



T.C.

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PS-KOİNJEKTİF MODÜLLER VE PS-TÜMLEYEN ALT MODÜLLER

DOKTORA TEZİ

İRFAN SOYDAN

ARALIK

***PS*-KOİNJEKTİF MODÜLLER VE *PS*-TÜMLEYEN ALT MODÜLLER**

İrfan SOYDAN

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman

Prof. Dr. Ergül TÜRKMEN

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ARALIK 2024

Doktora Tezi Kabul ve Onay Sayfası

İrfan SOYDAN tarafından hazırlanan “*PS*-Koinjektif Modüller ve *PS*-Tümleyen Alt Modüller” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Ergül TÜRKMEN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum

Başkan: Prof. Dr. Hamza ÇALIŞICI

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı, Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Prof. Dr. Yılmaz DURĞUN

Matematik Anabilim Dalı, Çukurova Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Prof. Dr. Öznur KULAK

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Doç. Dr. Hasan Hüseyin ÖKTEN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 18/12/2024

Juri tarafından kabul edilen bu tezin Doktora Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

İrfan SOYDAN

18/12/2024

PS-KOİNJEKTİF MODÜLLER VE PS-TÜMLEYEN ALT MODÜLLER
(Doktora Tezi)

İrfan SOYDAN

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Aralık 2024

ÖZET

Bu çalışmada *ps*-tümleyen alt modüller tanımlandı ve bazı halka sınıflarının karakterizasyonları elde edildi. Eğer $M = G + H$ ve $G \cap H$ projektif yarı-basit olacak şekilde M modülünün bir G alt modülü varsa M modülünün H alt modülüne M' 'de bir *ps-tümleyen* denir. $\text{Gör}(\psi)$, S' 'de bir *ps-tümleyen* olacak şekildeki tüm $0 \rightarrow M \xrightarrow{\psi} S \xrightarrow{\phi} T \rightarrow 0$ kısa tam dizilerinin sınıfı keyfi bir halka üzerinde öz sınıftır. Bu öz sınıf *PS* ile gösterildi. *PS* öz sınıfının bazı homolojik nesneleri üzerinde çalışıldı. M ile başlayan, sol R -modüllerin her $0 \rightarrow M \xrightarrow{\psi} S \xrightarrow{\phi} T \rightarrow 0$ kısa tam dizisi *PS* öz sınıfında ise M R -modülüne *PS-koinjektif modül* denir. Bir R halkasının büyük desteğe sahip *SI*-halka olması için gerek ve yeter koşul her sol R -modülün *PS-koinjektif* olmasıdır.

Sayfa Adedi	: 80
Anahtar Kelimeler	: Öz sınıf, <i>Ps</i> -tümleyen alt modül, <i>Ps</i> -tümleyen modül, Projektif yarı-basit modül, Koinjektif modül
Danışman	: Prof. Dr. Ergül TÜRKMEN

PS-COINJECTIVE MODULES AND PS-SUPPLEMENT SUBMODULES

(Ph. D. Thesis)

İrfan SOYDAN

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

December 2024

ABSTRACT

In this paper, introduced *ps*-supplement submodules and characterizations of some ring classes were obtained. A submodule H of a module M is called *ps-supplement* in M if there exists a submodule G of M such that $M = G + H$ and $G \cap H$ is projective semisimple. Over an arbitrary ring the class PS of all short exact sequences $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\psi} S \xrightarrow{\phi} T \longrightarrow 0$ such that $Im(\psi)$ is a *ps*-supplement in S is a proper class. This proper class was denoted by PS . Some homological objects of this proper class have been studied. A module M is called *PS-coinjective* if every short exact sequence of left R -modules $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\psi} S \xrightarrow{\phi} T \longrightarrow 0$ starting with the module M is in the proper class PS . A ring R is a left *SI*-ring with essential socle if and only if every left R -module is *PS*-coinjective.

Page Number	: 80
Keywords	: Proper class, <i>Ps</i> -supplement submodule, <i>Ps</i> -supplemented module, Projective semisimple module, Coinjective module
Supervisor	: Prof. Dr. Ergül TÜRKMEN

ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR

Öncelikle, danışman hocam Prof. Dr. Ergül TÜRKMEN'e, bana her zaman rehberlik ettiği ve bilimsel yolculuğum boyunca desteklediği için minnettarım. Bu çalışma üzerindeki görüşleri ve eleştirileri, araştırmamın gelişmesine büyük katkı sağladı. Ders dönemi öncesi ve sonrasında desteklerini esirgemeyen Prof. Dr. Burcu NİŞANCI TÜRKMEN ve özellikle teknik anlamda bilgilerinden çokca faydalandığım ve bu yönde gelişmemde çok büyük katkısı olan sayın Doç. Dr. Hasan Hüseyin ÖKTEN hocalarıma çok teşekkür ederim. TÜBİTAK projesi kapsamında desteklerini esirgemeyen, Çukurova Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Öğretim Üyesi Prof. Dr. Yılmaz DURĞUN hocama çok minnettarım. Yanımda her daim duran ve desteğini bir an olsun eksik etmeyen, çok sevdiğim annem, babam, eşim ve kızlarıma şükranlarımı sunarım. Son olarak, akademik gelişimim süresince bana ilham veren tüm hocalarıma ve arkadaşlarıma ayrıca teşekkür ederim.

Bu çalışma "Tensör-Çarpım Funtoru Tarafından Üretilen Öz Sınıfların İncelenmesi" adlı proje kapsamında Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından desteklenmiştir. Proje no: 123F236

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	x
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	5
2.1. Halkalar	5
2.2. Modüller	6
2.3. Homomorfizmalar	9
2.4. Tam Diziler ve Hom Funktoru	11
2.5. Modüllerin Genişlemeleri ve $Ext(-, -)$ Grubu	14
2.5.1. $Ext(-, -)$ grubunun fonktor yapısı	20
2.6. Projektif, Serbest ve İnjektif Modüller	20
2.7. Basit ve Yarı-Basit Modüller	26
2.8. Büyük Alt Modüller ve Singüler Modüller	33
2.9. Küçük ve δ -Küçük Alt Modüller	36
2.10. Modülün Radikali	38
2.11. Lokal Modüller	39
2.12. Noether ve Artin Modülleri	40

2.13. Pullback Diyagramı	42
2.14. V -Halkalar ve Genellemeleri	43
3. MATERYAL VE YÖNTEM	46
3.1. Tümleyen Alt Modüllerin Özellikleri ve Tümlenmiş Modüller	46
3.2. SS -Tümleyen Alt Modüllerin Özellikleri ve SS -Tümlenmiş Modüller	47
3.3. δ -Tümleyen Alt Modüllerin Özellikleri ve δ -Tümlenmiş Modüller	48
3.4. δ_{ss} -Tümleyen Alt Modüllerin Özellikleri ve δ_{ss} -Tümlenmiş Modüller	49
3.5. Eş-Eşatomik Tümlenmiş Modüller	51
3.6. Öz Sınıflar	54
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	56
4.1. P_S -Tümleyen Alt Modüller	56
4.2. P_S -Tümlenmiş Modüller	67
4.3. Eş-Eşatomik P_S -Tümlenmiş Modüller	71
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	76
KAYNAKLAR	77
ÖZGEÇMİŞ	80

ŞEKİLLER DİZİNİ**Şekil****Sayfa**

Şekil 1.1. Bazı tümleyen alt modül türlerinin birbiri ile ilişkisi	3
--	---



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel Sayılar Kümesi
$\mathbb{P}$	Asal Sayılar Kümesi
$\subseteq$	Alt küme
$\subset$	Öz alt küme
$\cap$	Kümelerde kesişim işlemi
0_R	$(R, +, \cdot)$ halkasında $(R, +)$ abel grubunun birimi
1_R	$(R, +, \cdot)$ halkasında $(R, \cdot)$ cebirsel yapısının birimi
$\trianglelefteq$	Büyük alt modül
$\leq$	Alt modül
$<$	Öz alt modül
$\frac{M}{N}$	M modülünün N alt modülüne göre bölüm modülü
$\ll$	Küçük alt modül
$M \cong N$	İzomorf modüller
$\prod_{i \in I} N_i$	N_i alt modüllerinin direkt çarpımı
$\sum_{i \in I} N_i$	N_i alt modüllerinin toplamı
$\oplus_{i \in I} N_i$	N_i alt modüllerinin direkt toplamı
$\langle X \rangle$	X kümesi tarafından üretilen modül
Rx	x elemanı tarafından üretilen devirli modül

Kısaltmalar	Açıklama
$Soc(M)$	M modülünün desteği
$Soc_s(M)$	M modülünün basit ve küçük alt modüllerinin toplamı
$Soc_p(M)$	M modülünün basit ve projektif alt modüllerinin toplamı
$E(M)$	M modülünün injektif bürümü
$Z(M)$	M modülünün singüler alt modülü
$P(M)$	M modülünün tüm radikal alt modüllerinin toplamı
$Gör(\alpha)$	Bir α homomorfizmasının görüntü kümesi
$Çek(\alpha)$	Bir α homomorfizmasının çekirdeği
$End(M)$	M modülünün endomorfizmalarının kümesi
$Hom_R(M, T)$	M 'den T 'ye tüm R -modül homomorfizmalarının kümesi
$\delta(M)$	M modülünün δ -küçük alt modüllerinin toplamı
$Split$	R -modüllerin tüm parçalanabilir kısa tam dizilerinin öz sınıfı
Abs	R -modüllerin tüm kısa tam dizilerinin öz sınıfı
$Supl$	Tümleyenlerin öz sınıfı
$Compl$	Tamlayanların öz sınıfı
$Co - Neat$	Rad -tümleyenlerin öz sınıfı
$\sigma[M]$	M tarafından alt üretilmiş $R - Mod$ kategorisinin alt kategorisi

1. GİRİŞ

Matematikte ve diğer bilim dallarında belirli çalışmalardan sonra bilim insanları sınıflandırmaya başlamışlardır. Yani araştırmacılar çalışılan konulara ait nesnelerin ortak özellikleri üzerine kurulan bir yapı oluşturmuşlar ve bu sayede sınıfa ait tüm elemanları bir tek birim olarak inceleme imkanı bulmuşlardır. Böylece, sınıfın her bir elemanı ile ilgilenmek yerine, kavramları sınıfın ortak özellikli tüm elemanlarına uygulayabilmişlerdir. Pek çok yolla bu durum araştırmacılara daha soyut ve detaylı çalışma imkanı oluşturmuştur. Cebir, kendisinde çok önemli hale gelen böyle bir sınıflandırma yapısına sahiptir. Yukarıda bahsi geçen kavramlardan biri de öz sınıf kavramıdır. Öz sınıflar sayesinde bazı halkaların farklı karakterizasyonları elde edilmiştir. Bunun için öz sınıflar üzerinde pek çok araştırma yapılmış ve hala da yapılmaya devam etmektedir. Şimdi öncelikle çalışmanın içeriği ve kapsamı ile ilgili ön bilgi vererek başlayalım.

Tez kapsamında, R halkaları birimli olarak ele alınacak, R -modüller ise üniter sol R -modüller şeklinde kabul edilecektir. Herhangi bir M modülü verildiğinde sırasıyla M 'nin injektif bürümü, desteği, singüler alt modülü ve radikali için $E(M)$, $Soc(M)$, $Z(M)$ ve $Rad(M)$ gösterimleri kullanılacaktır. $S \leq M$ ($S < M$) gösterimi, S 'nin M 'ye ait bir alt modül (öz alt modül) olduğu anlamına gelir. Eğer M 'nin sıfır olmayan tüm S alt modülleri için $T \cap S \neq 0$ oluyorsa M R -modülünün T alt modülüne M 'de *büyük alt modül* denir ve $T \trianglelefteq M$ gösterimi kullanılır. Eğer M 'nin verilen her S öz alt modülü için $M \neq T + S$ oluyorsa M 'nin T alt modülüne M 'de *küçüktür* denir ve $T \ll M$ gösterimi kullanılır (Wisbauer, 1991). Zhou, çalışmasında küçük kavramını δ -küçük alt modüllere genelleştirir. Eğer $\frac{M}{S}$ singüler olmak üzere M 'nin her S öz alt modülü için $M \neq T + S$ oluyorsa M 'nin T alt modülüne M 'de *δ -küçük alt modül* denir. M modülünde bulunan tüm δ -küçük alt modüllerinin toplamı için $\delta(M)$ gösterimi kullanılır (Y. Zhou, 2000).

Buchsbaum, belirli bir göreceli homolojiye karşılık gelen, öz sınıfları tanımlamak suretiyle, *Ext* grupları olarak hesaplanan bir modül kısa tam dizisi sınıfının hesaplanabilmesi için gerekli koşulları aksiyomatize etmiştir (Buchsbaum, 1959). Sol R -modüllerin parçalanmış kısa tam dizilerinin tümünün sınıfı olan *Split* sınıfı ve sol R -modüllerin kısa tam dizilerinin tümünün sınıfı olan *Abs* sınıfı birer öz sınıf örnekleridir. (Clark, Lomp, Vanaja ve Wisbauer, 2006, 20.7)'de ifade edildiği üzere $Gör(\psi)$, S 'nin bazı alt modüllerinin bir tümleyeni olacak şekilde tüm $0 \rightarrow M \xrightarrow{\psi} S \xrightarrow{\phi} T \rightarrow 0$ kısa tam dizilerinin *Suppl* sınıfı bir öz sınıftır. Burada E , $M = D + E$ eşitliğinde minimum ise, buna denk olarak $M = D + E$ ve $D \cap E \ll E$ ise E 'ye M 'de D modülünün bir *tümleyeni* denir. Modül ve halka teorisinde, direkt toplamın bir genellemesi olarak tümleyen alt modüllerin türleri önemli bir rol oynamaktadır. Her küçük alt modül δ -küçük olduğundan δ -tümleyen alt modül kavramını tanıtmak doğaldır. Bir M modülü verildiğinde, $M = D + E$ ve $D \cap E \ll_{\delta} E$ ise E alt modülüne M 'de D modülünün

δ -tümleyeni denir (Koşan, 2007).

M 'nin bir modül olduğunu farzedelim. $Rad(M)$ 'nin, M 'deki bütün küçük alt modüllerin toplamı olması sebebiyle M 'nin bir Rad -tümleyen alt modülü tanıtılmıştır (Clark ve diğerleri, 2006; Büyükaşık, Mermut ve Özdemir, 2010; Nişancı ve Pancar, 2010). Eğer $M = D + E$ ve $D \cap E \subseteq Rad(E)$ ise M 'nin E alt modülüne M 'de D alt modülünün bir Rad -tümleyeni denir. Mermut (2004), $Gör(\psi)$ S 'de Rad -tümleyen olacak şekildeki tüm $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\psi} S \xrightarrow{\phi} T \longrightarrow 0$ kısa tam dizilerinin sınıfı olan $Co-Neat$ sınıfını, bir diğer öz sınıf örneği olarak göstermiştir. Şimdi sol R -modüllerin yukarıdaki sınıfları üzerinde aşağıdaki durumlara sahibiz.

$$Split \subseteq Suppl \subseteq Co - Neat \subseteq Abs \quad (1.1)$$

Bu öz sınıflar bazı halkaların homolojik cebir açısından karakterizasyonlarını verir. R halkasının yarı-basit olması için gerekli ve yeterli şart $Split = Abs$ olması için gerekli ve yeterli şart $Suppl = Abs$ olması için gerekli ve yeterli şart $Co - Neat = Abs$ eşitliklerinin olmasıdır.

R halkasının (yarı) mükemmel olması, her sol (sonlu üretilmiş) R -modülün tümlenmiş olması için gerekli ve yeterli bir koşuldur. R halkasının δ -(yarı) mükemmel olması, her sol (sonlu üretilmiş) R -modülün δ -tümlenmiş olması için gerekli ve yeterli bir koşuldur (Koşan, 2007). R 'nin tüm radikal sol ideallerinin toplamı $P(R)$ ile gösterilmek üzere, $\frac{R}{P(R)}$ 'nin mükemmel olması için gerekli ve yeterli şart, her sol R -modülün Rad -tümlenmiş olmasıdır, yani, modülün her alt modülü modülde bir Rad -tümleyene sahiptir (Büyükaşık ve diğerleri, 2010, Teorem 6.1).

Son zamanlarda tümleyen alt modül türleri pek çok yazar tarafından kapsamlı bir şekilde çalışılmaktadır. (Alizade, Büyükaşık ve Durğun, 2016), (Alizade, Demirci, Durğun ve Pusat, 2014), (Büyükaşık ve diğerleri, 2010), (Durğun, 2021), (Durğun, 2019), (Lomp, 1999) referansı ile belirtilen makalelerde yazarlar tümleyen alt modül türleri ve ilgili halkalar hakkında detaylı bilgiler elde edip okuyuculara sunmuşlardır. Direkt toplam terimlerinin önemli bir diğer genellemesi ss -tümleyen alt modüllerdir. (D. Zhou ve Zhang, 2011) referansı ile verilen çalışmada belirtildiği gibi, bir M modülü için, M 'nin aşağıda belirtilen alt modülünü ele alalım.

$$Soc_s(M) = \sum \{S \ll M \mid S \text{ basit}\} \quad (1.2)$$

Keyfi bir H alt modülünü göz önüne alalım. $Soc_s(H) \subseteq Rad(H)$ kapsamı sağlandığından $Soc_s(H)$ ile $Rad(H)$ 'yi değiştirerek bu gösterimin benzerini araştırma fikri ortaya çıkmıştır. Eğer $M = H + S$ ve $H \cap S \subseteq Soc_s(S)$ ise M 'nin S alt modülüne M 'de H alt modülünün ss -tümleyeni denir (Kaynar, Türkmen ve Çalışıcı, 2020).

Yardımcı Teorem 3.6, M 'de bir Y alt modülünün, M 'de bir X alt modülünün ss -tümleyeni

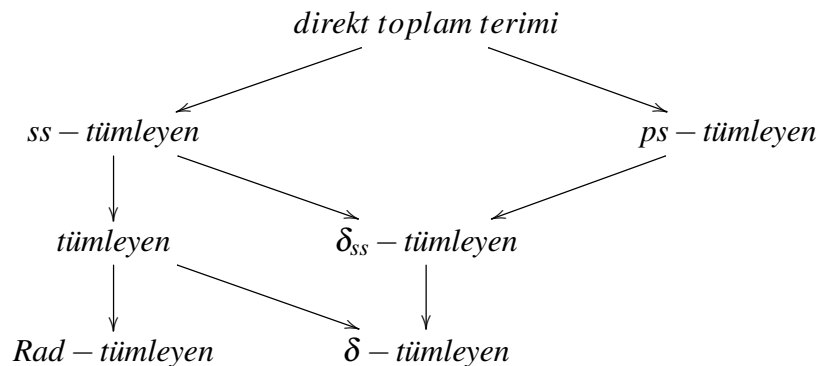
olması için gerekli ve yeterli koşulun, Y 'nin M 'de X 'in bir tümleyeni olması ve $X \cap Y$ 'nin yarı-basit olması olduğunu göstermektedir. Kaynar ve arkadaşlarının (2020) tanımlamalarına göre, bir M modülünde, tüm alt modüllerinin M içinde bir ss -tümleyeni mevcutsa, bu modül *ss-tümlenmiş modül* olarak adlandırılır. ss -tümlenmiş modüllerin sınıfı yarı-basit modüllerin sınıfı ile tümlenmiş modüllerin sınıfı arasındadır. Bir R halkasının yarı-basit radikali ile yarı-mükemmel olması için gerek ve yeter şart her sol R -modülün ss -tümlenmiş olmasıdır. (Türkmen ve Türkmen, 2020)'de görüldüğü üzere T , M 'de S 'nin bir δ -tümleyeni ve $S \cap T$ yarı-basit ise M 'nin T alt modülüne S 'nin M 'de δ_{ss} -tümleyeni denir. (Türkmen ve Türkmen, 2020, Teorem 5.3)'ten bir R halkası için $\frac{R}{Soc(RR)}$ yarı-basit ve idempotentlerin $Soc(RR)$ 'ye yükselen olması için gerekli ve yeterli koşul her sol R -modülün δ_{ss} -tümlenmiş olmasıdır.

Aşağıdaki Yardımcı Teorem (Y. Zhou, 2000, Yardımcı Teorem 1.2)'den gelmektedir.

1.1 Yardımcı Teorem M bir modül olarak verilsin. Bu durumda aşağıda verilenler denktir.

- (i) S , M 'nin δ -küçük alt modülüdür.
- (ii) $M = G + S$ eşitliği verilmiş ise M 'nin $M = G \oplus T$ ve $T \subseteq S$ şartlarını sağlayan projektif yarı-basit alt modülü mevcuttur (Y. Zhou, 2000).

Yardımcı Teorem 1.1 gereğince M modülünün her projektif yarı-basit alt modülünün M 'de δ -küçük olduğu açıktır. Bu gerçeği kullanarak ve yukarıdaki sonuçlardan motive olarak biz ps -tümleyen alt modül kavramını tanıttık. M modülünün herhangi bir G alt modülü için $M = G + S$ ve $G \cap S$ projektif yarı-basit ise M 'nin S alt modülüne M 'de G alt modülünün ps -tümleyeni denir. Şu ana kadar ifade ettiğimiz kavramları dikkate alarak artık aşağıdaki çıkarımlara sahip olduğumuzu söyleyebiliriz:



Şekil 1.1. Bazı tümleyen alt modül türlerinin birbiri ile ilişkisi

$Gör(\psi)$, S 'de bir ps -tümleyen alt modül olacak şekildeki tüm $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\psi} S \xrightarrow{\phi} T \longrightarrow 0$ kısa tam dizilerinin sınıfı PS olsun. Bu çalışmada, kısa tam dizilerin PS sınıfının singüler

destekli modüller tarafından injektif olarak üretildiği gösterilecektir. PS öz sınıfının bazı homolojik nesneleri üzerinde çalışılacak, SI -halkaların ve GV -halkaların yeni karakterizasyonları verilecektir. Bir M modülünün PS -koinjektif olması, yani, M modülü ile başlayan sol R -modüllerin her $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\psi} S \xrightarrow{\phi} T \longrightarrow 0$ kısa tam dizisinin PS öz sınıfında yer alması için gerekli ve yeterli koşul, M modülünün $E(M)$ injektif bürümü içinde bir ps -tümleyen olmasıdır. Bir R halkası için her PS -koinjektif R -modülün injektif olması için gerekli ve yeterli koşul, her projektif yarı-basit modülün injektif olmasıdır.

Herhangi bir R halkasının bir sol SI -halka olması için gerekli ve yeterli koşulun, her singüler sol R -modülün PS -koinjektif olması olduğu ve sol GV -halka olması için gerekli ve yeterli koşulun, her basit singüler sol R -modülün PS -koinjektif olması gerektiği ispatlanacaktır. Bununla birlikte ps -tümlenmiş modül kavramı tanıtılıp bu modüllerin çeşitli özellikleri elde edilecektir. Özellikle ps -tümlenmiş modüllerin sınıfının alt modüller, bölüm modülleri ve direkt toplamlar altında kapalı olduğu gösterilecektir. Ayrıca büyük desteğe sahip R -halkasının bir sol SI -halka olması için gerek ve yeter koşul her sol R -modülün PS -koinjektif modül olması ve her sol R -modülün PS -koinjektif olması için gerek ve yeter koşulun her sol R -modülün ps -tümlenmiş olması olduğu kanıtlanacaktır. Son kısımda ise eş-eşatomik ps -tümlenmiş modüller ve bazı özellikleri çalışılacaktır.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde tez boyunca kullanılan bazı temel kavramlara ait tanımlar, teoremler, önermeler ve örnekler verilecek, konunun özelliğine göre literatüre uygun şekilde alt başlıklar halinde sunulacaktır. İlk olarak halka kavramı ile başlayalım.

2.1. Halkalar

2.1 Tanım $(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısı aşağıda verilen özellikleri sağlıyorsa, bu yapıya *halka* denir.

- (i) $(R, +)$ yapısı abel gruptur,
- (ii) Her $p, r, s \in R$ için $(pr)s = p(rs)$ 'dir,
- (iii) Her $p, r, s \in R$ için $p(r+s) = pr + ps$ ve $(p+r)s = ps + rs$ 'dir (Hungerford, 1973).

2.2 Tanım $(R, +, \cdot)$ halka, $e \in R$ olmak üzere $\forall s \in R$ için $se = es = s$ ise, $e \in R$ elemanına halkanın *birim elemanı* denir ve $e = 1_R$ yazılışı kullanılır. Birim elemanı bulunan halkalara *birimli halka* denir.

Çalışmamız boyunca ele alınacak halkalar birimli halka olup R ile $(R, +, \cdot)$ halkası temsil edilecektir.

$(R, +, \cdot)$ halkasında "·" işlemi değişmeli olduğunda, bu yapı *değişmeli halka* olarak adlandırılır. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ değişmeli halka örnekleridir, fakat $n > 1$ durumunda $M_n(\mathbb{Z})$ değişmeli olmayan bir halkadır (Hungerford, 1973).

2.3 Tanım R herhangi bir halka ve $\emptyset \neq H \subseteq R$ olarak verilsin. H , $(R, +)$ abel grubunun alt grubu ve $\forall r, s \in H$ için $rs \in H$ ise, H alt grubuna R 'nin *alt halkası* denir. Ayrıca $\forall t \in R$, $\forall r \in H$ için $rt \in H$ ($tr \in H$) ise, H 'ye R 'nin *sağ (sol) ideali* denir. Eğer H , hem sağ ideal hem de sol ideal olma şartlarını birlikte sağlıyor ise, H 'ye R 'nin *ideali* denir.

Bir halkanın her ideali bir alt halka yapısına sahip iken her alt halka ideal olmak zorunda değildir. Örneğin $2\mathbb{Z}$ halkası $\mathbb{Q}$ 'nun bir alt halkası iken $x = 4 \in 2\mathbb{Z}$ ve $r = \frac{1}{5} \in \mathbb{Q}$ için, $rx = \frac{4}{5} \notin 2\mathbb{Z}$ olduğundan $2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ 'nun bir ideali değildir. $\mathbb{Z}$ halkasının her alt halkası bir idealdir.

R halkasında 0 ve R idealleri, *aşık idealer* olarak adlandırılır. R halkasının kendisi dışındaki diğer ideallerine ise *öz ideal* denir (Hungerford, 1973).

2.4 Tanım Bir R halkasında $0_R \neq t \in R$ olarak verilsin. Eğer $ts = 0_R$ olacak şekilde $0_R \neq s \in R$ elemanı varsa, bu durumda t elemanı R halkasının *sıfır bölen elemanı* olarak adlandırılır. Eğer R sıfır böleni olmayan, hem birimli hem de değişmeli bir halkaysa, R halkasına *tamlık bölgesi* adı verilir (Hungerford, 1973).

2.5 Tanım R bir halka ve $m \in R$ olarak verilsin. $mn = nm = 1_R$ eşitliğini sağlayan bir $n \in R$ elemanı mevcutsa, bu durumda n 'ye $m \in R$ elemanının *tersi* denir. Bu bağlamda, m elemanına R halkasının *terslenebilir elemanı* adı verilir (Hungerford, 1973).

2.6 Tanım R bir birimli halka olarak verilsin. Eğer R 'de sıfırdan farklı olan her eleman çarpmaya göre terslenebilir ise, bu halka *bölme halkası* olarak adlandırılır. Bölme halkası ayrıca değişmeli ise, bu durumda *cisim* adını alır (Hungerford, 1973).

2.2. Modüller

2.7 Tanım R bir halka ve $(M, +)$ abel grup olarak verilsin. $(t, a) \mapsto f(t, a) = ta$ ile tanımlanan $f : R \times M \rightarrow M$ fonksiyonunu alalım. $\forall t, s \in R$ ve $\forall k, l \in M$ için;

$$(i) \quad t(k + l) = tk + tl,$$

$$(ii) \quad (t + s)k = tk + sk,$$

$$(iii) \quad (ts)k = t(sk)$$

koşulları sağlandığında M , *sol R -modül* olarak adlandırılır ve ${}_R M$ gösterimi kullanılır. Eğer R , birimi 1_R olan halka ve her $k \in M$ için $1_R k = k$ eşitliği sağlanıyorsa, M *üniter sol R -modül* adını alır. Aynı tanım sağ R -modül için de yapılabilir (Hungerford, 1973).

Tüm abel gruplar, üniter sol (sağ) $\mathbb{Z}$ -modüldür; bu yüzden ${}_Z Q$, sol $\mathbb{Z}$ -modül olarak bilinir. Her R halkası, kendi üzerinde üniter bir sol R -modül olup ${}_R R$ gösterimi kullanılır. $R = \mathbb{Z}_n$ seçildiğinde, $\mathbb{Z}_n$ bir sol $\mathbb{Z}_n$ -modüldür. Ayrıca, vektör uzayları da üniter sol modüllerdir. Bu çalışma boyunca kullanılan tüm modüller üniter sol R -modül olarak değerlendirilecek, kısa gösterim olarak R -modül yazılışı kullanılacaktır.

2.8 Tanım R halka, M bir R -modül ve $\emptyset \neq L \subseteq M$ olarak verilsin. $\forall s, t \in L$ ve $\forall r \in R$ için

$$(i) \quad 0_M \in L,$$

$$(ii) \quad s - t \in L,$$

$$(iii) \quad rs \in L$$

şartlarını sağlayan L 'ye M 'nin bir *alt modülü* denir ve $L \leq M$ gösterimi kullanılır. Verilen bu tanım gereğince 0 ile M , M 'nin alt modülleri olup bu modüllere *aşık alt modüller* denir. M 'nin kendisi dışındaki alt modüllerine *öz alt modül* denir. L , M 'de bir öz alt modül olduğunda $L < M$ gösterimi kullanılır. R halkasının I öz sol ideali, ${}_R R$ 'nin öz alt modülüdür. Bir modül olan M 'nin keyfi sayıda alt modüllerinin kesişimi, M için alt modül oluşturur. M bir R -modül ve $u \in M$ elemanı için, $Ru = \{ru \mid r \in R\}$, M 'nin alt modülüdür (Hungerford, 1973).

2.9 Tanım M bir R -modül ve $G \subseteq M$ olarak verilsin. G 'yi kapsayan tüm alt modüllerin kesişimi, M 'nin G alt kümesi tarafından üretilen alt modül olarak adlandırılır ve $\langle G \rangle$ gösterimi kullanılır. G kümesi $\langle G \rangle$ alt modülünün *üreteç kümesi* olarak adlandırılır. Eğer G sonlu ise, $\langle G \rangle$ 'ye *sonlu üretilmiş alt modül*, yalnızca bir eleman içeren $G = \{u\}$ durumunda ise $\langle G \rangle = \langle u \rangle$ alt modülüne *devirli alt modül* denir. Eğer $M = \langle G \rangle$ eşitliğini sağlayan sonlu bir G alt kümesi mevcut ise, M *sonlu üretilmiş modül* olarak adlandırılır; özel bir durum olarak, $M = \langle u \rangle$ ve $u \in M$ olduğunda, M 'ye u 'nun ürettiği *devirli modül* denir ve $\langle u \rangle = Ru = \{ru \mid r \in R\}$ ile ifade edilir (Hungerford, 1973).

2.1 Önerme M bir modül ve $\{V_i\}_{i \in I}$ M modülünün alt modüllerinin keyfi bir topluluğu olarak verilsin. $S = \bigcup_{i \in I} V_i$ olmak üzere $RS = \{\sum_{k=1}^n n_{i_j} \mid j = 1, 2, 3, \dots, k \text{ için } n_{i_j} \in V_{i_j}, k \in S \setminus \{0\}\}$ şeklindedir (Hungerford, 1973).

2.10 Tanım Önerme 2.1'deki RS alt modülünün elemanlarının karakterizasyonu sebebiyle, $\{V_i\}_{i \in I}$, M modülünün alt modülleri ailesini temsil ederken, $S = \bigcup_{i \in I} V_i$ olduğunda RS alt modülüne, M modülünün $\{V_i\}_{i \in I}$ alt modüller ailesinin *toplamı* denir ve $RS = \sum_{i \in I} V_i$ şeklinde gösterilir (Hungerford, 1973).

2.11 Tanım M bir R -modül ve $L \leq M$ olarak verilsin. $\frac{M}{L}$ bölüm grubu, $t \in R$ ve $m + L \in \frac{M}{L}$ elemanları için, $t(m + L) = tm + L$ şeklinde tanımlı $\cdot : R \times \frac{M}{L} \longrightarrow \frac{M}{L}$ dış işlemine göre R -modül yapısına sahip olup bu modüle, M modülünün L alt modülüne göre *bölüm modülü* denir (Hungerford, 1973).

