

**PSEUDO KUATERNİYONLAR, PSEUDO HİPERBOLİK UZAY
VE PSEUDO KÜRESEL UZAYLAR**

Yılmaz MERCAN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**EKİM 2007
ANKARA**

Yılmaz MERCAN tarafından hazırlanan PSEUDO KUATERNİYONLAR, PSEUDO HİPERBOLİK UZAY VE PSEUDO KÜRESEL UZAYLAR adlı bu tezin Yüksek Lisans olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Baki KARLIĞA

.....

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Erdoğan ESİN

.....

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Prof. Dr. Baki KARLIĞA

.....

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Prof. Dr. Yusuf YAYLI

.....

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Tarih: 03/10/2007

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Nermin ERTAN

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Yılmaz MERCAN

**PSEUDO KUATERNİYONLAR, PSEUDO HİPERBOLİK UZAY
VE PSEUDO KÜRESEL UZAYLAR
(Yüksek Lisans Tezi)**

Yılmaz MERCAN

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Ekim 2007**

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmuştur. Birinci bölümde konunun kısa tarihçesi verildikten sonra, ikinci bölümde kuaterniyon çarpımının özellikleri ve kuaterniyonların cebirsel yapıları tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde, 3 ve 4 boyutlu dönme dönüşümleri kuaterniyon çarpımı yardımıyla verildi. Ayrıca küresel sinüs ve küresel kosinüs kuralları sunuldu. Son bölümde; v - indeksli pseudo kuaterniyonik çarpım verildi. Bu tanım kullanılarak, yarı-kuaterniyonik cebir $v=0,1$ halinde çalışıldı.

Bilim Kodu : 204.1.049
Anahtar Kelimeler : Reel kuaterniyon, pseudo kuaterniyon
Sayfa Adedi : 55
Tez Yöneticisi : Prof. Dr. Baki KARLIĞA

**PSEUDO QUATERNIONS, PSEUDO HYPERBOLIC SPACE
PSEUDO SPHERICAL SPACE**

(M. Sc. Thesis)

Yılmaz MERCAN

**GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

October 2007

ABSTRACT

This thesis consist of fourth section. In the first section, after giving the short historical knowledge, in the second section, the properties of quaternionic product and the algebraic structure of quaternions are introduced. In the third section, the 3 and 4-dimensional rotations are given by using the quaternionic product. Moreover, the spherical sine and spherical cosine rule are presented. In the last section, we give pseudo quaternionic product with ν -index. Afterwards, by using this definition ,the semi-quaternionic algebra is studied in the case $\nu=0,1$.

Science Code	: 204.1.049
Key Words	: Reel quaternions, pseudo quaternions
Page Number	: 55
Adviser	: Prof. Dr. Baki KARLIĞA

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana veren ve çalışmalarımın her safhasında yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren danışman hocam sayın Prof. Dr. Baki KARLIĞA (Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi)'ya teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım esnasında bana vakit ayıran, özenle çalışmalarımı takip eden ve her konuda yardımlarını esirgemeyen Çetin CAMCI' ya teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarımda manevi desteklerini her zaman hissettiğim anneme, babama, eşime, kızıma ve oğluma teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	ix
1. GİRİŞ	1
2. KUATERNİYONLAR.....	3
2.1. Kuaterniyonların Temel Cebirsel Formu	3
2.2. Kuaterniyonların Kutupsal Gösterimi	4
2.3. Kuaterniyon Çarpım	5
2.3.1. Kuaterniyon çarpımının özellikleri.....	6
2.4. Kuaterniyonlar Üzerinde İç Çarpımlar.....	7
3. KUATERNİYONLAR, 3-BOYUTLU ve 4-BOYUTLU DÖNMELER	
3.1. 4-Boyutlu Dönmeler	10
3.2. 4-Boyutlu Dönmelerin Geometrisi.....	15
3.3. 3-Boyutlu Dönmeler	18
3.3.1. Yansıma	25
3.4. Kuaterniyonların Dönme Matrisi ile İlişkisi	28
3.5. Kuaterniyonlar ve Küresel Trigonometri	31
3.5.1. Küresel üçgenler.....	32
3.5.2. Büyük çember yayları	34
3.5.3. Kuaterniyonlar küresel sinüs ve kosinüs kuralı	35

Sayfa

4. REEL KUATERNİYONİK VE PSEUDO KUATERNİYONİK ÇARPIMLAR ..	38
4.1 Pseudo Kuaterniyon Çarpımının Geometrisi	45
KAYNAKLAR	54
ÖZGEÇMİŞ	55

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$A_{\mathbb{Q}_L}$	Kuaterniyonların sol çarpım dönüşüm ailesi
$A_{\mathbb{Q}_R}$	Kuaterniyonların sağ çarpım dönüşüm ailesi
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar ($2^1 = 2$ – boyutlu)
$\mathbb{H}$	Kuaterniyonlar ($2^2 = 4$ – boyutlu)
N_q	q kuaterniyonunun normu
$\hat{q}$	q kuaterniyonunun vektörel kısmının birimleştirilmiş
$\bar{q}$	q kuaterniyonunun eşleniği
$\mathbb{Q}_L$	Kuaterniyonların sol çarpım dönüşümü
$\mathbb{Q}_R$	Kuaterniyonların sağ çarpım dönüşümü
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar ($2^0 = 1$ – boyutlu)
S_q	q kuaterniyonunun reel kısmı
V_q	q kuaterniyonunun vektörel kısmı
$\langle , \rangle$	İç çarpım
$[x, y]$	Lie çarpımı

1. GİRİŞ

Karmaşık sayılar 18.yüzyılın başında çok araştırılan konular arasındaydı. William Rowan Hamilton 1830 yıllarında kompleks sayıların çarpımına benzer bir çarpmayı, R^3 deki üçlüler için araştırdı. Fakat normun korunması mümkün olmuyordu. Hatta Hamilton bu problemle ailesini bile meraklandırıyordu. Bunu oğluna yazdığı şu cümleyle de vurgulamıştı:

1843 yılının eylül ayının başlarında her sabah kahvaltıya geldiğimde sen ve erkek kardeşin William Edwin “Baba üçlü sayıyı çarpabildiniz mi?” diye sorardınız. Ben de üzgün bir kafa sallamasıyla cevabını vermek zorunda olduğum için “Hayır sadece topladım ve çıkardım” derdim.

R^3 de, $H = \{z = a + bi + cj \mid i^2 = j^2 = -1, a, b, c \in R\}$ olsun.

$$z = a_1 + b_1i + c_1j, w = a_2 + b_2i + c_2j, a_n, b_n, c_n \in R, n=1,2$$

$$\therefore H \times H \rightarrow H$$

$$z \cdot w = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2).1 + (a_1b_2 + b_1a_2).i + (a_1c_2 + c_1a_2).j + (b_1c_2 - c_1b_2).ij$$

olsun. O zaman; $i.j = -j.i, i^2 = -1, j^2 = -1$

$$|z| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \quad |w| = \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}$$

$$\text{Buradan; } |z.w| \neq |z|.|w|$$

olduğu görülür. $i.j \notin R^3$ olduğundan kapalılık özelliği sağlanmaz. Sorun ortadan kaldırılmaya çalışılmış, bu amaçla $i.j=0$ kabul edilmiş. Ancak $i.j=0$ iken de $|z.w| \neq |z|.|w|$ durumu ortaya çıkmıştır. Bu nedenle, bu kabulde de sorunu ortadan kaldırmaya yeterli olmamıştır.

Bayan Hamilton'la Kraliyet Kanalı'nda gezerken problemin çözümünü fark etti ve deftere not aldı. W.R. Hamilton R^3 ten R^4 e geçiş yapılırsa sorunun çözüleceğini fark etmişti. Çok heyecanlı bir şekilde bir bıçak çıkardı ve cevabı bir köprü taşının üstüne kazıdı. Hamilton uzun süredir aranan çözümü bulmuştu ama çözüm garipti, çözüm 4-boyutluydu. Hamilton'un yaptığı ilk iş dördüncü boyuttan kurtulmak ve uygun bir kuaterniyon sonucunu aramaktı.

Hamilton hayatının geri kalanını kuaterniyonun kullanım alanlarını bulmaya çalıştı. Hacısalihoğlu (1983) reel ve dual kuaterniyonların özelliklerini incelemiş ve kullanım alanları ile ilgili ayrıntılı bilgiler sunmuştur [1]. Agrawal (1987) Hamilton operatörleri ve dual kuaterniyonların Uzay (Space) Kinematikte ki yerini incelemiştir [6]. Ward (1997) genelleştirilmiş kuaterniyonları tanımlayarak, uygulamaları hakkında bilgiler vermiştir [2].

2. KUATERNİYONLAR

2.1. Kuaterniyonların Temel Cebirsel Formu

2.1 Tanım:

$$H = \{q = a.1 + b.i + c.j + d.k \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, i^2 = j^2 = k^2 = -1, i.j = k, j.i = -k\} \quad [2]$$

Burada $i.j = k$ iken $j.k = i$ gerektirmesi geçerlidir.

$$q_1 = 1a_1 + ib_1 + jc_1 + kd_1, \quad q_2 = 1a_2 + ib_2 + jc_2 + kd_2 \text{ olmak üzere } q_1, q_2 \in H \text{ için}$$

aşağıdaki özellikler sağlanır.

2.1.1. Özellikler

i) $q_1 = q_2$ ise $a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2, d_1 = d_2$ (İki kuaterniyonun eşitliği)

ii) $q_1 + q_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) + j(c_1 + c_2) + k(d_1 + d_2)$ (Kuaterniyonlarda toplama işlemi)

iii) $s \in \mathbb{R}$ için $s.q = s.a + i s b + j s c + k s d$ (Kuaterniyonlarda skalar ile çarpma işlemi)

iv) $q, p, h \in H$ için $q + (p + h) = (q + p) + h$ (Kuaterniyonlarda birleşme özelliği)

v) $s, t \in \mathbb{R}$ ve $p, q \in H$ için

$(s + t)q = sq + tq$ (Kuaterniyonlarda sağdan dağılma özelliği)

$s(q + p) = sq + sp$ (Kuaterniyonlarda soldan dağılma özelliği)

2.1 Teorem: H kümesi ile $\mathbb{R}^4$ birbirlerine izomorftur. $(H \cong \mathbb{R}^4 \cong (a, b, c, d))$

İspat: [5] ten görülebilir.

2.2. Kuaterniyonların Kutupsal Gösterimi

2.2 Tanım: $q=a+bi+cj+dk$ ve $q \in \mathbb{H}$ için a reel sayısına q nun reel kısmı , $bi+cj+dk$ vektörüne de q nun vektörel kısmı denir ve sırasıyla S_q , V_q ile gösterilir. $S_q - V_q$ kuaterniyonuna q nun eşleniği denir ve $\bar{q}$ şeklinde gösterilir [2].

2.3 Tanım: $N_q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ reel sayısına q reel kuaterniyonun normu denir. Reel eksen ile q arasındaki açı θ olmak üzere

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{N_q}} \quad (2.1)$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}}{\sqrt{N_q}} \quad (2.2)$$

olup. Buna göre;

$$\begin{aligned} q &= a + bi + cj + dk = \sqrt{N_q} \cdot \frac{(a + bi + cj + dk)}{\sqrt{N_q}} \\ &= \sqrt{N_q} \left(\frac{a}{\sqrt{N_q}} + \frac{b}{\sqrt{N_q}} i + \frac{c}{\sqrt{N_q}} j + \frac{d}{\sqrt{N_q}} k \right) \\ &= \sqrt{N_q} \left[\frac{a}{\sqrt{N_q}} + \frac{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}}{\sqrt{N_q}} \left(\frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} i + \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} j + \frac{d}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} k \right) \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\hat{q} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} i + \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} j + \frac{d}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} k \quad (2.4)$$

(2.3) denkleminde (2.1), (2.2) ve (2.4) eşitliklerini kullanarak q kuaterniyonunun kutupsal halini

$$q = \sqrt{N_q} (\cos \theta + \hat{q} \sin \theta)$$

şeklinde buluruz.

2.4 Tanım: $N_q = 1$ ise q birim kuaterniyondur.

2.5 Tanım: $q = S_q + V_q$, eşitliğinde $S_q = 0$ ise q ya **pür kuaterniyon** denir.

2.3. Kuaterniyon Çarpım

$$H = \{q = a.1 + b.i + c.j + d.k \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, i^2 = j^2 = k^2 = -1, i.j = k, j.i = -k\}$$

$q, p \in H$ için q ile p nin kuaterniyon çarpımı

$$q * p = S_q \cdot S_p - V_q \cdot V_p + S_q \cdot V_p + S_p \cdot V_q + (V_q \wedge V_p)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$V_q \wedge V_p = \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix} = i.(c_1.d_2 - d_1.c_2) + j.(d_1.b_2 - b_1.d_2) + k.(b_1.c_2 - c_1.b_2)$$

olup,

$$V_q * V_p = (V_q \wedge V_p) - (V_q \cdot V_p) = (-b_1.b_2 - c_1.c_2 - d_1.d_2) + i.(c_1.d_2 - d_1.c_2) + j.(d_1.b_2 - b_1.d_2) + k.(b_1.c_2 - c_1.b_2)$$

şeklindedir.

