



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**PSEUDO-PARALEL KENMOTSU MANİFOLDLARI
ÜZERİNE**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nurnisa KARAMAN

**DANIŞMAN
Prof. Dr. Mehmet ATÇEKEN**

AKSARAY, 2024

Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 212342003 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi Nurnisa KARAMAN tarafından hazırlanan “**PSEUDO-PARALEL KENMOTSU MANİFOLDLARI ÜZERİNE**” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Mehmet ATÇEKEN

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Doç. Dr. Tuğba MERT

Sivas Cumhuriyet Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Doç. Dr. Gülsüm YÜCA

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 06/02/2024

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Mehmet Ali HINIS

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinallliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Nurnisa KARAMAN

ETHICAL STATEMENT

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Without being bound by a particular time, I accept all moral and legal consequences of any detection contrary to the aforementioned statement.

Signature

Nurnisa KARAMAN

TEŐEKKÖR

Bu tez alıőmasında desteğini, emeğini esirgemeyen değerli danışman hocam Prof. Dr. Mehmet ATÇEKEN'e, fikirleriyle ve gÖrüşleriyle bana destek olan değerli hocam Do. Dr. Tuğba MERT'e sonsuz saygı ve teőekkÖrlerimi sunarım. Çalıőmalarım boyunca benden maddi manevi desteğini esirgemeyen eőime, annem, babam ve kardeőime sonsuz teőekkÖr eder, sevgilerimi sunarım.

Nurnisa KARAMAN

AKSARAY, 2024

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	i
İÇİNDEKİLER.....	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	v
1. GİRİŞ VE LİTERATÜR ÖZETİ.....	6
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	8
2.1 Temel Tanımlar	8
2.2. Manifoldlar	11
2.3. Altmanifoldlar.....	20
3. KENMOTSU MANİFOLDLARI.....	23
3.1 Hemen Hemen Kontak Metrik Manifoldlar	23
3.2. Kenmotsu Manifoldlar.....	25
4. KENMOTSU MANİFOLDLARIN EĞRİLİK TENSÖRLERİ.....	30
4.1 Kenmotsu Manifoldların Flatlığı	30
4.2. Kenmotsu Manifoldların Riemann Eğrilik Tensörü.....	32
4.3. Kenmotsu Manifoldların Ricci Eğrilik Tensörü.....	38
4.4. Kenmotsu Manifoldların Concircular Eğrilik Tensörü.....	40
4.5. Kenmotsu Manifoldların Projektif Eğrilik Tensörü.....	44
4.6. Kenmotsu Manifoldların W_0 Eğrilik Tensörü.....	48
5. PSEUDO-PARALEL ALTMANİFOLDLAR.....	53
5.1 Kenmotsu Manifoldların Pseudo-paralel Altmanifoldları.....	55
5.2. Kenmotsu Manifoldların 2 Pseudo-paralel Altmanifoldları.....	57
5.3. Kenmotsu Manifoldların Ricci Genelleştirilmiş Pseudo-paralel Altmanifoldları.....	61
5.4. Kenmotsu Manifoldların 2 Ricci Genelleştirilmiş Pseudo-paralel Altmanifoldları.....	63
5.5. Kenmotsu Manifoldların W_8 -Eğrilik Tensörü Üzerinde Pseudo-paralel Altmanifoldları.....	66
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	76
KAYNAKLAR.....	77
ÖZGEÇMİŞ.....	80

YÜKSEK LİSANS TEZİ

PSEUDO-PARALEL KENMOTSU MANİFOLDLARI ÜZERİNE

Nurnisa KARAMAN

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mehmet ATÇEKEN

ÖZET

Bu tezde Kenmotsu manifoldları, Kenmotsu manifoldların eğrilik tensörleri ve Kenmotsu manifoldların pseudo-paralel altmanifoldlarını araştırdık. Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezde ele alınan problemin önemi, güncelliği ve konu ile ilgili yapılmış olan çalışmalar hakkında literatür taraması yapılmıştır. İkinci bölümde tez problemi için gerekli olan bazı önemli temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde hemen hemen kontak metrik manifoldlar ve bu manifoldların özel bir sınıfı olan Kenmotsu manifoldlar ele alınmıştır. Tezin dördüncü ve beşinci bölümleri orijinal olan kısımlardır. Dördüncü bölümde Kenmotsu manifoldların Riemann, Ricci, concircular ve projektif eğrilik tensörleri yardımıyla bazı eğrilik koşulları altında karakterizasyonları belirlenmiştir. Beşinci bölümde ise Kenmotsu manifoldların invaryant pseudoparalel altmanifoldları çeşitlerine göre sınıflandırılmıştır. Kenmotsu manifoldunun Pseudo-paralel, 2 pseudo-paralel, Ricci genelleştirilmiş pseudo-paralel ve 2 Ricci genelleştirilmiş pseudo-paralel altmanifoldları detaylı bir şekilde araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kenmotsu Manifold, İnvaryant Altmanifold, Pseudo-paralel Altmanifold.

Şubat, 2024; 80 sayfa

M.Sc. THESIS

ON PSEUDO-PARALLEL KENMOTSU MANIFOLDS

Nurnisa KARAMAN

**Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Prof. Dr. Mehmet ATÇEKEN

ABSTRACT

In this thesis, we investigated Kenmotsu manifolds, the curvature tensors of Kenmotsu manifolds, and the pseudo-parallel submanifolds of Kenmotsu manifolds. This thesis consists of five chapters. The first chapter includes a literature review on the importance of the problem addressed in the thesis, its relevance, and the studies conducted on the subject. The second chapter provides some essential fundamental definitions and theorems necessary for the thesis problem. The third chapter focuses on almost contact metric manifolds and a particular class of these manifolds known as Kenmotsu manifolds. The fourth and fifth chapters contain original contributions. In the fourth chapter, characterizations of Kenmotsu manifolds under certain curvature conditions are determined using Riemann, Ricci, concircular, and projective curvature tensors. The fifth chapter classifies the invariant pseudo-parallel submanifolds of Kenmotsu manifolds based on their types. Pseudo-parallel, 2 pseudo-parallel, Ricci generalized pseudo-parallel, and 2 Ricci generalized pseudo-parallel submanifolds of Kenmotsu manifolds are thoroughly investigated in this chapter.

Keywords: Kenmotsu Manifold, Invariant Submanifold, Pseudo-parallel Submanifold.

February, 2024; 80 pages

SİMGELER VE KISALTMALAR

M	Manifold
$\bar{M}$	Altmanifold
g	Metrik Tensörü
$[,]$	Lie Parantez Operatörü
$T_p(M)$	Tanjant Uzay
$\chi(M)$	Vektör Alanları Uzayı
∇	Levi-Civita Konneksiyonu
$\bar{\nabla}$	Altmanifoldun Levi-Civita Konneksiyonu
$\nabla^\perp$	Normal Konneksiyon
σ	İkinci Temel Form
R	Riemann Eğrilik Tensörü
$\bar{R}$	Altmanifoldun Riemann Eğrilik Tensörü
$\tilde{C}$	Quasi-Konformal Eğrilik Tensörü
C	Konformal Eğrilik Tensörü
P	Projektif Eğrilik Tensörü
$\tilde{Z}$	Concircular Eğrilik Tensörü
r	Skaler Eğrilik
φ	Tensör Alanı
ξ	Birim Vektör Alanı
η	1-Form
$\wedge_A$	Endomorfizm
$\otimes$	Tensör Çarpımı
S	Ricci Tensörü
Q	Ricci Operatörü

1. GİRİŞ

S. Tano 1969 yılında bir hemen hemen kontak metrik manifoldu, manifoldun c -sabit ϕ -esitsel eğriliğine göre sınıflandırmıştır [1]. S. Tano bu çalışmasında $c > 0$ ise Riemann manifoldunun bir Sasakian manifold olduğunu, $c = 0$ ise Riemann manifoldunun bir Kaehler manifoldu ile bir çemberin ya da bir doğrunun çarpım manifoldu olduğunu, $c < 0$ ise Riemann manifoldunun reel eksen ile kompleks düzlemin katlı çarpımından oluştuğunu göstermiştir.

Kenmotsu manifoldlar geometrik olarak Riemann manifoldunun özel bir türüdür. Kenmotsu manifoldlar, Kaehler manifoldlarına benzerlik gösteren fakat Kaehler yapı yerine Kenmotsu yapıda denilen özel bir geometrik yapıya sahiptirler. Bir Kenmotsu manifoldu, (M, ϕ, ξ, η, g) şeklinde bir beşli ile ifade edilir. Burada

- M bir diferensiyellenebilir manifolddur.
- ϕ bir 1-formdur ve $d\phi = 0$ olmak üzere ϕ bir kontak formudur.
- ξ bir vektör alanıdır ve $d\eta = g$ olmak üzere η bir 1-formdur.
- g bir Riemann metriğidir.

Bu yapıda, ϕ ile tanımlanan kontak yapı, ξ vektör alanıyla ilişkilendirilmiş bir g metriği tarafından belirlenir. Ayrıca, ϕ ve ξ arasındaki ilişki η formuyla ifade edilir. ϕ ve ξ arasındaki bağlantı ve bu bağlantının Riemann metriği üzerindeki etkileşimi Kenmotsu manifoldunun temel özelliğini vermektedir. Bu yapı, Riemann metriği ile kontak yapı arasında belirli türden bir uyum içerir.

Kenmotsu manifoldların çalışılması geometrik olarak oldukça önemlidir. Özellikle, bu tür manifoldlar, Kaehler manifoldlarından farklı yapıları ile ilgi çeker ve bu farklılık, farklı geometrik özelliklerin incelenmesine olanak tanır.

Bu yapısal özelliklerin incelenmesi ve Kenmotsu manifoldların geometrisinin anlaşılması, diferensiyel geometri ve matematiksel fizik gibi alanlarda uygulamalı araştırmalarda önemli bir rol oynar.

G. Pitiş, "Geometry of Kenmotsu Manifolds" adlı kitabında Kenmotsu manifoldlarının ve altmanifoldlarının üzerinde bir çok önemli özellikleri incelemiş ve ortaya çıkartmıştır [3].

Bu tez çalışmasında, Kenmotsu manifoldlarının eğrilik tensörleri yardımıyla farklı karakterizasyonlarının elde edilmesi ve invaryant altmanifoldlarının bazı eğrilik koşullarına göre hangi önemli özelliklere sahip olacağının araştırılması amaçlanmıştır.

J. Deprez 1985 yılında ilk kez semiparalel immersiyon kavramını tanımlamış ve Öklid uzayda semiparalel hiperyüzeylerin sınıflandırmasını yapmıştır [4].

1999 yılında ise A.C. Asperti, G.A. Lobos ve F. Mercuri, bu semiparalel immersiyon tanımını genelleştirerek pseudoparalel altmanifold kavramını ortaya atmışlardır [5].

Daha sonraki yıllarda bir çok geometrici tarafından bu önemli kavramlar farklı geometrik manifoldlar üzerinde incelenerek, bu kavramların çok önemli özellikleri ve bu özelliklere göre geometrik manifoldların karakterizasyonları ortaya çıkartılmıştır.

Yukarıda bahsettiğimiz bir çok çalışmadan motive alan bu tezin dördüncü ve beşinci bölümlerinde bir Kenmotsu manifoldun eğrilikleri ve invaryant altmanifoldları üzerinde pseudo-paralellik koşulları araştırılmış ve bir çok orjinal sonuç elde edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2. 1. Temel Tanımlar

Tanım 2.1.1: X bir küme ve τ da X in kuvvet kümesinin bir alt kümesi olsun. Eğer

- i. $X, \emptyset \in \tau$,
- ii. τ da alınan sonlu sayıda elemanların birleşimi yine τ ya aittir,
- iii. τ da alınan sonlu sayıda elemanların kesişimi τ ya aittir,

aksiyomları sağlanırsa τ ya X üzerinde bir topoloji denir. (Aslım, 1988).

Tanım 2.1.2: τ topolojisi ile donatılmış X kümesine veya (X, τ) ikilisine topolojik uzay denir.

Tanım 2.1.3: τ nun her elemanına, X üzerinde τ tarafından tanımlanan topolojiye göre bir açık küme denir.

Tanım 2.1.4: X uzayına göre tümleyeni açık olan kümeye τ tarafından tanımlanan topolojiye göre kapalı küme denir.

Tanım 2.2.5: (X, τ) bir topolojik uzay ve X in bazı açık alt kümelerinin sınıfı B olsun. X in her açık altkümesi B nin elemanlarının herhangi bir birleşimi olarak yazılabiliyor ise, B ye X uzayının bir bazı denir.

Tanım 2.1.6: (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.

$$\tau_A = \{G' = A \cap G \mid G \in \tau\}$$

kümeler sınıfı A üzerinde bir topolojik yapıdır. A üzerinde τ tarafından türetilen τ_A topolojisine, X uzayının indirgenen (relatif, bünyesel) topolojisi denir. Bu durumda, (A, τ_A) topolojik uzayına (X, τ) uzayının alt uzayı denir (Aslım, 1988).

Tanım 2.1.7: X boştan farklı bir küme ve $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall x, y, z \in X$ için

- i. $x \neq y$ için $d(x, y) > 0$

- ii. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- iii. $d(x, y) = d(y, x)$
- iv. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

aksiyomları sağlanıyor ise d fonksiyonuna Y üzerinde bir metrik denir (Aslım, 1988).

Tanım 2.1.8: X bir topolojik uzay, $x \in X$ olsun. x noktasını içeren bir U altkümesinin her N üst kümesine x noktasının bir komşuluğu denir (Aslım, 1988).

Tanım 2.1.9: (X, τ) ve (X', τ') herhangi iki topolojik uzay, $f: X \rightarrow X'$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. X' uzayında $f(x_0)$ ın her N' komşuluğu için $f(N) \subset N'$ olacak şekilde, X uzayında x_0 ın bir N komşuluğu varsa, f fonksiyonuna x_0 noktasında τ ve τ' ye göre sürekli, $\tau - \tau'$ sürekli veya kısaca süreklidir denir (Aslım, 1988).

Tanım 2.1.10: X topolojik uzayının her farklı x, y noktası için $N \cap M = \emptyset$ olacak şekilde x noktasının bir N komşuluğu ve y noktasının bir M komşuluğu varsa, X topolojik uzayına bir Hausdorff uzayı (kısaca H-uzayı) denir (Aslım, 1988).

Tanım 2.1.11: (X, τ) bir topolojik uzayının açık alt kümelerinin sınıfı $\mathcal{g}$ olsun. Eğer

$$X \in \bigcup_{g \in \mathcal{g}} g$$

ise $\mathcal{g}$ sınıfına (X, τ) uzayının bir açık örtüsü denir. Eğer $\mathcal{g}$ nin bir alt kümesi X uzayını örterse, bu alt kümeye (X, τ) nın bir açık alt örtüsü denir (Aslım, 1988).

Tanım 2.1.12: (X, τ) topolojik uzayının her $\mathcal{g}$ açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa (X, τ) uzayına kompakt uzay denir.

Tanım 2.1.13: X topolojik uzayının her x noktası X uzayında kompakt olan bir komşuluğa sahip ise, X uzayına yerel kompakt uzay denir.

Kompakt bir uzay yerel kompakt uzaydır. Fakat tersi doğru değildir.

Tanım 2.1.14: (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. (A, τ_A) uzayı kompakt ise, A kümesine X uzayının kompakt alt kümesi denir.

Tanım 2.1.15: (X, τ) topolojik uzayı boş olmayan ayrık açık iki kümenin birleşimi olarak yazılamıyorsa, (X, τ) uzayına bağlantılıdır aksi halde bağlantısızdır denir.

Tanım 2.1.16: (X, τ) bir topolojik uzay ve (X, τ) topolojik uzayının açık örtüleri sırasıyla $U = \{u_\alpha\}_{\alpha \in I}$ $V = \{v_\beta\}_{\beta \in J}$ olsun. Eğer V nin her bir açık kümesi U nun bir açık kümesi içinde bulunuyorsa V ye U nun inceltiştir denir.

Tanım 2.1.17: Bir (X, τ) topolojik uzayı Hausdorff ve her açık örtüsünün bir lokal sonlu inceltmesi varsa topolojik uzaya parakompakttır denir.



2.2. Manifoldlar

Tanım 2.2.1: X ve X' topolojik uzaylar arasındaki f fonksiyonu biyektif (yani 1-1 ve örten), sürekli ve f^{-1} tersi de sürekli ise, f fonksiyonuna bir homeomorfizma (topolojik dönüşüm) denir. Bu halde X ve X' uzaylarına homeomorfiktirler (topolojik olarak eşitler) denir (Aslım, 1988).

Tanım 2.2.2: X , Hausdorff uzayı olmak üzere herhangi bir $U \subset X$ açık kümesinden $V \subset \mathbb{R}^n$ bölgesine tanımlanan,

$$\varphi: U \rightarrow V$$

homeomorfizmine, X de n – boyutlu koordinat sistemi veya harita, U açık kümesine de, φ haritasının koordinat komşuluğu veya koordinat bölgesi denir. Harita (U, φ) şeklinde gösterilir (Hacısalıhoğlu, 1980).

Eğer, $x \in U$ ise

$$\varphi(x) = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$$

dir. Buradaki $x^1, \dots, x^n$ reel sayılarına φ haritasında x noktasının koordinatları denir.

Tanım 2.2.3: M bir topolojik uzay olsun. M 'nin her noktasının E^n 'e veya E^n 'in bir U açık alt kümesine homeomorf olan bir koordinat komşuluğu varsa, M 'ye n – boyutlu topolojik manifold denir (Hacısalıhoğlu, 1980).

Tanım 2.2.4: X Hausdorff uzayı ve k da $k \geq 0$ şartını sağlayan tam sayı olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha): \alpha \in A, U_\alpha \subset X\}$ lokal koordinat ailesine X üzerinde C^k sınıfından bir atlas denir.

- i. Lokal haritaların U_α bölgesi X 'i örter. Yani X, n – boyutlu topolojik manifolddur.
- ii. $\forall \alpha, \beta \in A$ için, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ olacak biçimde $\forall \alpha, \beta \in A$ için

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

dönüşümü C^k sınıfındandır (Hacısalıhoğlu, 1980).

Tanım 2.2.5: M bir n –boyutlu topolojik manifold ve $S = \{U_\alpha, \psi_\alpha\}_\alpha$ de M ’nin bir atlası olsun. Eğer S atlası aşağıdaki özelliğe sahip ise S ’ye C^r , $r \geq 1$, sınıfındandır denir. $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere, $\forall \alpha, \beta \in A$ için

$$\phi_{\alpha\beta} = \psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}: \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

ve

$$\phi_{\beta\alpha} = \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}: \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

fonksiyonları C^r sınıfındandır. Eğer S atlası M üzerinde C^r sınıfından ise S ’ye M üzerinde bir C^r sınıfından diferensiyellenebilir yapı denir (Hacısalıhoğlu, 1980).

Tanım 2.2.6: M bir n –boyutlu topolojik manifold ve M ’nin S atlası C^r sınıfından olsun. O zaman M ’ye n –boyutlu diferensiyellenebilir manifold denir (Hacısalıhoğlu, 1980).

Tanım 2.2.7: $\phi: M^m \rightarrow N^n$ diferensiyellenebilir dönüşümünün tersi var ve tersi de diferensiyellenebilir ise ϕ dönüşümüne diffeomorfizma adı verilir. M ve N manifoldları verildiğinde, M ’den N ’ye giden bir diffeomorfizma var ise M manifoldu, N manifolduna diffeomorfiktir denir.

Tanım 2.2.8: M bir manifold ve $p \in M$ olsun. p –noktasındaki diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi $C(p)$ olmak üzere, $V_p: C(p) \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü

- i. $V_p(\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2) = \lambda_1 V_p(h_1) + \lambda_2 V_p(h_2) \quad \forall h_1, h_2 \in C(p), \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
- ii. $V_p(h_1 \cdot h_2) = V_p(h_1) \cdot h_2(p) + h_1(p) V_p(h_2)$

özelliklerini sağlıyorsa V_p ’ye M ’nin p noktasındaki tanjant vektörü denir.

M ’nin p noktasındaki tanjant vektörlerin kümesi $T_p(M)$ ile gösterilir. Buna göre

$T_M(p) = \{\overrightarrow{V_p} \mid \overrightarrow{V_p}: C^\infty(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{\text{lineer ve leibnitz}} \mathbb{R}\}$ ile gösterilir. Bu kümede iç ve dış işlemler sırasıyla,

$$\oplus: T_M(p) \times T_M(p) \rightarrow T_M(p)$$

$$(\vec{V}_p, \vec{W}_p) \rightarrow \vec{V}_p \oplus \vec{W}_p: C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\vec{V}_p \oplus \vec{W}_p)[h_1] = \vec{V}_p[h_1] + \vec{W}_p[h_1]$$

ve

$$\odot: \mathbb{R} \times T_M(p) \rightarrow T_M(p)$$

$$(\lambda, \vec{V}_p) \rightarrow \lambda \vec{V}_p: C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\lambda \vec{V}_p)[h_1] = \lambda \vec{V}_p[h_1], \quad \forall h_1 \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklinde tanımlanırlar. Bu işlemlere göre $T_p(M)$ reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu uzaya M 'nin p noktasındaki tanjant uzayı denir (Hırsalıhoğlu, 1980).

