazım süreci, ilk olarak araştırma konusunun belirlenmesi amacıyla ilgili alan yazınının taranması ile başlamıştır. Literatür taramasının ardından uzman görüşlerine başvurularak araştırma konusu netleştirilmiştir. Belirlenen konu doğrultusunda kapsamlı bir kaynak taraması gerçekleştirilmiş ve elde edilen bilgiler ışığında araştırma sürecine yön verilmiştir.

Araştırma sürecinde kullanılacak veri toplama araçlarının niteliğine uygun şekilde görüşme formları ve uygulama materyalleri hazırlanmıştır. Ardından saha uygulamaları gerçekleştirilmiş ve veri toplama süreci tamamlanmıştır. Toplanan veriler, nitel ve nicel analiz teknikleriyle çözümlenmiş; analiz sonuçları sistematik biçimde raporlaştırılmıştır.

Son olarak, analizlerden elde edilen bulgular doğrultusunda yorumlamalar yapılmış; sonuçlar ilgili literatürle karşılaştırılarak değerlendirilmiş ve araştırmanın amacı doğrultusunda öneriler geliştirilmiştir.

Bu aşamaların her biri, araştırma sürecinin bilimsel geçerliliğini ve güvenilirliğini sağlamak adına dikkatle yürütülmüş olup araştırmanın bütünlüğüne katkı sunmuştur.

4. BULGULAR VE YORUM

Bu bölümde, araştırmada elde edilen nicel veriler doğrultusunda yapılan istatistiksel analizlerin bulguları sunulmakta ve bu bulgular ışığında yorumlamalar yapılmaktadır. Araştırmanın amacı doğrultusunda katılımcıların dörtgenler konusundaki kavramsal bilgi düzeyleri ön test ve son test verileriyle karşılaştırılmış; öğrencilerin dörtgen, yamuk, eşkenar dörtgen, paralelkenar, dikdörtgen ve kare gibi alt kavramlara ilişkin performansları ayrı ayrı incelenmiştir. Bulgular, hem her bir alt kavrama ait puan dağılımlarını hem de testler arası farkların anlamlılığını ortaya koyacak şekilde analiz edilmiştir. Elde edilen veriler istatistiksel olarak değerlendirilmiş, ilgili tablolar yardımıyla görselleştirilmiş ve yorumlanarak araştırma sorularına ışık tutulmuştur.

Tablo 4.1. *Ön test ve son teste ait ağırlıklı puanlar (Ö1;1 numaralı öğrenci, Ö2; 2 numaralı öğrenci,...)*

	Ön Test Ağırlıklı Ortalama	Son Test Ağırlıklı Ortalama
Ö1	17,823	35,362
Ö2	16,78	34,96
Ö3	7,525	37,017
Ö4	7,502	37,107
Ö5	10,572	35,092
Ö6	7,095	33,227
Ö7	18,236	36,725
Ö8	12,409	31,861
Ö9	12,489	36,161
Ö10	11,601	35,636
Ö11	21,148	36,725
Ö12	19,668	35,135
Ö13	23,804	34,411
Ö14	18,619	37,405
Ö15	19,735	31,112
Ö16	12,53	37,679
Ö17	21,425	37,794
Ö18	13,354	30,905
Ö19	11,417	29,681
Ö20	12,624	23,395
Ö21	24,46	25,75
Ö22	20,436	35,702
Ö23	15,136	37,815
Ö24	20,352	35,749
Ö25	10,076	36,543
Ö26	18,277	35,813
Ö27	22,076	36,585
Ö28	26,644	35,321
Ö29	24,941	35,683
Ö30	28,891	38,226
Ö31	26,12	29,682
Ö32	17,799	36,883
Ö33	17,888	38,727
Ö34	24,921	35,091
Ö35	25,184	34,321

Tablo 4.1’de araştırmaya katılan 35 öğrencinin uygulama öncesi (ön test) ve uygulama sonrası (son test) elde ettikleri ağırlıklı ortalama puanlar sunulmuştur. Bu tabloda yer alan ağırlıklı puanlar, her bir öğrencinin dörtgen, yamuk, eşkenar dörtgen, paralelkenar, dikdörtgen ve kareye ilişkin sorulardan elde ettiği ham puanların, her alt kavram grubunun içerdiği soru sayısı dikkate alınarak ağırlıklandırılmasıyla hesaplanmıştır. Böylece tüm kavramsal alanların katkısı dengelenmiş ve karşılaştırılabilir hale getirilmiştir. Tablo incelendiğinde, genel olarak öğrencilerin son testte elde ettikleri puanların ön test puanlarına göre belirgin biçimde daha yüksek olduğu dikkat çekmektedir. Bu durum, öğrencilerin dörtgenlerin tanımını, sınıflandırılması ve kapsayıcılık ilişkilerine yönelik bilgi düzeylerinde uygulama süreci sonunda anlamlı bir artış yaşandığını göstermektedir. Neredeyse tüm öğrencilerde gözlenen bu puan artışı, öğretim sürecinin hedeflenen kavramsal gelişimi desteklediğini ve öğrencilerin dörtgen kavramını daha bütüncül bir şekilde anlamlandırmalarına katkı sağladığını ortaya koymaktadır. Ayrıca bazı öğrencilerde oldukça düşük düzeyden başlayan ön test puanlarının son testte ciddi şekilde yükseldiği görülmektedir, bu da uygulamanın özellikle kavramsal yetersizlik yaşayan bireyler üzerinde güçlü bir etki yarattığını düşündürmektedir.

4.1. Öğrencilerin Ön Test ve Son Test Ağırlıklı Puanlarına İlişkin Betimsel Bulgular

Tablo 4.2. Öğrencilerin ön test ve son test ağırlıklı puanlarına ilişkin betimsel bulgular

	Örneklem Sayısı	Ortalama	Standart Sapma	Standart Hata
Ön Test Ölçümü	35	17,702	6,010	1,016
Son Test Ölçümü	35	34,722	3,430	0,580

Örneklem Sayısı: Her iki testte de örneklem sayısı 35’tir. Bu durum, eşleşmiş örneklem t testi için gerekli koşulun sağlandığını ve karşılaştırmanın aynı bireyler üzerinden yapıldığını göstermektedir. Bu tür analizlerde örneklem büyüklüğünün eşit olması, istatistiksel testlerin geçerliliği açısından önemlidir.

Ortalama: Ön test ortalaması 17,702 iken, son test ortalaması 34,722 olarak ölçülmüştür. Bu önemli artış, uygulanan öğretim sürecinin öğrencilerin başarı düzeyini anlamlı biçimde artırdığını göstermektedir. Ortalama puanlardaki bu yükselme, öğretim müdahalesinin etkili olduğunu ve öğrencilerin dörtgenler konusundaki bilgi düzeylerinin geliştiğini ortaya koymaktadır.

Standart Sapma (SD): Ön testteki standart sapma 6,010 iken son testte 3,430'dur. Bu azalma, öğrencilerin son testte daha benzer puanlar aldığını, yani başarı dağılımının daraldığını göstermektedir. Standart sapmanın düşmesi, öğrenmenin bireyler arasında daha dengeli gerçekleştiğine işaret eder.

Standart Hata (SE): Standart hata, örneklem ortalamasının anakitle ortalamasını ne kadar iyi temsil ettiğini gösterir. Ön testte 1,016 olan SE değeri, son testte 0,580'e düşmüştür. Bu düşüş, son testte elde edilen ortalamanın daha güvenilir ve temsili olduğunu gösterir. Diğer bir ifadeyle, son test verileri ortalama açısından daha az değişkenlik göstermektedir.

4.2. Normallik Varsayımına İlişkin Bulgular

Nicel araştırmalarda kullanılan parametrik testlerin geçerliliği ve güvenilirliği, büyük ölçüde normallik varsayımının sağlanıp sağlanmadığına bağlıdır. Parametrik istatistiksel yöntemlerin en temel ön kabullerinden biri, analizde kullanılan verilerin normal dağılıma uygun olmasıdır (Uysal ve Kılıç, 2021). Özellikle eşleştirilmiş örneklem t-testi gibi parametrik testlerde, karşılaştırılan iki ölçüm arasındaki fark puanlarının normal dağılıma uygunluğu, testin sonuçlarının güvenilirliğini doğrudan etkileyen kritik bir koşuldur. Bu bağlamda çalışmada yer alan ön test ve son test puanlarına ilişkin normallik varsayımı detaylı biçimde incelenmiş ve yorumlanmıştır.

Normallik varsayımını test etmek amacıyla hem görsel hem de istatistiksel yöntemler birlikte kullanılmıştır. Görsel analiz için Q-Q (Quantile-Quantile) grafikleri incelenmiş, istatistiksel olarak ise Shapiro-Wilk testi uygulanmıştır. Bu iki yaklaşım, birbirini tamamlayıcı nitelikte olup yalnızca p-değerine dayalı karar vermenin yanıltıcı olabileceği durumlar için dengeli bir analiz zemini sunmaktadır. Özellikle örneklem büyüklüğünün orta düzeyde olduğu bu çalışmada ($n=35$), Shapiro-Wilk testi tercih edilmiştir; zira bu test küçük ve orta büyüklükteki örneklerde normallik varsayımını sınamak açısından yüksek duyarlılık göstermektedir (Razali ve Wah, 2011).

Tablo 4.3. Normallik testi

	W	P
Ön Test - Son Test	0,978	0,684

Not. Tablo JASP (Version 0.18.3) programı kullanılarak araştırmacı tarafından oluşturulmuştur (JASP Team, 2024).

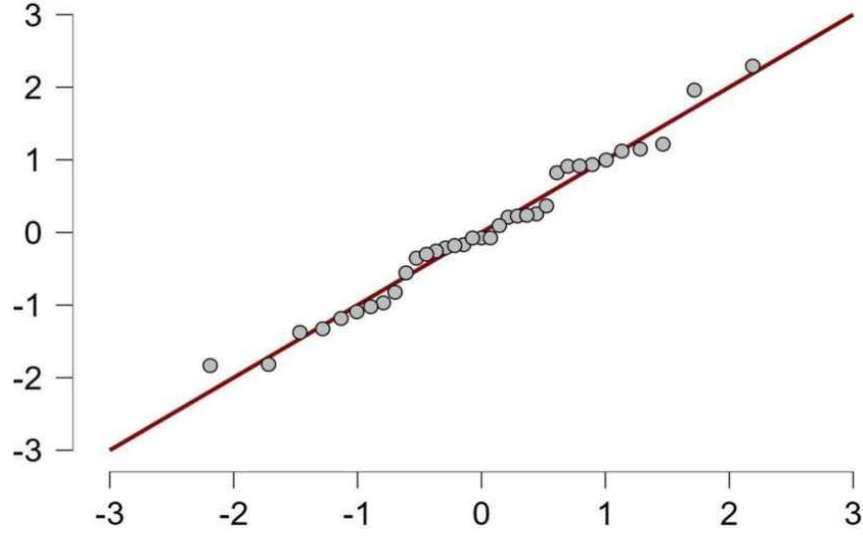
Shapiro-Wilk normallik testi sonuçları incelendiğinde, ön test ile son test puanları arasındaki farkların normal dağılıma uygun olduğu görülmüştür. Tablo 4.2’de sunulan bulgulara göre, ön test ile son test puanları arasındaki farklara ait Shapiro-Wilk testi $W=0.978$, $p=0.684$ şeklinde hesaplanmıştır.

Tablo 4.4. *Normallik testi terimlerinin anlamları*

Terim	Anlamı
W	Shapiro-Wilk test istatistiğidir. Burada 0.978 olarak çıkmıştır. W değeri 1’e ne kadar yakınsa veri normal dağılıma o kadar yakındır.
p	Normallik testi için anlamlılık düzeyidir. Burada 0.684 > 0.05 olduğundan, veri kümesinin normal dağıldığını gösterir. Yani, t-testi gibi parametrik testleri uygulamak için varsayım sağlanmıştır.

p-değerinin 0.05’ten büyük olması, fark puanlarının normal dağılıma uygun olduğunu göstermektedir. Bu sonuç, parametrik bir test olan eşleştirilmiş örneklem t-testinin kullanılmasının istatistiksel açıdan uygun olduğunu göstermektedir. Bu bağlamda normallik varsayımı sağlanmış ve analizler bu doğrultuda gerçekleştirilmiştir.

Normallik varsayımını destekleyen bir diğer önemli kanıt ise Q-Q grafiğinden elde edilmiştir. Q-Q grafiği, standartlaştırılmış artıklara karşılık gelen teorik normal dağılım kuantillerini esas alır. Elde edilen Q-Q grafiği incelendiğinde, noktaların büyük oranda diyagonal çizgi üzerine yerleştiği, dolayısıyla verilerin teorik normal dağılıma yakın bir şekilde dağıldığı gözlemlenmiştir. Özellikle uç değerlerin az sayıda olması ve verilerin çizgiye yakın seyretmesi, normalliğin grafiksel olarak da desteklendiğini göstermektedir. Q-Q grafiğinde gözlemlenen bu yapı, Shapiro-Wilk testiyle elde edilen p-değeri ile birlikte değerlendirildiğinde, normallik varsayımının geçerli olduğu sonucuna ulaşılmaktadır.



Şekil 4.1. Ön test ile son test arasındaki fark puanlarına ilişkin Q-Q grafiği. Noktaların teorik kuantiller doğrultusunda referans doğrusu etrafında simetrik bir şekilde sıralanması, fark puanlarının normal dağılım varsayımını karşıladığını göstermektedir. Grafik, JASP (Version 0.18.3) yazılımı kullanılarak araştırmacı tarafından oluşturulmuştur (**Kaynak:** JASP Team, 2024)

Normallik varsayımının sağlanması yalnızca istatistiksel test seçimi açısından değil, aynı zamanda araştırma sonuçlarının genellenebilirliği bakımından da önem taşımaktadır. Normal dağılıma sahip verilerle yapılan analizlerde hata oranlarının kontrol altında tutulması daha kolaydır ve örneklemden elde edilen sonuçların anakütleye yansıtılabilirliği daha yüksektir. Bu çalışmada elde edilen bulgular doğrultusunda, verilerin normal dağıldığı güvenle söylenebilir ve sonrasında yapılan istatistiksel çıkarımların geçerliliği bu temele dayandırılabilir.

Normallik testine ilişkin bu bulgular ışığında, eşleştirilmiş örneklem t-testi ile yapılan karşılaştırmanın metodolojik açıdan doğru ve güvenilir olduğu anlaşılmaktadır. Böylece ön test ve son test puanları arasındaki farkların anlamlılığını değerlendirmek üzere uygulanan t-testi sonuçları, geçerli ve güvenilir bir zemine oturtulmuştur. Bu bağlamda, istatistiksel analizlerin temel dayanağı olan normallik varsayımı bu çalışmada başarıyla sağlanmış ve analizlerin istatistiksel geçerliği teminat altına alınmıştır.

Sonuç olarak, yapılan normallik testleri ve grafiksel incelemeler, araştırma verilerinin parametrik testlere uygun olduğunu açıkça göstermektedir. Bu durum, izleyen bölümlerde sunulacak olan analiz sonuçlarının hem yorumlanabilirliğini hem de bilimsel geçerliliğini artıran önemli bir unsurdur. Araştırmada kullanılan veri setinin istatistiksel normallik ölçütlerini sağlaması, elde edilen sonuçların güvenilirliğini destekleyen temel bir kanıttır. Bundan sonraki aşamada, normallik varsayımının sağlandığı bu sağlam zeminde, ön test ve

son test sonuçları arasındaki farklara ilişkin istatistiksel anlamlılık testleri detaylı biçimde değerlendirilecektir.