2.2 Teorem M sonlu üretilmiş bir modül ise, M 'nin tüm bölüm modülleri de sonlu üretilmiştir (Hungerford, 1973).

Kanıt M sonlu üretilmiş R -modül ve $L \leq M$ olarak verilsin. M 'nin sonlu üretilmiş olması sebebiyle, her $v \in M$ ve her $1 \leq i \leq n$ için $v_i \in M$ ve $r_i \in R$ olmak üzere $M = \langle \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \rangle$ ve $v = r_1 v_1 + r_2 v_2 + \dots + r_n v_n$ 'dir. Her $v + L \in \frac{M}{L}$ elemanı için $v + L = (r_1 v_1 + \dots + r_n v_n) + L = r_1(v_1 + L) + \dots + r_n(v_n + L)$ olduğundan $\frac{M}{L} = \langle \{v_1 + L, v_2 + L, \dots, v_n + L\} \rangle$ bulunur. Bu ise $\frac{M}{L}$ bölüm modülünün sonlu üretilmiş olduğu anlamına gelir. $\square$

2.12 Tanım M bir R -modül ve $\{N_i\}_{i \in I}$, M 'nin alt modüllerinin topluluğu olsun.

$$(i) \quad M = \sum_{i \in I} N_i,$$

$$(ii) \quad \text{Her } i \in I \text{ için } N_i \cap \sum_{i \neq j} N_j = \{0\}$$

şartlarını sağlayan M modülüne, $\{N_i\}_{i \in I}$ alt modüller ailesinin *iç direkt toplamı* veya *direkt toplamı* denir ve bu toplam için $M = \bigoplus_{i \in I} N_i$ gösterimi kullanılır. Burada verilen her N_i alt modülüne ise M modülünün *direkt toplam terimi* denir.

M modülünün N_1 ve N_2 alt modülleri verildiğinde $M = N_1 \oplus N_2$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşulun $M = N_1 + N_2$ ve $N_1 \cap N_2 = \{0\}$ olduğu aşikardır.

$M = M \oplus 0$ eşitliği sağlandığından $M = M + 0$ ve $M \cap 0 = \{0\}$ olup M ve $\{0\}$, M modülünün direkt toplam terimleridir. Bundan dolayı M ve $\{0\}$ alt modüllerine M modülünün *aşıkart direkt toplam terimleri* denir (Sharpe ve Vámos, 1972).

2.13 Tanım R halka ve J boştan farklı bir indis kümesi olmak üzere, $\{N_i\}_{i \in J}$ R -modüllerin bir ailesi olsun. Dönüşümlerin $\{f \mid f : J \longrightarrow \bigcup_{i \in J} N_i, \text{ her } i \in J \text{ için } f(i) \in N_i\}$ kümesine $\{N_i\}_{i \in J}$ modüller topluluğunun *çarpımı* denir ve bu küme $\prod_{i \in J} N_i$ ile gösterilir. Her $i \in J$ için $f(i) = f_i$ ve $f = (f_i)_{i \in J}$ gösterimini kullanalım. Burada f_i 'ye f dönüşümünün i . *bileşeni* denir. Eğer J indis kümesi sayılabilir ise, $f = (f_i)_{i \in J} = (f_1, f_2, \dots, f_i, \dots)$ şeklindedir. $f, g \in \prod_{i \in J} N_i$ olmak üzere

$$(i) \quad f = g \iff \text{her } i \in J \text{ için } f_i = g_i,$$

$$(ii) \quad f + g = (f_i + g_i)_{i \in J},$$

$$(iii) \quad -f = (-f_i)_{i \in J},$$

$$(iv) \quad s \in R \text{ olmak üzere } sf = (s f_i)_{i \in J}$$

ile tanımlı cebirsel işlemlere göre, $\prod_{i \in J} N_i$ bir R -modül yapısına sahiptir. Bu modül, $\{N_i\}_{i \in J}$ ailesinin *dış direkt çarpımı* olarak adlandırılır.

$\bigoplus_{i \in J}^w N_i = \{(f_i)_{i \in J} \mid \text{sonlu sayıda } i \in J \text{ için } f_i \neq 0\}$ kümesi $\prod_{i \in J} N_i$ modülünün bir alt modülüdür. $\bigoplus_{i \in J}^w N_i$ alt modülüne $\{N_i\}_{i \in J}$ modüller ailesinin *dış direkt toplamı* denir. J indis kümesi sonlu ise, $\prod_{i \in J} N_i = \bigoplus_{i \in J}^w N_i$ 'dir (Alizade ve Pancar, 1999).

M bir R -modül ise, yukarıda verilen dış direkt toplam tanımında her bir $i \in J$ için $N_i = M$ alındığında, $\bigoplus_{i \in J} N_i$ direkt toplamına, M 'nin *kopyalarının toplamı* denir ve bu durum $M^{(J)}$

ile gösterilir (Sharpe ve Vámos, 1972).

2.3 Teorem (Modüler Kural) M modül, T , W ve S 'de M 'nin alt modülleri ve $S \leq W$ olarak verilsin. Bu durumda, $(S + T) \cap W = S + (T \cap W)$ 'dir (Alizade ve Pancar, 1999).

Kanıt Keyfi $m \in (S + T) \cap W$ için $m \in (S + T)$ ve $m \in W$ olduğundan $m = s + t$ olacak şekilde $s \in S$ ve $t \in T$ vardır. $S \leq W$ verildiğinden $s \in W$ olur. Bu durumda $t = m - s$ 'dir. $W \leq M$ olduğundan $m \in W$, $s \in W$ iken $t \in W$ olup $t \in T \cap W$ bulunur. Dolayısıyla $m \in S + (T \cap W)$ olur. Tersine; $S + (T \cap W) \leq (S + T) \cap W$ aşık bir durum olup $(S + T) \cap W = S + (T \cap W)$ eşitliği elde edilir. $\square$

2.3. Homomorfizmalar

2.14 Tanım R bir halka, M ve S R -modüller olarak verilsin. Aşağıda belirtilen şartları sağlayan $\psi : M \longrightarrow S$ fonksiyonuna *sol R -modül homomorfizması* denir.

$$(i) \quad \forall s, t \in M \text{ için } \psi(s + t) = \psi(s) + \psi(t) \text{ 'dir.}$$

$$(ii) \quad \forall s \in M \text{ ve } \forall r \in R \text{ için } \psi(rs) = r\psi(s) \text{ 'dir.}$$

Bu çalışma boyunca, herhangi bir "sol R -modül homomorfizması" ifadesi yerine kısaca "homomorfizma" ifadesi kullanılacaktır. $\psi : M \longrightarrow S$ homomorfizmasını alalım. ψ homomorfizması bire-bir olduğunda *monomorfizma*, örten olduğunda *epimorfizma*, bire-bir ve örten olma şartlarını aynı anda sağladığında *izomorfizma* olarak adlandırılır. Eğer M ve S arasında bir izomorfizma mevcutsa, bu modüller *izomorf modüller* olarak bilinir ve $M \cong S$ şeklinde gösterilir. M 'den S 'ye tüm homomorfizmaların kümesi

$$Hom(M, S) = \{ \psi \mid \psi : M \longrightarrow S \text{ modül homomorfizması} \} \quad (2.1)$$

şeklinde gösterilir (Hungerford, 1973).

2.15 Tanım M bir modül ve $S \leq M$ olarak verilsin. $i(s) = s$ şeklinde tanımlanan $i : S \longrightarrow M$ dönüşümü, bir monomorfizma olup bu monomorfizma *içerme monomorfizması* olarak adlandırılır. Benzer şekilde, $\pi(m) = m + S$ ile tanımlanan $\pi : M \longrightarrow \frac{M}{S}$ dönüşümü epimorfizmadır ve bu π epimorfizmasına *doğal (kanonik) homomorfizma* denir (Hungerford, 1973).

2.16 Tanım M modül olsun. $g(m) = m$ olacak şekilde tanımlanan $g : M \longrightarrow M$ izomorfizmasına *birim (idantik) homomorfizma* denir. M 'den M 'ye birim homomorfizma I_M ile gösterilir (Hungerford, 1973).

2.4 Teorem $\psi : M \longrightarrow N$ ile $\phi : N \longrightarrow K$ birer homomorfizma olsun. Bu takdirde $\phi \circ \psi : M \longrightarrow K$ bileşke fonksiyonu da bir homomorfizmadır (Kasch, 1982).

2.17 Tanım $\psi : M \longrightarrow N$ homomorfizmasını alalım. $\{t \in M \mid \psi(t) = 0\}$ kümesine ψ homomorfizmasının çekirdeği denir ve $\text{Çek}(\psi)$ gösterimi kullanılır. $\text{Çek}(\psi)$ 'nin M modülünün bir alt modülü olduğu kolayca gösterilebilir (Hungerford, 1973).

2.18 Tanım $\psi : M \longrightarrow N$ homomorfizma olmak üzere, $\{\psi(t) \mid t \in M\}$ kümesine, M modülünün ψ altındaki *homomorfik görüntüsü* denir ve $\text{Gör}(\psi)$ gösterimi kullanılır. $\text{Gör}(\psi)$ 'nin N modülünün bir alt modülü olduğu kolayca gösterilebilir (Hungerford, 1973).

$\pi : M \longrightarrow \frac{M}{N}$ doğal homomorfizması için $\text{Çek}(\pi) = N$ olduğu açıktır.

2.5 Teorem (Homomorfizma Teoremi) $f : M \longrightarrow S$ homomorfizma olsun. Bu durumda, $\frac{M}{\text{Çek}(f)} \cong \text{Gör}(f)$ 'tir. f epimorfizma ise, $\frac{M}{\text{Çek}(f)} \cong S$ 'dir (Sharpe ve Vámos, 1972).

2.6 Teorem (1. İzomorfizma Teoremi) M modül, N ve L modülleri M 'nin alt modülleri olarak verilsin. $\frac{N+L}{L} \leq \frac{M}{L}$ olup $\frac{N+L}{L} \cong \frac{N}{N \cap L}$ 'dir (Sharpe ve Vámos, 1972).

2.7 Teorem (2. İzomorfizma Teoremi) $L \leq K \leq M$ ile verilen K, L ve M modüllerini alalım. Bu durumda $\frac{\frac{M}{L}}{\frac{K}{L}} \cong \frac{M}{K}$ 'dir (Sharpe ve Vámos, 1972).

2.19 Tanım M bir modül ve $S < M$ olarak verilsin. S alt modülünü kapsayan M modülünün S dışında başka bir öz alt modülü mevcut değilse, S modülü M 'nin *maksimal alt modülü* olarak adlandırılır. Örnek verecek olursak; $p \in P$ için $\langle p \rangle = p\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$, bir maksimal alt modüldür (Kasch, 1982).

2.8 Önerme R halka, M bir R -modül ve $X < M$ olarak verilsin. X alt modülünün M 'de maksimal olması için gerek ve yeter koşul her $t \in M \setminus X$ için $X + Rt = M$ eşitliğinin sağlanmasıdır (Kasch, 1982).

Kanıt ($\implies$) Herhangi bir $t \in M \setminus X$ elemanı için $X \subset X + Rt$ olup X 'in maksimal olmasından $X + Rt = M$ eşitliği elde edilir.

($\impliedby$) W alt modülü, M modülünde $X \subset W$ koşulunu sağlasın. Burada $W = M$ olduğunu göstermeliyiz. $X \neq W$ olduğundan $t \in W \setminus X$ elemanı mevcuttur. Bu durumda $t \in M \setminus X$ olup hipotez gereği $X + Rt = M$ 'dir. Ayrıca $t \in W$ olduğundan $Rt \leq W$ 'dir ve buradan $M = X + Rt \leq W$ olup $W = M$ 'dir. $\square$

2.9 Teorem M bir modül ve $S \leq M$ bir alt modül olarak verilsin. M 'de S 'yi içeren tüm alt modüllerin kümesi ile $\frac{M}{S}$ 'nin alt modüllerinin kümesi arasında bire-bir eşleme mevcuttur. $\frac{M}{S}$ bölüm modülünün alt modülleri, $S \subseteq U \subseteq M$ olması şartıyla $\frac{U}{S}$ formundadır (Alizade ve Pancar, 1999).

Kanıt $S \leq M$ olduğundan $\pi : M \rightarrow \frac{M}{S}$ doğal homomorfizması kullanılarak $S \leq U \leq M$ için $\pi(U) = \frac{U}{S} \leq \frac{M}{S}$ elde edilir. Tersine $K \leq \frac{M}{S}$ ise, $U = \pi^{-1}(K)$ için $S = \text{Çek}(\pi) = \pi^{-1}(0) \leq U \leq M$ ve $\pi(U) = \frac{U}{S} = K$ olduğundan $\frac{M}{S}$ modülünün her alt modülü $S \leq U \leq M$ olmak üzere $\frac{U}{S}$ şeklinde olur. $\square$

2.4. Tam Diziler ve Hom Funktoru

2.20 Tanım $\{M_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ modüller ailesinden ve bu modüllerin $\alpha_n : M_n \rightarrow M_{n-1}$ homomorfizmalarından oluşan

$$\dots \rightarrow M_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} M_n \xrightarrow{\alpha_n} M_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \dots \quad (2.2)$$

dizisinde $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $\text{Gör}(\alpha_n) = \text{Çek}(\alpha_{n-1})$ oluyorsa, diziye *tam dizi* adı verilir.

Eğer bir tam dizi $0 \rightarrow M \rightarrow S \rightarrow T \rightarrow 0$ biçiminde verilmiş ise bu tam diziye *kısa tam dizi* adı verilir (Alizade ve Pancar, 1999).

2.10 Önerme $q : A \rightarrow B$ ve $w : B \rightarrow A$ homomorfizmaları için $w \circ q = I_A$ olsun. Bu durumda, $B = \text{Gör}(q) \oplus \text{Çek}(w)$ 'dir (Wisbauer, 1991).

2.11 Önerme $0 \xrightarrow{f} K \xrightarrow{g} L \xrightarrow{h} M \xrightarrow{\psi} 0$ dizisinin tam olması durumunda, g monomorfizma ve h bir epimorfizmadır. Ayrıca $\text{Gör}(g) \cong K$ ve $M \cong \frac{L}{\text{Gör}(g)}$ 'dir. Böylece izomorf grupları özdeşleştirerek $M \cong \frac{L}{K}$ sonucuna varabiliriz (Alizade ve Pancar, 1999).

Kanıt $\text{Çek}(g) = \text{Gör}(f) = f(0) = 0$ 'dır. Dolayısıyla g bir monomorfizmadır ve $\text{Gör}(g) = g(K) \cong K$ 'dir. Her $s \in M$ için $\psi(s) = 0$ olduğundan $\text{Gör}(h) = \text{Çek}(\psi) = M$ 'dir, yani h bir epimorfizmadır. Esas homomorfizma teoreminden $M = \text{Gör}(h) \cong \frac{L}{\text{Çek}(h)} = \frac{L}{\text{Gör}(g)}$ izomorfizması elde edilir. $\square$

2.12 Teorem $0 \rightarrow A \xrightleftharpoons[\alpha]{u} B \xrightleftharpoons[k]{v} C \rightarrow 0$ kısa tam dizisi verilmiş olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) $\alpha \circ u = I_A$ eşitliğini sağlayan bir $\alpha : B \rightarrow A$ homomorfizması mevcuttur.

(ii) $\text{Gör}(u)$, B modülünün direkt toplam terimidir.

(iii) $v \circ k = I_C$ eşitliğini sağlayacak şekilde $k : C \longrightarrow B$ R -modül homomorfizması mevcut olup $B = A \oplus C$ 'dir (Alizade ve Pancar, 1999).

Kanıt (i) $\implies$ (ii) Önerme 2.10'dan açıktır.

(ii) $\implies$ (iii) $W \leq B$ ve $B = \text{Gör}(u) \oplus W$ olsun. Verilen dizinin tamlığından $\text{Gör}(u) = \text{Çek}(v)$ ve $\text{Gör}(u) \cap W = \{0\}$ eşitliğinden $\text{Çek}(v) \cap W = \{0\}$ 'dır ve v homomorfizmasının W alt modülüne göre kısıtlanması olan $v|_W$ bir monomorfizmadır. $v|_W$ monomorfizmasının bir izomorfizma olduğunu kanıtlayalım. $c \in C$ keyfi elemanını alalım. v bir epimorfizma olduğundan bir $b \in B$ elemanı için $v(b) = c$ yazabiliriz. Diğer yandan $B = \text{Gör}(u) \oplus W$ olduğundan $a \in A$ ve $x \in W$ elemanları için $b = u(a) + x$ olup $c = v(b) = v(u(a) + x) = v(u(a)) + v(x)$ bulunur. Ayrıca dizinin tamlığı gereğince $v(u(a)) = 0$ olup $c = v(x)$ elde edilir. Buradan $v|_W$ bir epimorfizma olup bir izomorfizmadır. $v|_W$ izomorfizmasının tersini k ile ifade edecek olursak $k : C \longrightarrow W \leq B$ homomorfizmasını elde ederiz. Ayrıca $k, v|_W$ izomorfizmasının tersi olduğundan $v \circ k = I_C$ 'dir.

(iii) $\implies$ (i) $b \in B$ keyfi olsun. Bu takdirde $v(b - (k \circ v(b))) = v(b) - (v \circ k)(v(b)) = v(b) - v(b) = 0$ olup $\text{Gör}(u) = \text{Çek}(v)$ eşitliği gereğince bir $a \in A$ elemanı için $u(a) = b - (k \circ v)(b)$ olur. Dizinin tamlığı gereğince u bir monomorfizmadır ve a tek türlü olarak belirlidir. $b \in B$ olmak üzere $\alpha : B \longrightarrow A$ fonksiyonunu alalım. α fonksiyonunun homomorfizma olduğunu gösterebiliriz. $a \in A$ keyfi olsun. Şimdi α homomorfizmasının tanımını yaparken alınan b elemanı yerine $u(a)$ alınırsa $u(a) - (k \circ v)(u(a)) = u(a) - k \circ (v \circ u)(a) = u(a) - k(0) = u(a)$ olur. Böylece $(\alpha \circ u)(a) = a$ olup $\alpha \circ u = I_A$ elde edilir. $\square$

Eğer bir kısa tam dizi Teorem 2.12'deki denk koşulları sağlıyorsa *parçalanabilir kısa tam dizi* olarak adlandırılır (Alizade ve Pancar, 1999).

2.21 Tanım K ve L iki sol R -modül $\psi, \phi \in \text{Hom}(K, L)$ olmak üzere $\psi + \phi$ toplamı her $k \in K$ için $(\psi + \phi)(k) = \psi(k) + \phi(k)$ şeklinde tanımlanmış olsun. $\psi + \phi, 0, -\psi \in \text{Hom}(K, L)$ olduğundan $\text{Hom}(K, L)$ bir abel gruptur. Bu gruba *homomorfizmalar grubu* denir (Alizade ve Pancar, 1999).

2.22 Tanım Bir κ kategorisi

(i) $\text{Ob}(\kappa)$ nesneler sınıfından;

(ii) Her sıralı (S, T) nesne çifti için, $\text{Mor}_\kappa(S, T)$ morfizmalar kümesinden (birbirinden farklı (S, T) ve (G, H) çiftleri için $\text{Mor}_\kappa(S, T) \cap \text{Mor}_\kappa(G, H) = \emptyset$ olmak üzere);

(iii) $u \in \text{Mor}_\kappa(S, T)$, $v \in \text{Mor}_\kappa(T, G)$ olmak üzere (v, u) çiftine bunların *bileşkesi* denilen $v \circ u \in \text{Mor}_\kappa(S, G)$ morfizmasını karşılık getiren $\text{Mor}_\kappa(T, G) \times \text{Mor}_\kappa(S, T) \longrightarrow \text{Mor}_\kappa(S, G)$ fonksiyonlarından oluşur öyle ki:

a) Verilen her S, T, G, H nesneleri ve $u \in \text{Mor}_\kappa(S, T)$, $v \in \text{Mor}_\kappa(T, G)$ ve $h \in \text{Mor}_\kappa(G, H)$ morfizmaları için $h \circ (v \circ u) = (h \circ v) \circ u$ 'dur.

b) Her $S \in \text{Ob}(\kappa)$ nesnesinin, her $u \in \text{Mor}_\kappa(S, T)$, $v \in \text{Mor}_\kappa(T, G)$ için $u \circ 1_S = u$, $1_S \circ v = v$ eşitliklerini gerçekleyen bir $1_S \in \text{Mor}_\kappa(S, S)$ birim morfizması vardır (Alizade ve Pancar, 1999).

2.23 Tanım K, L ve M modüllerini alalım. $\psi : L \longrightarrow M$ bir modül homomorfizması ise; $\text{Hom}(K, \psi) : \text{Hom}(K, L) \longrightarrow \text{Hom}(K, M)$ fonksiyonu ($\text{Hom}(K, \psi)$ 'yi kısaca ψ_* ile göstereyim) $\psi_*(\phi) = \psi \circ \phi$ şeklinde tanımlansın. $\psi \circ \phi$, iki homomorfizmanın bileşkesi olduğundan bir homomorfizmadır, yani $\psi \circ \phi \in \text{Hom}(K, M)$ dir. λ ve ϕ birer homomorfizma ve

$$\psi_*(\phi + \lambda) = \psi \circ (\phi + \lambda) = \psi \circ \phi + \psi \circ \lambda = \psi_*(\phi) + \psi_*(\lambda) \quad (2.3)$$

olduğundan ψ_* bir homomorfizmadır. Ayrıca $\text{Hom}(K, \psi + \lambda)(\phi) = (\psi + \lambda) \circ \phi = \psi \circ \phi + \lambda \circ \phi = \text{Hom}(K, \psi)(\phi) + \text{Hom}(K, \lambda)(\phi) = (\text{Hom}(K, \psi) + \text{Hom}(K, \lambda))(\phi)$ olur. $\text{Hom}(K, \cdot)$ 'ya *kovariant fonktor* denir. Benzer şekilde $\psi : K \longrightarrow M$ için $\psi^* = \text{Hom}(\psi, L) : \text{Hom}(M, L) \longrightarrow \text{Hom}(K, L)$ homomorfizması $\psi^*(\phi) = \phi \circ \psi$ şeklinde tanımlanırsa $\text{Hom}(\cdot, L)$ 'ye *kontravariant fonktor* denir (Alizade ve Pancar, 1999).

2.24 Tanım Bir κ kategorisinde her $S, T \in \text{Ob}(\kappa)$ için $\text{Mor}_\kappa(S, T)$ kümesinde bir abel grubu yapısı verilmişse ve her $u, v : S \longrightarrow T$, $h, k : T \longrightarrow M$ için $h \circ (u + v) = h \circ u + h \circ v$ ve $(h + k) \circ u = h \circ u + k \circ u$ ise κ kategorisine *önadditif kategori* denir (Alizade ve Pancar, 1999).

2.25 Tanım Bir κ ve κ' önadditif kategorilerse, her $u, v : K \longrightarrow L$ morfizmaları için $F(u + v) = F(u) + F(v)$ eşitliğini sağlayan $F : \kappa \longrightarrow \kappa'$ fonktorlarına *additif fonktorlar* adı verilir (Alizade ve Pancar, 1999).

2.26 Tanım $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\psi} S \xrightarrow{\phi} T \longrightarrow 0$ tam dizi olsun.

$$0 \longrightarrow F(M) \longrightarrow F(S) \longrightarrow F(T) \quad (2.4)$$

şeklinde verilen dizi tam ise F 'e *sol tam fonktor* ve

$$F(M) \longrightarrow F(S) \longrightarrow F(T) \longrightarrow 0 \quad (2.5)$$

şeklinde verilen dizi tam ise *sağ tam fonktor* denir. F , hem sağ tam fonktor hem de sol tam fonktor ise F 'e *tam fonktor* denir (Fuller ve Anderson, 1992).

2.13 Teorem M bir sol R -modül olarak verilsin. Bu durumda $Hom(M, \cdot)$ ve $Hom(\cdot, M)$ sol tam fonktorlardır (Fuller ve Anderson, 1992).

2.5. Modüllerin Genişlemeleri ve $Ext(-, -)$ Grubu

2.27 Tanım R keyfi birimli bir halka olsun. $\mathbb{E} : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} S \xrightarrow{g} T \longrightarrow 0$ modül homomorfizmaları ve sol R -modüllerin bir kısa tam dizisi olsun. $\mathbb{E}$ 'ye M modülünün T 'ye bir *genişlemesi* denir (MacLane, 1963).

2.28 Tanım $\mathbb{E} : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{u} S \xrightarrow{v} T \longrightarrow 0$ ve $\mathbb{E}' : 0 \longrightarrow M' \xrightarrow{u'} S' \xrightarrow{v'} T' \longrightarrow 0$ iki genişleme olsun. Aşağıdaki diyagramı göz önüne alalım.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{E} : 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{u} & S & \xrightarrow{v} & T \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ \mathbb{E}' : 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{u'} & S' & \xrightarrow{v'} & T' \longrightarrow 0 \end{array} \quad (2.6)$$

Yukarıda verilen diyagramda $u' \circ \alpha = \beta \circ u$ ve $v' \circ \beta = \gamma \circ v$ ise bu diyagrama *değişmeli diyagram* denir (MacLane, 1963).

2.29 Tanım $\mathbb{E} : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{u} S \xrightarrow{v} T \longrightarrow 0$ ve $\mathbb{E}' : 0 \longrightarrow M' \xrightarrow{u'} S' \xrightarrow{v'} T' \longrightarrow 0$ iki genişleme olsun. Aşağıdaki diyagramı göz önüne alalım.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{E} : 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{u} & S & \xrightarrow{v} & T \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ \mathbb{E}' : 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{u'} & S' & \xrightarrow{v'} & T' \longrightarrow 0 \end{array} \quad (2.7)$$

Yukarıda verilen diyagramda diyagram değişmeli iken α , β ve γ birer izomorfizma ise $\mathbb{E}$ ve $\mathbb{E}'$ genişlemeleri *izomorftur* denir ve $\mathbb{E} \cong \mathbb{E}'$ ile gösterilir (MacLane, 1963).

Genişlemelerin izomorfizması bir denklik bağıntısıdır. Gerçekten;

(i)

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{E} : 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{u} & S & \xrightarrow{v} & T \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow I_M & & \downarrow I_S & & \downarrow I_T \\ \mathbb{E} : 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{u} & S & \xrightarrow{v} & T \longrightarrow 0 \end{array} \quad (2.8)$$

diyagramı değişmeli ve I_M , I_S , I_T birer izomorfizma olduğundan $\mathbb{E} \cong \mathbb{E}$ olup yansıma

özelliği sağlanır.

(ii)

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \mathbb{E} : 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{u} & S & \xrightarrow{v} & T & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\
 \mathbb{E}' : 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{u'} & S' & \xrightarrow{v'} & T' & \longrightarrow & 0
 \end{array} \tag{2.9}$$

Yukarıda verilen diyagramda $\mathbb{E} \cong \mathbb{E}'$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $u' \circ \alpha = \beta \circ u$ ve $v' \circ \beta = \gamma \circ v$ olup α, β ve γ izomorfizmalardır. Buradan α^{-1}, β^{-1} ve γ^{-1} 'de izomorfizma olduğundan $u \circ \alpha^{-1} = \beta^{-1} \circ u'$ ve $v \circ \beta^{-1} = \gamma^{-1} \circ v'$ olup $\mathbb{E}' \cong \mathbb{E}$ elde edilir, yani, simetri özelliği de sağlanır.

(iii) Geçişme özelliği de $\mathbb{E}, \mathbb{E}'$ ve $\mathbb{E}''$ genişlemeleri alınarak benzer şekilde gösterilebilir.

2.14 Yardımcı Teorem (5-Lemma)

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \mathbb{E} : 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{u} & S & \xrightarrow{v} & T & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\
 \mathbb{E}' : 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{u'} & S' & \xrightarrow{v'} & T' & \longrightarrow & 0
 \end{array} \tag{2.10}$$

değişmeli diyagramı verilsin. Bu durumda;

(i) α ve γ monomorfizma ise β monomorfizmadır.

(ii) α ve γ epimorfizma ise β epimorfizmadır.

(iii) α ve γ izomorfizma ise β izomorfizmadır (Alizade ve Pancar, 1999).

Aşağıda verilen değişmeli diyagramı inceleyelim.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \mathbb{E} : 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{u} & S & \xrightarrow{v} & T & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow I_M & & \downarrow \beta & & \downarrow I_T & & \\
 \mathbb{E}' : 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{u'} & S' & \xrightarrow{v'} & T & \longrightarrow & 0
 \end{array} \tag{2.11}$$

Burada I_M ve I_T izomorfizma olduğundan Yardımcı Teorem 2.14 gereğince β bir izomorfizmadır. Dolayısıyla $\mathbb{E} \cong \mathbb{E}'$ olur. Yani $\mathbb{E}$ ve $\mathbb{E}'$ aynı denklik sınıfının elemanlarıdır.

2.30 Tanım R bir halka olsun. M ve T R -modüllerini alalım. M ile başlayıp T ile biten tüm genişlemelerin tüm denklik sınıflarının kümesi $Ext_R(T, M)$ ile gösterilir. Dolayısıyla $Ext_R(T, M)$ kümesinin elemanları, M ile başlayıp T ile biten kısa tam dizilerdir.

$\mathbb{E} \in \text{Ext}(T, M)$ ve $\mathbb{E}' \in \text{Ext}_R(T, M)$ olsun. O halde u ve i_1 monomorfizma, v ve π_2 epimorfizma olmak üzere, $\mathbb{E} : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{u} S \xrightarrow{v} T \longrightarrow 0$ ve $\mathbb{E}' : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{i_1} M \oplus T \xrightarrow{\pi_2} T \longrightarrow 0$ alabiliriz. Burada $\mathbb{E} \cong \mathbb{E}'$ izomorfizmasının olduğu düşünülürse $S \cong M \oplus T$ olacağından $\mathbb{E}$ parçalanabilir kısa tam dizi olur (MacLane, 1963).

2.15 Yardımcı Teorem $\mathbb{E} : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{u} S \xrightarrow{v} T \longrightarrow 0 \in \text{Ext}_R(T, M)$ ve $\gamma : T' \longrightarrow T$ modül homomorfizması olsun. Bu takdirde,

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{E}' : 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{u'} & S' & \xrightarrow{v'} & T' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow I_M & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ \mathbb{E} : 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{u} & S & \xrightarrow{v} & T \longrightarrow 0 \end{array} \quad (2.12)$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde, denklik sınıfında bir tek $\mathbb{E}' \in \text{Ext}_R(T', M)$ genişlemesi vardır (MacLane, 1963).

2.31 Tanım Yardımcı Teorem 2.15'te verilen $\mathbb{E}'$ genişlemesine $\mathbb{E}$ genişlemesi ile $\gamma : T' \longrightarrow T$ homomorfizmasının *bileşkesi* denir ve $\mathbb{E}' = \mathbb{E} \circ \gamma$ ile gösterilir (MacLane, 1963).

2.16 Sonuç $\mathbb{E} : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{u} S \xrightarrow{v} T \longrightarrow 0 \in \text{Ext}_R(T, M)$ olsun. Yardımcı Teorem 2.15'te $T' = T$ ve $\gamma = I_T$ alınırsa

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{E} \circ I_T : 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{u'} & S' & \xrightarrow{v'} & T \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow I_M & & \downarrow \beta & & \downarrow I_T \\ \mathbb{E} : 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{u} & S & \xrightarrow{v} & T \longrightarrow 0 \end{array} \quad (2.13)$$

diyagramı değişmeli ve $\mathbb{E} \circ I_T$ tek türlü olarak belirlidir. I_M ve I_T izomorfizma olduğundan Yardımcı Teorem 2.14'ten β izomorfizma olup $\mathbb{E} \cong \mathbb{E} \circ I_T$ bulunur (MacLane, 1963).