Tanım 2.2.9: M bir n – boyutlu manifold ve $p \in M$ noktasındaki tanjant uzay $T_M(p)$ olsun.

$$T_M^*(p) = \{W_p | W_p: T_M(p) \xrightarrow{\text{lineer}} \mathbb{R}\}$$

uzayına $T_M(p)$ 'nin p noktasındaki dual uzayı veya kotanjant uzayı denir.

Tanım 2.2.10: M , n – boyutlu bir manifold ve M manifoldunun kotanjant uzayı $T_M^*(p)$ olsun. $W(p) \in T_M^*(p)$ elemanına bir kovektör denir. Her bir W kovektörü; U , M 'nin bir koordinat komşuluğu olmak üzere

$$W: U \rightarrow \bigcup_{p \in U} T_M^*(p)$$

$$p \rightarrow W(p): T_M(p) \rightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlı lineer bir fonksiyon olup, M üzerinde bir 1 – form adını alır (O’Neill, 1983).

Tanım 2.2.11: Reel sayılar cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı V ve V^* , V nin duali olsun.

$$L(V^r + V^{*s}; \mathbb{R}) = \{h_1 | h_1: V^r \times V^{*s} \xrightarrow{(r+s)\text{lineer}} \mathbb{R}$$

kümesinde iç ve dış işlemler sırasıyla

$$(h_1 + g)(\alpha_1, \dots, \alpha_1, \beta_1, \dots, \beta_s) = h_1(\alpha_1, \dots, \alpha_1, \beta_1, \dots, \beta_s) \\ + h_2(\alpha_1, \dots, \alpha_1, \beta_1, \dots, \beta_s)$$

ve

$$(\lambda h_1)(\alpha_1, \dots, \alpha_1, \beta_1, \dots, \beta_s) = \lambda h_1(\alpha_1, \dots, \alpha_1, \beta_1, \dots, \beta_s)$$

Şeklinde tanımlanır. Bu uzaya r . mertebeden kovaryant, s . mertebeden kontravaryant tensör uzayı denir. Bu uzayın elemanlarına da (r, s) mertebeli tensör denir (Boothby, 1986).

Tanım 2.2.12: M diferensiyellenebilir bir manifold ve M üzerindeki diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olsun.

- i. $X(\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2) = \lambda_1 X(h_1) + \lambda_2 X(h_2) \forall h_1, h_2 \in C^\infty(M, \mathbb{R}), \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
- ii. $X(h_1 \cdot h_2) = X(h_1) \cdot h_2 + h_1 X(h_2)$

özelliklerini sağlıyorsa X ’e M üzerinde bir vektör alanı denir. M üzerindeki vektör alanların cümlesi $\chi(M)$ ile gösterilir (Boothby, 1986).

Tanım 2.2.13: V bir F -cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere

$$[\]: V \times V \rightarrow V$$

$$(X, Y) \rightarrow [X, Y]$$

dönüşümü

1) alterne yani $[X, Y] = -[Y, X]$

2) bilineer yani her $a, b \in F$ için

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$$

ve

$$[X, aY + bZ] = a[X, Y] + b[X, Z]$$

3) $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$

şartlarını sağlıyorsa bu dönüşüme F-cismi üzerinde bir Lie-operatörü denir.

Örnek2.2.1. M bir manifold ve M üzerindeki vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ olmak üzere $Y_1, Y_2 \in \chi(M)$ için

$$[,]: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M) \quad \forall h_1 \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$[Y_1, Y_2] = Y_1(Y_2 h_1) - Y_2(Y_1 h_1)$$

ile tanımlanan fonksiyona Y_1 ve Y_2 nin Lie (bracket) operatörü denir. Lie operatörü, $\forall h_1, h_2 \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve $\forall Y_1, Y_2, Y_3 \in \chi(M)$ olmak üzere,

- i. $[Y_1, Y_2] h_1 \in C^\infty(M, \mathbb{R})$
- ii. $[h_1 Y_1, h_2 Y_2] = h_1 h_2 [Y_1, Y_2] + h_1 (Y_1 [h_2]) - h_2 (Y_2 [h_1]) Y_1$
- iii. $[Y_1, Y_2] = -[Y_2, Y_1]$
- iv. $[[Y_1, Y_2], Y_3] + [[Y_2, Y_3], Y_1] + [[Y_3, Y_1], Y_2] = 0$

özelliklerini sağlar (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.2.14: M ve $\bar{M}$ m ve n boyutlu diferensiyellenebilir manifoldlar ve

$f: M \rightarrow \bar{M}$ fonksiyonu p noktasında diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$f_*: T_M(p) \rightarrow T_{\bar{M}}(f(p))$$

$$V_p \rightarrow f_*|_p(V_p) = (\vec{V}_p[f_1]|_{f(p)}, \dots, \vec{V}_p[f_n]|_{f(p)})$$

ile tanımlı f_* dönüşümüne f nin türev dönüşümü denir. Eğer $g \in C(\bar{M}, \mathbb{R})$, $f(p)$ nin komşuluğunda diferensiyellenebilir bir fonksiyon ise

$$(f_*(V_p))g = V_p(g \circ f)$$

dir (Hacısalıhoğlu, 1980).

Teorem 2.2.1: Manifoldlar arasındaki türev dönüşümü lineerdir.

Tanım 2.2.15: M bir manifold ve g, M üzerinde $(2,0)$ mertebeli tensör alanı olsun.

Eğer g tensör alanı her $Y_1, Y_2 \in \chi(M)$ için

- i. $g(Y_1, Y_2) = g(Y_2, Y_1)$
- ii. $g(Y_1, Y_1) \geq 0$ ve $g(Y_1, Y_1) = 0 \Leftrightarrow Y_1 = 0$

şartları sağlanıyorsa g ye Riemann metriği denir. g Riemann metriği ile birlikte tanımlı bir manifoldda Riemann manifoldu denir. Bir M manifoldu üzerindeki g Riemann metriği $T_M(p)$ üzerinde iç çarpım ile tanımlanır.

$\{x_1, \dots, x_n\}$ M de lokal koordinat sistemi olsun. Burada g nin bu lokal koordinat sistemine göre bileşenleri,

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}, \frac{\partial y}{\partial x_j}\right)$$

şeklinde dir. Burada $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p, 1 \leq i \leq n, T_M(p)$ nin bir bazıdır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.16: M bir diferansiyellenebilir manifold ve M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ olmak üzere;

$$\nabla: \chi(M) \times \chi(M) \xrightarrow{\text{bilineer}} \chi(M)$$

$$(Y_1, Y_2) \longrightarrow \nabla(Y_1, Y_2) = \nabla_{Y_1} Y_2$$

dönüşümü $\forall h_1, h_2 \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve $\forall Y_1, Y_2, Y_3 \in \chi(M)$ için,

- i. $\nabla_{Y_1}(Y_2 + Y_3) = \nabla_{Y_1}Y_2 + \nabla_{Y_1}Y_3$
- ii. $\nabla_{h_1Y_1+h_2Y_2}Y_3 = h_1\nabla_{Y_1}Y_3 + h_2\nabla_{Y_2}Y_3$
- iii. $\nabla_{Y_1}(h_1Y_2) = h_1\nabla_{Y_1}Y_2 + Y_1(h_1)Y_2$

özelliklerini sağlıyorsa, ∇ ya M üzerinde bir afin koneksiyon, ∇_{Y_1} e de Y_1 e göre kovaryant türev operatörü denir(Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.2.17: (M, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde tanımlanan bir afin koneksiyon olsun. O zaman $\forall Y_1, Y_2, Y_3 \in \chi(M)$ olmak üzere ∇ dönüşümü ;

- i. $\nabla_{Y_1}Y_2 - \nabla_{Y_2}Y_1 = [Y_1, Y_2]$ (Koneksiyonun sıfır torsiyon özelliği)
- ii. $Y_1g(Y_2, Y_3) = g(\nabla_{Y_1}Y_2, Y_3) + g(Y_2, \nabla_{Y_1}Y_3)$ (Koneksiyonun metrikle bağdaşma özelliği)

şartlarını sağlıyorsa ∇ ya M üzerinde sıfır torsiyonlu koneksiyon, (Riemann koneksiyonu) veya Levi-Civita konneksiyonu denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.2.18: (M, g) , n – boyutlu Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde tanımlanan Levi-Civita koneksiyonu olmak üzere $\forall Y_1, Y_2, Y_3 \in \chi(M)$ için,

$$2g(\nabla_{Y_1}Y_2, Y_3) = Y_1g(Y_2, Y_3) + Y_2g(Y_3, Y_1) - Y_3g(Y_1, Y_2) - g(Y_1, [Y_2, Y_3]) - g(Y_2, [Y_1, Y_3]) + g(Y_3, [Y_1, Y_2])$$

ile tanımlanan ifadeye Kozsul formülü adı verilir.

Tanım 2.2.19: $U \subset M$ üzerinde Γ_{ij}^k fonksiyonları,

$$\nabla_i \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \right) = \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \right)$$

olmak üzere Γ_{ij}^k katsayılarına ∇ nın konneksiyon katsayıları (ya da Christoffel sembolleri) denir.

Tanım 2.2.20: (M, g) bir Riemann manifoldu, ∇ da M üzerinde tanımlanan Levi-Civita konneksiyonu olsun.

$$R: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$R(Y_1, Y_2)Y_3 = \nabla_{Y_1} \nabla_{Y_2} Y_3 - \nabla_{Y_2} \nabla_{Y_1} Y_3 - \nabla_{[Y_1, Y_2]} Y_3$$

ile tanımlanan R fonksiyonu M üzerinde bir $(3, 1)$ - tipinde tensör alanıdır. Bu tensör M 'nin Riemann eğrilik tensörü olarak adlandırılır (O'Neill, 1983).

$\forall Y_4 \in \chi(M)$ için $K(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) = g(R(Y_1, Y_2)Y_3, Y_4)$ tensörüne de M 'nin Riemann-Christoffel eğrilik tensörü adı verilir (O'Neill, 1983).

$\forall Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 \in \chi(M)$ Riemann eğrilik tensörü aşağıdaki özelliklere sahiptir.

- i. $R(Y_1, Y_2)Y_3 = -R(Y_2, Y_1)Y_3$
- ii. $g(R(Y_1, Y_2)Y_4, Y_5) = -g(R(Y_1, Y_2)Y_5, Y_4)$
- iii. $R(Y_1, Y_2)Y_3 + R(Y_2, Y_3)Y_1 + R(Y_3, Y_1)Y_2 = 0$
- iv. $g(R(Y_1, Y_2)Y_4, Y_5) = g(R(Y_4, Y_5)Y_1, Y_2)$

Tanım 2.2.21: (M, g) , m -boyutlu Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}, \chi(M)$ in bir bazı olsun.

$$Q: \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$Y_1 \rightarrow Q(Y_1) = QY_1 = - \sum_{i=1}^m R(e_i, Y_1)e_i$$

biçiminde tanımlanan Q operatörüne M 'nin Ricci operatörü denir.

Tanım 2.2.22: $(M, g), m$ - boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}, \chi(M)$ de lokal ortonormal vektör alanları olsun.

$$S: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$(Y_1, Y_2) \rightarrow S(Y_1, Y_2) = \sum_{i=1}^m g(R(e_i, Y_1)Y_2, e_i)$$

şeklinde tanımlı $(2, 0)$ - tipindeki tensör alanına M üzerinde Ricci eğrilik tensörü adı verilir (Yano ve Kon, 1983).

Tanım 2.2.23: (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. $T_M(p)$ tanjant uzayının iki boyutlu alt uzayı Π olmak üzere $V, W \in \Pi$ tanjant vektörleri için Q fonksiyonu,

$$Q(V, W) = g(V, V)g(W, W) - g(V, W)^2$$

biçiminde tanımlansın. $Q(V, W) \neq 0$ olmak üzere,

$$K(V, W) = \frac{g(R(V, W)W, V)}{Q(V, W)}$$

olup buna Π nin kesit eğriliği denir ve $K(\Pi)$ ile gösterilir (O'Neill, 1983).

$\forall p \in M$ ve $V_p, W_p \in T_M(p)$ için $K(V_p, W_p)$ sabit ise M 'ye sabit kesit eğrilikli uzay veya reel uzay form denir.

Bu halde M Riemann manifoldu reel uzay form ise M 'nin R Riemann eğrilik tensörü

$$R(Y_1, Y_2)Y_3 = c\{g(Y_2, Y_3)Y_1 - g(Y_1, Y_2)Y_3\}$$

şeklindedir.

Tanım 2.2.24: (M, g) , m – boyutlu Riemann manifoldu olsun. $\forall Y_1, Y_2 \in M$ için

$$S(Y_1, Y_2) = \lambda g(Y_1, Y_2)$$

olacak biçimde M üzerinde λ fonksiyonu varsa, yani M nin Ricci tensörü S simetrik tensör g nin bir katı ise M 'ye Einstein manifoldu adı verilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.25: (M, g) , m –boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, \dots, e_m\}$ lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere

$$r = \sum_{i=1}^m S(e_i, e_i)$$

değişkenine M 'nin skaler eğriliği denir (O'Neill, 1983).

2.3 Altmanifoldlar

Tanım 2.3.1: M ve $\bar{M}$ sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldlar olsun. $f: M \rightarrow \bar{M}$ şeklinde tanımlı C^∞ dönüşümü için

$$\text{boy}(f_*(T_M(p))) = q$$

ise f nin $p \in M$ noktasındaki rankı q olup, $\text{rank}(f) = q$ ile gösterilir. Eğer

$$\text{boy}M = \text{rank}(f)$$

ise f ye immersiyon (daldırma) denir. Bu durumda M ye de $\bar{M}$ nin immersed altmanifoldu denir.

f immersiyonu bire-bir ise f ye imbedding (gömme), M ye de $\bar{M}$ nin gömülen altmanifoldu yada altmanifoldu denir (Chen, 1973).

Tanım 2.3.2: (M, g) ve $(\bar{M}, \bar{g})$ sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldları, $f: M \rightarrow \bar{M}$ bir immersiyon olsun. Her $X, Y \in T_M(P)$ için

$$\bar{g}(f_{*p}X, f_{*p}Y) = g(X, Y)$$

ise f ye izometrik immersiyon (metrik koruyan immersiyon) adı verilir (Chen, 1973).

Tanım 2.3.3: M ve $\bar{M}$ sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldlar olmak üzere $M, \bar{M}$ manifoldunun bir altmanifoldu olsun. ∇ ve $\bar{\nabla}$ sırasıyla M ve $\bar{M}$ de kovaryant türevler olsun. Böylece Y_1 ve Y_2 , M üzerinde vektör alanları olmak üzere

$$\sigma: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi^\perp(M),$$

$$\bar{\nabla}_{Y_1} Y_2 = \nabla_{Y_1} Y_2 + \sigma(Y_1, Y_2) \quad (2.3.1)$$

biçiminde Gauss eşitliği elde edilir. Burada $\nabla_{Y_1} Y_2$ ve $\sigma(Y_1, Y_2)$, $\bar{\nabla}_{Y_1} Y_2$ nin sırasıyla teğet ve normal bileşenleridir. Burada σ ya M nin ikinci temel formu denir. Eğer özel olarak $\sigma = 0$ ise M ye total geodeziktir denir (Chen, 1973).

Tanım 2.3.4: M ve $\bar{M}$ sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldlar olmak üzere $M, \bar{M}$ manifoldunun bir altmanifoldu olsun. M ye normal birim vektör alanı N ve $\bar{\nabla}_X N$ nin teğet ve normal bileşenleri sırası ile, $-A_N X$ ve $\nabla_X^\perp N$ olmak üzere,

$$A: \chi^\perp(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

dönüşümü iyi tanımlıdır. Böylece

$$\bar{\nabla}_X N = -A_N X + \nabla_X^\perp N \quad (2.3.2)$$

biçiminde Weingarten eşitliği elde edilir. Burada A_N ye şekil operatörü, $\nabla^\perp$ e de M nin $T^\perp M$ normal demetindeki normal konneksiyon adı verilir (Chen, 1973).

Sonuç 2.3.1: M manifoldunun A_N şekil operatörü ve σ ikinci temel formu arasında

$$g(A_N Y_1, Y_2) = g(\sigma(Y_1, Y_2), N)$$

bağıntısı vardır. Burada $g, T_M(p)$ deki bir Riemann metriğidir (Chen, 1973).

Tanım 2.3.5: $(\bar{M}, \bar{g})$ Riemann manifoldunun n boyutlu bir altmanifoldu (M, g) olsun. M altmanifoldunun ikinci temel formu σ nin kovaryant türevi

$$(\bar{\nabla}_{Y_1} \sigma) = \nabla_{Y_1}^\perp \sigma(Y_2, Y_3) - \sigma(\nabla_{Y_1} Y_2, Y_3) - \sigma(Y_2, \nabla_{Y_1} Y_3) \quad (2.3.3)$$

biçiminde tanımlanır. σ nin kovaryant türevi $\bar{\nabla} \sigma$ ya M nin üçüncü temel formu denir (Chen, 1973).

Eğer $\bar{\nabla} \sigma = 0$ ise M ye paralel ikinci temel formu veya 1-paralel denir. Buradaki $\bar{\nabla}, M$ nin $T^\perp M$ normal demetinde tanımlanan normal konneksiyondur (Chen, 1973).

Tanım 2.3.6: $(\bar{M}, \bar{g})$ Riemann manifoldunun n boyutlu bir altmanifoldu (M, g) olsun. $\bar{M}$ nin eğrilik tensörü $\bar{R}$, her $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \in \chi(M)$ için

$$\bar{R}(Y_1, Y_2)Y_3 = \bar{\nabla}_{Y_1} \bar{\nabla}_{Y_2} Y_3 - \bar{\nabla}_{Y_2} \bar{\nabla}_{Y_1} Y_3 - \bar{\nabla}_{[Y_1, Y_2]} Y_3, \quad (2.3.4)$$

ve

$$K(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) = \bar{g}(\bar{R}(Y_1, Y_2)Y_3, Y_4) \quad (2.3.5)$$

biçiminde tanımlanır. M 'nin eğrilik tensörü R ve $\bar{M}$ 'nin eğrilik tensörü $\bar{R}$ olmak üzere Gauss ve Weingarten eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \bar{R}(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) &= R(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) - \bar{g}(\sigma(Y_2, Y_3), \sigma(Y_1, Y_4)) \\ &\quad + \bar{g}(\sigma(Y_1, Y_3), \sigma(Y_2, Y_4)) \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğe Gauss denklemi adı verilir (Chen, 1973).

Gauss denkleminin teğet ve normal bileşenleri sırasıyla

$$(\bar{R}(Y_1, Y_2)Y_3)^T = R(Y_1, Y_2)Y_3 + A_{\sigma(Y_1, Y_3)Y_2} - A_{\sigma(Y_2, Y_3)Y_1}, \quad (2.3.7)$$

ve

$$(\bar{R}(Y_1, Y_2)Y_3)^\perp = (\bar{\nabla}_{Y_1}\sigma)(Y_2, Y_3) - (\bar{\nabla}_{Y_2}\sigma)(Y_1, Y_3) \quad (2.3.8)$$

biçiminde olup (2.3.8) eşitliğine Coddazi denklemi denir. Burada $\bar{\nabla}, M$ üzerinde Riemann konneksiyonudur. Ayrıca M nin normal demetinin eğrilik tensörü, her $Y_1, Y_2 \in \chi(M)$ ve $V \in \chi^\perp(M)$ olmak üzere

$$R^\perp(Y_1, Y_2)Y_3 = \nabla_{Y_1}^\perp \nabla_{Y_2}^\perp V - \nabla_{Y_2}^\perp \nabla_{Y_1}^\perp V - \nabla_{[Y_1, Y_2]}^\perp V \quad (2.3.9)$$

ile tanımlıdır. (2.3.9) eşitliğinde Gauss ve Weingarten eşitlikleri kullanılırsa

$$g(\bar{R}(Y_1, Y_2)Y_4, Y_6) = g(R^\perp(Y_1, Y_2)Y_4, Y_6) + g([A_{Y_6}, A_{Y_4}]Y_1, Y_2) \quad (2.3.10)$$

elde edilir. Bu eşitliğe Ricci denklemi adı verilir.

3. KENMOTSU MANİFOLDLAR

Bu bölümde ilk önce hemen hemen kontak metrik manifoldlar ve daha sonra bunun yardımı ile Kenmotsu manifoldları tanımlanmış, Kenmotsu manifoldların bazı temel özelliklerine yer verilmiştir.

3.1. Hemen Hemen Kontak Metrik Manifoldlar

Tanım 3.1.1. M , $(2n + 1)$ -boyutlu diferensiyellenebilir manifold olsun. φ, M üzerinde $(1,1)$ tipinde bir tensör alanı, ξ bir vektör alanı, η, M üzerinde diferensiyel 1-form olmak üzere her $\rho_1 \in \chi(M)$ için $\{\varphi, \xi, \eta\}$ üçlüsü;

$$\varphi: \chi(M) \rightarrow \chi(M),$$

$$\eta: \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}),$$

$$\eta(\xi) = 1 \text{ ve } \varphi^2 \rho_1 = -\rho_1 + \eta(\rho_1)\xi, \quad (3.1.1)$$

koşullarını sağlıyorsa bu üçlüye bir hemen hemen kontak yapı, $\{M, \varphi, \xi, \eta\}$ dörtlüsüne de bir hemen hemen kontak manifold adı verilir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 3.1.2. M hemen hemen kontak manifoldu üzerinde $\rho_1 \neq \xi$ için

$$\eta(\xi) = 1 \text{ ve } d\eta(\xi, \rho_1) = 0$$

olacak biçimde bir tek $\xi \in \chi(M)$ vektör alanı var ise ξ ye η kontak yapısının öz vektör alanı (duali) denir (Blair, 2002).

