

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PSEUDO - GALILEAN UZAYINDA REGLE YÜZEYLER

Alper Osman ÖĞRENMİŞ

Tez Yöneticisi
Prof. Dr. Mahmut ERGÜT

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ELAZIĞ, 2007

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PSEUDO - GALILEAN UZAYINDA REGLE YÜZEYLER

Alper Osman ÖĞRENMİŞ

Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı

Bu tez,/...../..... tarihinde aşağıda belirtilen juri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile başarılı / başarısız olarak değerlendirilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Mahmut ERGÜT

Üye: Prof. Dr. Sadık KELEŞ

Üye: Prof. Dr. Rıfat GÜNEŞ

Üye: Prof. Dr. Vedat ASİL

Üye: Doç. Dr. Mehmet BEKTAŞ

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun/...../..... tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

TEŞEKKÜR

2002 - 2007 yıllarına yayılan sürecin sonunda tamamlanan doktora tezi çalışmalarım sırasında, doktora eğitimimin her aşamasında; şükran borçlu olduğum, bu çalışmanın hazırlanmasında gerekli bütün imkanları sağlayarak bana yardımcı olan, değerli önerileri ve katkılarıyla desteğini hiçbir zaman esirgemeyen hocam Sayın Prof. Dr. Mahmut ERGÜT' e teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Yine çalışmalarım ve doktora eğitimimin tümünde; her zaman yanımda olan, yakın ilgi gördüğüm, değerli önerileri ve katkılarıyla desteğini hiçbir zaman esirgemeyen hocam Sayın Doç. Dr. Mehmet BEKTAŞ' a teşekkür ederim.

Ayrıca çalışmalarım sırasında desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Handan ÖZTEKİN' e teşekkür ederim.

Alper Osman ÖĞRENMİŞ

İÇİNDEKİLER

İçindekiler	I
Şekiller Listesi	II
Simgeler Listesi	III
Özet	IV
Abstract	V
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayı	3
2.2. 3-Boyutlu Galilean Uzayı	5
2.3. 3-Boyutlu Pseudo-Galilean Uzayı	8
3. 3-BOYUTLU PSEUDO - GALILEAN UZAYINDA KÜRESEL BİR EĞRİNİN KARAKTERİZASYONLARI	12
3.1. 3-Boyutlu Pseudo-Galilean Uzayında Uzay Eğrileri	12
3.2. 3-Boyutlu Pseudo-Galilean Uzayında Küresel Eğriler ve Karakterizasyonları	16
3.3. $m_2^2(x) - m_3^2(x) = \mp r_1^2$ Eşitliğinin İntegrasyonu	22
3.4. Hatırlatma	23
4. 3-BOYUTLU PSEUDO - GALILEAN UZAYINDA REGLE YÜZEYLER İÇİN BAZI KARAKTERİZASYONLAR	26
4.1. 3-Boyutlu Pseudo-Galilean Uzayında Regle Yüzeyler	26
4.2. 3-Boyutlu Pseudo-Galilean Uzayında I. Tip Regle Yüzeyler	28
4.3. 3-Boyutlu Pseudo-Galilean Uzayında II. Tip Regle Yüzeyler	38
4.4. 3-Boyutlu Pseudo-Galilean Uzayında III. Tip Regle Yüzeyler	49
4.5. 3-Boyutlu Pseudo-Galilean Uzayında Silindirik Regle Yüzeyler	61
5. 3-BOYUTLU PSEUDO - GALILEAN UZAYINDA REGLE YÜZEY ÖRNEKLERİ	71
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	73
Kaynaklar	75

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.2.1	6
Şekil 2.3.1	9
Şekil 3.1.1	14
Şekil 4.2.1	33
Şekil 4.3.1	44
Şekil 4.4.1	56
Şekil 5.1	71
Şekil 5.2	72
Şekil 5.3	72

SİMGELER LİSTESİ

ζ	: İç Çarpım Fonksiyonu
$\langle \quad \rangle$	: Öklid İç Çarpımı
V	: İç Çarpım Uzayı
E^3	: 3-Boyutlu Öklid Uzayı
d	: Uzaklık Fonksiyonu
Ψ	: E^3 Öklid Uzayında Regle Yüzey
G_3	: Galilean Uzayı
G_3^1	: Pseudo-Galilean Uzayı
B_6	: Galilean Uzayının Hareketler Grubu
$\overline{B}_6$	: Pseudo - Galilean Uzayının Hareketler Grubu
f	: İdeal Doğru
w	: İdeal Düzlem
I	: Eliptik İnvolyasyon
ε	: Hiperbolik İnvolyasyon
$g(,)$	: Pseudo - Galilean İç Çarpımı
$\ \quad \ $	: Norm
$m(,)$	: Açık Ölçüsü
$\mathbf{x}$	: G_3^1 Pseudo-Galilean Uzayında Regle Yüzey
$P_{\mathbf{a}}$	: Dağılma Parametresi (Dral)
ξ	: Gauss Dönüşümü
Δ	: Laplace Operatörü
A	: Şekil Operatörünün Matrisi

ÖZET

Doktora Tezi

PSEUDO - GALILEAN UZAYINDA REGLE YÜZEYLER

Alper Osman ÖĞRENMİŞ

Fırat Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

2007, Sayfa: 76

Bu tez altı bölüm halinde düzenlenmiştir.

İlk bölümde, çalışmanın kapsamı ve amacı belirtilmiştir.

İkinci bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak temel tanımlar ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde, 3-boyutlu pseudo - Galilean uzayında light-like olmayan eğrilerin bazı karakterizasyonları incelendi. Ayrıca bulunan karakterizasyonun diferensiyel denklemi çözüldü. Bunlara ilaveten 3-boyutlu pseudo - Galilean uzayında küresel bir eğrinin explicit karakterizasyonu elde edildi.

Dördüncü bölümde, 3-boyutlu pseudo - Galilean uzayında regle yüzey tipleri verildi ve incelendi. Ayrıca elde edilen silindirik regle yüzeylerle ilgili teorem ispatlandı.

Beşinci bölümde, regle yüzey örnekleri verildi.

Son bölümde çalışmada elde edilen sonuçlar ve birtakım önerilere ayrıldı.

Anahtar Kelimeler: Galilean Uzay, Pseudo - Galilean Uzay, Regle Yüzey, Küresel Eğriler, Oskulatör Küre.

ABSTRACT

PhD Thesis

RULED SURFACES IN THE PSEUDO - GALILEAN SPACE

Alper Osman ÖĞRENMİŞ

Fırat University

Graduate School of Science and Technology

Department of Mathematics

2007, Page:76

This thesis consists of six chapters.

In the first chapter, the aim and content of the thesis are explained.

In the second chapter some fundamental definitions and theorems are given which will be used in the later chapters.

In the third chapter, the characterization of an admissible curve which isn't light-like in pseudo - Galilean 3-space is given. Furthermore the differential equation which express the mentioned characterization is solved. The explicit characterization of spherical curve is obtained 3-dimensional pseudo - Galilean space.

In the fourth chapter, Ruled surfaces types are given in 3-dimensional pseudo-Galilean space. The theorem related to cylindrical Ruled surfaces is proved.

In the fifth chapter, examples of Ruled surfaces are given.

In the sixth chapter, conclusions and suggestions are given.

Key Words: Galilean Space, Pseudo - Galilean Space, Ruled Surface, Spherical Curves, Osculating Sphere.

1. GİRİŞ

3-boyutlu Öklid uzayında regle yüzeyler konusu bir çok makale ve kitapta incelendi [1,2,3]. Regle yüzeylerle ilgili olarak Ergüt [4], 3-boyutlu ve n-boyutlu regle yüzeyleri çalışmış ve n-boyutlu regle yüzeylerin eğriliklerini incelemiştir.

3-boyutlu Lorentz uzayında regle yüzeyler Turgut [5] tarafından doktora tez konusu olarak ele alınıp, space-like ve time-like regle yüzeylerin geometrik yapısı inşa edilmiştir. Gerek space-like ve gerekse time-like regle yüzeyler üzerine yayınlanmış farklı makaleler ve yazılmış değişik kitaplar vardır [6,7,8,9,10,11]. Yine L^3 , 3-boyutlu Lorentz uzayında yapılan çalışmalardan time-like regle yüzeyler, L^n , n-boyutlu uzayda Tosun [12] tarafından, space-like regle yüzeyler de Bektaş [13] tarafından incelenmiştir. Ayrıca null eğriler esas alınarak inşa edilen ve bir regle yüzey olan genelleştirilmiş null scrollar ise Balgetir [14] tarafından incelenmiştir. Bundan başka 3-boyutlu Lorentz uzayında regle yüzeylerin sınıflandırılması üzerinde Jung ve Pak [9] çalışmışlardır.

G_3 Galilean uzayın geometrisi büyük ölçüde Röschel [15] tarafından geliştirilmiştir. G_3 Galilean uzayında regle yüzey kavramı Kamenarovic [16] tarafından incelenmiştir. Ayrıca, G_3^1 pseudo-Galilean uzayında regle yüzeylerin temel yapısı Divjak ve Milin-Sipus [16,17] tarafından inşa edilmiştir.

Çalışmanın ikinci bölümünde, 3-boyutlu Öklid uzayında regle yüzeyler ve özellikleri ile ilgili temel tanım ve teoremlerle, 3-boyutlu Galilean ve 3-boyutlu pseudo-Galilean uzaylarının temel yapıları incelenerek, bunlarla ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayında ve 3-boyutlu Lorentz uzayında küresel eğriler için bilinen bazı karakterizasyonların 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayındaki karşılıkları gösterildi.

Dördüncü bölümde ise 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında regle yüzeylerle ilgili temel kavramlar verildi. Daha sonra bu uzayda mevcut olan regle yüzey tipleri açıklandı ve bu regle yüzeylerin açılabilirlikleri, boğaz noktasının yervektörleri ve dağılma parametreleri incelendi. regle yüzeylerin mevcut olan üç tipi verildikten sonra, $\Delta\xi = A\xi$ şartını sağlayan regle yüzeylerin sınıflandırması ile ilgili diğer uzaylar için verilen kavramların 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayındaki karşılıkları araştırıldı. Elde edilen karşılıklar bir teorem ve

örnekler ile açıklandı.

Beşinci bölümde ise 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında var olan üç tip regle yüzeylere ait örnekler verildi. Ayrıca, bilgisayarda MAPLE yazılımı kullanılarak belirli parametreler için bu regle yüzey örneklerinin grafikleri çizildi.

Son bölüm ise çalışmada elde edilen sonuçlar ve birtakım önerilere ayrıldı.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayı

Tanım 2.1.1. V sonlu boyutlu bir reel vektör uzayı olsun. Eğer bir

$$\zeta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu bilineer, simetrik ve pozitif tanımlı ise ζ ya V üzerinde bir iç çarpım fonksiyonu ve V ye de iç çarpım uzayı denir [19].

Tanım 2.1.2. 3-boyutlu reel standart Afin uzay, 3-boyutlu standart vektör uzayı $\mathbb{R}^3$ ile eşlensin. $\mathbb{R}^3$ vektör uzayında bir

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

iç çarpımını $\forall X, Y \in \mathbb{R}^3, X = (x_1, x_2, x_3), Y = (y_1, y_2, y_3)$ için

$$\langle \cdot, \cdot \rangle (X, Y) = \langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$$

şeklinde tanımlansın. Bu iç çarpıma $\mathbb{R}^3$ de standart iç çarpım veya Öklid iç çarpımı adı verilir. $\{\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ iç çarpım uzayı ile eşlenen reel standart Afin uzay, 3-boyutlu Öklid uzayı adını alır ve E^3 ile gösterilir [19].

Tanım 2.1.3. 3-boyutlu Öklid uzayında bir nokta X ve bir afin koordinat sistemine göre X in koordinatları (x_1, x_2, x_3) olsun.

$$x_i : A \subseteq E^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3$$

fonksiyonuna A Öklid uzayının i -yinci koordinat fonksiyonu adı verilir [19].

Tanım 2.1.4. V bir 3-boyutlu reel vektör uzayı ve V nin üzerinde de Öklid iç çarpımı tanımlanmış olsun. V ile birleşen bir A Afin uzayına 3-boyutlu Öklid uzayı denir [19].

Tanım 2.1.5. 3-boyutlu bir reel iç çarpım uzayı $\mathbb{R}^3$ ile birleşen Öklid uzayı E^3 olsun. Bir

$$d : E^3 \times E^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu $\forall X, Y \in \mathbb{R}^3$ için $\mathbb{R}^3$ deki norm ile

$$d(X, Y) = \|\overline{XY}\| = \sqrt{\langle \overline{XY}, \overline{XY} \rangle}$$

şeklinde tanımlanır ve E^3 de X ile Y noktaları arasındaki uzaklık adını alır [19].

Tanım 2.1.6. $\mathbb{R}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere diferensiyellenebilir birim hızlı bir eğri

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\alpha \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$$

olsun. Her $t \in I$ için $\alpha(t)$ noktasındaki teğet vektör ile anadoğrunun doğrultman vektörü lineer bağımsız olacak şekilde

$$l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$v \rightarrow l(v) = (\alpha_1(t) + va_1(t), \alpha_2(t) + va_2(t), \alpha_3(t) + va_3(t))$$

doğrusunu seçelim. Burada $1 \leq i \leq 3$ olmak üzere $a_i(t) \in \mathbb{R}$ skalarları, $\alpha(t)$ noktasındaki doğrultman vektörün bileşenleridir.

l doğrusunun α eğrisi boyunca hareket etmesiyle elde edilen ve $(I \times \mathbb{R}, \Psi)$ parametrizasyonu ile belirtilen bir regle yüzey

$$\Psi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(t, v) \rightarrow \Psi(t, v) = (\alpha_1(t) + va_1(t), \alpha_2(t) + va_2(t), \alpha_3(t) + va_3(t))$$

şeklinde gösterilir.

Yani $M \subset E^3$ yüzeyi verildiğinde $\forall P \in M$ noktasında, E^3 ün M de kalan bir doğrusu var ise M ye bir regle yüzey ve $\forall P \in M$ noktasından geçen ve M de kalan doğruya da M nin bir doğrultmanı denir [4].

Tanım 2.1.7. Regle yüzeyin komşu iki anadoğrusu arasındaki en kısa uzaklığın bu iki komşu anadoğru arasındaki açıya oranına regle yüzeyin dağılma parametresi (drali) denir [4].

Tanım 2.1.8. Bir regle yüzeyin anadoğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye açılabilir denir [21].

Tanım 2.1.9. Bir regle yüzeyde komşu iki doğrultmanın ortak dikmesinin doğrultmanlar üzerindeki ayaklarına boğaz (merkez veya striksiyon) noktası adı verilir [20].

Tanım 2.1.10. Bir regle yüzeyin anadoğrusu dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine regle yüzeyin boğaz (striksiyon) çizgisi (eğrisi) adı verilir [4].

Teorem 2.1.1. $M \subset E^3$ eğrisi, (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $t \in I$ için $\alpha(t)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı, $\{\mathbf{T}(t), \mathbf{N}(t), \mathbf{B}(t)\}$ ise

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(t) &= \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} \alpha'(t) \\ \mathbf{N}(t) &= \mathbf{B}(t) \times \mathbf{T}(t) \\ \mathbf{B}(t) &= \frac{1}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|} (\alpha'(t) \times \alpha''(t))\end{aligned}$$

dir [1].

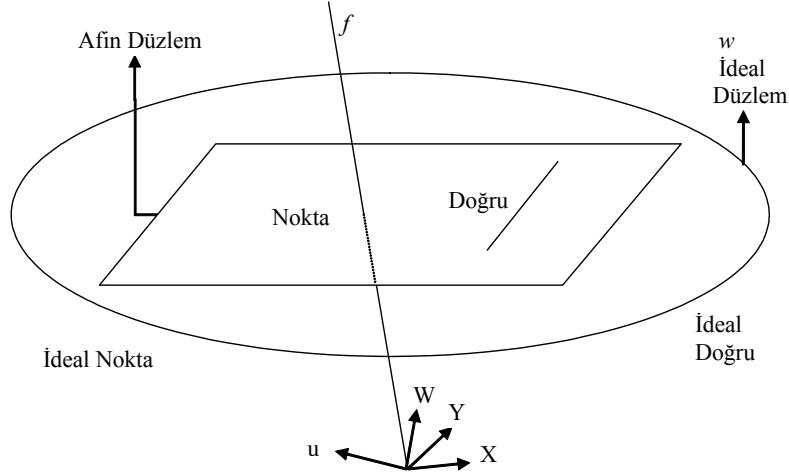
Teorem 2.1.2. $M \subset E^3$ eğrisi, (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere, $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$ ise

$$\begin{aligned}\mathbf{T}'(s) &= \kappa(s) \mathbf{N}(s) \\ \mathbf{N}'(s) &= -\kappa(s) \mathbf{T}(s) + \tau(s) \mathbf{B}(s) \\ \mathbf{B}'(s) &= -\tau(s) \mathbf{N}(s)\end{aligned}$$

dir. Burada $\mathbf{T}$ birim tanjat vektör, $\mathbf{N}$ birim normal vektör, $\mathbf{B}$ birim binormal vektördür. κ ve τ ise, sırasıyla, eğrinin eğrilik ve torsiyonudur [1].

2.2. 3-Boyutlu Galilean Uzayı

G_3 Galilean uzayı, 3-boyutlu bir P_3 kompleks projektif uzayının w ideal düzlemlerinin bir reel düzlemini, $f \subset w$ ideal doğrularının bir reel doğrusunu ve $I_1, I_2 \in f$ gibi ideal noktalardan iki tanesini içeren $\{w, f, I_1, I_2\}$ ideal şekline sahip olan bir halidir [16].



Şekil 2.2.1: G_3 Galilean Uzayında Nokta ve Doğrular

G_3 uzayının bir reel modeli olarak, ε eliptik involusyonu ile birlikte $f \subset w$ reel doğrusunu ve $w \subset G_3$ reel düzlemini içeren $\{w, f\}$ ideale sahip bir reel P_3 projektif uzayını alabiliriz.

Uygun koordinatlarda ε eliptik involusyonunu

$$w \dots x_0 = 0, \quad f \dots x_0 = x_1 = 0$$

$$\varepsilon : (0 : 0 : x_2 : x_3) \rightarrow (0 : 0 : x_3 : -x_2).$$

şeklinde alabiliriz.

Homojen olmayan koordinatlarda H_8 benzerlik grubu

$$\begin{aligned} x' &= a_{11} + a_{12}x, \\ y' &= a_{21} + a_{22}x + a_{23}y \cos \varphi + a_{23}z \sin \varphi, \\ z' &= a_{31} + a_{32}x - a_{23}y \sin \varphi + a_{23}z \cos \varphi, \end{aligned}$$

formundadır. Burada a_{ij} ve φ reel sayılardır.

Burada a_{12} ve a_{23} katsayıları özel bir rol oynar. $a_{12} = a_{23} = 1$ alındığında Galilean uzayının B_6 hareket grubu elde edilir. Bu grup

$$B_6 : \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & \cos \varphi & \sin \varphi \\ e & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

şeklinde hareket eder. Böylece bu hareket boyunca G_3 Galilean uzayında doğrular dört sınıfa ayrılır. Bu doğrular aşağıdaki şekilde ifade edilebilir [16].

- 1) Reel non-izotropik doğrular. Bu doğrular f ideal doğrusunu kesmezler.
- 2) Reel izotropik doğrular. Bu doğrular w düzlemine ait değildir, fakat f ideal doğrusunu keserler.
- 3) Reel olmayan non-izotropik doğrular. Bu doğrular f den başka w nın bütün doğrularıdır.
- 4) f ideal doğrusu.

G_3 , Galilean uzayında $x = \text{sabit}$ alındığında düzlemler öklidiyendir, bu ise w düzlemidir. Diğer düzlemler izotropiktir.