$V_q \wedge V_p \neq V_p \wedge V_q$ olduğundan $q * p \neq p * q$ ve bu nedenle kuaterniyon çarpımı değişmeli değildir. Kuaterniyon çarpım değişmeli olmamasına karşın birleşmelidir.

$q, p, h \in \mathbb{H}$ için $q^*(p^*h) = (q^*p)^*h$

eşitliği geçerlidir.

2.3.1. Kuaterniyon çarpımının özellikleri

1) Çarpma işleminde skalar kısımların değişme özelliği vardır.

$$S_{q^*p} = S_q \cdot S_p - V_q \cdot V_p = S_p \cdot S_q - V_p \cdot V_q = S_{p^*q}$$

$$2) N_q = q^* \bar{q} = (S_q + V_q)^*(S_q - V_q) \quad (V_q^* V_q = (V_q \wedge V_q) - V_q \cdot V_q)$$

$$N_q = S_q^2 + V_q \cdot V_q$$

$$N_q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

$$3) (\overline{q^* p}) = S_q \cdot S_p - V_q \cdot V_p - S_p \cdot V_q - S_q \cdot V_p - V_q \wedge V_p$$

$$(\overline{q^* p}) = \bar{p}^* \bar{q}$$

$$4) N_{p^*q} = N_p \cdot N_q$$

Kuaterniyon çarpımına göre q nun tersi q^{-1} : $N_q \neq 0$ için $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{N_q}$

şeklinde tanımlanır.

$$q^{-1}, p^{-1} \text{ var ise} \quad N_{p/q} = \frac{N_p}{N_q} \quad (p^*q)^{-1} = q^{-1} * p^{-1}$$

eşitlikleri geçerlidir.

2.4. Kuaterniyonlar Üzerinde İç Çarpım

Kuaterniyonlar toplama işlemine göre h kümesinin değişmeli grup olduğu kolayca görülebilir. H kümesi üzerindeki skalar ile çarpma işleminin de

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ve $p, q \in H$ için

$$(i) \quad (\lambda + \eta)q = \lambda q + \eta q$$

$$(ii) \quad (\lambda \cdot \eta) \cdot p = \lambda \cdot (\eta \cdot p)$$

$$(iii) \quad \lambda(p + q) = \lambda p + \lambda q$$

$$(iv) \quad 1 \cdot q = q$$

Özelliklerini sağladığı kolayca görülür. Bu nedenle H kümesi $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

2.1 Lemma: $\langle p, q \rangle = Sp \cdot S\bar{q} - \langle Vp, V\bar{q} \rangle$ şeklinde tanımlı $\langle, \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü iç çarpım özelliklerini sağlar.

$$i) \langle p, q \rangle = S(p * \bar{q}) = S(\overline{p * \bar{q}}) = S(q * \bar{p}) = \langle q, p \rangle \quad (\text{simetrik})$$

$$ii) \langle p, q + r \rangle = S(p * \overline{(q + r)}) = S(p * \bar{q} + p * \bar{r}) = S(p * \bar{q}) + S(p * \bar{r}) = \langle p, q \rangle + \langle p, r \rangle$$

(bilineer)

$$iii) \alpha \in \mathbb{R} \text{ için } \alpha \langle p, q \rangle = \langle \alpha p, q \rangle = \langle p, \alpha q \rangle$$

$$iv) \langle p, p \rangle = S_{p, -p} = N \geq 0 \text{ sadece}$$

$$p = 0 \text{ ise } \langle p, p \rangle = 0 \text{ olur. (pozitif tanımlıdır)}$$

2.6 Tanım: Lemma 2.1 ile verilen özelliklere sahip

$$\langle, \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(p, q) \rightarrow \langle p, q \rangle = Sp \bar{q} = Sp S \bar{q} - \langle Vp, V\bar{q} \rangle$$

şeklindeki dönüşüme H kümesi üzerinde bir iç çarpım denir [2].

2.7 Tanım: p ile q kuaterniyonu arasındaki λ açısını

$$\cos \lambda = \frac{S(p * \bar{q})}{\sqrt{N_p} \sqrt{N_q}}$$

$-1 \leq \cos \lambda \leq 1$ dir. Bunu

$$\langle p, p \rangle \langle q, q \rangle \geq \langle p, q \rangle^2 \quad p, q \in H$$

Ayrıca;

$$\sqrt{N_q} \geq |S(p)| \quad \text{ve} \quad \sqrt{N_p} \cdot \sqrt{N_q} = \sqrt{N_{p+q}} \geq |S(p * \bar{q})|$$

eşitsizlikleri de vardır.

θ , p nin skalar eksenle yaptığı açı, w da S_p ile p arasındaki açı olmak üzere;

$$\text{Eğer; } \cos w = \frac{S(S_p * p)}{\sqrt{N_{S_p}} \sqrt{N_p}} = \frac{(S_p)^2}{S_p \sqrt{N_p}} = \frac{S_p}{\sqrt{N_p}} = \cos \theta$$

$$p = \sqrt{N_p} (\cos \theta + \hat{p} \sin \theta) \quad q = \sqrt{N_q} (\cos \phi + \hat{q} \sin \phi)$$

$\hat{p}, \hat{q}$ birim pür kuaterniyonlar olmak üzere p ile q arasındaki λ açısı

$$\begin{aligned} \cos \lambda &= \frac{S(p * \bar{q})}{\sqrt{N_p} \sqrt{N_q}} = S[(\cos \theta + \hat{p} \sin \theta)(\cos \phi - \bar{q} \sin \phi)] \\ &= \cos \theta \cdot \cos \phi - \sin \theta \cdot \sin \phi S(\hat{p} * \hat{q}) \end{aligned}$$

şeklinde veriliyor [2].

2.1 Sonuç:

i) Eğer γ , $\hat{p}$ ve $\hat{q}$ arasındaki açı ise $\cos \gamma = S(\hat{p} * \bar{q}) = -S(\hat{p} * \hat{q}) = -S(\hat{p} * \hat{q})$

ii) $S(p * \bar{q}) = 0$ ise p ve q diktirler.

iii) $V(p * \bar{q}) = 0$ ise p ve q paraleldir.

iv) Bir kuaterniyonun skalar kısmı vektörel kısmına her zaman diktir gerçekten;

$$S(S(p) \cdot \overline{V(p)}) = \frac{1}{4} S((\bar{p} + p)(\bar{p} - p)) = \frac{1}{4} S(\bar{p}\bar{p} - pp) = \frac{1}{8} (\bar{p}\bar{p} - pp + [\bar{p}\bar{p} - pp]) = \frac{1}{8} (\bar{p}\bar{p} - pp + pp - \bar{p}\bar{p}) = 0.$$

3. KUATERNİYONLAR, 3-BOYUTLU VE 4-BOYUTLU DÖNMELER

3.1. 4-Boyutlu Dönmeler

Kuaterniyonlar cebirinde değişme özelliği olmadığı için sağ ve sol çarpım olarak iç çarpım tanımlayacağız.

3.1 Tanım:

$$\phi_L: H \rightarrow H$$

$$\phi_R: H \rightarrow H$$

$$\phi(x) \rightarrow qx$$

$$\phi(x) \rightarrow xq \text{ şeklindedir.}$$

$$H = \{a.1 + b.i + c.j + d.k \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}, i^2=j^2=k^2=-1, i.j=k, j.i=-k\}$$

$$\phi : H \xrightarrow{\text{lineer}} \mathbb{R}^4$$

$$q = a+bi+cj+dk \rightarrow \phi(q) = a\phi(1) + b\phi(i) + c\phi(j) + d\phi(k)$$

$$= (a,b,c,d)$$

olarak tanımlayalım.

3.1 Teorem: $(H, +, \cdot, \cdot, \odot)$ vektör uzayı $(\mathbb{R}^4, +, \cdot, \cdot, \odot)$ vektör uzayına izomorftur.

$$\text{İspat: } \phi : H \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$x \rightarrow \phi(x) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$\phi(\lambda x + \mu y) = \lambda \phi(x) + \mu \phi(y) \Leftrightarrow \phi \text{ lineer}$$

$$\lambda \phi(x) + \mu \phi(y) = \lambda x_1 + \lambda x_2 i + \lambda x_3 j + \lambda x_4 k + \mu y_1 + \mu y_2 i + \mu y_3 j + \mu y_4 k$$

$$= (\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2)i + (\lambda x_3 + \mu y_3)j + (\lambda x_4 + \mu y_4)k$$

$$= \phi(\lambda x + \mu y)$$

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda x + \mu y) &= (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3, \lambda x_4 + \mu y_4) \\
&= \lambda(x_1, x_2, x_3, x_4) + \mu(y_1, y_2, y_3, y_4) \\
&= \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y)
\end{aligned}$$

φ lineerdir.

$$\varphi : H \longrightarrow R^4$$

$$x = x_1 + x_2i + x_3j + x_4k \rightarrow \varphi(x) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$x = x_1 + x_2i + x_3j + x_4k, \quad y = y_1 + y_2i + y_3j + y_4k \quad \text{ve} \quad x, y \in H \text{ için}$$

$$\varphi(x) = \varphi(y)$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (y_1, y_2, y_3, y_4) \text{ iken}$$

$$x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = y_3, x_4 = y_4 \text{ olduğuna göre } \varphi \text{ birebirdir.}$$

$$\text{boy } H=4, \text{ boy } R^4=4 \text{ ve } \varphi \text{ birebir olduğundan } \varphi \text{ örtendir.}$$

$$R^4 = S_p\{1, i, j, k\} \text{ dır. } H \cong R^4 \text{ olduğundan } H = S_p\{1, i, j, k\} \text{ dır.}$$

3.2 Teorem: ϕ_L ve ϕ_R dönüşümleri $R^4 \rightarrow R^4$ lineer dönüşümdür [2].

3.3 Teorem: ϕ_L ve ϕ_R dönüşümleri q birim ise normu korur [2].

İspat : H deki norm N_q olarak tanımlanmıştı.

$$q = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k \in H \quad \text{ve} \quad S_q = q_1, \quad V_q = q_2i + q_3j + q_4k$$

$$N_q = q^* \bar{q} = (S_q + V_q)(S_q - V_q), \quad S_q^2 = q_1^2, \quad N_{V_q} = q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = \langle V_q, V_q \rangle$$

$$N_q = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \quad \text{idi.}$$

$$\phi_L: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$x \rightarrow \phi_L(x) = qx$$

$$N_{x*q} = N_q \cdot N_x$$

$$N_{x*q} = N_x \Leftrightarrow N_q = 1 \quad (x \neq 0, N_x \neq 0, N_q, N_x \in \mathbb{R})$$

Benzer sonuç ϕ_R için de elde edilir

3.4 Teorem: ϕ_L ve ϕ_R dönüşümleri açıları korur [2].

İspat : Eğer x ile y arasındaki açı λ ise

$$\cos \lambda = \frac{S(x * \bar{y})}{\sqrt{N_x} \sqrt{N_y}}$$

x, y kuaterniyonları q ile çarpıldığında;

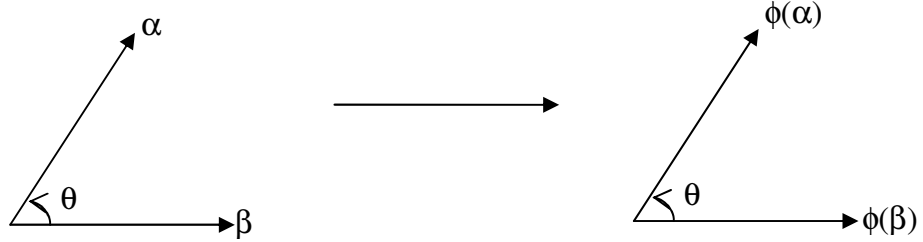
$$\begin{aligned} \cos \lambda' &= \frac{S(q * x (\overline{q * y}))}{\sqrt{N_{q*x}} \sqrt{N_{q*y}}} \\ &= \frac{S((\overline{qy})qx)}{\sqrt{N_q} \sqrt{N_x} \sqrt{N_q} \sqrt{N_y}} && (\text{Özellik 2.3.1. den}) \\ &= \frac{S(\overline{yq}qx)}{N_q \sqrt{N_x} \sqrt{N_y}} && (\text{Özellik 2.3.1. den}) \\ &= \frac{S(\overline{y}N_q x)}{N_q \sqrt{N_x} \sqrt{N_y}} && (\text{Özellik 2.3.1. den}) \\ &= \frac{N_q S(x\bar{y})}{N_q \sqrt{N_x} \sqrt{N_y}} = \cos \lambda \end{aligned}$$

Vektörler arasındaki açılar $[0, \pi]$ aralığında olduğundan $\lambda' = \lambda + 2k\pi$ denkleminin tek çözümü $\lambda' = \lambda$ olur. Görüldüğü gibi sol öteleme açısını korur.