4.3. t-Testi Ölçümüne İlişkin Bulgular

Bu araştırmada, deney grubuna uygulanan öğretim sürecinin öğrencilerin başarılarına etkisini değerlendirmek amacıyla ön test ve son test puanları arasında anlamlı bir fark olup olmadığı bağımlı örneklemeler için t-testi (Paired Samples t-Test) ile analiz edilmiştir.

Tablo 4.5. Ölçümlere Ait t-Testi sonuçları

Ölçüm 1	Ölçüm 2	t Değeri	p Değeri
Ön Test	Son Test	-14,668	<0,001

Analiz sonucunda, öğrencilerin ön test ve son test puanları arasında istatistiksel olarak anlamlı bir fark olduğu belirlenmiştir ($t(34) = -14.668$, $p < 0.001$). Bu sonuç, uygulanan öğretim sürecinin öğrencilerin başarı düzeylerinde anlamlı bir artış sağladığını göstermektedir.

Elde edilen negatif t-değeri, son test puanlarının ön test puanlarına kıyasla daha yüksek olduğunu ve bu farkın beklenen yönde gerçekleştiğini ortaya koymaktadır. t-değerinin negatif olması, t-testi hesaplamasında kullanılan farkların (ön test - son test) ortalamasının negatif olduğunu, yani son test sonuçlarının daha yüksek değerlere sahip olduğunu ifade eder. Bu durum, deney grubunun uygulama sonrasında ölçme aracından daha yüksek puanlar aldığını göstermektedir.

Anlamlılık düzeyine ilişkin p-değeri 0.001'den küçük olduğundan, elde edilen fark istatistiksel olarak anlamlı kabul edilmiştir. Yani, %95 güven düzeyinde, öğrencilerin son test puanları ile ön test puanları arasında rastlantısal olmayan bir fark bulunmaktadır. Bu bulgu, yapılan öğretim sürecinin etkili olduğu yönünde önemli bir kanıt sunmaktadır.

Sonuç olarak, uygulanan öğretim süreci, öğrencilerin başarı düzeylerinde istatistiksel olarak anlamlı ve yüksek düzeyde etkili bir artış sağlamıştır. Bu bulgu, araştırmada kullanılan öğretim yaklaşımının pedagojik açıdan etkili olduğunu desteklemekte ve alan yazınındaki benzer çalışmalarla da örtüşmektedir. Yapılan istatistiksel analizler ışığında, öğretim sürecinin öğrenme çıktıları üzerindeki olumlu etkisi, hem ortalama puan farkları hem de etki büyüklüğü dikkate alınarak güvenilir biçimde ortaya konmuştur.

4.4. Birinci Alt Probleme Ait Bulgular: Prototip Olmayan Geometri Öğretiminin Kavramsal Öğrenmeye Etkisi

Bu araştırmanın birinci alt problemi kapsamında, prototip olmayan geometri öğretiminin 7. sınıf öğrencilerinin dörtgenlerle ilgili kavramsal öğrenmelerine anlamlı bir etkisinin olup olmadığı incelenmiştir. Bu amaç doğrultusunda, deneysel çalışma öncesinde ve sonrasında uygulanan kavramsal başarı testi verileri üzerinden yapılan istatistiksel analizlere başvurulmuştur. Ön test ve son test arasında elde edilen puan farkları, öğrencilerin dörtgen kavramlarına ilişkin bilgi düzeylerinde ne derece değişim olduğunu ortaya koymaktadır.

Analiz sürecinde, bağımlı örneklem t-testi (Paired Samples t-Test) uygulanmıştır. Bu test, aynı grubun iki farklı zaman noktasındaki (ön test ve son test) ortalamaları arasında istatistiksel olarak anlamlı bir fark olup olmadığını değerlendirmek amacıyla kullanılmıştır. Analiz sonucunda elde edilen $t(34) = -14.668$, $p < 0.001$ değeri, ön test ve son test puanları arasında istatistiksel açıdan anlamlı bir fark olduğunu göstermektedir. Bu bulgu, prototip olmayan öğretim sürecinin öğrencilerin dörtgenlerle ilgili kavramsal bilgilerini anlamlı şekilde artırdığını göstermektedir.

Elde edilen etki büyüklüğü (Cohen's $d = -2.479$) oldukça yüksek bir değerdedir. Cohen'in (1988) sınıflamasına göre, 0.2 küçük, 0.5 orta ve 0.8 üzeri büyük etki büyüklüğü olarak değerlendirilir. Bu bağlamda elde edilen -2.479 değeri, uygulamanın oldukça güçlü bir etkisi olduğunu ortaya koymaktadır. Negatif t değeri ise ölçümlerin sırasal olarak son testin ön testten yüksek olduğunu göstermektedir; çünkü test formülü gereği (ön test - son test) hesaplaması yapılır ve sonuç negatif çıktığında son test lehine bir artış söz konusudur. Bu durum, deneysel uygulamanın öğrencilerin kavramsal gelişiminde anlamlı ve olumlu bir etki yarattığını açıkça ortaya koymaktadır.

Ayrıca betimsel istatistikler, son testte ortalamanın 34.722'ye yükseldiğini ve standart sapmanın 3.430 gibi daha dar bir dağılım gösterdiğini ortaya koymuştur. Buna karşılık ön testte ortalama 17.702, standart sapma ise 6.010 olarak belirlenmiştir. Bu durum, yalnızca ortalama başarıda değil, aynı zamanda öğrenciler arası varyansta da düşüş olduğunu, dolayısıyla daha homojen bir başarı düzeyinin sağlandığını göstermektedir. Öğrencilerin ön testteki bilgi düzeylerinin oldukça dağınık olduğu ancak son testte daha istikrarlı ve yüksek düzeyde başarı sağladıkları anlaşılmaktadır.

Uygulanan normal dağılım testleri (örneğin Shapiro-Wilk) sonucunda $p = 0.684 > 0.05$ bulunması, fark puanlarının normal dağıldığını ve parametrik test kullanılmasının uygun

olduğunu göstermiştir. Ayrıca Q-Q grafiğinde gözlenen noktaların teorik doğrultuda sıralanması, normal dağılım varsayımını desteklemektedir.

Sonuç olarak araştırma bulguları, prototip olmayan geometri öğretiminin öğrencilerin dörtgenlere ilişkin kavramsal bilgi düzeylerinde anlamlı ve olumlu yönde bir gelişmeye neden olduğunu göstermektedir. Bu bulgu, geleneksel öğretimde sıklıkla göz ardı edilen prototip dışı örneklerin, kavramın tanımsal kapsamını zenginleştirerek öğrenmeyi derinleştirdiği yönündeki literatürle de örtüşmektedir. Öğrencilerin yalnızca kare ya da dikdörtgen gibi tipik dörtgenlerle değil, daha sıra dışı ya da alışılmadık dörtgen biçimleriyle karşılaşmaları, kavramsal esneklik kazanmalarını sağlamıştır. Bu da Van Hiele'nin kavramsal ilerleme düzeyleri açısından öğrencilerin şekil özelliklerini tanıma ve sınıflandırma düzeylerini ileriye taşıdığı şeklinde yorumlanabilir.

4.5. İkinci Alt Probleme İlişkin Bulgular: PoGÖ Uygulamasının Öğrenci Tanımlarına Etkisine Yönelik Bulgular

İkinci alt problem kapsamında, *Prototip Olmayan Geometri Öğretiminin (PoGÖ)* öğrencilerin dörtgen, yamuk, eşkenar dörtgen, paralelkenar, dikdörtgen ve kare kavramlarına yönelik tanım geliştirme becerilerine etkisi incelenmiştir. Bu amaçla, öğrencilerin ilgili şekillere ilişkin açık uçlu tanım yanıtları analiz edilmiş ve bu analizde Erdem (2011) tarafından geliştirilen *Açık Uçlu Soruları Puanlama Ölçeği* temel alınmıştır. Bu ölçek, öğrencilerin ifadelerini tanımsal doğruluk, kavramsal bütünlük ve gerekçelendirme yeterliğine göre değerlendirmeye imkân tanımaktadır ve her bir yanıt 0 ile 5 puan aralığında puanlamaya olanak sağlamaktadır.

Elde edilen bulgular, öğretim öncesinde öğrencilerin büyük oranda şekillerin prototipik temsillerine dayanan, eksik ya da kavramsal açıdan yetersiz tanımlar yaptığını göstermektedir. Örneğin, kare genellikle yalnızca “kenarları eşit şekil”, yamuk ise “yamuk duran şekil” şeklinde tanımlanmış; eşkenar dörtgen ve paralelkenar için de benzer şekilde günlük dile dayalı ya da yüzeysel ifadeler kullanılmıştır. Dikdörtgen ise sıklıkla “karşılıklı kenarları eşit olan şekil” veya sadece “kenarları uzun olan dörtgen” gibi sınırlı ve çoğunlukla geometrik anlamı karşılamayan biçimlerde tanımlanmıştır.

Ancak PoGÖ uygulaması sonrasında öğrencilerin tanımlarında belirgin bir kavramsal ilerleme gözlenmiştir. Kare, artık “dört kenarı eşit uzunlukta ve dört açısı dik olan dörtgen” şeklinde tanımlanırken yamuk için “en az bir çift karşılıklı kenarı paralel olan dörtgen”, eşkenar dörtgen için “tüm kenarları eşit, kenarları birbirini dik kesmeyen ve köşegenleri

birbirini dik ortalayan dörtgen”, paralelkenar için “karşılıklı kenarları eşit ve paralel olan dörtgen” gibi tanımlar öne çıkmaya başlamıştır. Dikdörtgen tanımlarında da niteliksel bir artış olmuş, öğrenciler dikdörtgeni “karşılıklı kenar uzunlukları eşit, dört açısı dik olan dörtgen” biçiminde tanımlamaya başlamış, ayrıca bazı öğrenciler dikdörtgenin aynı zamanda bir paralelkenar olduğunu da ifade ederek şekiller arası ilişkileri kurabilmiştir.

13) Dikdörtgenin tanımını yapınız.

Dört kenarı olan, karşılıklı kenarları eşit ve birbirine paralel olan ve karşılıklı kenarların birinin daha uzun olduğu şekil

Şekil 4.2. Ö2'nin (2 nolu öğrencinin) ön test dikdörtgen tanımına ait cevabı

13) Dikdörtgenin tanımını yapınız.

Bir açısı 90 olan fakat komşu kenarları eşit uzunlukta olmayan paralelkenardır.

Şekil 4.3. Ö2'nin (2 nolu öğrencinin) son test dikdörtgen tanımına ait cevabı

^ Ö2'nin ön testteki dikdörtgen tanımı iki farklı şekilde ifade edilmiştir: İlk ifadede, “Dört kenarı olan, karşılıklı kenarları eşit ve birbirine paralel olan ve karşılıklı kenarların birinin daha uzun olduğu şekil” diyerek temel bazı özelliklere yer vermiştir. Bu tanım, dikdörtgenin dört kenarlı ve paralel kenar çiftlerine sahip olduğu bilgisini içerirken kenar uzunluklarındaki farkı vurgulamaya çalışmıştır. Ancak tüm iç açılarının 90° olduğunu belirtmemiştir ve bu nedenle eksik bir tanım olarak değerlendirilebilir.

İkinci ifadede öğrenci, “Bir açısı 90° olan fakat komşu kenarları eşit uzunlukta olmayan paralelkenardır” diyerek dikdörtgenin bir dik açıya sahip olduğunu ve kareyle karışmadığını açıkça ifade etmiştir. Öklidyen geometri bağlamında, bir açısı 90° olan bir paralelkenarın tüm açıları da 90° olmak zorundadır. Bu nedenle, öğrencinin tanımı matematiksel olarak geçerli kabul edilebilir. Ayrıca komşu kenarların eşit olmaması vurgusu, öğrencinin kare ile dikdörtgen arasındaki farkı ayırt edebildiğini göstermektedir. Bu durum, öğrencinin kavramsal düzeyde doğru bir ayırım yapabildiğini ortaya koymaktadır.

1)Dörtgen kavramının tanımını yapınız.

Dört kenarı olan şekil

Şekil 4.4. Öl'in (1 nolu öğrencinin) ön test dörtgen tanımına ait cevabı

1)Dörtgen kavramının tanımını yapınız.

Dörtgen, dört kenar ve dört köşeden oluşan bir düzlem şeklidir. Ancak bu dörtgenin kenar uzunlukları ve iç açıları tamamen farklı olabilir. Hatta hiçbir kenarı birbirine paralel olmayabilir.

Şekil 4.5. Öl'in (1 nolu öğrencinin) son test dörtgen tanımına ait cevabı

^ İlk ifadesinde öğrenci, dörtgeni yalnızca “Dört kenarı olan şekil” biçiminde tanımlamış ve bu tanım oldukça yüzeysel kalmıştır. Bu tanım, dörtgenin en temel özelliği olan dört kenara sahip olma durumunu belirtse de şeklin düzlemsel olması, kapalı bir şekil olması veya kenarların doğrusal parçalar olması gibi geometrik açıdan önemli detayları içermemektedir.

İkinci ifadesinde ise öğrenci, “Dörtgen, dört kenar ve dört köşeden oluşan bir düzlem şeklidir. Ancak bu dörtgenin kenar uzunlukları ve iç açıları tamamen farklı olabilir. Hatta hiçbir kenarı birbirine paralel olmayabilir.” diyerek daha kapsamlı bir tanım yapmıştır. Bu tanımda, dörtgenin temel yapısal özellikleri olan kenar ve köşe sayısına dikkat çekilmiş, ayrıca dörtgenin özel bir şekil olmak zorunda olmadığı, paralellik ve eşitlik gibi özellikleri taşımayabileceği vurgulanmıştır. Bu da öğrencinin prototipik olmayan dörtgenleri de kapsayan daha genel bir tanım yapabildiğini göstermektedir. Özellikle paralel kenar bulunmayan dörtgenlerin de varlığını kabul etmesi, öğrencinin kavramı geniş bir perspektiften ele aldığını ortaya koymaktadır.

4) Yamuk kavramının tanımını yapınız.

Kenarları düz değil yamuk olan şekil.

Şekil 4.6. Ö13'ün (13 nolu öğrencinin) ön test yamuk tanımına ait cevabı

4) Yamuk kavramının tanımını yapınız.

en az iki kenarı paralel olan dörtgendir.

Şekil 4.7. Ö13'ün (13 nolu öğrencinin) son test yamuk tanımına ait cevabı

^ Öğrencinin ön testteki cevabı, “Kenarları düz değil yamuk olan şekil” şeklindedir. Bu ifade, hem biçimsel hem de içeriksel açıdan hatalıdır. Öğrenci, tanımda “yamuk” sözcüğünü hem kavram adı hem de niteleyici sıfat olarak kullanarak döngüsel bir tanım yapmıştır. Ayrıca “kenarları düz değil” ifadesi, geometrik doğruların doğası gereği yanlış bir ifadedir; çünkü tüm dörtgenlerin olduğu gibi yamuğun kenarları da düz doğru parçalarıdır. Bu durum, öğrencinin yamuk kavramına ilişkin herhangi bir tanımsal özelliğe hâkim olmadığını ve kavramsal bir anlayıştan çok, günlük dile dayalı sezgisel bir söylem geliştirdiğini göstermektedir.

Buna karşın, son testte verdiği cevap “En az iki kenarı paralel olan dörtgendir” biçimindedir. Bu tanım, kapsayıcı tanım olarak adlandırılır ve literatürde (örneğin Usiskin ve Griffin, 2008) geçerli bir tanım olarak kabul edilmektedir. Bu tanım sayesinde öğrenci yalnızca klasik yamukları değil, özel dörtgen türlerini de (örneğin paralelkenar) yamuğun bir alt sınıfı olarak değerlendirme potansiyeline sahiptir. Bu durum, öğrencinin öğretim süreci sonunda kavramı daha soyut ve tanımsal düzeyde anladığını ve kavramsal gelişim gösterdiğini ortaya koymaktadır.