Tanım 3.1.3. $(2n + 1)$ -boyutlu M hemen hemen kontak manifoldu üzerinde, her $\rho_1, \rho_2 \in \chi(M)$ ve $\xi \in \chi(M)$ için

$$\eta(\rho_1) = g(\rho_1, \xi), \quad (3.1.2)$$

ve

$$g(\varphi \rho_1, \varphi \rho_2) = g(\rho_1, \rho_2) - \eta(\rho_1)\eta(\rho_2), \quad (3.1.3)$$

koşullarını sağlayan bir g metriği var ise $\{\varphi, \xi, \eta, g\}$ dörtlüsüne bir hemen hemen kontak metrik yapı, $\{M, \varphi, \xi, \eta, g\}$ beşlisine de bir hemen hemen kontak metrik manifold denir (Yano ve Kon, 1984).

Teorem 3.1.1. $(2n + 1)$ -boyutlu M hemen hemen kontak metrik manifoldu üzerinde her $\rho_1, \rho_2 \in \chi(M)$ için,

$$g(\varphi\rho_1, \varphi\rho_2) = g(\rho_1, \rho_2) - \eta(\rho_1)\eta(\rho_2),$$

olacak şekilde bir g Riemann metriği daima vardır (Yano ve Kon, 1984).

Sonuç 3.1.1. $(2n + 1)$ -boyutlu M hemen hemen kontak metrik manifoldu verilmiş olsun. Her $\rho_1, \rho_2 \in \chi(M)$ için,

$$g(\varphi\rho_1, \rho_2) = -g(\rho_1, \varphi\rho_2), \quad (3.1.4)$$

dir yani φ, g ye göre anti-simetrik bir tensör alanıdır (Yano ve Kon, 1984).

Teorem 3.1.2. $(2n + 1)$ -boyutlu M hemen hemen kontak metrik manifoldu verilmiş olsun. M üzerinde bir η kontak yapısı verildiğinde, her $\rho_1, \rho_2 \in \chi(M)$ için $\varphi: \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ olacak şekilde

$$g(\rho_1, \varphi\rho_2) = \phi(\rho_1, \rho_2)$$

olacak şekilde bir $\{\varphi, \xi, \eta, g\}$ hemen hemen kontak metrik yapısı vardır (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 3.1.4. $(2n + 1)$ -boyutlu diferensiyellenebilir M manifoldu üzerinde bir $\{\varphi, \xi, \eta, g\}$ hemen hemen kontak metrik yapısı verilmiş olsun. Her $\rho_1, \rho_2 \in \chi(M)$ için

$$\phi(\rho_1, \rho_2) = g(\rho_1, \varphi\rho_2), \quad (3.1.5)$$

biçiminde tanımlı ϕ dönüşümüne $\{\varphi, \xi, \eta, g\}$ hemen hemen kontak metrik yapısının temel 2-formu denir (Yano ve Kon, 1984).

3.2. Kenmotsu Manifolddar

Bu bölümde Kenmotsu manifoldları ile ilgili genel kavramlar verilmiş ve bazı özel eğrilik tensörlerinin Kenmotsu manifoldu üzerindeki davranışları incelenmiştir.

Tanım 3.2.1. $M, \{\varphi, \xi, \eta, g\}$ yapısı ile verilmiş $(2n + 1)$ boyutlu bir hemen hemen kontak metrik manifold olsun. Eğer M hemen hemen kontak metrik manifoldu üzerinde

$$d\eta = 0, d\varphi = 2\eta \wedge \varphi$$

eşitlikleri sağlanıyorsa M ye hemen hemen Kenmotsu manifold denir (Pitiş, 2007).

Tanım 3.2.2. $M, \{\varphi, \xi, \eta, g\}$ yapısı ile verilmiş $(2n + 1)$ boyutlu bir hemen hemen kontak metrik manifold olsun. Eğer M hemen hemen Kenmotsu manifoldu üzerinde her $\rho_1, \rho_2 \in \chi(M)$ için

$$\begin{cases} \varphi^2 \rho_1 = -\rho_1 + \eta(\rho_1)\xi, \varphi\xi = 0, \eta(\xi) = 1, \eta(\varphi\rho_1) = 0, \\ g(\rho_1, \xi) = \eta(\rho_1), (\nabla_{\rho_1}\varphi)\rho_2 = g(\varphi\rho_1, \rho_2)\xi - \eta(\rho_2)\varphi\rho_1, \end{cases} \quad (3.2.1)$$

koşulları sağlanıyorsa M 'ye Kenmotsu manifold denir (Kenmotsu, 1972).

Bir M Kenmotsu manifoldu üzerinde her $\rho_1, \rho_2 \in \chi(M)$ için

$$\nabla_{\rho_1}\xi = \rho_1 - \eta(\rho_1)\xi \quad (3.2.2)$$

ve

$$(\nabla_{\rho_1}\eta)\rho_2 = g(\rho_1, \rho_2) - \eta(\rho_1)\eta(\rho_2) \quad (3.2.3)$$

eşitlikleri sağlanmaktadır (Kenmotsu, 1972).

Önerme 3.2.1. $2n + 1 -$ boyutlu bir M Kenmotsu manifold için aşağıdaki bağıntılar sağlanır.

$$R(\xi, \rho_1)\rho_2 = -g(\rho_1, \rho_2)\xi + \eta(\rho_2)\rho_1, \quad (3.2.4)$$

$$R(\rho_1, \xi)\rho_2 = g(\rho_1, \rho_2)\xi - \eta(\rho_2)\rho_1, \quad (3.2.5)$$

$$R(\rho_1, \rho_2)\xi = \eta(\rho_1)\rho_2 - \eta(\rho_2)\rho_1, \quad (3.2.6)$$

$$S(\rho_1, \xi) = -2n\eta(\rho_1) \quad (3.2.7)$$

$$S(\xi, \xi) = -2n, \quad (3.2.8)$$

$$Q\xi = -2n\xi, \quad (3.2.9)$$

burada S ve R , M manifoldunun sırası ile Ricci ve Riemann eğrilik tensörleri, Q ise

$$S(\rho_1, \rho_2) = g(Q\rho_1, \rho_2),$$

şeklinde tanımlanan Ricci operatörüdür.

Tanım 3.2.3 M bir Kenmotsu manifold olmak üzere, $T_M(P)$ tanjant uzayında ξ vektör alanına dik bir ρ_1 birim vektör alanı, $\{\rho_1, \varphi\rho_1\}$ ortonormal olacak biçimde mevcut ise $\{\rho_1, \varphi\rho_1\}$ düzlemine $T_M(P)$ nin φ – kesitseli denir. Ayrıca

$$K(\rho_1, \varphi\rho_1) = g(R(\rho_1, \varphi\rho_1)\varphi\rho_1, \rho_1) \quad (3.2.10)$$

biçiminde tanımlanan ifadeye M nin φ – kesitsel eğriliği denir (Kenmotsu, 1972).

Tanım 3.2.4. $(2n + 1)$ – boyutlu M Kenmotsu manifoldunun R Riemann eğrilik tensörü her $\rho_1, \rho_2 \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} R(\rho_1, \rho_2)\rho_3 = & \frac{c-3}{4} [g(\rho_2, \rho_3)\rho_1 - g(\rho_1, \rho_3)\rho_2] - \frac{c+1}{4} [\eta(\rho_1)\eta(\rho_3)\rho_2 \\ & - \eta(\rho_2)\eta(\rho_3)\rho_1 + g(\rho_1, \rho_3)\eta(\rho_2)\xi - g(\rho_2, \rho_3)\eta(\rho_1)\xi \\ & + g(\rho_1, \varphi\rho_3)\varphi\rho_2 - g(\rho_2, \varphi\rho_3)\varphi\rho_1 + 2g(\rho_1, \varphi\rho_2)\varphi\rho_3] \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

biçiminde ise M ye c sabit φ – kesitsel eğriliğine sahip Kenmotsu uzay form denir.

Tanım 3.2.5. M , $(2n + 1)$ -boyutlu Riemann manifoldu olmak üzere quasi-konformal eğrilik tensörü her $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} \tilde{C}(\rho_1, \rho_2)\rho_3 = & aR(\rho_1, \rho_2)\rho_3 + b[S(\rho_2, \rho_3)\rho_1 - S(\rho_1, \rho_3)\rho_2 + g(\rho_2, \rho_3)Q\rho_1 \\ & - g(\rho_1, \rho_3)Q\rho_2] - \frac{r}{2n+1} \left[\frac{a}{2n} + 2b \right] [g(\rho_2, \rho_3)\rho_1 - g(\rho_1, \rho_3)\rho_2] \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

şeklinde tanımlanır. Burada a ve b birer sabit, Q Ricci operatörü, S Ricci tensörü ve r ise manifoldun skaler eğriliğidir.

Eğer $\tilde{C} = 0$ ise manifoldda quasi-konformal flat denir.

(3.2.12) eşitliğinde sırasıyla $\rho_1 = \xi, \rho_2 = \xi, \rho_3 = \xi$ seçersek Kenmotsu manifold için

$$\begin{aligned} \tilde{C}(\xi, \rho_2)\rho_3 = & \left[(2nb + a) + \frac{r}{2n+1} \left(\frac{a}{2n} + 2b \right) \right] [g(\rho_2, \rho_3)\xi - \eta(\rho_3)\rho_2] \\ & + b[S(\rho_2, \rho_3)\xi - \eta(\rho_3)Q\rho_2], \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

$$\begin{aligned}\tilde{C}(\rho_1, \xi)\rho_3 = & \left[(2nb + a) + \frac{r}{2n+1} \left(\frac{a}{2n} + 2b \right) \right] [g(\rho_1, \rho_3)\xi - \eta(\rho_3)\rho_1] \\ & - b[S(\rho_1, \rho_3)\xi - \eta(\rho_3)Q\rho_1],\end{aligned}\quad (3.2.14)$$

$$\begin{aligned}\tilde{C}(\rho_1, \rho_2)\xi = & \left[(2nb + a) + \frac{r}{2n+1} \left(\frac{a}{2n} + 2b \right) \right] [\eta(\rho_1)\rho_2 - \eta(\rho_2)\rho_1] \\ & + b[\eta(\rho_2)Q\rho_1 - \eta(\rho_1)Q\rho_2],\end{aligned}\quad (3.2.15)$$

elde edilir.

Tanım 3.2.6. Quasi-konformal eğrilik tensöründe $a = 1$ ve $b = \frac{-1}{2n-1}$ seçersek konformal eğrilik tensörü her $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \xi(M)$ için

$$\begin{aligned}C(\rho_1, \rho_2)\rho_3 = & R(\rho_1, \rho_2)\rho_3 + \frac{1}{2n-1} [S(\rho_2, \rho_3)\rho_1 - S(\rho_1, \rho_3)\rho_2 + g(\rho_2, \rho_3)Q\rho_1 \\ & - g(\rho_1, \rho_3)Q\rho_2] - \frac{r}{2n(2n-1)} [g(\rho_2, \rho_3)\rho_1 - g(\rho_1, \rho_3)\rho_2]\end{aligned}\quad (3.2.16)$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer $C = 0$ ise manifolda konformal flat denir.

(3.2.16) eşitliğinde sırasıyla $\rho_1 = \xi, \rho_2 = \xi, \rho_3 = \xi$ seçersek Kenmotsu manifold için

$$\begin{aligned}C(\xi, \rho_2)\rho_3 = & -\frac{r+2n}{2n(2n-1)} [g(\rho_2, \rho_3)\xi - \eta(\rho_3)\rho_2] \\ & - \frac{1}{2n-1} [S(\rho_2, \rho_3)\xi - \eta(\rho_3)Q\rho_2],\end{aligned}\quad (3.2.17)$$

$$\begin{aligned}C(\rho_1, \xi)\rho_3 = & -\frac{r+2n}{2n(2n-1)} [g(\rho_1, \rho_3)\xi - \eta(\rho_3)\rho_1] \\ & + \frac{1}{2n-1} [S(\rho_1, \rho_3)\xi - \eta(\rho_3)Q\rho_1],\end{aligned}\quad (3.2.18)$$

$$\begin{aligned}
C(\rho_1, \rho_2)\xi = & -\frac{r+2n}{2n(2n-1)}[\eta(\rho_1)\rho_2 - \eta(\rho_2)\rho_1] \\
& -\frac{1}{2n-1}[\eta(\rho_2)Q\rho_1 - \eta(\rho_1)Q\rho_2],
\end{aligned} \tag{3.2.19}$$

elde edilir.

Tanım 3.2.7. $M, (2n + 1)$ boyutlu Riemann manifoldu olmak üzere her $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \chi(M)$ için projektif eğrilik tensörü

$$P(\rho_1, \rho_2)\rho_3 = R(\rho_1, \rho_2)\rho_3 - \frac{1}{2n}[S(\rho_2, \rho_3)\rho_1 - S(\rho_1, \rho_3)\rho_2], \tag{3.2.20}$$

şeklinde tanımlar.

Eğer $P = 0$ ise manifolda projektif flat manifold denir.

(3.2.20) eşitliğinde $\rho_1 = \xi, \rho_2 = \xi, \rho_3 = \xi$ seçersek Kenmotsu manifold için

$$P(\xi, \rho_2)\rho_3 = -g(\rho_2, \rho_3)\xi - \frac{1}{2n}S(\rho_2, \rho_3)\xi, \tag{3.2.21}$$

$$P(\rho_1, \xi)\rho_3 = g(\rho_1, \rho_3)\xi + \frac{1}{2n}S(\rho_1, \rho_3)\xi, \tag{3.2.22}$$

$$P(\rho_1, \rho_2)\xi = 0, \tag{3.2.23}$$

elde edilir.

Tanım 3.2.8. $M, (2n + 1) -$ boyutlu Riemann manifold olmak üzere her $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \xi(M)$ için concircular eğrilik tensörü

$$\tilde{Z}(\rho_1, \rho_2)\rho_3 = R(\rho_1, \rho_2)\rho_3 - \frac{r}{2n(2n+1)}[g(\rho_2, \rho_3)\rho_1 - g(\rho_1, \rho_3)\rho_2], \tag{3.2.24}$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer $\tilde{Z} = 0$ ise bu manifolda concircular flat manifold denir.

(3.2.24) eşitliğinde sırasıyla $\rho_1 = \xi, \rho_2 = \xi, \rho_3 = \xi$ seçersek Kenmotsu manifold için,

$$\tilde{Z}(\xi, \rho_2)\rho_3 = \left[1 + \frac{r}{2n(2n+1)}\right] [-g(\rho_2, \rho_3)\xi + \eta(\rho_3)\rho_2], \tag{3.2.25}$$

$$\tilde{Z}(\rho_1, \xi)\rho_3 = \left[1 + \frac{r}{2n(2n+1)}\right] [g(\rho_1, \rho_3)\xi - \eta(\rho_3)\rho_1], \quad (3.2.26)$$

$$\tilde{Z}(\rho_1, \rho_2)\xi = \left[1 + \frac{r}{2n(2n+1)}\right] [\eta(\rho_1)\rho_2 - \eta(\rho_2)\rho_1], \quad (3.2.27)$$

elde edilir.



4. KENMOTSU MANİFOLDLARIN EĞRİLİK TENSÖRLERİ

Bu bölümde tezde elde edilen orjinal sonuçlara yer verilmiştir. Riemann eğrilik tensörü, projektif eğrilik tensörü, concircular eğrilik tensörü ve quasi-konformal eğrilik tensörlerinin birbirleri üzerindeki etkileri ayrıntılı olarak incelenmiştir.

İlk önce bazı özel eğrilik tensörleri üzerinde Kenmotsu manifoldun flatlık durumunu inceleyelim.

4.1. Kenmotsu Manifoldların Flatlığı

Teorem 4.1.1. $M, (2n + 1) -$ boyutlu Kenmotsu manifoldu olsun. Eğer M , quasi-konformal flat bir manifold ise M bir $\eta -$ Einstein manifolddur.

İspat. Kabul edelim ki $(2n + 1) -$ boyutlu M Kenmotsu manifoldu quasi-konformal flat olsun. Bu durumda her $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \chi(M)$

$$\tilde{C}(\rho_1, \rho_2)\rho_3 = 0$$

dır. Son eşitlikte $\rho_1 = \xi$ seçer ve (3.2.17) eşitliğinden yararlanırsak

$$\begin{aligned} & \left[(a + 2nb) + \frac{r}{2n+1} \left(\frac{a}{2n} + 2b \right) \right] [g(\rho_2, \rho_3)\xi - \eta(\rho_3)\rho_2] \\ & + b[S(\rho_2, \rho_3)\xi - \eta(\rho_3)Q\rho_2] = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte $\rho_3 = \xi$ seçer ve eşitliğin her iki tarafının $\rho_1 \in \chi(M)$ ile iç çarpımını alırsak

$$\begin{aligned} S(\rho_1, \rho_2) = & - \left[\left(2n + \frac{a}{b} \right) + \frac{r}{b(2n+1)} \left(\frac{a}{2n} + 2b \right) \right] g(\rho_1, \rho_2) \\ & + \left[\left(2n + \frac{a}{b} \right) + \frac{r}{b(2n+1)} \left(\frac{a}{2n} + 2b \right) \right] \eta(\rho_1)\eta(\rho_2) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan açıktır ki M Kenmotsu manifoldu bir $\eta -$ Einstein manifolddur.

Özel olarak $a = 1$ ve $b = \frac{-1}{2n-1}$ seçersek quasi-konformal eğrilik tensörü konformal eğrilik tensörüne indirgeneceğinden bu teoremin bir sonucunu aşağıdaki gibi verebiliriz.

Sonuç 4.1.1. $M, (2n + 1) -$ boyutlu Kenmotsu manifold olsun. Eğer M konformal flat bir manifold ise M bir $\eta -$ Einstein manifolddur.

Teorem 4.1.2. $M, (2n + 1) -$ boyutlu Kenmotsu manifoldu olsun. Eğer M concircular flat bir manifold ise M bir reel uzay formudur.

İspat. Kabul edelim ki $(2n + 1) -$ boyutlu M Kenmotsu manifoldu concircular flat olsun. Bu durumda her $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \chi(M)$ için

$$\tilde{Z}(\rho_1, \rho_2)\rho_3 = 0$$

dır. Burada (3.2.24) eşitliğinden yararlanırsak

$$R(\rho_1, \rho_2)\rho_3 = \frac{r}{2n(2n+1)} [g(\rho_2, \rho_3)\rho_1 - g(\rho_1, \rho_3)\rho_2]$$

yazılır. Böylece M Kenmotsu manifoldu bir reel uzay formudur.

Teorem 4.1.3. $M, (2n + 1) -$ boyutlu Kenmotsu manifoldu olsun. Eğer M projektif flat bir manifold ise M bir Einstein manifolddur.

İspat. Kabul edelim ki $(2n + 1) -$ boyutlu M Kenmotsu manifoldu projektif flat olsun. Bu durumda her $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \chi(M)$ için

$$P(\rho_1, \rho_2)\rho_3 = 0$$

dır. Son eşitlikte $\rho_1 = \xi$ seçer ve (3.2.21) eşitliğinden yararlanırsak

$$g(\rho_2, \rho_3)\xi + \frac{1}{2n}S(\rho_2, \rho_3)\xi = 0$$

elde edilir. Son elde edilen eşitliğin her iki tarafının $\xi \in \chi(M)$ ile iç çarpımını alır ve gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$S(\rho_2, \rho_3) = -2ng(\rho_2, \rho_3)$$

elde edilir. Böylece M Kenmotsu manifoldu bir Einstein manifolddur.

4.2. Kenmotsu Manifoldların Riemann Eğrilik Tensörü

Bu alt bölümde bir Kenmotsu manifoldun Riemann eğrilik tensörünün diğer eğrilik tensörleri üzerindeki etkileri incelenmiştir. Bir Kenmotsu manifoldun semisimetrik, projektif semisimetrik, concircular semisimetrik, Ricci semisimetrik ve quasi-konformal semisimetrik olması durumunda ortaya çıkan sonuçlar ayrıntılı olarak ele alınmıştır.