Benzer sonuç ϕ_R için de elde edilir.

3.5 Teorem: ϕ_L ve ϕ_R dönüşümleri dönmenin yönünü korur [2].

İspat:



R_4 in standart baz elemanları

$$1 \equiv (1,0,0,0), i \equiv (0,1,0,0), j \equiv (0,0,1,0), k \equiv (0,0,0,1)$$

$$q = a + bi + cj + dk \quad \text{ve} \quad N_q = 1 \text{ alırsak.}$$

$$\phi_L(1) = q1 = a + bi + cj + dk = a + bi + cj + dk$$

$$\phi_L(i) = qi = ai + bi^2 + cji + dki = -b + ai + dj - c$$

$$\phi_L(j) = qj = aj + bij + cj^2 + dkj = -c - di + aj + bk$$

$$\phi_L(k) = qk = ak + bik + cjk + dk^2 = -d + ci - bj + ak$$

$$A_{\phi_L} = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix}$$

$$\phi_R(1) = 1q = a + bi + cj + dk = a + bi + cj + dk$$

$$\phi_R(i) = iq = a i + bi^2 + cij + dik = -b + ai - dj + ck$$

$$\phi_R(j) = jq = aj + bji + cj^2 + djc = -c + di + aj - bk$$

$$\phi_R(k) = kq = ak + bki + ckj + dk^2 = -d - ci + bj + ak$$

$$A_{\phi_R} = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{bmatrix}$$

$$A_{\phi_L} \cdot A_{\phi_L}^T = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_4$$

$$A_{\phi_L} \cdot A_{\phi_L}^T = I \quad \text{ve benzer şekilde} \quad A_{\phi_R} \cdot A_{\phi_R}^T = I \quad \text{olduğu görülür.}$$

$$\det(A_{\phi_L}) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = 1 \quad \text{ve} \quad \det(A_{\phi_R}) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = 1$$

q birim kuaterniyon olup $N_q = 1$ dir.

$$\det(A_{\phi_L}) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 > 0 \quad \text{ve} \quad \det(A_{\phi_R}) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 > 0 \quad \text{olduğundan}$$

bu A_{ϕ_L} ve A_{ϕ_R} matrisleri ortogonaldır.

$$3.6 \text{ Teorem: } G = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix}; a, b, c, d \in R, a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \right\}$$

Şeklindeki G, matris çarpım işlemine göre $SO(4)$ ün alt grubudur [3].

$$3.1 \text{ Sonuç: } \langle A_{\phi_L} x, A_{\phi_L} y \rangle = Nq \langle x, y \rangle \quad \text{dir.}$$

3.7 Teorem: x , qx arasındaki açı ile q nun dönme açısına eşittir [2].

İspat : $q = \cos\theta + \hat{q} \sin\theta$ dersek. q nun dönme açısı θ olur.

$$\cos w = \frac{S(x(\overline{qx}))}{\sqrt{N_x} \sqrt{N_{qx}}} = \frac{S(x\bar{x}q)}{\sqrt{N_x} \sqrt{N_q} \sqrt{N_x}} = \frac{N_x S(\bar{q})}{N_x \sqrt{N_q}} = \frac{S(q)}{\sqrt{N_q}} = S(q) = \cos \theta$$

3.2 Sonuç: qx ve xq , sol ve sağ çarpımlar ise $\mathbb{R}^4$ de x in dönmelerini temsil eden matrisler de A_{ϕ_L} ve A_{ϕ_R} dir.

3.2. 4-Boyutlu Dönmelerin Geometrisi

3.8 Teorem: 4 boyutlu uzayda dönmeler, düzlemde dönmeler şeklinde ifade edilebilirler.

İspat : $q = \cos\theta + \hat{q} \sin\theta$, $N_q = 1$ ve x herhangi bir kuaterniyon olsun

$$qx = x\cos\theta + \hat{q} x\sin\theta$$

$$q(\hat{q}x) = \hat{q} x\cos\theta + \hat{q}^2 x\sin\theta = \hat{q} x\cos\theta - x\sin\theta$$

$$x' = \hat{q}x \text{ olarak tanımlarsak } S(x(\overline{\hat{q}x})) = S(x\bar{x}\bar{q})$$

$$= S(-x\bar{x}\hat{q})$$

$$= -x.\bar{x}.\underbrace{S(\hat{q})}_0 = 0$$

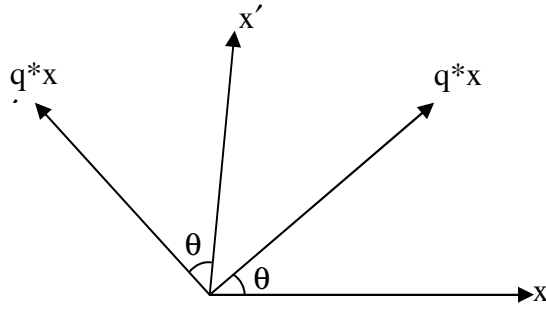
$$\text{Ayrıca } qx = x\cos\theta + (\hat{q}x)\sin\theta = x\cos\theta + x'\sin\theta$$

$$qx' = -x\sin\theta + x'\cos\theta$$

Bu işlemler sol kuaterniyon çarpımının x ile x' nin oluşturduğu düzlemde θ açısı kadar pozitif yönde dönme yaptığını gösterir.

$$\left. \begin{aligned} qx &= x \cos \theta + x' \sin \theta \\ qx' &= -x \sin \theta + x' \cos \theta \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} qx \\ qx' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}$$

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$



Gerçekten $\mathbb{R}^2$ deki bir x vektörü $Sp\{x, x'\}$ düzleminde θ kadar dönerek qx vektörü elde edilmiştir.

$\{p = ax + bx'\} = Sp\{x, x'\}$ düzlemi sol çarpım altında invaryat kalır. Gerçekten ;

$$\begin{bmatrix} qx \\ qx' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} qx \\ qx' \end{bmatrix}$$

$$x = qx \cos \theta - qx' \sin \theta$$

$$x' = qx \sin \theta + qx' \cos \theta$$

$$ax + bx' = a(qx \cos \theta - qx' \sin \theta) + b(qx \sin \theta + qx' \cos \theta)$$

$$= (a \cos \theta + b \sin \theta)qx + (b \cos \theta - a \sin \theta)qx'$$

$$ax + bx' = a'qx + b'qx' = q(a'x + b'x')$$

olduğundan $\text{Sp}\{x, x'\}$ düzlemi sol çarpım altında invaryat kalır.

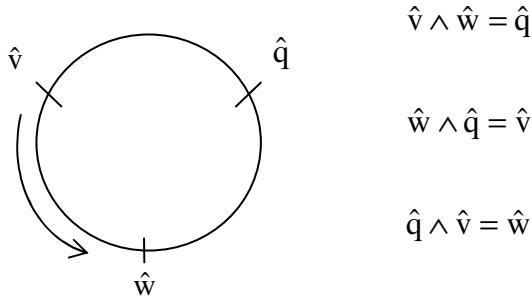
Şayet $x = 1$, $x' = \hat{q}$ seçersek $x = 1$ ve $x = \hat{q}$ yı kapsayan düzlem invaryant (değişmez) kalır.

$$q.1 = \cos\theta + \hat{q} \sin\theta$$

$$q\hat{q} = -\sin\theta + \hat{q} \cos\theta$$

$$\begin{bmatrix} q1 \\ q\hat{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{q} \end{bmatrix}$$

Burada sağ el kuralına uygun ortogonal vektörler $\hat{v}, \hat{w}, \hat{q}$ olsun. Yani $\mathbb{R}^3$ de; $\{\hat{v}, \hat{w}, \hat{q}\}$ kümesi birim ortogonal ve



olsun.

$x = \hat{v}$ seçersek $x' = \hat{q}\hat{v} = \hat{w}$ olur.

$$q\hat{v} = \hat{v} \cos\theta + \hat{q}\hat{v} \sin\theta = \hat{v} \cos\theta + \hat{w} \sin\theta$$

$$q\hat{w} = \hat{w} \cos\theta + \hat{q}\hat{w} \sin\theta = -\hat{v} \sin\theta + \hat{w} \cos\theta$$

$$\begin{bmatrix} q\hat{v} \\ q\hat{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v} \\ \hat{w} \end{bmatrix} \text{ olur ki bu da bize, } \hat{v} \text{ ve } \hat{w} \text{ yı kapsayan düzlemde } \theta$$

açısı kadar dönmeyi gösterir.

Yukarıdaki yapılanları, sağ çarpım için de yapabiliriz.

$$xq = x\cos\theta + x''\sin\theta$$

$$x''q = -x\sin\theta + x''\cos\theta$$

Burada $x'' = x\hat{q}$ dır. Böylece $Sp\{x, x''\}$ düzleminin elemanları θ açısı kadar döner. Benzer şekilde $x = 1, x'' = \hat{q}$ seçersek 1 ve $\hat{q}$ yı kapsayan düzlem sağ çarpım altında değişmez kalır.

$$1q = \cos\theta + \hat{q}\sin\theta$$

$$\hat{q}.q = -\sin\theta + \hat{q}\sin\theta$$

$$\text{Eğer } x = \hat{v} \text{ seçersek } x'' = \hat{v}\hat{q} = -\hat{w}$$

$$\hat{v}q = \hat{v}\cos\theta + \hat{v}\hat{q}\sin\theta = \hat{v}\cos\theta - \hat{w}\sin\theta$$

$$\hat{w}q = \hat{w}\cos\theta + \hat{w}\hat{q}\sin\theta = \hat{v}\sin\theta + \hat{w}\cos\theta$$

Yukarıdaki denklemin anlamı, $Sp\{\hat{v}, \hat{w}\}$ düzleminde θ açısı kadar ters dönme belirtir.

3.3 Sonuç: 4-boyutlu uzayda iki tip dönme vardır.

a) Skalar eksenini içeren düzlemde orijin etrafında dönme.

b) $\hat{q}$ ve $\hat{q}$ nin dik olduğu bir pür kuaterniyon tarafından gerilen düzlemdeki dönme.

3.3. 3-Boyutlu Dönmeler

3.9 Teorem: q herhangi bir kuaterniyon olmak üzere $\phi_q(x) = x' = q x q^{-1}$ şeklinde bir dönüşümü düşünelim.

$\phi_q : H \rightarrow H, \phi_q(x) = q x q^{-1}$ şeklindeki dönüşüm $Sp\{\hat{x}, \hat{q} = x\}$ düzleminde 2θ açısı kadar dönme gösterir [2].

$$\begin{aligned}
\text{İspat : } q x q^{-1} &= q x \frac{\bar{q}}{N_q} = \sqrt{N_q} (\cos \theta + \hat{q} \sin \theta) \cdot x \cdot \frac{\sqrt{N_q} (\cos \theta + \hat{q} \sin \theta)}{N_q} \\
&= (x \cos \theta + \hat{q} x \sin \theta) (\cos \theta + \hat{q} \sin \theta) \\
&= x \cos^2 \theta - x \hat{q} \sin \theta \cos \theta + \hat{q} x \sin \theta \cos \theta - \hat{q} x \hat{q} \sin^2 \theta \\
&= x \cos^2 \theta + 2 \hat{q} x \sin \theta \cos \theta - x \sin^2 \theta \\
&= x (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \hat{q} \cdot x (2 \sin \theta \cos \theta) \\
q x q^{-1} &= x \cos 2\theta + \hat{q} x \sin 2\theta = (\cos 2\theta + \hat{q} \sin 2\theta) * x
\end{aligned}$$

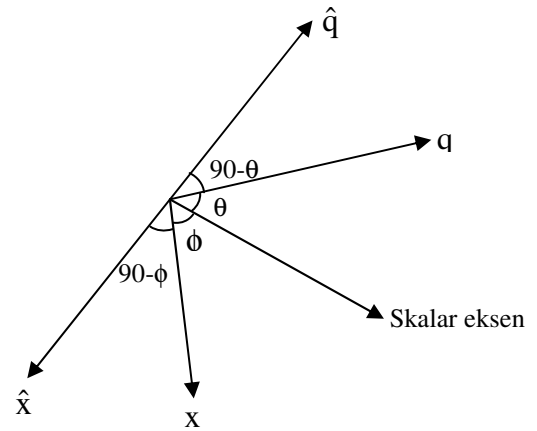
Bunun anlamı; Teo. 3.8 den $\text{Sp}\{ \hat{x}, \hat{q} * x \}$ düzleminde 2θ lık dönmeyi belirtir.