7) Eşkenar dörtgenin tanımını yapınız.

4 kenar uzunlukları birbirine eşit olan, 4 köşeli geometrik şekildir.

Şekil 4.8. Ö19'un (19 nolu öğrencinin) ön test eşkenar dörtgen tanımına ait cevabı

7) Eşkenar dörtgenin tanımını yapınız.

Farklı uzunlukta her iki köşegenine göre simetrik olan tüm kenarları eşit olan dörtgendir.

Şekil 4.9. Ö19'un (19 nolu öğrencinin) son test eşkenar dörtgen tanımına ait cevabı

^ Öğrenciye ait eşkenar dörtgen tanımları incelendiğinde ön testte “Tüm kenar uzunlukları birbirine eşit olan, 4 köşeli geometrik şekildir” ifadesine yer verdiği görülmektedir. Bu tanım, şeklin dört kenarlı ve eşit kenarlara sahip olduğunu belirtmekte ancak paralellik ya da açı özelliklerine dair bir bilgi içermemektedir. Yani öğrenci, yalnızca eşkenar olma durumunu tanımanın yeterli olduğunu düşünmüş ve şekli sınırlı bir özelliğiyle tanımlamıştır.

Son testte ise “Farklı uzunlukta her iki köşegenine göre simetrik olan, tüm kenarları eşit olan dörtgendir” ifadesine yer verdiği görülmektedir. Bu tanımda hem tüm kenarların eşitliği vurgulanmış hem de köşegenlerin uzunluk ve simetri ilişkisine değinilmiştir. Özellikle köşegen vurgusu, şeklin yapısal özelliklerini dikkate alan, daha gelişmiş bir kavramsal yaklaşımı yansıtmaktadır. Öğrencinin bu tanımı, eşkenar dörtgenin yalnızca dışsal görünümüne değil, içsel özelliklerine ve şeklin simetrisine de dikkat ettiğini göstermektedir. Dolayısıyla ön test ile son test arasında kavramsal gelişim olduğu ve öğrencinin tanımsal düzeye doğru bir ilerleme kaydettiği söylenebilir.

10) Paralelkenarın tanımını yapınız.

Karşılıklı kenarları eşit uzunlukta olabilen birbirine paralel geometrik şekildir. Birbirine dik şekilde paraleldir.

Şekil 4.10. Ö35'in (35 nolu öğrencinin) ön test paralelkenar tanımına ait cevabı

10) Paralelkenarın tanımını yapınız.

Köşegenleri birbirini ortolayan fakat eşit uzunlukta olmayan ve birbirini dik kesmeyen dörtgendir.

Şekil 4.11. Ö35'in (35 nolu öğrencinin) son test paralelkenar tanımına ait cevabı

^ Öğrenci, “Karşılıklı kenarları eşit uzunlukta olabilen, birbirine paralel geometrik şekildir. Birbirine dik şekilde paraleldir.” şeklinde ifade etmiştir. Bu tanımda öğrenci,

paralelkenarın karşılıklı kenarlarının eşit ve paralel olduğunu belirtmiş ancak “birbirine dik şekilde paraleldir” ifadesi, geometrik açıdan hatalıdır çünkü paralelkenarda karşılıklı kenarlar birbirine paraleldir fakat dik değildir. Bu durum öğrencinin paralelkenar ile dikdörtgen arasında kavramsal bir karışıklık yaşadığını düşündürmektedir. Ayrıca “olabilen” ifadesi kararsızlık içerdiğinden, tanımın netliğini azaltmaktadır.

Son testte ise öğrenci, “Köşegenleri birbirini ortalamayan fakat eşit uzunlukta olmayan ve birbirini dik kesmeyen dörtgendir.” demiştir. Bu tanımda öğrenci, paralelkenarın köşegen özelliklerine odaklanmıştır. Köşegenlerin birbirini ortaladığı ancak eşit olmadığı ve dik kesmediği bilgisi doğrudur. Bu ifade, öğrencinin paralelkenarın tanımına ilişkin kavramsal bilgisinin geliştiğini ve benzer dörtgenlerden (örneğin dikdörtgenden) ayırt edebildiğini göstermektedir. Tanımda temel özelliklere (karşılıklı kenarların paralelliği) doğrudan yer verilmemiş olsa da köşegenlerin davranışlarına dayalı ayırt edici bir tanım sunduğu için matematiksel olarak anlamlı bir ilerleme gözlenmektedir.

16)Karenin tanımını yapınız.

4 köşeli, 4 kenar uzunluğu da birbirine eşit olan geometrik şekildir

Şekil 4.12. Ö35’in (35 nolu öğrencinin) ön test kare tanımına ait cevabı

16)Karenin tanımını yapınız.

Bütün kenar uzunlukları eşit olan ve bir iç açısının ölçüsü 90° olan dörtgendir

Şekil 4.13. Ö35’in (35 nolu öğrencinin) son test kare tanımına ait cevabı

Öğrenci ön testte, kareyi “4 köşeli, 4 kenar uzunluğu da birbirine eşit olan geometrik şekildir” şeklinde tanımlamıştır. Bu tanım, karenin tüm kenarlarının eşit olduğunu doğru biçimde belirtmesine rağmen, açısal özelliklere değinilmemesi nedeniyle eksik bir tanım olarak değerlendirilebilir. Karenin yalnızca eşkenar bir dörtgen olmadığını, aynı zamanda dört dik açıya sahip olması gerektiğini belirtmemiştir.

Son testte ise öğrenci, “Bütün kenar uzunlukları eşit olan ve bir iç açısının da 90° olduğu dörtgendir” ifadesini kullanmıştır. Bu tanım, hem kenar eşitliğini hem de dik açı varlığını içermesi bakımından matematiksel olarak geçerli ve yeterli bir kare tanımıdır.

Çünkü Öklidyen geometri bağlamında, bütün kenarları eşit olan bir dörtgende bir iç açının 90° olması, diğer açılarında 90° olmasını zorunlu kılar; bu da şekli kare yapar. Dolayısıyla öğrenci, son testte kare tanımında hem uzunluk hem de açısal özellikleri birlikte ele alarak kavramsal düzeyde doğru bir tanıma ulaşmıştır. Bu durum, öğrencinin ön testten son teste kavram tanımı açısından anlamlı bir gelişme gösterdiğini ve karenin yalnızca görsel ya da prototipik özelliklerine değil, tanımsal özelliklerine dayalı olarak düşündüğünü ortaya koymaktadır.

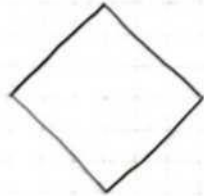
Bu gelişmeler, öğrencilerin sadece görsel benzerliklere değil, şekillerin tanımsal özelliklerine ve hiyerarşik ilişkilerine dayalı bir kavramsal yapı geliştirdiklerini göstermektedir. Öğrencilerin kavramlar arası sınıflama ilişkilerini fark edebilmeleri, öğretim sürecinde kullanılan prototip olmayan örneklerin, kavramsal anlamlandırma sürecine olumlu katkı sunduğunu ortaya koymaktadır.

Sonuç olarak, PoGÖ yaklaşımı, öğrencilerin şekillere dair tanımlarını sadece daha doğru ve eksiksiz hâle getirmekle kalmamış, aynı zamanda bu tanımların nedenlerine dair gerekçelendirme yapabilme düzeylerini de güçlendirmiştir. Bu da prototip dışı örneklerin sistematik olarak kullanıldığı öğretim süreçlerinin kavramsal öğrenmeyi destekleyici etkisini açıkça ortaya koymaktadır.

4.6. Üçüncü Alt Probleme İlişkin Bulgular

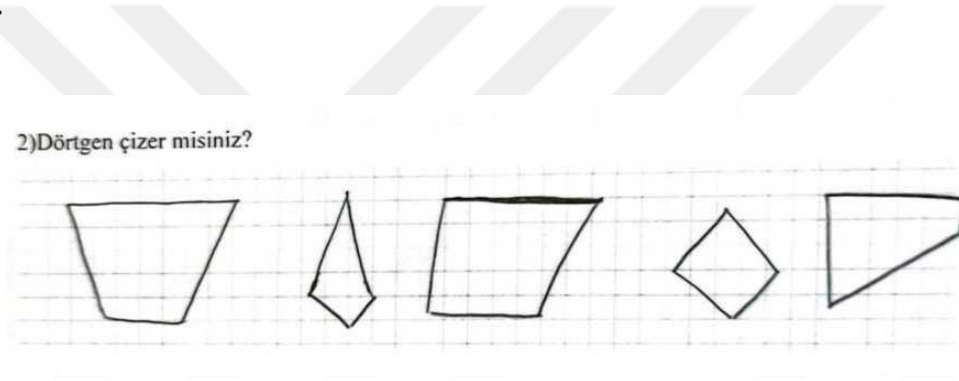
Bu bölümde, Prototip Olmayan Geometri Öğretimi'nin (PoGÖ), 7. sınıf öğrencilerinin dörtgen, yamuk, eşkenar dörtgen, paralelkenar, dikdörtgen ve kare şekillerine yönelik çizim yeterlikleri üzerindeki etkisini ortaya koymaya yönelik bulgulara yer verilmiştir.

2)Dörtgen çizer misiniz?



Şekil 4.14. Ö2'nin (2 numaralı öğrenci) ön testte dörtgen çizimi sorusuna ait cevabı

Ön test uygulamasında öğrencilere yöneltilen “Dörtgen çizer misiniz?” sorusuna verilen yanıtlardan elde edilen örneklerden biri yukarıdaki ilk görselde yer almaktadır. Bu çizimde öğrenci, büyük olasılıkla kare veya eşkenar dörtgene benzer bir şekil çizmiştir. Bu durum, öğrencinin dörtgen kavramı ile doğrudan ilişkilendirdiği prototipik şekil üzerinden hareket ettiğini göstermektedir. Tek bir şekil çizilmiş olması ve bu şeklin oldukça simetrik, düzgün kenarlı olması, öğrencinin zihninde “dörtgen” denildiğinde yalnızca bu tür şekillerin canlandığına işaret etmektedir. Bu durum, Tall ve Vinner’in (1981) tanımladığı "kavram imgesi" ile "kavram tanımı" arasındaki farkı da yansıtmaktadır. Öğrenci, dörtgenin tanımına değil; zihninde yer eden görsel temsile (prototipe) dayanarak yanıt vermiştir. Buna karşılık, son test uygulamasında aynı soruya verilen yanıtlar ikinci görselde yer almaktadır (Şekil 4.15).



Şekil 4.15. Ö2'nin (2 numaralı öğrenci) son testte dörtgen çizimi sorusuna ait cevabı

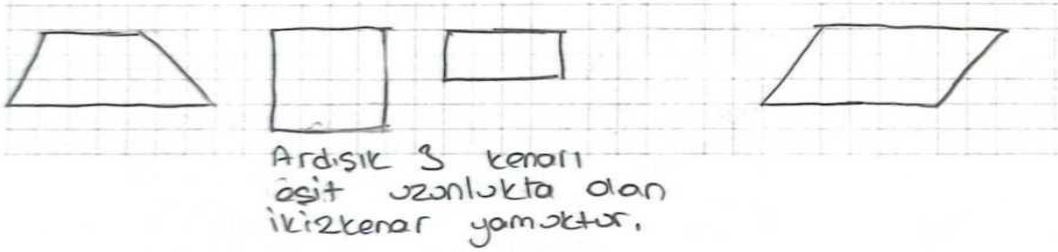
Bu çizimde öğrenci, farklı kenar uzunluklarına ve açı yapılarına sahip birden fazla dörtgen çizmiştir. Çizilen şekiller arasında yamuk, uçları daralan geniş açılı dörtgen, eşkenar olmayan şekiller gibi prototip olmayan dörtgen örnekleri yer almaktadır. Bu çeşitlilik, öğrencinin dörtgen kavramının sadece kare veya dikdörtgen ile sınırlı olmadığını fark ettiğini göstermektedir. Başka bir ifadeyle, öğrenci artık dörtgenin “dört kenarı ve dört iç açısı olan kapalı geometrik şekillerin genel kümesi” olduğunu anlamlandırmıştır. Bu gelişim, kavramsal esnekliğin ve geometrik kapsayıcılık anlayışının arttığına işaret eder.

5)Yamuk çizer misiniz?



Şekil 4.16. Ö17'nin ön testte yamuk çizimi sorusuna ait cevabı

5)Yamuk çizer misiniz?



Şekil 4.17. Ö17'nin son testte yamuk çizimi sorusuna ait cevabı

Bu iki görsel, "Prototip Olmayan Geometri Öğretiminin (PoGÖ), öğrencilerin dörtgen türlerine ilişkin tanıma dayalı kavramsal bilgi düzeylerini geliştirmeye etkisi var mıdır?" sorusu kapsamında analiz edilmiştir. Görsellerden ilki, ön test uygulamasında bir öğrencinin "Yamuk çizer misiniz?" sorusuna verdiği tek bir şekille sınırlı ve açıklama içermeyen yanıtı göstermektedir. Bu durum, öğrencinin yamuk kavramına dair bilgi düzeyinin sınırlı olduğunu ve yalnızca prototip bir şekil üzerinden kavrayış geliştirdiğini düşündürmektedir.

İkinci görsel ise aynı öğrenciye ait son test çizimlerini içermektedir. Bu görselde birden fazla dörtgen şekli çizilmiş, ayrıca öğrencinin "Ardışık 3 kenarı eşit uzunlukta olan ikizkenar yamuktur" biçiminde yazılı bir açıklama eklediği görülmektedir. Bu durum, öğrencinin yalnızca şekil çizimiyle değil, tanıma yönelik kavramsal açıklamayla da bilgi düzeyinde bir gelişim gösterdiğini ortaya koymaktadır. Ayrıca çizimlerin çeşitlenmiş olması, öğrencinin yalnızca tipik yamuk değil, daha az prototipik olan yamuk biçimlerini de tanıdığına işaret etmektedir. Bu gelişim, PoGÖ yaklaşımıyla yapılan öğretimin öğrencinin şekil çeşitliliği ve tanım bilgisi üzerindeki olumlu etkisini somut olarak ortaya koymaktadır.

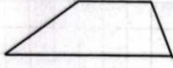
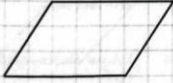
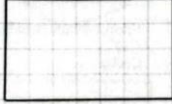
Bu bulgular, prototip olmayan örneklerin öğretim sürecinde kullanılmasının öğrencilerin kavram yapılarında önemli bir dönüşüm sağladığını göstermektedir. Özellikle ön testte tek bir tip dörtgen çizen öğrenci, son testte farklı türde ve daha soyut dörtgenleri de

izebilir hale gelmiştir. Bu durum, Erdem (2011) tarafından onerilen açık uçlu soru puanlama leğine göre öğrencinin açıklama ve temsil düzeyinin geliştiğini de göstermektedir.

Sonuç olarak, ön testte sınırlı ve prototipe dayalı bir kavram imgesine sahip olan öğrencilerin, prototip olmayan geometri ğretimi sonrasında daha kapsamlı ve tanımsal bilgiye dayalı bir çizim repertuarına ulaştıkları gözlenmiştir. Bu durum, öğretimsel müdahalenin hedeflenen kavramsal öğrenme açısından etkili olduğunu ortaya koymaktadır.