Teorem 4.2.1. $M, (2n + 1) -$ boyutlu bir Kenmotsu manifold olsun. M nin semisimetrik olması için gerekli ve yeterli koşul reel uzay form olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki $(2n + 1) -$ boyutlu Kenmotsu manifoldu semisimetrik olsun. O halde her $\rho_1, \rho_2, \rho_4, \rho_5, \rho_3 \in \chi(M)$ için

$$(R(\rho_1, \rho_2) \cdot R)(\rho_3, \rho_5, \rho_4) = 0$$

ve buradan da

$$\begin{aligned} & R(\rho_1, \rho_2)R(\rho_3, \rho_5)\rho_4 - R(R(\rho_1, \rho_2)\rho_3, \rho_5)\rho_4 \\ & - R(\rho_3, R(\rho_1, \rho_2)\rho_5)\rho_4 - R(\rho_3, \rho_5)R(\rho_1, \rho_2)\rho_4 = 0 \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

şeklinde yazabiliriz. (4.2.1) eşitliğinde $\rho_1 = \xi$ seçersek

$$\begin{aligned} & R(\xi, \rho_2)R(\rho_3, \rho_5)\rho_4 - R(R(\xi, \rho_2)\rho_3, \rho_5)\rho_4 \\ & - R(\rho_3, R(\xi, \rho_2)\rho_5)\rho_4 - R(\rho_3, \rho_5)R(\xi, \rho_2)\rho_4 = 0 \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

elde edilir. (4.2.2) eşitliğinde (3.2.4) den yararlanırsak

$$\begin{aligned} & -g(\rho_2, R(\rho_3, \rho_5)\rho_4)\xi + \eta(R(\rho_3, \rho_5)\rho_4)\rho_2 \\ & + g(\rho_2, \rho_3)R(\xi, \rho_5)\rho_4 - \eta(\rho_3)R(\rho_2, \rho_5)\rho_4 \\ & + g(\rho_2, \rho_5)R(\rho_3, \xi)\rho_4 - \eta(\rho_5)R(\rho_3, \rho_2)\rho_4 \\ & + g(\rho_2, \rho_4)R(\rho_3, \rho_5)\xi - \eta(\rho_4)R(\rho_3, \rho_5)\rho_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

elde edilir. (4.2.3) eşitliğinde (3.2.4), (3.2.5), (3.2.6) eşitliklerinden yararlanırsak

$$\begin{aligned} & -g(\rho_2, R(\rho_3, \rho_5)\rho_4)\xi + \eta(R(\rho_3, \rho_5)\rho_4)\rho_2 - g(\rho_2, \rho_3)g(\rho_5, \rho_4)\xi \\ & + g(\rho_2, \rho_3)\eta(\rho_4)\rho_5 - \eta(\rho_3)R(\rho_2, \rho_5)\rho_4 + g(\rho_2, \rho_5)g(\rho_3, \rho_4)\xi \\ & - g(\rho_2, \rho_5)\eta(\rho_4)\rho_3 - \eta(\rho_5)R(\rho_3, \rho_2)\rho_4 + g(\rho_2, \rho_4)\eta(\rho_3)\rho_5 \\ & - g(\rho_2, \rho_4)\eta(\rho_5)\rho_3 - \eta(\rho_4)R(\rho_3, \rho_5)\rho_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

elde edilir. (4.2.4) eşitliğinde $\rho_3 = \xi$ seçersek ve (3.2.1), (3.2.4) eşitliklerinden yararlanırsak

$$R(\rho_2, \rho_5)\rho_4 = g(\rho_5, \rho_4)\rho_2 - g(\rho_2, \rho_4)\rho_5$$

elde edilir. Buradan açıktır ki M Kenmotsu manifoldu bir reel uzay formudur.

Teorem 4.2.2. $M, (2n + 1) -$ boyutlu bir Kenmotsu manifold olsun. M nin projektif semisimetrik olması için gerekli ve yeterli koşul bir $\eta -$ Einstein manifold olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki $(2n + 1) -$ boyutlu Kenmotsu manifoldu projektif semisimetrik olsun. O halde her $\rho_1, \rho_2, \rho_4, \rho_5, \rho_3 \in \chi(M)$ için

$$(R(\rho_1, \rho_2) \cdot P)(\rho_4, \rho_5, \rho_3) = 0$$

ve buradan da

$$\begin{aligned} & R(\rho_1, \rho_2)P(\rho_4, \rho_5)\rho_3 - P(R(\rho_1, \rho_2)\rho_4, \rho_5)\rho_3 - P(\rho_4, R(\rho_1, \rho_2)\rho_5)\rho_3 \\ & - P(\rho_4, \rho_5)R(\rho_1, \rho_2)\rho_3 = 0 \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

şeklinde yazabiliriz. (4.2.5) eşitliğinde $\rho_1 = \xi$ seçersek

$$\begin{aligned} & R(\xi, \rho_2)P(\rho_4, \rho_5)\rho_3 - P(R(\xi, \rho_2)\rho_4, \rho_5)\rho_3 - P(\rho_4, R(\xi, \rho_2)\rho_5)\rho_3 \\ & - P(\rho_4, \rho_5)R(\xi, \rho_2)\rho_3 = 0 \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

eşitliğini elde ederiz. (4.2.6) eşitliğinde (3.2.4) eşitliğinden yararlanırsak

$$\begin{aligned} & -g(\rho_2, P(\rho_4, \rho_5)\rho_3)\xi + \eta(P(\rho_4, \rho_5)\rho_3)\rho_2 + g(\rho_2, \rho_4)P(\xi, \rho_5)\rho_3 \\ & - \eta(\rho_4)P(\rho_2, \rho_5)\rho_3 + g(\rho_2, \rho_5)P(\rho_4, \xi)\rho_3 - \eta(\rho_5)P(\rho_4, \rho_2)\rho_3 \\ & + g(\rho_2, \rho_3)P(\rho_5)\xi - \eta(\rho_3)P(\rho_4, \rho_5)\rho_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

elde edilir. (4.2.7) eşitliğinde (3.2.21), (3.2.22) ve (3.2.23) ifadelerinden yararlanırsak

$$\begin{aligned} & -g(\rho_2, P(\rho_4, \rho_5)\rho_3)\xi + \eta(P(\rho_4, \rho_5)\rho_3)\rho_2 - g(\rho_2, \rho_4)g(\rho_5, \rho_3)\xi \\ & - \frac{1}{2n}g(\rho_2, \rho_4)S(\rho_5, \rho_3)\xi - \eta(\rho_4)P(\rho_2, \rho_5)\rho_3 + g(\rho_2, \rho_5)g(\rho_4, \rho_3)\xi \\ & + \frac{1}{2n}g(\rho_2, \rho_5)S(\rho_4, \rho_3)\xi - \eta(\rho_5)P(\rho_4, \rho_2)\rho_3 - \eta(\rho_3)P(\rho_4, \rho_5)\rho_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

elde edilir. (4.2.8) eşitliğinde $\rho_4 = \xi$ seçer ve (3.2.7), (3.2.21) eşitliklerinden yararlanırsak

$$\begin{aligned} & -g(\rho_5, \rho_3)\rho_2 - \frac{1}{2n}S(\rho_5, \rho_3)\rho_2 - P(\rho_2, \rho_5)\rho_3 \\ & - g(\rho_2, \rho_3)\eta(\rho_5)\xi + \frac{1}{2n}S(\rho_2, \rho_3)\eta(\rho_5)\xi \\ & + g(\rho_5, \rho_2)\eta(\rho_3)\xi + \frac{1}{2n}S(\rho_5, \rho_2)\eta(\rho_3)\xi = 0 \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

elde edilir. (4.29) eşitliğinde $\rho_3 = \xi$ seçer ve (3.2.7), (3.2.23) eşitliklerinden yararlanırsak

$$\frac{1}{2n}S(\rho_5, \rho_2)\xi + g(\rho_5, \rho_2)\xi + 2\eta(\rho_5)\eta(\rho_2)\xi = 0 \quad (4.2.10)$$

elde edilir. (4.2.10) eşitliğinin her iki tarafının $\xi \in \chi(M)$ ile iç çarpımı alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$S(\rho_5, \rho_2) = -2n[g(\rho_5, \rho_2) + 2\eta(\rho_5)\eta(\rho_2)]$$

elde edilir. Böylece M Kenmotsu manifoldu bir η -Einstein manifolddur.

Teorem 4.2.3. $M, (2n + 1) -$ boyutlu Kenmotsu manifold olsun. M nin concircular semisimetrik olması için gerekli ve yeterli koşul sabit kesit eğrilikli reel uzay form olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki $(2n + 1) -$ boyutlu M Kenmotsu manifoldu concircular semisimetrik olsun. Bu durumda her $\rho_1, \rho_2, \rho_4, \rho_5, \rho_3 \in \chi(M)$ için

$$(R(\rho_1, \rho_2) \cdot \tilde{Z})(\rho_4, \rho_5, \rho_3) = 0$$

ve buradan da

$$\begin{aligned} R(\rho_1, \rho_2)\tilde{Z}(\rho_4, \rho_5)\rho_3 - \tilde{Z}(R(\rho_1, \rho_2)\rho_4, \rho_5)\rho_3 - \tilde{Z}(\rho_4, R(\rho_1, \rho_2)\rho_5)\rho_3 \\ - \tilde{Z}(\rho_4, \rho_5)R(\rho_1, \rho_2)\rho_3 = 0 \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

yazabiliriz. (4.2.11) eşitliğinde $\rho_1 = \xi$ seçersek

$$\begin{aligned} R(\xi, \rho_2)\tilde{Z}(\rho_4, \rho_5)\rho_3 - \tilde{Z}(R(\xi, \rho_2)\rho_4, \rho_5)\rho_3 - \tilde{Z}(\rho_4, R(\xi, \rho_2)\rho_5)\rho_3 \\ - \tilde{Z}(\rho_4, \rho_5)R(\xi, \rho_2)\rho_3 = 0 \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

elde edilir. (4.2.12) eşitliğinde (3.2.4) ifadesinden yararlanırsak

$$\begin{aligned} -g(\rho_2, \tilde{Z}(\rho_4, \rho_5)\rho_3)\xi + \eta(\tilde{Z}(\rho_4, \rho_5)\rho_3)\rho_2 + g(\rho_2, \rho_4)\tilde{Z}(\xi, \rho_5)\rho_3 \\ - \eta(\rho_4)\tilde{Z}(\rho_2, \rho_5)\rho_3 + g(\rho_2, \rho_5)\tilde{Z}(\rho_4, \xi)\rho_3 - \eta(\rho_5)\tilde{Z}(\rho_4, \rho_2)\rho_3 \\ + g(\rho_2, \rho_3)\tilde{Z}(\rho_4, \rho_5)\xi - \eta(\rho_3)\tilde{Z}(\rho_4, \rho_5)\rho_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

elde edilir. (4.2.13) eşitliğinde (3.2.25), (3.2.26) ve (3.2.27) ifadelerinden yararlanırsak

$$\begin{aligned} -g(\rho_2, \tilde{Z}(\rho_4, \rho_5)\rho_3)\xi + \eta(\tilde{Z}(\rho_4, \rho_5)\rho_3)\rho_2 - Ag(\rho_2, \rho_4)g(\rho_5, \rho_3)\xi \\ + Ag(\rho_2, \rho_4)\eta(\rho_3)\rho_5 - \eta(\rho_4)\tilde{Z}(\rho_2, \rho_5)\rho_3 + Ag(\rho_2, \rho_5)g(\rho_4, \rho_3)\xi \\ - Ag(\rho_2, \rho_5)\eta(\rho_3)\rho_4 - \eta(\rho_5)\tilde{Z}(\rho_4, \rho_2)\rho_3 + Ag(\rho_2, \rho_3)\eta(\rho_4)\rho_5 \\ - Ag(\rho_2, \rho_3)\eta(\rho_5)\rho_4 - \eta(\rho_3)\tilde{Z}(\rho_4, \rho_5)\rho_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

elde edilir, burada $A = \left[1 + \frac{r}{2n(2n+1)}\right]$ dir. (4.2.14) eşitliğinde $\rho_4 = \xi$ seçer ve (3.2.25) eşitliğinden yararlanırsak

$$-\tilde{Z}(\rho_2, \rho_5)\rho_3 - Ag(\rho_5, \rho_3)\rho_2 + Ag(\rho_2, \rho_3)\rho_5 = 0 \quad (4.2.15)$$

elde edilir. (4.2.15) eşitliğinde (3.2.24) ifadesini yazar ve gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$R(\rho_2, \rho_5)\rho_3 = g(\rho_5, \rho_3)\rho_2 - g(\rho_2, \rho_3)\rho_5$$

elde ederiz. Böylece M Kenmotsu manifoldu sabit kesit eğriikli reel uzay formudur.

Teorem 4.2.4. $M, (2n + 1) -$ boyutlu Kenmotsu manifold olsun. M nin Ricci semisimetrik olması için gerekli ve yeterli koşul Einstein manifoldu olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki $(2n + 1) -$ boyutlu M Kenmotsu manifoldu Ricci semisimetrik olsun. Bu durumda her $\rho_1, \rho_2, \rho_4, \rho_5 \in \chi(M)$ için

$$(R(\rho_1, \rho_2) \cdot S)(\rho_4, \rho_5) = 0$$

ve buradan da

$$S(R(\rho_1, \rho_2)\rho_4, \rho_5) + S(\rho_4, R(\rho_1, \rho_2)\rho_5) = 0 \quad (4.2.16)$$

elde edilir. (4.2.16) eşitliğinde $\rho_1 = \xi$ seçer ve (3.2.4) eşitliğinden yararlanırsak

$$\begin{aligned} 2ng(\rho_2, \rho_4)\eta(\rho_5) + \eta(\rho_4)S(\rho_2, \rho_5) + 2ng(\rho_2, \rho_5)\eta(\rho_4) \\ + \eta(\rho_5)S(\rho_4, \rho_2) = 0 \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

elde edilir. (4.2.17) eşitliğinde $\rho_4 = \xi$ seçer (3.2.1), (3.2.8) eşitliklerinden yararlanırsak

$$S(\rho_2, \rho_5) = -2ng(\rho_2, \rho_5)$$

elde edilir. Böylece M Kenmotsu manifoldu bir Einstein manifolddur.

Teorem 4.2.5. $M, (2n + 1)$ boyutlu Kenmotsu manifold olsun. M 'nin quasi-konformal semisimetrik olması için gerekli ve yeterli koşul $\eta -$ Einstein manifold olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki $(2n + 1) -$ boyutlu M Kenmotsu manifoldu quasi-konformal semisimetrik olsun. Bu durumda her $\rho_1, \rho_2, \rho_4, \rho_5, \rho_3 \in \chi(M)$ için

$$(R, (\rho_1, \rho_2) \cdot \tilde{C})(\rho_4, \rho_5, \rho_3) = 0$$

ve buradan da

$$\begin{aligned} R(\rho_1, \rho_2)\tilde{C}(\rho_4, \rho_5)\rho_3 - \tilde{C}(R(\rho_1, \rho_2)\rho_4, \rho_5)\rho_3 - \tilde{C}(\rho_4, R(\rho_1, \rho_2)\rho_5)\rho_3 \\ - \tilde{C}(\rho_4, \rho_5)R(\rho_1, \rho_2)\rho_3 = 0 \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

elde edilir. (4.2.18) eşitliğinde $\rho_1 = \xi$ seçersek

$$\begin{aligned} R(\xi, \rho_2)\tilde{C}(\rho_4, \rho_5)\rho_3 - \tilde{C}(R(\xi, \rho_2)\rho_4, \rho_5)\rho_3 - \tilde{C}(\rho_4, R(\xi, \rho_2)\rho_5)\rho_3 \\ - \tilde{C}(\rho_4, \rho_5)R(\xi, \rho_2)\rho_3 = 0 \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

elde edilir. (4.2.19) eşitliğinde (3.2.4) eşitliğinden yararlanırsak

$$\begin{aligned} -g(\rho_2, \tilde{C}(\rho_4, \rho_5)\rho_3)\xi + \eta(\tilde{C}(\rho_4, \rho_5)\rho_3)\rho_2 + g(\rho_2, \rho_4)\tilde{C}(\xi, \rho_5)\rho_3 \\ -\eta(\rho_4)\tilde{C}(\rho_2, \rho_5)\rho_3 + g(\rho_2, \rho_5)\tilde{C}(\rho_4, \xi)\rho_3 - \eta(\rho_5)\tilde{C}(\rho_4, \rho_2)\rho_3 \\ +g(\rho_2, \rho_3)\tilde{C}(\rho_4, \rho_5)\xi - \eta(\rho_3)\tilde{C}(\rho_4, \rho_5)\rho_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

elde edilir. (4.2.20) eşitliğinde (3.2.14), (3.2.15) ve (3.2.16) ifadelerinden yararlanırsak

$$\begin{aligned} -g(\rho_2, \tilde{C}(\rho_4, \rho_5)\rho_3)\xi + \eta(\tilde{C}(\rho_4, \rho_5)\rho_3)\rho_2 + Bg(\rho_2, \rho_4)g(\rho_5, \rho_3)\xi \\ -Bg(\rho_2, \rho_4)\eta(\rho_3)\rho_5 + bg(\rho_2, \rho_4)S(\rho_5, \rho_3)\xi - bg(\rho_2, \rho_4)\eta(\rho_3)Q\rho_5 \\ -\eta(\rho_4)\tilde{C}(\rho_2, \rho_5)\rho_3 + Bg(\rho_2, \rho_5)g(\rho_4, \rho_3)\xi - Bg(\rho_2, \rho_5)\eta(\rho_3)\rho_4 \\ -bg(\rho_2, \rho_5)S(\rho_4, \rho_3)\xi + bg(\rho_2, \rho_5)\eta(\rho_3)Q\rho_4 - \eta(\rho_5)\tilde{C}(\rho_4, \rho_2)\rho_3 \\ +Bg(\rho_2, \rho_3)\eta(\rho_4)\rho_5 - Bg(\rho_2, \rho_3)\eta(\rho_5)\rho_4 + bg(\rho_2, \rho_3)\eta(\rho_5)Q\rho_4 \\ -bg(\rho_2, \rho_3)\eta(\rho_4)Q\rho_5 = 0 \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

elde edilir, burada

$$B = \left[(2nb + a) + \frac{r}{2n+1} \left(\frac{a}{2n} + 2b \right) \right]$$

şeklindedir. (4.2.21) eşitliğinde $\rho_4 = \xi$ seçer ve (3.2.14) eşitliğinden yararlanırsak

$$\begin{aligned} bS(\rho_2, \rho_5)\eta(\rho_3)\xi + Bg(\rho_5, \rho_3)\rho_2 + bS(\rho_5, \rho_3)\rho_2 \\ -b\eta(\rho_3)\eta(Q\rho_5)\rho_2 - B\eta(\rho_2)\eta(\rho_3)\rho_5 - b\eta(\rho_2)\eta(\rho_3)Q\rho_5 \\ \tilde{C}(\rho_2, \rho_5)\rho_3 + Bg(\rho_2, \rho_5)\eta(\rho_3)\xi + Bg(\rho_2, \rho_3)\rho_5 \\ -Bg(\rho_2, \rho_3)\eta(\rho_5)\xi - 2nbg(\rho_2, \rho_3)\eta(\rho_5)\xi - Bg(\rho_2, \rho_3)\eta(\rho_5)\xi \\ -bS(\rho_2, \rho_3)\eta(\rho_5)\xi + b\eta(\rho_5)\eta(\rho_3)Q\rho_2 - bg(\rho_2, \rho_3)Q\rho_5 = 0 \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

elde edilir. (4.2.22) eşitliğinde $\rho_3 = \xi$ seçer, (3.2.1), (3.2.8), (3.2.16) eşitliklerinden yararlanırsak

$$\begin{aligned} -bS(\rho_2, \rho_5)\xi + 2B\eta(\rho_5)\rho_2 - 2b\eta(\rho_2)Q\rho_5 \\ -B\eta(\rho_2)\rho_5 + Bg(\rho_2, \rho_5)\xi - 2B\eta(\rho_2)\eta(\rho_5)\xi \\ +b\eta(\rho_5)Q\rho_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

elde edilir. (4.2.23) eşitliğinde $\rho_2 = \xi$ seçer ve son elde edilen eşitliğin her iki tarafının $\rho_4 \in \chi(M)$ ile iç çarpımını alırsak

$$S(\rho_5, \rho_4) = \frac{-B}{2b} [g(\rho_5, \rho_4) - \eta(\rho_5)\eta(\rho_4)]$$

elde edilir. Böylece M Kenmotsu manifoldu bir η -Einstein manifolddur.

Yukarıda ispatlanan teoremden $a = 1$ ve $b = \frac{-1}{2n-1}$ seçilirse quasi-konformal eğrilik tensörü konformal eğrilik tensörüne dönüşeceğinden bu teoremin bir sonucunu aşağıdaki gibi verebiliriz.

Sonuç 4.2.1. $M, (2n + 1)$ boyutlu Kenmotsu manifold olsun. M 'nin konformal semisimetrik olması için gerekli ve yeterli koşul η -Einstein manifold olmasıdır.

4.3. Kenmotsu Manifoldların Ricci Eğrilik Tensörü

Bu alt bölümde bir Kenmotsu manifoldun Ricci eğrilik tensörünün bazı diğer eğrilik tensörleri üzerindeki etkileri incelenmiştir.

Teorem 4.3.1. $M, (2n + 1) -$ boyutlu kenmotsu manifold olsun. Eğer M manifoldu $S(\xi, \rho_2) \cdot R = 0$ eğrilik koşulunu sağlarsa flat bir manifolddur.

İspat. $M, (2n + 2) -$ boyutlu Kenmotsu manifold olmak üzere kabul edelim ki her $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5 \in \chi(M)$ için

$$(S(\rho_1, \rho_2) \cdot R)(\rho_3, \rho_5, \rho_4) = 0$$

eğrilik koşulu sağlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned} S(\rho_1, \rho_2)R(\rho_3, \rho_5)\rho_4 - R(S(\rho_1, \rho_2)\rho_3, \rho_5)\rho_4 - R(\rho_3, S(\rho_1, \rho_2)\rho_5)\rho_4 \\ - R(\rho_3, \rho_5)S(\rho_1, \rho_2)\rho_4 = 0 \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

yazabiliriz. (4.3.1) eşitliğinde $\rho_1 = \xi$ seçer ve (3.2.8) ifadesinden yararlanırsak

$$4n\eta(\rho_2)R(\rho_3, \rho_5)\rho_4 = 0$$

ve buradan da

$$R(\rho_3, \rho_5)\rho_4 = 0$$

elde edilir. Böylece M Kenmotsu manifoldu flat bir manifold olacaktır.