3.10 Teorem: V_q , ϕ_q dönüşümü altında invariant(değişmez) kalır.

$$\text{İspat : } \phi_q(x) = q x q'$$

$$\phi_q(V_q) = q V(q) q^{-1}$$

$$\begin{aligned}
&= (S_q + V_q) V_q \frac{(S_q - V_q)}{N_q} \\
&= \frac{1}{N_q} (S_q + V_q) \cdot (S_q V_q - V_q^2) \\
&= \frac{1}{N_q} (S_q + V_q) \cdot (S_q - V_q) V_q \\
&= q \cdot q^{-1} \cdot V_q \\
&= V_q
\end{aligned}$$



dir. Bu da bize $\hat{q}$ 'nın yani V_q 'nın dönme eksenini olduğu gösterir.

3.11 Teorem: ϕ_q altında x in normu ve skalar kısmı korunur.

İspat : $x' = \phi_q(x)$ olsun.

$$N_{x'} = N_q x_q^{-1} = N_q \cdot N_{x_q^{-1}} = N_q \cdot N_x \cdot N_{q^{-1}} = N_x$$

$$S(x') = S(qxq^{-1}) = S(q(xq^{-1})) = S((xq^{-1})q) = S(x \cdot (q^{-1} \cdot q)) = S(x)$$

$$\forall x \in H \cong \mathbb{R}^4 \quad \text{için} \quad \phi_q(x) = qxq^{-1} = q(S(x) + V(x))q^{-1}$$

$$qxq^{-1} = S(x) + qV(x)q^{-1}$$

$S(qxq^{-1}) = Sx$ olduğundan skalar kısmı da korunur.

3.1 Lemma: $S(qV_x q^{-1}) = S(V_x) = 0$ dır.

3.12 Teorem: $qV_x q^{-1}$ pür kuaterniyondur.

$$\text{İspat : } V(qxq^{-1}) = qV_x q^{-1}$$

V_x ise $\hat{x}$ paraleldirler.

$$\text{Çünkü } x = S_x + V_x = N_x(\cos\theta + \hat{x} \sin\theta)$$

$$S_x = N_x \cos\theta$$

$V_x = N_x \sin\theta \cdot \hat{x}$ olması V_x ile $\hat{x}$ paralel olduğunu gösterir. Vx' , $q\hat{x}q^{-1}$ e paraleldir.

Bunlar da bize $qV_x q^{-1}$ in pür kuaterniyon olduğunu gösterir.

$$\begin{aligned}
\hat{q} \hat{p} \hat{q} &= -\hat{q} \hat{q} \hat{p} \\
&= -\hat{q}^2 \hat{p} \\
&= \hat{p} \quad \text{ise,}
\end{aligned}$$

$$\hat{x} = q \hat{x} q^{-1} = q(\hat{q} \cos \lambda + \hat{p} \sin \lambda) q^{-1}$$

$$= q \hat{q} q^{-1} \cos \lambda + q \hat{p} q^{-1} \sin \lambda$$

$$q \hat{q} q^{-1} = q \hat{q} \cdot \frac{\bar{q}}{N_q} = \frac{1}{N_q} q \hat{q} \cdot \bar{q} = \frac{1}{N_q} \sqrt{N_q} (\cos \theta + \hat{q} \sin \theta) \hat{q} \sqrt{N_q} (\cos \theta - \hat{q} \sin \theta)$$

$$= \frac{1}{N_q} N_q (\hat{q} \cos \theta - \sin \theta) (\cos \theta - \hat{q} \sin \theta)$$

$$= (\hat{q} \cos^2 \theta + \cos \theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta + \hat{q} \sin^2 \theta)$$

$$= \hat{q} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

$$q \hat{q} q^{-1} = \hat{q}$$

$$q \hat{p} q^{-1} = q \hat{p} \cdot \frac{\bar{q}}{N_q} = \frac{1}{N_q} q \hat{p} \cdot \bar{q} = \sqrt{N_q} (\cos \theta + \hat{q} \sin \theta) \hat{p} \cdot \frac{\sqrt{N_q} (\cos \theta - \hat{q} \sin \theta)}{N_q}$$

$$= (\hat{p} \cos \theta + \hat{q} \hat{p} \sin \theta) (\cos \theta - \hat{q} \sin \theta)$$

$$= \hat{p} \cos^2 \theta - \hat{p} \hat{q} \cos \theta \sin \theta + \hat{q} \hat{p} \sin \theta \cos \theta - \hat{q} \hat{p} \hat{q} \sin^2 \theta$$

$$= \hat{p} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2 \hat{q} \hat{p} \sin \theta \cos \theta$$

$$q \hat{p} q^{-1} = \hat{p} \cos 2\theta + \hat{q} \hat{p} \sin 2\theta$$

olduğundan $\hat{p}$ ile $\hat{q}$ pür kuaaterniyondur.

3.5 Sonuç: $\hat{p}' = q \cdot \hat{p} \cdot q^{-1}$ $\hat{q}$ vektörüne diktir.

$$\text{İspat : } \hat{p}' = q p q^{-1} = \hat{p} \cos 2\theta + \hat{q} \hat{p} \sin 2\theta$$

Burada $\hat{p}$ ile $\hat{q}$ dik olduğundan $\hat{q} \cdot \hat{p} = \hat{q} \wedge \hat{p}$ ve

$$\langle \hat{p}', \hat{q} \rangle = \langle \hat{p} \cos 2\theta + \hat{q} \wedge \hat{p} \sin 2\theta, \hat{q} \rangle$$

$$= \langle \hat{p}, \hat{q} \rangle \cos 2\theta + \langle \hat{q} \wedge \hat{p}, \hat{q} \rangle$$

$$= \det(\hat{q}, \hat{p}, \hat{q}) \sin 2\theta = 0$$

olur. Ayrıca

$$S(q(\hat{p} q^{-1})\bar{\hat{q}}) = 0$$

olduğundan

$$q(\hat{p} \cdot q^{-1})\bar{\hat{q}} = (q \hat{p} q^{-1})\bar{\hat{q}} = \hat{p}' \bar{\hat{q}}$$

$$\text{ve} \quad = -\langle \hat{p}', \bar{\hat{q}} \rangle + \hat{p}' \wedge \bar{\hat{q}}$$

$$= -\bar{\hat{q}} \wedge \hat{p}'$$

eşitliklerinden görürüz.

$$S(\hat{p} \bar{\hat{q}}) = -S(\hat{p} \hat{q}) = 0$$

$$S(V_q \hat{p} - \hat{p}_q \hat{q}) = 0$$

olduğunu da

$$V_q = \hat{q} N_q \sin \theta$$

Eşitliğini göz önüne alarak görürüz.

$\hat{p}'$ den $\hat{p}$ ye dönme açısına ϕ dersek.

$$\cos\phi = \frac{S(\hat{p}'\hat{p})}{\sqrt{N_{\hat{p}'}}\sqrt{N_{\hat{p}}}}$$

$$\hat{p}' = q\hat{p}q^{-1} \text{ ise } N_{\hat{p}'} = N_q N_{\hat{p}} N_{q^{-1}} = 1 \text{ ve}$$

$$\cos\phi = S(\hat{p}'\hat{p}) \text{ olur.}$$

$$\hat{p}' = \hat{p}\cos 2\theta + \hat{q}\hat{p}\sin 2\theta \text{ idi.}$$

$$\begin{aligned} \hat{p}' \cdot \hat{p} &= (\hat{p}\cos 2\theta + \hat{q}\hat{p}\sin 2\theta)(-\hat{p}) \\ &= (-\hat{p}^2\cos 2\theta - \hat{q}\hat{p}^2\sin 2\theta) \\ &= \cos 2\theta + \hat{q}\sin 2\theta \end{aligned}$$

$$\cos\phi = S(\hat{p}'\hat{p}) = \cos 2\theta \quad \text{ve} \quad \phi = 2\theta \text{ bulunur.}$$

$$\hat{x}' = \hat{q}\cos\lambda + \hat{p}'\sin\lambda \text{ ve } \hat{p}' = \hat{p}\cos 2\theta + \hat{q}\hat{p}\sin 2\theta = (\cos 2\theta + \hat{q}\sin 2\theta) * \hat{p}$$

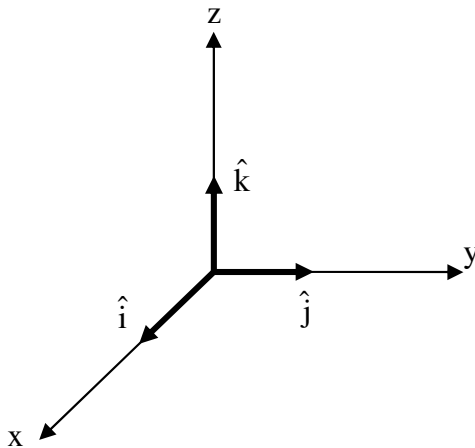
$$\hat{p}' = q\hat{p}q^{-1} = (\cos 2\theta + \hat{q}\sin 2\theta)\hat{p} \quad \hat{p}, \hat{q} \text{ eksenini etrafında } 2\theta \text{ kadar döner.}$$

Bu durumda $\hat{q}\hat{p}$, $\hat{p}$ ve $\hat{q}$ nın ikisine de diktir. Böylece qxq^{-1} in 3 boyutlu uzayda x in vektör kısmının q nun vektör kısmı etrafında 2θ açısı kadar dönme yaptığını gösterir.

3.1 Örnek:

R_1 : x eksenini etrafında 90° lık dönme

R_2 : z eksenini etrafında 45° lik dönme



$$R_1 : q_1 = \cos 45 + \hat{q} \sin 45, \quad R_2 : q_2 = \cos 22,5 + \hat{k} \sin 22,5$$

olarak ifade edebiliriz.

$$\begin{aligned} R_2 \cdot R_1 : q_2 q_1 &= ((\cos 22,5 + \hat{k} \sin 22,5)(\cos 45 + \hat{i} \sin 45)) \\ &= \cos 22,5 \cdot \cos 45 + \hat{i} \cos 22,5 \cdot \sin 45 + \hat{j} \sin 22,5 \cdot \sin 45 + \hat{k} \sin 22,5 \cdot \cos 45 \end{aligned}$$

$$N_{q_1} = 1, \quad N_{q_2} = 1 \Rightarrow N_{q_2} \cdot q_1 = N_{q_2} \cdot N_{q_1} = 1$$

$q_2 \cdot q_1 = \cos \theta + \hat{n} \sin \theta$ olarak yazarsak.

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos 22,5 \cdot \cos 45 = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \sin \theta &= \frac{1}{2} \left(3 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \tan \theta = (7 - 4\sqrt{2})^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$\phi = 49,210^\circ$ olarak buluruz. Burada yapılan dönme

$$\hat{n} = \frac{1}{\sin \theta} (\hat{i} \cos 22,5 \cdot \sin 45 + \hat{j} \sin 22,5 \cdot \sin 45 + \hat{k} \sin 22,5 \cdot \cos 45)$$

$$\hat{n} = \hat{i} + \hat{j}(\sqrt{2} - 1) + \hat{k}(\sqrt{2} - 1) \text{ etrafında } 98,42^\circ = 2\theta \quad [2]$$

3.3.1. Yansıma

3.14 Teorem: $\hat{q}$ birim vektör ise $(\hat{q}^{-1} = -\hat{q} \text{ ise})$ $\hat{q}$ nın skalar eksenle yaptığı açı $\frac{\pi}{2}$ dir.

$$\text{İspat: } \hat{q} = \cos \frac{\pi}{2} + \hat{q} \sin \frac{\pi}{2} = 0 + \hat{q} \cdot 1 = \hat{q}$$

$\hat{q} * w (\equiv -\hat{q}w\hat{q} \equiv \hat{q}w\hat{q}^{-1})$ olmak üzere ;

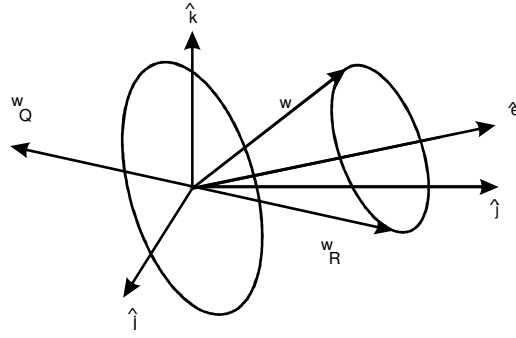
$\hat{q} * w$ işlemi $\hat{w}$ yi $\hat{q}$ eksenini etrafında $2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi = 180^\circ$ kadar döndürür.