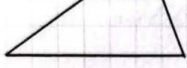
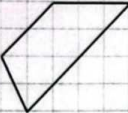
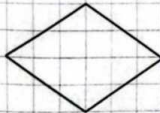
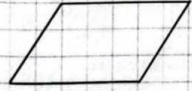
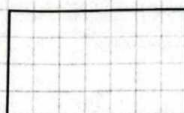
4.7. Dördüncü Alt Probleme İlişkin Bulgular

Bu alt problem kapsamında, prototip olmayan geometri ğretiminin (PoG), 7. sınıf ğrencilerinin dörtgen, yamuk, eşkenar dörtgen, paralelkenar, dikdörtgen ve kare gibi temel dörtgen türlerine yönelik görsel-geometrik şekil eşleştirme becerilerinde anlamlı bir gelişim sağlayıp sağlamadığı incelenmiştir. Bu amaç doğrultusunda ön test ve son test uygulamalarında, öğrencilerden her bir dörtgen türüne karşılık gelen geometrik şekilleri tanıyarak doğru eşleştirmeleri yapmaları beklenmiştir. Uygulama ncesi elde edilen veriler, öğrencilerin büyük ölçüde prototipik temsil biçimlerine (rneğin yatay konumda çizilmiş kare veya dikdörtgen) bağlı kaldıklarını; özellikle yamuk, eşkenar dörtgen veya paralelkenar gibi prototipik olmayan şekilleri tanımada ve eşleştirmede zorluk yaşadıklarını ortaya koymuştur.

	Yamuktur. (✓) Çünkü: kenar uzunlukları eşit değil	Yamuk değildir. () Çünkü:
	Yamuktur. (✓) Çünkü: kenar uzunlukları eşit değil	Yamuk değildir. () Çünkü:
	Yamuktur. () Çünkü:	Yamuk değildir. (✓) Çünkü: kenar uzunlukları eşit
	Yamuktur. () Çünkü:	Yamuk değildir. (✓) Çünkü: kenar uzunlukları eşit
	Yamuktur. () Çünkü:	Yamuk değildir. (✓) Çünkü: kenar uzunlukları eşit
	Yamuktur. () Çünkü:	Yamuk değildir. (✓) Çünkü: kenar uzunlukları eşit
	Dikdörtgendir. () Çünkü:	Dikdörtgen değildir. (✓) Çünkü: 2 tane kenarları eşit

Şekil 4.18. Prototipik şekillere bağlı kalan Ö7'nin dikdörtgen için ön test prototipik cevabı

PoGÖ uygulamasının ardından yapılan son test bulguları, öğrencilerin hem prototipik hem de prototipik olmayan yamuk ve paralelkenar biçimlerini daha doğru bir şekilde sınıflandırabildiklerini ve kare ile dikdörtgen gibi özel dörtgenler arasındaki kapsayıcılık ilişkisini daha isabetli yorumladıklarını göstermektedir. Bu gelişme, öğrencilerin yalnızca şekillerin görsel niteliklerine değil, aynı zamanda tanımsal özelliklerine de dayalı bir sınıflandırma gerçekleştirebildiklerini ortaya koymaktadır. Öğrencilerin şekil sınıflamalarında tanıma dayalı gerekçeler sunabilmeleri, kavramsal düzeyde anlamlı bir öğrenme yaşadıklarına işaret etmektedir.

	Yamuktur. (✓) Çünkü; kenarlar arası paralellik var	Yamuk değildir. (✗) Çünkü;
	Yamuktur. (✓) Çünkü; kenarlar arası paralellik var. En az bir çift paralel kenar var	Yamuk değildir. (✗) Çünkü;
	Yamuktur. (✓) Çünkü; paralellik var	Yamuk değildir. (✗) Çünkü;
	Yamuktur. (✓) Çünkü; kenarlar arası paralellik var	Yamuk değildir. (✗) Çünkü;
	Yamuktur. (✓) Çünkü; kenarları birbirini ortolayan iki kenar yamuktur	Yamuk değildir. (✗) Çünkü;
	Yamuktur. (✓) Çünkü; köşegenler birbirini dik kesen iki kenar yamuktur	Yamuk değildir. (✗) Çünkü;

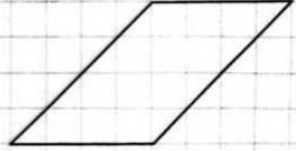
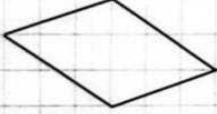
Şekil 4.19. Ö7'nin dikdörtgen için son test cevabı

^ Ö7'nin ön testte verdiği yanıtta (Şekil 4.19), kare şeklindeki bir dörtgenin “dikdörtgen olmadığı” yönünde bir değerlendirme yaptığı ve gerekçe olarak da “bütün kenarların eşit olması”nı sunduğu görülmektedir. Bu açıklama, öğrencinin dikdörtgenin yalnızca prototipik formuna (yani uzun kenar-kısa kenar ayrımının belirgin olduğu yatay dikdörtgene) odaklandığını ve dörtgenler arası kapsayıcılık ilişkisini henüz içselleştiremediğini göstermektedir. Öğrenci, eşit kenarlı dörtgenlerin (yani karelerin), dikdörtgen olamayacağını düşünerek sınıflandırmayı ayırık bir yapıda ele almıştır. Bu durum, Usiskin ve Griffin'in (2008) dörtgen sınıflandırmalarındaki prototip etkisini vurgulayan bulgularıyla örtüşmektedir.

Son testte ise Ö7'nin kare ve dikdörtgen arasındaki ilişkiyi daha iyi kavradığı, bu kez kareyi dikdörtgen olarak değerlendirdiği ve bunu gerekçelendirirken “köşegenlerin birbirini dik kesmesi” gibi daha soyut ve matematiksel bir özellikten hareket ettiği görülmektedir. Öğrencinin yalnızca görünüşten ziyade şeklin yapısal özelliklerini dikkate alması, figüral düzeyden kavramsal düzeye geçişe işaret etmektedir. Bu durum, öğrencinin geometrik

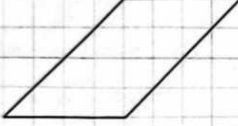
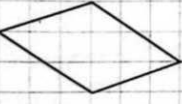
kavramlara yönelik düşünme düzeyinde gelişim yaşadığını ve PoGÖ yaklaşımının bu gelişimi desteklediğini göstermektedir.

12)

	Paralelkenardır. (X) Çünkü: Karşılıklı kenarlar eşittir.	Paralelkenar değildir. () Çünkü;
	Paralelkenardır. (X) Çünkü: Karşılıklı kenarlar eşittir.	Paralelkenar değildir. () Çünkü;
	Paralelkenardır. () Çünkü;	Paralelkenar değildir. (X) Çünkü: Eğik bir düzlem üzerinde değildir.

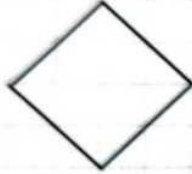
Şekil 4.20. Ö11'in Ön testte paralelkenar için verdiği cevap

12)

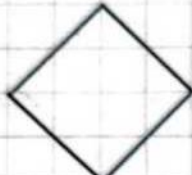
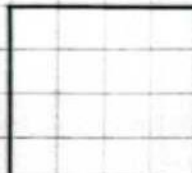
	Paralelkenardır. (X) Çünkü: Kenarlar paraleldir.	Paralelkenar değildir. () Çünkü;
	Paralelkenardır. (X) Çünkü: Kenarlar paraleldir.	Paralelkenar değildir. () Çünkü;
	Paralelkenardır. (X) Çünkü: Kenarlar paraleldir.	Paralelkenar değildir. () Çünkü;

Şekil 4.21. Ö11'in Son testte paralelkenar için verdiği cevap »Öğrenci, ilk iki şekil için doğru olarak “karşılıklı kenarlar eşittir” açıklamasını yaparak paralelkenarları tanımaya çalışmıştır. Ancak üçüncü şekilde (dikdörtgen), “eğik bir düzlem üzerinde değildir” diyerek bu şekli paralelkenar olarak görmemiştir. Bu durum, öğrencinin dikdörtgenin bir paralelkenar türü olduğunu fark edemediğini, şeklin yönelimi (prototip dışı sunumu) nedeniyle tanımda figüral özelliklere takıldığını göstermektedir. Yani öğrenci, şekli paralelkenar olarak değerlendirmek yerine sadece görsel benzerliğe (yatay-uzun-eğik form) odaklanmıştır

Son testte ise öğrenci, bu kez tüm şekilleri “Paralelkenardır” olarak doğru şekilde tanımlamıştır ve açıklama kısmında da “kenarları paraleldir” ifadesiyle temel tanıma uygun biçimde gerekçe sunmuştur. Bu durum, öğrencinin artık sadece kenar uzunluklarına değil, paralellik özelliğine odaklandığını ve kavramsal tanımın soyut bileşenlerini daha doğru biçimde içselleştirdiğini göstermektedir.

	Karedir. () Çünkü:	Kare değildir. (✓) Çünkü: ters duruyor
	Karedir. (✓) Çünkü: 4 kenarını eşit	Kare değildir. () Çünkü:

Şekil 4.22. PoGÖ öncesi testte öğrencilerin kare tanımına yönelik görsel değerlendirmeleri. İlk öğrenci, köşegen konumlu kareyi yönelimi nedeniyle "kare değil" olarak sınıflandırmıştır. Bu durum, öğrencinin şekil yönelimine göre karar verdiğini ve tanım özelliklerini göz ardı ettiğini göstermektedir

	Karedir. (✓) Çünkü: Kenar uzunlukları eşit ve dik	Kare değildir. (□) Çünkü:
	Karedir. (✓) Çünkü: Kenar uzunlukları eşit.	Kare değildir. (□) Çünkü:

Şekil 4.23. PoGÖ sonrası testte öğrencilerin kare tanımına yönelik görsel değerlendirmeleri. Öğrenciler, köşegen konumdaki kareyi doğru şekilde tanımlamış ve gerekçelerinde tanımsal özelliklere (kenar eşitliği, dik açı vb.) yer vererek kavramsal öğrenmede gelişim gösterdiklerini ortaya koymuşlardır

Şekil 4.23. (ön test), öğrencilerden biri köşegen konumda yer alan kareyi "kare değil" olarak değerlendirmiş ve gerekçe olarak "ters duruyor" ifadesini kullanmıştır. Bu durum, öğrencinin şeklin yönelimine (oryantasyonuna) aşırı odaklandığını ve tanım özelliklerini göz ardı ettiğini göstermektedir. Diğer öğrenci ise kareyi doğru şekilde tanımış ve “4 kenarı eşit” gerekçesiyle doğru bir sınıflandırma yapmıştır. Bu farklılık, öğrenciler arasında kavramın görsel temsiline yönelik farklı algı düzeyleri olduğunu ortaya koymaktadır.

İkinci görselde (son test), her iki öğrenci de köşegen konumdaki kareyi doğru biçimde "kare" olarak tanımlamış ve gerekçelerinde "kenar uzunlukları eşit ve dik" gibi tanımsal özelliklere yer vermiştir. Bu, öğrencilerin artık yalnızca görünüme değil, şekillerin tanım kriterlerine dayalı değerlendirme yaptıklarını ve PoGÖ süreci sonrasında kavramsal bilgi düzeylerinde olumlu bir gelişme olduğunu göstermektedir. Özellikle oryantasyondan bağımsız değerlendirme yapılması, geometrik kavramların daha esnek ve doğru şekilde kavrandığını ortaya koymaktadır.

Son testte elde edilen veriler, ayrıca, öğrencilerin dörtgen türlerine ait farklı yönelimlerdeki (oryantasyonu değiştirilmiş) ya da prototipik olmayan biçimlerdeki örnekleri tanıma ve doğru şekilde eşleştirme konusunda daha başarılı olduklarını göstermektedir. Özellikle yamuk ve eşkenar dörtgen gibi kavramlarda, öğrencilerin çeşitli görselleştirme biçimlerini ayırt edebildikleri ve bu figürleri tanımsal özelliklerine göre sınıflandırabildikleri gözlemlenmiştir. Nitekim bazı öğrencilerin bir şekli hem paralelkenar hem eşkenar dörtgen olarak tanımlayabilmeleri, dörtgenler arasındaki kapsayıcılık ilişkilerini kavradıklarını ve şekil tanımında görsel temsilleri tanımsal bilgilerle bütünleştirebildiklerini ortaya koymaktadır.

Bu bulgular genel olarak, Prototip Olmayan Geometri Öğretiminin öğrencilerin şekil tanıma, sınıflandırma ve geometrik figürleri kavramsal özelliklerine göre değerlendirme becerilerini anlamlı düzeyde geliştirdiğini göstermektedir. Öğrencilerin yalnızca tipik (prototipik) temsillerle sınırlı kalmayıp daha geniş ve çeşitli bir görsel repertuvara ulaştıkları; geometrik şekilleri tanımada sadece biçimsel görünüme değil, tanıma dayalı açıklamalara da başvurdukları anlaşılmaktadır. Bu durum, kavramsal öğrenmenin kalıcılığı açısından önemli bir kazanım olarak değerlendirilebilir.

5. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

5.1. Genel Sonuçlar

Bu araştırmanın temel amacı, prototip olmayan örnekler yoluyla yürütülen geometri öğretiminin 7. sınıf öğrencilerinin dörtgenler konusundaki kavramsal öğrenmelerine etkisini ortaya koymaktır. Bu kapsamda, öğrencilerin dörtgen, yamuk, eşkenar dörtgen, paralelkenar, dikdörtgen ve kare kavramlarına yönelik bilgi düzeyleri hem tanımsal hem de görsel boyutlarda çok yönlü olarak incelenmiş; öğrencilerin bu kavramlara dair tanım yapma, çizim gerçekleştirme ve şekil tanıma becerileri ön test ve son test yoluyla değerlendirilmiştir. Araştırma, tek gruplu öntest-sontest deneysel desen kullanılarak yürütülmüş; elde edilen veriler betimsel istatistikler, normal dağılım testleri ve bağımlı örneklem t-testi ile analiz edilmiştir.

Araştırmanın birinci alt problemi, “Prototip olmayan geometri öğretiminin (PoGÖ) 7. sınıf öğrencilerinin dörtgenlerdeki kavramsal öğrenmelerini geliştirmeye etkisi var mıdır?” şeklinde ifade edilmişti. Yapılan analizler sonucunda, öğrencilerin dörtgenlere ilişkin son test puanlarının ön test puanlarına göre anlamlı düzeyde daha yüksek olduğu belirlenmiştir ($t(34) = -14.668$, $p < 0.001$). Bu farkın büyüklüğünü belirlemek amacıyla hesaplanan Cohen’s d değeri ($d = -2.479$), uygulamanın yüksek düzeyde etkili olduğunu göstermektedir. Cohen’s d değeri, iki ölçüm arasındaki farkın standart sapmaya oranını ifade eder. Bu sonuçlar, prototip olmayan geometri öğretiminin öğrencilerin kavramsal bilgi düzeylerini anlamlı biçimde artırdığını göstermektedir. Literatürde kavramsal öğrenme sürecini geliştiren birçok unsurdan söz edilmektedir. Örneğin, Zeybek (2018) ile Güven, Öztürk ve Bülbül (2019) tarafından yapılan çalışmalarda, prototipik olmayan örneklerin, öğrencilerin kavramsal düşünme süreçlerini tetiklediği ve görsel temsillerin ötesinde tanımsal düzeye geçişi desteklediği ifade edilmiştir. Bu bağlamda, mevcut çalışmanın bulgularının alan yazınındaki çalışmalarla yüksek düzeyde örtüştüğü görülmektedir. Öte yandan, uygulamaya katılan tüm öğrencilerin son test puan ortalamalarının ön test puan ortalamalarından yüksek olduğu gözlemlenmiş; bu durum, PoGÖ sürecinin tüm katılımcılar üzerinde olumlu bir etki yarattığını ortaya koymuştur.