2.17 Yardımcı Teorem Aşağıdaki değişmeli diyagram verilsin.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{E}_1 : 0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{u_1} & S_1 & \xrightarrow{v_1} & T_1 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \beta_1 & & \downarrow \gamma_1 \\ \mathbb{E} : 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{u} & S & \xrightarrow{v} & T \longrightarrow 0 \end{array} \quad (2.14)$$

$\gamma_1 = \gamma$ için $\beta \circ \beta' = \beta_1$ ile verilen;

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbb{E}_1 : 0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{u_1} & S_1 & \xrightarrow{v_1} & T_1 & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \beta' & & \downarrow I_{T_1} & & \\
\mathbb{E} \circ \gamma : 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{u'} & S' & \xrightarrow{v'} & T_1 & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow I_M & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma_1 & & \\
\mathbb{E} : 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{u} & S & \xrightarrow{v} & T & \longrightarrow & 0
\end{array} \tag{2.15}$$

diyagramı tek türlü olarak belirlidir (MacLane, 1963).

2.18 Yardımcı Teorem $\mathbb{E} : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{u} S \xrightarrow{v} T \longrightarrow 0 \in \text{Ext}_R(T, M)$ olmak üzere $\alpha : M \longrightarrow M'$ modül homomorfizması verilsin. Bu durumda;

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbb{E} : 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{u} & S & \xrightarrow{v} & T & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow I_T & & \\
\mathbb{E}' : 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{u_1} & S' & \xrightarrow{v_1} & T & \longrightarrow & 0
\end{array} \tag{2.16}$$

diyagramını değişmeli yapacak şekilde bir tek $\mathbb{E}' \in \text{Ext}_R(T, M')$ vardır. Burada $\mathbb{E}'$ genişlemesine $\mathbb{E}$ ile α homomorfizmasının *bileşkesi* denir. Bundan dolayı $\mathbb{E}' = \alpha \circ \mathbb{E}$ ile gösterilir. Özel olarak $\alpha = I_M$ alınırsa $\mathbb{E}' = I_M \circ \mathbb{E}$ olur (MacLane, 1963).

2.19 Yardımcı Teorem Aşağıdaki değişmeli diyagram verilsin.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbb{E} : 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{u} & S & \xrightarrow{v} & T & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \beta_1 & & \downarrow \gamma_1 & & \\
\mathbb{E}' : 0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & S_1 & \longrightarrow & T_1 & \longrightarrow & 0
\end{array} \tag{2.17}$$

Yukarıdaki diyagramda $\alpha_1 = \alpha$ alınırsa

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbb{E} : 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{u} & S & \xrightarrow{v} & T & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \beta' & & \downarrow I_T & & \\
\alpha \circ \mathbb{E} : 0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & S' & \longrightarrow & T & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow I_{M_1} & & \downarrow \beta'' & & \downarrow \gamma & & \\
\mathbb{E}' : 0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & S_1 & \longrightarrow & T_1 & \longrightarrow & 0
\end{array} \tag{2.18}$$

değişmeli diyagramı tek türlü olarak belirlidir (MacLane, 1963).

2.20 Sonuç $\alpha \circ (\alpha' \circ \mathbb{E}) \equiv (\alpha \circ \alpha') \circ \mathbb{E}$ 'dir (MacLane, 1963).

2.21 Yardımcı Teorem $\alpha \circ (\mathbb{E} \circ \gamma) \equiv (\alpha \circ \mathbb{E}) \circ \gamma$ 'dır (MacLane, 1963).

2.22 Önerme $\mathbb{E} : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{u} S \xrightarrow{v} T \longrightarrow 0$ genişlemesi verilsin. Bu takdirde, $u \circ \mathbb{E}$ ve $\mathbb{E} \circ v$ parçalanabilir (MacLane, 1963).

2.32 Tanım $\alpha : M \longrightarrow M'$ ve $\gamma : T \longrightarrow T'$ iki modül homomorfizması olmak üzere $(\alpha \oplus \gamma)(m, t) = (\alpha(m), \gamma(t))$ ile tanımlı, toplamsal ilişki oluşturan $\alpha \oplus \gamma : M \oplus T \longrightarrow M' \oplus T'$ modül homomorfizmasını ve

$$\begin{array}{ccccc} M & \xleftarrow{\pi_1} & M \oplus T & \xrightarrow{\pi_2} & T \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha \oplus \gamma & & \downarrow \gamma \\ M' & \xleftarrow{\pi'_1} & M' \oplus T' & \xrightarrow{\pi'_2} & T' \end{array} \quad (2.19)$$

değişmeli diyagramını alalım. $t \in T$ için $\Delta_T(t) = (t, t)$ ile tanımlı $\Delta = \Delta_T : T \longrightarrow T \oplus T$ homomorfizmasına *diagonal homomorfizma* denir. $x_1, x_2 \in M$ için $\nabla_M(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ ile tanımlı $\nabla = \nabla_M : M \oplus M \longrightarrow M$ homomorfizmasına *kodiagonal homomorfizma* denir. $u, v : T \longrightarrow M$ iki modül homomorfizması olmak üzere, $u + v$ toplamını;

$$t \xrightarrow{\Delta_T} (t, t) \xrightarrow{u \oplus v} (u(t), v(t)) \xrightarrow{\nabla_M} u(t) + v(t) \quad (2.20)$$

ile birlikte $u + v = \nabla_M(u \oplus v)\Delta_T$ olarak alacağız (MacLane, 1963).

2.33 Tanım $\mathbb{E}_1 : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{u_1} S_1 \xrightarrow{v_1} T \longrightarrow 0$ ve $\mathbb{E}_2 : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{u_2} S_2 \xrightarrow{v_2} T \longrightarrow 0$ genişlemeleri $Ext_R(T, M)$ 'nin keyfi iki elemanı olsun. Her $(s_1, s_2) \in S_1 \oplus S_2$ için $v(s_1, s_2) = (v_1 \oplus v_2)(s_1, s_2) = (v_1(s_1), v_2(s_2))$ ve her $(x_1, x_2) \in M \oplus M$ için $u(x_1, x_2) = (u_1 \oplus u_2)(x_1, x_2) = (u_1(x_1), u_2(x_2))$ olmak üzere $\mathbb{E}_1$ ve $\mathbb{E}_2$ 'nin direkt toplamını

$$\mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2 : 0 \longrightarrow M \oplus M \xrightarrow{u} S_1 \oplus S_2 \xrightarrow{v} T \oplus T \longrightarrow 0 \quad (2.21)$$

şeklinde tanımlayalım. Verilen her $t \in T$ için $\Delta_T(t) = (t, t)$ diagonal dönüşüm ve her $(x_1, x_2) \in M \oplus M$ için $\nabla_M(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ kodiagonal dönüşüm olmak üzere

$$\mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2 = \nabla_M(\mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2)\Delta_T \quad (2.22)$$

ile verilen toplama $\mathbb{E}_1$ ve $\mathbb{E}_2$ 'nin *Baer toplamı* denir (MacLane, 1963).

Şimdi aşağıdaki önerme ile $Ext_R(T, M)$ yapısının, genişlemelerin Baer toplamı altında bir Abel grup olduğunu gösterelim.

2.23 Önerme $\mathbb{E}_1$ ve $\mathbb{E}_2 \text{Ext}_R(T, M)$ 'nin keyfi iki elemanı olsun. $(\text{Ext}_R(T, M), +)$ cebirsel yapısı, $\mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2 = \nabla_M(\mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2)\Delta_T$ ile tanımlı $+: \text{Ext}_R(T, M) \times \text{Ext}_R(T, M) \rightarrow \text{Ext}_R(T, M)$ işlemine göre bir Abel gruptur.

Kanıt

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2 : 0 & \longrightarrow & M \oplus M & \xrightarrow{u \oplus v} & S_1 \oplus S_2 & \xrightarrow{v_1 \oplus v_2} & T \oplus T \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \nabla_M & & \downarrow & & \downarrow I_{T \oplus T} \\
 \nabla_M(\mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2) : 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{(u \oplus v)'} & S' & \xrightarrow{(v_1 \oplus v_2)'} & T \oplus T \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow I_A & & \uparrow & & \uparrow \Delta_T \\
 \nabla_M(\mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2)\Delta_T : 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{(u \oplus v)''} & S'' & \xrightarrow{(v_1 \oplus v_2)''} & T \longrightarrow 0
 \end{array} \quad (2.23)$$

olacak şekilde $\nabla_M(\mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2)\Delta_T$ genişlemesi Yardımcı Teorem 2.17 ve Yardımcı Teorem 2.19 gereğince tek türlü olarak belirlidir. $(\alpha_1 \oplus \alpha_2)(\mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2) \equiv \alpha_1 \mathbb{E}_1 \oplus \alpha_2 \mathbb{E}_2$ ve $(\mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2)(\gamma_1 \oplus \gamma_2) \equiv \mathbb{E}_1 \gamma_1 \oplus \mathbb{E}_2 \gamma_2$ denklilikleri kolayca gösterilebilir. $\alpha : M \rightarrow M'$ modül homomorfizması olarak verildiğinde $\alpha \nabla = \nabla(\alpha \oplus \alpha) : M \oplus M \rightarrow M'$ ve $\gamma : T' \rightarrow T$ modül homomorfizması olmak üzere $\Delta = (\gamma \oplus \gamma)\Delta : T' \rightarrow T \oplus T$ için; $\alpha(\mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2) \equiv \alpha \nabla(\mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2)\Delta \equiv \nabla(\alpha \oplus \alpha)(\mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2)\Delta \equiv \nabla(\alpha \mathbb{E}_1 \oplus \alpha \mathbb{E}_2)\Delta \equiv \alpha \mathbb{E}_1 + \alpha \mathbb{E}_2$ olur. Benzer şekilde $(\mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2)\gamma \equiv \Delta \gamma(\mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2)\nabla \equiv (\gamma \oplus \gamma)\Delta(\mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2)\nabla \equiv \Delta(\mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2)(\gamma \oplus \gamma)\nabla \equiv \Delta(\mathbb{E}_1 \gamma \oplus \mathbb{E}_2 \gamma)\nabla \equiv \mathbb{E}_1 \gamma + \mathbb{E}_2 \gamma$ elde edilir. Dolayısıyla $\mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2 = \mathbb{E}_2 + \mathbb{E}_1$ olup değişme özelliği sağlanır.

M ve T birer modül olsun. $\Delta(t) = (t, t, t)$ ile tanımlı $(\Delta \oplus 1_T)\Delta = (1_T \oplus \Delta)\Delta : T \rightarrow T \oplus T \oplus T$ diagonal dönüşümü ve $\nabla(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$ ile tanımlı $\nabla(\nabla \oplus 1_M) = \nabla(1_M \oplus \nabla) : M \oplus M \oplus M \rightarrow M$ kodiagonal dönüşümünü alalım. $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2$ ve $\mathbb{E}_3 \text{Ext}_R(T, M)$ 'nin keyfi elemanları olsun. Buradan $(\mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2) + \mathbb{E}_3 = \nabla_M((\mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2) \oplus \mathbb{E}_3)\Delta_T = \nabla_M(\mathbb{E}_1 \oplus (\mathbb{E}_2 + \mathbb{E}_3))\Delta_T = \mathbb{E}_1 + (\mathbb{E}_2 + \mathbb{E}_3)$ olup birleşme özelliği sağlanır.

$\mathbb{E}_0 : 0 \rightarrow M \rightarrow M \oplus T \rightarrow T \rightarrow 0$ genişlemesini ve $\beta(s) = (0, v(s))$ olmak üzere aşağıdaki değişmeli diyagramı alalım.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbb{E} : 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{u} & S & \xrightarrow{v} & T \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow 0_M & & \downarrow \beta & & \downarrow I_T \\
 \mathbb{E}_0 : 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M \oplus T & \longrightarrow & T \longrightarrow 0
 \end{array} \quad (2.24)$$

Bu diyagramdan $0_M \circ \mathbb{E} = \mathbb{E}_0$ olduğu açıktır. Buradan $\mathbb{E} + \mathbb{E}_0 \equiv 1_M \circ \mathbb{E} + 0_M \circ \mathbb{E} \equiv (1_M + 0_M) \circ \mathbb{E} \equiv 1_M \circ \mathbb{E} \equiv \mathbb{E}$ 'dir. Dolayısıyla $\mathbb{E}_0 : 0 \rightarrow M \rightarrow M \oplus T \rightarrow T \rightarrow 0$ genişlemesi bu işlemin birim elemanıdır. Ayrıca $\mathbb{E}_0 = 0_M \circ \mathbb{E} \equiv (1_M + (-1_M)) \circ \mathbb{E} \equiv 1_M \circ \mathbb{E} + (-1_M \circ \mathbb{E}) \equiv \mathbb{E} + (-1_M \circ \mathbb{E})$ olup $-1_M \circ \mathbb{E}$, $\mathbb{E}$ genişlemesinin tersidir. Sonuç olarak $\text{Ext}_R(T, M)$ bir abel gruptur. $\square$

2.5.1. $Ext(-, -)$ grubunun fonktor yapısı

M ile T birer sol R -modül olsunlar. $M \rightarrow Ext(T, M)$ ile verilen $Ext : R-Mod \rightarrow Ab$ grubunu ve $\alpha : M \rightarrow M'$ modül homomorfizmasını alalım. $Ext(\alpha) = \alpha_*$ olmak üzere $\alpha_*(\mathbb{E}) = \alpha\mathbb{E}$ ile tanımlı $\alpha_* : Ext(T, M) \rightarrow Ext(T, M')$ dönüşümünü alalım. $\alpha(\mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2) = \alpha\mathbb{E}_1 + \alpha\mathbb{E}_2$ olduğundan α bir grup homomorfizmasıdır. Ayrıca $Ext(\alpha\beta) = (\alpha\beta)_* = \alpha_*\beta_* = Ext(\alpha)Ext(\beta)$ ve $Ext(I_T) = 1_{I_T}$ olup $Ext(T, \cdot)$ kovariant fonktordur. $Ext(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)_* = \alpha_* + \beta_* = Ext(\alpha) + Ext(\beta)$ olduğundan $Ext(T, \cdot)$ additif kovariant fonktordur.

M ve T birer sol R -modül olsunlar. $T \rightarrow Ext(T, M)$ ile verilen $Ext : R-Mod \rightarrow Ab$ grubunu ve $\alpha : T' \rightarrow T$ modül homomorfizmasını alalım.

$Ext(\alpha) = \alpha^*$ olmak üzere $\alpha^*(\mathbb{E}) = \mathbb{E}\alpha$ ile tanımlı $\alpha^* : Ext(T, M) \rightarrow Ext(T', M)$ dönüşümünü alalım. $\alpha : T'' \rightarrow T'$ ve $\beta : T' \rightarrow T$ birer modül homomorfizması ise $Ext(\alpha\beta) = (\alpha\beta)^* = \alpha^*\beta^* = Ext(\alpha)Ext(\beta)$ olur. Ayrıca $(\alpha\beta)^*(\mathbb{E}) = \mathbb{E}(\beta\alpha) = (\mathbb{E}\beta)\alpha = (\beta^*)\alpha = \alpha^*\beta^*$ ve $I_T : T \rightarrow T$ alınırsa $Ext(I_T) = I_T^*\mathbb{E}I_T \equiv \mathbb{E} = 1_{I_T}$ olduğundan $Ext(\cdot, M)$ additif kontravariant fonktordur.

2.6. Projektif, Serbest ve İnjektif Modüller

2.34 Tanım M, N ve P modüllerini alalım. Satırın tam dizi ve aşağıdaki diyagramın değişmeli olması durumunda, P 'ye M -projektif modül denir.

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & \swarrow h & \downarrow v & & \\ M & \xrightarrow{u} & N & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (2.25)$$

Bunu farklı bir şekilde ifade edecek olursak, yukarıdaki diyagramda u 'nun bir epimorfizma olması şartıyla, u ve v homomorfizmaları için $v = u \circ h$ eşitliğini sağlayacak şekilde bir $h : P \rightarrow M$ homomorfizması mevcutsa, P 'ye M -projektif denir. Yukarıda verilen diyagramda $M \xrightarrow{u} N \rightarrow 0$ satır tam dizisi keyfi olarak alınırsa, P modülü *projektif modül* olarak adlandırılır (Alizade ve Pancar, 1999).

2.24 Yardımcı Teorem $u_k : M_k \rightarrow S$ ($k \in K$) homomorfizmaları verilsin. Bu durumda, her $k \in K$ için $u_k = u \circ i_k$ eşitliğini sağlayacak şekilde bir tek $u : \bigoplus_{(k \in K)} M_k \rightarrow S$ homomorfizması mevcuttur (Alizade ve Pancar, 1999).

2.25 Sonuç $\{M_k\}_{k \in K}$ modüller topluluğu, S ve T birer modül olmak üzere, $u, u' : \bigoplus M_k \rightarrow S$ ve $v, v' : T \rightarrow \bigoplus M_k$ homomorfizmaları verilmiş olsun. Her $k \in K$ için $u \circ i_k = u' \circ i_k$ ise $u = u'$ 'dür. Her $k \in K$ için $p_k \circ v = p_k \circ v'$ ise $v = v'$ 'dür (Alizade ve Pancar, 1999).

2.26 Teorem $\{P_k\}_{k \in K}$ modüller topluluğu verildiğinde $P = \bigoplus_{k \in K} P_k$ eşitliği ile verilen P 'nin projektif modül olması için gerek ve yeter koşul her $k \in K$ için P_k 'ların projektif olmasıdır (Kasch, 1982).

Kanıt ($\implies$) $P = \bigoplus_{k \in K} P_k$ projektif modül ve $k \in K$ olmak üzere herhangi bir $u : K \longrightarrow L$ epimorfizması ve $v : P_k \longrightarrow L$ homomorfizması verilmiş olsun. $p_k : P \longrightarrow P_k$, k . izdüşüm ve $i_k : P_k \longrightarrow P$ gömme homomorfizması olarak verilsin. Aşağıda verilen diyagramı inceleyelim.

$$\begin{array}{ccccc}
 K & \xrightarrow{u} & L & \longrightarrow & 0 \\
 & \nwarrow e & \uparrow v & & \\
 & & P_k & & \\
 & \nearrow h & \downarrow p_k & \uparrow i_k & \\
 & & P & &
 \end{array} \quad (2.26)$$

P modülünün projektif olması gereğince $v \circ p_k : P \longrightarrow L$ homomorfizması için $v \circ p_k = u \circ h$ eşitliğini sağlayan bir $h : P \longrightarrow K$ homomorfizması mevcuttur. $e : P_k \longrightarrow K$ homomorfizmasını $e = h \circ i_k$ olarak tanımlarsak;

$$u \circ e = u \circ (h \circ i_k) = (u \circ h) \circ i_k = (v \circ p_k) \circ i_k = v \circ (p_k \circ i_k) = v \circ I_{P_k} = v \quad (2.27)$$

bulunur. O halde $u \circ e = v$ eşitliğini sağlayacak şekilde bir $e : P_k \longrightarrow K$ homomorfizması bulunduğuundan her $k \in K$ için P_k projektiftir.

($\Leftarrow$) Keyfi $u : K \longrightarrow L$ epimorfizmasını ve $v : P \longrightarrow L$ homomorfizmasını alalım.

$$\begin{array}{ccccc}
 K & \xrightarrow{u} & L & \longrightarrow & 0 \\
 & \nwarrow h & \uparrow v & & \\
 & & P & & \\
 & \nearrow h_k & \downarrow i_k & \uparrow & \\
 & & P_k & &
 \end{array} \quad (2.28)$$

$\forall k \in K$ için P_k modüllerinin projektif modül olması gereğince, $v \circ i_k = u \circ h_k$ eşitliğini sağlayacak şekilde bir $h_k : P_k \longrightarrow K$ homomorfizması mevcuttur. Yardımcı Teorem 2.24 gereğince $\forall k \in K$ için $h_k = h \circ i_k$ şeklinde bir $h : P \longrightarrow K$ homomorfizması vardır. $\forall k \in K$ için

$$v \circ i_k = u \circ h_k = u \circ (h \circ i_k) = (u \circ h) \circ i_k \quad (2.29)$$

bulunur. Buradan, Sonuç 2.25 gereğince $v = u \circ h$ eşitliğini sağlayacak şekilde bir $h : P \longrightarrow K$

homomorfizması var olup $P = \bigoplus_{k \in K} P_k$ projektiftir. $\square$

2.27 Teorem F modül olmak üzere $X = \{x_k \mid k \in K\} \subseteq F$ olarak verilsin. Bu durumda aşağıdaki verilen şartlar birbirine denktir.

- (i) $\forall a \in F$ elemanı, yalnızca sonlu sayıda r_k katsayısının sıfırdan farklı (ya da tamamı sıfır) olması koşuluyla, tek bir biçimde $\sum_{k \in K} r_k x_k$ olarak ifade edilebilir.
- (ii) $\forall k \in K$ için $f_k(r) = rx_k$ ile tanımlı $f_k : R \rightarrow Rx_k$ fonksiyonu izomorfizma olup $F = \bigoplus_{k \in K} Rx_k$ 'dir (Alizade ve Pancar, 1999).

2.35 Tanım Önceki teoremden belirtilen ve denk olarak verilen koşullardan herhangi birini sağlayan F modülüne *serbest modül*, $X = \{x_k \mid k \in K\}$ ile verilen X kümesine ise F modülünün *serbest üretenler kümesi* veya *tabanı* denir (Hungerford, 1973).

Her R halkası kendisi üzerinde, tabanı $\{1_R\}$ olan bir serbest modüldür. Her vektör uzayının bir tabana sahip olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla her vektör uzayı bir serbest modüldür.

2.28 Teorem Eğer R keyfi bir birimli halka ise, herhangi bir R -modül, bir serbest R -modülün homomorfik görüntüsüdür (Kasch, 1982).

2.29 Teorem R halka olsun. Bu takdirde, keyfi bir serbest R -modül projektiftir (Kasch, 1982).

Kanıt I herhangi bir indis kümesi ve $F = R^{(I)}$ serbest modülü verilsin. Teorem 2.26'dan R halkasının projektif olduğunu göstermek yeterlidir. $u : K \rightarrow L$ epimorfizması ve $v : R \rightarrow L$ homomorfizması verilsin. Bu durumda, R halkasının birim elemanı 1_R için, u epimorfizma olduğundan, $v(1_R) = u(k)$ eşitliğini sağlayan bir $k \in K$ elemanı mevcuttur. Buradan herhangi bir $s \in R$ için $h(s) = sk$ şeklinde tanımlanan $h : R \rightarrow K$ dönüşümü bir homomorfizmadır. Şimdi $u \circ h = v$ eşitliğini doğrulayalım. Her $s \in R$ için $v(s) = v(s1_R) = sv(1_R) = su(k) = u(sk) = (u \circ h)(s)$ olduğundan $v = u \circ h$ eşitliği elde edilir. Dolayısıyla F serbest modülü projektiftir. $\square$

2.30 Teorem Bir P modülü için aşağıdakiler denktir.

- (i) P projektif modüldür.
- (ii) $0 \rightarrow K \rightarrow L \rightarrow P \rightarrow 0$ biçimindeki tüm kısa tam diziler parçalanandır.
- (iii) P bir serbest modülün direkt toplam terimine izomorftur (Alizade ve Pancar, 1999).

Kanıt (i) $\implies$ (ii) $0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ tam dizisini alalım. Buradan $g : L \longrightarrow P$ bir epimorfizmadır. $1_P, P$ 'nin birim homomorfizması olmak üzere P 'nin projektifliğinden $g \circ k = 1_P$ eşitliğini sağlayacak şekilde bir $k : P \longrightarrow L$ homomorfizması vardır. O halde Teorem 2.12'den verilen kısa tam dizi parçalanmış kısa tam dizidir.

(ii) $\implies$ (iii) Her R -modül bir serbest modülün bölüm modülüne izomorf olduğu için bir $g : F \longrightarrow P$ epimorfizması ve F serbest modülü mevcuttur. Böylece kabulden $0 \longrightarrow \text{Çek}(g) \xrightarrow{i} F \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ dizisi parçalanmış kısa tam dizidir. Teorem 2.12'den $F \cong \text{Çek}(g) \oplus P$ 'dir. Dolayısıyla P, F 'nin direkt toplam terimidir.

(iii) $\implies$ (i) Teorem 2.26 ve Teorem 2.29'dan görülür. $\square$

2.36 Tanım R bir halka ve M bir R -modül olarak verilsin. $M = K + L$ eşitliğini gerçekleyen her K ile L alt modülleri için $\text{Gör}(u) \leq K$ ve $\text{Gör}(1_M - u) \leq L$ olacak şekilde bir $u \in \text{End}(M)$ elemanı mevcutsa, M modülüne π -projektif modül denir (Wisbauer, 1991).

2.31 Teorem M bir projektif modül olsun. Bu durumda M π -projektiftir (Kasch, 1982).

Kanıt M bir projektif modül, K ile L, M 'nin alt modülleri olarak verilsin ve $M = K + L$ eşitliği sağlansın. Buradan $\pi : M \longrightarrow \frac{M}{L}$ doğal homomorfizmasının $\pi|_K : K \longrightarrow \frac{M}{L}$ kısıtlanması bir epimorfizma olup M 'nin projektif olması gereğince

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ & \downarrow \pi & \\ K & \xrightarrow{\pi|_K} & \frac{M}{L} \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow h \\ \nwarrow \end{array} \quad (2.30)$$

diyagramı değişmelidir. Yani $\pi|_K \circ h = \pi$ eşitliğini sağlayacak şekilde $h : M \longrightarrow K$ homomorfizması vardır ve $\text{Gör}(h) \leq K$ olduğu aşıkardır. Herhangi bir $x \in \text{Gör}(1_M - h)$ elemanını alalım. Buradan $t \in M$ için $x = t - h(t)$ yazılabilir. Dolayısıyla

$$\pi(x) = \pi(t - h(t)) = \pi(t) - (\pi \circ h)(t) = \pi(t) - (\pi|_K \circ h)(t) = \pi(t) - \pi(t) = 0 \quad (2.31)$$

olup $x \in \text{Çek}(\pi) = L$ elde edilir. Böylece $\text{Gör}(1_M - h) \leq L$ olup M π -projektiftir. $\square$

2.37 Tanım I modül olmak üzere, verilen her $g : S \longrightarrow T$ monomorfizması ve $f : S \longrightarrow I$ homomorfizması için, $f = h \circ g$ koşulunu sağlayan bir $h : T \longrightarrow I$ homomorfizması buluna-

biliyorsa, I modülüne T -injektiftir adı verilir.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & S & \xrightarrow{g} & T \\ & & \downarrow f & \swarrow h & \\ & & I & & \end{array} \quad (2.32)$$

Yukarıdaki diyagramda $0 \longrightarrow S \xrightarrow{g} T$ satır tam dizisi keyfi bir satır tam dizi olarak alınırsa I 'ya *injektif modül* denir (Alizade ve Pancar, 1999).

2.32 Sonuç Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- (i) I injektif ve $I \cong M$ ise M injektiftir.
- (ii) P projektif ve $P \cong N$ ise N projektiftir (Kasch, 1982).

2.38 Tanım R bir tamlık bölgesi, M bir R -modül ve $s \in M$ olarak verilsin. Eğer her $0 \neq r \in R$ için $s = rn$ eşitliğini sağlayacak şekilde bir $n \in M$ elemanı mevcutsa, o zaman $s \in M$ elemanına *bölünebilir* denir. M 'nin tüm elemanları bölünebilir olduğunda, M *bölünebilir modül* olarak adlandırılır. Bunu bir başka şekilde ifade edecek olursak, her $r \in R$ ($r \neq 0$) için $M = rM$ eşitliği varsa M 'ye *bölünebilir modül* denir (Sharpe ve Vámos, 1972).

2.39 Tanım R bir tamlık bölgesi ve M bir R -modül olarak verilsin. Eğer $t \in M$ için $st = 0$ eşitliğini sağlayan bir $s \in R$ varsa, t elemanına M 'nin bir *burulmalı elemanı* denir. M 'nin tüm burulma elemanlarından oluşan küme için $T(M)$ gösterimi kullanılır. Bu küme, M 'nin bir alt modülü olup *burulma alt grubu* olarak adlandırılır. $T(M) = M$ eşitliği mevcutsa M 'ye bir *burulma modülü*, $T(M) = 0$ eşitliği mevcutsa M 'ye bir *burulmasız modül* denir (Alizade ve Pancar, 1999).

2.40 Tanım G modül ve $M \leq G$ olarak verilsin. Bu durumda G modülüne M 'nin *genişlemesi* denir (Zöschinger, 1974).

2.33 Teorem (Baer Kriteri) R halka ve M bir R -modül olarak verilsin. M modülünün injektif olması için gerek ve yeter koşul her $J \subseteq R$ sol ideali için $u : J \longrightarrow M$ homomorfizmasının $v : R \longrightarrow M$ homomorfizmasına genişletilebilmesidir (Alizade ve Pancar, 1999).

2.34 Yardımcı Teorem M bir injektif modül olsun. Bu takdirde M 'nin her direkt toplam terimi de injektiftir (Alizade ve Pancar, 1999).

2.35 Teorem (Gömülme Teoremi) R halkası birimli bir halka olarak verilsin. Bu durumda

her R -modül bir injektif R -modül içine gömülebilirdir (Kasch, 1982).

2.36 Teorem M bir modül olmak üzere M modülünün injektif olması için gerek ve yeter şart M 'nin kendisini içeren her modülde direkt toplam terimi olmasıdır (Sharpe ve Vámos, 1972).

Kanıt ($\implies$) M injektif modül ve $M \leq U$ olarak verilsin. Bu durumda i içirme fonksiyonu ve I_M birim dönüşüm olmak üzere aşağıda verilen diyagram değişmelidir.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{i} & U \\ & & \downarrow I_M & \swarrow \alpha & \\ & & M & & \end{array} \quad (2.33)$$

$u \in U$ keyfi elemanını alalım. Bu durumda $\alpha(u) \in M$ olup diyagramın değişmeliliği gereğince $\alpha \circ i = I_M$ eşitliği sağlandığından $\alpha(u) = \alpha(\alpha(u))$ olur. Buradan $u - \alpha(u) \in \text{Çek}(\alpha)$ olur. Bu durumda $u = \alpha(u) + (u - \alpha(u)) \in M + \text{Çek}(\alpha)$ olup $U \leq M + \text{Çek}(\alpha) \leq U$ 'dan $U = M + \text{Çek}(\alpha)$ elde edilir. $u \in M \cap \text{Çek}(\alpha)$ keyfi elemanını alalım. $\alpha \circ i = I_M$ eşitliği sağlandığından $u = \alpha(u) = 0$ olup $u = 0$ bulunur. Böylece $U = M \oplus \text{Çek}(\alpha)$ eşitliği elde edilir.

($\Leftarrow$) Teorem 2.35 gereğince M modülü, bir injektif U R -modülü içine gömülebilirdir (M , bir injektif modülün alt modülüdür). Yardımcı Teorem 2.34'ten ve hipotezden M , injektif modüldür. $\square$

2.37 Teorem R tamlık bölgesi olsun. Bu durumda, her injektif R -modül bölünebilirdir. Tersine; S modülü bölünebilir ve burulmasız ise, injektiftir (Sharpe ve Vámos, 1972).

Kanıt S injektif R -modül $0_R \neq r \in R$ ve $a \in S$ olsun. Bu takdirde Teorem 2.33'ten her $s \in R$ için $f(sr) = sa$ ile tanımlanmış $f : Rr \longrightarrow S$ homomorfizması için

$$\begin{array}{ccc} Rr & \xrightarrow{i} & R \\ \downarrow f & \swarrow u & \\ S & & \end{array} \quad (2.34)$$

diyagramı değişmeli olur. Buradan $s = 1_R$ için $a = f(r) = u(r) = ru(1_R)$ olduğundan S bölünebilirdir. Tersine; S modülü bölünebilir ve burulmasız olsun. I, R 'nin herhangi bir ideali olmak üzere,

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{i} & R \\ \downarrow f & \swarrow u & \\ S & & \end{array} \quad (2.35)$$

diyagramı verilsin. $0 \neq s \in I$ için S bölünebilir olduğundan $f(s) = sa$ eşitliğini sağlayacak şekilde bir $a \in M$ vardır. O halde her $k \in I$ için

$$sf(k) = f(sk) = f(ks) = kf(s) = k(sa) = s(ka) \quad (2.36)$$

olup S 'nin burulmasız olması gereğince $f(k) = ka$ 'dır. Her $r \in R$ için $u(r) = ra$ ile tanımlanan $u : R \rightarrow S$ bir homomorfizmadır. Aynı zamanda $u \circ i = f$ olduğu aşikardır. Böylece Teorem 2.33'ten S injektif modüldür. $\square$

2.38 Önerme $\{E_i\}_{i \in I}$ R -modüller topluluğu olsun. Bu durumda, $\prod_{i \in I} E_i$ 'nin injektif olması için gerek ve yeter koşul verilen her $i \in I$ için E_i 'nin injektif olmasıdır (Alizade ve Pancar, 1999).