Teorem 4.3.2. $M, (2n + 1) -$ boyutlu Kenmotsu manifold olsun. Eğer M manifoldu $S(\xi, \rho_2) \cdot P = 0$ eğrilik koşulunu sağlarsa, M manifoldu projektif flat bir manifolddur.

İspat. $M, (2n + 1) -$ boyutlu Kenmotsu manifold olmak üzere kabul edelim ki her $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5 \in \chi(M)$ için

$$(S(\rho_1, \rho_2) \cdot P)(\rho_3, \rho_5, \rho_4) = 0$$

eğrilik koşulu sağlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned} S(\rho_1, \rho_2)P(\rho_3, \rho_5)\rho_4 - P(S(\rho_1, \rho_2)\rho_3, \rho_5)\rho_4 - P(\rho_3, S(\rho_1, \rho_2)\rho_5)\rho_4 \\ - P(\rho_3, \rho_5)S(\rho_1, \rho_2)\rho_4 = 0 \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

yazabiliriz. (4.3.2) eşitliğinde $\rho_1 = \xi$ seçer ve (3.2.8) eşitliğinden yararlanırsak

$$4n\eta(\rho_2)P(\rho_3, \rho_5)\rho_4 = 0$$

ve buradan da

$$P(\rho_3, \rho_5)\rho_4 = 0$$

elde edilir. Böylece M manifoldu projektif flat bir manifolddur.

Teorem 4.3.3. $M, (2n + 1) -$ boyutlu Kenmotsu manifold olsun. Eğer M manifoldu $S(\xi, \rho_2) \cdot \rho_3 = 0$ eğrilik koşulunu sağlarsa, M manifoldu concircular flat bir manifolddur.

İspat. $M, (2n + 1) -$ boyutlu Kenmotsu manifold olmak üzere kabul edelim ki her $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5 \in \chi(M)$ için

$$(S(\rho_1, \rho_2) \cdot \tilde{Z})(\rho_3, \rho_4, \rho_5) = 0$$

eğrilik koşulu sağlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned} S(\rho_1, \rho_2)\tilde{Z}(\rho_3, \rho_4)\rho_5 - \tilde{Z}(S(\rho_1, \rho_2)\rho_3, \rho_4)\rho_5 - \tilde{Z}(\rho_3, S(\rho_1, \rho_2)\rho_4)\rho_5 \\ - \tilde{Z}(\rho_3, \rho_4)S(\rho_1, \rho_2)\rho_5 = 0 \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

yazabiliriz. (4.3.3) eşitliğinde $\rho_1 = \xi$ seçer ve (3.2.8) eşitliğinden yararlanırsak

$$4n\eta(\rho_2)\tilde{Z}(\rho_3, \rho_4)\rho_5 = 0$$

ve buradan da

$$\tilde{Z}(\rho_3, \rho_4)\rho_5 = 0$$

elde edilir. Böylece M Kenmotsu manifoldu concircular flat bir manifolddur

Yukarıda ispatlanan teoremlere benzer şekilde, Kenmotsu manifold için quasi-konformal ve konformal eğrilik tensörü üzerinde aşağıdaki teoremleri de kolaylıkla ispatlayabiliriz.

Teorem 4.3.4 $M, (2n + 1) -$ boyutlu Kenmotsu manifold olsun. Eğer M manifoldu $S(\xi, \rho_2)\tilde{C} = 0$ eğrilik koşulunu sağlarsa, M manifoldu quasi-konformal flat bir manifolddur.

Terem 4.3.5. $M, (2n + 1) -$ boyutlu Kenmotsu manifold olsun. Eğer M manifoldu $S(\xi, \rho_2) \cdot C = 0$ eğrilik koşulunu sağlarsa, M manifoldu konformal flat bir manifolddur.

4.4. Kenmotsu Manifoldların Concircular Eğrilik Tensörü

Bu alt bölümde bir Kenmotsu manifoldun concircular eğrilik tensörünün diğer eğrilik tensörleri üzerindeki etkileri incelenmiştir

Teorem 4.4.1. $M, (2n + 1)$ - boyutlu Kenmotsu manifold olsun. Eğer M manifoldu $\tilde{Z}(\rho_1, \rho_2) \cdot R = 0$ eğrilik koşulunu sağlarsa, o halde M bir reel uzay formudur.

İspat. $M, (2n + 1)$ - boyutlu Kenmotsu manifold olmak üzere kabul edelim ki her $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5 \in \chi(M)$ için

$$(\tilde{Z}(\rho_1, \rho_2) \cdot R)(\rho_3, \rho_5, \rho_4) = 0$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \tilde{Z}(\rho_1, \rho_2)R(\rho_3, \rho_5)\rho_4 - R(\tilde{Z}(\rho_1, \rho_2)\rho_3, \rho_5)\rho_4 - R(\rho_3, \tilde{Z}(\rho_1, \rho_2)\rho_5)\rho_4 \\ - R(\rho_3, \rho_5)\tilde{Z}(\rho_1, \rho_2)\rho_4 = 0 \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

şeklinde yazabiliriz. (4.4.1) eşitliğinde $\rho_1 = \xi$ seçersek

$$\begin{aligned} \tilde{Z}(\xi, \rho_2)R(\rho_3, \rho_5)\rho_4 - R(\tilde{Z}(\xi, \rho_2)\rho_3, \rho_5)\rho_4 - R(\rho_3, \tilde{Z}(\xi, \rho_2)\rho_5)\rho_4 \\ - R(\rho_3, \rho_5)\tilde{Z}(\xi, \rho_2)\rho_4 = 0 \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

elde ederiz. (4.4.2) eşitliğinde (3.2.25) eşitliğinden yararlanırsak

$$\begin{aligned} -Ag(\rho_2, R(\rho_3, \rho_5)\rho_4)\xi + A\eta(R(\rho_3, \rho_5)\rho_4)\rho_2 + Ag(\rho_2, \rho_3)R(\xi, \rho_5)\rho_4 \\ - A\eta(\rho_3)R(\rho_2, \rho_5)\rho_4 + Ag(\rho_2, \rho_5)R(\rho_3, \xi)\rho_4 - A\eta(\rho_5)R(\rho_3, \rho_2)\rho_4 \\ + Ag(\rho_2, \rho_4)R(\rho_3, \rho_5)\xi - A\eta(\rho_4)R(\rho_3, \rho_5)\rho_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

elde edilir. (4.4.3) eşitliğinde (3.2.4), (3.2.5) ve (3.2.6) eşitliklerinden yararlanırsak

$$\begin{aligned} -Ag(\rho_2, R(\rho_3, \rho_5)\rho_4)\xi + A\eta(R(\rho_3, \rho_5)\rho_4)\rho_2 - Ag(\rho_2, \rho_3)g(\rho_5, \rho_4)\xi \\ + Ag(\rho_2, \rho_3)\eta(\rho_4)\rho_5 - A\eta(\rho_3)R(\rho_2, \rho_5)\rho_4 + Ag(\rho_2, \rho_5)g(\rho_3, \rho_4)\xi \\ - Ag(\rho_2, \rho_5)\eta(\rho_4)\rho_3 - A\eta(\rho_5)R(\rho_3, \rho_2)\rho_4 + Ag(\rho_2, \rho_4)\eta(\rho_3)\rho_5 \\ - Ag(\rho_2, \rho_4)\eta(\rho_5)\rho_3 - A\eta(\rho_4)R(\rho_3, \rho_5)\rho_2 = 0. \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

elde edilir. (4.4.4) eşitliğinde $\rho_3 = \xi$ seçer, burada gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$-AR(\rho_2, \rho_5)\rho_4 - Ag(\rho_5, \rho_4)\rho_2 + Ag(\rho_2, \rho_4)\rho_5 = 0$$

elde edilir ve burada $A \neq 0$ olmak üzere

$$R(\rho_2, \rho_5)\rho_4 = g(\rho_2, \rho_4)\rho_5 - g(\rho_5, \rho_4)\rho_2$$

elde edilir. Böylece M Kenmotsu manifoldu sabit skaler eğrilikli reel uzay formudur.

Teorem 4.4.2. $M, (2n + 1)$ - boyutlu Kenmotsu manifold olsun. Eğer M manifoldu $\tilde{Z}(\rho_1, \rho_2) \cdot P = 0$ eğrilik koşulunu sağlarsa, M manifoldu bir Einstein manifolddur.

İspat. $M, (2n + 1)$ - boyutlu Kenmotsu manifold olmak üzere kabul edelim ki her $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5 \in \chi(M)$ için

$$(\tilde{Z}(\rho_1, \rho_2) \cdot P)(\rho_3, \rho_5, \rho_4) = 0$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \tilde{Z}(\rho_1, \rho_2)P(\rho_3, \rho_5)\rho_4 - P(\tilde{Z}(\rho_1, \rho_2)\rho_3, \rho_5)\rho_4 - P(\rho_3, \tilde{Z}(\rho_1, \rho_2)\rho_5)\rho_4 \\ - P(\rho_3, \rho_5)\tilde{Z}(\rho_1, \rho_2)\rho_4 = 0 \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

eşitliğini kolaylıkla yazabiliriz. (4.4.5) eşitliğinde $\rho_1 = \xi$ seçersek

$$\begin{aligned} \tilde{Z}(\xi, \rho_2)P(\rho_3, \rho_5)\rho_4 - P(\tilde{Z}(\xi, \rho_2)\rho_3, \rho_5)\rho_4 - P(\rho_3, \tilde{Z}(\xi, \rho_2)\rho_5)\rho_4 \\ - P(\rho_3, \rho_5)\tilde{Z}(\xi, \rho_2)\rho_4 = 0 \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

elde edilir. (4.4.6) eşitliğinde (3.2.25) eşitliğinden yararlanırsak

$$\begin{aligned} -Ag(\rho_2, P(\rho_3, \rho_5)\rho_4)\xi + A\eta(P(\rho_3, \rho_5)\rho_4)\rho_2 + Ag(\rho_2, \rho_3)P(\xi, \rho_5)\rho_4 \\ - A\eta(\rho_3)P(\rho_2, \rho_5)\rho_4 + Ag(\rho_2, \rho_5)P(\rho_3, \xi)\rho_4 - A\eta(\rho_5)P(\rho_3, \rho_2)\rho_4 \\ + Ag(\rho_2, \rho_4)P(\rho_3, \rho_5)\xi - A\eta(\rho_4)P(\rho_3, \rho_5)\rho_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

elde edilir. (4.4.7) eşitliğinde (3.2.21), (3.2.22) (3.2.23) eşitliklerinden yararlanırsak

$$\begin{aligned} -Ag(\rho_2, P(\rho_3, \rho_5)\rho_4)\xi + A\eta(P(\rho_3, \rho_5)\rho_4)\rho_2 - Ag(\rho_2, \rho_3)g(\rho_5, \rho_4)\xi \\ - \frac{A}{2n}g(\rho_2, \rho_3)S(\rho_5, \rho_4)\xi - A\eta(\rho_3)P(\rho_2, \rho_5)\rho_4 + Ag(\rho_2, \rho_5)g(\rho_3, \rho_4)\xi \\ + \frac{A}{2n}g(\rho_2, \rho_5)S(\rho_3, \rho_4)\xi - A\eta(\rho_5)P(\rho_3, \rho_2)\rho_4 - A\eta(\rho_4)P(\rho_3, \rho_5)\rho_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

elde edilir. (4.4.8) eşitliğinde $\rho_3 = \xi$ seçer ve (3.2.21) eşitliğinden yararlanırsak

$$\begin{aligned} -Ag(\rho_5, \rho_4)\rho_2 - \frac{A}{2n}S(\rho_5, \rho_4)\rho_2 - AP(\rho_2, \rho_5)\rho_4 + Ag(\rho_2, \rho_4)\eta(\rho_5)\xi \\ + \frac{A}{2n}S(\rho_2, \rho_4)\eta(\rho_5)\xi + Ag(\rho_2, \rho_5)\eta(\rho_4)\xi + \frac{A}{2n}S(\rho_2, \rho_5)\eta(\rho_4)\xi = 0 \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

elde edilir. (4.4.9) eşitliğinde $\rho_4 = \xi$ seçer ve (3.2.8), (3.2.23) eşitliklerinden yararlanırsak

$$Ag(\rho_2, \rho_5)\xi + \frac{A}{2n}S(\rho_2, \rho_5)\xi = 0 \quad (4.4.10)$$

elde edilir. (4.4.10) eşitliğinin her iki tarafının $\xi \in \chi(M)$ ile iç çarpımı alınır

$A \neq 0$ olmak üzere

$$S(\rho_2, \rho_5) = -2ng(\rho_2, \rho_5)$$

elde edilir. Böylece M Kenmotsu manifoldu Einstein manifolddur.

Teorem 4.4.3. $M, (2n + 1) -$ boyutlu Kenmotsu manifold olsun. Eğer M manifoldu $\tilde{Z}(\rho_1, \rho_2) \cdot \tilde{Z} = 0$ eğrilik koşulunu sağlarsa, M manifoldu bir reel uzay formdur.

İspat. $M, (2n + 1) -$ boyutlu Kenmotsu manifold olmak üzere kabul edelim ki her $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5 \in \chi(M)$ için

$$(\tilde{Z}(\rho_1, \rho_2) \cdot \tilde{Z})(\rho_3, \rho_5, \rho_4) = 0$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \tilde{Z}(\rho_1, \rho_2)\tilde{Z}(\rho_3, \rho_5)\rho_4 - \tilde{Z}(\tilde{Z}(\rho_1, \rho_2)\rho_3, \rho_5)\rho_4 - \tilde{Z}(Z, \tilde{Z}(\rho_1, \rho_2)\rho_5)\rho_4 \\ - \tilde{Z}(\rho_3, \rho_5)\tilde{Z}(\rho_1, \rho_2)\rho_4 = 0 \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

elde edilir. (4.4.11) eşitliğinde $\rho_1 = \xi$ seçersek

$$\begin{aligned} \tilde{Z}(\xi, \rho_2)\tilde{Z}(\rho_3, \rho_5)\rho_4 - \tilde{Z}(\tilde{Z}(\xi, \rho_2)\rho_3, \rho_5)\rho_4 - \tilde{Z}(\rho_3, \tilde{Z}(\xi, \rho_2)\rho_5)\rho_4 \\ - \tilde{Z}(\rho_3, \rho_5)\tilde{Z}(\xi, \rho_2)\rho_4 = 0 \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

eşitliğini elde ederiz. (4.4.12) eşitliğinde (3.2.25) ifadesinden yararlanırsak

$$\begin{aligned} -Ag(\rho_2, \tilde{Z}(\rho_3, \rho_5)\rho_4)\xi + A\eta(\tilde{Z}(\rho_3, \rho_5)\rho_4)\rho_2 + Ag(\rho_2, \rho_3)\tilde{Z}(\xi, \rho_5)\rho_4 \\ - A\eta(\rho_3)\tilde{Z}(\rho_2, \rho_5)\rho_4 + Ag(\rho_2, \rho_5)\tilde{Z}(\rho_3, \xi)\rho_4 - A\eta(\rho_5)\tilde{Z}(\rho_3, \rho_2)\rho_4 \\ + Ag(\rho_2, \rho_4)\tilde{Z}(\rho_3, \rho_5)\xi - A\eta(\rho_4)\tilde{Z}(\rho_3, \rho_5)\rho_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

elde edilir. (4.4.13) eşitliğinde (3.2.25), (3.2.26) ve (3.2.27) eşitliklerinden yararlanırsak

$$\begin{aligned} -Ag(\rho_2, \tilde{Z}(\rho_3, \rho_5)\rho_4)\xi + A\eta(\tilde{Z}(\rho_3, \rho_5)\rho_4)\rho_2 - A^2g(\rho_2, \rho_3)g(\rho_5, \rho_4)\xi \\ + A^2g(\rho_2, \rho_3)\eta(\rho_4)\rho_5 - A\eta(\rho_3)\tilde{Z}(\rho_2, \rho_5)\rho_4 + A^2g(\rho_2, \rho_5)g(\rho_3, \rho_4)\xi \\ - A^2g(\rho_2, \rho_5)\eta(\rho_4)\rho_3 - A\eta(\rho_5)\tilde{Z}(\rho_3, \rho_2)\rho_4 + A^2g(\rho_2, \rho_4)\eta(\rho_3)\rho_5 \\ - A^2g(\rho_2, \rho_4)\eta(\rho_5)\rho_3 - A\eta(\rho_4)\tilde{Z}(\rho_3, \rho_5)\rho_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.4.14)$$

elde edilir. (4.4.14) eşitliğinde $\rho_3 = \xi$ seçer ve (3.2.25) eşitliğinden yararlanırsak

$$-A\tilde{Z}(\rho_2, \rho_5)\rho_4 - A^2g(\rho_5, \rho_4)\rho_2 + A^2g(\rho_2, \rho_4)\rho_5 = 0 \quad (4.4.15)$$

elde edilir. (4.4.15) ifadesinde (3.2.24) ifadesi yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$R(\rho_2, \rho_5)\rho_4 = [1 + \frac{r}{n(n+1)}][g(\rho_5, \rho_4)\rho_2 - g(\rho_2, \rho_4)\rho_5]$$

elde edilir. Böylece M Kenmotsu manifoldu sabit skaler eğrilikli reel uzay formudur.



4.5. Kenmotsu Manifoldların Projektif Eğrilik Tensörü

Bu alt bölümde bir Kenmotsu manifoldu üzerinde projektif eğrilik tensörünün diğer eğrilik tensörleri üzerine etkileri incelenmiştir.

Teorem 4.5.1. $M, (2n + 1) -$ boyutlu Kenmotsu manifold olsun. Eğer M manifoldu $P(\rho_1, \rho_2) \cdot R = 0$ eğrilik koşulunu sağlarsa, M bir Einstein manifoldudur.

İspat. $M, (2n + 1) -$ boyutlu Kenmotsu manifold olmak üzere kabul edelim ki her $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5 \in \chi(M)$ için

$$(P(\rho_1, \rho_2) \cdot R)(\rho_3, \rho_5, \rho_4) = 0$$

olsun. Bu durumda son eşitlikten

$$\begin{aligned} &P(\rho_1, \rho_2)R(\rho_3, \rho_5)\rho_4 - R(P(\rho_1, \rho_2)\rho_3, \rho_5)\rho_4 - R(\rho_3, P(\rho_1, \rho_2)\rho_5)\rho_4 \\ &- R(\rho_3, \rho_5)P(\rho_1, \rho_2)\rho_4 = 0 \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

yazabiliriz. (4.5.1) eşitliğinde $\rho_1 = \xi$ seçersek

$$\begin{aligned} &P(\xi, \rho_2)R(\rho_3, \rho_5)\rho_4 - R(P(\xi, \rho_2)\rho_3, \rho_5)\rho_4 - R(\rho_3, P(\xi, \rho_2)\rho_5)\rho_4 \\ &- R(\rho_3, \rho_5)P(\xi, \rho_2)\rho_4 = 0 \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

elde edilir. (4.5.2) eşitliğinde (3.2.21) eşitliğinden yararlanırsak

$$\begin{aligned} &-g(\rho_2, R(\rho_3, \rho_5)\rho_4)\xi - \frac{1}{2n}S(\rho_2, R(\rho_3, \rho_5)\rho_4)\xi + g(\rho_2, \rho_3)R(\xi, \rho_5)\rho_4 \\ &+ \frac{1}{2n}S(\rho_2, \rho_3)R(\xi, \rho_5)\rho_4 + g(\rho_2, \rho_5)R(\rho_3, \xi)\rho_4 + \frac{1}{2n}S(\rho_2, \rho_5)R(\rho_3, \xi)\rho_4 \\ &+ g(\rho_2, \rho_4)R(\rho_3, \rho_5)\xi + \frac{1}{2n}S(\rho_2, \rho_4)R(\rho_3, \rho_5)\xi = 0 \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

elde edilir. (4.5.3) eşitliğinde (3.2.4), (3.2.5) ve (3.2.6) eşitliklerinden yararlanırsak

$$\begin{aligned} &-g(\rho_2, R(\rho_3, \rho_5)\rho_4)\xi - \frac{1}{2n}S(\rho_2, R(\rho_3, \rho_5)\rho_4)\xi - g(\rho_2, \rho_3)g(\rho_5, \rho_4)\xi \\ &+ g(\rho_2, \rho_3)\eta(\rho_4)\rho_5 - \frac{1}{2n}S(\rho_2, \rho_3)g(\rho_5, \rho_4)\xi + \frac{1}{2n}S(\rho_2, \rho_3)\eta(\rho_4)\rho_5 \\ &+ g(\rho_2, \rho_5)g(\rho_3, \rho_4)\xi - g(\rho_2, \rho_5)\eta(\rho_4)\rho_3 + \frac{1}{2n}S(\rho_2, \rho_5)g(\rho_3, \rho_4)\xi \\ &- \frac{1}{2n}S(\rho_2, \rho_5)\eta(\rho_4)\rho_3 + g(\rho_2, \rho_4)\eta(\rho_3)\rho_5 - g(\rho_2, \rho_4)\eta(\rho_5)\rho_3 \\ &+ \frac{1}{2n}S(\rho_2, \rho_4)\eta(\rho_3)\rho_5 - \frac{1}{2n}S(\rho_2, \rho_4)\eta(\rho_5)\rho_3 = 0 \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

elde edilir. (4.5.4) eşitliğinde $\rho_3 = \xi$ seçilir ve (3.2.4), (3.2.7) eşitliklerinden yararlanılırsa

$$\begin{aligned}
& -g(\rho_2, \rho_5)\eta(\rho_4)\xi - \frac{1}{2n}S(\rho_2, \rho_5)\eta(\rho_4)\xi + g(\rho_2, \rho_4)\rho_5 \\
& -g(\rho_2, \rho_4)\eta(\rho_5)\xi + \frac{1}{2n}S(\rho_2, \rho_4)\rho_5 - \frac{1}{2n}S(\rho_2, \rho_4)\eta(\rho_5)\xi = 0
\end{aligned} \tag{4.5.6}$$

elde edilir. (4.5.6) eşitliğinde $\rho_4 = \xi$ seçer, (3.2.1), (3.2.7) eşitliklerinden yararlanırsak

$$-g(\rho_2, \rho_5)\xi - \frac{1}{2n}S(\rho_2, \rho_5)\xi = 0$$

ve son eşitliğin her iki tarafının $\xi \in \chi(M)$ ile iç çarpımı alınır

$$S(\rho_2, \rho_5) = -2ng(\rho_2, \rho_5)$$

elde edilir. Böylece M Kenmotsu manifoldu bir Einstein manifoldu olarak elde edilir.