Burada C^k ($k \geq 3$) sınıfından bir $\mathbf{r} : I \rightarrow G_3$ eğrisi $(I, \mathbf{r})$ koordinat komşuluğu ile

$$\mathbf{r}(x) = (x, y(x), z(x))$$

şeklinde verildiğinde $\kappa(x)$ eğriliği ve $\tau(x)$ torsiyonu

$$\begin{aligned} \kappa(x) &= \sqrt{y''^2(x) + z''^2(x)} \\ \tau(x) &= \frac{\det(\mathbf{r}'(x), \mathbf{r}''(x), \mathbf{r}'''(x))}{\kappa^2(x)} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece G_3 Galilean uzayında ortonormal üçyüzlü

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(x) &= \mathbf{r}'(x) \\ \mathbf{n}(x) &= \frac{1}{\kappa(x)}(0, y''(x), z''(x)) \\ \mathbf{b}(x) &= \frac{1}{\kappa(x)}(0, -z''(x), y''(x)) \end{aligned}$$

şeklinde verilebilir. Burada $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ vektörleri, sırasıyla, tanjant, aslinormal ve binormal vektörler olarak adlandırılır. Bu vektörlerin türevleri alınarak Frenet formülleri

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}'(x) &= \kappa(x)\mathbf{n}(x) \\
\mathbf{n}'(x) &= \tau(x)\mathbf{b}(x) \\
\mathbf{b}'(x) &= -\tau(x)\mathbf{n}(x)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir [16].

2.3. 3-Boyutlu Pseudo-Galilean Uzayı

Pseudo-Galilean geometri, projektif işareti $(0, 0, +, -)$ olan reel Cayley-Klein Geometrilerinden biridir. Pseudo-Galilean geometrinin temeli $\{w, f, I\}$ sıralı üçlüleridir. Burada w ideal düzlem, f ise w ideal düzlemde bir doğru ve I da f in noktalarının sabit hiperbolik involusyonudur [22].

Tanım 2.3.1. Uygun Afin bileşenlere sahip

$$B_6 : \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ e & -\sinh \varphi & \cosh \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

şeklinde verilen Galilean uzayının B_6 hareket grubu göz önüne alındığında

$$\bar{B}_6 := \left\langle B_6, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

şeklindeki $\bar{B}_6$ grubu G_3^1 pseudo -Galilean uzayının hareket grubu olarak adlandırılır [22].

Afin bileşenlere sahip $\bar{B}_6$ grubu

$$\bar{B}_6 : \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & \eta \cosh \varphi & \eta \sinh \varphi \\ e & \eta \sinh \varphi & \eta \cosh \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

şeklinde hareket eder. Burada $\eta = \pm 1$ dir.

$\bar{B}_6$ hareketi boyunca noktalar altı sınıfa ayırır. Bu altı sınıf aşağıdaki şekilde oluşturulur [22].

1) $(1 : x : y : z) \sim (x, y, z)$ şeklindeki reel noktalar.

$$g : G_3^1 \times G_3^1 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) \rightarrow g(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \begin{cases} x_1 x_2, & x_1 \neq 0 \vee x_2 \neq 0 \\ y_1 y_2 - z_1 z_2, & x_1 = 0 \wedge x_2 = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [22].

Tanım 2.3.5. $P_1, P_2 \in G_3^1$, $P_1 \neq P_2$ iki reel nokta olmak üzere $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ için

$$d : G_3^1 \times G_3^1 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(P_1, P_2) \rightarrow d(P_1, P_2) = \begin{cases} |x_2 - x_1|, & x_1 \neq x_2, \\ \sqrt{|(y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2|}, & x_1 = x_2, \end{cases}$$

olarak tanımlanan d fonksiyonuna G_3^1 , pseudo-Galilean uzayında uzaklık fonksiyonu ve $d(P_1, P_2)$ reel sayısına da $P_1, P_2 \in G_3^1$ noktaları arasındaki uzaklık denir [22].

Tanım 2.3.6. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında bir $\mathbf{X}(x, y, z)$ izotropik vektörü verildiğinde

$y^2 - z^2 > 0$ ise $\mathbf{X}$ izotropik vektörüne space-like vektör,

$y^2 - z^2 < 0$ ise $\mathbf{X}$ izotropik vektörüne time-like vektör,

$y = \mp z$ ise $\mathbf{X}$ izotropik vektörüne light-like vektör denir [22].

Tanım 2.3.7. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında bir light-like olmayan $\mathbf{X}(x, y, z)$ izotropik vektörü göz önüne alınsın. Eğer $y^2 - z^2 = \mp 1$ ise bu $\mathbf{X}$ izotropik vektörü birim vektör olarak adlandırılır [22].

Tanım 2.3.8. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında bir $\mathbf{X}(x, y, z)$ vektörünün normu

$$\|\mathbf{X}\| = \begin{cases} x, & x \neq 0 \\ \sqrt{|y^2 - z^2|}, & x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [22].

Tanım 2.3.9. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında iki non-izotropik vektör $\mathbf{a}(1, a_2, a_3)$ ve $\mathbf{b}(1, b_2, b_3)$ olsun. Bu iki non-izotropik vektör arasındaki açının ölçüsü, onların fark vektörlerinin uzunluğu olarak tanımlanır ve

$$m(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sqrt{|(b_2 - a_2)^2 - (b_3 - a_3)^2|}$$

şeklinde hesaplanır [22].

3. 3-BOYUTLU PSEUDO-GALILEAN UZAYINDA KÜRESEL BİR EĞRİNİN KAREKTERİZASYONLARI

Bu bölümde ilk olarak 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında eğriler tanımlandı. Ayrıca bu uzayda tanımlanmış olan Frenet formülleri verildi. Daha sonra 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında küresel eğriler tanımlanarak, Öklid uzayında da iyi bilinen karakterizasyonlar bu uzayda verildi.

3.1. 3-Boyutlu Pseudo-Galilean Uzayında Uzay Eğrileri

G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında bir $\mathbf{r}$ uzay eğrisi

$$\mathbf{r}: I \rightarrow G_3^1$$

şeklindedir. Burada

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad (3.1)$$

dir. Ayrıca $t \in I \subset \mathbb{R}$ ve $x(t), y(t), z(t) \in C^3$ dir. $I \subset \mathbb{R}$ aralığına $\mathbf{r}$ eğrisinin parametre aralığı ve $t \in I$ değişkenine de $\mathbf{r}$ eğrisinin parametresi denir.

Tanım 3.1.1. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ şeklinde verilen bir $\mathbf{r}$ eğrisi için, eğer

$$x'(t) \neq 0. \quad (3.2)$$

ise bu $\mathbf{r}$ eğrisine admissible eğri adı verilir [22].

$\mathbf{r}$ eğrisi

$$y''^2(x) - z''^2(x) \neq 0 \quad (3.3)$$

olmak üzere

$$\mathbf{r}(x) = (x, y(x), z(x)) \quad (3.4)$$

şeklinde verilir.

Tanım 3.1.2. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ şeklinde verilen admissible bir $\mathbf{r}$ eğrisi için yay uzunluğu parametresi

$$ds = \left| x'(t) dt \right| = |dx| \quad (3.5)$$

şeklinde tanımlanır [22].

Bundan sonra aksi belirtilmedikçe bu bölümde eğrinin yay parametresi olarak x alınacaktır.

Burada $\mathbf{t}(x) = \mathbf{r}'(x)$ vektörü, bir $P(x)$ noktasında, admissible bir $\mathbf{r}$ eğrisinin tanjant birim vektörü olarak adlandırılır.

Aynı noktada $\mathbf{r}'(x)$ ve $\mathbf{r}''(x)$ vektörleri tarafından gerilen, $\mathbf{r}$ eğrisinin pseudo oskülatör düzlemini tanımlayalım. Oskülatör düzlemin oskülatör noktası

$$H(0 : 0 : y''(x) : z''(x)) \quad (3.6)$$

şeklinde tanımlanır. (3.3) denkleminde de anlaşılaçağı üzere H oskülatör noktası light-like değildir. H , doğrultman vektörü $\mathbf{r}''(x)$ olan, bir doğrunun sınırındaki bir noktadır. O zaman

$$\mathbf{n}(x) = \frac{\mathbf{r}''(x)}{\sqrt{|y''^2(x) - z''^2(x)|}} \quad (3.7)$$

birim vektörü, P noktasında $\mathbf{r}$ eğrisinin asli normal vektörü olarak adlandırılır.

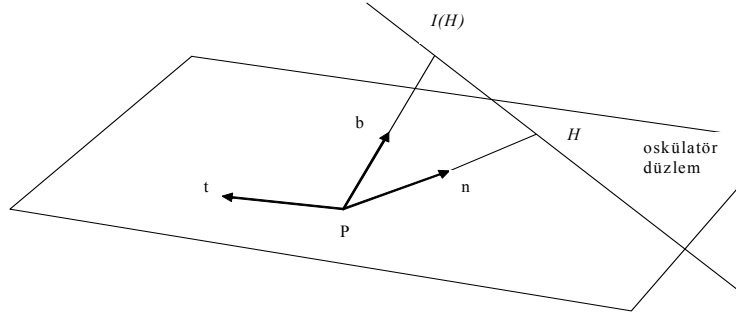
$$\mathbf{b}(x) = \frac{(0, \epsilon z''(x), \epsilon y''(x))}{\sqrt{|y''^2(x) - z''^2(x)|}} \quad (3.8)$$

vektörü oskülatör düzleme uygun olarak pseudo-Galilean anlamında ortogonaldır ve P noktasında verilen eğrinin binormal vektörü olarak adlandırılır. Burada $\det(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}) = 1$ kriterine göre $\epsilon = +1$ veya $\epsilon = -1$ seçilir. Yani

$$\left| y''^2(x) - z''^2(x) \right| = \epsilon (y''^2(x) - z''^2(x)) \quad (3.9)$$

şeklindedir.

Tanım 3.1.3. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında admissible bir eğrinin her bir noktasında pseudo-Galilean anlamında ortonormal $\{\mathbf{t}(x), \mathbf{n}(x), \mathbf{b}(x)\}$ üçyüzlüsü tanımlanabilir [22]. (Şekil 3.1.1.)



Şekil 3.1.1: G_3^1 pseudo-Galilean Uzayında Ortonormal Üçyüzlü

Eğer bir eğri yay uzunluğu parametresi ile parametrize edilmiş ise yani (3.4) ile verilmiş ise bu durumda tanjant vektör non-izotropiktir ve

$$\mathbf{t}(x) = \mathbf{r}'(x) = (1, y'(x), z'(x)) \quad (3.10)$$

formundadır. Buradan x e göre türev alınırsa

$$\mathbf{t}'(x) = \mathbf{r}''(x) = (0, y''(x), z''(x)) \quad (3.11)$$

elde edilir. Gerekli hesaplamalar yapılırsa (3.7) denklemi

$$\mathbf{r}''(x) = \kappa(x)\mathbf{n}(x) \quad (3.12)$$

formunda yazılır. Burada $\kappa(x)$, admissible $\mathbf{r}$ eğrisinin eğriliği olup

$$\kappa(x) = \sqrt{|y''^2(x) - z''^2(x)|} \quad (3.13)$$

şeklindedir [22].

Tanım 3.1.4. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında, bir $\mathbf{r}$ eğrisi $\mathbf{r}(x) = (x, y(x), z(x))$ şeklinde verilsin. $\mathbf{n}(x)$ bu eğrinin asli normal vektörü olmak üzere, eğer, $\mathbf{n}(x)$ space-like bir vektör ise o zaman $\mathbf{r}$ eğrisi time-like bir eğri olarak adlandırılır.

Benzer şekilde eğer $\mathbf{n}(x)$ time-like bir vektör ise o zaman $\mathbf{r}$ eğrisi space-like bir eğri olarak adlandırılır [22].

Teorem 3.1.1. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında, $\mathbf{r}(x) = (x, y(x), z(x))$ şeklinde verilen admissible bir $\mathbf{r}$ eğrisinin pseudo-Galilean Frenet üçyüzlüsü için Frenet formülleri

$$\begin{aligned}\mathbf{t}'(x) &= \kappa(x)\mathbf{n}(x) \\ \mathbf{n}'(x) &= \tau(x)\mathbf{b}(x) \\ \mathbf{b}'(x) &= \tau(x)\mathbf{n}(x)\end{aligned}\tag{3.14}$$

şeklindedir [22].

Burada $\mathbf{t}(x)$ space-like, $\mathbf{n}(x)$ space-like ve $\mathbf{b}(x)$ time-like vektörlerdir. $\kappa(x)$, $\mathbf{r}$ eğrisinin (3.13) ile verilen pseudo-Galilean eğriliği ve $\tau(x)$ de

$$\tau(x) = \frac{y''(x)z'''(x) - y'''(x)z''(x)}{\kappa^2(x)}\tag{3.15}$$

şeklinde tanımlanan pseudo-Galilean torsiyonudur. Bu son eşitlik

$$\tau(x) = \frac{\det(\mathbf{r}'(x), \mathbf{r}''(x), \mathbf{r}'''(x))}{\kappa^2(x)}\tag{3.16}$$

şeklinde de yazılabilir.

κ eğriliği ve τ torsiyonu, verilen eğriye özel, pseudo-Galilean hareketi altında birer invaryanttır.

G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında κ ve τ , Öklid uzayındaki benzer geometrik anlama sahiptirler.

$\mathbf{r}$ eğrisi üzerinde iki sonsuz derecede yakın $(x, y(x), z(x))$ ve $(x + \Delta x, y(x + \Delta x), z(x + \Delta x))$ komşu iki noktayı gözönüne alalım. Tanım 2.3.9 a göre bu noktalardaki teğetler arasındaki açı

$$\Delta\phi = \sqrt{|(y'(x) - y'(x + \Delta x))^2 - (z'(x) - z'(x + \Delta x))^2|}$$

olarak hesaplanır ve o zaman

$$\Delta\phi = \sqrt{|y''^2(x) - z''^2(x)|}\Delta x + \dots$$

olur. Bu durumda

$$\kappa(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \phi}{\Delta x} \right| \left(= \left| \frac{d\phi}{dx} \right| \right)$$

şeklinde elde edilir.

Eğriliğin Öklid ve Galilean uzaylarındaki geometrik anlamının tersine, pseudo-Galilean uzayında eğrilik; komşu noktalarda teğetler arasındaki açının değişim değerinin mutlak ölçüsü olarak ifade edilir.

Benzer düşünceden hareketle, τ torsiyonu için, verilen bir $\mathbf{r}$ eğrisinin $(x, y(x), z(x))$ ve $(x + \Delta x, y(x + \Delta x), z(x + \Delta x))$ komşu iki noktasındaki binormaller veya oskülatör düzlemler arasındaki açı $\Delta \Phi$ ile gösterilirse

$$\tau(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} \right| \left(= \left| \frac{d\Phi}{dx} \right| \right)$$

elde edilir.

3.2. 3-Boyutlu Pseudo-Galilean Uzayında Küresel Eğriler ve Karakterizasyonları

Tanım 3.2.1. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında $\mathbf{r} \in G_3^1$ admissible eğrisiyle $m \in \mathbf{r}$ noktasında sonsuz yakın dört ortak noktası olan pseudo-Galilean küreye, $\mathbf{r}$ nin $m \in \mathbf{r}$ noktasındaki oskülatör küresi veya eğrilik küresi adı verilir.

Şimdi $\mathbf{r} \in G_3^1$ admissible eğrisinin $m \in \mathbf{r}$ noktasında m ile sonsuz yakın üç ortak noktası olan kürelerin geometrik yerini hesaplayalım.

Teorem 3.2.1. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında $\mathbf{r} \in G_3^1$ admissible eğrisi $(I, \mathbf{r})$ koordinat komşuluğu ile verilsin. $x \in I$ ya karşılık gelen $r(x)$ noktasındaki pseudo-Galilean Frenet üçyüzlüsü,

$$\{\mathbf{t}(x), \mathbf{n}(x), \mathbf{b}(x)\}$$

olmak üzere $\mathbf{r}$ ile sonsuz yakın üç ortak noktası olan kürelerin merkezlerinin geometrik yeri;

$$a(x) = r(x) + m_2(x)\mathbf{n}(x) + m_3(x)\mathbf{b}(x) \quad (3.17)$$

dir. Burada

$$m_2(x) = \frac{1}{\kappa(x)}, \quad m_3(x) = -\frac{m_2'(x)}{\tau(x)}.$$

şeklindedir.

İspat: $(I, \mathbf{r})$ koordinat komşuluğu ile verilen $\mathbf{r}$ eğrisi için yay parametresi $x \in I$ olsun. $r(x) \in \mathbf{r}$ noktasında, $\mathbf{r}$ ile sonsuz yakın üç ortak noktası olan bir pseudo-Galilean kürenin merkezi a ve yarıçapı $r_1 \in \mathbb{R}$ olsun Buna göre;

$$h : I \rightarrow \mathbb{R},$$

$$h(x) = g(a(x) - r(x), a(x) - r(x)) = \mp r_1^2 \quad (3.18)$$

fonksiyonunu gözönüne alalım. $r(x)$ noktasında

$$h(x) = h'(x) = h''(x) = h'''(x) = 0 \quad (3.19)$$

olduğundan bu noktada

$$S_{\mp}^2 = \{l : l \in G_3^1, g(l - a, l - a) = \mp r_1^2, r_1 \in \mathbb{R}\} \quad (3.20)$$

küresi ile $\mathbf{r}$ admissible eğrisi sonsuz yakın dört ortak noktaya sahip olur. Burada $g, g : G_3^1 \times G_3^1 \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı skalar çarpımdır. Buna göre (3.19) denkleminde $h(x) = 0$ olduğundan

$$h(x) = g(a(x) - r(x), a(x) - r(x)) = \mp r_1^2 \quad (3.21)$$

denkleminin x e göre türevi alınırsa,

$$h'(x) = 0$$

yada

$$g(-r'(x), a(x) - r(x)) = 0$$

olur. Burada $r'(x) = t(x)$ olduğu göz önüne alınırsa

$$g(-\mathbf{t}(x), a(x) - r(x)) = 0 \quad (3.22)$$

elde edilir. Buradan tekrar türev alınırsa,

$$g(-\mathbf{t}'(x), a(x) - r(x)) + g(\mathbf{t}(x), \mathbf{t}(x)) = 0$$

olur. (3.14) denklemi göz önüne alınırsa

$$-\kappa(x)g(\mathbf{n}(x), a(x) - r(x)) + 1 = 0 \quad (3.23)$$

elde edilir. Ayrıca

$$a(x) - r(x) \in Sp\{\mathbf{t}(x), \mathbf{n}(x), \mathbf{b}(x)\}$$

olduğundan

$$a(x) - r(x) = m_1(x)\mathbf{t}(x) + m_2(x)\mathbf{n}(x) + m_3(x)\mathbf{b}(x) \quad (3.24)$$

yazılabilir. (3.24) eşitliği $\mathbf{t}$ ile iç çarpıma tabi tutulursa,

$$g(\mathbf{t}(x), a(x) - r(x)) = m_1$$

bulunur. Burada (3.22) eşitliği gözönüne alınırsa

$$m_1 = 0 \quad (3.25)$$

elde edilir.

(3.24) eşitliği $\mathbf{n}$ ile iç çarpıma tabi tutulursa,

$$g(\mathbf{n}(x), a(x) - r(x)) = m_2 \quad (3.26)$$

olur. Son eşitlik (3.23) denkleminde yerine yazılırsa

$$-\kappa(x)m_2(x) + 1 = 0$$

bulunur. Buradan

$$m_2(x) = \frac{1}{\kappa(x)} \quad (3.27)$$

elde edilir.