Araştırmanın ikinci alt problemi, “Prototip Olmayan Geometri Öğretiminin (PoGÖ) öğrencilerin dörtgen, yamuk, eşkenar dörtgen, paralelkenar, dikdörtgen ve kare şekillerine yönelik tanımlarını geliştirmeye etkisi var mıdır?” şeklinde ifade edilmiştir. Yapılan nitel analizler ve puanlama sonuçları incelendiğinde öğrencilerin uygulama öncesi çizim ve tanım

verilerinde kavramsal tutarsızlıkların yaygın olduğu, birçok öğrencinin şekilleri tanımlarken yalnızca görsel prototiplere veya hatalı söylemlere dayandığı tespit edilmiştir. Ancak uygulama sonrasında, öğrencilerin tanım yapma yeterliklerinde belirgin bir gelişim gözlenmiştir. Tanımlar daha sistematik, tanımsal özelliklere dayalı ve matematiksel tutarlılıkla ifade edilmiştir. Özellikle “yamuk” ve “eşkenar dörtgen” gibi sıklıkla karıştırılan kavramlarda, öğrencilerin ayırt edici özellikleri vurguladıkları, birden fazla tanımlama ölçütünü doğru şekilde kullandıkları belirlenmiştir. Nitel puanlama verileriyle desteklenen bu gelişim, PoGÖ yaklaşımının tanıma dayalı kavramsal bütünlük oluşturma sürecine katkı sağladığını ortaya koymaktadır. Literatürde, geometri öğretiminde kavram tanımlarının görsel imgelerden bağımsız olarak inşa edilmesinin öğrenme kalitesini artırdığı belirtilmektedir. Özellikle Tall ve Vinner (1981), öğrencilerin “kavram imgesi” ile “kavram tanımı” arasında çoğu zaman tutarsızlık yaşadığını; bu durumun kavramsal hatalara yol açtığını ifade etmiştir. Bu bağlamda, prototipik olmayan öğretimin, öğrencilerin figüral özelliklerden soyutlanarak kavramların tanımsal temellerine odaklanmasını sağladığı, mevcut bulgularla da desteklenmiştir. Zeybek (2018), dörtgen sınıflamalarında prototipe dayalı algıların tanım temelli düşünmeyi sınırladığını belirtirken Fischbein ve Nachlieli (1998) ise tanım-şekil çelişkilerinin ancak uygun öğretim stratejileriyle giderilebileceğini vurgulamıştır. Bu çalışmada, öğrencilerin tanımlarında gözlenen iyileşme, PoGÖ yaklaşımının kavramsal düzeyde yapılandırıcı bir rol üstlendiğini ve öğrenmeyi sadece şekle dayalı bir eşleştirme değil, tanıma ve gerekçelendirmeye dayalı bir sürece dönüştürdüğünü ortaya koymuştur.

Araştırmanın üçüncü alt problemi, “Prototip Olmayan Geometri Öğretiminin (PoGÖ) öğrencilerin dörtgen, yamuk, eşkenar dörtgen, paralelkenar, dikdörtgen ve kare şekillerine yönelik çizimlerini geliştirmeye etkisi var mıdır?” şeklinde ifade edilmiştir. Yapılan çizim analizleri sonucunda, öğrencilerin uygulama öncesi çizimlerinde genellikle tek bir prototipe dayalı temsiller sundukları; şekillerin konumlandırmasında, kenar ve açı özelliklerinde eksiklikler ya da kavramsal hatalar bulunduğu tespit edilmiştir. Örneğin, kare ve dikdörtgen çizimlerinde yönelimi değiştirilmiş şekillerin kare sayılmaması, yamuk çiziminde yalnızca ikizkenar yamukların tercih edilmesi gibi sınırlı temsiller yaygın biçimde gözlenmiştir.

Ancak uygulama sonrasında, öğrencilerin farklı yönelimlere sahip, tanımsal özellikleri karşılayan çok çeşitli ve doğru çizimler ürettikleri belirlenmiştir. Çizimlerde köşegen yapısı, kenar paralelliği ve eşitlik gibi nitelikler daha net vurgulanmış; yalnızca şekle değil, şeklin içerdiği geometrik ilişkilerin temsiline de odaklanılmıştır. Bu durum, PoGÖ sürecinin

öğrencilerin görsel varyasyon farkındalığını artırdığını ve çizim yoluyla kavramları yapılandırmalarına katkı sunduğunu göstermektedir. Literatürde, geometrik kavramların sadece tanımlarla değil, çoklu temsillerle öğrenilmesinin kavramsal gelişimi desteklediği vurgulanmaktadır. Fujita ve Jones (2007), öğrencilerin dörtgenleri sınıflandırmada ve çizmelerinde prototiplere bağlı kaldıklarını; bu nedenle öğretimin farklı görsel temsilleri içermesi gerektiğini belirtmiştir. Zeybek (2018) de benzer biçimde, yalnızca dik duran karelerin kare olarak tanımlandığını; yönelim değiştirildiğinde kavram yanılgılarının arttığını raporlamıştır. Bu araştırmada gözlemlenen çizim çeşitliliği ve doğruluk düzeyindeki artış, bu tür yanılgıların azaldığını ve öğrencilerin şekilleri tanımsal düzeyde temsil etme becerilerinin geliştiğini ortaya koymaktadır. Sonuç olarak, PoGÖ yaklaşımı öğrencilerin çizim becerilerini yalnızca görsel estetikle sınırlı kalmaksızın tanım, ilişkilendirme ve çeşitlendirme boyutlarında zenginleştirmiş, geometrik çizimi kavramsal bir üretim aracına dönüştürmüştür.

Araştırmanın dördüncü alt problemi, “Prototip Olmayan Geometri Öğretiminin (PoGÖ) öğrencilerin dörtgen, yamuk, eşkenar dörtgen, paralelkenar, dikdörtgen ve kare şekillerine yönelik görsel-geometrik şekil eşleştirmelerini geliştirmeye etkisi var mıdır?” şeklinde ifade edilmiştir. Araştırma bulguları, uygulama öncesinde öğrencilerin çoğunlukla, yalnızca prototipik şekillerle doğru eşleştirme yapabildiklerini ancak yönelimi değiştirilmiş, simetrisi bozulmuş ya da standart dışı sunulmuş şekiller karşısında kavramsal karışıklık yaşadıklarını göstermektedir. Örneğin, eğik duran kare ya da ters çevrilmiş yamuk gibi örnekler, ön testte çoğu öğrenci tarafından doğru sınıflandırılamamış; şekiller yalnızca görsel alışkanlıklar temelinde tanımlanmıştır. Ancak PoGÖ uygulaması sonrasında öğrencilerin farklı yönelimlerdeki şekilleri yalnızca görünüşlerine göre değil, tanımsal özellikleriyle değerlendirmeye başladıkları; bu sayede prototipik olmayan şekilleri doğru biçimde eşleştirdikleri ve sınıflandırdıkları gözlenmiştir. Bu gelişme, öğrencilerin kavramlara ilişkin görsel imge dağarcığının genişlediğini ve şekil tanımayı sadece dışsal benzerliklere değil, içsel özelliklere dayandırmaya başladıklarını göstermektedir.

Bu bulgu, literatürde Tall ve Vinner (1981) tarafından tanımlanan *kavram imgesi* ile *kavram tanımı* arasındaki boşluğun öğretim yoluyla kapanabileceğini ifade eden kuramsal çerçeveye örtüşmektedir. Ayrıca Fischbein ve Nachlieli (1998), figüral kavramların şekil tanımadaki etkisini vurgulamış ve öğrencilerin yalnızca figürün görünümüne göre değil, onun matematiksel içeriğine göre karar verebilme becerilerinin geliştirilmesinin öğretimin temel amaçlarından biri olması gerektiğini belirtmiştir. Bu bağlamda, araştırmada uygulanan

PoGÖ yaklaşımı, öğrencilerin figür al kavram yanılgılarını aşmalarına ve şekilleri doğru kavramsal kategoriye yerleştirmelerine olanak tanımıştır. Sonuç olarak, prototip olmayan şekillerle desteklenmiş öğretim süreci, öğrencilerin görsel-geometrik eşleştirme becerilerini anlamlı biçimde geliştirmiş; yönelimi, büyüklüğü, simetrisi farklı olan dörtgenlerin doğru tanımlanmasını sağlayarak öğrencilerin kavramlar arası geçiş ve ilişkilendirme yetilerini güçlendirmiştir.

Araştırmadan elde edilen genel sonuçlar şu şekilde özetlenebilir:

- Prototip olmayan öğretim süreci, öğrencilerin dörtgen tanımlarında kavramsal bütünlük ve gerekçelendirme boyutlarını geliştirmiştir. Özellikle “yamuk”, “eşkenar dörtgen” ve “paralelkenar” gibi sık karıştırılan dörtgen türlerine yönelik tanımların daha doğru ve ayrıntılı hale geldiği görülmüştür.
- Çizim yeterliklerinde gözlemlenen gelişmeler, öğrencilerin yalnızca tipik (prototipik) görsellere dayalı değil, tanıma dayalı daha soyut temsilleri de içselleştirmeye başladıklarını ortaya koymuştur. Ön testte yalnızca bir tane ve prototipik özellikler taşıyan şekil çizebilen öğrenciler, son testte çeşitlendirilmiş ve tanımsal olarak daha doğru çizimler yapabirmiştir.
- Öğrencilerin görsel-geometrik şekil eşleştirme becerileri gelişmiştir. Son testte, köşegen konumda çizilmiş kare ya da yönelimi değiştirilmiş yamuk gibi prototipik olmayan şekillerin tanımlanabildiği ve doğru biçimde sınıflandırılabilirdiği görülmüştür.
- Uygulama süreci boyunca kontrollü koşulların sağlanması, deneysel desende kontrol grubunun olmamasından kaynaklı iç geçerlik tehditlerinin minimize edilmesine katkı sağlamıştır.

Genel olarak araştırma bulguları, prototip olmayan örnekler üzerinden yapılan sistematik öğretimin, öğrencilerin geometrik kavramları yalnızca şekilsel benzerliklere değil, tanımsal özelliklere dayalı olarak öğrenmelerini desteklediğini ve kavramsal düzeyde anlamlı bir dönüşüm sağladığını göstermektedir.

5.2. Sonuçların Literatür ile Karşılaştırılması

Araştırma bulguları, ilgili literatürde yer alan birçok çalışmayla tutarlılık göstermektedir. Öğrencilerin geometri öğreniminde sıklıkla şekillerin görünümüne dayalı olarak karar verdikleri, tanım bilgisine dayalı düşünme becerilerinin ise sınırlı olduğu daha önce pek çok çalışmada ortaya konmuştur (Tall ve Vinner, 1981; Vinner ve Hershkowitz,

1980). Bu bağlamda araştırmanın sonucunda gözlenen kavram imgesinden kavram tanımına geçiş süreci, öğrencilerin bilişsel düzeylerinde anlamlı bir ilerleme sağlandığını ortaya koymaktadır.

Güven, Öztürk ve Bülbül (2019) ile Erdem, Gökkurt ve Soylu (2020) tarafından yapılan çalışmalarda, öğrencilerin prototipik olmayan örneklerle karşılaştıklarında daha fazla bilişsel çaba harcadıkları ancak bu çabanın uzun vadeli öğrenmeyi desteklediği belirtilmiştir. Mevcut araştırma da benzer biçimde, öğrencilerin prototip olmayan sorular karşısında başlangıçta zorlansalar da öğretim süreci sonunda kavramlar arası ilişki kurma, doğru tanım yapma ve çeşitli temsil biçimlerini tanıma konusunda belirgin bir ilerleme kaydettiklerini göstermektedir.

De Villiers (1994), geometri öğretiminde kavramsal değişimin ancak bilişsel çatışma ve sorgulamayla mümkün olduğunu belirtmiştir. Bu çalışmada uygulanan öğretim modeli, öğrencilerin zihinsel modellerini sorgulamaya dayalı olarak yapılandırıldığından, öğrencilerin şekillere dair ön kabullerini kırmaları ve tanımsal özelliklere odaklanmaları mümkün olmuştur. Bu da kavram değişiminin gerçekleştiğini ve yüzeysel öğrenmenin yerini kavramsal öğrenmeye bıraktığını göstermektedir.

Zeybek (2018) tarafından yapılan bir çalışmada, dörtgen sınıflandırmalarında prototipik örneklerle bağlı kalmanın öğrencilerin genelleme yapma becerisini sınırladığı ifade edilmiştir. Mevcut çalışmada ise uygulama sonrası öğrencilerin farklı yönelimlere sahip kare ve paralelkenarları doğru şekilde tanımladıkları, kare-paralelkenar-dikdörtgen ilişkisini doğru kurabildikleri görülmüştür. Bu da öğrencilerin sadece bireysel kavramları değil, dörtgenler arasındaki kapsayıcılık ilişkilerini de anlamlandırdıklarını göstermektedir.

Ayrıca çalışmanın bulguları, van Hiele (1986) tarafından geliştirilen geometrik düşünme düzeyleri modelini de destekler niteliktedir. Araştırma süreci sonunda öğrencilerin tanıma dayalı seviyeden açıklama düzeyine geçtiği, dörtgenlerin özelliklerini yalnızca betimlemekle kalmayıp gerekçelendirdikleri, sınıflandırma ilişkilerini kurabildikleri gözlemlenmiştir. Bu durum, öğrencilerin van Hiele düzeylerinde yukarıya doğru bir geçiş yaptıklarını göstermektedir.

Sonuç olarak, bu araştırma bulguları, geometri öğretiminde prototip olmayan örneklerin sistematik biçimde kullanıldığı durumlarda öğrencilerin kavramsal gelişimlerinin anlamlı biçimde arttığını gösteren literatürle yüksek düzeyde örtüşmektedir. Öğrencilerin yalnızca öğretmen ya da ders kitaplarında sıkça karşılaştıkları standart şekillerle değil; farklı

biçim, yönelim ve ölçülere sahip şekillerle de karşılaşmalarının kavramsal esneklik açısından kritik olduğu anlaşılmaktadır.

5.3. Uygulamanın Öğretim Sürecine Katkısı

Bu araştırma kapsamında yürütülen prototip olmayan geometri öğretimi (PoGÖ), özellikle dörtgenler konusuna ilişkin kavramsal bilgi yapılarını geliştirme açısından öğrencilere önemli katkılar sunmuştur. Geleneksel öğretim yaklaşımlarında genellikle kare, dikdörtgen gibi belirli prototiplere odaklanılırken bu çalışmada alışılmışın dışında temsil biçimlerinin sistematik olarak kullanılması, öğrencilerin tanımsal özelliklere dayalı öğrenme sürecine yönelmesini sağlamıştır.

Öğrencilerin kavram tanımı ve kavram imgesi arasındaki farkı ayırt etmeleri, şekillerin görsel niteliklerinden bağımsız olarak tanıma dayalı değerlendirmeler yapabilmeleri, öğretim sürecinin pedagojik başarısının göstergelerinden biri olmuştur. Tall ve Vinner (1981) tarafından tanımlanan kavram imgesi ile kavram tanımı arasındaki boşluk, bu öğretim modeliyle anlamlı ölçüde daralmış ve öğrenciler daha bütüncül kavram temsilleri geliştirmiştir.

Özellikle çizim sorularında öğrencilerin yalnızca düzgün, eşkenar dörtgen benzeri şekiller yerine, farklı kenar ve açı yapılarına sahip çok sayıda dörtgeni çizebilmeleri, görsel çeşitlilik konusunda önemli bir ilerleme kaydettiklerini göstermektedir. Bu durum, öğrencilerin geometrik şekilleri sınıflandırırken yalnızca görünüme değil, matematiksel tanım yapılarına dayalı analizler yapabildiklerini göstermektedir. Öğretim süreci boyunca öğrencilerin tanım yapma, çizim üretme ve sınıflandırma gibi üst düzey bilişsel süreçleri desteklenmiş; bu sayede kavramsal esneklik ve soyutlama becerileri gelişmiştir.