2.39 Sonuç $\{E_i\}_{i \in I}$ R -modüller topluluğu verilsin. Bu durumda,

- (i) $\bigoplus_{i \in I} E_i$ injektif ise, $\forall i \in I$ için E_i injektiftir.
- (ii) I indis kümesi sonlu olmak üzere $\forall i \in I$ için E_i injektif ise, $\bigoplus_{i \in I} E_i$ injektiftir (Sharpe ve Vámos, 1972).

2.7. Basit ve Yarı-Basit Modüller

2.41 Tanım R bir halka ve M sıfırdan farklı bir R -modül olarak verilsin. M modülünün aşikar alt modülleri dışında başka bir alt modülü bulunmuyorsa, M 'ye *basit modül* denir (Lam, 1991).

Örneğin $p \in \mathbb{P}$ olmak üzere $\mathbb{Z}_p$ $\mathbb{Z}$ -modülü basittir. K cisim olmak üzere ${}_K K$ 'nin alt modülleri sadece $\{0\}$ ve K olup ${}_K K$ basittir.

2.40 Önerme R halka ve M basit R -modül olarak verilsin. $\{0\}$ M 'nin maksimal alt modülüdür ve her $0 \neq x \in M$ için $Rx = M$ olup M devirlidir (Kasch, 1982).

Kanıt M basit olduğu için, sadece 0 alt modülünü içeren M 'nin kendisi dışında bir alt modülü yoktur. Bu nedenle, tanım gereğince 0 , M 'de maksimal alt modüldür. Herhangi bir $0 \neq x \in M$ elemanı için Rx bir alt modül olup, $x \in Rx$ olduğu görülür. Böylece $0 \neq Rx$ ve M 'nin basit olması gereğince $Rx = M$ eşitliği sağlanır. Bu ise M 'nin devirli olduğu anlamına gelir. $\square$

2.41 Teorem R bir halka olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) R bölme halkasıdır.

(ii) ${}_R R$ basit modüldür.

(iii) R_R basit sağ R -modüldür (Kasch, 1982).

Kanıt (i) $\implies$ (ii) $0 \neq I \subseteq R$ sol ideali verilsin. $0 \neq x \in I$ elemanı vardır ve I 'nin sol ideal olması gereğince $x \in R$ 'dir ve R 'nin bölme halkası olması gereğince $x^{-1}x = 1_R \in I = R$ bulunur.

(ii) $\implies$ (i) $0 \neq x \in R$ alalım. $0 \neq Rx \subseteq R$ sol ideal ve ${}_R R$ 'nin basit modül olması sebebiyle $Rx = I = R$ olup $Rx = R$ 'dir. $1_R \in R = Rx$ için $1_R = yx$ eşitliğini sağlayacak şekilde $y \in R$ vardır. $0 \neq Ry = R$, $1_R = zy$ eşitliğini sağlayacak şekilde $z \in R$ vardır. Buradan $z = z1_R = z(yx) = (zy)x = 1_R x = x$ olup buradan $yx = 1_R = xy$ elde edilir. Sonuç olarak, R 'nin sıfırdan farklı her elemanı terslenebilirdir. Bu ise R 'nin bir bölme halkası olduğu anlamına gelir.

(i) $\iff$ (iii) Benzer şekilde yapılır. □

2.42 Teorem M modül ve $N \leq M$ olarak verilsin. N 'nin M 'de maksimal olması için gerek ve yeter koşul $\frac{M}{N}$ 'nin basit olmasıdır (Wisbauer, 1991).

Kanıt ($\implies$) N, M 'de bir maksimal alt modül ve $\frac{L}{N} \leq \frac{M}{N}$ olarak verilsin. Burada $N \leq L$ 'dir. N 'nin maksimal alt modül olması gereğince $N = L$ veya $M = L$ 'dir. Yani $\frac{M}{N}$ 'nin alt modülleri $\frac{N}{N}$ veya $\frac{M}{N}$ 'dir. Bundan dolayı $\frac{M}{N}$ bölüm modülü basittir.

($\impliedby$) $\frac{M}{N}$ basit modül olarak verilsin. $N < L \leq M$ sağlanacak şekilde L alt modülünü alalım. Buradan $\frac{N}{N} < \frac{L}{N} \leq \frac{M}{N}$ olur. $\frac{M}{N}$ 'nin basitliğinden $\frac{L}{N} = \frac{M}{N}$ olup $L = M$ veya $L = N$ dir. O halde N, M 'nin maksimal alt modülüdür. □

2.42 Tanım R halka ve M bir R -modül olarak verilsin. Eğer M 'nin her alt modülü M 'de bir direkt toplam terimi ise, M 'ye *yarı-basit modül* denir (Lam, 1991).

$\mathbb{Z}_4$ $\mathbb{Z}$ -modülünü alalım. $N = \{\bar{0}, \bar{2}\} \leq \mathbb{Z}_4$ alt modülünün, $\mathbb{Z}_4$ 'te direkt toplam terimi olmasından ötürü $\mathbb{Z}_4$ yarı-basit değildir.

$\mathbb{Z}_6$ $\mathbb{Z}$ -modülü verilsin. $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \oplus \{\bar{0}, \bar{3}\}$ olup $\mathbb{Z}_6$ yarı-basit $\mathbb{Z}$ -modüldür.

M modülündeki basit alt modüllerin tümünün toplamı M 'nin *desteği* olarak adlandırılır ve M 'nin desteği için $Soc(M)$ gösterimi kullanılır. Alt modüllerin boş ailesinin toplamı sıfır alt modülü olduğundan eğer M 'nin basit alt modülü yoksa, $Soc(M) = 0$ olur (Wisbauer, 1991).

Tanım 2.41 ve Tanım 2.42 dikkate alınırsa $\{0\}$ yarı-basittir fakat basit değildir.

2.43 Yardımcı Teorem M sıfır olmayan keyfi bir yarı-basit modül olarak verilsin. Bu durumda M basit bir alt modül içerir (Lam, 1991).

Kanıt m , M 'nin sıfırdan farklı sabit bir elemanı olsun. Zorn Yardımcı Teoremi gereğince $m \notin N$ olacak şekilde M 'nin bir maksimal N alt modülü vardır. Hipotez gereğince N alt modülü M 'nin direkt toplam terimidir ve $M = N \oplus K$ eşitliğini sağlayacak şekilde K alt modülü mevcuttur. Teorem 2.42 gereğince $\frac{M}{N}$ basit modüldür. Böylece Teorem 2.9'dan K basit modüldür. $\square$

2.44 Yardımcı Teorem $M = Soc(M)$ olarak verilsin. Bu durumda,

- (i) M yarı-basittir.
- (ii) M 'nin her alt modülü basit alt modüllerin direkt toplamıdır (Alizade ve Pancar, 1999).

Kanıt $M = Soc(M)$ olduğundan $\sum_{i \in K} M_i$ basit modüllerin bir toplamı olarak yazılabilir.

(i) U , M 'nin bir alt modülü olarak verilsin. $\Gamma = \{L \subseteq K \mid U + (\sum_{l \in L} M_l) = U \oplus (\oplus_{l \in L} M_l)\}$ kümesini " $\subseteq$ " alt küme olma bağıntısıyla alarak bir kısmi sıralı küme elde ederiz. $\emptyset \in \Gamma$ olması gereğince $\Gamma \neq \emptyset$ 'dir. Zorn Yardımcı Teoremi'ni uygulayabilmek için keyfi bir $\Lambda \subseteq \Gamma$ zincirini alalım. $L_0 = \cup_{L \in \Lambda} L \in \Gamma$ olduğunu gösterelim.

$$u + m_{i_1} + \dots + m_{i_n} = 0 \quad (2.37)$$

olacak şekilde $i_1, i_2, \dots, i_n \in L_0; u \in U, m_{i_t} \in M_{i_t} (t = 1, 2, \dots, n)$ mevcut ise, Λ 'nın bir zincir olmasından ötürü $i_1, i_2, \dots, i_n$ indislerini içeren bir $L \in \Gamma$ vardır. Böylece

$$u = m_{i_1} = \dots = m_{i_n} = 0 \quad (2.38)$$

dır. Bundan dolayı $L_0 \in \Gamma$ 'dir. L_0 'ın Λ 'nın bir üst sınırı olduğu aşıkardır. Zorn Yardımcı Teoremi'nden Γ 'nin bir J maksimal elemanı mevcuttur. $N = U \oplus (\oplus_{j \in J} M_j)$ olarak verilsin. Herhangi bir $k \in K$ alalım. J 'nin maksimal olması gereğince $N + M_k = N \oplus M_k$ eşitliği sağlanamaz. Dolayısıyla $N \cap M_k \neq 0$ 'dir. M_k basit olduğundan $N \cap M_k = M_k$, yani $M_k \subseteq N$ 'dir. O halde $M = \sum_{k \in K} M_k = N$ 'dir.

(ii) $U \leq M$ olarak verilsin. (i)'den dolayı $M = U \oplus (\oplus_{j \in J} M_j)$ eşitliği sağlanacak şekilde $J \subseteq K$ alt kümesi bulunur. Burada (i)'yi $\oplus_{j \in J} M_j$ alt modülüne (U 'nun yerine) uygulayarak $M = (\oplus_{i \in I} M_i) \oplus (\oplus_{j \in J} M_j)$ elde ederiz. O halde $U \cong \frac{M}{(\oplus_{j \in J} M_j)} \cong \oplus_{i \in I} M_i$ 'dir. $\square$

2.45 Teorem M bir sol R -modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) Her $U \leq M$ için $U = Soc(U)$ 'dur.
- (ii) $M = Soc(M)$ 'dir.
- (iii) M basit alt modüllerinin direkt toplamıdır.
- (iv) M yarı-basit modüldür (Alizade ve Pancar, 1999).

Kanıt (i) $\implies$ (ii) Açıktır.

(ii) $\implies$ (iii) Yardımcı Teorem 2.44 (i)'nin ispatında $U = 0$ alınırsa $M = \bigoplus_{j \in I} M_j$ eşitliği sağlanır.

(iii) $\implies$ (iv) Yardımcı Teorem 2.44 (i)'den görülür.

(iv) $\implies$ (i) Keyfi bir $U \leq M$ alt modülü için $Soc(U) \leq U$ olduğu aşıkardır. (iv) gereğince $M = Soc(U) \oplus N$ eşitliğini sağlayacak şekilde bir $N \leq M$ mevcuttur. Modüler kuraldan $U = (Soc(U) + N) \cap U = Soc(U) + (N \cap U)$ elde edilir. Burada iki durum söz konusudur:

1.durum. $N \cap U = 0$ 'dır. Böylece $U = Soc(U)$ 'dur.

2.durum. $N \cap U \neq 0$ 'dır. $0 \neq n \in N \cap U$ elemanını alalım. $Rn \leq N \cap U$ alt modülünün n 'yi içermeyen tüm alt modülleri kümesini Γ ile ifade edelim: $\Gamma = \{V \leq Rn \mid n \notin V\}$ kümesi " $\leq$ " alt modül olma bağıntısıyla, Γ kısmi sıralı kümeye dönüşür. En azından $0 \in \Gamma$ olduğundan $\Gamma \neq \emptyset$ 'dir. Zorn Yardımcı Teoremi'ni uygulamak için Γ kümesinde bir $\{V_t\}_{t \in T}$ zincirini alalım. Buradan $V_0 = \bigcup_{t \in T} V_t \leq Rn$ 'dir ve $n \notin V_0$ olduğundan $V_0 \in \Gamma$ 'dir. Zorn Yardımcı Teoremi'nden Γ kümesinde bir W maksimal elemanı mevcuttur. Ayrıca W, Rn 'nin de maksimalidir. Çünkü, $W \leq W^* \leq Rn$ olacak şekilde bir W^* alt modülü aldığımızda, W, Γ 'da maksimal olduğundan $W^* \notin \Gamma$ 'dir. Dolayısıyla $n \in W^*$ olup $W^* = Rn$ bulunur.

Şimdi (iv) gereğince W, M 'de dolayısıyla Rn 'de direkt toplam terimi olup $Rn = W \oplus X$ eşitliğini sağlayacak şekilde bir $X \leq Rn \leq N \cap U$ alt modülü vardır. W 'nin, Rn 'de maksimal alt modül olması sebebiyle Teorem 2.42 gereği $\frac{Rn}{W} \neq 0$ bölüm modülü basittir. O halde buna izomorf olan $X \neq 0$ alt modülü de basittir. Buradan $X \subseteq Soc(U) \cap (N \cap U) = 0$ çelişkisi oluşur. Bundan dolayı burada sadece 1. durum olur.

Yukarıda ifade edilen teoremi dikkate aldığımızda, yarı-basit modüllerin, basit modüllerin direkt toplamı olması nedeniyle, her basit modülün yarı-basit olduğunu ifade edebiliriz.

Tanım gereğince $Soc(M)$, basit alt modüllerin toplamı olarak yarı-basittir. N, M 'nin yarı-basit alt modülü olarak verilsin. Bu durumda $N, i : N \longrightarrow M$ içirme dönüşümünün görüntü-

sü olarak $Soc(M)$ 'de içerilir. Yani $Soc(M)$, M 'nin en büyük yarı-basit alt modülüdür (Kasch, 1982). $\square$

2.46 Sonuç Aşağıda verilen ifadeler sağlanır.

- (i) Bir yarı-basit modülün tüm homomorfik görüntüleri yarı-basittir.
- (ii) Yarı-basit modüllerin toplamı yarı-basittir (Kasch, 1982).

Kanıt (i) M 'nin yarı-basit modül ve $f : M \rightarrow N$ 'nin bir epimorfizma olduğunu varsayalım. Teorem 2.45 gereğince M 'nin alt modüllerinin her biri, bir direkt toplam terimidir. Dolayısıyla $\text{Çek}(f)$, M 'nin bir direkt toplam terimidir. O halde $M = \text{Çek}(f) \oplus K$ eşitliğini sağlayacak şekilde M 'nin bir K direkt toplam terimi mevcuttur. Buradan, $\frac{M}{\text{Çek}(f)} \cong K$ 'dir. $f : M \rightarrow N$ bir epimorfizma olduğundan $\frac{M}{\text{Çek}(f)} \cong N$ olup buradan $N \cong K$ olur. Yardımcı Teorem 2.44 gereğince M yarı-basit modülünün K alt modülü de yarı-basit olup buna izomorf olan N R -modülü de yarı-basittir.

(ii) Teorem 2.45'ten yarı-basit modüllerin basit modüllerin toplamı olması gereğince, onların toplamı da basit modüllerden oluşur. Böylece, yarı-basit modüllerin toplamı yine yarı-basit olur. $\square$

Şimdi sol yarı-basit halka kavramını karakterize edebiliriz.

2.47 Teorem Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) Her sol R -modül yarı-basittir.
- (ii) Her sonlu üretilmiş sol R -modül yarı-basittir.
- (iii) Her devirli sol R -modül yarı-basittir.
- (iv) ${}_R R$ yarı-basittir (Lam, 1991).

Kanıt (i) $\implies$ (ii) $\implies$ (iii) $\implies$ (iv) Açıktır.

(iv) $\implies$ (i) M bir R -modül ve $m \in M$ olarak verilsin. Verilen $\forall r \in R$ için $f(r) = rm$ ile tanımlanan $f : R \rightarrow Rm$ homomorfizması bir epimorfizma olup Homomorfizma teoremi gereğince $\frac{R}{\text{Çek}(f)} \cong Rm$ 'dir. Sonuç 2.46 (i)'den Rm yarı-basit R -modül olup Sonuç 2.46 (ii) gereğince $M = \sum_{m \in M} Rm$ olduğundan M yarı-basit modüldür. $\square$

Üstteki son teoremden yer alan şartlardan herhangi birini gerçekleyen R halkasına *sol yarı-basit halka* denir (Lam, 1991).

2.48 Önerme Bir P sol R -modülünün projektif olması için gerek ve yeter koşul bir serbest sol R -modülün direkt toplam terimi olmasıdır (Lam, 1991).

Kanıt ($\implies$) P kümesi üzerinde tanımlı serbest sol R -modül F olsun. Buradan, $\forall x \in P$ elemanı için $f(x) = x$ eşitliğini sağlayacak şekilde $f : F \rightarrow P$ epimorfizması vardır. Buradan $x_i \in P$ ve $r_i \in R$ keyfi elemanları için $f(\sum r_i x_i) = \sum r_i x_i$ 'dir. $K = \text{Çek}(f)$ olması koşuluyla $0 \rightarrow \text{Çek}(f) \rightarrow F \rightarrow P \rightarrow 0$ kısa tam dizisini alalım. P projektif olduğundan

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \downarrow 1_P & \\ F & \xrightarrow{f} & P \rightarrow 0 \end{array} \quad (2.39)$$

$f \circ h = 1_P$ eşitliğini sağlayacak şekilde $h : P \rightarrow F$ homomorfizması mevcuttur. Buradan $f \circ h = 1_P$ olduğundan $F = \text{Çek}(f) \oplus \text{Gör}(h) = K \oplus \text{Gör}(h) = K \oplus h(P) = K \oplus P$ elde edilir. Dolayısıyla P, F serbest sol R -modülünün direkt toplam terimidir.

($\impliedby$) P , bir F serbest sol R -modülünün direkt toplam terimi olsun. Bu takdirde, $i : P \rightarrow F$ içermeye dönüşümü monomorfizmadır. P sol R -modülünün projektif olduğunu göstermek için $f \circ h = 1_P$ eşitliğini sağlayacak şekilde $h : P \rightarrow F$ ve $f : F \rightarrow P$ homomorfizmalarını alalım. $f \circ h = 1_P$ izomorfizma olduğundan h homomorfizma ve f epimorfizmadır. F serbest sol R -modülü, S kümesi tarafından üretilsin. $k : F \rightarrow M$ olmak üzere $\forall x \in S$ elemanı için $(g \circ k(x)) = (\alpha \circ f)(\sum r_i x_i)$ olur. Böylece

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{f} & P \\ \downarrow k & & \downarrow \alpha \\ M & \xrightarrow{g} & N \rightarrow 0 \end{array} \quad (2.40)$$

diyagramı değişmeli olup $k \circ i : P \rightarrow M$ ve $g \circ (k \circ h) = (g \circ k) \circ h = (\alpha \circ f) \circ h = \alpha \circ (f \circ h) = \alpha \circ 1_P = \alpha$ olacak şekilde $k \circ h : P \rightarrow M$ homomorfizması mevcut olduğundan P projektiftir. $\square$

Bu önermeden hareketle, şimdi (sol) yarı-basit halka sınıfını homolojik açıdan karakterize edebiliriz.

2.49 Teorem Bir R halkası verilsin. R üzerinde aşağıda verilenler denktir.

- (i) R sol yarı-basittir.

(ii) Her sol R -modül projektiftir.

(iii) Her sonlu üretilmiş sol R -modül projektiftir.

(iv) Her devirli sol R -modül projektiftir (Lam, 1991).

Kanıt (i) $\implies$ (ii) M keyfi bir sol R -modül olarak verilsin. Λ , keyfi bir indis kümesi olmak üzere bir $\psi : R^{(\Lambda)} \rightarrow M$ epimorfizması mevcuttur. $R^{(\Lambda)}$ projektif ve aynı zamanda hipotez gereğince yarı-basit olup $R^{(\Lambda)} = \text{Çek}(\psi) \oplus K$ eşitliğini sağlayacak şekilde $K \leq R^{(\Lambda)}$ alt modülü mevcuttur. Önerme 2.48'den K projektif olup $K \cong \frac{R^{(\Lambda)}}{\text{Çek}(\psi)} \cong M$ projektiftir.

(ii) $\implies$ (iii) $\implies$ (iv) Açıktır.

(iv) $\implies$ (i) Herhangi bir $I \subseteq R$ sol ideali verilsin. (iv)'ten $\frac{R}{I}$ sol R -modülü projektiftir.

$$\begin{array}{ccc} & \frac{R}{I} & \\ & \downarrow I_{\frac{R}{I}} & \\ R & \xrightarrow{\pi} & \frac{R}{I} \longrightarrow 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \alpha \\ \end{array} \quad (2.41)$$

$\pi \circ \alpha = I_{\frac{R}{I}}$ eşitliğini sağlayacak şekilde $\alpha : \frac{R}{I} \rightarrow R$ homomorfizması vardır. Bu ise, Teorem 2.12 gereği aşağıda verilen kısa tam dizisinin parçalanabilir olduğu anlamına gelir.

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} R \xrightarrow{\pi} \frac{R}{I} \longrightarrow 0 \quad (2.42)$$

O halde $I \oplus K =_R R$ olacak şekilde $K \leq R$ sol ideali mevcut olup ${}_R R$ yarı-basittir. $\square$

2.50 Teorem Bir R halkası üzerinde aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) R sol yarı-basittir.

(ii) Her sol R -modül injektiftir (Lam, 1991).

Kanıt (i) $\implies$ (ii) Teorem 2.47 gereğince tüm sol R -modüller yarı-basittir. M keyfi bir modül ve $M \subseteq S$ olarak verilsin. Teorem 2.47 gereğince S yarı-basit olup $M \oplus T = S$ olacak şekilde $T \leq S$ alt modülü vardır. O halde Teorem 2.36'dan M injektiftir.

(ii) $\implies$ (i) $I \subseteq R$ sol ideal olsun. (ii) gereğince I injektif R -modül olup Yardımcı Teorem 2.34'ten ${}_R R = I \oplus T$ olacak şekilde $T \leq R$ sol ideali vardır. Böylece ${}_R R$ sol yarı-basittir. $\square$

2.43 Tanım M bir sol R -modül olmak üzere sol R -modüllerin $0 \longrightarrow M \longrightarrow S \longrightarrow T \longrightarrow 0$

tam dizisi için $0 \longrightarrow D \otimes M \longrightarrow D \otimes S \longrightarrow D \otimes T \longrightarrow 0$ tam dizisi elde edilebiliyorsa, D modülüne *düz modül* denir (Larsen ve McCarthy, 1971).

2.51 Yardımcı Teorem R bir değişmeli halka, S basit R -modül olarak verilsin. Bu durumda S 'nin düz modül olması için gerek ve yeter koşul S 'nin injektif olmasıdır (Ware, 1971).

2.52 Teorem R halka ve M projektif R -modül olarak verilsin. Bu takdirde M düz modüldür (Larsen ve McCarthy, 1971).

2.44 Tanım R halka ve M bir sol R -modül olarak verilsin. Eğer R 'nin her J ideali için $JN = N \cap JM$ eşitliği sağlanıyor ise N 'ye M 'nin *saf alt modülü* denir. Eğer sol R -modüllerin $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow K \longrightarrow 0$ dizisi için $0 \longrightarrow P \otimes_R M \longrightarrow P \otimes_R N \longrightarrow P \otimes_R K \longrightarrow 0$ tam dizisi elde ediliyorsa, bu diziye *saf tam dizi* denir (Fuller ve Anderson, 1992).

2.8. Büyük Alt Modüller ve Singüler Modüller

2.45 Tanım M bir R -modül ve $0 \neq S \leq M$ olarak verilsin. Her $0 \neq T \leq M$ için $S \cap T \neq 0$ oluyorsa, yani, $S \cap T = 0$ olması durumu $T = 0$ olması ile mümkün oluyorsa, S 'ye M 'nin *büyük (essential) alt modülü* denir. S M 'nin büyük alt modülü ise bu, $S \trianglelefteq M$ ile ifade edilir. Burada M 'ye de S 'nin *büyük genişlemesi* denir (Fuller ve Anderson, 1992).

$\mathbb{Z}$ 'nin sıfırdan farklı her alt modülü büyük alt modüldür. Keyfi $0 \neq A \leq \mathbb{Z}$ alt modülünü alalım. Bu durumda $A = n\mathbb{Z}$ olacak şekilde $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ vardır. $B \leq \mathbb{Z}$ için $A \cap B = 0$ verilsin. Eğer $B \neq 0$ olursa, $B = b\mathbb{Z}$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir b tamsayısı vardır. Buradan $0 \neq nb \in A \cap B = 0$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde $B = 0$ olur. Dolayısıyla $A \trianglelefteq \mathbb{Z}$ olur. Bu ise $\mathbb{Z}$ 'nin sıfırdan farklı her alt modülünün büyük alt modül olduğu anlamına gelir.

2.53 Önerme S ve T , M 'nin alt modülleri olarak verilsin. Aşağıdakiler sağlanır.

(i) $T \trianglelefteq M$ olması için gerek ve yeter şart her $0 \neq m \in M$ için $T \cap Rm \neq 0$ olmasıdır.

(ii) $S \leq T$ verilsin. $S \trianglelefteq M$ olması için gerek ve yeter şart $S \trianglelefteq T$ ve $T \trianglelefteq M$ olmasıdır.

(iii) Eğer $T \trianglelefteq M$ ise $T \cap S \trianglelefteq S$ 'dir.

(iv) $S \trianglelefteq M$ ve $T \trianglelefteq M$ olması için gerek ve yeter şart $T \cap S \trianglelefteq M$ olmasıdır.

(v) $S \subset T$ verilsin. Eğer $\frac{T}{S} \trianglelefteq \frac{M}{S}$ ise $T \trianglelefteq M$ 'dir (Huynh, Dung, Smith ve Wisbauer, 1994).

2.54 Önerme R bir halka ve $B(R)$, R 'nin tüm büyük ideallerinin kümesi olarak verilsin. Bu

takdirde;

(i) $R \in B(R)$ 'dir.

(ii) Eğer $I \leq J \leq R$ ve $I \in B(R)$ ise $J \in B(R)$ 'dir.

(iii) Eğer $I, J \in B(R)$ ise $I \cap J \in B(R)$ 'dir.

(iv) Eğer $I \in B(R)$ ve $r \in R$ ise $r^{-1}I \in B(R)$ 'dir (Goodearl, 1976).

2.46 Tanım $f : M \longrightarrow N$ monomorfizma olmak üzere, $Gör(f) \trianglelefteq N$ ise, f homomorfizmasına *büyük monomorfizma* denir (Kasch, 1982).

2.47 Tanım M modül ve I injektif modül olsun. I 'ya, $f : M \longrightarrow I$ büyük monomorfizması ile birlikte M 'nin *injektif bürümü* denir. M 'nin injektif bürümü için $E(M)$ gösterimi kullanılır (Wisbauer, 1991).

2.48 Tanım M bir R -modül olsun. $T \leq M$ alt modülü M 'de bir öz büyük genişlemeye sahip değilse $T \leq M$ alt modülüne M 'de *kapalıdır* denir. Yani, eğer $T \trianglelefteq S$ olacak şekilde $S \leq M$ alt modülü alınırsa $T = S$ 'dir (Huynh ve diğerleri, 1994).

2.49 Tanım M bir R -modül olsun. $S \cap T = 0$ ve S bu özelliğe göre maksimal ise $S \leq M$ alt modülüne $T \leq M$ alt modülünün *tamlayanı* denir (Huynh ve diğerleri, 1994).

2.55 Önerme M bir R -modül ve $K \subset L$ olmak üzere L , K ve N M 'nin alt modülleri olarak verilsin. Bu takdirde,

(i) $N \trianglelefteq H$ olacak şekilde, M 'nin bir kapalı H alt modülü mevcuttur.

(ii) K alt modülünün M 'de kapalı olması için gerek ve yeter koşul $K \subset B$ olacak şekilde $B \trianglelefteq M$ verildiğinde $\frac{B}{K} \trianglelefteq \frac{M}{K}$ olmasıdır (Huynh ve diğerleri, 1994).

2.56 Önerme U bir modül ve $S \leq T \leq U$ olacak şekilde U 'nun S ve T alt modüllerini alalım. Eğer S , U 'da bir tamlayan ise S , T 'de tamlayandır (Huynh ve diğerleri, 1994).

2.57 Yardımcı Teorem M bir R -modül ve $S \cap T = N$ ve $S + T = M$ olacak şekilde, M 'nin N , S , T alt modülleri verilsin. Eğer N , S 'de bir tamlayan ve $N \trianglelefteq T$ ise $S \trianglelefteq M$ 'dir (Huynh ve diğerleri, 1994).

2.50 Tanım R bir halka ve M sıfırdan farklı bir R -modül olarak verilsin. M 'nin sıfırdan farklı

her alt modülü büyük (essential) ise M modülü *düzgün (uniform) modül* olarak adlandırılır. ${}_Z\mathbb{Z}$ ve ${}_Z\mathbb{Q}$ birer düzgün modül örnekleridir (Wisbauer, 1991).

2.51 Tanım M bir sol R -modül olmak üzere, $t \in M$ için $\{r \in R \mid rt = 0\}$ kümesine t 'nin *sıfırlayıcısı* denir ve $Ann_r(t)$ gösterimi kullanılır (Lam, 1999).

2.52 Tanım M bir sol R -modül olsun. Eğer $t \in M$ için $Ann_r(t) \trianglelefteq_R R$ ise t 'ye *singüler eleman* denir.

$$Z(M) = \{t \in M \mid It = 0, I \trianglelefteq R\} \quad (2.43)$$

alt kümesi verilsin. $Z(M)$ M 'de bir alt modül olup $Z(M)$ 'ye M 'nin *singüler alt modülü* denir (Lam, 1999).

Gerçekten; $Z(M) = \{t \in M \mid It = 0, I \trianglelefteq R\}$ kümesini aldığımızda, $0 \in Z(M)$ olduğundan $Z(M) \neq \emptyset$ 'dir. Keyfi $x, y \in Z(M)$ elemanlarını aldığımızda $I, J \trianglelefteq R$ için $Ix = Jy = 0$ 'dır. Önerme 2.54 gereğince $I \cap J \trianglelefteq R$ ve $(I \cap J)(x - y) = 0$ olduğundan $x - y \in Z(M)$ 'dir. Ayrıca keyfi $r \in R$ için $Ir^{-1} \trianglelefteq R$ ve $(Ir^{-1})(rx) \leq Ix = 0$ olup $rx \in Z(M)$ bulunur. Dolayısıyla $Z(M)$, M 'nin singüler alt modülüdür.

2.53 Tanım $Z(M) = M$ eşitliği gerçekleşir ise M modülüne *singüler modül* denir. Örneğin ${}_Z\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}$ -modülü singüler modüldür. Gerçekten $\bar{0} \in \mathbb{Z}_2$ için ${}_Zr(\bar{0}) = \mathbb{Z}$ ve $\bar{1} \in \mathbb{Z}_2$ için ${}_Zr(\bar{1}) = 2\mathbb{Z}$ 'dir. Buradan $Z(\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ elde edilir, yani, $\mathbb{Z}_2$ modülü $\mathbb{Z}$ -modül olarak singüler modüldür (Lam, 1999).

2.54 Tanım $Z(M) = 0$ eşitliği gerçekleşir ise M modülüne *singüler olmayan modül* denir. Örneğin ${}_Z\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}$ -modülü singüler olmayan modüldür. Gerçekten $0 \in \mathbb{Z}$ için ${}_Zr(0) = \mathbb{Z}$ 'dir. $0 \neq k \in \mathbb{Z}$ için ${}_Zr(k) = 0$ 'dır. Böylece $Z(\mathbb{Z}) = 0$ olup ${}_Z\mathbb{Z}$ modülü singüler olmayan modüldür (Lam, 1999).

2.58 Önerme M basit modül olsun. M ya singüler modüldür ya da projektiftir (Goodearl, 1976).

Kanıt M singüler olmasın. Bu durumda $Z(M) = 0$ eşitliği sağlanır. M basit modül olduğundan devirli olup $M = \langle a \rangle = Ra$ eşitliğini sağlayacak şekilde $a \in M$ vardır. $Ann(a) = 0$ olacağından $M = Ra \cong \frac{R}{Ann(a)} = \frac{R}{0} = R$ olup M projektiftir. M 'nin projektif olduğunu varsayalım. $M = \langle a \rangle = Ra$ 'dır. $\frac{R}{Ann(a)} \cong Ra = M$ 'dir. $Ann(a) \leq R$ maksimal ve $Ann(a) \cap I = 0$ olup $I \leq R$ 'dir. $R = Ann(a) \oplus I$ ve $I \cong \frac{R}{Ann(a)} = M$ bulunur. O halde M singüler değildir. $\square$

2.59 Önerme Her singüler olmayan yarı-basit sol R -modül projektiftir (Goodearl, 1976).