Teorem 4.5.2 $M, (2n + 1)$ -boyutlu Kenmotsu manifold olsun. Eğer M manifoldu $P(\rho_1, \rho_2) \cdot \tilde{Z} = 0$ eğrilik koşulunu sağlarsa M ya bir Einstein manifolddur ya da $r = -2n(2n + 1)$ sabit skaler eğrilikli bir manifolddur.

İspat. $M, (2n + 1)$ -boyutlu Kenmotsu manifold olmak üzere kabul edelim ki her $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5 \in \chi(M)$ için

$$(P(\rho_1, \rho_2) \cdot \tilde{Z})(\rho_3, \rho_5, \rho_4) = 0$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
& P(\rho_1, \rho_2)\tilde{Z}(\rho_3, \rho_5)\rho_4 - \tilde{Z}(P(\rho_1, \rho_2)\rho_3, \rho_5)\rho_4 - \tilde{Z}(\rho_3, P(\rho_1, \rho_2)\rho_5)\rho_4 \\
& - \tilde{Z}(\rho_3, \rho_5)P(\rho_1, \rho_2)\rho_4 = 0
\end{aligned} \tag{4.5.7}$$

elde edilir. (4.5.7) eşitliğinde $\rho_1 = \xi$ seçer ve (3.2.21) eşitliğinden yararlanırsak

$$\begin{aligned}
& -g(\rho_2, \tilde{Z}(\rho_3, \rho_5)\rho_4)\xi - \frac{1}{2n}S(\rho_2, \tilde{Z}(\rho_3, \rho_5)\rho_4)\xi + g(\rho_2, \rho_3)\tilde{Z}(\xi, \rho_5)\rho_4 \\
& + \frac{1}{2n}S(\rho_2, \rho_3)\tilde{Z}(\xi, \rho_5)\rho_4 + g(\rho_2, \rho_5)\tilde{Z}(\rho_3, \xi)\rho_4 + -\frac{1}{2n}S(\rho_2, \rho_5)\tilde{Z}(\rho_3, \xi)\rho_4 \\
& + g(\rho_2, \rho_4)\tilde{Z}(\rho_3, \rho_5)\xi + -\frac{1}{2n}S(\rho_2, \rho_4)\tilde{Z}(\rho_3, \rho_5)\xi = 0
\end{aligned} \tag{4.5.8}$$

elde edilir. (4.5.8) eşitliğinde (3.2.25), (3.2.26) ve (3.2.27) eşitliklerinden yararlanırsak

$$\begin{aligned}
& -g(\rho_2, \tilde{Z}(\rho_3, \rho_5)\rho_4)\xi - \frac{1}{2n}S(\rho_2, \tilde{Z}(\rho_3, \rho_5)\rho_4)\xi - Ag(\rho_2, \rho_3)g(\rho_5, \rho_4)\xi \\
& + Ag(\rho_2, \rho_3)\eta(\rho_4)\rho_5 - \frac{A}{2n}S(\rho_2, \rho_3)g(\rho_5, \rho_4)\xi + \frac{A}{2n}S(\rho_2, \rho_3)\eta(\rho_4)\rho_5 \\
& + Ag(\rho_2, \rho_5)g(\rho_3, \rho_4)\xi - Ag(\rho_2, \rho_5)\eta(\rho_4)\rho_3 + \frac{A}{2n}S(\rho_2, \rho_5)g(\rho_3, \rho_4)\xi \quad (4.5.9) \\
& - \frac{A}{2n}S(\rho_2, \rho_5)\eta(\rho_4)\rho_3 + Ag(\rho_2, \rho_4)\eta(\rho_3)\rho_5 - Ag(\rho_2, \rho_4)\eta(\rho_5)\rho_3 \\
& + \frac{A}{2n}S(\rho_2, \rho_4)\eta(\rho_3)\rho_5 - \frac{A}{2n}S(\rho_2, \rho_4)\eta(\rho_5)\rho_3 = 0
\end{aligned}$$

elde edilir, burada $A = \left[1 + \frac{r}{2n(2n+1)}\right]$ dir. (4.5.9) eşitliğinde $\rho_3 = \xi$ seçilir, (3.2.7), (3.2.25) eşitliklerinden yararlanılırsa

$$\begin{aligned}
& -Ag(\rho_2, \rho_5)\eta(\rho_4)\xi - \frac{A}{2n}S(\rho_2, \rho_5)\eta(\rho_4)\xi + Ag(\rho_2, \rho_4)\rho_5 \\
& - Ag(\rho_2, \rho_4)\eta(\rho_5)\xi + \frac{A}{2n}S(\rho_2, \rho_4)\rho_5 - \frac{A}{2n}S(\rho_2, \rho_4)\eta(\rho_5)\xi = 0 \quad (4.5.10)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.5.10) eşitliğinde ilk önce $\rho_4 = \xi$ seçilir ve daha sonra elde edilen ifadenin her iki tarafının $\xi \in \chi(M)$ ile iç çarpımı alınırsa

$$A\left[\frac{1}{2n}S(\rho_2, \rho_5) + g(\rho_2, \rho_5)\right] = 0$$

elde edilir. Böylece M Kenmotsu manifoldu ya bir Einstein manifolddur ya da $r = -2n(2n + 1)$ sabit skaler eğrilikli bir manifolddur.

Teorem 4.5.3 $M, (2n + 1) -$ boyutlu Kenmotsu manifold olsun. Eğer M manifoldu $P(\rho_1, \rho_2) \cdot S = 0$ eğrilik koşulunu sağlarsa, M manifoldu bir Einstein manifolddur.

İspat. $M, (2n + 1) -$ boyutlu Kenmotsu manifold olmak üzere kabul edelim ki her $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5 \in \chi(M)$ için

$$(P(\rho_1, \rho_2) \cdot S)(\rho_4, \rho_5) = 0$$

olsun. Bu durumda kolaylıkla

$$S(P(\rho_1, \rho_2)\rho_4, \rho_5) + S(\rho_4, P(\rho_1, \rho_2)\rho_5) = 0 \quad (4.5.11)$$

yazabiliriz. (4.5.11) eşitliğinde $\rho_1 = \xi$ seçersek

$$S(P(\xi, \rho_2)\rho_4, \rho_5) + S(\rho_4, P(\xi, \rho_2)\rho_5) = 0 \quad (4.5.12)$$

elde edilir. (4.5.12) eşitliğinde (3.2.21) ve (3.2.7) eşitliklerinden yararlanırsak

$$\begin{aligned}
& 2ng(\rho_2, \rho_4)\eta(\rho_5) + S(\rho_2, \rho_4)\eta(\rho_5) + 2ng(\rho_2, \rho_5)\eta(\rho_4) \\
& + S(\rho_2, \rho_5)\eta(\rho_4) = 0
\end{aligned} \tag{4.5.13}$$

elde edilir. (4.5.13) eşitliğinde $\rho_4 = \xi$ seçersek ve (3.2.7) eşitliğinden yararlanırsak

$$S(\rho_2, \rho_5) = -2ng(\rho_2, \rho_5)$$

elde edilir. Böylece M Kenmotsu manifoldu bir Einstein manifolddur.



4.6 Kenmotsu Manifoldun W_0 Eğrilik Tensörü

Bu alt bölümde bir Kenmotsu manifoldu üzerinde W_0 eğrilik tensörünün diğer eğrilik tensörleri üzerine etkileri incelenmiştir.

Tanım 4.6.1 $(2n + 1)$ boyutlu bir M Riemann manifoldu için W_0 eğrilik tensörü her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$W_0(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{1}{2n}[S(Y, Z)X - g(X, Z)QY], \quad (4.6.1)$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer (4.6.1) eşitliğinde sırasıyla $X = \xi, Y = \xi, Z = \xi$ seçersek $(2n + 1)$ boyutlu bir Kenmotsu manifoldu için

$$W_0(\xi, Y)Z = -g(Y, Z)\xi + \eta(Z)Y + \frac{1}{2n}\eta(Z)QY - \frac{1}{2n}S(Y, Z)\xi, \quad (4.6.2)$$

$$W_0(X, \xi)Z = 0, \quad (4.6.3)$$

$$W_0(X, Y)\xi = \eta(X)Y + \frac{1}{2n}\eta(X)QY \quad (4.6.4)$$

eşitliklerini elde ederiz.

Teorem 4.6.1 $M, (2n + 1)$ boyutlu Kenmotsu manifoldu olsun. Eğer M manifoldu W_0 flat ise bir Einstein manifoldddur.

İspat. Kabul edelim ki M, W_0 flat olsun. Bu durumda her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$W_0(X, Y)Z = 0$$

ve buradan da (4.6.1) yardımı ile

$$R(X, Y)Z = \frac{1}{2n}[S(Y, Z)X - g(X, Z)QY] \quad (4.6.5)$$

yazabiliriz. Eğer (4.6.5) eşitliğinde $Z = \xi$ seçer, (3.2.6), (3.2.7) ve (3.2.8) eşitliklerinden yararlanırsak

$$\eta(X)QY = -2n\eta(X)Y \quad (4.6.6)$$

elde edilir. (4.6.6) eşitliğinde ilk önce $X = \xi$ seçer ve daha sonra her iki tarafın

$Z \in \chi(M)$ ile iç çarpımı alınır

$$S(Y, Z) = -2ng(Y, Z)$$

elde edilir. Böylece M Kenmotsu manifoldu bir Einstein manifolddur.

Teorem 4.6.2 $M, (2n + 1)$ boyutlu Kenmotsu manifoldu olsun. Eğer M manifoldu W_0 semi-simetrik ise bir Einstein manifolddur.

İspat. Kabul edelim ki M, W_0 semi-simetrik bir manifold olsun. Bu durumda her $X, Y, U, V, Z \in \chi(M)$ için

$$(R(X, Y) \cdot W_0)(U, V, Z) = 0,$$

ve buradan da

$$\begin{aligned} (R(X, Y) \cdot W_0)(U, V, Z) &= R(X, Y)W_0(U, V)Z - W_0(R(X, Y)U, V)Z \\ &\quad - W_0(U, R(X, Y)V)Z - W_0(U, V)R(X, Y)Z \\ &= 0, \end{aligned} \tag{4.6.7}$$

elde edilir. (4.6.7) eşitliğinde $X = \xi$ seçer ve (3.2.4) eşitliğinden yararlanırsak

$$\begin{aligned} &-g(Y, W_0(U, V)Z)\xi + \eta(W_0(U, V)Z)Y + g(Y, U)W_0(\xi, V)Z \\ &- \eta(U)W_0(Y, V)Z + g(Y, V)W_0(U, \xi)Z - \eta(V)W_0(U, Y)Z \\ &+ g(Y, Z)W_0(U, V)\xi - \eta(Z)W_0(U, V)Y = 0 \end{aligned} \tag{4.6.8}$$

elde edilir. (4.6.8) eşitliğinde (4.6.2), (4.6.3), (4.6.4) eşitliklerinden yararlanırsak

$$\begin{aligned} &-g(Y, W_0(U, V)Z)\xi + \eta(W_0(U, V)Z)Y - g(Y, U)g(V, Z)\xi \\ &+ g(Y, U)\eta(Z)V - \frac{1}{2n}g(Y, U)S(V, Z)\xi + \frac{1}{2n}g(Y, U)\eta(Z)QV \\ &- \eta(U)W_0(Y, V)Z - \eta(V)W_0(U, Y)Z + g(Y, Z)\eta(U)V \\ &+ \frac{1}{2n}g(Y, Z)\eta(U)QV - \eta(Z)W_0(U, V)Y = 0 \end{aligned} \tag{4.6.9}$$

elde ederiz. (4.6.9) eşitliğinde $U = \xi$ seçer ve (4.6.2) eşitliğinden yararlanırsak

$$\begin{aligned} &W_0(Y, V)Z + g(V, Z)Y + \frac{1}{2n}S(V, Z)Y + \eta(Z)\eta(V)Y - g(Y, Z)\eta(V)\xi \\ &- \frac{1}{2n}S(Y, Z)\eta(V)\xi + \frac{1}{2n}\eta(V)\eta(Z)QY - g(Y, Z)V - \frac{1}{2n}g(Y, Z)QV = 0 \end{aligned} \tag{4.6.10}$$

eşitliği elde edilir. (4.6.10) eşitliğinde $Z = \xi$ seçer, (3.2.1), (3.2.7) ve (4.6.4) eşitliklerinden yararlanırsak

$$\frac{1}{2n}\eta(V)QY + \eta(V)Y = 0 \quad (4.6.11)$$

elde edilir. (4.6.11) eşitliğinde ilk önce $V = \xi$ seçilir ve daha sonra eşitliğin her iki tarafının $Z \in \chi(M)$ ile iç çarpımı alınır

$$S(Y, Z) = -2ng(Y, Z)$$

elde edilir. Böylece M bir Einstein manifolddur.

Teorem 4.6.3 $M, (2n + 1)$ boyutlu bir Kenmotsu manifold olsun. Eğer M manifoldu, $\tilde{Z}(X, Y) \cdot W_0 = 0$ eğrilik koşulunu sağlarsa, M manifoldu ya bir Einstein manifolddur ya da $r = -2n(2n + 1)$ sabit skaler eğrilikli bir manifolddur.

İspat. Kabul edelim ki M manifoldu $\tilde{Z}(X, Y) \cdot W_0 = 0$ eğrilik koşulunu sağlasın. Bu durumda her $X, Y, U, V, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} (\tilde{Z}(X, Y) \cdot W_0)(U, V, Z) &= \tilde{Z}(X, Y)W_0(U, V)Z - W_0(\tilde{Z}(X, Y)U, V)Z \\ &\quad - W_0(U, \tilde{Z}(X, Y)V)Z - W_0(U, V)\tilde{Z}(X, Y)Z \quad (4.6.12) \\ &= 0 \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. (4.6.12) eşitliğinde $X = \xi$ seçilir, (3.2.25) eşitliğinden yararlanılırsa

$$\begin{aligned} &A[-g(Y, W_0(U, V)Z)\xi + \eta(W_0(U, V)Z)Y \\ &\quad + g(Y, U)W_0(\xi, V)Z - \eta(U)W_0(Y, V)Z + g(Y, V)W_0(U, \xi)Z \\ &\quad - \eta(V)W_0(U, Y)Z + g(Y, Z)W_0(U, V)\xi + \eta(Z)W_0(U, V)Y] = 0 \end{aligned} \quad (4.6.13)$$

elde edilir, burada $A = 1 + \frac{r}{2n(2n+1)}$ şeklindedir. Eğer (4.6.13) eşitliğinde (4.6.2), (4.6.3) ve (4.6.4) eşitliklerinden yararlanırsak

$$\begin{aligned} &A[-g(Y, W_0(U, V)Z)\xi + \eta(W_0(U, V)Z)Y - g(Y, U)g(V, Z)\xi \\ &\quad + g(Y, U)\eta(Z)V - \frac{1}{2n}S(V, Z)g(Y, U)\xi + \frac{1}{2n}g(Y, U)\eta(Z)QV \\ &\quad - \eta(U)W_0(Y, V)Z - \eta(V)W_0(U, Y)Z + g(Y, Z)\eta(U)V \\ &\quad + \frac{1}{2n}g(Y, Z)\eta(U)QV - \eta(Z)W_0(U, V)Y] = 0 \end{aligned} \quad (4.6.14)$$

eşitliğini elde ederiz. (4.6.14) ifadesinde $U = \xi$ seçer ve (4.6.2) eşitliğinden bir kez daha yararlanırsak

$$\begin{aligned} & A \left[-g(V, Z)Y - \frac{1}{2n}S(V, Z)Y - \eta(Z)\eta(V)Y - W_0(Y, V)Z \right. \\ & + g(Y, Z)\eta(V)\xi + \frac{1}{2n}S(Y, Z)\eta(V)\xi - \frac{1}{2n}\eta(V)\eta(Z)QY \\ & \left. + g(Y, Z)V + \frac{1}{2n}g(Y, Z)QV \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.6.15)$$

eşitliğini elde ederiz. (4.6.15) eşitliğinde $Z = \xi$ seçer, (3.2.1), (3.2.7), (4.6.4) eşitliklerinden yararlanırsak

$$-A \left[\eta(V)Y + \frac{1}{2n}\eta(V)QY \right] = 0 \quad (4.6.16)$$

elde edilir. (4.6.16) eşitliğinde ilk önce $V = \xi$ seçer ve daha sonra elde edilen eşitliğin her iki tarafının $Z \in \chi(M)$ ile iç çarpımı alınır

$$A = 0 \text{ veya } S(Y, Z) = -2ng(Y, Z)$$

elde edilir. Böylece M manifoldu ya bir Einstein manifold, yada $r = -2n(2n + 1)$ sabit skaler eğrilikli bir manifolddur.

Teorem 4.6.4 M , $(2n + 1)$ boyutlu bir Kenmotsu manifold olsun. Eğer M manifoldu $W_0(X, Y) \cdot S = 0$ eğrilik koşulunu sağlarsa, M bir Einstein manifolddur.

İspat. Kabul edelim ki $W_0(X, Y) \cdot S = 0$ eğrilik koşulu sağlansın. Bu durumda

$$S(W_0(X, Y)Z, U) + S(Z, W_0(X, Y)U) = 0 \quad (4.6.17)$$

eşitliğini kolaylıkla yazabiliriz. Eğer (4.6.17) eşitliğinde $X = \xi$ seçer ve (4.6.2) eşitliğinden yararlanırsak

$$\begin{aligned} & 2ng(Y, Z)\eta(U) + \eta(Z)S(Y, U) + S(Y, Z)\eta(U) \\ & + \frac{1}{2n}\eta(Z)S(QY, U) + 2ng(Y, U)\eta(Z) + S(Y, Z)\eta(U) \\ & + S(Y, U)\eta(Z) + \frac{1}{2n}S(Z, QY)\eta(U) = 0 \end{aligned} \quad (4.6.18)$$

eşitliğini elde ederiz. (4.6.18) eşitliğinde $Z = \xi$ seçersek ve (3.2.7) den yararlanırsak

$$\frac{1}{2n}S(QY, U) + 2ng(Y, U) + 2S(Y, U) = 0$$

ve buradan da

$$g(Q^2Y, U) + 4n^2g(Y, U) + 4ng(QY, U) = 0 \quad (4.6.19)$$

elde ederiz. Son eşitlikten açıktır ki

$$Q^2 + 4nQ + 4n^2I = 0$$

olmak üzere

$$(Q + 2nI)^2 = 0 \quad (4.6.20)$$

elde ederiz. (4.6.20) eşitliğinden her $X, Y \in \chi(M)$ için

$$S(X, Y) = -2ng(X, Y)$$

olacağı açıktır ki bu da bize M Kenmotsu manifoldunun bir Einstein manifoldu olduğunu gösterir.

5. KENMOTSU MANİFOLDLARIN İNVARİYANT ALTMANİFOLDLARI

Bu bölümde yine tezde elde edilen orjinal sonuçlara yer verilmiştir. Kenmotsu manifoldların invaryant altmanifoldları ele alınmış ve özellikle ivaryant pseudo-paralel altmanifoldları sınıflandırılmıştır. Ayrıca $(2n + 1)$ boyutlu Kenmotsu manifold için $\bar{\nabla}\sigma = 0, \bar{R} \cdot \sigma = 0$ ve $\bar{R} \cdot \bar{\nabla}\sigma = 0$ eğrilik şartları karakterize edilmiştir.