3.15 Teorem: $\phi_{\hat{q}} : H \rightarrow H$

$$\phi_{\hat{q}}(w) = \hat{q}w\hat{q}$$

Dönüşümü normalini $\hat{q}$ olan düzleme göre yansıma dönüşümüdür [2].

İspat :



$$\begin{aligned} \hat{q}w\hat{q}^{-1} &= -\hat{q}w\hat{q} \\ \hat{q}(\hat{q}w\hat{q}^{-1})\hat{q}^{-1} &= \hat{q}(-\hat{q}w\hat{q})(-\hat{q}) \\ &= +\hat{q}^2 w \hat{q}^2 \\ &= w \end{aligned}$$

$\hat{q}$ eksen ve w bir vektör olsun. Eğer $\hat{q}$ eksenini boyunca θ kadar döndürülürse dönmeden sonra

$$w_R = qwq^{-1} \quad q = \cos \frac{\theta}{2} + \hat{q} \sin \frac{\theta}{2} \quad \text{elde edilir.}$$

$\hat{q}$ da kesişen d ve d' düzlemlerini n ve n' normallerini göz önüne alalım.

β bu düzlemler arasındaki açı olmak üzere;

$$\hat{n} \wedge \hat{n}' = \hat{q} \sin \beta$$

$$\hat{n} \cdot \hat{n}' = \cos \beta$$

olur.

w, d düzleminde yansıtılırsa w' , $w' = \hat{n} w \hat{n}$

$$d' \text{ düzleminde yansıtılırsa } w'' \quad , \quad \begin{aligned} w'' &= \hat{n}' (\hat{n} w \hat{n}) \hat{n}' \\ &= (\hat{n}' \hat{n}) w (\hat{n} \hat{n}') \end{aligned}$$

kuaterniyon çarpımı kullanarak

$$\begin{aligned} \hat{n} \hat{n}' &= -\hat{n} \hat{n}' + \hat{n} \wedge \hat{n}' \\ &= -\cos \beta + \hat{q} \sin \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{n}' \hat{n} &= -\hat{n}' \hat{n} + \hat{n}' \wedge \hat{n} \\ &= -\cos \beta - \hat{q} \sin \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\hat{n} \hat{n}') &= (-\cos \beta - \hat{q} \sin \beta)^{-1} \\ &= -\cos \beta + \hat{q} \sin \beta = \hat{n} \cdot \hat{n}' \end{aligned}$$

$$w'' = (\hat{n}' \hat{n}) w (\hat{n}' \hat{n})^{-1} \text{ Eğer } \beta = \frac{\theta}{2} \text{ seçersek } w'' = w_R \text{ elde edilmiş olur.}$$

Aynı işlemleri R^3 de yapacak olursak;

ϕ , w pür kuaterniyonu için $\phi: R^3 \rightarrow R^3$ $\phi(w) = q w q^{-1}$ olup ϕ lineerdir. ϕ lineer dönüşümüne karşılık gelen metni hesaplayalım.

$N_q = 1$ ve $R^3 = \text{span}\{i, j, k\}$ seçip $q = a + bi + cj + dk$ için

$$\phi(i) = (a + bi + cj + dk) \cdot i \cdot (a - bi - cj - dk)$$

$$= (ai - b - ck + dj) \cdot (a - bi - cj - dk)$$

$$= \hat{i} (a^2 + b^2 - c^2 - d^2) + \hat{j} (2ad + 2bc) + \hat{k} (-2ac + 2bd)$$

$$\phi(j) = \hat{i}(-2ac + 2bc) + \hat{j}(a^2 + c^2 - b^2 - d^2) + \hat{k}(2ab + 2cd)$$

$$\phi(k) = \hat{i}(2ac + 2bd) + \hat{j}(2cd - 2ab) + \hat{k}(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)$$

$$M = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & -2ad + 2bc & 2ac + 2bd \\ 2ad + 2bc & a^2 + c^2 - b^2 - d^2 & 2cd - 2ab \\ 2bd - 2ac & 2ab + 2cd & a^2 + d^2 - b^2 - c^2 \end{bmatrix}$$

M ortogonaldır. Bunun için $M.M^T = 1$ dir. $\phi(w) = qwq^{-1} = Mw$

$\phi(w) = qwq^{-1}$ R^3 de bir dönme belirtir.

Normali $\hat{q}$ olan düzleme göre yansımanın matrisini hesaplayalım.

$$\phi(i) = \hat{q}i\hat{q} = (bi + cj + dk)i(-bi - cj - dk) = (bi^2 + cji + dki)(-bi - cj - dk)$$

$$= (-b - ck - dj)(-bi - cj - dk)$$

$$= b^2i + bcj + bdk + bcj - c^2i - cdk + bdk + dck - d^2i$$

$$= i(b^2 - c^2 - d^2) + j(2bc) + k(2bd)$$

Benzer şekilde $\phi(j)$ ve $\phi(k)$ hesaplanırsa,

$$N = \begin{bmatrix} -b^2 + c^2 + d^2 & -2bc & -2bd \\ -2bc & -c^2 + b^2 + d^2 & -2cd \\ -2bd & -2cd & -d^2 + b^2 + c^2 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Ayrıca $N = -M$ ($a=0$) ortogonal ve $\det N = -1$ dir.

3.4. Kuaterniyonların Dönme Matrisi ile İlişkisi

3.2 Tanım: $(\underline{x})_i$, $i = 1, 2, 3$ vektörlerin ortonormal sistemi olarak verilsin.

Ortonormal bir sistem olduğu için; $(\underline{x})_i (\underline{x})_j = \delta_{ij}$

Bir dönme ile verilen bir q kuaterniyonu için tekil ortonormal sisteme dönüştürülebilir.

$(\underline{x})'_i$ $i = 1, 2, 3$ olmak üzere

$$(\underline{x})'_i = q(\underline{x})_i q^c \quad q \cdot q^c = 1$$

Şimdi $(\underline{x})_i$ leri $(\underline{x})_i$ lerin lineer kombinasyonu olarak yazılabilir.

Bunu tensör rotasyonu olan R_{ij} ile yapalım.

$$(\underline{x})'_i = R_{ij} (\underline{x})_j$$

R_{ij} tensörü q kuaterniyonunun tanımlandığı dönmeyi tanımlar [2].

$$3.6 \text{ Sonuç: } q = \mp \frac{1}{2} \left[\frac{1 - R_{ij} (\underline{x})_j (\underline{x})_j}{\sqrt{1 + R_{ii}}} \right]$$

$$İspat : q(\underline{x})_i q^c = R_{ij} (\underline{x})_j$$

$$= R_{ij} [-(\underline{x})_j (\underline{x})_k + (\underline{x})_j \wedge (\underline{x})_k]$$

Bu eşitliğin skalar kısmını alacak olursak.

$$S(q(\underline{x})_i q^c (\underline{x})_k) = -R_{ik}$$

Eğer q ve $(\underline{x})_i$ verilmiş ise R_{ij} bulunabilir.

Şimdi $q = \alpha + \underline{\beta}$ ve $q^c = \alpha - \underline{\beta}$ olsun.

$$(\underline{x}) : (\underline{x})_i = -(\underline{x})_i \cdot (\underline{x})_i = -[(\underline{x})_1 (\underline{x})_1 + (\underline{x})_2 (\underline{x})_2 + (\underline{x})_3 (\underline{x})_3] = -3$$

$$\begin{aligned} (\underline{x})_i q^c (\underline{x})_i &= (\underline{x})_i [\alpha - \underline{\beta}] (\underline{x})_i \\ &= -3\alpha - (\underline{x})_i [-\underline{\beta} (\underline{x})_i + \underline{\beta} \wedge (\underline{x})_i] \\ &= -3\alpha + (\underline{x})_i [\underline{\beta} (\underline{x})_i] - (\underline{x})_i \wedge (\underline{\beta} \wedge (\underline{x})_i) \\ &= -3\alpha + \underbrace{2(\underline{x})_i [\underline{\beta} (\underline{x})_i]}_{2\beta} - \underbrace{[(\underline{x})_i \cdot (\underline{x})_i] \beta}_{3\beta} \end{aligned}$$

$$\underline{\beta}, (\underline{x})_i \text{ cisminde } \underline{\beta} = a_j (\underline{x})_j \text{ olup}$$

$$\underline{\beta} (\underline{x})_i = a_j (\underline{x})_j \cdot (\underline{x})_i = a_i \text{ ve } 2(\underline{x})_i [\underline{\beta} (\underline{x})_i] = 2a_i (\underline{x})_i = 2\underline{\beta}$$

$$\Rightarrow (\underline{x})_i q^c (\underline{x})_i = -3\alpha + 2\beta - 3\beta = -4\alpha + q^c$$

$$\begin{aligned} (\underline{x})_i' \cdot (\underline{x})_i &= q(\underline{x})_i q^c (\underline{x})_i \\ &= q(-4\alpha + q^c) = -4\alpha q + 1 \end{aligned}$$

Her iki tarafın kuaterniyon eşleniğini alıp ekleyerek

$$\begin{aligned} R_{ij} (\underline{x})_j \cdot (\underline{x})_i + R_{ij} (\underline{x})_i \cdot (\underline{x})_j &= -4\alpha q + 1 - 4\alpha q^c + 1 \\ &= -4\alpha \underbrace{(q + q^c)}_{2\alpha} + 2 \\ &= -8\alpha^2 + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\underline{x})_j \cdot (\underline{x})_i &= -(\underline{x})_j \cdot (\underline{x})_i + (\underline{x})_j \wedge (\underline{x})_i \\ &= -\delta_{ij} + (\underline{x})_j \wedge (\underline{x})_i \end{aligned}$$

$$R_{ij}(\underline{x})_j(\underline{x})_i = R_{ij}(\underline{x})_i(\underline{x})_j = R_{ij} \left[-\delta_{ij} + (\underline{x})_j \wedge (\underline{x})_i + -\delta_{ij} + (\underline{x})_i \wedge (\underline{x})_j \right]$$

$$= -2R_{ii}$$

$$4\alpha^2 = 1 + R_{ii}$$

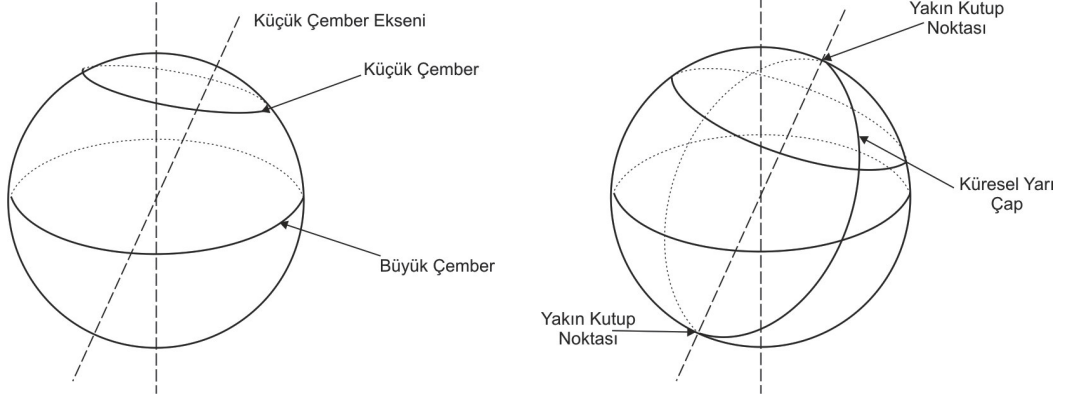
$$\alpha = \mp \frac{1}{4} \sqrt{1 + R_{ii}}$$

$$R_{ij}(\underline{x})_j(\underline{x})_i = -4\alpha q + 1 \text{ olduğundan}$$

$$q = \mp \frac{1}{2} \left[\frac{1 - R_{ij}(\underline{x})_j(\underline{x})_j}{\sqrt{1 + R_{ii}}} \right]$$

bulunur [2].

3.5. Kuaterniyonlar ve Küresel Trigonometri



3.3 Tanım: Kürenin merkezinden geçen düzlem ile küre yüzeyinin arakesit eğrisine kürenin **büyük çember** i denir. Aksi halde **küçük çember** adını alır [2].