(3.23) denkleminde tekrar türev alınır

$$-\kappa'(x)g(\mathbf{n}(x), a(x) - r(x)) - \kappa(x)g(\mathbf{n}'(x), a(x) - r(x)) = 0$$

olur. Burada (3.14) ve (3.26) eşitlikleri gözönüne alınır

$$-\kappa'(x)m_2(x) - \kappa(x)\tau(x)g(\mathbf{b}(x), a(x) - r(x)) = 0$$

bulunur. Bu son eşitlikte $g(\mathbf{b}(x), a(x) - r(x)) = -m_3$ değeri yerine yazılırsa

$$-\kappa'(x)m_2(x) + \kappa(x)\tau(x)m_3(x) = 0$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapırsa

$$m_3(x) = \frac{\kappa'(x)m_2(x)}{\kappa(x)\tau(x)} \quad (3.28)$$

bulunur. $m_2(x) = \frac{1}{\kappa(x)}$ eşitliğinde x e göre türev alınır

$$\kappa'(x) = -\frac{m_2'(x)}{m_2^2(x)}$$

olur. Bu da (3.28) de göz önüne alınır

$$m_3(x) = -\frac{m_2'(x)}{\tau(x)} \quad (3.29)$$

elde edilir.

Teorem 3.2.2. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında, orjin merkezli bir pseudo-Galilean küre $S_{\mp}^2$ ve $\mathbf{r}$ de $S_{\mp}^2$ üzerinde bir admissible eğri olsun. Bu durumda admissible eğrinin parametresi x ise

$$\begin{aligned} g(\mathbf{n}(x), r(x)) &= -m_2(x) \\ g(\mathbf{b}(x), r(x)) &= m_3(x) \end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat: $S_{\mp}^2$ pseudo-Galilean kürenin yarıçapı r_1 ($r_1 \in \mathbb{R}$) olsun. $r(x) \in S_{\mp}^2$ olduğundan

$$g(r(x), r(x)) = r_1^2$$

yazılır. Buradan x e göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} g(r'(x), r(x)) &= 0 \\ g(\mathbf{t}(x), r(x)) &= 0 \end{aligned} \tag{3.30}$$

elde edilir.

(3.30) dan tekrar x e göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} g(\mathbf{t}'(x), r(x)) + g(\mathbf{t}(x), r'(x)) &= 0 \\ g(\kappa(x)\mathbf{n}(x), r(x)) + g(\mathbf{t}(x), \mathbf{t}(x)) &= 0 \\ \kappa(x)g(\mathbf{n}(x), r(x)) + 1 &= 0 \\ g(\mathbf{n}(x), r(x)) &= -\frac{1}{\kappa(x)} \end{aligned}$$

olur. Buradaki ifade de (3.27) eşitliği göz önüne alınırsa

$$g(\mathbf{n}(x), r(x)) = -m_2(x) \tag{3.31}$$

bulunur.

(3.31) dan tekrar x e göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} g(\mathbf{n}'(x), r(x)) + g(\mathbf{n}(x), r'(x)) &= -m_2'(x) \\ g(\mathbf{n}'(x), r(x)) + g(\mathbf{n}(x), \mathbf{t}(x)) &= -m_2'(x) \end{aligned}$$

elde edilir. (3.14) ve $g(\mathbf{n}(x), \mathbf{t}(x)) = 0$ dan

$$\begin{aligned} \tau(x)g(\mathbf{b}(x), r(x)) &= -m_2'(x) \\ g(\mathbf{b}(x), r(x)) &= -\frac{m_2'(x)}{\tau(x)} \end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlikte (3.29) göz önüne alınırsa

$$g(\mathbf{b}(x), r(x)) = m_3(x)$$

elde edilir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 3.2.3. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında admissible bir eğri $\mathbf{r}$ olsun. Eğer bir pseudo-Galilean kürenin yarıçapı sabit ise o zaman

$$\tau(x)m_2(x) + m_3'(x) = 0 \quad (3.32)$$

eşitliği mevcuttur. Burada $m_3(x) \neq 0$, $\tau(x) \neq 0$ dir.

İspat: Teorem 3.2.1 den

$$a(x) - r(x) = m_2(x)\mathbf{n}(x) + m_3(x)\mathbf{b}(x) \quad (3.33)$$

yazılır. Ayrıca

$$g(a(x) - r(x), a(x) - r(x)) = \mp r_1^2, \quad r_1 \in \mathbb{R}$$

ifadesinden

$$m_2^2(x) - m_3^2(x) = \mp r_1^2 \quad (3.34)$$

elde edilir. Burada r_1 pseudo-Galilean kürenin yarıçapı olup, $r_1 = \text{sabit}$ dir. (3.34) den x e göre türev alınırsa

$$m_2(x)m_2'(x) - m_3(x)m_3'(x) = 0$$

şeklinde olur. (3.29) değeri yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} m_2(x)m_2'(x) + \frac{m_2'(x)m_3'(x)}{\tau(x)} &= 0 \\ m_2'(x) \left\{ m_2(x) + \frac{m_3'(x)}{\tau(x)} \right\} &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. $m_2'(x) \neq 0$ olduğundan

$$m_2(x) + \frac{m_3'(x)}{\tau(x)} = 0$$

olur. Buradan da

$$\tau(x)m_2(x) + m_3'(x) = 0$$

elde edilir.

3.3. $m_2^2(x) - m_3^2(x) = \mp r_1^2$ Eşitliğinin İntegrasyonu

G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayı olsun. $\mathbf{r} \in G_3^1$ admissible eğrisi $(I, \mathbf{r})$ koordinat komşuluğu ile verilsin. $x \in I$ ya karşılık gelen $r(x)$ noktasındaki pseudo-Galilean Frenet üçyüzlüğü,

$$\{\mathbf{t}(x), \mathbf{n}(x), \mathbf{b}(x)\}$$

olsun. $\mathbf{r} \in G_3^1$ admissible eğrisi için

$$\begin{aligned} \tau(x)m_2(x) + m_3'(x) &= 0 \\ m_2(x) &= \frac{1}{\kappa(x)} \\ m_3(x) &= -\frac{m_2'(x)}{\tau(x)} \end{aligned}$$

eşitliklerinin geçerli olduğu biliniyor. Burada $\kappa(x) \neq 0$ ve $\tau(x) \neq 0$ olacak şekilde, $\kappa(x)$, $\mathbf{r}$ eğrisinin pseudo-Galilean eğriliği ve $\tau(x)$ da pseudo-Galilean torsiyonudur.

$$m_2(x) = \frac{1}{\kappa(x)}$$

ve

$$m_3(x) = -\frac{m_2'(x)}{\tau(x)} = -\left(\frac{1}{\kappa(x)}\right)' \left(\frac{1}{\tau(x)}\right)$$

eşitlikleri

$$\tau(x)m_2(x) + m_3'(x) = 0$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$-\left[\left(\frac{1}{\kappa(x)}\right)'\left(\frac{1}{\tau(x)}\right)\right]'+\frac{\tau(x)}{\kappa(x)}=0$$

elde edilir. Bu son denklemde, $\frac{1}{\kappa(x)}$ ve $\frac{1}{\tau(x)}$ değerleri yerine sırasıyla, $q(x)$ ve $p(x)$ yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$(p(x)q'(x))'-\frac{q(x)}{p(x)}=0 \quad (3.35)$$

olur.

(3.35) denleminde

$$t=\int\frac{dx}{p(x)}$$

değişken değiştirmesi yapılırsa

$$(p(x)q')'=\frac{1}{p(x)}\frac{d^2q}{dt^2} \quad (3.36)$$

bulunur. (3.35) ve (3.36) denklemlerinden

$$\frac{1}{p(x)}\frac{d^2q}{dt^2}-\frac{1}{p(x)}q=0$$

ya da

$$\frac{d^2q}{dt^2}-q=0$$

diferensiyel denklemini elde edilir. Bu diferensiyel denklemin çözümü ise

$$q(x)=A\cosh\int\tau(x)dx+B\sinh\int\tau(x)dx$$

şeklinde bulunur.

3.4. Hatırlatma

G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayı olsun. Eğer $\mathbf{r} \in G_3^1$ admissible eğrisi $(I, \mathbf{r})$ koordinat komşuluğu ile verildiğinde $x \in I$ ya karşılık gelen $r(x)$ noktasındaki pseudo-Galilean Frenet üçyüzlüsü $\{\mathbf{t}(x), \mathbf{n}(x), \mathbf{b}(x)\}$, $\{space - like, time - like, space - like\}$

şeklinde alındığında, 3.2. bölümündeki teoremleri ve 3.3. bölümündeki integrasyonu aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:

Teorem 3.4.1. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayı olsun. $\mathbf{r} \in G_3^1$ admissible eğrisi $(I, \mathbf{r})$ koordinat komşuluğu ile verilsin. $x \in I$ ya karşılık gelen $r(x)$ noktasındaki pseudo-Galilean Frenet üçyüzlüsti,

$$\{\mathbf{t}(x), \mathbf{n}(x), \mathbf{b}(x)\}$$

olmak üzere $\mathbf{r}$ ile sonsuz yakın üç ortak noktası olan kürelerin merkezlerinin geometrik yeri;

$$a(x) = r(x) + m_2(x)\mathbf{n}(x) + m_3(x)\mathbf{b}(x)$$

dir. Burada

$$m_2(x) = -\frac{1}{\kappa(x)}, \quad m_3(x) = \frac{m_2'(x)}{\tau(x)}.$$

şeklindedir.

Teorem 3.4.2. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında, orjin merkezli bir pseudo-Galilean küre $S_{\mp}^2$ ve $\mathbf{r}$ de $S_{\mp}^2$ üzerinde bir eğri olsun. Bu durumda admissible eğrinin parametresi x ise, o zaman

$$\begin{aligned} g(\mathbf{n}(x), r(x)) &= m_2(x) \\ g(\mathbf{b}(x), r(x)) &= m_3(x) \end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir.

Teorem 3.4.3. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında admissible bir eğri $\mathbf{r}$ olsun. Eğer bir pseudo-Galilean kürenin yarıçapı sabit ise o zaman

$$-\tau(x)m_2(x) + m_3'(x) = 0$$

eşitliği mevcuttur. Burada $m_3(x) \neq 0$, $\tau(x) \neq 0$ dir.

Buradan admissible $\mathbf{r}$ eğrisi için

$$\left[\left(\frac{1}{\kappa(x)} \right)' \left(\frac{1}{\tau(x)} \right) \right]' + \frac{\tau(x)}{\kappa(x)} = 0$$

explicit karakterizasyonu elde edilir. Bu diferensiyel denklemin çözümü

$$q(x) = A \cos \int \tau(x) dx + B \sin \int \tau(x) dx$$

şeklindedir.

4. 3-BOYUTLU PSEUDO-GALILEAN UZAYINDA REGLE YÜZEYLER

4.1. 3-Boyutlu Pseudo-Galilean Uzayında Regle Yüzeyler

Bu bölümde 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında regle yüzeyler incelendi. 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında regle yüzeylerle ilgili bazı temel tanımlar verildi.

Tanım 4.1.1. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında bir açık alt cümle U olmak üzere

$$\gamma : U \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonunun k yıncı mertebeden bütün kısmi türevleri var ve sürekli iseler γ fonksiyonuna C^k ($k \geq 1$) sınıfından diferensiyellenebilirdir denir.

Tanım 4.1.2. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında verilen bir l doğrusunun verilen bir $\mathbf{r}$ eğrisi boyunca hareketiyle bir yüzey elde edilebiliyorsa, bu yüzeye 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında bir regle yüzey denir. Bu durumda verilen l doğrusuna, regle yüzeyin bir anadoğrusu ve verilen $\mathbf{r}$ eğrisine de regle yüzeyin dayanak eğrisi denir [18].

G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında C^3 sınıfından bir regle yüzey

$$\mathbf{x}(x, v) = \mathbf{r}(x) + v\mathbf{a}(x) \quad \mathbf{r}, \mathbf{a} \in C^3, v \in \mathbb{R} \quad (4.1)$$

şeklinde olsun.

Burada pseudo-Galilean yay uzunluğu ile parametrize edilmiş $\mathbf{r}$ eğrisi, pseudo-Öklid düzleminde yatmaz ve bir dayanak eğrisi olarak adlandırılır. Bu $\mathbf{r}$ eğrisi

$$\mathbf{r}(x) = (x, y(x), z(x)) \quad (4.2)$$

şeklindedir.

Ayrıca $\mathbf{a}(x)$ anadoğrusu

$$\mathbf{a}(x) = (1, a_2(x), a_3(x)) \quad (4.3)$$

veya

$$\mathbf{a}(x) = (0, a_2(x), a_3(x)), |a_2^2(x) - a_3^2(x)| = 1 \quad (4.4)$$

formundadır.

Tanım 4.1.3. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında bir regle yüzeyin anadoğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye açılabilir denir.

Tanım 4.1.4. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında açılabilir olmayan bir regle yüzey verilsin. regle yüzeyin komşu iki anadoğrusunun ortak dikmesi varsa, bu dikmenin esas doğrusu üzerindeki ayağına boğaz (merkez veya striksiyon) noktası denir.

Tanım 4.1.5. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında açılabilir olmayan bir regle yüzeyin anadoğrusu, dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine, regle yüzeyin boğaz (merkez) çizgisi (eğrisi) denir.

Tanım 4.1.6. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında

$$\mathbf{x}(x, v) = \mathbf{r}(x) + v\mathbf{a}(x) \quad \mathbf{r}, \mathbf{a} \in C^3, v \in \mathbb{R}$$

şeklinde verilen bir regle yüzey için eğer

$$\mathbf{x}_x \neq 0, \quad \mathbf{x}_v \neq 0, \quad \mathbf{x}_x \times \mathbf{x}_v \neq 0$$

şartları sağlamıyorsa regle yüzeye regülerdir denir [18].

Tanım 4.1.7. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında C^3 sınıfından bir regle yüzey

$$\mathbf{x}(x, v) = \mathbf{r}(x) + v\mathbf{a}(x) \quad \mathbf{r}, \mathbf{a} \in C^3, v \in \mathbb{R}$$

şeklinde olsun. $\mathbf{g}_{11} = g(\mathbf{x}_x, \mathbf{x}_x)$, $\mathbf{g}_{12} = \mathbf{g}_{21} = g(\mathbf{x}_x, \mathbf{x}_v)$ ve $\mathbf{g}_{22} = g(\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v)$ olmak üzere

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_{11}(dx)^2 + 2\mathbf{g}_{12}dx dv + \mathbf{g}_{22}(dv)^2$$

şeklinde tanımlanan $\mathbf{g}$ ifadesine $\mathbf{x}(x, v)$ regle yüzeyi üzerinde birinci temel form adı verilir.

$\mathbf{g}$ birinci temel formun matrisi ise

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{11} & \mathbf{g}_{12} \\ \mathbf{g}_{21} & \mathbf{g}_{22} \end{bmatrix}$$

formunda verilir.

Tanım 4.1.8. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında C^3 sınıfından bir regle yüzey

$$\mathbf{x}(x, v) = \mathbf{r}(x) + v\mathbf{a}(x) \quad \mathbf{r}, \mathbf{a} \in C^3, v \in \mathbb{R}$$

şeklinde olsun. $\mathbf{x}(x, v)$ regle yüzeyi üzerinde

$$\xi = \frac{\mathbf{x}_x \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_x \wedge \mathbf{x}_v\|}$$

şeklinde tanımlı ξ vektör alanına birim normal vektör alanı adı verilir.

Bu çalışmamızda G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında striksiyon eğrisinin durumuna göre regle yüzeylerin üç tipini vereceğiz. Ayrıca verilen kabuller altında regle yüzeylerin bütün teğet düzlemlerinin izotropik olduğunu düşüneceğiz.

4.2. 3-Boyutlu Pseudo-Galilean Uzayında I. Tip Regle Yüzeyler

G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında $\{0\} \subset I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere diferensiyellenebilir birim hızlı bir eğri

$$\mathbf{r} : I \rightarrow G_3^1$$

$$x \rightarrow \mathbf{r}(x) = (x, y(x), z(x))$$

olsun. $\forall x \in I$ için $r(x)$ noktasındaki teğet vektör ile anadoğrunun doğrultman vektörü lineer bağımsız olacak şekilde

$$l : \mathbb{R} \rightarrow G_3^1$$

$$v \rightarrow l(v) = (x + v, y(x) + va_2(x), z(x) + va_3(x))$$

doğrusunu seçelim. Burada $\mathbf{a}(x) = (1, a_2(x), a_3(x))$, $r(x)$ noktasındaki doğrultman vektörüdür.

l doğrusu $\mathbf{r}$ eğrisi boyunca hareket etsin. Bu durumda $(I \times \mathbb{R}, \mathbf{x})$ parametrizasyonu ile verilen bir regle yüzey

$$\mathbf{x} : I \times \mathbb{R} \rightarrow G_3^1 \tag{4.5}$$

$$(x, v) \rightarrow \mathbf{x}(x, v) = (x + v, y(x) + va_2(x), z(x) + va_3(x))$$

şeklinde elde edilir. (4.5) ile gösterilen $\mathbf{x}(x, v)$ regle yüzeyi I. tip regle yüzey olarak adlandırılır. Burada $y(x), z(x), a_2(x), a_3(x) \in C^3$, $x \in I \subset \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}$ şeklindedir.

I. tip regle yüzeylerin sonsuzluktaki doğrultman doğruları ideal doğru değildir. Ayrıca I. tip regle yüzeylerin striksiyon eğrileri pseudo-Öklid düzlemde yatmazlar. I. tip regle yüzeylerin $\mathbf{a}(x) = (1, a_2(x), a_3(x))$ şeklindeki anadoğrusu ise non-izotropiktir.

I. tip bir regle yüzeyin ortonormal üçyüzlüsü $\kappa(x) \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(x) &= \mathbf{a}(x) \\ \mathbf{n}(x) &= \frac{1}{\kappa(x)} \mathbf{a}'(x) \\ \mathbf{b}(x) &= \frac{1}{\kappa(x)} (0, a_3'(x), a_2'(x)) \end{aligned} \tag{4.6}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\kappa(x)$, I. tip regle yüzeyin eğriliği olup

$$\kappa(x) = \sqrt{|a_2'^2(x) - a_3'^2(x)|}$$

dir. I. tip regle yüzey için Frenet formülleri ise

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'(x) &= \kappa(x) \mathbf{n}(x) \\ \mathbf{n}'(x) &= \tau(x) \mathbf{b}(x) \\ \mathbf{b}'(x) &= \tau(x) \mathbf{n}(x) \end{aligned} \tag{4.7}$$

şeklinde verilir. $\tau(x)$ fonksiyonu ise

$$\tau(x) = \frac{\det(\mathbf{a}(x), \mathbf{a}'(x), \mathbf{a}''(x))}{\kappa^2(x)}$$

şeklinde tanımlı, I. tip regle yüzeyin torsiyonudur.

Eğer $\mathbf{a}(x)$ anadoğrusu ile striksiyon eğrisinin $\mathbf{t}(x)$ teğet vektörü arasındaki açı $\sigma(x)$ ile gösterilirse κ , τ ve σ fonksiyonları I. tip regle yüzeyin invaryantlarının bir tam sistemini tanımlar [18].

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &: I \times \mathbb{R} \rightarrow G_3^1 \\ (x, v) &\rightarrow \mathbf{x}(x, v) = \mathbf{r}(x) + v\mathbf{a}(x) \end{aligned}$$

şeklinde verilen I. tip regle yüzeyin, sırasıyla, x ve v ye göre türevi alınır

$$\mathbf{x}_x = \mathbf{r}'(x) + v\mathbf{a}'(x)$$

$$\mathbf{x}_v = \mathbf{a}(x)$$

bulunur. Burada (4.7) ifadesi göz önüne alınırsa

$$\mathbf{x}_x = \mathbf{r}'(x) + v\kappa(x)\mathbf{n}(x)$$

olur.

$\mathbf{x}(x, v)$ ile verilen I. tip regle yüzey üzerinde birinci temel form $\mathbf{g}$ ile gösterilsin.