Kabul edelim ki $\bar{M}$, $(2n + 1)$ boyutlu M Kenmotsu manifoldunun immersed alt manifoldu olsun. $\Gamma(T\bar{M})$ ve $\Gamma(T^\perp\bar{M})$ ile M de $\bar{M}$ altmanifoldunun teğet ve normal altuzaylarını tanımlayalım. Her $\rho_1, \rho_2 \in \Gamma(T\bar{M})$ ve $\rho_6 \in \Gamma(T^\perp\bar{M})$ için Gauss ve Weingarten formülleri sırasıyla

$$\nabla_{\rho_1} \rho_2 = \bar{\nabla}_{\rho_1} \rho_2 + \sigma(\rho_1, \rho_2), \quad (5.1)$$

$$\nabla_{\rho_1} \rho_6 = -A_{\rho_6} \rho_1 + \bar{\nabla}_{\rho_1}^\perp \rho_6 \quad (5.2)$$

şeklinde verilir. Burada $\bar{\nabla}$ ve $\bar{\nabla}^\perp$ sırasıyla $\bar{M}$ ve $\Gamma(T^\perp\bar{M})$ üzerindeki konneksiyonlar, σ ve A ise sırasıyla $\bar{M}$ nin ikinci temel formu ve şekil operatörüdür.

Tanım 5.1. $\bar{M}$, $(2n + 1)$ boyutlu bir M Kenmotsu manifoldun immersed altmanifoldu olmak üzere her bir $\rho_1 \in \bar{M}$ noktasında

$$\varphi(T_x\bar{M}) \subseteq T_x\bar{M}$$

oluyorsa $\bar{M}$ manifolduna M manifoldunun invaryant altmanifoldu denir.

Açıktır ki bir invaryant altmanifold, esas manifoldun tüm özelliklerini taşımaktadır.

Bu tezin gerikalan kısmında $\bar{M}$ altmanifoldunun $(2n + 1)$ boyutlu M manifoldunun invaryant altmanifoldu olduğunu kabul edeceğiz. Böylece her $\rho_1, \rho_2 \in \Gamma(T\bar{M})$ için

$$\sigma(\rho_1, \xi) = 0, \quad (5.6)$$

ve

$$\sigma(\varphi\rho_1, \rho_2) = \sigma(\rho_1, \varphi\rho_2) = \varphi\sigma(\rho_1, \rho_2) \quad (5.7)$$

olduğu açıktır.

Teorem 5.1 $\bar{M}$, $(2n + 1)$ boyutlu bir M Kenmotsu manifoldun invaryant altmanifoldu olsun. $\bar{M}$ nin σ ikinci temel formunun paralel olması için gerekli ve yeterli koşul $\bar{M}$ nin total geodezik olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki $\bar{M}$ nin σ ikinci temel formu paralel olsun. O halde tanım gereği her $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \Gamma(T\bar{M})$ için

$$\bar{\nabla}_{\rho_1}^\perp \sigma(\rho_2, \rho_3) - \sigma(\bar{\nabla}_{\rho_1} \rho_2, \rho_3) - \sigma(\rho_2, \bar{\nabla}_{\rho_1} \rho_3) = 0 \quad (5.8)$$

dır. (5.8) eşitliğinde $\rho_3 = \xi$ seçer, (3.2.2) ve (5.6) eşitliklerinden yararlanırsak

$$\sigma(\rho_1, \rho_2) = 0$$

elde edilir. Böylece $\bar{M}$ altmanifoldu total geodeziktir.

5.1. Kenmotsu Manifoldların pseudo-paralel Altmanifoldları

Tanım 5.1.1 (M, g) Riemann manifoldunun n boyutlu bir altmanifoldu $(\bar{M}, \bar{g})$ olsun. Eğer $n \geq 3$ için $\bar{M}$ nin her noktasında $R \cdot \sigma$ ve $Q(\bar{g}, \sigma)$ tensörleri lineer bağımlı ise $\bar{M}$ ye M nin pseudo-paralel altmanifoldu denir.

Bu durumda $\bar{M}$ nin pseudo-paralel olması için gerekli ve yeterli koşul $\rho_4 = \{p \in \bar{M} | Q(\bar{g}, \sigma) \neq 0\}$ kümesi üzerinde

$$R \cdot \sigma = LQ(\bar{g}, \sigma)$$

olacak şekilde ρ_4 kümesi üzerinde L fonksiyonunun olmasıdır (Asperti ve ark., 1999).

Özel olarak $L = 0$ ise yani $R \cdot \sigma = 0$ ise $\bar{M}$ ye M nin semi-paralel altmanifoldu denir (Deprez, 1985).

Şimdi $(2n + 1)$ boyutlu bir M Kenmotsu manifoldunun $\bar{M}$ altmanifoldu için pseudo-paralellik durumunun inceleyelim.

Teorem 5.1.1 $\bar{M}$. $(2n + 1)$ boyutlu M Kenmotsu manifoldunun invaryant altmanifoldu olsun. Eğer $\bar{M}$ pseudo-paralel altmanifold ise bu durumda $\bar{M}$ ya total geodeziktir yada $L = 1$ dir.

İspat. Kabul edelim ki $\bar{M}$ pseudo-paralel altmanifold olsun. O halde tanım gereği $R \cdot \sigma$ ve $Q(g, \sigma)$ lineer bağımlıdır. Yani her $\rho_1, \rho_2, \rho_4, \rho_6 \in \Gamma(T\bar{M})$ için

$$(R(\rho_1, \rho_2) \cdot \sigma)(\rho_4, \rho_6) = LQ(g, \sigma)(\rho_4, \rho_6; \rho_1, \rho_2),$$

olacak şekilde L fonksiyonu vardır. Buradan

$$\begin{aligned} & R^\perp(\rho_1, \rho_2)\sigma(\rho_4, \rho_6) - \sigma(\bar{R}(\rho_1, \rho_2)\rho_4, \rho_6) \\ & - \sigma(\rho_4, \bar{R}(\rho_1, \rho_2)\rho_6) = -L \left\{ \sigma((\rho_1 \wedge_g \rho_2)\rho_4, \rho_6) \right. \\ & \left. + \sigma(\rho_4, (\rho_1 \wedge_g \rho_2)\rho_6) \right\}, \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
& R^\perp(\rho_1, \rho_2)\sigma(\rho_4, \rho_6) - \sigma(\bar{R}(\rho_1, \rho_2)\rho_4, \rho_6) - \sigma(\rho_4, \bar{R}(\rho_1, \rho_2)\rho_6) \\
& = -k_1\{g(\rho_2, \rho_4)\sigma(\rho_1, \rho_6) - g(\rho_1, \rho_4)\sigma(\rho_2, \rho_6) \\
& + g(\rho_2, \rho_6)\sigma(\rho_4, \rho_1) - g(\rho_1, \rho_6)\sigma(\rho_4, \rho_2)\}.
\end{aligned} \tag{5.1.1}$$

yazabiliriz. (5.1.1) ifadesinde $\rho_6 = \xi$ seçer ve (3.2.1), (3.2.4) ve (5.6) eşitliklerinden yararlanırsak

$$(1 + L)\sigma(\rho_4, \eta(\rho_1)\rho_2 - \eta(\rho_2)\rho_1) = 0 \tag{5.1.2}$$

elde edilir. (5.1.2) eşitliğinde $\rho_2 = \xi$ seçer ve (3.2.1), (5.6) eşitliklerinden yararlanırsak

$$(1 - L)\sigma(\rho_4, \rho_1) = 0$$

elde edilir. Böylece $\bar{M}$ ya total geodeziktir yada $L = 1$ dir.

Sonuç 5.1.1 $\bar{M}$. $(2n + 1)$ boyutlu M Kenmotsu manifoldunun invaryant altmanifoldu olsun. Eğer $\bar{M}$ semi-paralel altmanifold ise bu durumda $\bar{M}$ total geodeziktir.

5.2. Kenmotsu Manifoldların 2 pseudo-paralel Altmanifoldları

Tanım 5.2.1 (M, g) Riemann manifoldunun n boyutlu bir altmanifoldu $(\bar{M}, \bar{g})$ olsun. Eğer $n \geq 3$ için $\bar{M}$ nin her noktasında $R \cdot \nabla \sigma$ ve $Q(\bar{g}, \nabla \sigma)$ tensörleri lineer bağımlı ise $\bar{M}$ ye M nin 2 pseudo-paralel altmanifoldu denir (Sular, 2009).

Bu durumda $\bar{M}$ nin 2 pseudo-paralel olması için gerekli ve yeterli koşul $\rho_4 = \{p \in \bar{M} | Q(\bar{g}, \nabla \sigma) \neq 0\}$ kümesi üzerinde

$$R \cdot \nabla \sigma = LQ(\bar{g}, \nabla \sigma)$$

olacak şekilde U kümesi üzerinde L fonksiyonunun olmasıdır (Asperti ve ark., 1999).

Özel olarak $L = 0$ ise yani $\bar{M}$ nin her noktasında $R \cdot \nabla \sigma = 0$ ise $\bar{M}$ ye M nin 2 semi-paralel altmanifoldu denir (Arslan ve ark., 2000).

Şimdi $(2n + 1)$ boyutlu bir M Kenmotsu manifoldunun $\bar{M}$ altmanifoldu için 2 pseudo-paralellik durumunun inceleyelim.

Teorem 5.2.1 $\bar{M}$. $(2n + 1)$ boyutlu M Kenmotsu manifoldunun invariant altmanifoldu olsun. Eğer $\bar{M}$ 2 pseudo-paralel altmanifold ise bu durumda $\bar{M}$ ya total geodeziktir yada $L = 1$ dir.

İspat. Kabul edelim ki $\bar{M}$ 2 pseudo-paralel altmanifold olsun. Bu durumda tanım gereği $R \cdot \nabla \sigma$ ve $Q(\bar{g}, \nabla \sigma)$ lineer bağımlıdır. Yani her $\rho_1, \rho_2, \rho_4, \rho_6, \rho_3 \in \Gamma(T\bar{M})$ için

$$(R(\rho_1, \rho_2) \cdot \nabla \sigma)(\rho_4, \rho_6, \rho_3) = LQ(g, \nabla \sigma)(\rho_4, \rho_6, \rho_3; \rho_1, \rho_2) \quad (5.2.1)$$

olacak şekilde L fonksiyonu vardır. (5.2.1) eşitliğinde $\rho_1 = \rho_3 = \xi$ seçersek

$$\begin{aligned} & R^\perp(\xi, \rho_2)(\nabla_{\rho_4} \sigma)(\rho_6, \xi) - (\nabla_{\bar{R}(\xi, \rho_2)\rho_4} \sigma)(\rho_6, \xi) \\ & - (\nabla_{\rho_4} \sigma)(\bar{R}(\xi, \rho_2)\rho_6, \xi) - (\nabla_{\rho_4} \sigma)(\rho_6, \bar{R}(\xi, \rho_2)\xi) \\ & = -L \left\{ (\nabla_{(\xi \wedge_g \rho_2)\rho_4} \sigma)(\rho_6, \xi) + (\nabla_{\rho_4} \sigma)((\xi \wedge_g \rho_2)\rho_6, \xi) \right. \\ & \left. + (\nabla_{\rho_4} \sigma)(\rho_6, (\xi \wedge_g \rho_2)\xi) \right\}. \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

elde edilir. Şimdi (5.2.2) eşitliğindeki tüm ifadeleri tek tek hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
R^\perp(\xi, \rho_2)(\nabla_{\rho_4} \sigma)(\rho_6, \xi) &= R^\perp(\xi, \rho_2)\{\bar{\nabla}_{\rho_4}^\perp \sigma(\rho_6, \xi) \\
&\quad - \sigma(\bar{\nabla}_{\rho_4} \rho_6, \xi) - \sigma(\rho_6, \bar{\nabla}_{\rho_4} \xi)\} \\
&= -R^\perp(\xi, \rho_2)\sigma(\rho_6, -\rho_4 + \eta(\rho_4)\xi) \\
&= R^\perp(\xi, \rho_2)\sigma(\rho_6, \rho_4),
\end{aligned} \tag{5.2.3}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\bar{R}(\xi, \rho_2)\rho_4} \sigma)(\rho_6, \xi) &= \bar{\nabla}_{\bar{R}(\xi, \rho_2)\rho_4}^\perp \sigma(\rho_6, \xi) \\
&\quad - \sigma(\bar{\nabla}_{\bar{R}(\xi, \rho_2)\rho_4} \rho_6, \xi) - \sigma(\rho_6, \bar{\nabla}_{\bar{R}(\xi, \rho_2)\rho_4} \xi) \\
&= -\sigma(\rho_6, -\bar{R}(\xi, \rho_2)\rho_4 + \eta(\bar{R}(\xi, \rho_2)\rho_4)\xi) \\
&= \eta(\rho_4)\sigma(\rho_6, \rho_2),
\end{aligned} \tag{5.2.4}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\rho_4} \sigma)(\bar{R}(\xi, \rho_2)\rho_6, \xi) &= \bar{\nabla}_{\rho_4}^\perp \sigma(\bar{R}(\xi, \rho_2)\rho_6, \xi) \\
&\quad - \sigma(\bar{\nabla}_{\rho_4} \bar{R}(\xi, \rho_2)\rho_6, \xi) - \sigma(\bar{R}(\xi, \rho_2)\rho_6, \bar{\nabla}_{\rho_4} \xi) \\
&= -\sigma(-g(\rho_2, \rho_6)\xi + \eta(\rho_6)\rho_2, -\rho_4 + \eta(\rho_4)\xi) \\
&= \eta(\rho_6)\sigma(\rho_2, \rho_4),
\end{aligned} \tag{5.2.5}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\rho_4} \sigma)(\rho_6, \bar{R}(\xi, \rho_2)\xi) &= (\nabla_{\rho_4} \sigma)(\rho_6, \rho_2 - \eta(\rho_2)\xi) \\
&= (\nabla_{\rho_4} \sigma)(\rho_6, \rho_2) - (\nabla_{\rho_4} \sigma)(\rho_6, \eta(\rho_2)\xi) \\
&= (\nabla_{\rho_4} \sigma)(\rho_6, \rho_2) - \bar{\nabla}_{\rho_4}^\perp \sigma(\rho_6, \eta(\rho_2)\xi) \\
&\quad + \sigma(\bar{\nabla}_{\rho_4} \rho_6, \eta(\rho_2)\xi) + \sigma(\rho_6, \bar{\nabla}_{\rho_4} \eta(\rho_2)\xi) \\
&= (\nabla_{\rho_4} \sigma)(\rho_6, \rho_2) - \eta(\rho_2)\sigma(\rho_6, \rho_4),
\end{aligned} \tag{5.2.6}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla_{(\xi \wedge_g \rho_2) \rho_4} \sigma)(\rho_6, \xi) &= \bar{\nabla}_{(\xi \wedge_g \rho_2) \rho_4}^\perp \sigma(\rho_6, \xi) \\
&- \sigma(\bar{\nabla}_{(\xi \wedge_g \rho_2) \rho_4} \rho_6, \xi) - \sigma(\rho_6, \bar{\nabla}_{(\xi \wedge_g \rho_2) \rho_4} \xi) \\
&= -\eta(\rho_4) \sigma(\rho_6, \rho_2),
\end{aligned} \tag{5.2.7}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\rho_4} \sigma)((\xi \wedge_g \rho_2) \rho_6, \xi) &= \bar{\nabla}_{\rho_4}^\perp \sigma((\xi \wedge_g \rho_2) \rho_6, \xi) \\
&- \sigma(\bar{\nabla}_{\rho_4} (\xi \wedge_g \rho_2) \rho_6, \xi) - \sigma((\xi \wedge_g \rho_2) \rho_6, \bar{\nabla}_{\rho_4} \xi) \\
&= -\sigma(g(\rho_2, \rho_6) \xi - g(\xi, \rho_6) \rho_2, -\rho_4 + \eta(\rho_4) \xi) \\
&= -\eta(\rho_6) \sigma(\rho_2, \rho_4),
\end{aligned} \tag{5.2.8}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\rho_4} \sigma)(\rho_6, (\xi \wedge_g \rho_2) \xi) &= (\nabla_{\rho_4} \sigma)(\rho_6, \eta(\rho_2) \xi - \rho_2) \\
&= (\nabla_{\rho_4} \sigma)(\rho_6, \eta(\rho_2) \xi) - (\nabla_{\rho_4} \sigma)(\rho_6, \rho_2) \\
&= \eta(\rho_2) \sigma(\rho_6, \rho_4) - (\nabla_{\rho_4} \sigma)(\rho_6, \rho_2).
\end{aligned} \tag{5.2.9}$$

Eğer (5.2.3),(5.2.4),(5.2.5),(5.2.6),(5.2.7),(5.2.8) ve (5.2.9) eşitliklerini (5.2.2) denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
&R^\perp(\xi, \rho_2) \sigma(\rho_6, \rho_4) - \eta(\rho_4) \sigma(\rho_6, \rho_2) \\
&- \eta(\rho_6) \sigma(\rho_2, \rho_4) + \sigma(\rho_6, \rho_4) \\
&- (\nabla_{\rho_4} \sigma)(\rho_6, \rho_2) = -L\{-\eta(\rho_6) \sigma(\rho_4, \rho_2) \\
&- \eta(\rho_4) \sigma(\rho_2, \rho_6) + \eta(\rho_2) \sigma(\rho_6, \rho_4) \\
&- (\nabla_{\rho_4} \sigma)(\rho_6, \rho_2)\}.
\end{aligned} \tag{5.2.10}$$

elde edilir. (5.2.10) eşitliğinde $\rho_6 = \xi$ seçer ve

$$(\nabla_{\rho_4} \sigma)(\xi, \rho_2) = \sigma(\rho_4, \rho_2) \quad (5.2.11)$$

eşitliğinden yararlanırsak we get

$$[1 - L]\sigma(\rho_2, \rho_4) = 0$$

elde edilir. Böylece $\bar{M}$ ya total geodeziktir ya da $L = 1$ dir.

Sonuç 5.2.1 $\bar{M}$. $(2n + 1)$ boyutlu M Kenmotsu manifoldunun invaryant altmanifoldu olsun. Eğer $\bar{M}$ 2 semi-paralel altmanifold ise bu durumda $\bar{M}$ total geodeziktir.



5.3. Kenmotsu Manifoldun Ricci Genelleştirilmiş Pseudo-paralel Altmanifoldu

Tanım 5.3.1 (M, g) Riemann manifoldunun n boyutlu bir altmanifoldu $(\bar{M}, \bar{g})$ olsun. Eğer $n \geq 3$ için $\bar{M}$ nin her noktasında $R \cdot \sigma$ ve $Q(S, \sigma)$ tensörleri lineer bağımlı ise $\bar{M}$ ye M nin Ricci genelleştirilmiş pseudo-paralel altmanifoldu denir.

Bu durumda $\bar{M}$ nin Ricci genelleştirilmiş pseudo-paralel olması için gerekli ve yeterli koşul $U = \{p \in \bar{M} | Q(S, \sigma) \neq 0\}$ kümesi üzerinde

$$R \cdot \sigma = LQ(S, \sigma)$$

olacak şekilde U kümesi üzerinde L fonksiyonunun olmasıdır.

Özel olarak $L = 0$ ise yani $R \cdot \sigma = 0$ ise $\bar{M}$ ye M nin Ricci genelleştirilmiş semi-paralel altmanifoldu denir.

Şimdi $(2n + 1)$ boyutlu bir M Kenmotsu manifoldunun $\bar{M}$ altmanifoldu için Ricci genelleştirilmiş pseudo-paralellik durumunun inceleyelim.

Teorem 5.3.1 $\bar{M}$. $(2n + 1)$ boyutlu M Kenmotsu manifoldunun invaryant altmanifoldu olsun. Eğer $\bar{M}$ Ricci genelleştirilmiş pseudo-paralel altmanifold ise bu durumda $\bar{M}$ ya total geodeziktir yada $L = -\frac{1}{2n}$ dir.

İspat. Kabul edelim ki $\bar{M}$ Ricci genelleştirilmiş pseudo-paralel altmanifold olsun. O halde tanım gereği $R \cdot \sigma$ ve $Q(S, \sigma)$ lineer bağımlıdır. Yani her $\rho_1, \rho_2, \rho_4, \rho_6 \in \Gamma(T\bar{M})$ için

$$(R(\rho_1, \rho_2) \cdot \sigma)(\rho_4, \rho_6) = LQ(S, \sigma)(\rho_4, \rho_6; \rho_1, \rho_2)$$

olacak şekilde L fonksiyonu vardır. Buradan kolaylıkla

$$\begin{aligned} & R^\perp(\rho_1, \rho_2)\sigma(\rho_4, \rho_6) - \sigma(\bar{R}(\rho_1, \rho_2)\rho_4, \rho_6) \\ & - \sigma(\rho_4, \bar{R}(\rho_1, \rho_2)\rho_6) = -L\{\sigma((\rho_1 \wedge_S \rho_2)\rho_4, \rho_6) \\ & + \sigma(\rho_4, (\rho_1 \wedge_S \rho_2)\rho_6)\} \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

yazabiliriz. (5.3.1) eşitliğinde $\rho_1 = \rho_6 = \xi$ seçilirse

$$-\sigma(\rho_4, \bar{R}(\xi, \rho_2)\xi) = LS(\xi, \xi)\sigma(\rho_4, \rho_2) \quad (5.3.2)$$

elde edilir. (5.3.2) eşitliğinde (3.2.4), (3.2.7) ve (5.6) eşitliklerinden yararlanırsak

$$(1 + 2nL)\sigma(\rho_4, \rho_2) = 0.$$

elde edilir. Böylece $\bar{M}$ ya total geodeziktir ya da $L = \frac{-1}{2n}$ dir.

Sonuç 5.3.1 $\bar{M}$. $(2n + 1)$ boyutlu M Kenmotsu manifoldunun invaryant altmanifoldu olsun. Eğer $\bar{M}$ Ricci genelleştirilmiş semi-paralel altmanifold ise bu durumda $\bar{M}$ total geodeziktir.