Kanıt Keyfi bir M modülü için $\text{Soc}(M)$ 'nin basit modüllerin direkt toplamı olduğunu biliyoruz. Özellikle her yarı-basit modül, basit modüllerin bir direkt toplamıdır. Buradan $\{S_i\}_{i \in I}$ basit modüllerin bir topluluğu olmak üzere keyfi bir yarı-basit sol R -modül $\bigoplus S_i$ biçimindedir. $\bigoplus S_i$ singüler değilse Önerme 2.53 (iv) gereğince her S_i singüler değildir. O halde her S_i projektiftir. Dolayısıyla $\bigoplus S_i$ projektiftir. $\square$

2.9. Küçük ve δ -Küçük Alt Modüller

2.55 Tanım R halka, M bir R -modül ve $S < M$ olarak verilsin. $T \leq M$ olmak üzere $M = S + T$ olduğunda $T = M$ ise, S 'ye M 'nin *küçük alt modülü* denir ve $S \ll M$ gösterimi kullanılır (Clark ve diğerleri, 2006).

$M \neq 0$ olmak üzere $0 \ll M$ olduğu kolayca görülebilir.

2.60 Önerme (Küçük Alt Modülün Özellikleri)

- (i) M modül ve $K < L \leq M$ olarak verilsin. $L \ll M$ ise $K \ll M$ 'dir.
- (ii) M modül ve $A < B \leq M$ olarak verilsin. $A \ll B$ ise, A ve A 'nın alt modülleri B 'yi kapsayan M modülünün alt modüllerinde küçüktür.
- (iii) M modül, $S_1, S_2, \dots, S_n, T_1, T_2, \dots, T_n$ M 'nin alt modülleri ve her $i=1,2,\dots,n$ için $S_i \ll T_i$ olsun. Bu durumda $S_1 + S_2 + \dots + S_n \ll T_1 + T_2 + \dots + T_n$ 'dir.
- (iv) M, K birer R -modül ve $\psi : M \rightarrow K$ bir homomorfizma olarak verilsin. $U \ll M$ ise, $\psi(U) \ll K$ 'dir.
- (v) M modül, $L \leq M, K \leq L$ ve L, M 'nin direkt toplam terimi olarak verilsin. Bu durumda $K \ll L$ olması için gerek ve yeter koşul $K \ll M$ olmasıdır.
- (vi) $U \leq M$ alt modülü M 'de küçük ve aynı zamanda direkt toplam terimi oluyor ise, $U = 0$ 'dır.
- (vii) $\frac{M}{V}$ sonlu üretilmiş ve $V \ll M$ ise, M modülü sonlu üretilmiştir (Wisbauer, 1991).

Önerme 2.60 (vi) gereğince yarı-basit modüllerin sıfır alt modülünden başka küçük alt modülü yoktur. $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ için $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ eşitliğini sağlayacak şekilde $m\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$ öz ideali mevcut olacağından $\mathbb{Z}\mathbb{Z}$ 'nin küçük alt modülü sadece sıfırdır.

$\mathbb{Z}_8$ $\mathbb{Z}$ -modülü verilsin. $\{\bar{0}\} \rightarrow \{\bar{0}, \bar{4}\} \rightarrow \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\} \rightarrow \mathbb{Z}_8$ şeklinde olması sebebiyle $\mathbb{Z}_8$ 'in tüm öz alt modülleri küçüktür.

2.56 Tanım M bir R -modül ve $U \leq M$ olarak verilsin. Eğer $U + V = M$ ve $\frac{M}{V}$ singüler olacak şekilde M 'nin her V alt modülü için $V = M$ eşitliği gerçekleşiyorsa, U 'ya δ -küçük alt modül denir ve $U \ll_{\delta} M$ gösterimi kullanılır (Y. Zhou, 2000).

2.61 Yardımcı Teorem M bir modül olsun.

- (i) $V \leq U \leq M$ olarak verilsin. $U \ll_{\delta} M$ olması için gerek ve yeter koşul $V \ll_{\delta} M$ ve $\frac{U}{V} \ll_{\delta} \frac{M}{V}$ olmasıdır.
- (ii) $V \ll_{\delta} M$ ve $f : M \rightarrow U$ sol R -modül homomorfizması ise $f(V) \ll_{\delta} U$ 'dur. Özel olarak $V \ll_{\delta} M \subseteq U$ ise $V \ll_{\delta} U$ 'dur.
- (iii) $V_1 \leq X_1 \leq M$, $V_2 \leq X_2 \leq M$ ve $M = X_1 \oplus X_2$ olsun. $V_1 \oplus V_2 \ll_{\delta} X_1 \oplus X_2$ olması için gerek ve yeter koşul $V_1 \ll_{\delta} X_1$ ve $V_2 \ll_{\delta} X_2$ olmasıdır.
- (iv) $V \leq U \leq M$ ve U alt modülü M 'nin direkt toplam terimi olsun. $V \ll_{\delta} M$ ise $V \ll_{\delta} U$ 'dur (Y. Zhou, 2000).

Kanıt (i) ($\implies$) $U \ll_{\delta} M$, $M = V + V_1$ ve $\frac{M}{V_1}$ singüler olsun. Bu durumda $M = U + V_1$ ve $U \ll_{\delta} M$ olduğundan $M = V_1$ olup $V \ll_{\delta} M$ 'dir. $V \leq V_2 \leq M$ olmak üzere $\frac{M}{V} = \frac{U}{V} + \frac{V_2}{V}$ ve $\frac{M}{V_2} \cong \frac{M}{V_2}$ singüler olsun. O halde $M = U + V_2$ ve $U \ll_{\delta} M$ olduğundan $M = V_2$ 'dir.

($\impliedby$) $N \leq M$ için $M = U + N$ ve $\frac{M}{N}$ singüler olsun. O halde $\frac{M}{V} = \frac{U}{V} + \frac{N+V}{V}$ olur. Diğer yandan $\frac{M}{\frac{N+V}{V}} \cong \frac{M}{N+V}$ ve $\frac{U}{V} \ll_{\delta} \frac{M}{V}$ olduğundan $M = N + V = N$ elde edilir.

(ii) Bir $L \leq U$ için $f(V) + L = U$ ve $\frac{U}{L}$ singüler olarak verilsin. Bu durumda $f^{-1}(L) + V = M$ 'dir. $f(m + f^{-1}(L)) = f(m) + L$ ile tanımlanan $g : \frac{M}{f^{-1}(L)} \rightarrow \frac{U}{L}$ izomorfizmasını göz önüne alalım. $\frac{U}{L}$ 'nin singüler olması sebebiyle $\frac{M}{f^{-1}(L)}$ singülerdir. Diğer taraftan $V \ll_{\delta} M$ olduğundan $M = f^{-1}(L)$ 'dir. Buradan $f(V) \leq f(M) = f(f^{-1}(L)) \leq L$ olup $U = L$ bulunur.

(iii) ($\implies$) $i = 1, 2$ için $\pi_i(v_1 + v_2) = v_i$ ile tanımlanan $\pi_i : M \rightarrow X_i$ homomorfizmasını alalım. $V_1 + V_2 \ll_{\delta} M$ olduğundan (ii)'den $\pi_i(V_1 + V_2) = V_i \ll_{\delta} X_i$ 'dir.

($\impliedby$) $x_1 \rightarrow x_1 + 0$ ile tanımlanan $i_{X_1} : X_1 \rightarrow X_1 \oplus X_2$ ve $x_2 \rightarrow 0 + x_2$ ile tanımlanan $i_{X_2} : X_2 \rightarrow X_1 \oplus X_2$ homomorfizmalarını alalım. (ii)'den $V_1 \ll_{\delta} X_1 \oplus X_2$ ve $V_2 \ll_{\delta} X_1 \oplus X_2$ 'dir. $M = V_1 + V_2 + L$ ve $\frac{M}{L}$ singüler olsun. O halde $x + V_2 + L \in \frac{M}{V_2+L}$ için $r(x+L) \leq r(x+V_2+L) \leq R$ olduğundan $\frac{M}{V_2+L}$ 'de singülerdir. $V_1 \ll_{\delta} M$ ve $V_2 \ll_{\delta} M$ olduğundan $M = L$ 'dir.

(iv) $M = U \oplus S$, $U = V + L$ ve $\frac{U}{L}$ singüler olsun. Bu durumda $M = V + L + S$ 'dir. Diğer yandan $\frac{M}{L+S} = \frac{U \oplus S}{L+S} \cong \frac{U}{L}$ ve $V \ll_{\delta} M$ olduğundan $M = L \oplus S$ 'dir. O halde $U = L \oplus (L \cap S) = L$

olup $V \ll_{\delta} U$ 'dur. □

2.62 Yardımcı Teorem M ve N birer R -modül olsun.

- (i) $\delta(M) = \sum \{L \leq M : L \ll_{\delta} M\}$ 'dir.
- (ii) $f : M \longrightarrow N$, R -modül homomorfizması ise $f(\delta(M)) \leq \delta(N)$ 'dir.
- (iii) $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ ise $\delta(M) = \bigoplus_{i \in I} \delta(M_i)$ 'dir.
- (iv) M 'nin her öz alt modülü M 'nin bir maksimali tarafından kapsanıyorsa (M eş-atom ise) $\delta(M)$, M 'nin tek maksimal δ -küçük alt modülüdür (Y. Zhou, 2000).

2.63 Yardımcı Teorem P projektif modül olarak verilsin. Bu durumda $\delta(P) = P\delta(R)$ 'dir ve $\delta(P)$, P 'nin tüm büyük maksimallerinin kesişimidir (Y. Zhou, 2000).

2.10. Modülün Radikali

2.57 Tanım R halkası ve M R -modülü için, M 'nin tüm maksimal alt modüllerinin kesişimi M 'nin *radikali* olarak adlandırılır ve $Rad(M)$ gösterimi kullanılır. M modülünde maksimal alt modül bulunmuyorsa, $Rad(M) = M$ olarak tanımlanır. Bu durumda, M modülüne *radikal modül* denir (Baccella, 1984). M 'deki radikal alt modüllerin tamamının toplamı $P(M)$ ile gösterilir. $P(M) = \sum_{N \leq M, N=Rad(N)} N$ şeklindedir (Lomp, 1999).

$_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ modülü maksimal alt modül içermediğinden $Rad(_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}) = _{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ olur.

$\bigcap_{p \in P} p\mathbb{Z} = 0$ olduğundan $Rad(_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}) = \bigcap_{p \in P} p\mathbb{Z} = 0$ 'dır. Diğer taraftan $Rad(_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$ 'dir.

2.64 Yardımcı Teorem R halka ve M bir R -modül olarak verilsin. $m \in M$ olmak üzere Rm 'nin M 'de küçük alt modül olmaması için gerek ve yeter koşul $m \notin U$ şartını sağlayacak $U < M$ maksimal alt modülünün olmasıdır (Durğun, 2021).

2.65 Sonuç R halka, M bir R -modül ve $x \in M$ olarak verilsin. Rx 'in M 'de küçük olması için gerek ve yeter koşul $x \in Rad(M)$ olmasıdır (Lam, 2006).

2.66 Teorem M modül olarak verilsin. M 'nin her öz alt modülü bir maksimal alt modülde kapsanıyorsa, $Rad(M) \ll M$ 'dir (Lam, 2006).

Kanıt $Rad(M) + V = M$ şartını sağlayan bir V alt modülü için $V \neq M$ olduğunu kabul ede-

lim. Varsayımdan V , M 'nin bir N maksimal alt modülünde kapsanır. Dolayısıyla $V \leq N$ ve $Rad(M) \leq N$ olmasından ötürü $M = Rad(M) + V \leq N$ olur. Bu ise $M = N$ çelişkisini doğurur. Böylece $V = M$ olup $Rad(M) \ll M$ elde edilir. $\square$

2.67 Sonuç M sonlu üretilmiş modül olsun. Bu durumda $Rad(M) \ll M$ 'dir (Lam, 2006).

2.68 Teorem R halka ve M bir R -modül olarak verilsin. Bu durumda $Rad(M) = \sum_{L \ll M} L$ 'dir (Lam, 2006).

2.69 Önerme Herhangi bir M modülü için $Rad(P(M)) = P(M)$ 'dir (Lomp, 1999).

2.70 Teorem (Radikalin Özellikleri) R halka ve M bir R -modül olarak verilsin. Bu durumda,

- (i) $Rad(\frac{M}{Rad(M)}) = 0$ 'dir.
- (ii) $S \leq M$ ise, $Rad(S) \leq Rad(M)$ 'dir.
- (iii) T bir R -modül olmak üzere her $\alpha \in Hom(M, T)$ için $\alpha(Rad(M)) \leq Rad(T)$ 'dir. Eğer $\text{Çek}(\alpha) \leq Rad(M)$ ise, $\alpha(Rad(M)) = Rad(\alpha(M))$ 'dir. Özel olarak her $\alpha \in End(M)$ için $\alpha(Rad(M)) \leq Rad(M)$ 'dir.
- (iv) $T \leq M$ iken $\frac{T+Rad(M)}{T} \leq Rad(\frac{M}{T})$ ve $T \leq Rad(M)$ ise $Rad(\frac{M}{T}) = \frac{Rad(M)}{T}$ 'dir.
- (v) $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ ise, $Rad(M) = \bigoplus_{i \in I} Rad(M_i)$ ve $\frac{M}{Rad(M)} \cong \bigoplus_{i \in I} \frac{M_i}{Rad(M_i)}$ 'dir.
- (vi) M 'nin radikal olması için gerek ve yeter koşul M 'nin her sonlu üretilmiş S öz alt modülü için $S \ll M$ olmasıdır.
- (vii) $S \leq T \leq M$ için $S \subseteq Rad(M)$ ve T, M 'nin direkt toplam terimi ise, $S \subseteq Rad(T)$ 'dir.
- (viii) M yarı-basit modül ise $Rad(M) = 0$ 'dir (Wisbauer, 1991).

2.11. Lokal Modüller

2.58 Tanım M modülü verildiğinde, M 'nin tüm öz alt modüllerinin toplamı yine bir öz alt modül oluşturuyorsa, bu modüle *lokal modül* denir (Wisbauer, 1991).

$p \in \mathbb{P}$ ve $k \geq 1$ olmak üzere $\mathbb{Z}_{p^k}$ lokal $\mathbb{Z}$ -modüldür.

2.59 Tanım R birimli halka olsun. ${}_R R$ lokal modül ise veya R 'nin sadece bir tane maksimal ideali varsa R 'ye *lokal halka* denir (Wisbauer, 1991).

Cisimlerde tek maksimal ideal sıfır olduğundan, her cisim lokal halkadır.

$\mathbb{Z}_6$ halkasını alalım. $\mathbb{Z}_6$ halkasının bütün idealleri $\mathbb{Z}_6$, $\langle \bar{0} \rangle$, $\langle \bar{2} \rangle$, $\langle \bar{3} \rangle$ olup maksimal idealleri $\langle \bar{2} \rangle$ ve $\langle \bar{3} \rangle$ 'tür. Dolayısıyla $\mathbb{Z}_6$ halkası lokal değildir. $p \in P$ ve $k \geq 1$ olmak üzere $\mathbb{Z}_{p^k}$ lokal halkadır.

2.60 Tanım R halka ve M bir R -modül olarak verilsin. $\frac{M}{\text{Rad}(M)}$ yarı-basit ise, M modülüne *yarı-lokal modül* ve ${}_R R$ (veya R_R) yarı-lokal ise, R halkasına *yarı-lokal halka* denir (Wisbauer, 1991).

2.71 Teorem R halkasının yarı-lokal olması için gerek ve yeter koşul her sol R -modülün yarı-lokal olmasıdır (Lomp, 1999).

2.61 Tanım Aşağıdaki denk durumları sağlayan P modülüne *lokal projektif modül* denir.

- (i) K ve L modüller $\beta : K \rightarrow L$ epimorfizma ve $\alpha : P \rightarrow L$ homomorfizma olsun. Bu takdirde P 'nin her sonlu üretilmiş P_0 alt modülü için $\alpha|_{P_0} = g \circ h|_{P_0}$ eşitliğini sağlayacak şekilde $h : P \rightarrow K$ homomorfizması vardır.
- (ii) M modül ve $\alpha : M \rightarrow P$ epimorfizma ise P 'nin her sonlu üretilmiş P_0 alt modülü için $\alpha \circ \beta|_{P_0} = 1_{P_0}$ eşitliğini sağlayacak şekilde $\beta : P \rightarrow M$ homomorfizması vardır (Zimmermann-Huisgen, 1976).

Tanıma dikkat edilirse her sonlu üretilmiş projektif modülün lokal projektif olduğu görülür.

2.12. Noether ve Artin Modülleri

2.62 Tanım M bir modül olsun. M 'nin alt modüllerinin her

$$M_1 \leq M_2 \leq \dots \leq M_r \leq \dots \quad (2.44)$$

artan zinciri verildiği zaman $\forall r \geq s$ için $M_r = M_s$ eşitliğini sağlayacak bir s pozitif tam sayısı mevcutsa M 'ye *Noether modül* denir. R halkası sol R -modül olarak Noether ise, R halkasına sol *Noether halka* denir (Hungerford, 1973).

${}_Z \mathbb{Z}$ Noether modül iken, ${}_Z \mathbb{Q}$ Noether değildir. Çünkü

$$\left(\frac{1}{5}\right) \subset \left(\frac{1}{5^2}\right) \subset \left(\frac{1}{5^3}\right) \subset \dots \subset \left(\frac{1}{5^n}\right) \subset \dots \quad (2.45)$$

bir sonsuz zincir oluşturur. $\mathbb{Z}_n$ $\mathbb{Z}$ -modülü, sonlu olması sebebiyle Noether'dir.

2.63 Tanım M bir modül olsun. M modülünün alt modüllerinin her

$$M_1 \geq M_2 \geq \dots \geq M_r \geq \dots \quad (2.46)$$

azalan zinciri verildiği zaman $\forall r \leq s$ için $M_r = M_s$ eşitliğini sağlayacak bir s pozitif tam sayısı mevcutsa M modülüne *Artin modül* denir. R halkası sol R -modül olarak Artin ise, R halkasına *sol Artin halka* denir (Hungerford, 1973).

$\mathbb{Z}_n$ $\mathbb{Z}$ -modülü, sonlu olması sebebiyle Artin'dir. $\mathbb{Z}\mathbb{Z}$ Artin değildir. Çünkü

$$(2) \supset (4) \supset (8) \supset \dots \supset (2^n) \supset \dots \quad (2.47)$$

zinciri azalan bir sonsuz zincirdir.

R bir bölme halkası olduğunda, R 'nin idealleri $\{0\}$ ve R olacağından hem sol (sağ) Noether hem de sol (sağ) Artin halkadır.

2.72 Teorem M modül olmak üzere aşağıda verilen ifadeler denktir.

- (i) M Noether modüldür.
- (ii) M modülünün alt modüllerinin boş olmayan her kümesi bir maksimal eleman içerir.
- (iii) M 'nin her alt modülü sonlu üretilmiştir (Wisbauer, 1991).

2.73 Teorem M modül olsun. Aşağıda verilen ifadeler denktir.

- (i) M Artin modüldür.
- (ii) M 'nin alt modüllerinin boş olmayan her kümesi minimal elemana sahiptir (Fuller ve Anderson, 1992).

2.74 Teorem $0 \longrightarrow M \longrightarrow S \longrightarrow T \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi verilsin. S modülünün Artin (Noether) olması için gerek ve yeter koşul M ve T 'nin Artin (Noether) olmasıdır (Pancar ve Türkmen, 2014).

2.75 Sonuç R halka ve $S_1, S_2, \dots, S_n$ modülleri birer R -modül olarak verilsin. Bu durumda $S = S_1 \oplus S_2 \oplus \dots \oplus S_n$ 'nin Noether (Artin) olması için gerek ve yeter koşul her $i = 1, 2, \dots, n$ için S_i 'nin Noether (Artin) olmasıdır (Sharpe ve Vámos, 1972).

2.76 Teorem R bir halka olmak üzere, R halkasının Noether olması için gerek ve yeter koşul

injektif R -modüllerin keyfi direkt toplamının injektif olmasıdır (Pancar ve Türkmen, 2014).

2.13. Pullback Diyagramı

2.64 Tanım $f : A \longrightarrow C$ ve $g : B \longrightarrow C$ homomorfizma çifti ve aşağıdaki şartları sağlayacak şekilde bir M modülü bulunursa M, f ve g üçlüsüne *pullback* denir.

(i)

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\psi} & A \\ \downarrow \phi & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{g} & C \end{array} \quad (2.48)$$

diyagramı değişmelidir. Yani $g \circ \phi = f \circ \psi$ dir.

(ii)

$$\begin{array}{ccc} M' & \xrightarrow{\psi'} & A \\ \downarrow \phi' & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{g} & C \end{array} \quad (2.49)$$

diyagramı değişmeli yani, $g \circ \phi' = f \circ \psi'$ eşitliğini sağlayacak şekilde her ϕ' ve ψ' homomorfizmaları için,

$$\begin{array}{ccc} M' & \xrightarrow{\alpha} & M \\ \psi' \downarrow & \swarrow \psi & \\ A & & \end{array} \quad (2.50)$$

ve

$$\begin{array}{ccc} M' & \xrightarrow{\alpha} & M \\ \phi' \downarrow & \swarrow \phi & \\ A & & \end{array} \quad (2.51)$$

diyagramları değişmelidir, yani $\psi \circ \alpha = \psi'$ ve $\phi \circ \alpha = \phi'$ eşitliğini sağlayacak şekilde bir tek $\alpha : M' \longrightarrow M$ homomorfizması mevcuttur. Bu durumda (i)'de verilen diyagrama *pullback diyagramı* denir (Wisbauer, 1991).

2.77 Teorem $f : A \longrightarrow C$ ve $g : B \longrightarrow C$ homomorfizmaları verilsin. Bu takdirde bir M pull-back vardır ve izomorfizma altında tektir (Wisbauer, 1991).

2.14. V -Halkalar ve Genellemeleri

2.65 Tanım R bir halka olmak üzere, her basit sol R -modülü injektif olan R halkasına *sol V -halka* denir (Jain, Srivastava ve Tuganbaev, 2012).

2.78 Teorem Keyfi bir R halkası için aşağıdakiler denktir.

- (i) R bir sol V -halkadır.
- (ii) Keyfi bir M sol R -modülü için $Rad(M) = 0$ 'dır.
- (iii) R 'nin her $U (\neq R)$ sol ideali, maksimal sol ideallerinin bir kesişimidir (Jain ve diğerleri, 2012).

Kanıt (i) $\implies$ (ii) R bir sol V -halka ve M bir sol R -modül olarak verilsin. M 'nin tüm maksimal alt modüllerinin kesişiminin sıfır olduğunu iddia ediyoruz. $0 \neq x \in M$ olsun. Rx devirli sol R -modülünü alalım. V , Rx 'te maksimal alt modül olsun. Varsayımdan $S = \frac{Rx}{V}$ bir basit sol R -modüldür ve dolayısıyla injektiftir. $f : Rx \longrightarrow S$ kanonik epimorfizmasını alalım. S injektif olduğundan $f, f' : M \longrightarrow S$ 'ye genişletilebilir. $\check{C}ek(f')$ 'in $x \notin \check{C}ek(f')$ olacak şekilde M 'nin bir maksimal alt modülü olduğu açıktır. Bu da M 'nin tüm maksimal alt modüllerinin kesişiminin sıfır olduğu anlamına gelir. Yani M 'nin radikali sıfırdır.

(ii) $\implies$ (iii) $U (\neq R)$, R 'nin bir sol ideali olsun. $Rad(\frac{R}{U}) = 0$ olduğundan U maksimal sol ideallerin bir kesişimidir.

(iii) $\implies$ (i) S , keyfi bir basit sol R -modül ve I , R 'nin keyfi bir sol ideali olarak verilsin. Sıfırdan farklı olan $f : I \longrightarrow S$ homomorfizmasını alalım. S 'nin injektifliğini kanıtlamak için f 'nin R 'ye genişletilebileceğini göstermeliyiz. Bir $x \in I \setminus \check{C}ek(f)$ elemanını alalım. $\check{C}ek(f)$, R 'nin maksimal sol ideallerinin bir ailesinin kesişimi ve $x \notin \check{C}ek(f)$ olduğundan $x \notin M$ olacak şekilde bir $\check{C}ek(f) \subseteq M$ maksimal sol ideali mevcuttur. $\frac{I}{\check{C}ek(f)} \cong S$ basit olduğundan $M \cap I = \check{C}ek(f)$ eşitliğini yazabiliriz. $M + I = R$ olduğu açıktır. Şimdi f 'i keyfi bir $a \in I$ ve $m \in M$ için $f'(a + m) = f(a)$ ile tanımlanan $f' : R \longrightarrow S$ homomorfizmasına genişletebiliriz. Bu ise her basit sol R -modülün injektif ve buradan R 'nin bir sol V -halka olduğu anlamına gelir. $\square$

2.79 Teorem Keyfi bir R halkası verilsin. Aşağıdakiler denktir.

- (i) R bir sol V -halkadır.
- (ii) R 'nin her I sol ideali bir idempotenttir, yani, $I^2 = I$ 'dir ve R 'nin ilkel (primitive) bölüm halkaları sol V -halkalardır (Jain ve diğerleri, 2012).

2.66 Tanım Sol V -halkaların bir genellemesi olarak $\frac{R}{I}$ öz (yani $\frac{R}{I} \neq R$) şartını sağlayacak şekilde her sol ideali için her basit sol R -modülü $\frac{R}{I}$ -injektif ise R halkasına *sol zayıf V -halka* veya kısaca *WV-halka* denir (Jain ve diğerleri, 2012).

2.80 Yardımcı Teorem R bir sol WV-halka, $\frac{R}{A}$ ve $\frac{R}{B}$, $A \cap B = 0$ olacak şekilde öz devirli sol R -modüller olsun. Bu takdirde R , sol V -halkadır (Jain ve diğerleri, 2012).

Kanıt R bir sol WV-halka olduğundan, keyfi bir basit sol R -modül $\frac{R}{A} \times \frac{R}{B}$ -injektiftir. ${}_R R$, $\frac{R}{A} \times \frac{R}{B}$ 'ye gömülebildiğinden, keyfi bir basit sol R -modül ${}_R R$ -injektiftir, yani, R sol V -halkadır. $\square$

2.81 Teorem R halkası sol V -halka olmayan bir sol WV-halka olsun. Bu takdirde R sol düzgün (uniform) olmalıdır (Jain ve diğerleri, 2012).

2.82 Önerme R , sıfırdan farklı keyfi bir sol I ideali için $\frac{R}{I}$ öz olacak şekilde bir halka olmak üzere aşağıda verilen ifadeler denktir.

(i) R bir sol WV-halkadır.

(ii) R 'nin sıfır olmayan keyfi bir I ideali için $\frac{R}{I} = 0$ 'dır.

(iii) Sıfırdan farklı keyfi bir $I \neq R$ ideali maksimal sol ideallerin bir kesişimidir (Jain ve diğerleri, 2012).

Özellikle R sol düzgün (uniform) olduğunda yukarıdaki ifadeler denktir.

2.83 Sonuç R sol WV-halka ise bu takdirde $\frac{R}{\text{Rad}(R)}$ sol V -halkadır (Jain ve diğerleri, 2012).

2.67 Tanım Eğer $\sigma[M]$ 'de her basit modül M -injektif ise M sol R -modülüne *V -modül* denir. Dolayısıyla bir R halkasının sol V -halka olması için gerek ve yeter koşul her sol R -modülün bir V -modül olmasıdır. Ayrıca bir R halkasının sol WV-halka olması için gerek ve yeter koşul her öz devirli modülün bir V -modül olmasıdır (Jain ve diğerleri, 2012).

2.84 Yardımcı Teorem R sol V -halka olmayan sol WV-halka olsun. Bu takdirde $\text{Rad}(R)$ bir basit sol R -modüldür (Jain ve diğerleri, 2012).

Kanıt ${}_R U$, $\text{Rad}(R)$ 'nin bir öz alt modülü olsun. Eğer $\frac{R}{U} \cong R$ ise, bu takdirde $\frac{R}{U}$ projektiftir ve buradan U , R 'nin direkt toplam terimidir. Bu ise R 'nin sol düzgün (uniform) olması ile çelişir. Dolayısıyla $\frac{R}{U}$ öz devirlidir. R sol WV-halka olduğundan $\frac{R}{U}$ bir V -modül olup $\frac{R}{U} = 0 = \frac{\text{Rad}(R)}{U}$

elde edilir. Böylece $\text{Rad}(R) = U$ ve buradan $\text{Rad}(R)$ bir basit sol R -modüldür.

□



3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, alanda yapılmış önceki araştırmaların tez kapsamına uygun analizleri yapılacak, literatürde geçen mevcut çalışmaların bulguları özet halinde verilerek araştırmanın dayandığı bazı teorik kavramlar sunulacaktır.

3.1. Tümleyen Alt Modüllerin Özellikleri ve Tümlenmiş Modüller

3.1 Tanım M modül ve $S \leq M$ olarak verilsin. $M = S + T$ eşitliğini sağlayacak bir $T \leq M$ mevcut ve T bu şarta göre minimal ise, başka bir deyişle $S + L = M$ eşitliğini sağlayan her $L \leq T$ için $L = T$ ise, T 'ye M 'de S 'nin *tümleyeni* ve S modülüne de M 'de *tümleyene sahiptir* denir (Wisbauer, 1991).

M modül ve $S \ll M$ olduğunu varsayalım. Bu durumda küçük alt modül tanımı gereğince M , S 'nin tümleyenidir. Bu durumda modülün sıfırının tümleyeni sadece modülün kendisidir.

3.1 Önerme M modül ve $S, T \leq M$ olarak verilsin. T alt modülünün S 'nin M 'de tümleyeni olması için gerek ve yeter koşul $M = S + T$ ve $S \cap T \ll T$ şartlarının sağlanmasıdır (Wisbauer, 1991).

3.2 Teorem (Tümleyen Alt Modülün Özellikleri) S ile T, M R -modülünün alt modülleri olmak üzere T, S 'nin tümleyeni olarak verilsin. Bu durumda;

- (i) M sonlu üretilmiş ise, bu durumda T 'de sonlu üretilmiştir,
- (ii) S, M 'nin maksimal alt modülü ise, T lokal ve $Rad(T) = S \cap T$ 'dir,
- (iii) $X \ll M$ olduğunda $X \cap T \ll T$ olup $Rad(T) = T \cap Rad(M)$ 'dir,
- (iv) $Y \leq S$ olmak üzere $\frac{T+Y}{Y}, \frac{M}{Y}$ 'de $\frac{S}{Y}$ bölüm modülünün tümleyenidir (Wisbauer, 1991, 41.1).

3.2 Tanım M bir modül olsun. M 'nin her alt modülü M 'de bir tümleyene sahip ise, M modülüne *tümlenmiş modül* denir (Wisbauer, 1991).

3.3 Sonuç Her yarı-basit modül ve her Artin modül tümlenmiştir.

3.4 Teorem Tümlenmiş modüllerin her bölüm modülü tümlenmiştir (Wisbauer, 1991).

Kanıt M tümlenmiş ve $S \leq L \leq M$ olsun. M 'nin tümlenmiş olması sebebiyle $L + W = M$

ve $L \cap W \ll W$ şartlarını sağlayacak şekilde $W \leq M$ alt modülü mevcuttur. Teorem 3.2 (iv) gereği $\frac{W+S}{L} \frac{L}{S}$ 'nin $\frac{M}{S}$ 'de tümleyeni olup $\frac{M}{S}$ tümlenmiştir. $\square$

3.5 Teorem M tümlenmiş ise, $\frac{M}{Rad(M)}$ yarı-basittir (Wisbauer, 1991).

Kanıt M tümlenmiş olduğundan Teorem 3.4 gereği $\frac{M}{Rad(M)}$ tümlenmiştir. Teorem 2.70 (i) gereği $Rad(\frac{M}{Rad(M)}) = 0$ 'dır. O halde $\frac{M}{Rad(M)}$ bölüm modülünün her alt modülü bir direkt toplam terimi olup $\frac{M}{Rad(M)}$ yarı-basittir. $\square$

3.2. SS-Tümleyen Alt Modüllerin Özellikleri ve SS-Tümlenmiş Modüller

3.3 Tanım M modül ve $S, T \leq M$ olarak verilsin. $M = S + T$, $S \cap T \ll T$ ve $S \cap T$ yarı-basit ise, T 'ye S 'nin *ss-tümleyeni* denir (Kaynar ve diğerleri, 2020).