Tanım 4.1.7. göz önüne alınırsa

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_{11}(dx)^2 + 2\mathbf{g}_{12}dx dv + \mathbf{g}_{22}(dv)^2 \quad (4.8)$$

şekindedir. Basit bir hesaplama ile

$$\mathbf{g}_{11} = g(\mathbf{x}_x, \mathbf{x}_x) = 1 + \epsilon v^2 \kappa^2(x), \quad \epsilon = \mp 1$$

$$\mathbf{g}_{12} = g(\mathbf{x}_x, \mathbf{x}_v) = 1$$

$$\mathbf{g}_{22} = g(\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v) = 1$$

elde edilir. Bu ifadeler (4.8) de göz önüne alınırsa $\mathbf{x}(x, v)$ I. tip regle yüzeyin birinci temel formu,

$$\mathbf{g} = (1 + \epsilon v^2 \kappa^2(x))dx^2 + 2dx dv + dv^2$$

şeklinde olur. $\mathbf{g}$ nin matrisi

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 + \epsilon v^2 \kappa^2(x) & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

dır. Bu matrisin determinanı ise

$$\det \mathbf{g} = \epsilon v^2 \kappa^2(x)$$

dir.

G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında $y(x), z(x), a_2(x), a_3(x) \in C^3$, $x \in I \subset \mathbb{R}$ ve $v \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\mathbf{x} : I \times \mathbb{R} \rightarrow G_3^1$$

$$(x, v) \rightarrow \mathbf{x}(x, v) = (x + v, y(x) + va_2(x), z(x) + va_3(x))$$

şeklinde verilen I. tip regle yüzey, eğer $\epsilon = 1$ ise space-like, $\epsilon = -1$ ise time-like bir yüzeydir.

Burada

$$\mathbf{x}(x, v) = \mathbf{r}(x) + v\mathbf{a}(x)$$

şeklinde verilen I. tip regle yüzeyin $(I \times \mathbb{R}, \mathbf{x})$ parametrizasyonundaki her $v \in \mathbb{R}$ sabit değeri, $\mathbf{x}(x, v)$ I. tip regle yüzeyinin bir

$$\mathbf{x}_{(v)} : I \times \{v\} \rightarrow \mathbf{x}$$

eğrisini belirtir. Bu eğrinin teğet vektör alanı ise

$$A = \mathbf{r}'(x) + v\kappa(x)\mathbf{n}(x) \quad (4.9)$$

şeklinde. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında, Tanım 4.1.8. göz önüne alınırsa, $\mathbf{x}(x, v)$ I. tip regle yüzeyi üzerinde birim normal vektör alanı

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{|a_3'^2(x) - a_2'^2(x)|}}(0, a_3'^2(x), a_2'^2(x)) \quad (4.10)$$

şeklinde elde edilir. Burada $g(\xi, \xi) = \mp 1$ dir. Bu durumda (4.9) ve (4.10) dan

$$g(A, \xi) = 0$$

elde edilir.

Teorem 4.2.1. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında $y(x), z(x), a_2(x), a_3(x) \in C^3$, $x \in I \subset \mathbb{R}$ ve $v \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\mathbf{x} : I \times \mathbb{R} \rightarrow G_3^1$$

$$(x, v) \rightarrow \mathbf{x}(x, v) = (x + v, y(x) + va_2(x), z(x) + va_3(x))$$

şeklinde verilen I. tip regle yüzey açılabilir değildir.

İspat: G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında $\mathbf{x}(x, v)$ ile verilen regle yüzey I. tip bir regle yüzey olsun. Tanım 4.1.2. gereğince, G_3^1 , pseudo-Galilean uzayında bir regle yüzeyin açılabilir olması için anadoğruları boyunca teğet düzlemlerinin aynı olması gerekir. I. tip bir regle yüzeyin ortonormal üçyüzlüsü $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ olsun. Anadoğrunun herhangi bir $v = \text{sabit}$ değerine karşılık gelen noktasından geçen

$$\mathbf{x}_{(v)} : I \times \{v\} \rightarrow \mathbf{x}$$

eğrisinin

$$A = \mathbf{r}'(x) + v\kappa(x)\mathbf{n}(x)$$

teğet vektör alanı göz önüne alınsın. (4.10) dan $\mathbf{x}(x, v)$ I. tip regle yüzeyinin ξ birim normal vektör alanı

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{|a_3'^2(x) - a_2'^2(x)|}}(0, a_3'^2(x), a_2'^2(x))$$

olur.

$r(x)$ noktasından geçen anadoğrunun her noktasında teğet düzlemlerin sabit olması için anadoğru boyunca ξ normal vektör alanının sabit olması gerekir. Çünkü bu durumda her teğet düzlemin ortak birer doğruları mevcut olup normalleri aynı olur. ξ normal vektör alanının anadoğru boyunca sabit olması için $\{A, \xi\}$ sisteminin lineer bağımlı olması gerekir. Bu ise (4.9) eşitliğinde $\kappa = 0$ olması ile mümkündür. Halbuki I. tip bir regle yüzeyin ortonormal üçyüzlüsü tanımından $\kappa \neq 0$ olmalıdır. O halde verilen I. tip regle yüzey açılabilir değildir.

4.2.1. I. Tip Regle Yüzeyler İçin Boğaz Noktasının Yervektörü

G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında $y(x), z(x), a_2(x), a_3(x) \in C^3$, $x \in I \subset \mathbb{R}$ ve $v \in \mathbb{R}$ olmak üzere

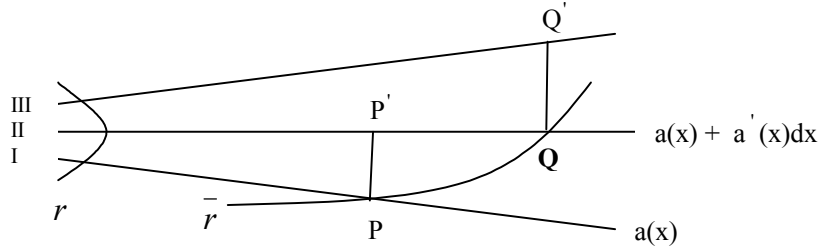
$$\mathbf{x} : I \times \mathbb{R} \rightarrow G_3^1$$

$$(x, v) \rightarrow \mathbf{x}(x, v) = (x + v, y(x) + va_2(x), z(x) + va_3(x))$$

şeklinde verilen I. tip bir regle yüzeyin merkez noktasının, dayanak eğrisine olan uzaklığı $\bar{u}$ olmak üzere $\bar{\mathbf{r}}(x)$ yervektörü

$$\bar{\mathbf{r}}(x, \bar{u}) = \mathbf{r}(x) + \bar{u}\mathbf{a}(x) \quad (4.11)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\mathbf{r}(x)$ dayanak eğrisinin yervektörü ve $\mathbf{a}(x)$ de anadoğruya ait doğrultman vektördür. $\bar{u}$ parametresi I. tip regle yüzeyin dayanak eğrisinin yervektörü ve doğrultman vektörü cinsinden bulunabilir. Bu I. tip regle yüzeye ait ilk ikisi $\mathbf{a}(x)$ ve $\mathbf{a}(x) + d\mathbf{a}(x)$ olan komşu üç anadoğrusunu göz önüne alalım.



Şekil 4.2.1: I.Tip Regle Yüzeyler İçin Boğaz Noktasının Yervektörü

Şekil 4.2.1 deki P , P' ve Q , Q' komşu anadoğruların ortak dikmelerinin anadoğrular üzerindeki ayakları olsunlar. Bu durumda P ve Q farklı iki boğaz noktasıdır. İlk iki komşu anadoğrunun ortak dikmesi

$$\mathbf{a}(x) \wedge (\mathbf{a}(x) + \mathbf{a}'(x)dx) = \mathbf{a}(x) \wedge \mathbf{a}'(x)dx$$

ifadesinin bir katıdır. Limit halinde $\mathbf{PQ}$ vektörü $\mathbf{PP}'$ ile çakışacak ve boğaz eğrisinin teğeti olacaktır. Dolayısıyla

$$g(\mathbf{a}(x), \mathbf{PQ}) = 1 \text{ ve } g(\mathbf{a}(x) + \mathbf{a}'(x)dx, \mathbf{PQ}) = 1$$

olacağından

$$g(\mathbf{a}'(x), \mathbf{PQ}) = 0 \quad (4.12)$$

elde edilir. Limit durumunda

$$\mathbf{PQ} = \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{dx}$$

olur. Bu değer (4.12) de yerine yazılırsa

$$g(\mathbf{a}'(x), \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{dx}) = 0 \quad (4.13)$$

bulunur. Ayrıca (4.11) den $\bar{\mathbf{r}}(x, \bar{u})$ nun x e göre türevi alınır

$$\frac{d\bar{\mathbf{r}}}{dx} = \mathbf{r}'(x) + \bar{u}\mathbf{a}'(x) + \frac{d\bar{u}}{dx}\mathbf{a}(x) \quad (4.14)$$

olur. (4.14) değeri (4.13) de göz önüne alınır

$$g(\mathbf{a}'(x), \mathbf{r}'(x) + \bar{u}\mathbf{a}'(x) + \frac{d\bar{u}}{dx}\mathbf{a}(x)) = 0$$

bulunur. Burada (4.6) ve (4.7) birlikte düşünülerek $\mathbf{a}'(x)$ in değeri yerine yazılırsa

$$\epsilon\bar{u}\kappa^2(x) = 0, \quad \epsilon = \mp 1$$

elde edilir. $\kappa(x) \neq 0$ olduğundan

$$\bar{u} = 0 \quad (4.15)$$

olur. Böylece boğaz eğrisinin yervektörü için (4.11) den

$$\bar{\mathbf{r}}(x) = \mathbf{r}(x)$$

bulunur. Yani I. tip regle yüzeyler için striksiyon eğrisi dayanak eğrisi olarak alınabilir.

Böylece aşağıdaki teoremin ispatı tamamlanmış olur:

Teorem 4.2.2. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında $y(x), z(x), a_2(x), a_3(x) \in C^3$, $x \in I \subset \mathbb{R}$ ve $v \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\mathbf{x} : I \times \mathbb{R} \rightarrow G_3^1$$

$$(x, v) \rightarrow \mathbf{x}(x, v) = (x + v, y(x) + va_2(x), z(x) + va_3(x))$$

şeklinde verilen I. tip bir regle yüzeyin striksiyon eğrisi aynı zamanda dayanak eğrisidir.

Teorem 4.2.3. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında, $y(x), z(x), a_2(x), a_3(x) \in C^3$, $x \in I \subset \mathbb{R}$ ve $v \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\mathbf{x} : I \times \mathbb{R} \rightarrow G_3^1$$

$$(x, v) \rightarrow \mathbf{x}(x, v) = \mathbf{r}(x) + v\mathbf{a}(x)$$

şeklinde bir I. tip regle yüzey verilsin. $r(x) \in \mathbf{r}$ noktasından geçen anadoğru üzerinde $\mathbf{x}(x, v_0)$ noktasının boğaz noktası olması için gerek ve yeter şart $\mathbf{x}(x, v_0)$ noktasındaki teğet düzlemin normalinin $\mathbf{a}'(x)$ olmasıdır.

İspat: $\mathbf{x}(x, v)$ I. tip bir regle yüzey olsun ve $\mathbf{x}(x, v)$ regle yüzeyinin dayanak eğrisi de $\mathbf{r}$ olsun. $r(x) \in \mathbf{r}$ noktasından geçen anadoğru üzerindeki $\mathbf{x}(x, v_0)$ noktasında teğet düzlemin normali $\mathbf{a}'(x)$ olsun.

$$\mathbf{x}_{(v_0)} : I \times \{v_0\} \rightarrow \mathbf{x}$$

eğrisinin teğet vektör alanı

$$A = \mathbf{r}'(x) + v_0\mathbf{a}'(x)$$

olur. Burada (4.7) ifadesi göz önüne alınırsa

$$A = \mathbf{r}'(x) + v_0\kappa(x)\mathbf{n}(x) \quad (4.16)$$

elde edilir. $\mathbf{a}'(x)$ ve A nın birbirine dikliği göz önüne alınırsa

$$g(\mathbf{a}'(x), A) = 0 \quad (4.17)$$

yazılır. (4.6) ve (4.7) den $\mathbf{a}'(x)$ in, (4.16) dan A nın değerleri (4.17) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
g(\kappa(x)\mathbf{n}(x), \mathbf{r}'(x) + v_0\kappa(x)\mathbf{n}(x)) &= 0 \\
\kappa(x)g(\mathbf{n}(x), \mathbf{r}'(x)) + v_0\kappa^2(x)g(\mathbf{n}(x), \mathbf{n}(x)) &= 0
\end{aligned}$$

bulunur. $g(\mathbf{n}(x), \mathbf{r}'(x)) = 0$ ve $g(\mathbf{n}(x), \mathbf{n}(x)) = \epsilon$ ($\epsilon = \mp 1$) olduğundan

$$\epsilon v_0 \kappa^2(x) = 0$$

olur. $\kappa(x) \neq 0$ olduğundan

$$v_0 = 0$$

elde edilir. Bu ise $\mathbf{x}(x, v_0)$ noktasının boğaz noktası olması demektir.

Tersine; $\mathbf{x}(x, v_0)$ noktasının boğaz noktası olduğunu kabul edelim. Göstereceğizki $\mathbf{x}(x, v_0)$ noktasında teğet düzlemin normali $\mathbf{a}'(x)$ dir. Bunun içinde A , $\mathbf{x}_{(v_0)}$ eğrisinin teğet vektörü olmak üzere $g(\mathbf{a}'(x), A) = 0$ olduğunu göstermemiz gerekir. $g(\mathbf{a}'(x), A)$ ifadesi göz önüne alınarak (4.6) ve (4.7) den $\mathbf{a}'(x)$ in değeri ve (4.16) dan A nın değeri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
g(\mathbf{a}'(x), A) &= g(\kappa(x)\mathbf{n}(x), \mathbf{r}'(x) + v_0\kappa(x)\mathbf{n}(x)) \\
g(\mathbf{a}'(x), A) &= \kappa(x)g(\mathbf{n}(x), \mathbf{r}'(x)) + v_0\kappa^2(x)g(\mathbf{n}(x), \mathbf{n}(x))
\end{aligned}$$

bulunur. $g(\mathbf{n}(x), \mathbf{r}'(x)) = 0$ ve $g(\mathbf{n}(x), \mathbf{n}(x)) = \epsilon$ ($\epsilon = \mp 1$) olduğundan

$$g(\mathbf{a}'(x), A) = \epsilon v_0 \kappa^2(x)$$

olur. $\mathbf{x}(x, v_0)$ noktası boğaz noktası olduğundan $v_0 = 0$ dır. Dolayısıyla

$$g(\mathbf{a}'(x), A) = 0$$

elde edilir.

Bu da $\mathbf{a}'(x)$ in $\mathbf{x}(x, v_0)$ boğaz noktasında teğet düzleme ait normal olduğunu gösterir.

4.2.2. I. Tip Regle Yüzeyler İçin Dağılma Parametresi (Dral)

Tanım 4.2.1. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında bir regle yüzeyin komşu iki anadoğrusu arasındaki en kısa uzaklığın bu iki komşu anadoğru arasındaki açığa oranının limitine regle yüzeyin dağılma parametresi denir [18].

I. tip regle yüzeyin dağılma parametresi aşağıdaki şekilde hesaplanır:

G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında bir $\mathbf{x}(x, v)$ I. tip regle yüzeyi verilsin. $\mathbf{x}(x, v)$ I. tip regle yüzeyinin dayanak eğrisi olarak boğaz eğrisini alalım. Bu durumda (4.15) den

$$\overline{u} = 0$$

dır. Ayrıca (4.6) ve (4.7) den

$$\mathbf{a}'(x) = \kappa(x)\mathbf{n}(x)$$

olduğundan $\mathbf{a}'(x)$ ile $\mathbf{n}(x)$ lineer bağımlıdır. Dolayısıyla $P_{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$P_{\mathbf{a}}\mathbf{a}'(x) = \mathbf{n}(x)$$

olur. $\mathbf{n}(x) = \mathbf{b}(x) \wedge \mathbf{a}(x)$ olduğundan

$$P_{\mathbf{a}}\mathbf{a}'(x) = \mathbf{b}(x) \wedge \mathbf{a}(x) \tag{4.18}$$

yazılabilir. (4.18) ifadesinin her iki tarafı $\mathbf{a}'(x)$ ile iç çarpıma tabi tutulursa

$$P_{\mathbf{a}} = \frac{g(\mathbf{b}(x) \wedge \mathbf{a}(x), \mathbf{a}'(x))}{g(\mathbf{a}'(x), \mathbf{a}'(x))}$$

olur ve

$$g(\mathbf{b}(x) \wedge \mathbf{a}(x), \mathbf{a}'(x)) = \det(\mathbf{b}(x), \mathbf{a}(x), \mathbf{a}'(x))$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$P_{\mathbf{a}} = \frac{\det(\mathbf{b}(x), \mathbf{a}(x), \mathbf{a}'(x))}{g(\mathbf{a}'(x), \mathbf{a}'(x))}$$

elde edilir. Buradaki $P_{\mathbf{a}}$ ile I. tip bir $\mathbf{x}(x, v)$ regle yüzeyinin dağılma parametresi gösterilmektedir.

Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış olur:

Teorem 4.2.4. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında $y(x), z(x), a_2(x), a_3(x) \in C^3$, $x \in I \subset \mathbb{R}$ ve $v \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\mathbf{x} : I \times \mathbb{R} \rightarrow G_3^1$$

$$(x, v) \rightarrow \mathbf{x}(x, v) = (x + v, y(x) + va_2(x), z(x) + va_3(x))$$

şeklinde verilen I. tip bir regle yüzeyin dağılma parametresi $P_{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$P_{\mathbf{a}} = \frac{\det(\mathbf{b}(x), \mathbf{a}(\mathbf{x}), \mathbf{a}'(x))}{g(\mathbf{a}'(x), \mathbf{a}'(x))}$$

dir.

4.3. 3-Boyutlu Pseudo-Galilean Uzayında II. Tip Regle Yüzeyler

G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında $\{0\} \subset I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere diferensiyellenebilir birim hızlı bir eğri

$$\mathbf{r} : I \rightarrow G_3^1$$

$$u \rightarrow \mathbf{r}(u) = (0, y(u), z(u))$$

olsun. $\forall u \in I$ için $r(u)$ noktasında teğet vektör ile anadoğrunun doğrultman vektörü lineer bağımsız olacak şekilde

$$l : \mathbb{R} \rightarrow G_3^1$$

$$v \rightarrow l(v) = (v, y(u) + va_2(u), z(u) + va_3(u))$$

doğrusunu seçelim. Burada $\mathbf{a}(u) = (1, a_2(u), a_3(u))$ doğrusu, II. tip regle yüzey için $\mathbf{r}(u)$ noktasındaki doğrultman vektörüdür.

l doğrusu $\mathbf{r}$ eğrisi boyunca hareket etsin. Bu durumda $(I \times \mathbb{R}, \mathbf{x})$ parametrizasyonu ile verilen bir regle yüzey

$$\mathbf{x} : I \times \mathbb{R} \rightarrow G_3^1 \tag{4.19}$$

$$(u, v) \rightarrow \mathbf{x}(u, v) = (v, y(u) + va_2(u), z(u) + va_3(u))$$

şeklinde elde edilir. (4.19) ile gösterilen $\mathbf{x}(u, v)$ regle yüzeyi II. tip regle yüzey olarak adlandırılır. Burada $y(u), z(u), a_2(u), a_3(u) \in C^3$, $u \in I \subset \mathbb{R}$ ve $v \in \mathbb{R}$ şeklindedir.

Bu regle yüzeyin $\mathbf{r}(u) = (0, y(u), z(u))$ striksiyon eğrisi pseudo-Öklid düzlemde yatar. Burada u , striksiyon eğrisinin yay uzunluğudur. Ayrıca $\mathbf{a}(u) = (1, a_2(u), a_3(u))$ anadoğrusu non-izotropiktir.