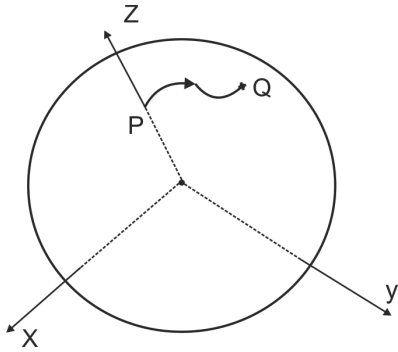
3.4 Tanım: Bir küredeki herhangi bir çember eksenleri ile kürenin eksenleri ortak noktası aynı zamanda düzlemin çembere dik olduğu yerse bu şekildeki noktalara **kutup noktası** denir [2].

3.5 Tanım: Küçük çember üzerindeki bir noktadan geçen büyük çemberin en yakın kutup noktasına olan yay uzunluğuna küçük çemberin **küresel yarıçapı** denir [2].

3.6 Tanım: Herhangi iki çemberin (büyük veya küçük) arasındaki açı; kesişme noktasındaki teğetler arasındaki açı olarak alınır [2].

3.5.1. Küresel üçgenler

3.16 Teorem: Kürenin üstündeki iki noktayı birleştiren en kısa yol bu noktaları üzerinde bulunduran büyük çember yaylarından küçük olanı alınarak bulunur [2].



İspat: P ve Q kürenin yüzeyi üzerindeki iki nokta r yarıçap ve C de kürenin yüzeyinde bulunan iki noktayı birleştiren bir yay olsun.

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t)$$

$$\text{Yay uzunluğu } L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \text{ küresinin kutupsal koordinatları } (r, \phi, \theta)$$

$$x = r \cdot \sin\phi(t) \cdot \cos\theta(t)$$

$$y = r \cdot \sin \phi(t) \cdot \cos \theta(t)$$

$$z = r \cdot \cos \phi(t)$$

z eksenini P noktasından geçirmek genelliği bozmadığından;

$$\frac{dx}{dt} = r \cos \phi \cos \theta \frac{d\phi}{dt} - r \sin \phi \sin \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = r \cos \phi \sin \theta \frac{d\phi}{dt} - r \sin \phi \cos \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = -r \sin \phi \frac{d\phi}{dt}$$

$$\begin{aligned} L &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{r^2 \cos^2 \phi \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + r^2 \sin^2 \phi \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + r^2 \sin^2 \phi \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} r \sqrt{\left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \sin^2 \phi \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2} dt \end{aligned}$$

ve

$$L \geq \int_{t_0}^{t_1} d\phi = r[\phi(t_1) - \phi(t_0)]$$

Bu ise sadece büyük çember yayının birleştirdiği P, Q noktalarıdır.

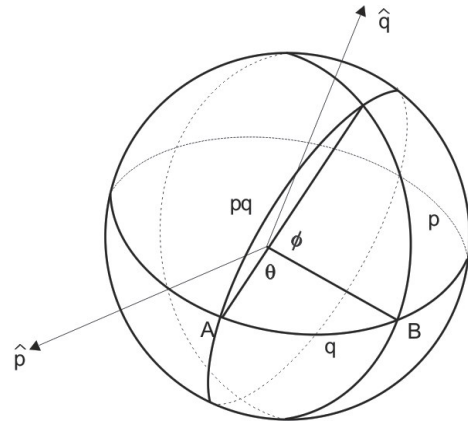
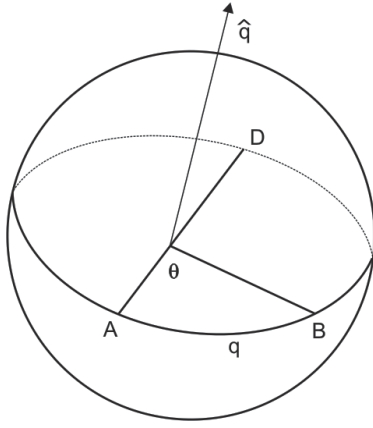
Eğer çemberler büyük çember değilse kürenin geodezikleri olamaz.

3.5.2. Büyük çember yayları

Bir birim çemberin yayını bir kompleks sayının normu ile yani $\cos \theta + j \sin \theta$ ile tanımlayabiliriz.

$q = \cos\theta + \hat{q} \sin\theta$ birim kuaterniyonunu göz önüne alalım. $\hat{q}$ normali çap düzlemi ile küre kesiştiğinde elde edilen büyük çember yayı ile bu kuaterniyonu eşleştirebiliriz. Yani; büyük çember boyunca yayın pozisyonu keyfidir. Bu nedenle AB yayı boyu ve doğrultusu değişmediği sürece büyük çember boyunca kaydırılabilir.

$$q \sim \cos\theta + \hat{q} \sin\theta \sim \text{arc}_{AB}$$



$$q \sim \text{arc}_{AB}$$

$$q^{-1} \sim \text{arc}_{BA}$$

$$-q \sim \text{arc}_{DB}$$

$$1 \sim \text{nokta}(\theta = 0)$$

$$-1 \sim \text{yarı çember}(\theta = \pi)$$

$$\hat{q} \sim \text{dörtte bir çember}(\theta = \frac{\pi}{2})$$

$$\text{arc}_q + \text{çember} = \text{arc}_q$$

$$\text{arc}_q + \text{yarı çember} = -\text{arc}_q$$

Büyük çember yayları vektörel olarak toplanabilirler.

$$p = \cos\phi + \hat{p} \sin\phi$$

$$q = \cos\theta + \hat{q} \sin\theta$$

q^* ile arc_{AB} ve p^* ile arc_{BC} eşleştirilirse $(pq)^*$ ile arc_{AC} eşleştirilebilir.

Buradan

$$\text{arc}_{AB} + \text{arc}_{BC} = \text{arc}_{AC} \text{ veya } \text{arc}_p + \text{arc}_q = \text{arc}_{qp}$$

bulunur. Bu herhangi sayıda büyük çember yayı için genellenebilir.

$$\text{arc}_q + \text{arc}_p + \dots + \text{arc}_h = \text{arc}_h \dots pq$$

Sonuç olarak eğer P, Q genel kuaterniyonlar ise

$$P = \sqrt{N_p} p \text{ ve } Q = \sqrt{N_q} q \text{ olup } p \text{ ve } q \text{ birim kuaterniyonlar ise}$$

$$PQ = \sqrt{N_p} \cdot p \sqrt{N_q} q = \sqrt{N_p} \sqrt{N_q} \cdot \text{arc}_{pq}$$

Buna göre kuaterniyon çarpımı pozitif reel sayılarla büyük çember yayının çarpımı olarak gösterilebiliyor.

$$Q = \sqrt{N_q} q \text{ kuaterniyonu kutupsal formda } (\sqrt{N_q}, \text{arc}_q) \text{ şeklinde yazılabilir.}$$

3.5.3. Kuaterniyonlar, küresel sinüs ve kosinüs kuralları

3.17 Teorem:

$$\text{Kosinüs Kuralı: } \cos^0 C \cos^0 A + \cos^0 B \sin^0 C \sin^0 A = \cos^0 B$$

$$\text{Sinüs Kuralı: } \frac{\sin^0 A}{\sin^0 a} = \frac{\sin^0 B}{\sin^0 b} = \frac{\sin^0 C}{\sin^0 c} \quad [2]$$

İspat: Bir küresel üçgeni tanımlayınca 6 tane açı tanımlanmış olur; Bunlar kenar yaylarının belirttiği a^0, b^0, c^0 yay açıları, A^0, B^0, C^0 köşe açılarıdır.

Bir küresel üçgende bütün yay uzunlukları bir yarı çemberden kısa olacağından

$$0 < a^0, b^0, c^0 < 180^0$$

$\sin a^0, \sin b^0, \sin c^0$ lerin hepsi pozitiftir.

Şimdi yayları kuaterniyonik şekilde gösterirsek;

$$q = \cos a^0 + \hat{q} \sin a^0 \quad p = \cos c^0 + \hat{p} \sin c^0$$

$$q.p = \cos a^0 . \cos c^0 - \hat{q}\hat{p} \sin c^0 \sin a^0 + \hat{q} \sin a^0 \cos c^0 + \hat{p} \cos a^0 \sin c^0 + \hat{q} \wedge \hat{p} \sin c^0 \sin a^0$$

Fakat

$$\text{arc}_{AB} \sim p^* \quad \text{arc}_{BC} \sim q^* \quad \text{arc}_{AC} \sim (qp)^*$$

$$\text{arc}_{AC} \sim \cos b^0 + \hat{m} \sin b^0$$

skalar ve vektörel kısımların eşitliğinden

$$\cos c^0 . \cos a^0 - \hat{q}\hat{p} \sin c^0 . \sin a^0 = \cos b^0$$

$$\hat{q} \sin a^0 . \cos c^0 + \hat{p} \cos a^0 \sin c^0 + \hat{q} \wedge \hat{p} \sin c^0 . \sin a^0 = \hat{m} . \sin b^0$$

fakat $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ birim vektörlerini tanımlayarak.

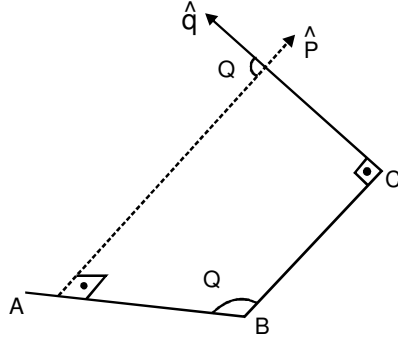
$$\hat{A} = \frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|} \quad \hat{B} = \frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|} \quad \hat{C} = \frac{\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OC}|}$$

ve $\hat{p}, \hat{q}, \hat{m}; \hat{A} \wedge \hat{B}, \hat{B} \wedge \hat{C}, \hat{A} \wedge \hat{C}$ yönünde birim vektör olmak üzere $\hat{B}$ eksenine bakarak

$$\cos(\pi - \beta^0) = \hat{q} . \hat{p}$$

$$\cos c^0 \cos a^0 + \cos b^0 \sin c^0 \sin a^0 = \cos b^0$$

olup küresel trigonometride kosinüs kuralı elde edilir.



$\hat{q} \wedge \hat{p} = -\hat{B} \sin B^0$ $\hat{B} \cdot \hat{q} = 0$ ve $\hat{B} \cdot \hat{p} = 0$ olup B ile iç çarpımla ;

$$\hat{B} \sin B^0 \sin c^0 \sin a^0 = \hat{q} \sin a^0 \cos c^0 + \hat{p} \cos a^0 \sin c^0 - \hat{m} \sin b^0 ,$$

$$\sin B^0 \sin c^0 \sin a^0 = -\hat{B} \hat{m} \sin b^0 ,$$

$$m = \frac{\hat{A} \wedge \hat{C}}{\|A \wedge C\|} = \frac{\hat{A} \wedge \hat{C}}{\|A\| \|C\| \sin b} = \frac{\hat{A} \wedge \hat{C}}{\sin b} ,$$

ve buradan;

$$\frac{\sin \beta^0}{\sin a^0} = \frac{-\hat{B} \hat{m}}{\sin c \cdot \sin a} = \frac{-\hat{B} (\hat{A} \wedge \hat{C})}{\sin a^0 \sin b^0 \sin c^0} = \frac{\hat{A} \cdot (\hat{B} \wedge \hat{C})}{\sin a^0 \sin b^0 \sin c^0}$$

ve buradan;

$$\frac{\sin A^0}{\sin a^0} = \frac{\sin B^0}{\sin b^0} = \frac{\sin C^0}{\sin c^0}$$

küresel sinüs kuralı bulunur.

4. REEL KUATERNİYONİK VE PSEUDO KUATERNİYONİK ÇARPIMLAR

V , 4-boyutlu reel vektör uzayı olsun. Kuaterniyon çarpımını da Lie çarpımı ve Semi-Öklidyen iç çarpımlardan yararlanarak reel kuaterniyonik çarpımı da kapsayan pseudo-kuaterniyonik çarpımlar tanımlayalım.

4.1 Tanım: V , 4-boyutlu bir vektör uzayı olsun. Lie çarpımı

$$x = \sum_{i=0}^3 x_i e_i \in V \text{ ve } y = \sum_{i=0}^3 y_i e_i \in V \text{ için}$$

$$\begin{aligned} [x, y] &= \sum_{\ell=1}^3 (x_i y_j - x_j y_i) e_\ell \\ &= (x_2 y_3 - x_3 y_2) e_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) e_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) e_3 \end{aligned} \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanır [5].