3.6 Yardımcı Teorem M modül ve $S, T \leq M$ olarak verilsin. Bu durumda, aşağıdakiler denktir.

(i) T, S 'nin M 'de ss-tümleyenidir.

(ii) $M = S + T$, $S \cap T \subseteq Rad(T)$ ve $S \cap T$ yarı-basittir.

(iii) $M = S + T$, $S \cap T \ll T$ ve $S \cap T$ yarı-basittir (Kaynar ve diğerleri, 2020).

Yardımcı Teorem 3.6'dan görüldüğü üzere ss-tümleyen alt modül kavramı tümleyen alt modül kavramının bir özel halidir.

3.4 Tanım M modül olsun. M 'de hem basit hem de küçük olan alt modüller toplamı $Soc_s(M) = \sum \{S \ll M \mid SM' \text{nin basit alt modülü}\}$ şeklinde ifade edilir (D. Zhou ve Zhang, 2011).

3.7 Önerme M modül olsun. Bu durumda, $Soc_s(M) = Rad(M) \cap Soc(M)$ 'dir (Kaynar ve diğerleri, 2020).

3.8 Önerme M modül ve $S \leq Rad(M)$ olsun. S yarı-basit ise, $S \ll M$ 'dir (Kaynar ve diğerleri, 2020).

3.5 Tanım Bir M modülünün her alt modülü M 'de bir ss-tümleyene sahip ise, M modülüne *ss-tümlenmiş modül* denir (Kaynar ve diğerleri, 2020).

3.9 Önerme M ss-tümlenmiş modül ve $K \ll M$ olarak verilsin. Bu durumda, $K \subseteq Soc_s(M)$ 'dir

(Kaynar ve diğerleri, 2020).

Kanıt $K \ll M$ olduğundan K 'nın M 'den başka δ -tümleyeni yoktur. Bu durumda $K = K \cap M$ yarı-basit olup $K \subseteq Soc_\delta(M)$ kapsamasının mevcut olduğu görülür. $\square$

3.10 Sonuç M δ -tümlenmiş modül ve $Rad(M) \ll M$ olarak verilsin. Bu durumda $Rad(M) \subseteq Soc(M)$ dir (Kaynar ve diğerleri, 2020).

Kanıt M δ -tümlenmiş modül ve $Rad(M) \ll M$ olarak verildiğinden $M, Rad(M)$ 'in δ -tümleyenidir. Buradan hareketle $M = M + Rad(M)$, $M \cap Rad(M) = Rad(M)$ yarı-basit modül olup, $Rad(M) \subseteq Soc(M)$ kapsamasının olduğu görülür. $\square$

3.11 Teorem Bir R halkası verilsin. ${}_R R$ 'nin δ -tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul her sol R -modülün δ -tümlenmiş olmasıdır (Kaynar ve diğerleri, 2020).

3.3. δ -Tümleyen Alt Modüllerin Özellikleri ve δ -Tümlenmiş Modüller

Bu kısımda δ -tümleyen alt modül tanımını vermeden önce aşağıdaki Yardımcı Teoremi verelim.

3.12 Yardımcı Teorem M bir modül, S ve T M 'nin alt modülleri olarak verilsin. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

- (i) $M = S + T$ ve $S \cap T$ T 'de δ -küçüktür.
- (ii) $M = S + T$ ve $\frac{T}{L}$ singüler olmak üzere T 'nin keyfi bir L öz alt modülü için $M \neq S + L$ 'dir (Koşan, 2007).

3.6 Tanım M bir modül olsun. Eğer M 'nin S ve T alt modülleri Yardımcı Teorem 3.12'deki denk koşulları sağlıyor ise T alt modülüne M 'de S 'nin δ -tümleyeni denir (Koşan, 2007).

3.13 Yardımcı Teorem M bir modül S, T ve W M 'nin alt modülleri olsun. Eğer S, M 'de T 'nin δ -tümleyeni ve T, M 'de W 'nin δ -tümleyeni ise bu takdirde T, M 'de S 'nin δ -tümleyenidir (Koşan, 2007).

3.14 Önerme M bir R -modül olsun.

- (i) S ve T M 'nin $S \leq T$ olacak şekilde alt modülleri olsun.

- (a) Eğer $T \leq M$ 'de bir δ -tümleyen ise bu takdirde $\frac{T}{S} \leq \frac{M}{S}$ 'de bir δ -tümleyenidir.
- (b) Eğer $T \leq M$ 'de bir K δ -tümleyenine sahip ise bu takdirde $\frac{K+S}{S} \leq \frac{M}{S}$ 'de $\frac{T}{S}$ 'nin bir δ -tümleyenidir.
- (ii) $A \leq B \leq M$ olarak verilsin. Eğer $\frac{B}{A} \leq \frac{M}{A}$ 'da bir δ -tümleyen ve $A \leq M$ 'de bir δ -tümleyen ise Bu takdirde $B \leq M$ 'nin bir δ -tümleyenidir.
- (iii) S_1 ve S_2 , $M = S_1 \oplus S_2$ eşitliğini sağlayacak şekilde M 'nin alt modülleri olsun. Eğer $K \leq S_1$ 'de L 'nin bir δ -tümleyeni ve $N \leq S_2$ 'de S 'nin bir δ -tümleyeni ise bu takdirde $K \oplus N \leq M$ 'de $L \oplus S$ 'nin bir δ -tümleyenidir (Abdioğlu ve Şahinkaya, 2015).

3.7 Tanım M bir modül olmak üzere M 'nin her alt modülü M 'de bir δ -tümleyene sahip ise, M modülüne *δ -tümlenmiş modül* denir. Her tümlenmiş modülün δ -tümlenmiş modül olduğu aşıkardır (Koşan, 2007).

3.15 Sonuç M bir δ -tümlenmiş modül olsun. Bu takdirde M 'nin her bölüm modülü δ -tümlenmiştir (Abdioğlu ve Şahinkaya, 2015).

3.16 Yardımcı Teorem M δ -tümlenmiş modül olsun. Bu durumda $\frac{M}{\delta(M)}$ yarı-basittir (Koşan, 2007).

Kanıt $\delta(M) \leq S \leq M$ olsun. Buradan $M = S + T$ ve $S \cap T \ll_{\delta} T$ koşullarını sağlayacak şekilde $S \leq M$ alt modülü vardır. Yani $S \cap T \ll_{\delta} M$ 'dir. $S \cap (T + \delta(M)) = (S \cap T) + \delta(M) = \delta(M)$ olduğundan $\frac{M}{\delta(M)} = \frac{S}{\delta(M)} + \frac{(T+\delta(M))}{\delta(M)} = \frac{S}{\delta(M)} \oplus \frac{(T+\delta(M))}{\delta(M)}$ elde edilir. $\square$

3.17 Yardımcı Teorem M_1 ve M_2 , M_1 δ -tümlenmiş ve $M_1 + M_2$ M 'de bir δ -tümleyene sahip olacak şekilde M 'nin alt modülleri olsun. Bu durumda M_2 M 'de bir δ -tümleyene sahiptir (Abdioğlu ve Şahinkaya, 2015).

3.18 Önerme δ -tümlenmiş modüllerin sonlu toplamaları da δ -tümlenmiştir (Abdioğlu ve Şahinkaya, 2015).

3.4. δ_{ss} -Tümleyen Alt Modüllerin Özellikleri ve δ_{ss} -Tümlenmiş Modüller

M bir modül olsun. (D. Zhou ve Zhang, 2011) ile verilen çalışma gereğince $Soc_{\delta}(M)$, M 'nin basit ve δ -küçük olan tüm alt modüllerinin toplamını ifade eder. Dolayısıyla, M 'nin her küçük alt modülünün aynı zamanda M 'de δ -küçük olması sebebiyle, M 'de δ -küçük olan,

M 'nin tüm basit alt modüllerinin toplamı aşağıdaki notasyonla tanıtılmıştır.

$$Soc_{\delta}(M) = \sum \{S \subseteq M \mid S \text{ basit ve } S \ll_{\delta} M\} \quad (3.1)$$

3.8 Tanım M bir modül ve $S, T \leq M$ olarak verilsin. $M = S + T$ ve $S \cap T \subseteq Soc_{\delta}(T)$ ise $T \leq M$ alt modülüne M 'de S 'nin δ_{ss} -tümleyeni denir (Türkmen ve Türkmen, 2020).

3.19 Yardımcı Teorem M bir modül ve $S, T \leq M$ olsun. Aşağıda verilenler denktir.

- (i) T, M 'de S 'nin bir δ_{ss} -tümleyenidir.
- (ii) $M = S + T, S \cap T \subseteq \delta(T)$ ve $S \cap T$ yarı-basittir.
- (iii) $M = S + T, S \cap T \ll_{\delta} T$ ve $S \cap T$ yarı-basittir (Türkmen ve Türkmen, 2020).

3.20 Önerme M bir modül ve M 'nin herhangi bir V alt modülü M 'de bir δ_{ss} -tümleyen olsun. Bu durumda;

- (i) Eğer $L \leq V$ ise bu takdirde $\frac{V}{L} \leq \frac{M}{L}$ 'de bir δ_{ss} -tümleyendir.
- (ii) $V \leq K \leq M$ olmak üzere V, K 'da bir δ_{ss} -tümleyendir.
- (iii) $Soc_{\delta}(V) = V \cap Soc_{\delta}(M)$ 'dir (Türkmen ve Türkmen, 2020).

3.21 Yardımcı Teorem M bir modül ve S alt modülü M 'nin bir direkt toplam terimi olarak verilsin. Bu durumda bir $T \leq S$ alt modülünün S 'de bir δ_{ss} -tümleyen olması için gerek ve yeter koşul M de bir δ_{ss} -tümleyen olmasıdır (Türkmen ve Türkmen, 2020).

3.22 Teorem M bir modül ve $E(M), M$ 'nin injektif bürümü olsun. Bu durumda, M 'nin her genişlemesinde bir δ_{ss} -tümleyen olması için gerek ve yeter koşul $E(M)$ 'de bir δ_{ss} -tümleyen olmasıdır (Türkmen ve Türkmen, 2020).

3.23 Önerme M bir modül ve $Soc_{\delta}(M) = 0$ olsun. Bu durumda M 'nin $E(M)$ 'de bir δ_{ss} -tümleyen olması için gerek ve yeter koşul injektif olmasıdır (Türkmen ve Türkmen, 2020).

3.9 Tanım M bir modül olmak üzere M 'nin her alt modülü M 'de bir δ_{ss} -tümleyene sahip ise, M modülüne δ_{ss} -tümlenmiş modül denir (Türkmen ve Türkmen, 2020).

3.24 Önerme M bir modül ve $\delta(M) \subseteq Soc(M)$ olmak üzere M bir δ -tümlenmiş modül olsun. Bu durumda M δ_{ss} -tümlenmiştir (Türkmen ve Türkmen, 2020).

3.25 Yardımcı Teorem M 'nin δ_{ss} -tümlenmiş modül olduğunu varsayalım. Bu durumda $\frac{M}{Soc(M)}$ yarı-basit modüldür (Türkmen ve Türkmen, 2020).

3.26 Yardımcı Teorem M bir modül ve $W \leq M$ olsun. M_1, M' 'nin δ_{ss} -tümlenmiş alt modülü olsun. Eğer $M_1 + W$ M 'de bir δ_{ss} -tümleyene sahipse W M 'de bir δ_{ss} -tümleyene sahiptir (Türkmen ve Türkmen, 2020).

3.27 Önerme δ_{ss} -tümlenmiş modüllerin sınıfı sonlu toplamalar altında kapalıdır (Türkmen ve Türkmen, 2020).

3.28 Önerme δ_{ss} -tümlenmiş modüllerin her bölüm modülü de δ_{ss} -tümlenmiştir (Türkmen ve Türkmen, 2020).

3.5. Eş-Eşatomik Tümlenmiş Modüller

3.10 Tanım M bir modül olmak üzere, M 'nin her öz alt modülü bir maksimal alt modülde içeriliyorsa M 'ye *eşatom modül* denir. Yarı-basit, sonlu üretilmiş ve lokal modüller eşatom modül örnekleridir. Bir eşatom modülün her bölüm modülü eşatomdur (Zöschinger ve Rosenberg, 1980).

3.11 Tanım M bir modül ve S M 'nin bir alt modülü olarak verilsin. Eğer $\frac{M}{S}$ eşatom ise M 'nin S alt modülüne *eş-eşatom modül* denir. Bir eşatom modülün her bölüm modülü eşatom olduğundan yarı-basit modüllerin, lokal modüllerin ve sonlu üretilmiş modüllerin her alt modülü eş-eşatom modüldür (Alizade ve Güngör, 2017).

3.12 Tanım M bir modül olmak üzere, M 'nin her eş-eşatom alt modülü M 'de bir tümleyene sahipse M 'ye *eş-eşatomik tümlenmiş modül* denir (Alizade ve Güngör, 2017).

3.13 Tanım M bir modül ve N M 'nin bir alt modülü olsun. Eğer $\frac{M}{N}$ sonlu üretilmiş ise M 'nin N alt modülüne *eşsonlu alt modül* denir (Alizade ve Güngör, 2017).

$\{M_k\}_{k \in K}$ M 'nin direkt toplam terimleri olan basit alt modüllerinin bir ailesi olsun. Her $k \in K$ için M_k 'ların toplamı $Soc^{\oplus}(M)$ ile ifade edilir. Yani $Soc^{\oplus}(M) = \sum_{(k \in K)} M_k$ olup $Soc^{\oplus}(M) \leq Soc(M)$ olduğu açıktır.

3.29 Teorem R keyfi bir halka olsun. M bir R -modül olmak üzere aşağıdaki durumlar denktir.

- (i) M 'nin her eş-eşatom alt modülü, M 'nin bir direkt toplam terimidir.
- (ii) M 'nin her eşsonlu alt modülü, M 'nin bir direkt toplam terimidir.

(iii) M 'nin her maksimal alt modülü, M 'nin bir direkt toplam terimidir.

(iv) $\frac{M}{\text{Soc}^\oplus(M)}$ maksimal alt modüle sahip değildir.

(v) $\frac{M}{\text{Soc}(M)}$ maksimal alt modüle sahip değildir (Alizade ve Güngör, 2017).

Bir tümlenmiş modül eş-eşatomik tümlenmiştir ancak tersi doğru olmak zorunda değildir. Örneğin $\mathbb{Q} \mathbb{Z}$ -modülünü aldığımızda $\mathbb{Q}$ 'nun eş-eşatom alt modülü sadece kendisi olduğundan eş-eşatomik tümlenmiş modüldür, fakat $\mathbb{Q}$ burulmalı olmadığından tümlenmiş değildir.

3.30 Önerme M , radikali küçük olan bir yarı-lokal modül olarak verilsin. Bu durumda M 'nin eş-eşatomik tümlenmiş modül olması için gerek ve yeter koşul M 'nin tümlenmiş olmasıdır (Alizade ve Güngör, 2017).

Kanıt S 'nin, M 'de keyfi bir alt modül olduğunu varsayalım. M 'nin yarı-lokal olması sebebiyle $\frac{M}{\text{Rad}(M)}$ yarı-basit olup eşatomdur. $\frac{M}{S+\text{Rad}(M)} \cong \frac{\frac{M}{\text{Rad}(M)}}{\frac{S+\text{Rad}(M)}{\text{Rad}(M)}}$ izomorfizmasını göz önüne alalım. $\frac{M}{\text{Rad}(M)}$ eşatom olduğundan $\frac{M}{S+\text{Rad}(M)}$ eşatomdur. Dolayısıyla $S+\text{Rad}(M)$, M 'de bir T tümleyenine sahiptir. O halde $M = S+\text{Rad}(M)+T$ ve $(S+\text{Rad}(M)) \cap T \ll T$ 'dir. $\text{Rad}(M) \ll M$ olduğundan $M = S+T$ ve $S \cap T \leq (S+\text{Rad}(M)) \cap T \ll T$ olup M tümlenmiştir. $\square$

3.31 Önerme Eş-eşatomik tümlenmiş modüllerin bölüm modülleri de eş-eşatomik tümlenmiştir (Alizade ve Güngör, 2017).

Kanıt M eş-eşatomik tümlenmiş modül ve N , M 'nin keyfi bir alt modülü olsun. Bu takdirde $\frac{M}{N}$ 'nin keyfi eş-eşatom alt modülü, L M 'nin eş-eşatom alt modülü olmak üzere $\frac{L}{N}$ formunda bir alt modüldür. Varsayımdan L , M 'de bir K tümleyenine sahiptir. Teorem 3.2 (iv) gereğince $\frac{K+N}{N}$, $\frac{M}{N}$ 'de $\frac{L}{N}$ 'nin bir tümleyenidir. $\square$

3.32 Önerme M 'nin bir eş-eşatomik tümlenmiş modül olduğunu varsayalım. Bu durumda $\frac{M}{\text{Rad}(M)}$ 'nin her eş-eşatom alt modülü bir direkt toplam terimidir (Alizade ve Güngör, 2017).

Kanıt S , M 'nin bir eş-eşatom alt modülü olsun. $\frac{M}{\text{Rad}(M)}$ 'nin keyfi bir eş-eşatom alt modülü $\frac{S}{\text{Rad}(M)}$ formundadır. M eş-eşatomik tümlenmiş modül olduğundan $M = S+T$ ve $S \cap T \ll T$ şartlarını sağlayacak şekilde M 'nin bir T alt modülü mevcuttur. Yani $S \cap T \leq \text{Rad}(M)$ 'dir. Buradan $\frac{M}{\text{Rad}(M)} = \frac{S}{\text{Rad}(M)} + \frac{T+\text{Rad}(M)}{\text{Rad}(M)}$, $\frac{S}{\text{Rad}(M)} \cap \frac{T+\text{Rad}(M)}{\text{Rad}(M)} = \frac{S \cap T + \text{Rad}(M)}{\text{Rad}(M)} = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $\frac{M}{\text{Rad}(M)} = \frac{S}{\text{Rad}(M)} \oplus \frac{T+\text{Rad}(M)}{\text{Rad}(M)}$ 'dir. $\square$

3.33 Yardımcı Teorem S ve T alt modülleri, S eş-eşatom, T eş-eşatomik tümlenmiş ve $S+T$ M 'de bir tümleyene sahip olacak şekilde M 'nin alt modülleri olsun. Bu durumda S M 'de bir tümleyene sahiptir (Alizade ve Güngör, 2017).

Kanıt K , M 'de $S+T$ 'nin bir tümleyeni olarak verilsin. $\frac{T}{T \cap (S+K)} \cong \frac{S+K+T}{S+K} = \frac{M}{S+K}$ yazabiliriz. Son yazdığımız modül eşatom olup $T \cap (S+K)$ 'nin T 'de bir H tümleyeni vardır, yani, $T = H + T \cap (S+K)$ ve $H \cap T \cap (S+K) \ll H$ 'tır. Dolayısıyla $M = S+T+K = S+K+H+T \cap (S+K) = S+K+H$, $S \cap (H+K) \leq H \cap (S+K) + K \cap (S+H) \leq H \cap (S+K) + K \cap (S+T) \ll H+K$ 'dır. O halde $H+K$, M 'de S 'nin bir tümleyenidir. $\square$

3.34 Teorem Eş-eşatomik tümlenmiş modüllerin sonlu toplamı eş-eşatomik tümlenmiştir (Alizade ve Güngör, 2017).

Kanıt T_1 ve T_2 eş-eşatomik tümlenmiş modüller olmak üzere $M = T_1 + T_2$ toplamının eş-eşatomik tümlenmiş olduğunu göstermek yeterlidir. S M 'nin bir eş-eşatom alt modülü olsun. Bu durumda $M = T_1 + T_2 + S$ 'dir. $T_2 + S$, M 'nin bir eş-eşatom alt modülü ve T_1 eş-eşatomik tümlenmiş olduğundan $T_2 + S$ Yardımcı Teorem 3.33 gereğince M 'de bir tümleyene sahiptir. T_2 eş-eşatomik tümlenmiş ve S eş-eşatom olduğundan Yardımcı Teorem 3.33 gereğince, S M 'de bir tümleyene sahiptir. Dolayısıyla M eş-eşatomik tümlenmiştir. $\square$

3.35 Teorem N , $\frac{M}{N}$ maksimal alt modüle sahip olmayacak şekilde bir M R -modülünün eş-eşatomik tümlenmiş alt modülü olsun. Bu durumda M eş-eşatomik tümlenmiş modüldür (Alizade ve Güngör, 2017).

Kanıt $\frac{M}{L}$ eşatom olacak şekilde M 'nin L alt modülü verilsin. $\frac{M}{N+L}$ 'nin eşatom olduğu açıktır. $\frac{M}{N}$ maksimal alt modüle sahip olmadığından $\frac{M}{N+L}$ 'de maksimal alt modüle sahip değildir. Dolayısıyla $M = N + L$ 'dir. Yardımcı Teorem 3.33 gereğince L , M 'de bir tümleyene sahiptir. Böylece M eş-eşatomik tümlenmiş modüldür. $\square$

Aşağıda verilen sonuç Teorem 3.35'in direkt sonucudur.

3.36 Sonuç M bir modül ve $\frac{M}{\text{Soc}(M)}$ bölüm modülü maksimale sahip olmasın. Bu durumda M eş-eşatomik tümlenmiş modüldür (Alizade ve Güngör, 2017).

3.37 Teorem Her sol R -modülün eş-eşatomik tümlenmiş modül olması için gerek ve yeter koşul R 'nin sol mükemmel halka olmasıdır (Alizade ve Güngör, 2017).

3.6. Öz Sınıflar

3.14 Tanım P sol R -modüllerin ve R -modül homomorfizmalarının kısa tam dizilerinin bir sınıfı olmak üzere, eğer $E : 0 \longrightarrow S \xrightarrow{f} T \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi P 'de ise bu takdirde f 'e bir P -monomorfizması ve g 'ye bir P -epimorfizması denir.

Bir P sınıfı aşağıdaki özelliklere sahip ise P sınıfına (Buchsbaum anlamında) bir *öz sınıf* denir.

(P_1) Eğer $E : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\psi} S \xrightarrow{\phi} T \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi P 'de ise bu takdirde P, E 'ye izomorf bütün kısa tam dizileri içerir.

(P_2) P tüm parçalanmış kısa tam dizileri içerir.

(P_3) Eğer bileşke işlemi iyi tanımlı ise iki P -monomorfizmin bileşkesi yine bir P -monomorfizmdir.

(P'_3) Eğer bileşke işlemi iyi tanımlı ise iki P -epimorfizmin bileşkesi yine bir P -epimorfizmdir.

(P_4) ψ_1 ve ψ_2 monomorfizmalar ve $\psi_2 \circ \psi_1$ bir P -monomorfizması ise ψ_1 bir P -monomorfizmasıdır.

(P'_4) ϕ_1 ve ϕ_2 epimorfizmalar ve $\phi_2 \circ \phi_1$ bir P -epimorfizması ise ϕ_2 bir P -epimorfizmasıdır (Buchsbaum, 1959), (MacLane, 1963).

3.38 Örnek Bazı öz sınıf örneklerini aşağıda verelim.

1) Sol R -modüllerin tüm parçalanmış kısa tam dizilerinin sınıfı olan *Split* sınıfı, öz sınıfların en küçüğüdür.

2) Sol R -modüllerin tüm kısa tam dizilerinin sınıfı olan *Abs* sınıfı, öz sınıfların en büyüğüdür.

3) $Gör(\alpha)$, N 'nin bir alt modülünün tümleyeni olacak şekilde verilen tüm $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} K \longrightarrow 0$ kısa tam dizilerinin sınıfı olan *Suppl* sınıfı bir öz sınıftır.

4) $Gör(\alpha)$, S 'nin bir alt modülünün tamlayanı (complement) olacak şekilde verilen tüm $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} S \xrightarrow{\beta} T \longrightarrow 0$ kısa tam dizilerinin sınıfı olan *Compl* sınıfı bir öz sınıftır.

5) $Gör(\alpha)$, S 'nin bir alt modülünün *Rad*-tümleyeni olacak şekilde verilen tüm $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} S \xrightarrow{\beta} T \longrightarrow 0$ kısa tam dizilerinin sınıfı olan *Co - Neat* sınıfı bir öz sınıftır.

6) İnjektif bürümünde küçük olan modüllere *küçük modül* denir. Sol kalıtsal halkalar üzerinde, $Gör(\alpha)$ S 'de bir küçük tümleyene sahip, yani $S = Gör(\alpha) + V$ ve $Gör(\alpha) \cap V$ küçük modül olacak şekilde verilen tüm $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} S \xrightarrow{\beta} T \longrightarrow 0$ kısa tam dizilerinin sınıfı olan SS sınıfı bir öz sınıftır.

Bir P öz sınıfı ve M ile N R -modülleri için M ile başlayıp N ile biten, P 'de bulunan tüm kısa tam dizilerin denklik sınıfları $Ext_P^1(N, M)$ veya kısaca $Ext_P(N, M)$ ile gösterilirken M ile başlayıp N ile biten R -modüllerin ve R -modül homomorfizmalarının kısa tam dizilerinin tüm denklik sınıfları $Ext_R^1(N, M)$ veya kısaca $Ext_R(N, M)$ ile gösterilir (MacLane, 1963).

3.15 Tanım R bir halka ve P , R -modüllerin bir öz sınıfı olsun. Tüm T sol R -modülleri için $Ext_P(T, M) = Ext_R(T, M)$ oluyorsa yani, M ile başlayan, sol R -modüllerin her $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\psi} S \xrightarrow{\phi} T \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi P öz sınıfında ise M R -modülüne *P-koinjektif modül* denir. Eğer tüm T sol R -modülleri için $Ext_P(M, T) = 0$ ise (sırasıyla, $Ext_P(M, T) = Ext_R(M, T)$ ise) M modülüne *P-projektiftir* (sırasıyla *P-koprojektiftir*) denir (Pancar, 1997).

3.39 Önerme $0 \longrightarrow M \longrightarrow S \longrightarrow T \longrightarrow 0$ kısa tam dizisinde M ve T modülleri P -koprojektif ise (P -koinjektif ise), bu takdirde S , P -koprojektiftir (P -koinjektiftir) (Mišina ve Skornjakov, 1960).

3.40 Önerme $0 \longrightarrow M \longrightarrow S \longrightarrow T \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi bir P öz sınıfında kısa tam dizi ve S , P -koinjektif modül olarak verilsin. Bu durumda M P -koinjektif modüldür (Mišina ve Skornjakov, 1960).

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde teze ait temel tanım ve kavramlar verilerek elde edilen veriler sistematik bir şekilde sunulacak ve analizler detaylı bir şekilde verilecektir. Ayrıca elde edilen bulgular önceki literatür bulguları ile ilişkilendirilecektir. Şimdi tümleyen alt modül türlerinde yeni kavram olan "*ps*-tümleyen alt modül" kavramı ile başlayalım.

4.1. *Ps*-Tümleyen Alt Modüller

4.1 Tanım M modül ve $S, T \leq M$ olmak üzere $M = S + T$ ve $S \cap T$ projektif yarı-basit ise T 'ye M 'de S 'nin *ps*-tümleyeni denir.

Önceki kısımda öz sınıf kavramını ve bazı öz sınıf örneklerini verdik. Aşağıdaki sonuç R.J. Nunke'ye aittir.

4.1 Teorem (Nunke, 1963, Teorem 1.1) P sol R -modüller için kısa tam dizilerin bir sınıfı olsun. Her M, T R -modülleri için $Ext_P(T, M)$, $Ext_R(T, M)$ 'nin alt fonktoru, $Ext_P(T, M)$, $Ext_R(T, M)$ 'nin bir alt grubu ve iki P -monomorfizmanın (sırasıyla P -epimorfizmanın) birleşimi bir P -monomorfizma (sırasıyla bir P -epimorfizma) ise P bir öz sınıftır.

Teorem 4.1'i kullanarak, $Gör(\psi)$ S 'de bir *ps*-tümleyen olacak şekilde tüm $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\psi} S \xrightarrow{\phi} T \longrightarrow 0$ kısa tam dizilerinin sınıfı olan PS -sınıfının keyfi bir halka üzerinde öz sınıf olduğunu göstereceğiz. İlk olarak aşağıdaki gerçeği vererek başlayacağız. Bir τ kalıtsal torsion teori:

- (i) Her $M \in \mathbb{T}$ ve $S \in \mathbb{F}$ için $Hom(M, S) = 0$ dır.
- (ii) $\mathbb{T}$ alt modüller, genişlemeler, bölüm modülleri ve direkt toplamalar altında kapalıdır.
- (iii) $\mathbb{F}$ alt modüller, genişlemeler ve direkt çarpımlar altında kapalıdır.

şartlarını sağlayacak şekilde $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ modül sınıflarının bir çiftidir. Bu durumda $\mathbb{T}$ ve $\mathbb{F}$ 'ye sırasıyla *torsion sınıf* ve *torsion-serbest sınıf* denir. Bir kalıtsal torsion teori $R - Mod$ üzerindeki τ sol tam radikali ile $\mathbb{T} = \{M \in R - Mod : \tau(M) = M\}$ ve $\mathbb{F} = \{S \in R - Mod : \tau(S) = 0\}$ olacak şekilde teklikle belirlidir. Dolayısıyla burada $\tau := (\mathbb{T}, \mathbb{F})$, kalıtsal torsion teori olarak bilinir (Clark ve diğerleri, 2006).

Bir M modülü için M 'nin tüm projektif basit alt modüllerinin toplamını $Soc_P(M)$ ile ifade edeceğiz.

$$Soc_P(M) = \sum \{S \subseteq M \mid S \text{ basit ve projektif}\} \quad (4.1)$$

Bu takdirde $Soc_P(M) \subseteq Soc(M)$ ve $Soc_P(M)$ M 'nin en geniş projektif yarı-basit alt modülüdür.

Şimdi aşağıdaki gerçekleri verebiliriz.

4.2 Yardımcı Teorem Projektif yarı-basit modüllerin sınıfı alt modüller, bölüm modülleri, direkt toplamlar, toplamlar ve genişlemeler altında kapalıdır.

Kanıt M 'nin projektif yarı-basit modül ve N 'nin M 'de keyfi alt modül olduğunu varsayalım. M modülünün yarı-basit olmasından ötürü her alt modülü direkt toplam terimi olup $M = N \oplus K$ eşitliğini sağlayacak bir $K \leq M$ mevcuttur. M projektif olduğundan direkt toplam terimleri de projektif ve M yarı-basit olduğundan direkt toplam terimleri de yarı-basit olup N projektif yarı-basittir.

$\psi : M \rightarrow X$ epimorfizmasını alalım. $\frac{M}{\check{C}ek(\psi)} \cong X$ olduğunu biliyoruz. M yarı-basit modül olduğundan $\check{C}ek(\psi) \oplus Y = M$ yazabiliriz. Burada $X \cong \frac{M}{\check{C}ek(\psi)} \cong Y$ ve Y projektif yarı-basit olduğundan X projektif yarı-basittir.

$\{M_i\}_{i \in I}$ projektif yarı-basit modüller topluluğu olsun. $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ alalım. Projektif modüllerin direkt toplamları projektif ve yarı-basit modüllerin direkt toplamları yarı-basit olduğundan M projektif yarı-basittir.

M modül ve $\{M_i\}_{i \in I}$ projektif yarı-basit alt modüller topluluğu olsun. $N = \sum_{i \in I} M_i$ olmak üzere $\psi : \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow N$ epimorfizmasını alalım. $M = \frac{\bigoplus_{i \in I} M_i}{\check{C}ek(\psi)} \cong N = \sum_{i \in I} M_i$ olup N projektif yarı-basittir.

$\mathbb{E} : 0 \rightarrow M \rightarrow S \rightarrow T \rightarrow 0$ kısa tam dizisini alalım. M ve T projektif yarı-basit olsun. $\mathbb{E}$ kısa tam dizi ve T projektif olduğundan Teorem 2.30 gereğince $S = M \oplus T$ yazabiliriz. M ve T projektif yarı-basit ve direkt toplamları da projektif yarı-basit olduğundan S projektif yarı-basittir. $\square$

4.3 Yardımcı Teorem Bir R halkası için $\mathbb{T}$ tüm projektif yarı-basit R -modüllerin sınıfı ve $\mathbb{F}$ sıfırdan farklı projektif yarı-basit alt modüllere sahip olmayan tüm R -modüllerin sınıfı olsun. Bu durumda $\tau := (\mathbb{T}, \mathbb{F})$ bir eşkalıtsal torsion teoridir.