Van Hiele modeline göre, öğrencilerin şekillerin özelliklerini fark etme (Level 1) düzeyinden özellikler arası ilişkileri kurabilme (Level 2) düzeyine geçebilmeleri için soyut ve çok örnekli bir öğretime ihtiyaç vardır (van Hiele, 1986). Bu çalışmada uygulanan PoGÖ süreci, öğrencilerin bu ilerlemeyi sağlamasına olanak tanımış; sınırlı örneklerle yürütülen öğretimin aksine daha esnek ve kavramsal temelli bir öğrenme deneyimi yaratmıştır.

Ayrıca öğretim süreci boyunca aynı sınıf ortamının, öğretmenin ve materyallerin kullanılması, uygulamanın kısa sürede tamamlanması ve yalnızca hedef kazanımlara odaklanması gibi faktörler, öğretimin etkililiğini artırmıştır. Bu bütüncül yaklaşım, sadece

bilgi aktarımı değil, kavram inşasına dayalı bir öğretim ortamı yaratmış ve öğrencilerin dörtgenlerle ilgili kavramları anlamlandırma düzeylerini ciddi biçimde yükseltmiştir.

Sonuç olarak PoGÖ süreci, öğrencilerin yalnızca başarı düzeylerini artırmakla kalmamış; aynı zamanda kavramsal düşünme, gerekçelendirme, tanımlama ve sınıflandırma gibi üst düzey bilişsel süreçlerini destekleyerek geometri öğrenimine çok yönlü bir katkı sağlamıştır.

5.4. Öneriler

Bu araştırmanın bulguları doğrultusunda, geometri öğretiminde özellikle dörtgen kavramının öğretimine yönelik olarak aşağıdaki öneriler geliştirilmiştir:

Prototip olmayan örnekler sistematik şekilde kullanılabilir. Öğrencilerin geometri öğreniminde yalnızca görsel prototiplere dayalı örneklerle sınırlı kalmaları, kavramsal öğrenmelerini yüzeysel düzeyde bırakabilmektedir. Bu nedenle öğretmenler, ders materyallerinde prototip olmayan örneklerle sistemli biçimde yer vererek kavramın tanımsal özelliklerini vurgulamalıdır. Özellikle yönelimi farklı, simetrik olmayan veya görünüşte prototipe benzemeyen dörtgen örneklerinin kullanılması, öğrencilerin kavramı çok yönlü anlamalarını destekleyecektir.

Öğretim sürecinde kavram tanımına dayalı sorgulamalar artırılabilir; geometri öğretimi sırasında öğrencilere sıkça “Bu şekil neden dörtgendir?”, “Hangi özelliklerinden dolayı eşkenar dörtgendir?” gibi tanıma dayalı açık uçlu sorular yöneltilerek öğrencilerin yalnızca şekli tanıma değil, tanımlama ve gerekçelendirme becerileri geliştirilebilir; bu yaklaşım, Tall ve Vinner’in (1981) kavram tanımı-kavram imgesi ayrımına dayalı kuramsal yapısıyla da örtüşmektedir.

Açık uçlu ve çizim sorularına müfredatta daha fazla yer verilebilir; bu çalışmada öğrencilerin tanım ve çizim becerilerinde gözlemlenen gelişmeler, açık uçlu ve çizim temelli soruların öğretim sürecine katkısını ortaya koymuştur; bu nedenle derslerde ve ölçme-değerlendirme uygulamalarında bu tür soru türlerine daha sık yer verilmesi önerilmektedir; böylece öğrencilerin yalnızca çoktan seçmeli sınavlara yönelik yüzeysel ezberleri değil, kavramsal açıklama ve temsile dayalı bilişsel becerileri gelişecektir.

Öğretmen yetiştirme süreçlerine PoGÖ yaklaşımı dâhil edilebilir; Prototip Olmayan Geometri Öğretimi (PoGÖ) yaklaşımı yalnızca öğrencilere değil, öğretmen adaylarına da kazandırılması gereken önemli bir bakış açısidir; bu nedenle öğretmen eğitimi

programlarında kavramsal öğretimi önceleyen örnekler, sınıflandırma etkinlikleri ve geometri görselleştirme uygulamaları ders içeriklerine entegre edilmelidir.

Şekiller arası kapsayıcılık ilişkileri açıkça vurgulanabilir; öğrencilerin "kare, dikdörtgenin özel bir hâlidir" gibi kapsayıcılık ilişkilerini anlamlandırmaları, geometri öğreniminin yapısal bütünlüğü açısından önemlidir; bu bağlamda öğretmenler dörtgenler arasında hiyerarşik ilişkileri vurgulayan tablolar, Venn diyagramları ve sınıflandırma ağaçları gibi araçlarla öğretimi desteklemelidir (De Villiers, 1994).

Geometri öğretiminde görselleştirme araçlarına yönelik eğitimler planlanabilir; dinamik geometri yazılımları (GeoGebra vb.) kullanılarak şekillerin yönelimlerinin değiştirilmesi, özel durumların genelleştirilmesi ve kapsayıcılık ilişkilerinin simülasyonlarla gösterilmesi kavramsal öğrenmeyi güçlendirebilir; bu nedenle hem öğretmen hem de öğrencilere yönelik görsel araçlara dayalı eğitimler önerilmektedir.

Daha geniş örneklem ve farklı yaş düzeylerinde araştırmalar yapılabilir; zira bu çalışma, 7. sınıf düzeyinde ve sınırlı bir örneklemle yürütülmüş olup PoGÖ yaklaşımının ilkökul sonu veya lise başı gibi farklı sınıf düzeylerinde nasıl etkiler yarattığını belirlemek amacıyla daha kapsamlı araştırmalar yapılabilir ve yaş gruplarına uygun öğretim stratejileri geliştirilebilir.

Kavramsal öğrenmeyi ölçen alternatif değerlendirme araçları geliştirilebilir; çünkü geleneksel testler, öğrencilerin kavramsal düşünme becerilerini her zaman yeterince ortaya koyamayabilir. Bu nedenle, PoGÖ yaklaşımı doğrultusunda geliştirilecek geometrik akıl yürütme testleri, sınıflandırma görevleri veya tanım eşleştirme kartları gibi yeni araçlarla daha geçerli sonuçlar elde edilebilecektir.

Öğrencilerin kavramsal gelişimleri süreç boyunca izlenebilir; çünkü yalnızca ön test ve son test kullanımı, öğrenme sürecine dair yeterli bilgi sunmayabilir ve bu nedenle ara gözlemler, kavram haritası analizleri, öğrenci günlükleri ya da bireysel görüşmeler yoluyla yapılan izlemeler sayesinde öğretim süreci daha esnek ve öğrenciye özgü biçimde şekillendirilebilecektir.

Kavram yanlışlarına odaklı öğretim tasarımları geliştirilebilir; çünkü bu çalışmada öğrencilerin sıkça yaşadığı “karenin yan durduğunda kare olmaması” gibi görsel yanlışların, tanım yetersizliklerinden kaynaklandığı görülmüş ve bu nedenle öğretim sürecinde kavram yanlışlarının önceden belirlenip doğrudan hedeflenmesi, öğretimin etkililiğini artıracak bir unsur olarak değerlendirilmektedir.

KAYNAKÇA

- Akuysal, N. (2007). İlköğretim 7. Sınıf Öğrencilerinin 7. Sınıf Ünitelerindeki Geometrik Kavramlardaki Yanılgıları. Yüksek Lisans Tezi. Konya: Selçuk Üniversitesi.
- Athanasopoulou, A. (2008). An Inquiry Approach to the Study of Quadrilaterals Using Geometer's Sketchpad: A Study with Pre-service and in-Service Teachers. Doktora Tezi. The University of North Carolina.
- Ausubel, D. P. (1968). Educational Psychology: A Cognitive View. Holt, Rinehart and Winston.
- Ayaz, Ü. B. (2016). Ortaokul Öğrencilerinin Dörtgenlere İlişkin Kavram İmajları. Yüksek Lisans Tezi. Konya: Necmettin Erbakan Üniversitesi.
- Baktemur, G., Ayan Civak, R. ve Isıksal Bostan, M. (2021). "Pre-service Middle School Mathematics Teachers' (Mis)conceptions of Definitions, Classifications, and Inclusion Relations of Quadrilaterals". European Journal of Science and Mathematics Education, 9 (4), 183-198. <https://doi.org/10.30935/scimath/11206>
- Bharaj, P. K. ve Francis, D. C. (2020). A Square is not Long Enough to be a Rectangle: Exploring Prospective Elementary Teachers' Conceptions of Quadrilaterals. PMENA 42: The 42nd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Mazatlan, Mexico. <https://doi.org/10.51272/pmena.42.2020-106>
- Burger, W. F. ve Shaughnessy, J. M. (1986). "Characterizing the van Hiele Levels of Development in Geometry." Journal for Research in Mathematics Education, 17 (1), 31-48.
- Burte, H., Gardony, A. L., Hutton, A. ve Taylor, H. A. (2017). "Think3d!: Improving Mathematics Learning Through Embodied Spatial Training." Cognitive Research: Principles and Implications, 2 (13). <https://doi.org/10.1186/s41235-017-0052-9>
- Büyüköztürk, Ş. (2020). Sosyal Bilimler İçin Veri Analizi El Kitabı: İstatistik, Araştırma Deseni, SPSS Uygulamaları ve Yorum. Pegem Akademi.
- Büyüköztürk, Ş., Kılıç Çakmak, E., Akgün, Ö. E., Karadeniz, Ş., & Demirel, F. (2020). Bilimsel Araştırma Yöntemleri. 27. Baskı. Pegem Akademi.
- Campbell, D. T. ve Stanley, J. C. (1963). Experimental and Quasi-Experimental Designs for Research. Rand McNally College Publishing.
- Cannizzaro, L. ve Menghini, M. (2006). From Geometrical Figures to Definitional Rigour: Teachers' Analysis of Teaching Units Mediated Through van Hiele's Theory.
- Chinnappan, M. ve Lawson, M. J. (2005). "A Framework for Analysis of Teachers' Geometriccontent Knowledge and Geometric Knowledge for Teaching." Journal of Mathematics Teacher Education, 8, 197-221.

Connor, J. ve Moss, L. (2007). "Student Use of Mathematical Reasoning in Quasi-Empirical Investigations Using Dynamic Geometry Software." Department of Mathematics, Ohio University. <https://www.researchgate.net/publication/242646521>, Erişim Tarihi: 17.05.2025.

Cresswell, C. ve Speelman, C. (2020). "Does Mathematics Training Lead to Better Logical Thinking and Reasoning? A Cross-Sectional Assessment from Students to Professors." PLOS ONE, 15 (7), e0236153. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0236153>

Crowley, M. (1987). "The van Hiele Model of Development of Geometric Thought". Learning and Teaching Geometry K-12, 1, 1-16.

Cybulski, F. C., Oliveira, H. ve Cyrino, M. C. C. T. (2024). "Quadrilaterals Hierarchical Classification and Properties of the Diagonals: A Study with Pre-service Mathematics Teachers." EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 20 (8), em2490. <https://doi.org/10.29333/ejmste/14916>

De Villiers, M. (1994). "The Role and Function of a Hierarchical Classification of Quadrilaterals." For the Learning of Mathematics, 14 (1), 11-18.

De Villiers, M. (1998). "To Teach Definitions in Geometry or Teach to Define? In A. Olivier ve K. Newstead (Ed.), Proceedings of the Twenty-second International Conference for the Psychology of Mathematics Education (s. 248255). Stellenbosch: University of Stellenbosch.

Driskell, S. O. S. (2004). Fourth-Grade Students' Reasoning about Properties of Two-Dimensional Shapes. Doktora Tezi. University of Virginia.

Elia, I. ve Gagatsis, A. (2003). "Young Children's Understanding of Geometric Shapes: The Role of Geometric Models." European Early Childhood Education Research Journal, 11 (2), 4361. <https://doi.org/10.1080/135029303085209161>

Erdem, E. (2011). İlköğretim 7. Sınıf Öğrencilerinin Matematiksel ve Olasılıksal Muhakeme Becerilerinin İncelenmesi. Yüksek Lisans Tezi. Adıyaman: Adıyaman Üniversitesi.

Erdem, E. (2023). Somut Önerilerle Matematik Öğretimi. 1. Baskı. Pegem Akademi.

Erdem, E., Gökkurt, B. ve Soylu, Y. (2020). "Seventh Graders' Strategies for Shading the Percentages of Geometric Shapes." International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 52 (5), 1-20. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1818776>

Erel, T. (2014). Ortaöğretim Matematik 10 Ders Kitabı. İstanbul: NETBİL Basım ve Yayıncılık A.Ş.

Erez, M. M. ve Yerushalmy, M. (2006). If You can Turn a Rectangle into a Square, You can Turn a Square into a Rectangle: Young Students Experience the Dragging Tool.

Fastame, M. C. (2021). "Visuo-Spatial Mental Imagery and Geometry Skills in School-aged Children." Educational and Child Psychology. <https://doi.org/10.1177/0143034321992458>

Favilli, F. ve Romanelli, C. (2006). Geometrical Puzzles. Lower Secondary School Teacher Training in Mathematics Project. <http://losstt-in-math.dm.unipi.it/BP/LIM-BP-GeometricalPuzzles.pdf>, Erişim Tarihi: 18.06.2025.

Fischbein, E. (1993). "The Theory of Figural Concepts." Educational Studies in Mathematics, 24 (2), 139-162.

Fischbein, E. ve Nachlieli, T. (1998). Concepts and Figures in Geometrical Reasoning. International Journal of Science Education, 20 (10), 1193-1211.

Freudenthal, H. (1971). "Geometry between the Devil and the Deep Sea." Educational Studies in Mathematics, 3, 413-435.

Fujita, T. (2008). Learners' Understanding of the Hierarchical Classification of Quadrilaterals. Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 28-30 Haziran 2008.

Fujita, T. (2012). "Learners' Level of Understanding of the Inclusion Relations of Quadrilaterals and Prototype Phenomenon." The Journal of Mathematical Behavior, 31 (1), 60-72. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.09.003>

Fujita, T. ve Jones, K. (2007). "Learners' Understanding of the Definitions and Hierarchical Classification of Quadrilaterals: Towards a Theoretical Framing. Research in Mathematics Education, 9 (1&2), 3-20.

Furinghetti, F. ve Paola, D. (2002). Defining within a Dynamic Geometry Environment: Notes from the Classroom. Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Norwich, UK.

Gal, H. ve Lew, H. (2007). Is a Rectangle a Parallelogram? Towards a Bypass of van Hiele Level 3 Decision Making. Proceedings of the International Congress on Mathematical Education <http://tsg.icme11.org/document/get/691>, Erişim Tarihi: 18.06.2025.

Graumann, G. (2005). "Investigating and Ordering Quadrilaterals and Their Analogies in Space—Problem Fields with Various Aspects." ZDM, The International Journal on Mathematics Education, 37 (3), 190-198.

Gur, B. S. (2016). PISA ve TIMSS Sonuçları, Türkiye Matematik Eēitimi Hakkında ne Söylüyor? (Yayınlanmamış makale). Hacettepe Üniversitesi.

Güner, N. (2015). "6.-8. Sınıf Matematik Ders Kitaplarındaki Geometri, Veri ve Olasılık Sorularının TIMSS Bilişsel Düzeylerine Göre Sınıflandırılması." Pamukkale Üniversitesi Eēitim Fakültesi Dergisi, 37 (37), 77-90.

Güven, B., ztrk, T. ve Bülbül, B. . (2019). Geometri ēretimi. İçinde G. Hacımeroēlu ve K. Tarım (Ed.), Matematik ēretiminin Temelleri: Ortaokul (ss. 169-214). Anı Yayıncılık.