II. tip bir regle yüzeyin ortonormal üçyüzlüğü

$$\begin{aligned}\mathbf{t}(u) &= \mathbf{a}(u) = (1, a_2, a_3), \\ \mathbf{n}(u) &= (0, z'(u), y'(u)), \\ \mathbf{b}(u) &= (0, y'(u), z'(u))\end{aligned}\tag{4.20}$$

şeklinde tanımlanır [18].

II. tip regle yüzey için Frenet formülleri ise

$$\begin{aligned}\mathbf{t}'(u) &= \kappa(u)\mathbf{n}(u) \\ \mathbf{n}'(u) &= \tau(u)\mathbf{b}(u) \\ \mathbf{b}'(u) &= \tau(u)\mathbf{n}(u)\end{aligned}\tag{4.21}$$

şeklindedir [18].

(4.21) ve (4.7) karşılaştırıldığında, I. tip ve II. tip regle yüzeyler için verilen Frenet formüllerinin aynı olduğu görülür.

II. tip bir regle yüzey için $\kappa(u)$ eğriliği ve $\tau(u)$ torsiyonu, sırasıyla

$$\begin{aligned}\kappa(u) &= \frac{a_2'(u)}{z'(u)} \\ \tau(u) &= \frac{y''(u)}{z'(u)}\end{aligned}$$

şeklinde verilir.

Burada $\kappa(u)$ ve $\tau(u)$ fonksiyonları II. tip regle yüzeyin invaryantlarının bir tam sistemini tanımlar [18].

$\mathbf{r}(u) = (0, y(u), z(u))$ eğrisi birim hızlı bir eğri olduğundan bu bölümdeki hesaplamalarda $\left| y'^2(u) - z'^2(u) \right| = 1$ olduğu göz önüne alınacaktır.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &: I \times \mathbb{R} \rightarrow G_3^1 \\ (u, v) &\rightarrow \mathbf{x}(u, v) = \mathbf{r}(u) + va(u) \end{aligned}$$

şeklinde verilen II. tip regle yüzeyin, sırasıyla, u ve v ye göre türevi alınır

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= \mathbf{r}'(u) + v\mathbf{a}'(u) \\ \mathbf{x}_v &= \mathbf{a}(u) \end{aligned}$$

bulunur. Burada (4.21) ifadesi göz önüne alınır

$$\mathbf{x}_u = \mathbf{r}'(u) + v\kappa(u)\mathbf{n}(u) \quad (4.22)$$

yazılır.

$\mathbf{x}(u, v)$ II. tip regle yüzeyin $\mathbf{g}$ birinci temel formu, Tanım 4.1.7. göz önüne alınır

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_{11}(du)^2 + 2\mathbf{g}_{12}dudv + \mathbf{g}_{22}(dv)^2 \quad (4.23)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{11} &= g(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u) = 1 + \epsilon v^2 \kappa^2(u), \quad (\epsilon = \mp 1) \\ \mathbf{g}_{12} &= g(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) = 0 \\ \mathbf{g}_{22} &= g(\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v) = 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadeler (4.23) de göz önüne alınır II. tip regle yüzeyin $\mathbf{g}$ birinci temel formu

$$\mathbf{g} = (1 + \epsilon v^2 \kappa^2(u))du^2 + dv^2$$

şeklinde olur. $\mathbf{g}$ birinci temel forma karşılık gelen matris

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 + \epsilon v^2 \kappa^2(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. Buna karşılık gelen determinant ise

$$\det \mathbf{g} = 1 + \epsilon v^2 \kappa^2(u)$$

dır.

G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında $y(u), z(u), a_2(u), a_3(u) \in C^3$, $u \in I \subset \mathbb{R}$, ve $v \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\mathbf{x} : I \times \mathbb{R} \rightarrow G_3^1$$

$$(u, v) \rightarrow \mathbf{x}(u, v) = (v, y(u) + va_2(u), z(u) + va_3(u))$$

şeklinde verilen II. tip bir regle yüzey göz önüne alınsın. Burada $\kappa(u)$ verilen regle yüzeyin eğriligidir.

Eğer $\epsilon = 1$ ise $\det \mathbf{g} = 1 + v^2 \kappa^2(u) > 0$ olduğundan $\mathbf{x}(u, v)$ II. tip regle yüzeyi space-like bir yüzeydir.

Eğer $\epsilon = -1$ ise $\det \mathbf{g} = 1 - v^2 \kappa^2(u)$ olur. Dolayısıyla

$v^2 \kappa^2(u) = 1$ ise $\mathbf{x}(u, v)$ II. tip regle yüzeyi light-like,

$v^2 \kappa^2(u) > 1$ ise $\mathbf{x}(u, v)$ II. tip regle yüzeyi time-like,

$v^2 \kappa^2(u) < 1$ ise $\mathbf{x}(u, v)$ II. tip regle yüzeyi space-like bir yüzeydir.

Burada

$$\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{r}(u) + v\mathbf{a}(u)$$

ile verilen ifade $(I \times \mathbb{R}, \mathbf{x})$ parametrizasyonunda her $v \in \mathbb{R}$ sabit değeri için $\mathbf{x}(u, v)$ II. tip regle yüzeyin bir

$$\mathbf{x}_{(v)} : I \times \{v\} \rightarrow \mathbf{x}$$

eğrisini belirtir. Bu eğrinin teğet vektör alanı (4.22) den

$$A = \mathbf{r}'(u) + v\kappa(u)\mathbf{n}(u) \tag{4.24}$$

şeklindedir. Tanım 4.1.8. göz önüne alınırsa, $\mathbf{x}(u, v)$ II. tip regle yüzeyi üzerinde birim normal vektör alanı

$$\xi = \frac{(0, z'(u) + va_3'(u), y'(u) + va_2'(u))}{\sqrt{|(z'(u) + va_3'(u))^2 - (y'(u) + va_2'(u))^2|}} \quad (4.25)$$

şeklinde elde edilir. Burada $g(\xi, \xi) = \mp 1$ dir. Bu durumda

$$g(A, \xi) = 0$$

elde edilir.

4.3.1. II. Tip Regle Yüzeyler İçin Açılabilirlik

Teorem 4.3.1. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında $y(u), z(u), a_2(u), a_3(u) \in C^3, u \in I \subset \mathbb{R}$ ve $v \in \mathbb{R}$ olmak üzere II. tip bir regle yüzey

$$\mathbf{x} : I \times \mathbb{R} \rightarrow G_3^1$$

$$(u, v) \rightarrow \mathbf{x}(u, v) = (v, y(u) + va_2(u), z(u) + va_3(u))$$

olsun. Bu II. tip regle yüzeyin bir anadoğrusu boyunca teğet düzlemlerinin aynı olması için gerek ve yeter şart $\kappa(u) = 0$ olmasıdır.

İspat: G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında $\mathbf{x}(u, v)$ II. tip bir regle yüzey ve bu II. tip regle yüzeyin ortonormal üçyüzlüsü $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ olsun. Anadoğrunun herhangi bir $v = \text{sabit}$ değerine karşılık gelen noktasından geçen

$$\mathbf{x}_{(v)} : I \times \{v\} \rightarrow \mathbf{x}$$

eğrisinin

$$A = \mathbf{r}'(u) + v\kappa(u)\mathbf{n}(u)$$

teğet vektör alanını göz önüne alalım. $\xi, \mathbf{x}(u, v)$ II. tip regle yüzeyin birim normal vektör alanı olup (4.25) deki gibi tanımlı olsun.

Teğet düzlemlerin sabit olması için $r(u)$ noktasından geçen anadoğrunun her noktasında, anadoğru boyunca ξ normal vektör alanının sabit olması gerekir. Çünkü bu durumda her teğet düzlemin ortak birer doğruları var ve normalleri aynı olur. ξ normal

vektör alanının anadoğru boyunca sabit olması için $\{A, \xi\}$ sisteminin lineer bağımlı olması gerekir. O halde (4.24) ile verilen

$$A = \mathbf{r}'(u) + v\kappa(u)\mathbf{n}(u)$$

eşitliği göz önüne alınırsa, anadoğru boyunca teğet düzlemlerin aynı olması için $\kappa(u) = 0$ olması gerekir.

O halde bu II. tip regle yüzeyin bir anadoğrusu boyunca teğet düzlemlerinin aynı olması için $\kappa(u) = 0$ olması gerek ve yeterdir.

Teorem 4.3.2. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında $y(u), z(u), a_2(u), a_3(u) \in C^3$, $u \in I \subset \mathbb{R}$ ve $v \in \mathbb{R}$ olmak üzere II. tip bir regle yüzey

$$\mathbf{x} : I \times \mathbb{R} \rightarrow G_3^1$$

$$(u, v) \rightarrow \mathbf{x}(u, v) = (v, y(u) + va_2(u), z(u) + va_3(u))$$

olsun. $\mathbf{x}(u, v)$ II. tip regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart $\kappa(u) = 0$ olmasıdır. Burada $\kappa(u)$, $\mathbf{x}(u, v)$ II. tip regle yüzeyin eğriliğidir.

İspat: Tanım 4.1.2 ve Teorem 4.3.1. birlikte göz önüne alınırsa, ispat açıktır.

Sonuç 4.3.1. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında $y(u), z(u), a_2(u), a_3(u) \in C^3$, $u \in I \subset \mathbb{R}$ ve $v \in \mathbb{R}$ olmak üzere II. tip bir regle yüzey

$$\mathbf{x} : I \times \mathbb{R} \rightarrow G_3^1$$

$$(u, v) \rightarrow \mathbf{x}(u, v) = (v, y(u) + va_2(u), z(u) + va_3(u))$$

olsun. Bu $\mathbf{x}(u, v)$ II. tip regle yüzeyin eğriliği $\kappa(u)$ ise

$$\kappa(u) = \det(\mathbf{b}(u), \mathbf{a}(u), \mathbf{a}'(u))$$

dir. Burada $\mathbf{b}(u)$ ve $\mathbf{a}(u)$, sırasıyla II. tip regle yüzeyin binormali ve anadoğrusudur.

İspat: II. tip bir regle yüzeyin ortonormal üçyüzlüsü (4.20) ve Frenet formülleride (4.21) ile verilsin. (4.20) ve (4.21) den $\mathbf{a}'(u)$ nun değeri göz önüne alınırsa

$$\det(\mathbf{b}(u), \mathbf{a}(u), \mathbf{a}'(u)) = \det(\mathbf{b}(u), \mathbf{a}(u), \kappa(u)\mathbf{n}(u)) = \kappa(u) \det(\mathbf{b}(u), \mathbf{a}(u), \mathbf{n}(u)) \quad (4.26)$$

elde edilir. (4.20) den $\mathbf{a}(u) = \mathbf{t}(u)$ olduğundan $\det(\mathbf{b}(u), \mathbf{a}(u), \mathbf{n}(u)) = 1$ olur. Bu ifade (4.26) da yerine yazılırsa

$$\det(\mathbf{b}(u), \mathbf{a}(u), \mathbf{a}'(u)) = \kappa(u)$$

bulunur.

4.3.2. II. Tip Regle Yüzeyler İçin Boğaz Noktasının Yervektörü

G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında $y(u), z(u), a_2(u), a_3(u) \in C^3$, $u \in I \subset \mathbb{R}$ ve $v \in \mathbb{R}$ olmak üzere

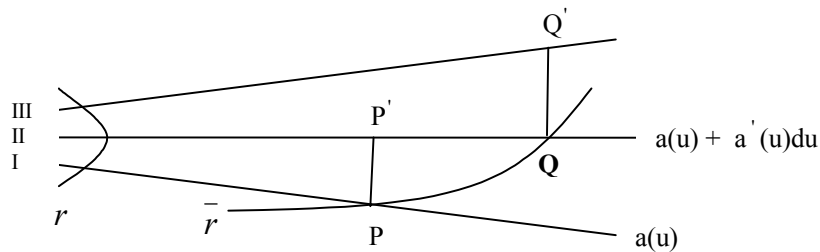
$$\mathbf{x} : I \times \mathbb{R} \rightarrow G_3^1$$

$$(u, v) \rightarrow \mathbf{x}(u, v) = (v, y(u) + va_2(u), z(u) + va_3(u))$$

şeklinde verilen açılabilir olmayan II. tip bir regle yüzeyin merkez noktasının, dayanak eğrisine olan uzaklığı $\bar{u}$ olmak üzere $\bar{\mathbf{r}}(u)$ yervektörü

$$\bar{\mathbf{r}}(u, \bar{u}) = \mathbf{r}(u) + \bar{u}\mathbf{a}(u) \quad (4.27)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\mathbf{r}(u)$ dayanak eğrisinin yervektörü ve $\mathbf{a}(u)$ de anadoğruya ait doğrultman vektörüdür. $\bar{u}$ parametresi II. tip regle yüzeyin dayanak eğrisinin yervektörü ve doğrultman vektörü cinsinden bulunabilir. Bu regle yüzeyin ilk ikisi $\mathbf{a}(u)$ ve $\mathbf{a}(u) + d\mathbf{a}(u)$ olan komşu üç anadoğrusunu göz önüne alalım.



Şekil 4.3.1: II.Tip Regle Yüzeyler İçin Boğaz Noktasının Yervektörü

Şekil 4.3.1 deki P , P' ve Q , Q' komşu anadoğruların ortak dikmelerinin anadoğrular üzerindeki ayakları olsunlar. Bu durumda P ve Q farklı iki boğaz noktasıdır. İlk iki komşu anadoğrunun ortak dikmesi

$$\mathbf{a}(u) \wedge (\mathbf{a}(u) + \mathbf{a}'(u)du) = \mathbf{a}(u) \wedge \mathbf{a}'(u)du$$

ifadesinin bir katıdır. Limit halinde $\mathbf{PQ}$ vektörü $\mathbf{PP}'$ ile çakışacak ve boğaz eğrisinin teğeti olacaktır. Dolayısıyla

$$g(\mathbf{a}(u), \mathbf{PQ}) = 1 \text{ ve } g(\mathbf{a}(u) + \mathbf{a}'(u)du, \mathbf{PQ}) = 1$$

olacağından

$$g(\mathbf{a}'(u), \mathbf{PQ}) = 0 \quad (4.28)$$

elde edilir. Limit durumunda

$$\mathbf{PQ} = \frac{d\bar{r}}{du}$$

olur. Bu değer (4.28) de yerine yazılırsa

$$g(\mathbf{a}'(u), \frac{d\bar{r}}{du}) = 0 \quad (4.29)$$

bulunur. Ayrıca (4.27) den $\bar{\mathbf{r}}(u, \bar{u})$ nun u ya göre türevi alınır

$$\frac{d\bar{r}}{du} = \mathbf{r}'(u) + \bar{u}\mathbf{a}'(u) + \frac{d\bar{u}}{du}\mathbf{a}(u) \quad (4.30)$$

bulunur. (4.30) değeri (4.29) da göz önüne alınır

$$g(\mathbf{a}'(u), \mathbf{r}'(u) + \bar{u}\mathbf{a}'(u) + \frac{d\bar{u}}{du}\mathbf{a}(u)) = 0$$

olur. Burada (4.20) ve (4.21) birlikte düşünülerek $\mathbf{a}'(u)$ nun değeri yerine yazılırsa

$$\epsilon \bar{u} \kappa^2(u) = 0, \quad \epsilon = \mp 1$$

elde edilir. $\kappa(u) \neq 0$ olduğundan

$$\bar{u} = 0 \quad (4.31)$$

yazılır. Böylece boğaz eğrisinin yervektörü için (4.27) den

$$\bar{r}(u) = r(u)$$

elde edilir. Yani II. tip regle yüzeyler için striksiyon eğrisi dayanak eğrisi olur. Böylece aşağıdaki teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.3. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında $y(u), z(u), a_2(u), a_3(u) \in C^3$, $u \in I \subset \mathbb{R}$ ve $v \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\mathbf{x} : I \times \mathbb{R} \rightarrow G_3^1$$

$$(u, v) \rightarrow \mathbf{x}(u, v) = (v, y(u) + va_2(u), z(u) + va_3(u))$$

şeklinde verilen açılabilir olmayan II. tip bir regle yüzey için striksiyon eğrisi dayanak eğrisi olur.

Teorem 4.3.4. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında $y(u), z(u), a_2(u), a_3(u) \in C^3$, $u \in I \subset \mathbb{R}$ ve $v \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\mathbf{x} : I \times \mathbb{R} \rightarrow G_3^1$$

$$(u, v) \rightarrow \mathbf{x}(u, v) = (v, y(u) + va_2(u), z(u) + va_3(u))$$

şeklinde açılabilir olmayan bir $\mathbf{x}(u, v)$ II. tip regle yüzeyi verilsin. $r(u) \in \mathbf{r}$ noktasından geçen anadoğru üzerinde, $\mathbf{x}(u, v_0)$ noktasının boğaz noktası olması için gerek ve yeter şart $\mathbf{x}(u, v_0)$ daki teğet düzlemin normalinin $\mathbf{a}'(u)$ olmasıdır.

İspat: $\mathbf{x}(u, v)$ açılabilir olmayan II. tip bir regle yüzey olsun. $\mathbf{x}(u, v)$ II. tip bir regle yüzeyin dayanak eğrisi $\mathbf{r}$ üzerindeki, $r(u)$ noktasından geçen anadoğru üzerindeki $\mathbf{x}(u, v_0)$ noktasında teğet düzlemin normali $\mathbf{a}'(u)$ olsun.

$$\mathbf{x}_{(v_0)} : I \times \{v_0\} \rightarrow \mathbf{x}$$

eğrisinin teğet vektör alanı

$$A = \mathbf{r}'(u) + v_0 \mathbf{a}'(u)$$

dır. Burada (4.20) ve (4.21) birlikte göz önüne alınırsa

$$A = \mathbf{r}'(u) + v_0 \kappa(u) \mathbf{n}(u) \quad (4.32)$$

elde edilir. $\mathbf{a}'(u)$ ve A nın dikliği göz önüne alınırsa

$$g(\mathbf{a}'(u), A) = 0 \quad (4.33)$$

olur. (4.20) ile (4.21) den $\mathbf{a}'(u)$ ve (4.32) den A nın değerleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} g(\kappa(u) \mathbf{n}(u), \mathbf{r}'(u) + v_0 \kappa(u) \mathbf{n}(u)) &= 0 \\ \kappa(u) g(\mathbf{n}(u), \mathbf{r}'(u)) + v_0 \kappa^2(u) g(\mathbf{n}(u), \mathbf{n}(u)) &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. $g(\mathbf{n}(u), \mathbf{r}'(u)) = 0$ ve $g(\mathbf{n}(u), \mathbf{n}(u)) = \epsilon$ ($\epsilon = \mp 1$) olduğundan

$$\epsilon v_0 \kappa^2(u) = 0$$

olur. $\kappa(u) \neq 0$ olduğundan

$$v_0 = 0$$

elde edilir. Bu ise $\mathbf{x}(u, v_0)$ noktasının boğaz noktası olması demektir.

Tersine; $\mathbf{x}(u, v_0)$ noktasının boğaz noktası olduğunu kabul edelim. Göstereceğimizki $\mathbf{x}(u, v_0)$ noktasında teğet düzlemin normali $\mathbf{a}'(u)$ dur. Bunun içinde A , $\mathbf{x}_{(v_0)}$ eğrisinin teğet vektörü olmak üzere $g(\mathbf{a}'(u), A) = 0$ olduğunu göstermemiz gerekir. $g(\mathbf{a}'(u), A)$ ifadesi göz önüne alınarak (4.20) ve (4.21) den $\mathbf{a}'(u)$ nın değeri ve (4.32) den A nın değeri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} g(\mathbf{a}'(u), A) &= g(\kappa(u) \mathbf{n}(u), \mathbf{r}'(u) + v_0 \kappa(u) \mathbf{n}(u)) \\ g(\mathbf{a}'(u), A) &= \kappa(u) g(\mathbf{n}(u), \mathbf{r}'(u)) + v_0 \kappa^2(u) g(\mathbf{n}(u), \mathbf{n}(u)) \end{aligned}$$

bulunur. $g(\mathbf{n}(u), \mathbf{r}'(u)) = 0$ ve $g(\mathbf{n}(u), \mathbf{n}(u)) = \epsilon$ ($\epsilon = \mp 1$) olduğundan

$$g(\mathbf{a}'(u), A) = \epsilon v_0 \kappa^2(u)$$

olur. $\mathbf{x}(u, v_0)$ noktası boğaz noktası olduğundan $v_0 = 0$ dır. Dolayısıyla

$$g(\mathbf{a}'(u), A) = 0$$

elde edilir.