Kanıt $\frac{X}{Soc_P(M)}$ 'nin, $\frac{M}{Soc_P(M)}$ 'de projektif basit olduğunu varsayalım. $\frac{X}{Soc_P(M)}$ projektif olduğundan $0 \rightarrow Soc_P(M) \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\pi} \frac{X}{Soc_P(M)} \rightarrow 0$ kısa tam dizisi parçalanandır. Dolayısıyla $X \cong Soc_P(M) \oplus \frac{X}{Soc_P(M)}$ ve böylece $\frac{X}{Soc_P(M)} \cong Y$ izomorfizmasını sağlayacak şekilde X 'in Y alt modülü vardır. O halde Y basit ve projektiftir. Buradan $Y \subseteq Soc_P(X) \subseteq Soc_P(M)$ olup bu

bir çelişkidir. Dolayısıyla $Soc_P(\frac{M}{Soc_P(M)}) = 0$ 'dır. $\square$

Yardımcı Teorem 4.3'ten, homomorfizmalar ile tüm sol R -modüllerin $R - Mod$ kategorisinde, Soc_P öncül radikalının idempotent ve radikal olduğu gözlemlenir.

4.4 Yardımcı Teorem $g : M' \longrightarrow M$ bir homomorfizma olmak üzere, $g^* : Ext(M, K) \longrightarrow Ext(M', K)$ PS -sınıfından elemanları korur.

Kanıt $\mathbb{E} : 0 \longrightarrow K \longrightarrow L \xrightarrow{h} M \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi PS -sınıfında ve $g : M' \longrightarrow M$ bir homomorfizma olsun. Bu takdirde $g^*(\mathbb{E}) = \mathbb{E}_1$ olmak üzere aşağıdaki diyagram, verilen tam diziler ile değişmelidir.

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbb{E}_1 : 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & L' & \xrightarrow{h'} & M' & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow g_1 & & \downarrow g & & \\ \mathbb{E} : 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & L & \xrightarrow{h} & M & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (4.2)$$

V, L' 'de $\text{Çek}(h)$ 'ın bir ps -tümleyeni olsun. Bu takdirde $\text{Çek}(h) + V = L$ ve $\text{Çek}(h) \cap V$ projektif yarı-basittir. Dolayısıyla Pullback diagramından $g_1^{-1}(V) \cap \text{Çek}(h') = L'$ yazabiliriz. $g_1, g_1^{-1}(V) \cap \text{Çek}(h')$ ve $\text{Çek}(h) \cap V$ arasında bir izomorfizma olduğundan Sonuç 2.32 (ii) ve Sonuç 2.46 (ii) gereğince $g_1^{-1}(V) \cap \text{Çek}(h')$ projektif yarı-basit modüldür. Dolayısıyla $\mathbb{E}_1 \in PS$ olur. $\square$

4.5 Yardımcı Teorem $f : M \longrightarrow M'$ bir homomorfizma olmak üzere, $f_* : Ext_R(T, M) \longrightarrow Ext_R(T, M')$ PS -sınıfından elemanları korur.

Kanıt $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\psi} S \xrightarrow{\phi} T \longrightarrow 0$ PS 'de bir kısa tam dizi olsun. $H = \{(-f(m), \psi(m)) \in M' \oplus S \mid m \in M\}$ ile verilen H 'ın $M' \oplus S$ 'nin bir alt modülü olduğunu varsayalım ve $S' = \frac{M' \oplus S}{H}$ sol R -modülünü alalım. $\psi'(m') = (m', 0) + H$ ile verilen $\psi' : M' \longrightarrow S', \phi'((m', n)) = \phi(n)$ ile verilen $\phi' : S' \longrightarrow T$ ve $h(n) = (0, n) + H$ ile verilen $h : N \longrightarrow S'$ sol R -modül homomorfizmalarını tanımlayalım. Bu takdirde $f_*(\mathbb{E}) = f\mathbb{E} : 0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\psi'} S' \xrightarrow{\phi'} T \longrightarrow 0$ ve tam satırlı aşağıdaki değişmeli, yani, $\psi' \circ f = h \circ \psi$ ve $\phi' \circ h = \phi$ eşitliklerini sağlayan diyagramı çizebiliriz.

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbb{E} : 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\psi} & S & \xrightarrow{\phi} & T & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow h & & \parallel & & \\ f\mathbb{E} : 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{\psi'} & S' & \xrightarrow{\phi'} & T & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (4.3)$$

$\mathbb{E} : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\psi} S \xrightarrow{\phi} T \longrightarrow 0$ sol R -modüllerin PS sınıfında bir genişlemesi olduğundan

$S = \text{Gör}(\psi) + V$ ve $\text{Gör}(\psi) \cap V$ projektif yarı-basit olacak şekilde S modülünde bir V alt modülü mevcuttur. Yukarıda verilen değişmeli diyagramı kullanırsak $S' = \text{Gör}(\psi') + \text{Gör}(h)$ ve $\text{Gör}(\psi') \cap \text{Gör}(h) = h(\text{Gör}(\psi) \cap V)$ eşitliğini yazabiliriz. Yardımcı Teorem 4.2'den $\text{Gör}(\psi) \cap V$ projektif yarı-basit modülünün bir homomorfik görüntüsü olarak $\text{Gör}(\psi') \cap \text{Gör}(h)$ projektif yarı-basittir. Dolayısıyla $\text{Gör}(h)$, S' 'de $\text{Gör}(\psi')$ 'nin bir ps -tümleyeni olur ve böylece $f \circ \mathbb{E} = f_*(\mathbb{E}) \in PS$ elde edilir. $\square$

4.6 Yardımcı Teorem Eğer $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2 \in \text{Ext}_{PS}(T, M)$ olarak alınırsa, bu takdirde $\mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2 \in \text{Ext}_{PS}(T \oplus T, M \oplus M)$ 'dir.

Kanıt $\mathbb{E}_1 : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{f_1} S_1 \xrightarrow{g_1} T \longrightarrow 0$ ve $\mathbb{E}_2 : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{f_2} S_2 \xrightarrow{g_2} T \longrightarrow 0$ genişlemeleri $\text{Ext}_{PS}(T, M)$ nin iki elemanı olsun. Bu takdirde $S_1 = M + V_1$ ve $M \cap V_1$ projektif yarı-basit ve $S_2 = M + V_2$ ve $M \cap V_2$ projektif yarı-basit olacak şekilde $V_1 \leq S_1$ ve $V_2 \leq S_2$ alt modülleri vardır. $(M \oplus M) + (V_1 \oplus V_2) = S_1 \oplus S_2$ ve $(M \oplus M) \cap (V_1 \oplus V_2) = (M \cap V_1) \oplus (M \cap V_2)$ olup Yardımcı Teorem 4.2'den $f = f_1 \oplus f_2$ ve $g = g_1 \oplus g_2$ olmak üzere $\mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2 : 0 \longrightarrow M \oplus M \xrightarrow{f} S_1 \oplus S_2 \xrightarrow{g} T \oplus T \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi $\text{Ext}_{PS}(T \oplus T, M \oplus M)$ 'ye aittir. $\square$

4.7 Sonuç Her K ve M R -modülü için aşağıdakiler vardır.

- (i) $\text{Ext}_{PS}(K, M), \text{Ext}_R(K, M)$ genişlemesinin bir alt grubudur.
- (ii) $\text{Ext}_{PS}(K, M), \text{Ext}_R(K, M)$ fonktörünün bir alt fonktörüdür.

Kanıt (i) $\mathbb{E}_1$ ve $\mathbb{E}_2, \text{Ext}_{PS}(K, M)$ 'nin keyfi elemanları olsun. Yardımcı Teorem 4.6'dan $\mathbb{E}_1$ ve $\mathbb{E}_2$ genişlemelerinin toplamı $\text{Ext}_{PS}(K, M)$ 'dedir. Dolayısıyla $\text{Ext}_{PS}(K, M), \text{Ext}_R(K, M)$ nin bir alt grubudur.

(ii) Yardımcı Teorem 4.4, Yardımcı Teorem 4.5 ve (i) gereğince $\text{Ext}_{PS}(K, M), \text{Ext}_R(K, M)$ fonktörünün bir alt fonktörüdür. $\square$

4.8 Teorem R keyfi bir halka olsun. Bu durumda PS bir öz sınıftır.

Kanıt Teorem 4.1 ve Sonuç 4.7 gereğince iki PS -epimorfizmasının bileşkesinin bir PS -epimorfizması olduğunu göstermek yeterlidir. $f : N \longrightarrow N'$ ve $g : N' \longrightarrow K$ birer PS -epimorfizmaları olsunlar. $i_{\text{Çek}(f)}$ ve $i_{\text{Çek}(g)}$ kanonik injeksiyonlar olmak üzere biz tam satır ve

sütunlu aşağıdaki diyagrama sahibiz;

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \zeta ek(f) & \xrightarrow{i_{\zeta ek(f)}} & M & \longrightarrow & \zeta ek(g) \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow i_{\zeta ek(g)} \\
 0 & \longrightarrow & \zeta ek(f) & \longrightarrow & N & \xrightarrow{f} & N' \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow g \\
 & & & & K & \xlongequal{\quad} & K \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array} \tag{4.4}$$

Hipotezden N 'nin bir V alt modülü için $N = \zeta ek(f) + V$ ve $\zeta ek(f) \cap V$ projektif yarı-basit yazabiliriz. Bununla birlikte $\zeta ek(g) \cong \frac{M}{\zeta ek(f)}$, $\zeta ek(g) \leq N' \cong \frac{N}{\zeta ek(f)}$ ve $\frac{N}{\zeta ek(f)}$ 'in bir $\frac{L}{\zeta ek(f)}$ alt modülü için $\frac{M}{\zeta ek(f)} + \frac{L}{\zeta ek(f)} = \frac{N}{\zeta ek(f)}$ 'tir. Böylece $\frac{M \cap L}{\zeta ek(f)}$ projektif yarı-basittir.

Dolayısıyla, $M = M \cap N = M \cap (\zeta ek(f) + V) = \zeta ek(f) + M \cap V$, $M \cap L = \zeta ek(f) + M \cap V \cap L$ ve $L = \zeta ek(f) + L \cap V$ 'dir. Buradan $N = M + (V \cap L)$ elde edilir. Böylece $\frac{M \cap L}{\zeta ek(f)} \cong \frac{M \cap V \cap L}{\zeta ek(f) \cap (M \cap V \cap L)} = \frac{M \cap V \cap L}{\zeta ek(f) \cap V}$ olur. $\frac{M \cap L}{\zeta ek(f)}$, $\zeta ek(f) \cap V$ ve $\frac{M \cap V \cap L}{\zeta ek(f) \cap V}$ projektif yarı-basit modüller olduğundan Yardımcı Teorem 4.2'den $M \cap V \cap L$ projektif yarı-basit modüldür. Dolayısıyla $g \circ f$ bir PS -epimorfizmasıdır. $\square$

4.2 Tanım M ile başlayan, sol R -modüllerin her $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\psi} S \xrightarrow{\phi} T \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi PS öz sınıfında ise M 'ye PS -koinjektif modül denir. M 'nin PS -koinjektif modül olması için gerek ve yeter koşul her genişlemesinde ps -tümleyen olmasıdır. İnjektif modüllerin ve projektif yarı-basit modüllerin PS -koinjektif modül örnekleri olduğu açıktır. Burada bir PS -koinjektif modülün ne zaman bir injektif modül olacağı sorusu ortaya çıkmaktadır. Bu soruya aşağıdaki teorem ile cevap vereceğiz.

4.9 Teorem R bir halka olmak üzere aşağıda verilen ifadeler denktir.

- (i) Her PS -koinjektif R -modül injektiftir.
- (ii) Her projektif yarı-basit R -modül injektiftir.

Kanıt (i) $\implies$ (ii) Projektif yarı-basit modüller PS -koinjektif olduğundan açıktır.

(ii) $\implies$ (i) M bir PS -koinjektif modül ve $M \subseteq S$ olarak verilsin. Bu durumda $S = M + T$ ve $M \cap T$ projektif yarı-basit olacak şekilde S 'de bir T alt modülü mevcuttur. (ii) gereğince

$M \cap T$ injektif olup buradan $L \subseteq T$ alt modülü için $T = M \cap T \oplus L$ yazabiliriz. Buradan $S = M + T = M + (M \cap T) \oplus L = M \oplus L$ olup M injektiftir. $\square$

Her $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\psi} S \xrightarrow{\phi} T \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi saf tam dizi ise yani, $\psi(M)$ S 'nin saf alt modülü ise M 'nin ve Teorem 2.52 gereğince her projektif R -modülün düz modül olduğunu biliyoruz. Bir değişmeli halka üzerinde bir basit modülün düz olması için gerek ve yeter koşulun injektif olması durumu Yardımcı Teorem 2.51'de ifade edilmiştir. Bu gerçeği kullanarak aşağıdaki sonucu verelim.

4.10 Sonuç R bir değişmeli Noether halka olsun. Bu takdirde her PS -koinjektif R -modül injektiftir.

Kanıt Teorem 4.9 gereğince her projektif yarı-basit R -modülün injektif olduğunu göstermek yeterlidir. M bir projektif yarı-basit R -modül olsun. Eğer $M = 0$ ise bu durumda injektiftir. $M \neq 0$ olduğunu varsayalım. O halde $M = \bigoplus_{i \in I} S_i$ eşitliğini sağlayacak şekilde M 'nin projektif basit modüllerinin bir $\{S_i\}_{i \in I}$ topluluğu vardır. Projektif modüller düz olduğundan her $i \in I$ için S_i düzdür ve böylece Yardımcı Teorem 2.51 gereğince S_i injektif ve Sonuç 2.39 gereğince M injektiftir. $\square$

Bir R halkası yarı-basittir $\iff$ Her devirli sol R -modül injektiftir $\iff$ Her basit sol R -modül projektiftir. Şimdi vereceğimiz önerme bizim için çok önemlidir.

4.11 Önerme R sol V -halka olmayan bir sol WV -halka olarak verilsin. Bu durumda her PS -koinjektif R -modül injektiftir.

Kanıt M bir PS -koinjektif R -modül olsun. R sol V -halka olmayan bir sol WV -halka olduğundan Teorem 2.81 ve Yardımcı Teorem 2.84 gereğince $\text{Rad}({}_R R)$ basit ve ${}_R R$ büyük (essential) modüldür. Dolayısıyla R bir projektif yarı-basit modüle sahip değildir. P projektif yarı-basit R -modül olsa $P = 0$ olur ve böylece injektif olur. Dolayısıyla Teorem 4.9 gereğince M injektiftir. $\square$

4.12 Teorem R bir halka olsun. Her PS -koinjektif R -modülün injektif olduğunu varsayalım. Bu takdirde S bir yarı-basit halka ve T , singüler desteğe sahip bir halka olmak üzere $R = S \times T$ 'dir.

Kanıt Varsayımdan ve Teorem 4.9'dan R 'nin projektif yarı-basit $\text{Soc}_P({}_R R)$ sol ideali injektiftir ve böylece $S = \text{Soc}_P(M)$ ve T , R 'nin bir sol ideali olmak üzere $R = S \oplus T$ yazabiliriz.

$Soc(T)$ 'nin singüler olduğu açıktır. $R = S \oplus T$ ayrışımı, R 'nin, halkaların bir ayrışımı olarak yazıldığını gösterir. $\square$

Aşağıdaki önerme PS -koinjektif R -modüllerin sınıfının tüm singüler destekli modüller tarafından injektif olarak üretildiğini gösterir.

4.13 Önerme $\mathbb{E} : 0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow K \longrightarrow 0$ modüllerin bir kısa tam dizisi olsun. Bu durumda $\mathbb{E} \in PS$ olması için gerek ve yeter koşul verilen her X singüler destekli modülü için $Hom(N, X) \longrightarrow Hom(M, X) \longrightarrow 0$ olmasıdır.

Kanıt ($\implies$) $f : M \longrightarrow X$, singüler $Soc(X)$ ile bir homomorfizma olsun. $f_*(\mathbb{E}) : 0 \longrightarrow X \xrightarrow{g} T \longrightarrow K \longrightarrow 0$ dizisinin parçalanmış olduğunu göstermek yeterlidir. PS bir öz sınıf olduğundan $f_*(\mathbb{E}) \in PS$ 'dir. Bu takdirde $g(X) + S = T$ ve $g(X) \cap S$ projektif yarı-basit olacak şekilde $S \leq T$ vardır. $Soc(g(X))$ singüler olduğundan $g(X) \cap S = 0$ ve böylece $f_*(\mathbb{E})$ parçalanandır.

($\impliedby$) $X = \frac{M}{Soc_p(M)}$ verilsin. Yardımcı Teorem 4.3 gereğince $\frac{M}{Soc_p(M)}$ bir singüler desteğe sahiptir. Varsayımdan $\frac{M}{Soc_p(M)} \oplus \frac{K}{Soc_p(M)} = \frac{N}{Soc_p(M)}$ eşitliğini sağlayacak şekilde $\frac{N}{Soc_p(M)}$ 'nin bir $\frac{K}{Soc_p(M)}$ alt modülü mevcuttur. Böylece $M + K = N$ ve $M \cap K \subseteq Soc_p(M)$ 'dir. $\square$

4.14 Önerme M bir PS -koinjektif modül ve N, M 'de bir ps -tümleyen olsun. Bu takdirde N PS -koinjektiftir.

Kanıt N 'nin M 'de bir ps -tümleyen olduğunu varsayalım. Bu durumda $\mathbb{E} : 0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow \frac{M}{N} \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi PS 'de bir kısa tam dizidir. Yani M 'nin bir V alt modülü için $N + V = M$ ve $N \cap V$ projektif yarı-basittir. Böylece Önerme 3.40'tan N PS -koinjektiftir. $\square$

Aşağıdaki sonuç Önerme 4.14'ün bir direkt sonucudur.

4.15 Sonuç Bir PS -koinjektif modülün her direkt toplam terimi PS -koinjektiftir.

Gelecek sonuç PS -koinjektif modüllerin sınıfının genişlemeler altında kapalı olduğunu gösterir.

4.16 Önerme $\mathbb{E} : 0 \longrightarrow M \longrightarrow S \longrightarrow T \longrightarrow 0$ dizisi modüllerin bir kısa tam dizisi olsun. M ve T , PS -koinjektif ise bu takdirde S , PS -koinjektiftir.

Kanıt Önerme 3.39'dan açıktır. $\square$

Önerme 4.16'yı kullanarak PS -koinjektif modüllerin her sonlu direkt toplamının PS -koinjektif olduğu tümevarım yoluyla görülebilir.

4.17 Yardımcı Teorem $M \subseteq S \subseteq T$ olmak üzere M, S ve T modüllerini alalım. S, T 'nin bir direkt toplam terimi olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) M, T 'de bir ps -tümleyendir.

(ii) M, S 'de bir ps -tümleyendir.

Kanıt (i) $\implies$ (ii) (i) gereğince $M + L = T$ ve $M \cap L$ projektif yarı-basit olacak şekilde T 'nin bir L alt modülü mevcuttur. Modüler kuraldan $N = S \cap T = S \cap (M + L) = M + (S \cap L)$ yazabiliriz. Buradan $M \cap (S \cap L) = M \cap L$ projektif yarı-basittir. Bu ise M 'nin S 'de bir ps -tümleyen olduğu anlamına gelir.

(ii) $\implies$ (i) Bir $W \subseteq T$ alt modülü için $S \oplus W = T$ olsun. (ii)'den bir $X \subseteq S$ alt modülü için $S = M + X$ ve $M \cap X$ projektif yarı-basit yazabiliriz. Bu takdirde $T = S \oplus W = (M + X) \oplus W = M + (X \oplus W)$ ve $M \cap (X \oplus W) = M \cap X$ olup istenen elde edilir. $\square$

Aşağıdaki teorem injektif bürümler açısından PS -koinjektif modüllerin yapısını tamamen belirler.

4.18 Teorem M bir modül olmak üzere M 'nin PS -koinjektif olması için gerek ve yeter koşul M 'nin $E(M)$ 'de bir ps -tümleyen olmasıdır.

Kanıt ($\implies$) Açık.

($\impliedby$) $M, E(M)$ 'de bir ps -tümleyen ve S, M 'nin keyfi bir genişlemesi olsun. $E(M) \leq E(S)$ olduğundan $E(S) = E(M) \oplus U$ eşitliğini sağlayacak şekilde $U \leq S$ alt modülü vardır. $M, E(M)$ 'de bir ps -tümleyen olduğundan Yardımcı Teorem 4.17 gereğince $M, E(S)$ 'de de bir ps -tümleyendir. Dolayısıyla $E(S) = M + T$ ve $M \cap T$ projektif yarı-basit olacak şekilde $E(S)$ 'nin bir T alt modülü vardır. Modüler kuraldan $S = S \cap E(S) = S \cap (M + T) = M + (S \cap T)$ yazabiliriz ve $M \cap (S \cap T) = (M \cap S) \cap T = M \cap T$ projektif yarı-basittir. Bu ise M 'nin PS -koinjektif olduğu anlamına gelir. $\square$

4.19 Sonuç M bir modül olmak üzere M 'nin PS -koinjektif olması için gerek ve yeter koşul $\frac{M}{Soc_P(M)}$ 'nin $\frac{E(M)}{Soc_P(M)}$ 'nin bir direkt toplam terimi olmasıdır.

Kanıt Teorem 4.18 ve Önerme 4.13'ten açıktır. $\square$

R bir halka olsun. Bir injektif R -modülün her bölüm modülü injektif ise R halkasına *sol kalıtsal halka* denir. Kalıtsal modüllerin direkt toplamı da kalıtsaldır (Wisbauer, 1991).

Şimdi sol kalıtsal halkalar üzerinde PS -koinjektif modülleri karakterize edelim. İlk olarak aşağıdaki gerçeğe ihtiyacımız var.

4.20 Önerme PS -koinjektif modüllerin sınıfının bölüm modülleri altında kapalı olması için gerek ve yeter koşul injektif modüllerin bölüm modüllerinin PS -koinjektif olmasıdır.

Kanıt $(\implies)$ Açık.

$(\impliedby)$ M bir PS -koinjektif modül ve $T \subseteq M$ olarak verilsin. M 'nin PS -koinjektif modül olması sebebiyle $E(M)$ 'de bir ps -tümleyendir. Bu takdirde öz sınıfların özelliklerinden $\frac{M}{T}$, $\frac{E(M)}{T}$ 'de bir ps -tümleyendir. Hipotezden $\frac{E(M)}{T}$ PS -koinjektiftir. Dolayısıyla Önerme 4.14'ten $\frac{M}{T}$ PS -koinjektif modüldür. $\square$

4.21 Önerme M singüler desteğe sahip bir modül olsun. Eğer M PS -koinjektif ise bu durumda injektiftir.

Kanıt S , M 'nin keyfi bir genişlemesi olsun. M 'nin PS -koinjektif modül olması gereğince M , S 'de bir ps -tümleyendir. Bu takdirde $M + T = S$ ve $M \cap T$ projektif yarı-basit olacak şekilde S 'nin bir T alt modülü vardır. $Soc(M) \subseteq Z(M)$ olduğundan $M \cap T = 0$ elde edilir. Böylece S , T ve M 'nin bir direkt toplamıdır. Bu ise M 'nin bir injektif modül olduğu anlamına gelir. $\square$

4.22 Teorem R bir sol kalıtsal halka ve M bir R -modül olarak verilsin. Bu takdirde aşağıdaki durumlar denktir.

- (i) M PS -koinjektiftir.
- (ii) M 'nin her bölüm modülü PS -koinjektiftir.
- (iii) $Soc_P(M) \subseteq U \subseteq M$ olmak üzere $\frac{M}{U}$ injektiftir.
- (iv) $\frac{M}{Soc_P(M)}$ injektiftir.

Kanıt $(i) \implies (ii)$ R bir sol kalıtsal halka olduğundan Önerme 4.20'den açıktır.

$(ii) \implies (iii)$ Önerme 4.21'den açıktır.

$(iii) \implies (iv)$ Açıktır.

(iv) $\implies$ (i) Sonuç 4.19'dan görülür. $\square$

Bir basit modül keyfi bir halka üzerinde projektif veya singüler olduğundan, singüler basit modülleri injektif olan halkaları göz önüne alalım. Her basit singüler sol R -modülü injektif olan R halkasına GV -halka denir. Her V -halkanın bir GV -halka olduğu açıktır. (Huynh ve diğerleri, 1994) te belirtildiği gibi her singüler sol R -modülü injektif olan halkaya SI -halka denir. Her öz devirli sol R -modülü injektif olan R halkasına PCI -halka denir. Bir R bölgesinin PCI -halka olması için gerek ve yeter koşul SI -halka olmasıdır. PCI -halkalar ve SI -halkalar birer V -halka örnekleridir. Halkaların bu sınıfları araştırmacılar tarafından çokça araştırılmaktadır. Şimdi SI -halkalar ve GV -halkaların bir karakterizasyonunu vereceğiz.

4.23 Önerme R bir halka olsun. Bu takdirde R 'nin SI -halka olması için gerek ve yeter koşul her singüler R -modülün PS -koinjektif olmasıdır.

Kanıt ($\implies$) Açık.

($\impliedby$) M keyfi bir singüler R -modül olsun. Önerme 4.21'den M injektiftir. Dolayısıyla R bir SI -halkadır. $\square$

4.24 Önerme R bir halka olsun. Bu takdirde R 'nin bir GV -halka olması için gerek ve yeter koşul her basit R -modülün PS -koinjektif olmasıdır.

Kanıt ($\implies$) S bir basit R -modül olsun. S projektif ise açıktır. S 'nin singüler olduğunu varsayalım. Dolayısıyla R bir GV -halka olduğundan S injektiftir. Böylece S , PS -koinjektiftir.

($\impliedby$) S bir singüler basit R -modül olsun. Hipotezden S , PS -koinjektiftir. Böylece S , Önerme 4.21'den injektiftir. Bu ise R 'nin GV -halka olduğu anlamına gelir. $\square$

$\mathcal{M}$ modüllerinin sınıflarından her modül için en küçük öz sınıf koinjektiftir ve $\underline{k}(\mathcal{M})$ ile ifade edilir. Bu tür sınıflar $\mathcal{M}$ tarafından *koinjektif üretilmiştir* şeklinde adlandırılır.

4.25 Önerme R bir halka olsun. R -modüllerin PS öz sınıfı projektif yarı-basit modüller tarafından koinjektif olarak üretilmiştir.

Kanıt $M \subseteq Soc_P(S)$ olacak şekilde $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\psi} S \xrightarrow{\phi} T \longrightarrow 0$ kısa tam dizilerinin sınıfı $\mathcal{X}$ olsun. $PS = \underline{k}(\mathcal{X})$ olduğunu göstereceğiz. Her projektif yarı-basit R -modül PS -koinjektif olduğundan $\underline{k}(\mathcal{X}) \subseteq PS$ 'dir. Ayrıca Önerme 4.14 gereğince $PS \subseteq \underline{k}(\mathcal{X})$ olup istenen elde edilir. $\square$

Bir P öz sınıfını alalım. Eğer tüm T sol R -modülleri için $Ext_P(M, T) = 0$ ise (sırasıyla, $Ext_P(M, T) = Ext_R(M, T)$ ise) M modülüne P -projektiftir (sırasıyla P -koprojektiftir) denir.

4.26 Teorem M bir R -modül olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) M PS -koprojektiftir.
- (ii) Her projektif yarı-basit T modülü için $Ext_R(M, T) = 0$ 'dır.

Kanıt (i) $\implies$ (ii) Açıktır.

(ii) $\implies$ (i) $0 \longrightarrow S \xrightarrow{\psi} T \xrightarrow{\phi} W \longrightarrow 0$ PS sınıfının keyfi bir elemanı olsun. Buradan T 'nin bazı V alt modülleri için $T = S + V$ ve $S \cap V$ projektif yarı-basittir. Bu takdirde i_1 kanonik injeksiyon ve π_1 kanonik projeksiyon olmak üzere $0 \longrightarrow \frac{S}{S \cap V} \xrightarrow{i_1} \frac{T}{S \cap V} \xrightarrow{\pi_1} \frac{V}{S \cap V} \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi parçalanandır. $\pi_{S \cap V}$ ve π kanonik projeksiyonlar olmak üzere aşağıdaki değişmeli diyagramı yazabiliriz.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & S & \xrightarrow{\psi} & T & \xrightarrow{\phi} & W \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \pi_{S \cap V} & & \downarrow \pi & & \downarrow I_W \\
 0 & \longrightarrow & \frac{S}{S \cap V} & \xrightarrow{i_1} & \frac{T}{S \cap V} & \xrightarrow{f \pi_1} & \frac{V}{S \cap V} \longrightarrow 0
 \end{array} \tag{4.5}$$

Burada $Hom(M, .)$ fonktörünü uygulayarak aşağıdaki diyagramı elde ederiz.

$$\begin{array}{ccccccc}
 Hom(M, T) & \xrightarrow{\phi_*} & Hom(M, W) & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow \pi_* & & \parallel & & \\
 Hom(M, \frac{T}{S \cap V}) & \xrightarrow{(f \pi_1)_*} & Hom(M, W) & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & & & \\
 Ext_R(M, S \cap V) & & & &
 \end{array} \tag{4.6}$$

Bu takdirde $(f \pi_1)_*$ bir epimorfizmadır. (ii)'den $Ext_R(M, S \cap V) = 0$ 'dır. Böylece π_* bir epimorfizmadır. Bu ise ϕ_* 'ın bir epimorfizma olduğu anlamına gelir. Sonuç olarak M PS -koprojektiftir. $\square$

Keyfi bir R halkası için $\delta(R) = \delta_R(R)$ olsun.

4.27 Önerme R bir halka ve $\delta(R) = 0$ olsun. Bu takdirde PS -koprojektif R -modüller sadece

projektif modülleridir.

Kanıt M 'nin bir PS -koprojektif R -modül olduğunu varsayalım. Her R -modül bir serbest R -modülün bir bölüm modülü olduğundan bir F serbest R -modülü vardır ve $\psi : F \rightarrow M$ bir epimorfizmadır. $U = \text{Çek}(\psi)$ olarak alalım. U bir içirme dönüşümü olmak üzere $0 \rightarrow U \xrightarrow{1} F \xrightarrow{\psi} M \rightarrow 0$ kısa tam dizisini göz önünde bulunduralım. Hipotezden $F = U + V$ ve $U \cap V$ projektif yarı-basit olacak şekilde $V \subseteq F$ mevcuttur. $\delta(R) = 0$ olduğundan Yardımcı Teorem 2.63'ten $\delta(F) = \delta(R)F = 0$ 'dır. Yardımcı Teorem 1.1 gereğince $U \cap V \ll_{\delta} F$ elde ederiz ve böylece $U \cap V \subseteq \delta(F) = 0$ 'dır. Bu ise $0 \rightarrow U \xrightarrow{1} F \xrightarrow{\psi} M \rightarrow 0$ kısa tam dizisinin parçalanmış olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla M projektiftir. $\square$

Tüm yarı-basit R -modülleri injektif olan bir R -halkasına *SSI-halka* denir. Bir R -halkasının Notherian V -halka olması için gerek ve yeter koşul *SSI-halka* olmasıdır.

Her yarı-basit singüler sağ R -modülün injektif olması için gerek ve yeter koşul R 'nin büyük sağ idealleri artan zincir koşuluna sahip bir sağ GV -halkası olmasıdır (Amin, Yousif ve Zeyada, 2005). Şimdi yarı-basit R -modülleri PS -koinjektif olan halkaları karakterize edelim.

4.28 Teorem R bir halka olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) R , esas sol idealleri artan zincir koşuluna sahip bir GV -halkasıdır.
- (ii) Her singüler yarı-basit R -modül PS -koinjektiftir.
- (iii) Her yarı-basit R -modül PS -koinjektiftir.

Kanıt (i) $\iff$ (ii) Önerme 4.21 ve yukarıda verilen son paragraftan açıktır.

(ii) $\iff$ (iii) Projektif yarı-basit R -modüller PS -koinjektif olduğundan açıktır. $\square$

4.2. PS -Tümlemiş Modüller

4.3 Tanım R bir halka olmak üzere bir M sol R -modülü verilsin. M 'nin her alt modülü M' 'de bir ps -tümleyene sahip ise M 'ye *ps-tümlemiş modül* denir.

Bu bölümde ps -tümlemiş modüllerin bazı özelliklerini vereceğiz. Aşağıdaki önerme ile başlayalım.