4.2 Tanım: $S(x)$ ve $T(x)$, V üzerinde iki dönüşüm olsun.

$$x = \sum_{i=1}^3 x_i e_i \in V \text{ için}$$

$$S(x) = x_0 e_0 \quad T(x) = \sum_{i=1}^3 x_i e_i \text{ olsun [3].} \quad (4.2)$$

4.1 Sonuç: i) $S^2 = S$ ve $\forall x \in V$ için $S^n = S$ dir.

ii) $T^2 = T$ ve $\forall x \in V$ için $T^n = T$ dir.

iii) $S + T = I$

iv) $ST = TS = 0$

İspat: i) $S(x) = x_0 e_0 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$

$$S(S_{(x)}) = S(x_0e_0 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3)$$

$$= S(x)$$

$$S^2 = S$$

$\forall x \in V$ için $S^n = S$ olduğu görülür.

$$\text{ii) } T(x) = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$$

$$T(T_{(x)}) = T(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3)$$

$$= T(x)$$

$$T^2 = T \text{ dir.}$$

olur.

Aynı şekilde devam ederek $\forall x \in V$ için $T^n = T$ olduğu görülür.

$$\text{iii) } S(x) + T(x) = x$$

$$\text{ve } S + T = I \text{ olur.}$$

$$\text{iv) } S(x) + T(x) = x$$

olduğundan

$$T(x) = x - S(x)$$

$$S(x) = x - T(x) \quad (4.3)$$

$$\text{Eş. 4.3 den} \quad S(T_{(x)}) = S(x - S(x))$$

$$= S(x) - S^2(x)$$

(i) den

$$= S(x) - S(x)$$

$$= 0(x)$$

$$ST = 0$$

$$T(S_{(x)}) = T(x - T(x))$$

Eş. 4.3 den

$$= T(x) - T^2(x)$$

(ii) den

$$= T(x) - T(x)$$

$$= 0(x)$$

ve $TS = 0$

$$S + T = I$$

$$(S - T).(S + T) = S - T$$

$$S^2 + ST - TS - T^2 = S - T$$

(i) ve (ii) den

$$S + ST - TS - T = S - T$$

$$ST - TS = 0$$

$$ST = TS$$

olur.

4.3 Tanım: $\alpha: V \rightarrow V$, $\alpha = S - T$ biçiminde tanımlanan bir lineer dönüşüm olmak üzere $\forall x \in V$ için

$$\alpha(x) = x_0 e_0 - \sum_{i=1}^3 x_i e_i \quad (4.4)$$

olur [3].

4.2 Sonuç: $\alpha^2 = I$

İspat: $\alpha(\alpha(x)) = \alpha(S(x) - T(x))$

$$= \alpha(S(x)) - \alpha(T(x))$$

$$= S(S(x)) - S(T(x)) - T(S(x)) + T(T(x))$$

(iii) den

$$= S^2 + T^2$$

(i) ve (ii) den

$$= S + T$$

$$\alpha^2 = I$$

4.4 Tanım: $x = \sum_{i=0}^3 x_i e_i$, $y = \sum_{i=0}^3 y_i e_i$, ve $\forall x, y \in V$ için

$$h: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow h(x, y) = x_0 y_0 - \sum_{i=1}^3 x_i y_i \quad (x, y) \rightarrow g(x, y) = - \sum_{i=0}^3 x_i y_i \quad (4.5)$$

şeklinde V üzerinde iki lineer form olsun.

$\forall x \in V$ için h ve g formlarının her ikisi de non-dejeneredir.

h nin karşılık geldiği kuadrotik form indefinite, g nin karşılık geldiği kuadrotik form ise negatif tanımlıdır.

Ayrıca

$$x, y \in V \text{ için } h(T(x), y) = h(x, T(y)) = g(x, T(y)) = g(T(x), y)$$

$$h(S(x), y) = h(x, S(y)) = -g(x, S(y)) = -g(S(x), y) \quad (4.6)$$

$$h(\alpha(x), y) = h(x, \alpha(y)) = -g(x, y) \quad (4.7)$$

S , T ve α Eş. 4.2 ve Eş. 4.4 ile tanımlı olan g ve h bilineer formları Eş. 4.6 ve Eş. 4.7 ye göre self adjointtirler [3].

4.5 Tanım: b_ν , V üzerinde keyfi ν -indeksli simetrik bilineer form olsun.

$\forall x, y \in V$ için

$$x \circ_\nu y = [x, y] + x_0 T(y) + y_0 T(x) + b_\nu(x, y) \vec{e}_0 \quad (4.8)$$

işlemi olmak üzere; $(V, \circ_\nu)$ ikilisi genel halde birleşmeli ve değişmeli olmayan bir reel cebir oluşturur. Bu cebire reel semi kuaterniyon cebiri denir. Bu durumda $\circ_\nu$ ye de ν -indeksli pseudo kuaterniyonik çarpım denir.

$$b_\nu(x, y) = \sum_{i=0}^{\nu-1} x_i y_i - \sum_{i=\nu}^3 x_i y_i$$

$\nu=0$ halinde $\circ_\nu$ işlemi pseudo kuaterniyonik çarpım

$\nu=1$ halinde $\circ_\nu$ işlemi reel kuaterniyonik çarpım ile çakışır.

$$b_0(x, y) = -\sum_{i=0}^3 x_i y_i = g(x, y) \text{ ve } b_1(x, y) = x_0 y_0 - \sum_{i=1}^3 x_i y_i = h(x, y)$$

hallerini inceleyeceğiz.

4.6 Tanım: Keyfi bir $x \in V$ yi göz önüne alalım.

$N(x)$, $x \circ \alpha(x)$ ile tanımlanır.

$$\forall x, y \in V \text{ için} \quad N(x) = b(x, \alpha(x)) \vec{e}_0 \quad (4.9)$$

$$N(x+y) - N(x) - N(y) = \{b(x, \alpha(y)) + b(y, \alpha(x))\} \vec{e}_0$$

$$= x \circ \alpha(y) + y \circ \alpha(x) \quad [3]$$

Reel kuaterniyonik cebir için “xoy”: “ $x*y$ ” ile gösterelim.

$$N(x+y) = h(x+y, \alpha(x+y)) \vec{e}_0$$

$$N(x+y) = [h(x, \alpha(x)) + h(x, \alpha(y)) + h(y, \alpha(x)) + h(y, \alpha(y))] \vec{e}_0$$

$$N(x+y) = N(x) + N(y) + \{h(x, \alpha(y)) + h(y, \alpha(x))\} \vec{e}_0$$

$$N(x+y) - N(x) - N(y) = \{h(x, \alpha(y)) + h(y, \alpha(x))\} \vec{e}_0$$

olduğu kolayca görülür. Ayrıca,

$\{h(x, \alpha(y)) + h(y, \alpha(x))\} \vec{e}_0 = x * \alpha(y) + y * \alpha(x)$ açılımları yapıldığında eşitliğin doğru olduğu çıkar.

Pseudo-kuaterniyonik cebir için “xoy” yi “ $x \bullet y$ ” ile gösterirsek, benzer şekilde;

$$N(x+y) - N(x) - N(y) = \{g(x, \alpha(y)) + g(y, \alpha(x))\} \vec{e}_0$$

$$= x \bullet \alpha(y) + y \bullet \alpha(x)$$

olduğu gösterilebilir.

4.3 Sonuç: α hem g ye hem h ye göre self adjoint olduğundan

Reel kuaterniyonik durumda ;

$$x^* \alpha(y) + y^* \alpha(x) = 2h(x, \alpha(y)) \vec{e}_0 = -2g(x, y) \vec{e}_0$$

Pseudo kuaterniyonik durumda ;

$$x \bullet \alpha(y) + y \bullet \alpha(x) = +2g(x, \alpha(y)) \vec{e}_0 = -2h(x, y) \vec{e}_0 \quad (4.10)$$

elde edilir [3].

4.7 Tanım: $x \in V$ olsun. V de x in normu; $N(x)$, ($= x \circ \alpha(x)$): Eş. 4.9 ile tanımlanan) reel kuaterniyonik durumda $h(x, x) \vec{e}_0$ ile, pseudo kuaterniyonik durumda $g(x, x) \vec{e}_0$ ile tanımlanır.

Kuaterniyonik durumda $N(x)$ in öklidyen normu $N(x) = \|x\|^2 e_0$ ü verir. Reel kuaterniyonik durumda $x \in V$ yi;

$h(x, x) > 0$ olduğu zaman uzay benzeri (space like)

$h(x, x) = 0$ olduğu zaman ışık benzeri (null)

$h(x, x) < 0$ olduğunda zaman benzeri (time like)

olarak adlandıracağız [4].

4.8 Tanım: Bir x pseudo kuaterniyonu $\|x\| = 1$ olduğu zaman birimdir. Bir x reel kuaterniyonu $N(x)$, $+\vec{e}_0$ veya $-\vec{e}_0$ olduğu zaman birimdir [3].

4.9 Tanım: İki x ve y reel kuaterniyonu ya da pseudo kuaterniyonu $x^* \alpha(y) + y^* \alpha(x) = 0$ (veya $x \bullet \alpha(y) + y \bullet \alpha(x) = 0$) ise ortogonaldırlar. x ve y ortogonal olduğu için $h(x, y) = 0$ (veya $g(x, y) = 0$) dır [3].

x ve y , V nin iki elemanı olsunlar. Reel kuaterniyonik ve pseudo kuaterniyonik çarpımlar arasında $x \bullet y - x^*y = \{g(x,y) - h(x,y)\} \vec{e}_0$

olduğu gösterilebilir. Ayrıca Eş. 4.5 ve Eş. 4.10 dan yararlanarak

$$x \bullet y \equiv x^*y - 2x_0y_0 \vec{e}_0 \text{ elde edilir.}$$

4.1. Pseudo Kuaterniyon Çarpımının Geometrisi

V yi reel uzay üzerinde kuaterniyon cebiri farzedelim. q sıfırdan farklı bir kuaterniyon ve V de sol çarpım ve sağ çarpım dönüşümü;

$$I_q : p \rightarrow q.p$$

$$r_q : p \rightarrow p.q$$

$q = u_0e_0 + u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3$ kuaterniyonunun sol ve sağ çarpımlarının eigen değerleri

$$u_0 \pm i\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

dır.

Böylece $T_q \neq 0$ için her q kuaterniyonunun eigen değerleri reel değildir.

4.1 Lemma: $\{p, I_q(p)\}$ lineer bağımsızdır [3].

İspat: Tersine lineer bağımlı olduğunu kabul edelim.

$$\lambda_1 p + \lambda_2 I_q(p) = 0 \text{ olsun } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$\lambda_2 = 0$ ise $\lambda_1 = 0$ olur. Buradan $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ olur. Bu da kabulümüzle çelişkilidir.

$\lambda_1 \neq 0$ dır.

$$I_q(p) = \frac{-\lambda_1}{\lambda_2} p$$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ise $\lambda = \frac{-\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{R}$ dir.

λ , I_q lineer dönüşümünün eigen değeridir. Bu ise eigen değerinin reel olmamasıyla çelişir. O halde kabulümüz yanlış yani $\{p, I_q(p)\}$ lineer bağımsızdır.

4.2 Lemma: I_q ve r_q , $I_q(p)$ ve $r_q(p)$ nin bulunduğu düzlemi değişmez bırakır [3].

İspat: $\{p, I_q(p)\}$ lineer bağımsız olduğundan $E = \text{Sp}\{p, I_q(p)\} = \{ap + bI_q(p) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subset V$

2 boyutlu düzlemdir. $r \in E$ alalım. O zaman

$$r = ap + bI_q^2(p)$$

$$I_q^2(p) = I_q(I_q(p)) = I_q(qp) = q(qp) = q^2p \quad (4.11)$$

$$q = q_0e_0 + q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3 \quad \text{için} \quad \alpha(q) = q_0e_0 - q_1e_1 - q_2e_2 - q_3e_3 \quad \text{dir.}$$

$$2q_0e_0 - \alpha(q) = q \quad (4.12)$$

$$N_q = q \cdot \bar{q} = q \cdot \alpha(q) \quad (4.13)$$

Eş. 4.11 den

$$I_q^2(p) = q(2q_0e_0 - \alpha(q))p$$

(4.12) ve (4.13) eşitliklerinden

$$= 2q_0 qp - q\alpha(q)p$$

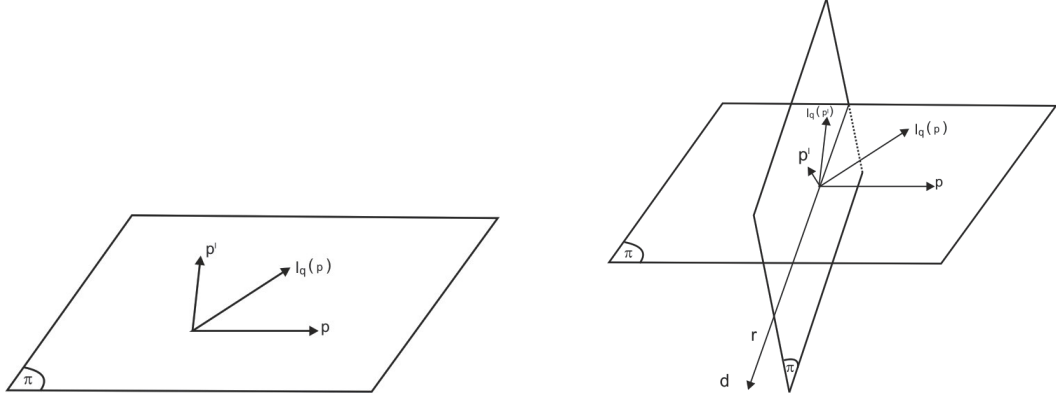
$$= 2q_0 I_q(p) - N_qp$$

Bu da bize I_q nun, $I_q(p)$ nin bulunduğu düzlemi değişmez bıraktığını gösterir.