Bu da $\mathbf{a}'(u)$ nun $\mathbf{x}(u, v_0)$ boğaz noktasında teğet düzleme ait normal olduğunu gösterir.

4.3.3. II. Tip Regle Yüzeyler İçin Dağılma Parametresi (Dral)

II. tip regle yüzey için dağılma parametresini I. tip regle yüzeylerinkine benzer şekilde hesaplayabiliriz.

G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında bir $\mathbf{x}(u, v)$ II. tip regle yüzeyi verilsin. $\mathbf{x}(u, v)$ II. tip regle yüzeyin dayanak eğrisi olarak boğaz eğrisini alalım. Bu durumda (4.31) den

$$\overline{u} = 0$$

dır. Ayrıca (4.20) ve (4.21) den

$$\mathbf{a}'(u) = \kappa(u)\mathbf{n}(u)$$

olduğundan $\mathbf{a}'(u)$ ile $\mathbf{n}(u)$ lineer bağımlıdır. Dolayısıyla $P_{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$P_{\mathbf{a}}\mathbf{a}'(u) = \mathbf{n}(u)$$

olur. $\mathbf{n}(u) = \mathbf{b}(u) \wedge \mathbf{a}(u)$ olduğundan

$$P_{\mathbf{a}}\mathbf{a}'(u) = \mathbf{b}(u) \wedge \mathbf{a}(u) \tag{4.34}$$

yazılabilir. (4.34) ifadesinin her iki tarafı $\mathbf{a}'(u)$ ile iç çarpıma tabi tutulursa

$$P_{\mathbf{a}} = \frac{g(\mathbf{b}(u) \wedge \mathbf{a}(u), \mathbf{a}'(u))}{g(\mathbf{a}'(u), \mathbf{a}'(u))}$$

olur ve

$$g(\mathbf{b}(u) \wedge \mathbf{a}(u), \mathbf{a}'(u)) = \det(\mathbf{b}(u), \mathbf{a}(u), \mathbf{a}'(u))$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$P_{\mathbf{a}} = \frac{\det(\mathbf{b}(u), \mathbf{a}(u), \mathbf{a}'(u))}{g(\mathbf{a}'(u), \mathbf{a}'(u))}$$

elde edilir. Burada $P_{\mathbf{a}}$ ile II. tip bir $\mathbf{x}(u, v)$ regle yüzeyinin dağılma parametresi gösterilmektedir.

Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış olur:

Teorem 4.3.5. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında $y(u), z(u), a_2(u), a_3(u) \in C^3, u \in I \subset \mathbb{R}$ ve $v \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &: I \times \mathbb{R} \rightarrow G_3^1 \\ (u, v) &\rightarrow \mathbf{x}(u, v) = (v, y(u) + va_2(u), z(u) + va_3(u)) \end{aligned}$$

şeklinde verilen II. tip bir regle yüzeyin dağılma parametresi $P_{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$P_{\mathbf{a}} = \frac{\det(\mathbf{b}(u), \mathbf{a}(u), \mathbf{a}'(u))}{g(\mathbf{a}'(u), \mathbf{a}'(u))}$$

dir.

Teorem 4.3.6. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında $y(u), z(u), a_2(u), a_3(u) \in C^3, u \in I \subset \mathbb{R}$ ve $v \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &: I \times \mathbb{R} \rightarrow G_3^1 \\ (u, v) &\rightarrow \mathbf{x}(u, v) = (v, y(u) + va_2(u), z(u) + va_3(u)) \end{aligned}$$

şeklinde verilen bir $\mathbf{x}(u, v)$ II. tip regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağılma parametresinin sıfır olmasıdır.

İspat: Tanım 4.1.3, Teorem 4.3.1., Teorem 4.3.2 ve Sonuç 4.3.1. den teoremin ispatı açıktır.

4.4. 3-Boyutlu Pseudo-Galilean Uzayında III. Tip Regle Yüzeyler

G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında $\{0\} \subset I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere diferensiyellenebilir birim hızlı bir eğri

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &: I \rightarrow G_3^1 \\ u &\rightarrow \mathbf{r}(u) = (u, y(u), 0) \end{aligned}$$

olsun. $\forall u \in I$ için $r(u)$ noktasında teğet vektör ile anadoğrunun doğrultman vektörü lineer bağımsız olacak şekilde

$$l : \mathbb{R} \rightarrow G_3^1$$

$$v \rightarrow l(v) = (u, y(u) + va_2(u), va_3(u))$$

doğrusunu seçelim. Burada $\mathbf{a}(u) = (0, a_2(u), a_3(u))$ doğrusu, III. tip regle yüzey için, $r(u)$ noktasındaki doğrultman vektörüdür.

l doğrusunun $\mathbf{r}$ eğrisi boyunca hareket etsin. Bu durumda $(I \times \mathbb{R}, \mathbf{x})$ parametrizasyonu ile verilen bir regle yüzey

$$\mathbf{x} : I \times \mathbb{R} \rightarrow G_3^1 \quad (4.35)$$

$$(u, v) \rightarrow \mathbf{x}(u, v) = (u, y(u) + va_2(u), va_3(u))$$

şeklinde elde edilir. (4.35) ile gösterilen $\mathbf{x}(u, v)$ regle yüzeyi III. tip regle yüzey olarak adlandırılır. Burada $y(u), a_2(u), a_3(u) \in C^3$, $u \in I \subset \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}$ ve $|a_2^2(u) - a_3^2(u)| = 1$ şeklindedir.

Bu regle yüzeyin sonsuzluktaki doğrultman doğrusu keyfi mutlak doğrudur. $\mathbf{r}(u) = (u, y(u), 0)$ eğrisi $\mathbf{a}(u) = (0, a_2(u), a_3(u))$ anadoğrusuna ortogonal olan keyfi bir doğrultmandır. (4.35) ile verilen $\mathbf{x}(u, v)$ III. tip regle yüzeyin $\mathbf{a}(u) = (0, a_2(u), a_3(u))$ anadoğrusu birim izotropiktir ve u doğrultmanın yay uzunluğudur.

III. tip bir regle yüzeyin ortonormal üçyüzlüsü

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(u) &= \mathbf{r}'(u) = (1, y'(u), 0), \\ \mathbf{n}(u) &= \mathbf{a}(u) = (0, a_2(u), a_3(u)), \\ \mathbf{b}(u) &= (0, a_3(u), a_2(u)) \end{aligned} \quad (4.36)$$

şeklinde tanımlanır. III. tip regle yüzey için Frenet formülleri ise

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}'(u) &= \kappa(u) (\cosh \phi(u) \mathbf{n}(u) - \sinh \phi(u) \mathbf{b}(u)) \\
\mathbf{n}'(u) &= \tau(u) \mathbf{b}(u) \\
\mathbf{b}'(u) &= \tau(u) \mathbf{n}(u)
\end{aligned} \tag{4.37}$$

şeklindedir. III. tip regle yüzey için $\kappa(u)$ eğriliği ve $\tau(u)$ torsiyonu , sırasıyla

$$\begin{aligned}
\kappa(u) &= y''(u) \\
\tau(u) &= \frac{a_2'(u)}{a_3(u)}
\end{aligned}$$

şeklinde verilir. Burada $\phi(u)$, $z = 0$ düzlemi ile $\mathbf{a}(u)$ arasındaki açıdır. $\kappa(u)$ eğriliği III. tip regle yüzeyin bir invaryantı değildir [18].

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &: I \times \mathbb{R} \rightarrow G_3^1 \\
(u, v) &\rightarrow \mathbf{x}(u, v) = \mathbf{r}(u) + v\mathbf{a}(u)
\end{aligned}$$

şeklinde verilen regle yüzeyin sırasıyla, u ve v ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_u &= \mathbf{r}'(u) + v\mathbf{a}'(u) \\
\mathbf{x}_v &= \mathbf{a}(u)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada (4.36) ve (4.37) ifadeleri göz önüne alınırsa

$$\mathbf{x}_u = \mathbf{r}'(u) + v\tau(u)\mathbf{b}(u) \tag{4.38}$$

olur.

$\mathbf{x}(u, v)$ III. tip regle yüzeyin $\mathbf{g}$ birinci temel formu Tanım 4.1.7. göz önüne alınırsa

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_{11}(du)^2 + 2\mathbf{g}_{12}dudv + \mathbf{g}_{22}(dv)^2 \tag{4.39}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_{11} &= g(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u) = 1 - \epsilon v^2 \tau^2(u), \quad (\epsilon = \mp 1) \\
\mathbf{g}_{12} &= g(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) = 0 \\
\mathbf{g}_{22} &= g(\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v) = 1
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadeler (4.39) da göz önüne alınırsa III. tip regle yüzeyin $\mathbf{g}$ birinci temel formu

$$\mathbf{g} = (1 - \epsilon v^2 \tau^2(u)) du^2 + dv^2$$

şeklinde olur. $\mathbf{g}$ birinci temel forma karşılık gelen matris

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 - \epsilon v^2 \tau^2(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. Buna karşılık gelen determinant ise

$$\det \mathbf{g} = 1 - \epsilon v^2 \tau^2(u)$$

dur.

G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında $y(u), a_2(u), a_3(u) \in C^3, u \in I \subset \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}$ ve $|a_2^2(u) - a_3^2(u)| = 1$ olmak üzere

$$\mathbf{x} : I \times \mathbb{R} \rightarrow G_3^1$$

$$(u, v) \rightarrow \mathbf{x}(u, v) = (u, y(u) + v a_2(u), v a_3(u))$$

şeklinde III. tip bir regle yüzey verilsin. $\tau(u)$ bu III. tip regle yüzeyin torsiyonu olsun.

Eğer $\epsilon = 1$ alınırsa $\det \mathbf{g} = 1 - v^2 \tau^2(u)$ olacağından,

$v^2 \tau^2(u) = 1$ ise verilen III. tip regle yüzey light-like,

$v^2 \tau^2(u) > 1$ ise verilen III. tip regle yüzey time-like,

$v^2 \tau^2(u) < 1$ ise verilen III. tip regle yüzey space-like bir yüzeydir.

Eğer $\epsilon = -1$ alınırsa $\det \mathbf{g} = 1 + v^2 \tau^2(u) > 0$ olacağından verilen III. tip regle yüzey space-like bir yüzeydir.

Burada

$$\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{r}(u) + v \mathbf{a}(u)$$

ile verilen ifade $(I \times \mathbb{R}, \mathbf{x})$ parametrizasyonunda her $v \in \mathbb{R}$ sabit değeri için $\mathbf{x}(u, v)$ III. tip regle yüzeyin bir

$$\mathbf{x}_{(v)} : I \times \{v\} \rightarrow \mathbf{x}$$

eğrisini belirtir. Bu eğrinin teğet vektör alanı (4.38) den

$$A = \mathbf{r}'(u) + v\tau(u)\mathbf{b}(u) \quad (4.40)$$

şeklindedir. Tanım 4.1.8. göz önüne alınırsa, $\mathbf{x}(u, v)$ III. tip regle yüzeyi üzerinde birim normal vektör alanı

$$\xi = (0, -a_3(u), -a_2(u)) \quad (4.41)$$

şeklinde elde edilir. Burada $g(\xi, \xi) = \mp 1$ dir. Bu durumda

$$g(A, \xi) = 0$$

elde edilir.

4.4.1. III. Tip Regle Yüzeyler İçin Açılabilirlik

Teorem 4.4.1. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında $y(u), a_2(u), a_3(u) \in C^3$, $u \in I \subset \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}$ ve $|a_2^2(u) - a_3^2(u)| = 1$ olmak üzere III. tip bir regle yüzey

$$\mathbf{x} : I \times \mathbb{R} \rightarrow G_3^1$$

$$(u, v) \rightarrow \mathbf{x}(u, v) = (u, y(u) + va_2(u), va_3(u))$$

olsun. Bu III. tip regle yüzeyin bir anadoğrusu boyunca teğet düzlemlerinin aynı olması için gerek ve yeter şart $\tau(u) = 0$ olmasıdır.

İspat: G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında $\mathbf{x}(u, v)$ III. tip bir regle yüzey ve bu III. tip regle yüzeyin ortonormal üçyüzlüsü $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ olsun. Anadoğrunun herhangi bir $v = \text{sabit}$ değerine karşılık gelen noktasından geçen

$$\mathbf{x}_{(v)} : I \times \{v\} \rightarrow \mathbf{x}$$

eğrisinin

$$A = \mathbf{r}'(u) + v\tau(u)\mathbf{b}(u)$$

teğet vektör alanını göz önüne alalım. ξ , $\mathbf{x}(u, v)$ III. tip regle yüzeyin birim normal vektör alanı olup (4.41) deki gibi tanımlı olsun.

Teğet düzlemlerin sabit olması için $r(u)$ noktasından geçen anadoğrunun her noktasında, anadoğru boyunca ξ normal vektör alanının sabit olması gerekir. Çünkü bu durumda her teğet düzlemin ortak birer doğruları var ve normalleri aynı olur. ξ normal vektör alanının anadoğru boyunca sabit olması için $\{A, \xi\}$ sisteminin lineer bağımlı olması gerekir. O halde (4.40) ile verilen

$$A = \mathbf{r}'(u) + v\tau(u)\mathbf{b}(u)$$

eşitliği göz önüne alınırsa, anadoğru boyunca teğet düzlemlerin aynı olması için $\tau(u) = 0$ olması gerekir.

O halde III. tip regle yüzeyin bir anadoğrusu boyunca teğet düzlemlerin aynı olması için $\tau(u) = 0$ olması gerek ve yeterdir.

Teorem 4.4.2. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında $y(u), a_2(u), a_3(u) \in C^3$, $u \in I \subset \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}$ ve $|a_2^2(u) - a_3^2(u)| = 1$ olmak üzere III. tip bir regle yüzey

$$\mathbf{x} : I \times \mathbb{R} \rightarrow G_3^1$$

$$(u, v) \rightarrow \mathbf{x}(u, v) = (u, y(u) + va_2(u), va_3(u))$$

olsun. Bir $\mathbf{x}(u, v)$ III. tip regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart $\tau(u) = 0$ olmasıdır. Burada $\tau(u)$, $\mathbf{x}(u, v)$ III. tip regle yüzeyin torsiyonudur.

İspat: Tanım 4.1.2 ve Teorem 4.4.1. birlikte göz önüne alınırsa, ispat açıktır.

Sonuç 4.4.1. G_3^1 , pseudo-Galilean uzayında $y(u), a_2(u), a_3(u) \in C^3$, $u \in I \subset \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}$ ve $|a_2^2(u) - a_3^2(u)| = 1$ olmak üzere III. tip bir regle yüzey

$$\mathbf{x} : I \times \mathbb{R} \rightarrow G_3^1$$

$$(u, v) \rightarrow \mathbf{x}(u, v) = (u, y(u) + va_2(u), va_3(u))$$

olsun. Bu $\mathbf{x}(u, v)$ III. tip regle yüzeyin torsiyonu $\tau(u)$ ise

$$\tau(u) = \det(\mathbf{t}(u), \mathbf{a}(u), \mathbf{a}'(u))$$

dur.

İspat: III. tip bir regle yüzeyin ortonormal üçyüzlüsü (4.36) ve Frenet formülleride (4.37) ile verilsin. (4.36) ve (4.37) den $\mathbf{a}'(u)$ nun değeri göz önüne alınırsa

$$\det(\mathbf{t}(u), \mathbf{a}(u), \mathbf{a}'(u)) = \det(\mathbf{t}(u), \mathbf{a}(u), \tau(u)\mathbf{b}(u)) = \tau(u) \det(\mathbf{t}(u), \mathbf{a}(u), \mathbf{b}(u)) \quad (4.42)$$

elde edilir. (4.36) dan $\mathbf{a}(u) = \mathbf{n}(u)$ olduğundan $\det(\mathbf{t}(u), \mathbf{a}(u), \mathbf{b}(u)) = 1$ olur. Bu ifade (4.42) de yerine yazılırsa

$$\det(\mathbf{t}(u), \mathbf{a}(u), \mathbf{a}'(u)) = \tau(u)$$

bulunur.

4.4.2. III. Tip Regle Yüzeyler İçin Boğaz Noktasının Yervektörü

G_3^1 , pseudo-Galilean uzayında $y(u), a_2(u), a_3(u) \in C^3, u \in I \subset \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}$ ve $|a_2^2(u) - a_3^2(u)| = 1$ olmak üzere

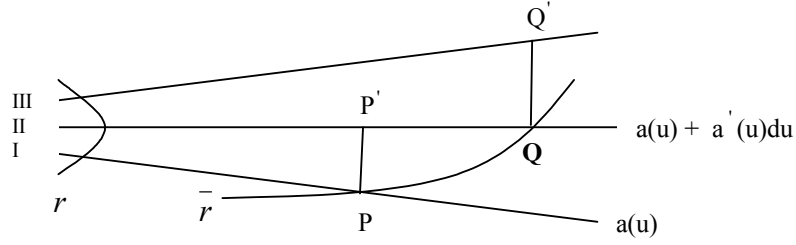
$$\mathbf{x} : I \times \mathbb{R} \rightarrow G_3^1$$

$$(u, v) \rightarrow \mathbf{x}(u, v) = (u, y(u) + va_2(u), va_3(u))$$

şeklinde verilen açılabilir olmayan bir III. tip regle yüzeyin merkez noktasının, dayanak eğrisine olan uzaklığı $\bar{u}$ olmak üzere $\bar{\mathbf{r}}(u)$ yervektörü

$$\bar{\mathbf{r}}(u, \bar{u}) = \mathbf{r}(u) + \bar{u}\mathbf{a}(u) \quad (4.43)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\mathbf{r}(u)$ dayanak eğrisinin yervektörü ve $\mathbf{a}(u)$ de anadoğruya ait doğrultman vektördür. $\bar{u}$ parametresi III. tip regle yüzeyin dayanak eğrisinin yervektörü ve doğrultman vektörü cinsinden bulunabilir. Bu regle yüzeyin ilk ikisi $\mathbf{a}(u)$ ve $\mathbf{a}(u) + d\mathbf{a}(u)$ olan komşu üç anadoğrusunu göz önüne alalım.