4.29 Önerme Bir M modülü için aşağıdaki durumlar denktir.

(i) M ps -tümlenmiştir.

(ii) $\frac{M}{Soc_P(M)}$ yarı-basittir.

Kanıt (i) $\implies$ (ii) $\frac{S}{Soc_P(M)}, \frac{M}{Soc_P(M)}$ 'de bir alt modül olsun. Bu durumda (i) gereğince $S + T = M$ ve $S \cap T \subseteq Soc_P(M)$ olacak şekilde $T \subseteq M$ mevcuttur. Buradan $\frac{M}{Soc_P(M)} = \frac{S}{Soc_P(M)} \oplus \frac{T+Soc_P(M)}{Soc_P(M)}$ olup $\frac{M}{Soc_P(M)}$ yarı-basittir.

(ii) $\implies$ (i) M 'nin bir S alt modülü için, T M 'nin bir alt modülü olmak üzere $\frac{M}{Soc_P(M)}$ 'yi $\frac{M}{Soc_P(M)} = \frac{T}{Soc_P(M)} \oplus \frac{S+Soc_P(M)}{Soc_P(M)}$ şeklinde yazabiliriz. Buradan $S + T = M$ ve $S \cap T \subseteq Soc_P(M)$ olur. Bu ise M 'nin ps -tümlenmiş olduğu anlamına gelir. $\square$

4.30 Teorem Ps -tümlenmiş modüllerin sınıfı direkt toplamalar altında kapalıdır.

Kanıt I keyfi bir indis kümesi olmak üzere $\{M_i\}_{i \in I}$ ps -tümlenmiş R -modüllerin bir topluluğu olsun. $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ olsun. Önerme 4.29 gereğince $\frac{M_i}{Soc_P(M_i)}$ her $i \in I$ için yarı-basittir. $Soc_P, R - Mod$ 'un radikali ve $\frac{M}{Soc_P(M)} \cong \frac{\bigoplus_{i \in I} M_i}{\bigoplus_{i \in I} Soc_P(M_i)} \cong \bigoplus_{i \in I} [\frac{M_i}{Soc_P(M_i)}]$ olduğundan Önerme 4.29 gereğince M ps -tümlenmiştir. $\square$

Bir M modülünün radikali ve desteği arasındaki ilişki belirli değildir. Biz ps -tümlenmiş bir M modülü için aşağıda $Rad(M) \subseteq Soc(M)$ kapsamasının var olduğunu göstereceğiz.

4.31 Önerme M bir ps -tümlenmiş modül olsun. Bu durumda $Rad(M) \subseteq Soc(M)$ 'dir.

Kanıt $m \in Rad(M)$ olsun. Dolayısıyla Rm , M 'nin bir küçük alt modülüdür. Varsayımdan $M = Rm + M$ ve $Rm \cap M = Rm$ projektif yarı-basittir. Böylece $Rm \subseteq Soc(M)$ olur ve buradan $m \in Soc(M)$ elde edilir. $\square$

4.32 Önerme Ps -tümlenmiş modüllerin alt modülleri ve bölüm modülleri de ps -tümlenmiştir.

Kanıt L, M 'nin keyfi bir alt modülü olsun. $S \subseteq L$ verilsin. M 'nin ps -tümlenmiş modül olması gereğince, M 'nin bir T alt modülü için $M = S + T$ ve $S \cap T$ projektif yarı-basit yazabiliriz. Modüler kural gereğince $L = L \cap M = L \cap (S + T) = S + (L \cap T)$ ve $S \cap (L \cap T) = (S \cap L) \cap T = S \cap T$ projektif yarı-basit olur. Böylece L ps -tümlenmiştir.

$L \subseteq K \subseteq M$ alt modülleri verilsin. Bu takdirde $M = K + T$ ve $K \cap T$ projektif yarı-basit olacak şekilde M 'nin bir T alt modülü vardır. Dolayısıyla $\frac{M}{L} = \frac{K}{L} + \frac{T+L}{L}$ 'dir. Burada $\pi : M \longrightarrow \frac{M}{L}$ ka-

nonik epimorfizma olmak üzere Yardımcı Teorem 4.2'den $\pi(K \cap T) = \frac{(K \cap T) + L}{L} = \frac{K \cap (T + L)}{L} = \frac{K}{L} + \frac{T + L}{L}$ projektif yarı-basit olur. O halde $\frac{M}{L}$ bölüm modülü ps -tümlenmiştir. $\square$

4.33 *Sonuç* M bir modül ve $\{M_i\}_{i \in I}$, M 'nin ps -tümlenmiş alt modüllerinin bir topluluğu olsun. Bu durumda $\sum_{i \in I} M_i$ ps -tümlenmiştir.

Kanıt $A = \bigoplus_{i \in I} M_i$ olsun. Bu takdirde I_0 , I indis kümesinin sonlu bir alt kümesi olarak alındığında $\psi((a_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I_0} a_i$ ile tanımlı $\psi : A \rightarrow \sum_{i \in I} M_i$ epimorfizmasını göz önünde bulunduralım. Teorem 4.30 gereğince $\bigoplus_{i \in I} M_i$ iç direkt toplamı ps -tümlenmiştir. Önerme 4.32'den M 'nin $\sum_{i \in I} M_i$ alt modülü ps -tümlenmiştir. $\square$

4.34 Teorem R bir halka olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) Her sol R -modül ps -tümlenmiştir.

(ii) $\frac{R}{Soc_P(R)}$ yarı-basittir.

Kanıt (i) $\implies$ (ii) Önerme 4.29'dan görülür.

(ii) $\implies$ (i) M keyfi bir R -modül ve F bir serbest sol R -modül olmak üzere $\psi : F \rightarrow M$ bir epimorfizma olsun. $\frac{F}{Soc_P(F)} \cong \bigoplus_{i \in I} [\frac{R}{Soc_P(R)}]$ yarı-basit modüllerin bir direkt toplamı olarak yarı-basittir. Önerme 4.29 tekrar uygulanırsa F modülü ps -tümlenmiş olup böylece Önerme 4.32'ye göre M , F 'in bir bölüm modülü olarak ps -tümlenmiştir. $\square$

(Baccella, 1984) referansı ile verilen çalışmada büyük desteğe sahip sol SI -halkaların sınıfı çalışılmıştır. Şimdi ps -tümlen alt modülleri kullanarak bu halkaların bir karakterizasyonunu verelim.

4.35 Teorem R bir halka olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) Her sol R -modül PS -koinjektiftir.

(ii) Her sol R -modül ps -tümlenmiştir.

(iii) R büyük desteğe sahip bir sol SI -halkadır.

Kanıt (i) $\iff$ (ii) Açıktır.

(i) $\implies$ (iii) Önerme 4.23 gereğince R sol SI -halkadır ve ${}_R R$ ps -tümlenmiştir. Önerme 4.29'dan

$\frac{R}{\text{Soc}(R)}$ injektif yarı-basittir. R bir sol SI -halka olduğundan sol kalıtsal halkadır ve böylece $\text{Soc}(R)$ projektiftir. Dolayısıyla (Baccella, 1984, Yardımcı Teorem 2.6) gereğince $\text{Soc}(R) \leq R$ elde edilir.

(iii) $\implies$ (ii) I keyfi bir indis kümesi ve $F = R^{(I)}$ olarak verilsin. R sol kalıtsal olduğundan F kalıtsaldır. Dolayısıyla $\text{Soc}(F)$ projektiftir. $\frac{R}{\text{Soc}(R)}$ yarı-basit olduğundan $\frac{F}{\text{Soc}(F)}$ yarı-basittir. Önerme 4.29 uygulanırsa F ps -tümlenmiştir. Böylece Önerme 4.32 gereğince her sol R -modül ps -tümlenmiştir. $\square$

4.36 Yardımcı Teorem Bir singüler ps -tümlenmiş modül yarı-basittir.

Kanıt Ps -tümlenmiş ve singüler olan M modülü verilsin. S, M 'nin keyfi bir alt modülü olsun. Varsayımdan M 'nin bir T alt modülü için $S + T = M$ ve $S \cap T$ projektif yarı-basit yazabiliriz. M singüler olduğundan $S \cap T = 0$ ve böylece $S \oplus T = M$ elde edilir. Bu ise M 'nin yarı-basit olduğu anlamına gelir. $\square$

4.37 Teorem M bir modül olsun. Bu durumda M 'nin ps -tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul $Z(M)$ yarı-basit ve N ps -tümlenmiş olmak üzere $M = Z(M) \oplus N$ olmasıdır.

Kanıt ($\implies$) Varsayımdan M 'nin bir N alt modülü için $M = Z(M) + N$ ve $Z(M) \cap N$ projektif yarı-basit yazabiliriz. $Z(M)$ singüler olduğundan $Z(M) \cap N = 0$ ve buradan $M = Z(M) \oplus N$ elde edilir. Önerme 4.32'den $Z(M)$ ve N ps -tümlenmiş modüllerdir. Yardımcı Teorem 4.36 gereğince $Z(M)$ yarı-basittir.

($\impliedby$) Sonuç 4.33'ten görülür. $\square$

$g : N \longrightarrow K$ bir epimorfizma ve $f : M \longrightarrow K$ bir homomorfizma olduğunda M modülü *lokal projektif modül* olarak adlandırılır. Bu durumda M 'nin her sonlu üretilmiş M_0 alt modülü için $g \circ h|_{M_0} = f|_{M_0}$ olacak şekilde bir $h : M \longrightarrow N$ homomorfizması vardır. Buradan her projektif modülün lokal projektif olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca sonlu üretilmiş lokal projektif modül projektiftir.

4.38 Sonuç Lokal projektif ps -tümlenmiş bir modül, singüler olmayan modüldür.

Kanıt M lokal projektif ps -tümlenmiş bir modül olsun. Teorem 4.37 gereğince $Z(M)$ yarı-basit modül ve S, M 'nin bir ps -tümlenmiş alt modülü olmak üzere $M = Z(M) \oplus S$ ayrışımı vardır. $Z(M) \neq 0$ olduğunu varsayalım. Dolayısıyla her S_i basit olmak üzere $Z(M) = \bigoplus_{i \in I} S_i$

yazabiliriz. M lokal projektif olduğundan $Z(M)$ lokal projektif ve böylece her S_i lokal projektiftir. Bu ise her S_i 'nin projektif olduğu anlamına gelir ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla M singüler olmayan modüldür. $\square$

Uyarı R bir bölge ve M bir R -modül olsun. Tüm basit R -modüller singüler olduğundan Teorem 4.37'den M 'nin ps -tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul yarı-basit olmasıdır.

4.3. Eş-Eşatomik Ps -Tümlenmiş Modüller

Bu kısımda eş-eşatomik ps -tümlenmiş modül kavramı verilmiş ve bazı özellikleri elde edilmiştir. Temel tanımını vererek başlayalım.

4.4 Tanım M bir modül olsun. M 'nin her eş-eşatom alt modülü M 'de bir ps -tümleyene sahipse M 'ye eş-eşatomik ps -tümlenmiş modül denir.

4.39 Yardımcı Teorem M bir modül ve $M = Rad(M)$ olsun. Bu durumda M eş-eşatomik ps -tümlenmiş modüldür.

Kanıt M 'nin radikal modül olması gereğince M 'nin eş-eşatom alt modülü sadece M 'nin kendisidir. Dolayısıyla M 'nin aşıkâr sıfır alt modülü M 'nin bir ps -tümleyenidir. Böylece M eş-eşatomik ps -tümlenmiştir. $\square$

Bir ps -tümlenmiş modül her zaman eş-eşatomik ps -tümlenmiştir fakat tersi doğru değildir. Buna aşağıdaki örneği verebiliriz.

4.40 Örnek $\mathbb{Q}$ $\mathbb{Z}$ -modülü verilsin. Yardımcı teorem 4.39'a göre $\mathbb{Q}$ eş-eşatomik ps -tümlenmiştir. Fakat $Soc(\mathbb{Z}\mathbb{Q}) = 0$ olduğundan ps -tümlenmiş değildir.

4.41 Önerme R bir halka ve $\frac{R}{Soc_p(R)}$ yarı-basit modül olsun. Bu durumda her sol R -modül eş-eşatomik ps -tümlenmiştir.

Kanıt Teorem 4.34 gereğince her R -modül ps -tümlenmiş olduğundan ispat açıktır. $\square$

4.42 Sonuç R bir halka ve her sol R -modül PS -koinjektif modül olsun. Bu durumda her sol R -modül eş-eşatomik ps -tümlenmiştir.

Kanıt Teorem 4.35 gereğince her R -modül ps -tümlenmiş olduğundan ispat açıktır. $\square$

4.43 Önerme M bir yarı-lokal modül ve $Rad(M) \ll M$ olarak verilsin. Bu durumda M 'nin eş-eşatomik ps -tümlenmiş modül olması için gerek ve yeter koşul ps -tümlenmiş olmasıdır.

Kanıt S M 'nin bir alt modülü olsun. M 'nin yarı-lokal olması sebebiyle $\frac{M}{Rad(M)}$ yarı-basittir, yani, $\frac{M}{Rad(M)}$ eşatomdudur. Bu durumda $\frac{M}{S+Rad(M)} \cong \frac{\frac{M}{Rad(M)}}{\frac{S+Rad(M)}{Rad(M)}}$ izomorfizmasını yazabiliriz. Eşatom modüllerin bölüm modülleri ayrıca eşatom olduğundan $\frac{M}{S+Rad(M)}$ eşatomdudur. Bu durumda $S + Rad(M)$, M 'de bir T ps -tümleyenine sahiptir. O halde $M = S + Rad(M) + T$ ve $(S + Rad(M)) \cap T$ projektif yarı-basittir. $Rad(M) \ll M$ olduğundan $M = S + T$ olur ve $S \cap T \leq (S + Rad(M)) \cap T$ projektif yarı-basittir. Dolayısıyla M ps -tümlenmiştir. Tersî açıktır. $\square$

R bir halka olsun. Eğer her M R -modülü için $Rad(M) \ll M$ ise R halkasına *sol maksimal halka* denir. Başka bir deyişle eğer sıfırdan farklı her sol R -modül bir maksimal alt modül içeriyorsa R halkasına *sol maksimal halka* denir. Ayrıca bir R halkası sol maksimal halka ve $\frac{R}{Rad(R)}$ yarı-basit ise R halkasına *mükemmel halka* denir. Bir sol mükemmel halka üzerindeki her M modülü için $\frac{M}{Rad(M)}$ yarı-basittir (Fuller ve Anderson, 1992).

4.44 Önerme R bir sol maksimal halka ve M eş-eşatomik ps -tümlenmiş modül olsun. Bu durumda M ps -tümlenmiştir.

Kanıt Varsayıma göre sıfırdan farklı her sol R -modül eşatomdudur. Bu yüzden M 'nin tüm alt modülleri eşatom olup M ps -tümlenmiştir. $\square$

V -halka ve WV -halka tanımını daha önceden vermiştik. WV -halkalar da ayrıca sol maksimal halka olduğundan aşağıdaki sonucu verebiliriz.

4.45 Sonuç R bir WV -halka olsun. Bu durumda her eş-eşatomik ps -tümlenmiş R -modül ps -tümlenmiştir.

4.46 Önerme R bir sol mükemmel halka ve M bir R -modül olsun. Bu durumda M 'nin eş-eşatomik ps -tümlenmiş modül olması için gerek ve yeter koşul ps -tümlenmiş olmasıdır.

Kanıt Önerme 4.43'ün ispatına benzer şekilde yapılabilir. $\square$

4.47 Önerme Eş-eşatomik ps -tümlenmiş modüller homomorfik görüntüleri altında kapalıdır.

Kanıt M eş-eşatomik ps -tümlenmiş R -modül ve S M 'nin bir alt modülü olsun. Bu takdirde S M 'nin eş-eşatom alt modülü ve $L \leq S$ olmak üzere $\frac{M}{L}$ 'nin keyfî bir eş-eşatom alt

modülü $\frac{S}{L}$ formundadır. M eş-eşatomik ps -tümlenmiş olduğundan bir $T \leq M$ alt modülü için $M = S + T$ ve $S \cap T$ projektif yarı-basittir. Buradan $\frac{M}{L} = \frac{S+T}{L} = \frac{S}{L} + \frac{T+L}{L}$ yazabiliriz. Bu durumda $\pi : M \rightarrow \frac{M}{L}$ kanonik epimorfizmasını alırsak Yardımcı Teorem 4.2 gereğince $\pi(S \cap T) = \frac{(S \cap T) + L}{L} = \frac{S \cap (T+L)}{L} = \frac{S}{L} \cap \frac{T+L}{L}$ projektif yarı-basittir. Dolayısıyla $\frac{M}{L}$ eş-eşatomik ps -tümlenmiştir. $\square$

4.48 Önerme M eş-eşatomik ps -tümlenmiş R -modül olsun. Bu durumda $\frac{M}{Soc_p(M)}$ modülünün her eş-eşatom alt modülü direkt toplam terimidir.

Kanıt $S \leq M$ olmak üzere $\frac{S}{Soc_p(M)}$, $\frac{M}{Soc_p(M)}$ 'nin bir eş-eşatom alt modülü olduğunu varsayalım. Bu durumda S , $Rad(M) \leq S$ olacak şekilde, M 'nin bir eş-eşatom alt modülüdür. M 'nin eş-eşatomik ps -tümlenmiş olması gereği $M = S + T$ ve $S \cap T$ projektif yarı-basit olacak şekilde $T \leq M$ alt modülü mevcuttur. Yani $S \cap T \leq Soc_p(M)$ 'dir. Buradan $\frac{M}{Soc_p(M)} = \frac{S+T}{Soc_p(M)} = \frac{S}{Soc_p(M)} + \frac{T+Soc_p(M)}{Soc_p(M)}$ ve $\frac{S}{Soc_p(M)} \cap \frac{T+Soc_p(M)}{Soc_p(M)} = \frac{S \cap (T+Soc_p(M))}{Soc_p(M)} = \frac{(S \cap T) + Soc_p(M)}{Soc_p(M)} = \frac{Soc_p(M)}{Soc_p(M)} = 0$ olur. O halde $\frac{M}{Soc_p(M)} = \frac{S}{Soc_p(M)} \oplus \frac{T+Soc_p(M)}{Soc_p(M)}$ olup istenen elde edilir. $\square$

4.49 Yardımcı Teorem M bir R -modül, S ve T , S eş-eşatomik ps -tümlenmiş, T eş-eşatom ve $S + T$ M 'de bir L ps -tümleyenine sahip olacak şekilde M 'nin alt modülleri olsunlar. Bu durumda $N \cap (T + L)$, S 'de bir U ps -tümleyenine sahiptir ve $L + U$ M 'de T 'nin bir ps -tümleyenidir.

Kanıt L , M 'de $S + T$ 'nin bir ps -tümleyeni olsun. O halde $M = S + T + L$ ve $(S + T) \cap L$ projektif yarı-basittir. $\frac{M}{T}$ eşatom olduğundan $\frac{S}{S \cap (T+L)} \cong \frac{S+T+L}{T+L} = \frac{M}{T+L} \cong \frac{\frac{M}{T}}{\frac{T}{T+L}}$ eşatomdur. Dolayısıyla $S \cap (T + L)$ S 'nin eş-eşatom alt modülüdür. S eş-eşatomik ps -tümlenmiş olduğundan $S \cap (T + L)$, S 'de bir U ps -tümleyenine sahiptir, yani, $S \cap (T + L) + U = S$ ve $U \cap (T + L)$ projektif yarı-basittir. Bu takdirde $M = S + T + L = S \cap (T + L) + U + T + L = T + L + U$ yazabiliriz. Buna ek olarak $T \cap (U + L) \leq (L \cap (T + U)) + (U \cap (T + L)) \leq (L \cap (S + T)) + (U \cap (T + L))$ projektif yarı-basittir. O halde $U + L$, M 'de T 'nin bir ps -tümleyenidir. $\square$

4.50 Sonuç N ve K N eş-eşatom, K eş-eşatomik ps -tümlenmiş ve $N + K$ M 'de bir ps -tümleyene sahip olacak şekilde bir M R -modülünün alt modülleri olsunlar. Bu durumda N , M 'de bir ps -tümleyene sahiptir.

4.51 Önerme T_1 ve T_2 , $M = T_1 + T_2$ olacak şekilde M 'nin alt modülleri olsun. Eğer T_1 ve T_2 eş-eşatomik ps -tümlenmiş ise M eş-eşatomik ps -tümlenmiştir.

Kanıt N , M 'nin keyfi bir eş-eşatom alt modülü olsun. $M = T_1 + T_2 + N$ yazabiliriz. $T_2 + N$

M 'nin eş-eşatomik alt modülü, T_1 eş-eşatomik ps -tümlenmiş ve sıfır (0) aşık alt modülü $M = T_1 + T_2 + N$ 'nin M 'de ps -tümleyeni olduğundan Sonuç 4.50 gereğince $T_2 + N$ M 'de bir ps -tümleyene sahiptir. T_2 eş-eşatomik ps -tümlenmiş ve N eş-eşatom alt modül olduğundan yine Sonuç 4.50 gereğince N M 'de bir ps -tümleyene sahiptir. O halde M eş-eşatomik ps -tümlenmiştir. $\square$

4.52 *Sonuç* Eş-eşatomik ps -tümlenmiş modüllerin her sonlu toplamı eş-eşatomik ps -tümlenmiştir.

4.53 *Sonuç* Eş-eşatomik ps -tümlenmiş modüllerin her sonlu direkt toplamı eş-eşatomik ps -tümlenmiştir.

4.54 *Teorem* K, M R -modülünde eş-eşatomik ps -tümlenmiş bir alt modül olsun ve $\frac{M}{K}$ maksimal alt modül içermesin. Bu takdirde M eş-eşatomik ps -tümlenmiştir.

Kanıt N, M 'nin bir eş-eşatom alt modülü olsun. Bu durumda $\frac{M}{N}$ eşatomdur ve ayrıca $\frac{M}{K+N}$ 'de eşatomdur. $\frac{M}{K}$ maksimal alt modüle sahip değildir, yani, $M = K + N$ 'dir. Sonuc 4.50'den N , M 'de bir ps -tümleyene sahiptir. Dolayısıyla M eş-eşatomik ps -tümlenmiştir. $\square$

4.55 *Sonuç* M bir modül ve $\frac{M}{Soc_p(M)}$ maksimal alt modüle sahip olmasın. Bu durumda M eş-eşatomik ps -tümlenmiştir.

Daha önceden eş-eşatomik tümlenmiş modüller ve özelliklerinden bahsetmiştik. Bir eş-eşatomik tümlenmiş modül eş-eşatomik ps -tümlenmiş olmak zorunda değildir. Bunun için aşağıdaki örnek verilebilir.

4.56 *Örnek* $p \in \mathbb{P}$ ve $n \geq 2$ olmak üzere $R = \mathbb{Z}_{p^n}$ olsun. R lokal halka olup ${}_R R$ eş-eşatomik tümlenmiştir. Fakat her basit R -modül singüler olduğundan eş-eşatomik ps -tümlenmiş değildir.

Aşağıdaki önerme eş-eşatomik tümlenmiş modüller ile eş-eşatomik ps -tümlenmiş modüller arasındaki ilişkiyi göstermesi açısından önemlidir.

4.57 *Önerme* M eş-eşatomik tümlenmiş R -modül olsun. Eğer $Rad(M) \leq Soc_p(M)$ ise bu durumda M eş-eşatomik ps -tümlenmiştir.

Kanıt S 'nin, M 'de keyfi bir eş-eşatom alt modül olduğunu varsayalım. M eş-eşatomik tümlenmiş olduğundan $M = S + T$ and $S \cap T \ll T$ olacak şekilde bir $T \leq M$ mevcuttur, yani,

$S \cap T \leq \text{Rad}(T) \leq \text{Rad}(M) \leq \text{Soc}_p(M)$ 'dir. O halde M eş-eşatomik ps -tümlenmiştir. $\square$

M bir modül olsun. M 'nin her eşsonlu alt modülü M 'de bir ps -tümleyene sahip ise M modülüne *eşsonlu ps -tümlenmiş modül* denir (Soydan ve Türkmen, 2023, january 14-17).

4.58 Önerme Her eş-eşatomik ps -tümlenmiş modül eşsonlu ps -tümlenmiş modüldür.

Kanıt M eş-eşatomik ps -tümlenmiş R -modül ve N , M 'nin keyfi bir eşsonlu alt modülü olarak verilsin. Bu durumda $\frac{M}{N}$ sonlu üretilmiştir, yani, $\frac{M}{N}$ eşatomdur. Dolayısıyla N , M 'nin eş-eşatom alt modülüdür. M eş-eşatomik ps -tümlenmiş olduğundan N M 'de bir ps -tümleyene sahiptir. O halde M eşsonlu ps -tümlenmiş modüldür. $\square$

4.59 Sonuç R büyük desteğe sahip bir sol SI -halka ise her sol R -modül eş-eşatomik ps -tümlenmiştir.

Kanıt (Soydan ve Türkmen, 2023, january 14-17, Sonuç 2.3)'ten açıktır. $\square$

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmamızda, ps -tümleyen alt modüller ve halkalar ile ilişkileri incelenmiş, kısa tam dizilerin PS sınıfı tanımlanmış, keyfi bir R -halkası üzerinde PS sınıfının bir öz sınıf olduğu gösterilmiştir. PS -koinjektif modül kavramı tanıtılmış, ilgili önermeler, teoremler ve sonuçlar elde edilmiştir.

Bu çalışma ile SI -halkalar ve GV -halkalar gibi bazı önemli halka türlerinin homolojik cebir anlamında farklı karakterizasyonları verilmiştir.



KAYNAKLAR

- Abdioğlu, C. and Şahinkaya, S. (2015). Some results on δ -semiperfect rings and δ -supplemented modules. *Kyungpook Mathematical Journal*, 55(2), 289–300.
- Alizade, R., Büyükaşık, E. and Durğun, Y. (2016). Small supplements, weak supplements and proper classes. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 45(3), 649–661.
- Alizade, R., Demirci, Y. M., Durğun, Y. and Pusat, D. (2014). The proper class generated by weak supplements. *Communications in Algebra*, 42(1), 56–72.
- Alizade, R. and Güngör, S. (2017). Co-coatomically supplemented modules. *Ukrainian Mathematical Journal*, 69, 1007–1018.
- Alizade, R. and Pancar, A. (1999). Homoloji cebire giris. *Ondokuz Mayıs Üniversitesi Yayınları, Samsun*.
- Amin, I., Yousif, M. and Zeyada, N. (2005). Soc-injective rings and modules. *Communications in Algebra*, 33(11), 4229–4250.
- Baccella, G. (1984). Generalized v -rings and von neumann regular rings. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, 72, 117–133.
- Büyükaşık, E., Mermut, E. and Özdemir, S. (2010). Rad-supplemented modules. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, 124, 157–177.
- Buchsbaum, D. A. (1959). A note on homology in categories. *Annals of Mathematics*, 66–74.
- Clark, J., Lomp, C., Vanaja, N. and Wisbauer, R. (2006). *Lifting modules: supplements and projectivity in module theory*. Springer Science & Business Media.
- Durgun, Y. (2019). Extended s -supplement submodules. *Turkish Journal of Mathematics*, 43(6), 2833–2841.
- Durgun, Y. (2021). Sa -supplement submodules. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 58(1), 147–161.
- Fuller, K. R. and Anderson, F. W. (1992). *Rings and categories of modules*. Springer-Verlag.

- Goodearl, K. (1976). *Ring theory: Nonsingular rings and modules* (Vol. 33). CRC Press.
- Hungerford, T. W. (1973). *Algebra* (Vol. 73). Springer Science & Business Media.
- Huynh, D. V., Dung, N. V., Smith, P. F. and Wisbauer, R. (1994). *Extending modules*. Longman Harlow.
- Jain, S. K., Srivastava, A. K. and Tuganbaev, A. A. (2012). *Cyclic modules and the structure of rings*. Oxford Mathematical Monographs.
- Kasch, F. (1982). *Modules and rings*. London: Academic press.
- Kaynar, E., Türkmen, E. and Çalışıcı, H. (2020). Ss-supplemented modules. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 69(1), 473–485.
- Koşan, M. T. (2007). δ -lifting and δ -supplemented modules. In *Algebra colloquium* (Vol. 14, pp. 53–60).
- Lam, T. Y. (1991). *A first course in noncommutative rings* (Vol. 131). Springer.
- Lam, T. Y. (1999). More theory of modules. *Lectures on Modules and Rings*, 207–286.
- Lam, T.-Y. (2006). *Exercises in classical ring theory*. Springer Science & Business Media.
- Larsen, M. and McCarthy, P. (1971). Multiplicative theory of ideals. *Academic Press, New York and London*.
- Lomp, C. (1999). On semilocal modules and rings. *Communications in Algebra*, 27(4), 1921–1935.
- MacLane, S. (1963). *Homology*. Springer Science & Business Media.
- Mišina, A. and Skornjakov, L. (1960). *Abelian groups and modules*. American Mathematical Society.
- Nişancı, B. and Pancar, A. (2010). On generalization of $\oplus$ -cofinitely supplemented modules. *Ukrainian Mathematical Journal*, 62, 203–209.

- Nunke, R. J. (1963). Purity and subfunctors of the identity. *Topics in Abelian groups*, 121–171.
- Pancar, A. (1997). Generation of proper classes of short exact sequences. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 20(3), 465–473.
- Pancar, A. and Türkmen, B. N. (2014). *İnjektif modüllere giriş*. Pegem Akademi.
- Sharpe, D. W. and Vámos, P. (1972). *Injective modules* (Vol. 62). Cambridge University Press.
- Soydan, İ. and Türkmen, E. (2023, january 14-17). Cofinitely ps -supplemented submodules. [Conference presentation and published in the proceeding book] *The 3rd International Conference on Engineering and Applied Natural Sciences, Konya, Turkey.*, 724–729. doi: <https://www.iceans.org>
- Türkmen, B. N. and Türkmen, E. (2020). δ_{ss} -supplemented modules and rings. *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta: Seria Matematica*, 28(3), 193–216.
- Ware, R. (1971). Endomorphism rings of projective modules. *Transactions of the American Mathematical Society*, 155(1), 233–256.
- Wisbauer, R. (1991). *Foundations of module and ring theory*. Gordon and Breach.
- Zhou, D. and Zhang, X. (2011). Small-essential submodules and morita duality. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 35(6).
- Zhou, Y. (2000). Generalizations of perfect, semiperfect, and semiregular rings. In *Algebra colloquium* (Vol. 7, pp. 305–318).
- Zimmermann-Huisgen, B. (1976). Pure submodules of direct products of free modules. *Mathematische Annalen*, 224, 233–245.
- Zöschinger, H. (1974). Moduln, die in jeder erweiterung ein komplement haben. *Mathematica Scandinavica*, 35(2), 267–287.
- Zöschinger, H. and Rosenberg, F. (1980). Koatomare moduln. *Math. Zeitschrift*, 170, 221–232.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı-Soyadı : İrfan SOYDAN

Eğitim Derecesi	Okul/Program	Mezuniyet Yılı
Lisans	Cumhuriyet Üniversitesi/İlköğretim Mat.	2006
Lisans	Amasya Üniversitesi/Matematik	2017
Yüksek Lisans	Amasya Üniversitesi/Matematik	2019

İş Deneyimi/Yıl	Çalıştığı Yer	Görevi
2006-2010	Hamamözü Atatürk İlköğretim Okulu	İ.M.Ö.
2010-2013	Suluova Gazi Orta Okulu	İ.M.Ö.
2013-2021	Tuğgeneral Hikmet Akıncı Orta Okulu	İ.M.Ö.
2021-...	Alptekin Anadolu Lisesi	M. Ö.

Yabancı Dil

İngilizce

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

SOYDAN, İ., TÜRKMEN, E. (2021). Generalizations of S_s -Supplemented Modules. *Carpathian Mathematical Publications*, 13(1), 119-126.

SOYDAN, İ., TÜRKMEN, E. (2023, January 14-17). Cofinitely Ps -Supplemented Submodules. [Conference presentation and published in the proceeding book] 3rd International Conference on Engineering and Applied Natural Sciences, Konya, Turkey 724-729.

SOYDAN, İ., TÜRKMEN, E. (2024, 09-12 Eylül). Ps -Tümlenmiş Modüller. 36. Ulusal Matematik Sempozyumu, Amasya.

SOYDAN, İ., TÜRKMEN, E. (Baskıda). Co-Coatomically Ps -Supplemented Modules. *Erzincan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*.