Haj Yahya, A. ve Hershkowitz, R. (2024). "Interference of Prototypical Geometry Representations in Students' Construction of Concepts and Development of Proofs". Mathematical Thinking and Learning. <https://doi.org/10.1080/10986065.2024.23866>

19

Heinze, A. (2002). Students' Knowledge of Simple Geometrical Concepts when Starting to Learn Proof. In A. D. Cockburn ve E. Nardi (Ed), Proceedings of the Annual Conference of the 26th International Group for the Psychology of Mathematics Education (C. 3, ss. 81-88). Hiroshima: PME.

İncikabı, L. ve Kılıç, Ç. (2013). İlköğretim Öğrencilerinin Geometrik Cisimlerle İlgili Kavram Bilgilerinin Analizi. Kuramsal Eğitimbilim Dergisi- Journal of Theoretical Educational Science, 6 (3), 343-358.

JASP Team. (2024). JASP (Version 0.18.3) [Ompiler Software]. <https://jasp-stats.org/>, Erişim Tarihi: 18.06.2025.

Karasar, N. (2012). Bilimsel Araştırma Yöntemi: Kavramlar, İlkeler, Teknikler. 23. Baskı. Nobel Yayın Dağıtım.

Kay, C. S. (1986). Is a Square a Rectangle? The Development of First-Grade Students' Understanding of Quadrilaterals with Implications for the van Hiele Theory of the Development of Geometric Thought. Doktora Tezi. University of Georgia.

Kemankaşlı, N. ve Gür, H. (2005). Ortaöğretim Öğrencilerinin Geometri Dersinde Dörtgenler Konusundaki Hata Analizi. XIV. Ulusal Eğitim Bilimleri Kongresi, Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi, Denizli.

Kliziene, I., Paskovske, A., Cizauskas, G., Augustiniene, A., Simonaitiene, B. ve Kubiliunas, R. (2022). "The Impact of Achievements in Mathematics on Cognitive ability in Primary School." Brain Sciences, 12 (6), 736. <https://doi.org/10.3390/brainsci12060736>

Konyalıoğlu, M. ve Aksu, Z. (2012). "Students' Difficulties in Geometry Learning Due to Weak Visual-Spatial Skills." Journal of Educational Research.

Leung, I. K. C. (2008). "Teaching and Learning of Inclusive and Transitive Properties Among Quadrilaterals by Deductive Reasoning with the Aid of SmartBoard." ZDM Mathematics Education, 40, 1007-1021.

Morgan, C. (2005). "Word, Definitions and Concepts in Discourses of Mathematics, Teaching and Learning." Language and Education, 19 (2), 102-116.

National Council of Teachers of Mathematics Standards (2000a). "Principles and Standards for School Mathematics, Chapter 3, Communication". [http://www.ms.uky.edu/~lee/ma310sp09/Standards for School Mathematics Communication.pdf](http://www.ms.uky.edu/~lee/ma310sp09/Standards%20for%20School%20Mathematics%20Communication.pdf), Erişim Tarihi: 10.02.2025.

Novak, J. D. ve Canas, A. J. (2008). "The Theory Underlying Concept Maps and How to Construct and use Them." Institute for Human and Machine Cognition. <https://cmap.ihmc.us/docs/theory-of-concept-maps>, Erişim Tarihi: 10.02.2025.

Özden, Y. (2003). Öğrenme ve Öğretme. Pegem Akademi.

Özen, D. (2009). İlköğretim 7. Sınıf Geometri Öğretiminde Dinamik Geometri Yazılımlarının Öğrencilerin Erişi Düzeylerine Etkisi ve Öğrenci Görüşlerinin Değerlendirilmesi. Yüksek Lisans Tezi. İzmir: Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Öztoprakçı, S. (2014). Pe-service Middle School Mathematics Teachers' Understanding of Quadrilaterals Through the Definitions and Their Relationships. Doktora Tezi. Ankara: Middle East Technical University.

Öztoprakçı, S. ve Çakıroğlu, E. (2013). "Dörtgenler." İçinde İ. Ö. Zembat, M. F. Özmantar, E. Bingölbalı, H. Şandır ve A. Delice (Ed.), Tanımları ve Tarihsel Gelişimleriyle Matematiksel Kavramlar (ss. 249-271). Pegem Akademi.

Pereira-Mendoza, L. (1993). "What is a Quadrilateral?". Mathematics Teacher, 86 (9), 774-776. <https://doi.org/10.5951/MT.86.9.0774>

Pickreign, J. (2007). Rectangles and Rhombi: How Well do Preservice Teachers know Them? Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers: The Journal (IUMPST), 1 (Content Knowledge). <http://www.k-12prep.math.ttu.edu/journal/1.contentknowledge/pickreign01/article.pdf>, Erişim Tarihi: 13.02.2025.

Razali, N. M. ve Wah, Y. B. (2011). "Power Comparisons of Shapiro-Wilk, Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors and Anderson-Darling Tests." Journal of Statistical Modeling and Analytics, 2 (1), 21-33.

Schwarz, B. B. ve Hershkowitz, R. (1999). "Prototypes: Brakes or Levers in Learning the Function Concept? The Role of Computer Tools." Journal for Research in Mathematics Education, 30 (4), 362-389.

Shield, M. (2004). "Formal Definitions in Mathematics." The Australian Mathematics Teacher, 60 (4), 25-28.

Soldano, C. ve Sabena, C. (2022). Exploring Non-Prototypical Configurations of Equivalent Areas Through Inquiring-Game Activities within DGE. University of Torino.

T.C. Millî Eğitim Bakanlığı. (2023). 7. Sınıf Matematik Kazanım Testi 26: Çokgenler - 2. Millî Eğitim Bakanlığı, Ölçme, Değerlendirme ve Sınav Hizmetleri Genel Müdürlüğü. <https://odsgm.meb.gov.tr/www/7-sinif-kazanım-testleri/icerik/856>, Erişim Tarihi: 13.02.2025.

Tall, D. (1988). Concept Image and Concept Definition. Senior Secondary Mathematics Education, 37-41. <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1988e-concept-imageicme.pdf>

Tall, D. ve Vinner, S. (1981). "Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity." Educational Studies in Mathematics, 12 (2), 151-169. <https://doi.org/10.1007/BF00305619>

Tall, D. ve Vinner, S. (1981). "Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity." *Educational Studies in Mathematics*, 12 (2), 151-169. <https://doi.org/10.1007/BF00305619>

Tennessee Department of Education. (2022). *Geometry Mathematics Instructional Materials Scoring Rubric*. <https://www.tn.gov/education>, Erişim Tarihi: 13.06.2025.

Türnüklü, E., Gündoğdu Alaylı, F. ve Akkaş, E. N. (2013). İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Dörtgenlere İlişkin Algıları ve İmgelerinin İncelenmesi. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri (Educational Sciences: Theory & Practice)*, 13 (2), 1213-1232. <https://www.edam.com.tr/kuyevb>

Usiskin, Z. ve Griffin, J. (2008). *The Classification of Quadrilaterals: A Study in Definition*. Information Age Publishing.

Uysal, İ. ve Kılıç, A. F. (2021). "Normal Dağılım İkilemi." *Anadolu Journal of Educational Sciences International*, 11 (3), 94-115. <https://doi.org/10.18039/ajesi.962653>

Ünlü, M. ve Ertekin, E. (2022). *Geometri Öğretimi*. İçinde E. Ertekin ve M. Ünlü (Ed.), *Geometri ve Ölçme Öğretimi: Tanımlar, Kavramlar ve Etkinlikler*. 2. Baskı (s. 40). Pegem Akademi.

Vinner, S. (2002). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (ss. 65-81). Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_5

Yavuz Mumcu, H., Osmanoğlu, A. ve Korkmaz, H. (Ed.). (2023). *Matematik Eğitiminde İlişkilendirme* (ss. 11-89). Pegem Akademi Yayıncılık.

Zeybek, Z. (2017). Learning to Understand Inclusion Relations of Quadrilaterals. *The Eurasia Proceedings of Educational and Social Sciences*, 6, 9-13.

Zeybek, Z. (2018). Understanding Inclusion Relations between Quadrilaterals. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES)*, 4 (2), 595-612. <https://doi.org/10.21890/ijres.428968>

EKLER

EK-1. Veli Onay Formu

TC
ADYAMAN ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL VE BEŞERİ BİLİMLER ETİK KURULU

VELİ ONAY FORMU

Sayın Veli,

Bu çalışma, Matematik Öğretmeni Muhammed GÜVEN tarafından yürütülmektedir. Çalışmanın amacı Prototip Olmayan Geometri Öğretiminin 7.Sınıf Öğrencilerinin Kavramsal Öğrenmelerine etkilerini belirlemek ve bununla ilgili sonuçlara ulaşmak ve etkili önerilerde bulunabilmektir. Bu çalışmaya çocuğunuzun katılımı 3 ay kadar zamanınızı alacak ve sizden çocuğunuzun mücbir sebep dışında katılımını sağlamanız istenecektir. Katılım tamamen gönüllük temeline dayanmaktadır ve sizden kimlik belirleyici hiçbir bilgi talep edilmeyecektir. Veli onayı yanı sıra, çalışma öncesinde çocuğunuzun da sözlü olarak rızası alınacaktır. Cevaplar gizli tutulacak ve sadece araştırmacılar tarafından değerlendirilecektir. Elde edilen bilgiler sadece bilimsel yayınlarda kullanılacaktır.

Çocuğunuzun psikolojik gelişimine hiçbir olumsuz etkisi olmayan ve kişisel rahatsızlık verecek unsurlar içermeyen sorular kapsamında, sorulardan ya da herhangi bir nedenden dolayı hoşnutsuzluk hissetmesi durumunda çocuğunuz uygulamadan ayrılabilir. Çalışma hakkında daha fazla bilgi almak ve sorularınız için Muhammed Güven-Kayı Boyu Ortaokulu Matematik Öğretmeni-0542 480 4039 numarası ile iletişim kurabilirsiniz. Çocuğunuzun bu çalışmaya katılımı ile ilgili lütfen aşağıdaki seçeneklerden size uygun olanını imzalayıp çocuğunuz ile birlikte okula gönderiniz.

Katkılarınız için teşekkür ederiz.

SORUMLU ARAŞTIRMACI

Adı ve Soyadı	Tarih	İmza
---------------	-------	------

Bu çalışmaya velisi bulunduğum (çocuğun ismi yazılacak) gönüllü olarak katılmasını kabul ediyorum/ kabul etmiyorum.

VELİ

Adı ve Soyadı	Tarih	İmza
---------------	-------	------

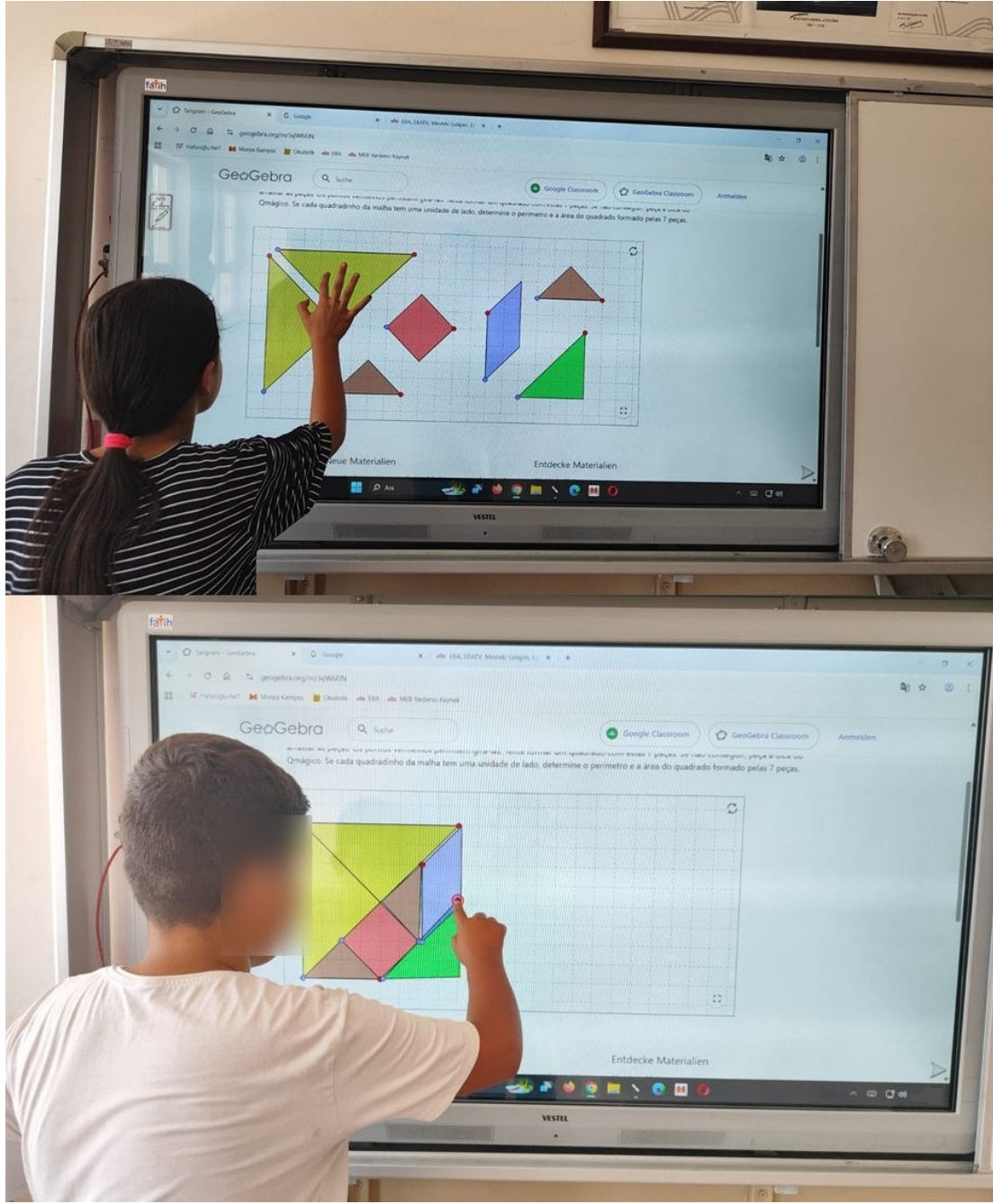
EK-2. Öğrenme Ortamından Yansımalar



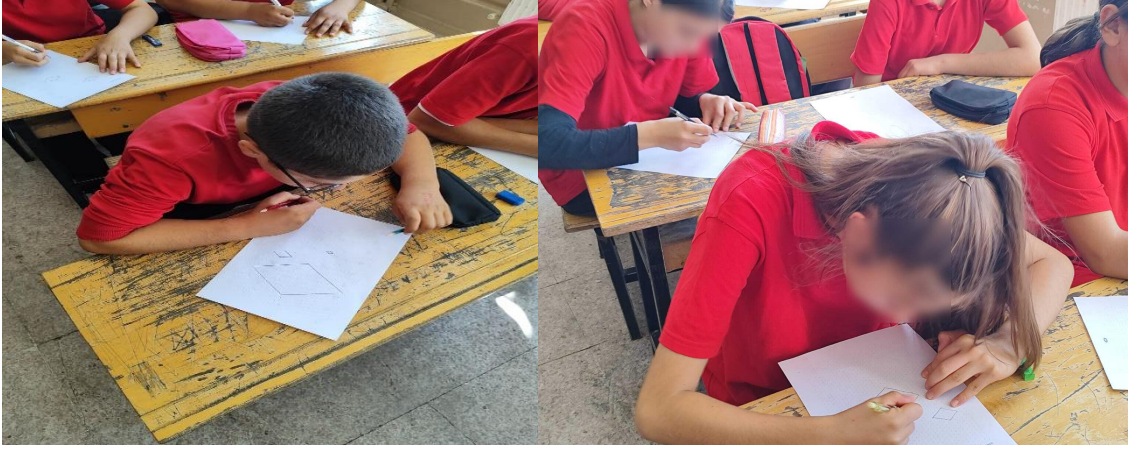
Şekil 1:Öğrenciler yandaki karikatürü yorumlarken