Şekil 4.4.1: III.Tip Regle Yüzeyler İçin Boğaz Noktasının Yervektörü

Şekil 4.4.1 deki P , P' ve Q , Q' komşu anadoğruların ortak dikmelerinin anadoğrular üzerindeki ayakları olsunlar. Bu durumda P ve Q farklı iki boğaz noktasıdır. İlk iki komşu anadoğrunun ortak dikmesi

$$\mathbf{a}(u) \wedge (\mathbf{a}(u) + \mathbf{a}'(u)du) = \mathbf{a}(u) \wedge \mathbf{a}'(u)du$$

ifadesinin bir katıdır. Limit halinde $\mathbf{PQ}$ vektörü $\mathbf{PP}'$ ile çakışacak ve boğaz eğrisinin teğeti olacaktır. Dolayısıyla

$$g(\mathbf{a}(u), \mathbf{PQ}) = 0 \text{ ve } g(\mathbf{a}(u) + \mathbf{a}'(u)du, \mathbf{PQ}) = 0$$

olacağından

$$g(\mathbf{a}'(u), \mathbf{PQ}) = 0 \quad (4.44)$$

elde edilir. Limit durumunda

$$\mathbf{PQ} = \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{du}$$

olur. Bu değer (4.44) de yerine yazılırsa

$$g(\mathbf{a}'(u), \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{du}) = 0 \quad (4.45)$$

olur. Ayrıca (4.43) den $\bar{\mathbf{r}}(u, \bar{u})$ nun u ya göre türevi alınır

$$\frac{d\bar{\mathbf{r}}}{du} = \mathbf{r}'(u) + \bar{u}\mathbf{a}'(u) + \frac{d\bar{u}}{du}\mathbf{a}(u) \quad (4.46)$$

bulunur. (4.46) değeri (4.45) de göz önüne alınır

$$g(\mathbf{a}'(u), \mathbf{r}'(u) + \bar{u}\mathbf{a}'(u) + \frac{d\bar{u}}{du}\mathbf{a}(u)) = 0$$

bulunur. Burada (4.36) ve (4.37) birlikte düşünülerek $\mathbf{a}'(u)$ nun değeri yerine yazılırsa

$$-\epsilon\bar{u}\tau^2(u) = 0, \quad \epsilon = \mp 1$$

elde edilir. $\kappa(u) \neq 0$ olduğundan

$$\bar{u} = 0 \tag{4.47}$$

bulunur. Böylece boğaz eğrisinin yervektörü için (4.43) den

$$\bar{r}(u) = r(u)$$

elde edilir. Yani III. tip regle yüzeyler için striksiyon eğrisi dayanak eğrisi olur. Böylece aşağıdaki teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 4.4.3. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında $y(u), a_2(u), a_3(u) \in C^3$, $u \in I \subset \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}$ ve $|a_2^2(u) - a_3^2(u)| = 1$ olmak üzere

$$\mathbf{x} : I \times \mathbb{R} \rightarrow G_3^1$$

$$(u, v) \rightarrow \mathbf{x}(u, v) = (u, y(u) + va_2(u), va_3(u))$$

şeklinde verilen açılabilir olmayan bir III. tip regle yüzey için striksiyon eğrisi dayanak eğrisi olur.

Teorem 4.4.4. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında $y(u), a_2(u), a_3(u) \in C^3$, $u \in I \subset \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}$ ve $|a_2^2(u) - a_3^2(u)| = 1$ olmak üzere

$$\mathbf{x} : I \times \mathbb{R} \rightarrow G_3^1$$

$$(u, v) \rightarrow \mathbf{x}(u, v) = (u, y(u) + va_2(u), va_3(u))$$

şeklinde açılabilir olmayan bir $\mathbf{x}(u, v)$ III. tip regle yüzeyi ve bu yüzeyin $\tau(u) \neq 0$ olmak üzere $\tau(u)$ torsiyonu verilsin. $r(u) \in \mathbf{r}$ noktasından geçen anadoğru üzerinde, $\mathbf{x}(u, v_0)$

noktasının boğaz noktası olması için gerek ve yeter şart $\mathbf{x}(u, v_0)$ daki teğet düzlemin normalinin $\mathbf{a}'(u)$ olmasıdır.

İspat: $\mathbf{x}(u, v)$ açılabilir olmayan III. tip bir regle yüzey olsun. $\mathbf{x}(u, v)$ III. tip bir regle yüzeyin dayanak eğrisi $\mathbf{r}$ üzerindeki, $r(u)$ noktasından geçen anadoğru üzerinde $\mathbf{x}(u, v_0)$ noktasında teğet düzlemin normali $\mathbf{a}'(u)$ olsun.

$$\mathbf{x}_{(v_0)} : I \times \{v_0\} \rightarrow \mathbf{x}$$

eğrisinin teğet vektör alanı

$$A = \mathbf{r}'(u) + v_0 \mathbf{a}'(u)$$

dır. (4.36) ve (4.37) birlikte göz önüne alınırsa

$$A = \mathbf{r}'(u) + v_0 \tau(u) \mathbf{b}(u) \quad (4.48)$$

elde edilir. $\mathbf{a}'(u)$ ve A nın dikliği göz önüne alınırsa

$$g(\mathbf{a}'(u), A) = 0 \quad (4.49)$$

olur. (4.36) ile (4.37) den $\mathbf{a}'(u)$ ve (4.48) den A nın değerleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} g(\tau(u) \mathbf{b}(u), \mathbf{r}'(u) + v_0 \tau(u) \mathbf{b}(u)) &= 0 \\ \tau(u) g(\mathbf{b}(u), \mathbf{r}'(u)) + v_0^2 \tau(u) g(\mathbf{b}(u), \mathbf{b}(u)) &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. $g(\mathbf{b}(u), \mathbf{r}'(u)) = 0$ ve $g(\mathbf{b}(u), \mathbf{b}(u)) = -\epsilon$, ($\epsilon = \mp 1$) olduğundan

$$-\epsilon v_0^2 \tau(u) = 0$$

olur. $\tau(u) \neq 0$ olduğundan

$$v_0 = 0$$

elde edilir. Bu ise $\mathbf{x}(u, v_0)$ noktasının boğaz noktası olması demektir.

Tersine; $\mathbf{x}(u, v_0)$ noktasının boğaz noktası olduğunu kabul edelim. Göstereceğizki $\mathbf{x}(u, v_0)$ noktasında teğet düzlemin normali $\mathbf{a}'(u)$ dur. Bunun içinde A , $\mathbf{x}_{(v_0)}$ eğrisinin teğet vektörü olmak üzere $g(\mathbf{a}'(u), A) = 0$ olduğunu göstermemiz gerekir. $g(\mathbf{a}'(u), A)$

ifadesi göz önüne alınarak (4.36) ve (4.37) den $\mathbf{a}'(u)$ nun değeri ve (4.48) den A nın değeri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} g(\mathbf{a}'(u), A) &= g(\tau(u)\mathbf{b}(u), \mathbf{r}'(u) + v_0\tau(u)\mathbf{b}(u)) \\ g(\mathbf{a}'(u), A) &= \tau(u)g(\mathbf{b}(u), \mathbf{r}'(u)) + v_0\tau^2(u)g(\mathbf{b}(u), \mathbf{b}(u)) \end{aligned}$$

bulunur. $g(\mathbf{b}(u), \mathbf{r}'(u)) = 0$ ve $g(\mathbf{b}(u), \mathbf{b}(u)) = -\epsilon$, ($\epsilon = \mp 1$) olduğundan

$$g(\mathbf{a}'(u), A) = -\epsilon v_0 \tau^2(u)$$

olur. $\mathbf{x}(u, v_0)$ boğaz noktası olduğundan $v_0 = 0$ dır. Dolayısıyla

$$g(\mathbf{a}'(u), A) = 0$$

elde edilir.

Bu da $\mathbf{a}'(u)$ nun $\mathbf{x}(u, v_0)$ boğaz noktasında teğet düzleme ait normal $\mathbf{a}'(u)$ olduğunu gösterir.

4.4.3. III. Tip Regle Yüzeyler İçin Dağılma Parametresi (Dral)

III. tip regle yüzey için dağılma parametresi, I. ve II. tip regle yüzeylerin dağılma parametresine benzer şekilde, aşağıdaki gibi hesaplanır.

G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında bir $\mathbf{x}(u, v)$ III. tip regle yüzeyi verilsin. $\mathbf{x}(u, v)$ III. tip regle yüzeyin dayanak eğrisi olarak boğaz eğrisini alalım. Bu durumda (4.47) den

$$\bar{u} = 0$$

dır. Ayrıca (4.36) ve (4.37) den

$$\mathbf{a}'(u) = \tau(u)\mathbf{b}(u)$$

olduğundan $\mathbf{a}'(u)$ ile $\mathbf{b}(u)$ lineer bağımlıdır. Dolayısıyla $P_{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$P_{\mathbf{a}}\mathbf{a}'(u) = \mathbf{b}(u)$$

olur. $\mathbf{b}(u) = \mathbf{a}(u) \wedge \mathbf{t}(u)$ olduğundan

$$P_{\mathbf{a}} \mathbf{a}'(u) = \mathbf{a}(u) \wedge \mathbf{t}(u) \quad (4.50)$$

yazılabilir. (4.50) ifadesinin her iki tarafı $\mathbf{a}'(u)$ ile iç çarpıma tabi tutulursa

$$P_{\mathbf{a}} = \frac{g(\mathbf{a}(u) \wedge \mathbf{t}(u), \mathbf{a}'(u))}{g(\mathbf{a}'(u), \mathbf{a}'(u))}$$

bulunur ve

$$g(\mathbf{a}(u) \wedge \mathbf{t}(u), \mathbf{a}'(u)) = -\det(\mathbf{t}(u), \mathbf{a}(u), \mathbf{a}'(u))$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$P_{\mathbf{a}} = -\frac{\det(\mathbf{t}(u), \mathbf{a}(u), \mathbf{a}'(u))}{g(\mathbf{a}'(u), \mathbf{a}'(u))}$$

elde edilir. Burada $P_{\mathbf{a}}$ ile III. tip bir $\mathbf{x}(u, v)$ regle yüzeyinin dağılma parametresi gösterilmektedir.

Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış olur:

Teorem 4.4.5. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında $y(u), a_2(u), a_3(u) \in C^3$, $u \in I \subset \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}$ ve $|a_2^2(u) - a_3^2(u)| = 1$ olmak üzere

$$\mathbf{x} : I \times \mathbb{R} \rightarrow G_3^1$$

$$(u, v) \rightarrow \mathbf{x}(u, v) = (u, y(u) + va_2(u), va_3(u))$$

şeklinde verilen III. tip bir regle yüzeyin dağılma parametresi $P_{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$P_{\mathbf{a}} = -\frac{\det(\mathbf{t}(u), \mathbf{a}(u), \mathbf{a}'(u))}{g(\mathbf{a}'(u), \mathbf{a}'(u))}$$

dir.

Teorem 4.4.6. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında $y(u), a_2(u), a_3(u) \in C^3$, $u \in I \subset \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}$ ve $|a_2^2(u) - a_3^2(u)| = 1$ olmak üzere

$$\mathbf{x} : I \times \mathbb{R} \rightarrow G_3^1$$

$$(u, v) \rightarrow \mathbf{x}(u, v) = (u, y(u) + va_2(u), va_3(u))$$

şeklinde verilen III. tip bir regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağılma parametresinin sıfır olmasıdır.

İspat: Tanım 4.1.3, Teorem 4.4.1., Teorem 4.4.2. ve Sonuç 4.4.1. den teoremin ispatı açıktır.

4.5. 3-Boyutlu Pseudo-Galilean Uzayında Silindirik Regle Yüzeyler

Bu bölümde, G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında silindirik regle yüzeyler için Öklid uzayında iyi bilinen, aşağıda verilen Teorem 4.5.1. deki, $\Delta\xi = A\xi$ şartını sağlayan regle yüzeylerin karakterize edilmesi ile ilgili ifadelere yer verildi. Bilindiği üzere G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında üç tip regle yüzey vardır. I. tip regle yüzeyi göz önüne alınırsa bu regle yüzeyin silindirik olması durumunda Teorem 4.5.1. deki Δ Laplacian hesaplanırken kullanılan (g_{ij}) matrisinin ters matrisi (g^{ij}) nin mevcut olmamasından dolayı bu tip regle yüzeyler karakterize edilemez. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında III. tip regle yüzey gözönüne alınırsa, Teorem 4.5.1. deki şartı sağlaması durumunda gerekli hesaplamalar yapıldığında yine belirgin bir karakterizasyon elde edilemez. Ancak G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında II. tip regle yüzeyler incelenirse, silindirik olması durumunda, böyle bir karakterizasyondan bahsedilebilir. Elde edilen bu karakterizasyon Teorem 4.5.2. de verildi.

Tanım 4.5.1. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında C^3 sınıfından bir regle yüzey

$$\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{r}(u) + v\mathbf{a}(u) \quad \mathbf{r}, \mathbf{a} \in C^3, v \in \mathbb{R}$$

şeklinde olsun. Burada $\mathbf{r}(u) = (u, y(u), z(u))$ verilen regle yüzeyin dayanak eğrisi ve $\mathbf{a}(u)$ ise anadoğrusudur. Eğer $\mathbf{a}(u)$ sabit ise bu regle yüzey silindirik, eğer sabit değilse non-silindirik yüzey olarak adlandırılır.

Teorem 4.5.1. $\mathbb{R}^3$ de Gauss dönüşümü ξ olan,

$$\Delta\xi = A\xi, \quad A \in Mat(3, \mathbb{R}) \quad (4.51)$$

şartını sağlayan regle yüzey lokal olarak bir düzlem ve dairesel silindirdir [23].

I ve J , $\mathbb{R}$ reel doğru üzerinde 0 ı kapsayan iki açık aralık olsun. $\mathbf{r}(u)$ eğrisi $\mathbf{r}(u) : J \rightarrow G_3^1$ şeklinde tanımlı bir eğri ve $\mathbf{a}(u)$, $\mathbf{r}(u)$ eğrisi boyunca bir vektör alanı olsun. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında bir $\mathbf{x}(u, v)$ regle yüzeyi, $\mathbf{r}(u)$ eğrisi boyunca $\mathbf{a}(u)$ vektör alanı tarafından oluşturulan bir pseudo-Galilean yüzeyidir.

G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v) = \mathbf{r}(u) + v\mathbf{a}(u)$$

şeklinde verilen II. tip regle yüzey göz önüne alınsın.

Koordinat eğrisi boyunca $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ doğal bazı

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u &= \mathbf{r}'(u) + v\mathbf{a}'(u) \\ \mathbf{x}_v &= \mathbf{a}(u)\end{aligned}$$

şeklinde verilir.

Buradan

$$\begin{aligned}g(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u) &= g(\mathbf{r}'(u), \mathbf{r}'(u)) + 2vg(\mathbf{r}'(u), \mathbf{a}'(u)) + v^2g(\mathbf{a}'(u), \mathbf{a}'(u)) \\ g(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) &= g(\mathbf{r}'(u), \mathbf{a}(u)) + vg(\mathbf{a}(u), \mathbf{a}'(u)) \\ g(\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v) &= g(\mathbf{a}(u), \mathbf{a}(u))\end{aligned}$$

olur.

$\mathbf{x}(u, v)$, $\{x_i\}$ lokal koordinat sistemine sahip bir regle yüzey olsun. $\mathbf{x}(u, v)$ regle yüzeyi üzerinde g metriğinin g_{ij} bileşenleri için, (g_{ij}) matrisinin ters matrisi (g^{ij}) ile gösterilsin. $\mathbf{x}(u, v)$ regle yüzeyi üzerinde Laplacian Δ ,

$$\Delta = -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{|g|} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}) \quad (4.52)$$

şeklinde tanımlanır.

$\mathbf{r}(u) = (0, y(u), z(u))$ düzlem eğrisi için

$$g(\mathbf{r}'(u), \mathbf{r}'(u)) = y'^2(u) - z'^2(u) = \varepsilon \quad (\varepsilon = \mp 1)$$

yazılabilir.

Burada ξ Gauss dönüşümü

$$\xi = (0, \varepsilon z'(u), \varepsilon y'(u))$$

olarak bulunur. Ayrıca

$$g(\xi, \xi) = \varepsilon \quad (\varepsilon = \mp 1)$$

dir.

Teorem 4.5.2. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında Gauss dönüşümü

$$\Delta \xi = A\xi, \quad A \in Mat(3, \mathbb{R}) \quad (4.53)$$

şartını sağlayan silindirik $\mathbf{x}(u, v)$ II. tip bir regle yüzey, lokal olarak düzlemdir ve bir hiperbolik çember veya bir pseudo-çembere karşılık gelir.

İspat: G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında $y(u), z(u), a_2(u), a_3(u) \in C^3$, $u \in I \subset \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}$ ve $y'(u)a_2'(u) - z'(u)a_3'(u) = 0$ olmak üzere II. tip bir regle yüzey

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &: I \times \mathbb{R} \rightarrow G_3^1 \\ (u, v) &\rightarrow \mathbf{x}(u, v) = \mathbf{r}(u) + v\mathbf{a}(u) \end{aligned}$$

şeklinde verilsin. Burada $\mathbf{r}(u) = (0, y(u), z(u))$ ve $\mathbf{a}(u) = (1, a_2(u), a_3(u))$ dir. Ayrıca $\mathbf{a}(u)$, $\mathbf{r}(u)$ eğrisi boyunca birim sabit vektör alanıdır ve $\mathbf{r}(u)$ eğrisine ortogonaldır. Yani

$$\begin{aligned} g(\mathbf{r}'(u), \mathbf{a}(u)) &= 0 \\ g(\mathbf{a}(u), \mathbf{a}(u)) &= 1 \end{aligned}$$

dir. Bir pseudo-Galilean hareketi sayesinde $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$ alınması genelliği bozmaz. $\mathbf{r}(u) = (0, y(u), z(u))$ düzlem eğrisi için

$$g(\mathbf{r}', \mathbf{r}') = y'^2(u) - z'^2(u) = \varepsilon \quad (\varepsilon = \mp 1)$$

elde edilir. Burada ξ Gauss dönüşümü, $\varepsilon = \mp 1$ olmak üzere

$$\xi = (0, \varepsilon z'(u), \varepsilon y'(u))$$

şeklinde bulunur. Bundan sonra, bu bölümde artık y ve z , u nun bir fonksiyonu olarak ele alınacaktır.

İndirgenmiş g pseudo-Galilean metriği için

$$g_{11} = \varepsilon$$

$$g_{12} = 0$$

$$g_{22} = 1$$

olduğundan ξ nin $\Delta\xi$ Laplacianı (4.52) den

$$\Delta\xi = (0, \varepsilon z''', \varepsilon y''')$$

elde edilir. Böylece $\Delta\xi = A\xi$ olduğundan

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon z''' \\ \varepsilon y''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ z' \\ y' \end{bmatrix}$$

yazılabilir. Burada $A = (a_{ij})$ sabit matristir. Dolayısıyla aşağıdaki diferensiyel denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned} 0 &= a_{12}z' + a_{13}y' \\ \varepsilon z''' &= a_{22}z' + a_{23}y' \\ \varepsilon y''' &= a_{32}z' + a_{33}y'. \end{aligned} \tag{4.54}$$

Buradan $\varepsilon = \mp 1$ olduğundan ilk olarak $\varepsilon = 1$ için (4.54) denklemi göz önüne alınacak ve y, z çözümleri araştırılacaktır. O halde $\varepsilon = 1$ için (4.54) ifadesi

$$\begin{aligned} 0 &= a_{12}z' + a_{13}y' \\ z''' &= a_{22}z' + a_{23}y' \\ y''' &= a_{32}z' + a_{33}y' \end{aligned} \tag{4.55}$$

şekline dönüştür. Bu denklem sisteminde y' ve z' ,

$$y' = \cosh \theta, \quad z' = \sinh \theta \tag{4.56}$$

şeklinde parametrize edilebilir. Burada θ yine u nun bir fonksiyonudur. (4.56) da u ya göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} y'' &= \theta' \sinh \theta \\ y''' &= \theta'' \sinh \theta + (\theta')^2 \cosh \theta \end{aligned} \quad (4.57)$$

ve

$$\begin{aligned} z'' &= \theta' \cosh \theta \\ z''' &= \theta'' \cosh \theta + (\theta')^2 \sinh \theta \end{aligned} \quad (4.58)$$

elde edilir. (4.56),(4.57) ve (4.58) deki ifadeler (4.55) de göz önüne alınırsa

$$\theta'' \cosh \theta + (\theta')^2 \sinh \theta = a_{22} \sinh \theta + a_{23} \cosh \theta \quad (4.59)$$

ve

$$\theta'' \sinh \theta + (\theta')^2 \cosh \theta = a_{32} \sinh \theta + a_{33} \cosh \theta \quad (4.60)$$

olur. (4.59) ve (4.60) eşitliklerinin iki tarafı, sırasıyla, $\cosh \theta$ ve $-\sinh \theta$ ile çarpılıp bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\theta'' = (a_{22} - a_{33}) \cosh \theta \sinh \theta + a_{23} \cosh^2 \theta - a_{32} \sinh^2 \theta \quad (4.61)$$

bulunur. Tekrar (4.59) ve (4.60) eşitliklerinin iki tarafı, sırasıyla, $-\sinh \theta$ ve $\cosh \theta$ ile çarpılıp bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$(\theta')^2 = (a_{32} - a_{23}) \cosh \theta \sinh \theta + a_{33} \cosh^2 \theta - a_{22} \sinh^2 \theta \quad (4.62)$$

yazılabilir. (4.62) dekleminde u ya göre türev alınırsa

$$2\theta' \theta'' = \theta' \{ (a_{32} - a_{23})(\cosh^2 \theta + \sinh^2 \theta) + 2(a_{33} - a_{22}) \cosh \theta \sinh \theta \} \quad (4.63)$$

bulunur. (4.63) ifadesinde (4.61) eşitliği göz önüne alınırsa

$$\theta' \{4(a_{22} - a_{33}) \cosh \theta \sinh \theta + (3a_{23} - a_{32}) \cosh^2 \theta + (a_{23} - 3a_{32}) \sinh^2 \theta\} = 0 \quad (4.64)$$

elde edilir. $\theta' \neq 0$ olduğundan (4.55) ve (4.64) eşitliklerinden

$$a_{22} = a_{33} \text{ ve } a_{12} = a_{13} = a_{23} = a_{32} = 0$$

bulunur. Çünkü $\sinh \theta$, $\cosh \theta$, $\sinh^2 \theta$, $\cosh^2 \theta$ fonksiyonları $\theta = \theta(u)$ nun lineer bağımsız fonksiyonlarıdır.