Benzer şekilde r_q nun da bulunduğu düzlemi sabit bıraktığını gösterilebilir.

4.1 Teorem: q bir pseudo kuaterniyon ve $T(q) \neq 0$ olsun. I_q ve r_q lineer dönüşümleri altında değişmeyen 2-boyutlu düzlem ailelerine sahiptir. Bu ailelerin farklı iki tanesinin ara kesitinde sadece sıfır kuaterniyonu vardır [3].

İspat:



Eğer p , $I_q(p)$ ile lineer bağımsız p' kuaterniyonu alırsak, p' ve $I_q(p')$, I_q nun ikinci invaryant düzlemini gerer. (Burada seçilen q kuaterniyonunun vektörel kısmı $T_q \neq 0$ olmalıdır)

Şimdi p ve $I_q(p)$ nin gerdiği π invaryant düzlemi ile p' ve $I_q(p')$ tarafından gerilen π' invaryant düzlemi arasındaki bağlantıyı bulmak istiyoruz. Burada $\pi \cap \pi'$ de bir r kuaterniyonu olalım. $T_q \neq 0$ olduğundan r ve $I_q(r)$ nin lineer bağımsız olduğu Lemma 4.1den görülebilir.

r kuaterniyonu, π ve π' düzlemlerinin noktası olduğundan $I_q(r)$ de bu iki düzlemde yatar. Bunun nedeni π ve π' düzlemlerinin her ikisinin de I_q altında invaryant olmasıdır.

Böylece r ve $I_q(r)$, π ve π' düzlemlerini gerer.

Bu nedenle,

$$\pi = \pi' = \text{Sp} \{r I_q(r)\} \text{ olur.}$$

Bu ise p' nün p , $I_q(p)$ ile lineer bağımsız olması ile çelişir.

O halde kabulümüz yanlış $r \neq 0$ olacak şekilde $r \in \pi \cap \pi'$ yoktur.

O zaman $r = 0$ olmak zorundadır; $\pi \cap \pi' = \{0\}$ olur.

Aynı sonuçları r_q dönüşümü içinde benzer şekilde söyleyebiliriz. Bu gösterir ki I_q ve r_q ların her biri iki boyutlu düzlem ailelerine sahiptir. Bu iki düzlem ailesinin sıfırdan başka ortak q kuaterniyonu yoktur.

Düzlemlerin bu iki ailesinin her birinde sıfır kuaterniyonu içermeyen küme üzerinde bir denklik bağıntısı tanımlanabilir.

q ve q' vektörel kısımları sıfırdan farklı olan iki kuartiyon olsun. q nun sol invaryant ailesinin q' nun sağ invaryant ailesiyle ortak elemanlara sahip olduğunu aşağıdaki lemmadan görebilirsiniz.

4.3 Lemma: $\alpha(up) = -\alpha(p)u$ eşitliği geçerlidir [3].

$$\text{İspat : } p = S_p + T_p \quad u = T_u$$

$$\begin{aligned} \alpha(up) &= \alpha(T_u(S_p + T_p)) = \alpha(T_u S_p + T_u \wedge T_p - T_u T_p) \\ &= -T_u S_p - T_u \wedge T_p - T_u T_p \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} -\alpha(p).u &= -(S_p - T_p) T_u \\ &= -S_p T_u + T_p \wedge T_u - T_u T_p \end{aligned} \quad (4.15)$$

(4.14) ve (4.15) den $\alpha(up) = -\alpha(p)u$.

4.4 Lemma: q sıfırdan farklı bir kuaterniyon, u ise pür kuaterniyon olsun. O zaman p , $I_u(p)$ ve $r_u(p)$ ile ortogonaldır [3].

İspat:

$$p = p_0e_0 + p_1e_1 + p_2e_2 + p_3e_3 \quad \text{ve} \quad u = u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3$$

o zaman

$$I_u(p) = u.p \quad r_u(p) = pu \quad \text{şeklinde tanımlanmıştır.}$$

Olur. Buradan

$$x.\alpha(y) + y.\alpha(x) = 2.h(x,y)e_0$$

eşitliğinde

$$x = p, \quad y = I_u(p)$$

alırsak

$$2h(p, I_u(p))e_0 = p.\alpha(I_u(p)) + I_u(p).\alpha(p)$$

$$= p.\alpha(u.p) + u.p.\alpha(p)$$

olur.

$$\alpha(u) = -u \quad \text{ve} \quad \alpha(u.p) = -\alpha(p)u \quad \text{olduğundan}$$

$$2h(p, I_u(p))e_0 = -p(\alpha(p).u) + up.\alpha(p)$$

kuaterniyon çarpımında birleşme özelliği var olduğundan

$$(p\alpha(p))(-u + u) = 0$$

bulunur.

$$\|p\|^2.(-u + u) = 0$$

$$2h(x,y)e_0 = 0$$

Bu bize $I_u(p)$ ve $r_u(p)$ nin p ile ortogonal olduğunu gösterir.

$$4.4 \text{ Sonuç: } T_q.p = p. T_{q'} \quad [3]$$

4.5 Sonuç: 4.4 Sonuç'daki eşitlik kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$i) \quad [T_q, T_p] + p_0 T_q = [T_p, T_{q'}] + p_0 T_{q'}$$

$$ii) \quad p = \sum_{i=0}^3 p_i e_i \quad g(T_p, T_q - T_{q'}) = 0 \quad [3]$$

$$\text{İspat: } T_q p = [T_q, p] + p_0 T_q - h(T_q, p)e_0$$

$$p. T_{q'} = [p, T_{q'}] + p_0 T_{q'} - h(p, T_{q'})e_0$$

$$[T_q, T_p] + p_0 T_q - h(T_q, p)e_0 = [T_p, T_{q'}] + p_0 T_{q'} - h(p, T_{q'})e_0$$

(e_0, e_1, e_2, e_3) lineer bağımsız olduğundan

$$[T_q, T_p] + p_0 T_q = [T_p, T_{q'}] + p_0 T_{q'} \text{ dir.}$$

Ayrıca

$$h(T_q, p)e_0 = h(p, T_{q'})e_0$$

$$h(T_q, p)e_0 = h(p, T_{q'})e_0 = 0$$

$$h(p, T_q - T_{q'})e_0 = 0$$

$$h(T_p, T_q - T_{q'}) = 0 \text{ olur.}$$

(i) eşitliği p_0 içerdiğinden aşağıdaki iki hal söz konusudur.

I. Hal: $p_0 \neq 0$ olması hali:

$$[T_q, T_p] + p_0 T_q = [T_p, T_{q'}] + p_0 T_{q'}$$

$$T_q = q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3 \quad T_p = p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3$$

$$[T_p, T_q] + p_0 T_q = (q_2 p_3 - q_3 p_2 + p_0 q_1) e_1 + (q_3 p_1 - q_1 p_3 + p_0 q_2) e_2 + (q_1 p_2 - q_2 p_1 + p_0 q_3) e_3$$

$$[T_p, T_{q'}] + p_0 T_{q'} = (p_2 q'_3 - p_3 q'_2 + p_0 q'_1) e_1 + (p_3 q'_1 - p_1 q'_3 + p_0 q'_2) e_2 + (p_1 q'_2 - p_2 q'_1 + p_0 q'_3) e_3$$

$$q_2 p_3 - q_3 p_2 + q_1 p_0 = q'_3 p_2 - q'_2 p_3 + q'_1 p_0$$

$$q_3 p_1 - q_1 p_3 + q_2 p_0 = q'_1 p_3 - q'_3 p_1 + q'_2 p_0$$

$$q_1 p_2 - q_2 p_1 + q_3 p_0 = q'_2 p_1 - q'_1 p_2 + q'_3 p_0$$

şeklinde üç bilinmeyenli üç tane lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemini matris formunda

$$\begin{bmatrix} p_0 & p_3 & -p_2 \\ -p_3 & p_0 & p_1 \\ p_2 & -p_1 & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & p_0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q'_1 \\ q'_2 \\ q'_3 \end{bmatrix}$$

yazabiliriz. Buradan her iki tarafın transpozisini alırsak.

$$\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & p_0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q'_1 & q'_2 & q'_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 & p_3 & -p_2 \\ -p_3 & p_0 & p_1 \\ p_2 & -p_1 & p_0 \end{bmatrix}$$

buluruz.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} p_0 & p_3 & p_2 \\ p_3 & p_0 & p_1 \\ p_2 & p_1 & p_0 \end{vmatrix} &= p_0(p_0^2 + p_1^2) + p_3(p_3p_0 - p_1p_2) + p_2(p_3p_1 + p_0p_2) \\
&= p_0(p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) \\
&= p_0(\|p\|^2) \neq 0
\end{aligned}$$

olduğundan sistemin çözümü tektir.

Buradan da $T(q) = T_{q'} = T(p)$ 4.5 Sonuç'un (i) eşitliğinin çözümü olur.

II. Durum: $p_0 = 0$ ise sistemin katsayılar matrisinin rankı 2 dir. bu yüzden eşitlik tektir. Sistem homojen olmadığından önce sistemin doğruluğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q'_1 \\ q'_2 \\ q'_3 \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 + q'_1 \\ q_2 + q'_2 \\ q_3 + q'_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{bmatrix} &= 0
\end{aligned}$$

dır. rankı 2 olduğundan 1-parametrelili çözümü vardır. 4.5 Sonuç'dan

$$[T_q, T_p] = [T_p, T_{q'}]$$

$$[T_q, T_p] = -[T_{q'}, T_q]$$

$$[T_q + T_{q'}, T_p] = 0$$

$$T_q + T_{q'} = K.T_p$$

$$T_{q'} = K.T_p - T_q \quad (4.16)$$

bulunur. Burada K reel parametredir. Eş. 4.16, 4.5 Sonuç'un bir çözümüdür.

$$h(T_p, T_q - T_{q'}) = 0$$

aldığımızda,

$$h(T_p, T_q - (K.T_p - T_q)) = 0$$

$$h(T_p, 2.T_q - K.T_p) = 0$$

$$2h(T_p, T_q) - K.h(T_p, T_q) = 0$$

$$2\|T_p\| \cdot \|T_q\| \cdot \cos \eta - K\|T_p\|^2 = 0$$

$$T_{q'} = 2 \frac{\|T_q\|}{\|T_p\|} \cos \eta \cdot T_p - T_q \quad .$$

KAYNAKLAR

1. Hacısalihoğlu, H.H., “Kuaterniyonlar Teorisi”, Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi, *Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak. Yayınları*, Ankara, 78-126 (1983).
2. Ward, J.P., “Quaternions and Cayley Numbers Algebra and Applications”, *Kluwer Academic Publishers*, London, 54-102 (1997).
3. Nagaraj, M., Bharathi, K., “Geometry of Quaternionic and Pseudo-Quaternionic Multiplications,” *Indian J. Pure Appl. Math.*, 16(7) : 741-756 (1985).
4. Karadağ, M., ”Kuaterniyonik Lorentz Manifoldları Üzerinde Eğilim Çizgileri ve Karakterizasyonları”, Doktora Tezi, *İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Malatya, 43-46 (1999).
5. Hacısalihoğlu, H.H., “Vektör Uzaylarının Lineer Dönüşümleri ve Matrisler”, Lineer Cebir, *Ankara Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları*, Ankara, I: 298 (2000).
6. Agrawal, O. P., “Hamilton Operators and Dual Number Quaternions in Spectral Kinematik”, *Mech. Mach. Theory Col.*, 22(6), 569-575 (1987).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : MERCAN, Yılmaz
 Uyuğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 14.06.1977 Erzincan
 Medeni hali : Evli
 Telefon : 0 (505) 689 98 32
 e-mail : ysmercan@hotmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Y. Lisans	Gazi Üni./ Matematik Bölümü	2007
Lisans	Balıkesir Üni. /Matematik Öğrt. Böl.	2000
Lise	Edremit Lisesi	1994

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2000-2007	M.E.B.	Mat. Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Yüzme, Bilgisayar teknolojileri, Basketbol