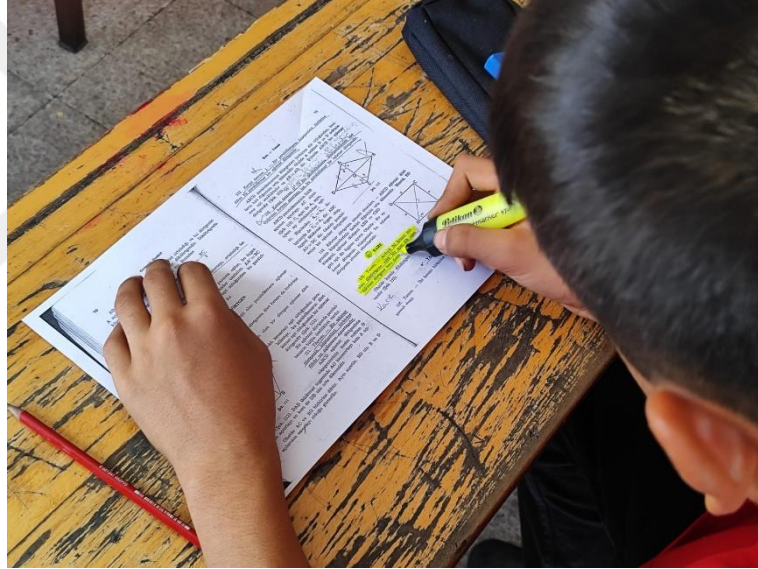
Şekil 2:Çokgen Panosu etkinliği



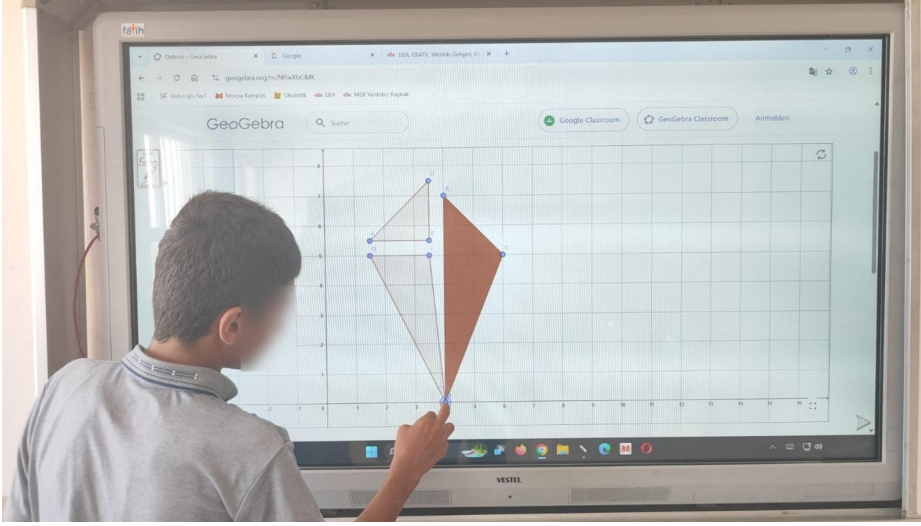
Şekil 3:Öğrenciler Dijital Tangram Etkinliğini yaparken



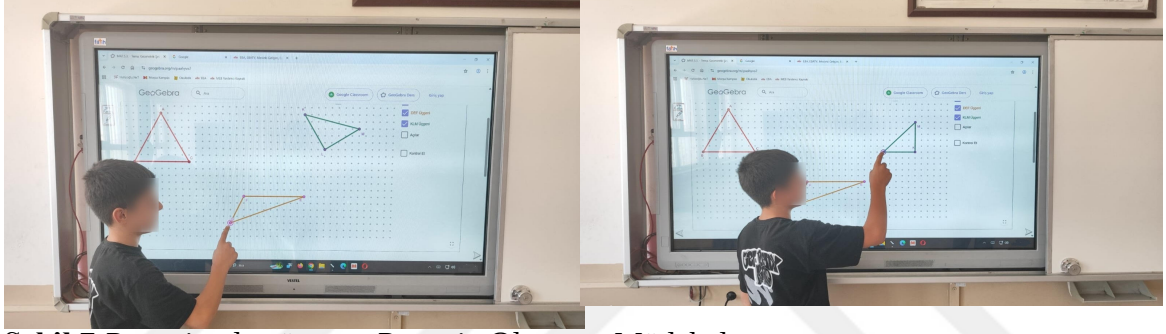
Şekil 4:Öğrenciler hangi şekillerin izometrik kâğıda hangi şekillerin noktalı kağıda çizildiğini incelerken



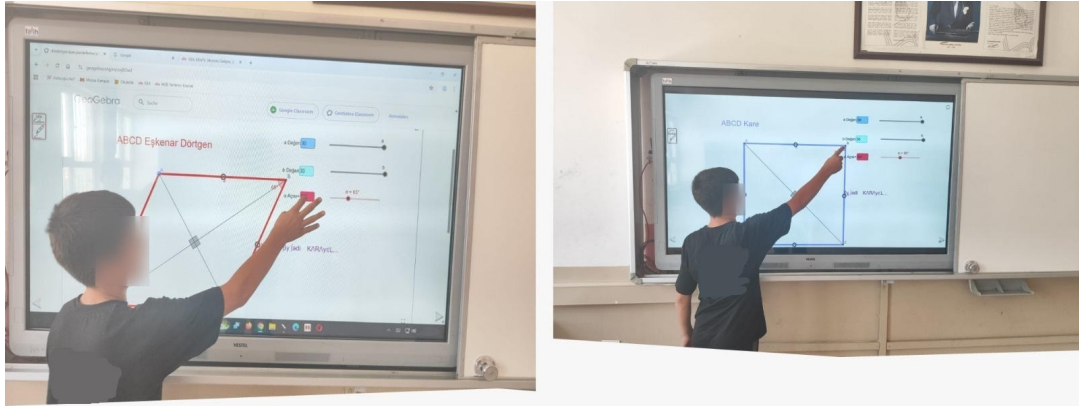
Şekil 5: Öğrenciler eski bir ders kitabından (1961 basım tarihli) dörtgenlerin nasıl tanımlandıklarını incelerken



Şekil 6:Öğrenci paralelkenar şeklini elde etmeye çalışırken



Şekil 7:Prototip olan üçgene Prototip Olmayan Müdahale



Şekil 8:Eşkenar Dörtgen üzerinden kareye hiyerarşik geçiş yaparken

EK-3. Araştırma Formu

Tarih: . . . / . . . /

GİRİŞ:

Aşağıda yer alan açık uçlu sorular, geometrik kavramlara ilişkin imajların belirlenmesini amaçlayan bir tez çalışması kapsamında hazırlanmıştır. Vereceğiniz bilgiler sadece bu araştırma için kullanılacak olup, gizliliğinizin korunacağına güvence verilir. Araştırmaya katılımınız için teşekkür ederim.

Muhammed GÜVEN

Adıyaman Üniversitesi Lisansüstü Enst. YL
Öğrencisi

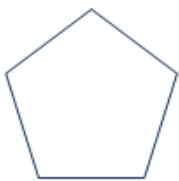
SORULAR

1)Dörtgen kavramının tanımını yapınız.

2)Dörtgen çizer misiniz?



3)

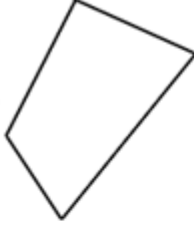


Dörtgendir. ☐

Çünkü;

Dörtgen değildir. ☐

Çünkü;



Dörtgendir. ()

Dörtgen değildir. ()

Çünkü;

Çünkü;

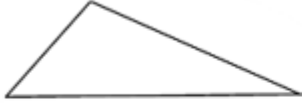
Dörtgendir. ()

Dörtgen değildir. ()



Çünkü;

Çünkü;



Dörtgendir. ()

Dörtgen değildir. ()

Çünkü;

Çünkü;



Dörtgendir. ()

Dörtgen değildir. ()

Çünkü;

Çünkü;



Dörtgendir. ()

Dörtgen değildir. ()

Çünkü;

Çünkü;

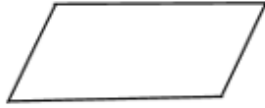


Dörtgendir. ()

Dörtgen değildir. ()

Çünkü;

Çünkü;



Dörtgendir. ()

Dörtgen değildir. ()

Çünkü;

Çünkü;



Dörtgendir. ()

Dörtgen değildir. ()

Çünkü;

Çünkü;



Dörtgendir. ()

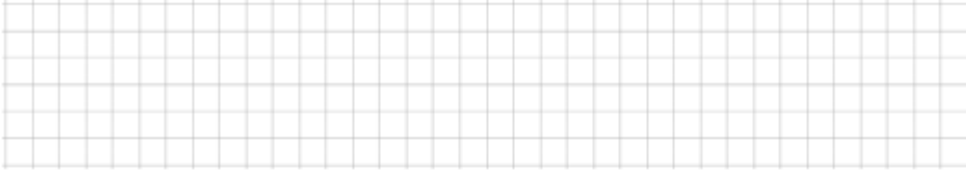
Dörtgen değildir. ()

Çünkü;

Çünkü;

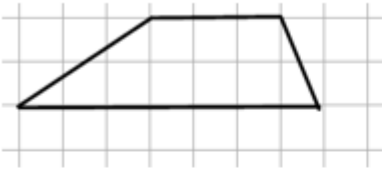
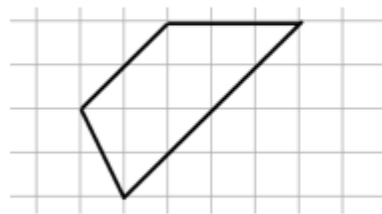
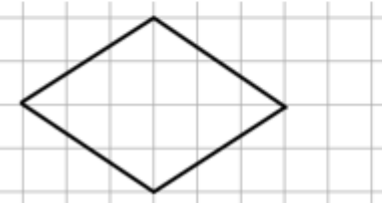
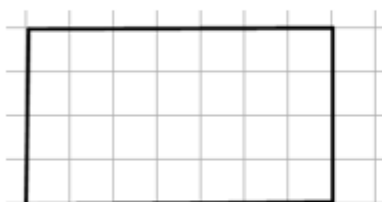
4) Yamuk kavramının tanımını yapınız.

5) Yamuk çizer misiniz?



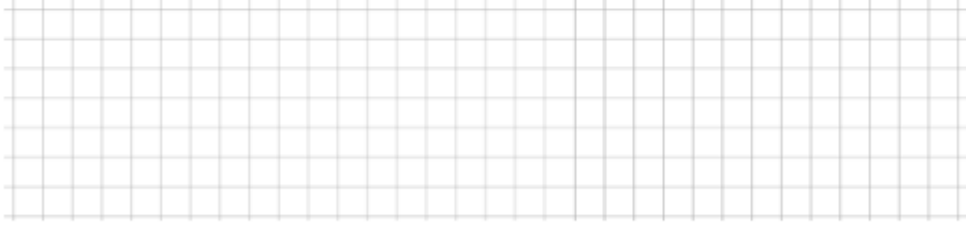
6)

	Yamuktur. () Çünkü;	Yamuk değildir. () Çünkü;
	Yamuktur. () Çünkü;	Yamuk değildir. () Çünkü;

	Yamuktur. (☐) Çünkü;	Yamuk değildir. (☐) Çünkü;
	Yamuktur. (☐) Çünkü;	Yamuk değildir. (☐) Çünkü;
	Yamuktur. (☐) Çünkü;	Yamuk değildir. (☐) Çünkü;
	Yamuktur. (☐) Çünkü;	Yamuk değildir. (☐) Çünkü;
	Yamuktur. (☐) Çünkü;	Yamuk değildir. (☐) Çünkü;
	Yamuktur. (☐) Çünkü;	Yamuk değildir. (☐) Çünkü;

7)Eşkenar dörtgenin tanımını yapınız.

8)Eşkenar dörtgen çizer misiniz?

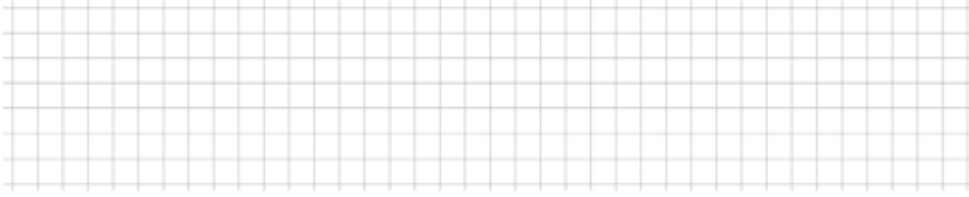


9)

	Eşkenar dörtgendir. (☐) Çünkü,	Eşkenar dörtgen değildir. (☐) Çünkü;
	Eşkenar dörtgendir. (☐) Çünkü,	Eşkenar dörtgen değildir. (☐) Çünkü;
	Eşkenar dörtgendir. (☐) Çünkü,	Eşkenar dörtgen değildir. (☐) Çünkü;
	Eşkenar dörtgendir. (☐) Çünkü,	Eşkenar dörtgen değildir. (☐) Çünkü;

10) Paralelkenarın tanımını yapınız.

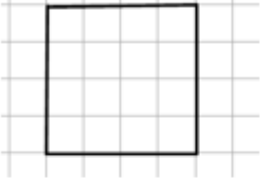
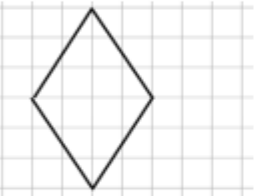
11) Paralelkenar çizer misiniz?



12)

	Paralelkenardır. () Çünkü;	Paralelkenar değildir. () Çünkü;
	Paralelkenardır. () Çünkü;	Paralelkenar değildir. () Çünkü;
	Paralelkenardır. () Çünkü;	Paralelkenar değildir. () Çünkü;

+

	Paralelkenardır. (☐) Çünkü;	Paralelkenar değildir. (☐) Çünkü;
	Paralelkenardır. (☐) Çünkü;	Paralelkenar değildir. (☐) Çünkü;

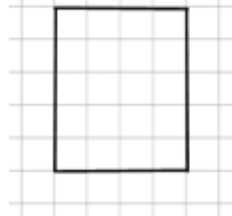
13)Dikdörtgenin tanımını yapınız.

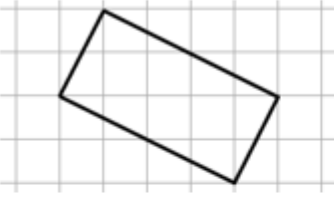
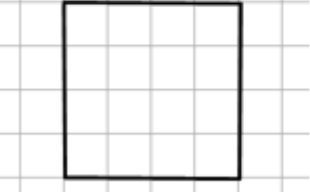


14)Dikdörtgen çizer misiniz?



15)

	Dikdörtgendir. (☐) Çünkü;	Dikdörtgen değildir. (☐) Çünkü;
---	---	---

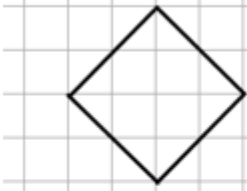
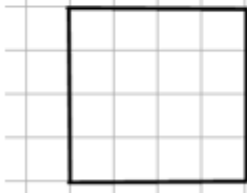
	Dikdörtgendir. (☐) Çünkü;	Dikdörtgen değildir. (☐) Çünkü;
	Dikdörtgendir. (☐) Çünkü;	Dikdörtgen değildir. (☐) Çünkü;

16)Karenin tanımını yapınız.

17)Kare çizer misiniz?



18)|

	Karedir. (☐) Çünkü;	Kare değildir. (☐) Çünkü;
	Karedir. (☐) Çünkü;	Kare değildir. (☐) Çünkü;