Dolayısıyla (4.62) eşitliğinden, $a_{22} = a_{33} = \frac{1}{r^2}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} (\theta')^2 &= \frac{1}{r^2} \\ \theta' &= \mp \frac{1}{r} \\ \theta &= \mp \frac{1}{r} u + c_0, \quad r \neq 0, \quad c_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

elde edilir. θ nun bu değeri (4.56) eşitliklerinde göz önüne alınırsa, sırasıyla y ve z ,

$$\begin{aligned} y' &= \cosh \theta \\ y &= \frac{1}{\theta'} \sinh \theta + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} z' &= \sinh \theta \\ z &= \frac{1}{\theta'} \cosh \theta + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Yani

$$\begin{aligned} y &= \mp r \sinh \theta + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R} \\ z &= \mp r \cosh \theta + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

olur. Bu gösterim ise

$$(y - c_1)^2 - (z - c_2)^2 = -r^2, \quad r > 0 \quad (4.65)$$

denklemini verir. Bu denklem ise, yarıçapı r olan (c_1, c_2) merkezli bir pseudo-Galilean düzlemde (yz - *düzlemi*) hiperbolik çember denklemidir.

Şimdi de $\varepsilon = -1$ için (4.54) denklemi göz önüne alınacak ve y, z çözümleri araştırılacaktır. O halde $\varepsilon = -1$ için (4.54) ifadesi

$$\begin{aligned} 0 &= a_{12}z' + a_{13}y' \\ -z''' &= a_{22}z' + a_{23}y' \\ -y''' &= a_{32}z' + a_{33}y' \end{aligned} \quad (4.66)$$

şekline döndürür. Burada

$$y' = \sinh \theta, \quad z' = \cosh \theta, \quad \theta = \theta(u) \quad (4.67)$$

alınır ve (4.67) de u ya göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} y''' &= \theta'' \cosh \theta + (\theta')^2 \sinh \theta \\ z''' &= \theta'' \sinh \theta + (\theta')^2 \cosh \theta \end{aligned} \quad (4.68)$$

elde edilir. (4.67) ve (4.68) ifadeleri (4.66) eşitliklerinde yerlerine yazılırsa

$$-\theta'' \sinh \theta - (\theta')^2 \cosh \theta = a_{22} \cosh \theta + a_{23} \sinh \theta \quad (4.69)$$

ve

$$-\theta'' \cosh \theta - (\theta')^2 \sinh \theta = a_{32} \cosh \theta + a_{33} \sinh \theta \quad (4.70)$$

eşitlikleri elde edilir. (4.69) ve (4.70) eşitliklerinin iki tarafı, sırasıyla, $-\sinh \theta$ ve $\cosh \theta$ ile çarpılıp, bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\theta'' = (a_{22} - a_{33}) \cosh \theta \sinh \theta + a_{23} \sinh^2 \theta - a_{32} \cosh^2 \theta \quad (4.71)$$

yazılır. Tekrar (4.69) ve (4.70) eşitliklerinin iki tarafı, sırasıyla, $\cosh \theta$ ve $-\sinh \theta$ ile çarpılıp, bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$(\theta')^2 = (a_{32} - a_{23}) \cosh \theta \sinh \theta + a_{33} \sinh^2 \theta - a_{22} \cosh^2 \theta \quad (4.72)$$

bulunur. (4.72) eşitliğinin u ya göre türevi alınır

$$\theta' \{4(a_{22} - a_{33}) \cosh \theta \sinh \theta + (a_{23} - 3a_{32}) \cosh^2 \theta + (3a_{23} - a_{32}) \sinh^2 \theta\} = 0 \quad (4.73)$$

olur. (4.66) ve (4.73) eşitliklerinden

$$a_{22} = a_{33} \text{ ve } a_{12} = a_{13} = a_{23} = a_{32} = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla (4.72) eşitliğinden, $a_{22} = a_{33} = -\frac{1}{r^2}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} (\theta')^2 &= \frac{1}{r^2} \\ \theta' &= \mp \frac{1}{r} \\ \theta &= \mp \frac{1}{r} u + c_0, \quad r > 0, \quad c_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

bulunur. $y' = \cosh \theta$ ve $z' = \sinh \theta$ olduğundan

$$\begin{aligned} y &= \mp r \cosh \theta + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R} \\ z &= \mp r \sinh \theta + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

dir. Bu gösterim ise

$$(y - c_1)^2 - (z - c_2)^2 = r^2, \quad r > 0 \quad (4.74)$$

denklemini verir. Bu denklem ise, yarıçapı r olan (c_1, c_2) merkezli bir pseudo-Galilean düzlemde $(yz - \text{düzlemi})$ pseudo-çember denklemdir.

Böylece Teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Buradan G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında

$$\Delta\xi = A\xi, \quad A \in Mat(3, \mathbb{R})$$

şartını sağlayan II. tip regle yüzeyler için aşağıdaki örnekler verilebilir.

Örnek 4.5.1. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında

$$H = \{(x, y, z) \in G_3^1 : y^2 - z^2 = -r^2, r \rangle 0\}$$

şeklinde tanımlı bir hiperbolik silindir II. tip bir regle yüzeydir. Bu regle yüzeyin dayanak eğrisi $\mathbf{r}(u) = (0, r \sinh \frac{u}{r}, r \cosh \frac{u}{r})$ ve doğrultmanı $\mathbf{a}(u) = (1, 0, 0)$ şeklindedir. Gauss dönüşümü

$$\xi = (0, \sinh \frac{u}{r}, \cosh \frac{u}{r})$$

şeklinde verilir ve ξ nin $\Delta\xi$ Laplacianı için

$$\Delta\xi = \frac{1}{r^2}\xi$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & \frac{1}{r^2} & 0 \\ a_{31} & 0 & \frac{1}{r^2} \end{bmatrix}$$

matrisi ile yukarıda verilen hiperbolik silindir (4.53) şartını sağlar.

Örnek 4.5.2. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında

$$S = \{(x, y, z) \in G_3^1 : y^2 - z^2 = r^2, r \rangle 0\}$$

şeklinde tanımlı bir dairesel silindir II. tip bir regle yüzeydir. Bu regle yüzeyin dayanak eğrisi $\mathbf{r}(u) = (0, r \sinh \frac{u}{r}, r \cosh \frac{u}{r})$ ve doğrultmanı $\mathbf{a}(u) = (1, 0, 0)$ şeklindedir. Gauss dönüşümü

$$\xi = (0, \cosh \frac{u}{r}, \sinh \frac{u}{r})$$

şeklinde verilir ve ξ nin $\Delta\xi$ Laplacianı için

$$\Delta\xi = -\frac{1}{r^2}\xi$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ a_{31} & 0 & -\frac{1}{r^2} \end{bmatrix}$$

matrisi ile yukarıda verilen pseudo-Galilean hiperbolik silindir (4.53) şartını sağlar.

5. 3-BOYUTLU PSEUDO-GALILEAN UZAYINDA REGLE YÜZEY ÖRNEKLERİ

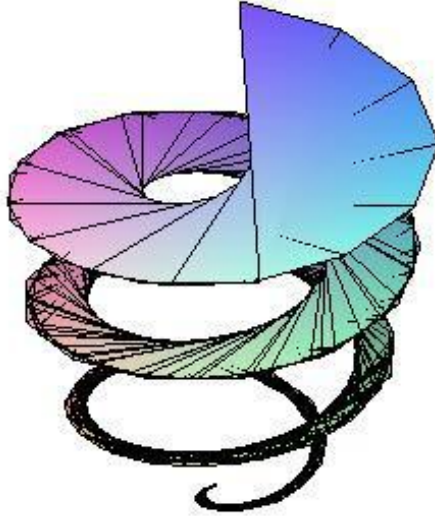
3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında verilen üç tip regle yüzey için aşağıdaki örnekler verilebilir [17].

Bu örneklerin MAPLE yazılımı kullanılarak belirli parametreler için çizilen grafikleri aşağıdaki şekildedir:

Örnek 5.1. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, a \sinh \frac{u}{p}, a \cosh \frac{u}{p}) + v(1, \frac{1}{b} \cosh \frac{u}{p}, \frac{1}{b} \sinh \frac{u}{p})$$

şeklinde verilen regle yüzey, I. tip bir regle yüzeye ait bir örnektir. Burada $a, b, p \in \mathbb{R} - \{0\}$, $u, v \in \mathbb{R}$ dir. Bu regle yüzeyin MAPLE yazılımı kullanılarak, belirli parametreler için çizilen grafiklerinden biri şekil 5.1 deki gibi olur.



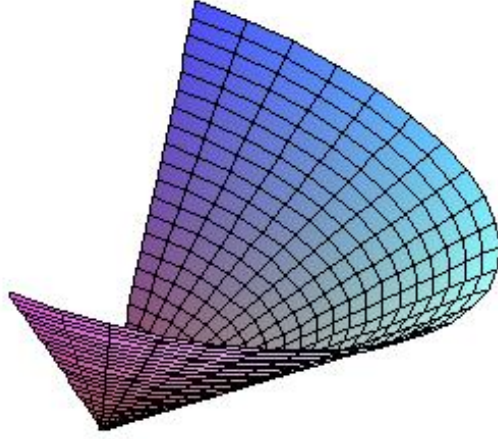
Şekil 5.1.

Örnek 5.2. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında

$$y^2 - z^2 + b^2 x^2 = a^2, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

şeklinde verilen regle yüzey, II. tip bir regle yüzeye ait bir örnektir. Bu regle yüzeyin MAPLE yazılımı kullanılarak, belirli parametreler için çizilen grafiklerinden biri şekil 5.2

deki gibi olur.

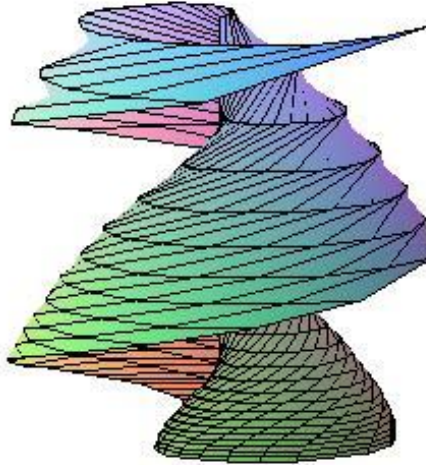


Şekil 5.2.

Örnek 5.3. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında

$$\mathbf{x}(u, v) = (bu, \cosh v + b\frac{u^2}{2}, \sinh v), \quad b \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ ve } u, v \in \mathbb{R}$$

şeklinde verilen regle yüzey, III. tip bir regle yüzeye ait bir örnektir. Bu regle yüzeyin MAPLE yazılımı kullanılarak, belirli parametreler için çizilen grafiklerinden biri şekil 5.3 deki gibi olur.



Şekil 5.3.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

1) Bu çalışma sırasında, Öklid uzayındaki temel kavramlar ve teoremler incelendi ve bir kısmı çalışmamızda verildi.

2) Öklid uzayındaki tanım ve teoremlerin, Lorentz uzayında bulunan karşılıkları incelendi.

3) 3-boyutlu Galilean uzayının temel yapısı incelendi ve bir kısmı çalışmamızda verildi. Öklid uzayı ile benzer olan ve farklılıklar gösteren yapılar araştırıldı.

4) 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayının temel yapısı incelenerek kullandığımız temel tanım ve teoremler verildi.

5) 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında eğriler ile ilgili yapılar incelendi. Gerekli görülen temel tanımlar ve teoremler çalışmada verildi. Bu eğrilerin admissible olması durumu gösterildi.

Daha sonra Öklid uzayı ve Lorentz uzayında küresel eğriler için bulunan karakterizasyonların, 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayındaki karşılıkları araştırıldı. Bulunan karakterizasyonlar teorem olarak verildi.

6) 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında mevcut olan regle yüzey tipleri incelendi. Bu regle yüzeylerin açılabilirliği, boğaz noktalarının yervektörleri ve dağılma parametreleri ile ilgili araştırmalar yapılarak bulunan ifadeler teorem ve sonuçlar halinde verildi.

7) 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında mevcut olan regle yüzey tiplerinin $\Delta\xi = A\xi$ şartını sağlaması durumunda karakterize edilememesi durumu incelendi. Bulunan karakterizasyon bir teorem olarak ifade edildi.

8) 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında mevcut olan regle yüzey tiplerine ait örnekler verildi. Bu örneklerin daha iyi anlaşılabilmesi ve görsel olarak kavranabilmesi için MAPLE yazılımı kullanılarak belirli parametrelere ait grafikleri çizildi.

9) Bu çalışmaya ek olarak, 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında mevcut olan regle yüzey tipleri göz önüne alınarak, Öklid uzayında regle yüzeyler ile ilgili elde edilmiş karakterizasyonların bu uzaydaki karşılıkları araştırılabilir.

10) 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında verilen bir eğri için yine diğer uzaylarda elde edilmiş karakterizasyonların bu uzaydaki karşılıkları araştırılabilir.

11) Frenet Formülleri ele alınarak, Öklid uzayında var olan yapıların bu uzaydaki

karşılıkları araştırılabilir.

Bu çalışmaya ek olarak yukarıda belirtilen sonuçlar ve öneriler doğrultusunda çalışmalar devam etmektedir.

Bu konu ile ilgili çalışma yapmak isteyen araştırmacı ve uygulayıcılara elde edilen sonuçların ve önerilerin bir yol göstermesi beklenmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] Hacısalihoğlu, H.H., 1983, Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları Mat., No.2, Malatya, 895s.
- [2] Carmo, M.P., 1976, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 503p.
- [3] Ergüt, M. and Başar, F., 1986, On the Mean Curvature of a Developable Closed Ruled Surface at the Movement of Space with One Parameter in E^3 , Journal of Fırat University, 1(1), 75-80.
- [4] Ergüt, M., 1983, Genelleştirilmiş Regle Yüzeylere Dair, Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ, 53s.
- [5] Turgut, A., 1995, 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Space-like ve Time-like Regle Yüzeyler, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 96s.
- [6] Turgut, A. and Hacısalihoğlu, H.H., 1997, On the Distribution Parameter of a Time-like Ruled Surface in the Minkowski 3-Space, Far East J. Math. Sci., Vol.5, No.2, 321-328.
- [7] Turgut, A. and Hacısalihoğlu, H.H., 1998, Time-like Ruled Surfaces in the Minkowski 3-Space-II., Tr. J. of Math., 22, 33-46.
- [8] Choi, S.M., 1995, On the Gauss Map of Ruled Surfaces in a 3-Dimensional Minkowski Space, Tsukuba J. Math., Vol.19, No.2, 285-304.
- [9] Jung, S.D. and Pak, J.S., 1996, Classification of Cylindrical Ruled Surfaces Satisfying $\Delta H = AH$ in a 3-Dimensional Minkowski Space, Bull. Korean Math. Soc., 33, No.1, 97-106.
- [10] O'Neill, B., 1983, Semi-Riemannian Geometry, Academic Press, New York, 468s.
- [11] Beem, J.K. and Ehrlich, P.E., 1981, Global Lorentzian Geometry, Marcel Dekker Inc. New York and Basel, 460s.
- [12] Tosun, M., 1997, On the $(k - m + 1)$ -Dimensional Time-like Center Ruled Surface in the Minkowski Space R_1^n , Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, Cilt.1, Sayı.1.
- [13] Bektaş, M., 2003, On the Curvatures of $(r + 1)$ - Dimensional Generalized Time-like Ruled Surface, Acta Mathematica Academia Paedagogicae Nyiregyhaziensis, 19, 83-88.

- [14] Balgetir, H., 2002, Lorentz Uzayda Genelleştirilmiş Null Scrollar, Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ, 101s.
- [15] Röschel, O., 1986, Die Geometrie Des Galileischen Raumes, Berichte der Math.-Stat. Sektion im Forschungszentrum Graz, Ber.256, 1-20.
- [16] Kamenarovic, I., 1991, Existence Theorems for Ruled Surfaces in the Galilean Space G_3 , Rad HAZU. Mat.456, 10, 183-196.
- [17] Divjak, B. and Milin-Sipus, Z., 2003, Minding Isometries of Ruled Surfaces in Pseudo-Galilean Space, Journal of Geometry, 77, 35-47.
- [18] Divjak, B. and Milin-Sipus, Z., 2003, Special Curves on the Ruled Surfaces in Galilean and Pseudo-Galilean Spaces, Acta Math. Hungar., 98(3), 203-215.
- [19] Hacısalihoğlu, H.H., 1980, Yüksek Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometriler, İnönü Üniversitesi Temel Bilimler Fakültesi Yayınları Mat. No:1, 224s.
- [20] Müller, H.R., 1963, Kinematik Dersleri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi
- [21] Guggenheimer, H.N., 1963, Differential Geometry, College of Liberal Arts University of Minnesota
- [22] Divjak, B., 1998, Curves in Pseudo-Galilean Geometry, Annales Univ. Sci. Budapest, 41, 117-128.
- [23] Baikoussis, C. and Blair, D.E., 1992, On the Gauss Map of Ruled Surfaces, Glasgow Math. J., 34, 355-359.

ÖZGEÇMİŞ

1977 yılında Tunceli' nin Pertek ilçesinde doğmuşum. İlköğrenimime aynı ilçede başlayarak, Mazgirt Mimar Sinan İlköğretim Okulu' nda ilkokulu ve Elazığ Mezre Ortaokulu' nda da ortaokulu tamamladım. 1994 yılında Elazığ Mehmet Akif Ersoy Lisesi' ni bitirdim. 1995 yılında Fırat Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü' nü kazandım ve 1999 yılında Matematikçi olarak mezun oldum. 17.09.1999 tarihinde Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Geometri Bilim Dalı' nda Yüksek Lisans öğrenimine başladım. 24.12.1999 tarihinde Fırat Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü' ne Araştırma Görevlisi olarak atandım. 17.01.2002 tarihinde Yüksek Lisans öğrenimini tamamladım. 2002-2003 öğretim yılı Bahar döneminde Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Geometri Bilim Dalı' nda Doktora öğrenimine başladım. Halen Fırat Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü' nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktayım. Evli ve bir çocuk babasıyım.

Alper Osman ÖĞRENMİŞ