5.4. Kenmotsu Manifoldun Ricci Genelleştirilmiş 2 Pseudo-paralel Altmanifoldu

Tanım 5.4.1 (M, g) Riemann manifoldunun n boyutlu bir altmanifoldu $(\bar{M}, \bar{g})$ olsun. Eğer $n \geq 3$ için $\bar{M}$ nin her noktasında $R \cdot \nabla \sigma$ ve $Q(S, \nabla \sigma)$ tensörleri lineer bağımlı ise $\bar{M}$ ye M nin Ricci genelleştirilmiş 2 pseudo-paralel altmanifoldu denir (Sular, 2009).

Bu durumda $\bar{M}$ nin Ricci genelleştirilmiş 2 pseudo-paralel olması için gerekli ve yeterli koşul $U = \{p \in \bar{M} | Q(S, \nabla \sigma) \neq 0\}$ kümesi üzerinde

$$R \cdot \nabla \sigma = LQ(S, \nabla \sigma)$$

olacak şekilde U kümesi üzerinde L fonksiyonunun olmasıdır.

Özel olarak $L = 0$ ise yani $\bar{M}$ nin her noktasında $R \cdot \nabla \sigma = 0$ ise $\bar{M}$ ye M nin Ricci genelleştirilmiş 2 semi-paralel altmanifoldu denir (Arslan ve ark., 2000).

Şimdi $(2n + 1)$ boyutlu bir M Kenmotsu manifoldunun $\bar{M}$ altmanifoldu için Ricci genelleştirilmiş 2 pseudo-paralellik durumunun inceleyelim.

Teorem 5.4.1 $\bar{M}$. $(2n + 1)$ boyutlu M Kenmotsu manifoldunun invariant altmanifoldu olsun. Eğer $\bar{M}$ Ricci genelleştirilmiş 2 pseudo-paralel altmanifold ise bu durumda $\bar{M}$ ya total geodeziktir yada $L = \frac{1}{2n}$ dir.

İspat. Kabul edelim ki $\bar{M}$ Ricci genelleştirilmiş 2 pseudo-paralel altmanifold olsun. O halde tanım gereği $R \cdot \nabla \sigma$ ve $Q(S, \nabla \sigma)$ lineer bağımlıdır. Yani her $\rho_1, \rho_2, \rho_4, \rho_6, \rho_3 \in \Gamma(T\bar{M})$ için

$$(R(\rho_1, \rho_2) \cdot \nabla \sigma)(\rho_4, \rho_6, \rho_3) = LQ(S, \nabla \sigma)(\rho_4, \rho_6, \rho_3; \rho_1, \rho_2) \quad (5.4.1)$$

olacak şekilde L fonksiyonu vardır. (5.4.1) eşitliğinde $\rho_1 = \rho_6 = \xi$ seçersek

$$\begin{aligned} & R^\perp(\xi, \rho_2)(\nabla_{\rho_4} \sigma)(\xi, \rho_3) - (\nabla_{\bar{R}(\xi, \rho_2)\rho_4} \sigma)(\xi, \rho_3) \\ & - (\nabla_{\rho_4} \sigma)(\bar{R}(\xi, \rho_2)\xi, \rho_3) - (\nabla_{\rho_4} \sigma)(\xi, \bar{R}(\xi, \rho_2)\rho_3) \\ & = -L\{(\nabla_{(\xi \wedge_S \rho_2)\rho_4} \sigma)(\xi, \rho_3) + (\nabla_{\rho_4} \sigma)((\xi \wedge_S \rho_2)\xi, \rho_3) \\ & + (\tilde{\nabla}_{\rho_4} \sigma)(\xi, (\xi \wedge_S \rho_2)\rho_3)\}. \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

elde edilir. Şimdi (5.4.2) eşitliğindeki tüm ifadeleri tek tek hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
R^\perp(\xi, \rho_2)(\nabla_{\rho_4}\sigma)(\xi, \rho_3) &= R^\perp(\xi, \rho_2)\{\bar{\nabla}_{\rho_4}^\perp \sigma(\xi, \rho_3) \\
&\quad - \sigma(\bar{\nabla}_{\rho_4} \rho_3, \xi) - \sigma(\rho_3, \bar{\nabla}_{\rho_4} \xi)\} \\
&= R^\perp(\xi, \rho_2)\sigma(\rho_3, \rho_4).
\end{aligned} \tag{5.4.3}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\bar{R}(\xi, \rho_2)\rho_4}\sigma)(\xi, \rho_3) &= \bar{\nabla}_{\bar{R}(\xi, \rho_2)\rho_4}^\perp \sigma(\xi, \rho_3) \\
&\quad - \sigma(\bar{\nabla}_{\bar{R}(\xi, \rho_2)\rho_4} \xi, \rho_3) - \sigma(\xi, \bar{\nabla}_{\bar{R}(\xi, \rho_2)\rho_4} \rho_3) \\
&= \eta(\rho_4)\sigma(\rho_2, \rho_3),
\end{aligned} \tag{5.4.4}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\rho_4}\sigma)(\bar{R}(\xi, \rho_2)\xi, \rho_3) &= (\nabla_{\rho_4}\sigma)(\rho_2 - \eta(\rho_2)\xi, \rho_3) \\
&= (\nabla_{\rho_4}\sigma)(\rho_2, \rho_3) - \eta(\rho_2)\sigma(\rho_4, \rho_3),
\end{aligned} \tag{5.4.5}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\rho_4}\sigma)(\xi, \bar{R}(\xi, \rho_2)\rho_3) &= \bar{\nabla}_{\rho_4}^\perp \sigma(\xi, \bar{R}(\xi, \rho_2)\rho_3) \\
&\quad - \sigma(\bar{\nabla}_{\rho_4} \xi, \bar{R}(\xi, \rho_2)\rho_3) - \sigma(\xi, \bar{\nabla}_{\rho_4} \bar{R}(\xi, \rho_2)\rho_3) \\
&= \eta(\rho_3)\sigma(\rho_4, \rho_2),
\end{aligned} \tag{5.4.6}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla_{(\xi \wedge_S \rho_2)\rho_4}\sigma)(\xi, \rho_3) &= \bar{\nabla}_{(\xi \wedge_S \rho_2)\rho_4}^\perp \sigma(\xi, \rho_3) \\
&\quad - \sigma(\bar{\nabla}_{(\xi \wedge_S \rho_2)\rho_4} \xi, \rho_3) - \sigma(\xi, \bar{\nabla}_{(\xi \wedge_S \rho_2)\rho_4} \rho_3) \\
&= 2n\eta(\rho_4)\sigma(\rho_2, \rho_3),
\end{aligned} \tag{5.4.7}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\rho_4} \sigma)((\xi \wedge_S \rho_2) \xi, \rho_3) &= (\nabla_{\rho_4} \sigma)(S(\rho_2, \xi) \xi - S(\xi, \xi) \rho_2, \rho_3) \\
&= (\nabla_{\rho_4} \sigma)(-2n\eta(\rho_2) \xi + 2n\rho_2, \rho_3) \\
&= -2n\{\bar{\nabla}_{\rho_4}^\perp \sigma(\eta(\rho_2) \xi, \rho_3) - \sigma(\bar{\nabla}_{\rho_4} \eta(\rho_2) \xi, \rho_3) \\
&\quad - \sigma(\eta(\rho_2) \xi, \bar{\nabla}_{\rho_4} \rho_3)\} + 2n(\nabla_{\rho_4} \sigma)(\rho_2, \rho_3) \\
&= 2n(\nabla_{\rho_4} \sigma)(\rho_2, \rho_3) - 2n\eta(\rho_2) \sigma(\rho_4, \rho_3),
\end{aligned} \tag{5.4.8}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\rho_4} \sigma)(\xi, (\xi \wedge_S \rho_2) \rho_3) &= (\nabla_{\rho_4} \sigma)(\xi, S(\rho_2, \rho_3) \xi - S(\xi, \rho_3) \rho_2) \\
&= (\nabla_{\rho_4} \sigma)(\xi, S(\rho_2, \rho_3) \xi) + (\tilde{\nabla}_{\rho_4} \sigma)(\xi, 2n\eta(\rho_3) \rho_2) \\
&= 2n\eta(\rho_3) \sigma(\rho_4, \rho_2).
\end{aligned} \tag{5.4.9}$$

Yukarıda elde edilen (5.4.3), (5.4.4), (5.4.5), (5.4.6), (5.4.7), (5.4.8), (5.4.9) eşitliklerini (5.4.2) eşitliğinde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
&R^\perp(\xi, \rho_2) \sigma(\rho_3, \rho_4) - \eta(\rho_4) \sigma(\rho_2, \rho_3) \\
&+ \eta(\rho_2) \sigma(\rho_4, \rho_3) - \eta(\rho_3) \sigma(\rho_4, \rho_2) \\
&- (\nabla_{\rho_4} \sigma)(\rho_2, \rho_3) = -L\{2n\eta(\rho_4) \sigma(\rho_2, \rho_3) \\
&- 2n\eta(\rho_2) \sigma(\rho_4, \rho_3) + 2n\eta(\rho_3) \sigma(\rho_4, \rho_2) \\
&+ 2n(\nabla_{\rho_4} \sigma)(\rho_2, \rho_3)\}
\end{aligned} \tag{5.4.10}$$

elde edilir. (5.4.10) eşitliğinde $\rho_3 = \xi$ seçer ve

$$(\nabla_{\rho_4} \sigma)(\rho_2, \xi) = \sigma(\rho_4, \rho_2),$$

eşitliğinden yararlanırsak

$$[2nL - 1] \sigma(\rho_4, \rho_2) = 0$$

elde edilir. Böylece $\bar{M}$ ya total geodeziktir yada $L = \frac{1}{2n}$ dir.

5.5. Kenmotsu Manifoldun W_8 Pseudo-paralel Altmanifoldu

Bu bölümde $(2n + 1)$ boyutlu Kenmotsu manifoldun pseudo-paralel altmanifoldları özel seçilen W_8 eğrilik tensörü üzerinde incelenmiştir.

Tanım 5.5.1 $(2n + 1)$ boyutlu bir M Riemann manifoldu için W_8 eğrilik tensörü her $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \chi(M)$ için

$$W_8(\rho_1, \rho_2)\rho_3 = R(\rho_1, \rho_2)\rho_3 - \frac{1}{2n}[S(\rho_2, \rho_3)\rho_1 - S(\rho_1, \rho_3)\rho_2], \quad (5.5.1)$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer (5.5.1) eşitliğinde sırasıyla $\rho_1 = \xi, \rho_2 = \xi, \rho_3 = \xi$ seçersek $(2n + 1)$ boyutlu bir Kenmotsu manifoldu için

$$W_8(\xi, \rho_2)\rho_3 = -g(\rho_2, \rho_3)\xi + \eta(\rho_3)\rho_2 - \eta(\rho_2)\rho_3 - \frac{1}{2n}S(\rho_2, \rho_3)\xi, \quad (5.5.2)$$

$$W_8(\rho_1, \xi)\rho_3 = g(\rho_1, \rho_3)\xi - \eta(\rho_1)\rho_3, \quad (5.5.3)$$

$$W_8(\rho_1, \rho_2)\xi = \eta(\rho_1)\rho_2 + \frac{1}{2n}S(\rho_1, \rho_2)\xi \quad (5.5.4)$$

eşitliklerini elde ederiz.

Tanım 5.5.2 (M, g) Kenmotsu manifoldunun $(2n + 1)$ boyutlu bir altmanifoldu $(\bar{M}, \bar{g})$ olsun. $\bar{M}$ nin her noktasında $W_8 \cdot \sigma$ ve $Q(\bar{g}, \sigma)$ tensörleri lineer bağımlı ise $\bar{M}$ ye M nin W_8 pseudo-paralel altmanifoldu denir.

Bu durumda $\bar{M}$ nin W_8 pseudo-paralel olması için gerekli ve yeterli koşul $\rho_4 = \{p \in \bar{M} | Q(\bar{g}, \sigma) \neq 0\}$ kümesi üzerinde

$$W_8 \cdot \sigma = k_1 Q(\bar{g}, \sigma)$$

olacak şekilde ρ_4 kümesi üzerinde k_1 fonksiyonunun olmasıdır.

Özel olarak $k_1 = 0$ ise yani $W_8 \cdot \sigma = 0$ ise $\bar{M}$ ye M nin W_8 semi-paralel altmanifoldu denir.

Şimdi $(2n + 1)$ boyutlu bir M Kenmotsu manifoldunun $\bar{M}$ altmanifoldu için W_8 pseudo-paralellik durumunun inceleyelim.

Teorem 5.5.1 $\bar{M}$. $(2n + 1)$ boyutlu M Kenmotsu manifoldunun invaryant altmanifoldu olsun. Eğer $\bar{M}$, W_8 pseudo-paralel altmanifold ise bu durumda $\bar{M}$ ya total geodeziktir yada $k_1 = -1$ dir.

İspat. Kabul edelim ki $\bar{M}$, W_8 pseudo-paralel altmanifold olsun. Bu durumda her $\rho_1, \rho_2, \rho_4, \rho_6 \in \Gamma(T\bar{M})$ için

$$(W_8(\rho_1, \rho_2) \cdot \sigma)(\rho_4, \rho_6) = k_1 Q(g, \sigma)(\rho_4, \rho_6; \rho_1, \rho_2), \quad (5.5.5)$$

olacak şekilde k_1 fonksiyonu vardır. Buradan kolaylıkla

$$\begin{aligned} & R^\perp(\rho_1, \rho_2)\sigma(\rho_4, \rho_6) - \sigma(W_8(\rho_1, \rho_2)\rho_4, \rho_6) \\ & - \sigma(\rho_4, W_8(\rho_1, \rho_2)\rho_6) = -k_1 \left\{ \sigma((\rho_1 \wedge_g \rho_2)\rho_4, \rho_6) \right. \\ & \left. + \sigma(\rho_4, (\rho_1 \wedge_g \rho_2)\rho_6) \right\}, \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} & R^\perp(\rho_1, \rho_2)\sigma(\rho_4, \rho_6) - \sigma(W_8(\rho_1, \rho_2)\rho_4, \rho_6) \\ & - \sigma(\rho_4, W_8(\rho_1, \rho_2)\rho_6) = -k_1 \{ g(\rho_2, \rho_4)\sigma(\rho_1, \rho_6) \\ & - g(\rho_1, \rho_4)\sigma(\rho_2, \rho_6) + g(\rho_2, \rho_6)\sigma(\rho_4, \rho_1) \\ & - g(\rho_1, \rho_6)\sigma(\rho_4, \rho_2) \}. \end{aligned} \quad (5.5.6)$$

yazabiliriz. Eğer (5.5.6) eşitliğinde $\rho_6 = \xi$ seçersek ve (5.5.4) eşitliğinden yararlanırsak

$$\eta(\rho_1)\sigma(\rho_4, \rho_2) = k_1 [\eta(\rho_2)\sigma(\rho_4, \rho_1) - \eta(\rho_1)\sigma(\rho_4, \rho_2)]. \quad (5.5.7)$$

elde edilir. (5.5.7) eşitliğinde $\rho_1 = \xi$ seçer ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(k_1 + 1)\sigma(\rho_4, \rho_2) = 0$$

elde edilir ki bu da $\bar{M}$ manifoldunun total geodezik veya $k_1 = -1$ olması anlamına gelir.

Sonuç 5.5.1 $\bar{M}$. $(2n + 1)$ boyutlu M Kenmotsu manifoldunun invaryant altmanifoldu olsun. Eğer $\bar{M}$, W_8 semi-paralel altmanifold ise bu durumda $\bar{M}$ total geodeziktir.

Tanım 5.5.3 (M, g) Kenmotsu manifoldunun $(2n + 1)$ boyutlu bir altmanifoldu $(\bar{M}, \bar{g})$ olsun. $\bar{M}$ nin her noktasında $W_8 \cdot \nabla \sigma$ ve $Q(g, \nabla \sigma)$ tensörleri lineer bağımlı ise $\bar{M}$ ye M nin W_8 2 pseudo-paralel altmanifoldu denir.

Bu durumda $\bar{M}$ nin W_8 2 pseudo-paralel olması için gerekli ve yeterli koşul $U = \{p \in \bar{M} | Q(g, \nabla \sigma) \neq 0\}$ kümesi üzerinde

$$W_8 \cdot \nabla \sigma = k_2 Q(g, \nabla \sigma)$$

olacak şekilde U kümesi üzerinde k_2 fonksiyonunun olmasıdır.

Özel olarak $k_2 = 0$ ise yani $W_8 \cdot \nabla \sigma = 0$ ise $\bar{M}$ ye M nin W_8 2 semi-paralel altmanifoldu denir.

Şimdi $(2n + 1)$ boyutlu bir M Kenmotsu manifoldunun $\bar{M}$ altmanifoldu için W_8 2 pseudo-paralellik durumunun inceleyelim.

Teorem 5.5.2 $\bar{M}$. $(2n + 1)$ boyutlu M Kenmotsu manifoldunun invaryant altmanifoldu olsun. Eğer $\bar{M}$, W_8 2 pseudo-paralel altmanifold ise bu durumda $\bar{M}$ ya total geodeziktir yada $k_2 = 1$ dir.

İspat. Kabul edelim ki $\bar{M}$, W_8 2 pseudo-paralel alt manifold olsun. Bu durumda her $\rho_1, \rho_2, \rho_4, \rho_6, \rho_3 \in \Gamma(T\bar{M})$ için

$$(W_8(\rho_1, \rho_2) \cdot \nabla \sigma)(\rho_4, \rho_6, \rho_3) = k_2 Q(g, \nabla \sigma)(\rho_4, \rho_6, \rho_3; \rho_1, \rho_2), \quad (5.5.8)$$

yazılır. Eğer (5.5.8) eşitliğinde $\rho_1 = \rho_3 = \xi$ seçersek

$$\begin{aligned} & R^\perp(\xi, \rho_2)(\nabla_{\rho_4} \sigma)(\rho_6, \xi) - (\nabla_{W_8(\xi, \rho_2)\rho_4} \sigma)(\rho_6, \xi) \\ & - (\nabla_{\rho_4} \sigma)(W_8(\xi, \rho_2)\rho_6, \xi) - (\nabla_{\rho_4} \sigma)(\rho_6, W_8(\xi, \rho_2)\xi) \\ & = -k_2 \left\{ (\nabla_{(\xi \wedge_g \rho_2)\rho_4} \sigma)(\rho_6, \xi) + (\nabla_{\rho_4} \sigma)((\xi \wedge_g \rho_2)\rho_6, \xi) \right. \\ & \left. + (\nabla_{\rho_4} \sigma)(\rho_6, (\xi \wedge_g \rho_2)\xi) \right\} \end{aligned} \quad (5.5.9)$$

elde edilir. Şimdi (5.5.9) eşitliğindeki tüm ifadeleri tek tek hesaplayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
R^\perp(\xi, \rho_2)(\nabla_{\rho_4} \sigma)(\rho_6, \xi) &= R^\perp(\xi, \rho_2)\{\bar{\nabla}_{\rho_4}^\perp \sigma(\rho_6, \xi) \\
&\quad - \sigma(\bar{\nabla}_{\rho_4} \rho_6, \xi) - \sigma(\rho_6, \bar{\nabla}_{\rho_4} \xi)\} \\
&= -R^\perp(\xi, \rho_2)\sigma(\rho_6, -\rho_4 + \eta(\rho_4)\xi) \\
&= R^\perp(\xi, \rho_2)\sigma(\rho_6, \rho_4),
\end{aligned} \tag{5.5.10}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla_{W_8(\xi, \rho_2)\rho_4} \sigma)(\rho_6, \xi) &= \bar{\nabla}_{W_8(\xi, \rho_2)\rho_4}^\perp \sigma(\rho_6, \xi) \\
&\quad - \sigma(\bar{\nabla}_{W_8(\xi, \rho_2)\rho_4} \rho_6, \xi) - \sigma(\rho_6, \bar{\nabla}_{W_8(\xi, \rho_2)\rho_4} \xi) \\
&= -\sigma(\rho_6, -W_8(\xi, \rho_2)\rho_4 + \eta(W_8(\xi, \rho_2)\rho_4)\xi) \\
&= \eta(\rho_4)\sigma(\rho_6, \rho_2) - \eta(\rho_2)\sigma(\rho_6, \rho_4),
\end{aligned} \tag{5.5.11}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\rho_4} \sigma)(W_8(\xi, \rho_2)\rho_6, \xi) &= \bar{\nabla}_{\rho_4}^\perp \sigma(W_8(\xi, \rho_2)\rho_6, \xi) \\
&\quad - \sigma(\bar{\nabla}_{\rho_4} W_8(\xi, \rho_2)\rho_6, \xi) - \sigma(W_8(\xi, \rho_2)\rho_6, \bar{\nabla}_{\rho_4} \xi) \\
&= -\sigma(-g(\rho_2, \rho_6)\xi + \eta(\rho_6)\rho_2 - \eta(\rho_2)\rho_6 \\
&\quad - \frac{1}{2n}S(\rho_2, \rho_6)\xi, -\rho_4 + \eta(\rho_4)\xi) \\
&= \eta(\rho_6)\sigma(\rho_2, \rho_4) - \eta(\rho_2)\sigma(\rho_6, \rho_4),
\end{aligned} \tag{5.5.12}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\rho_4} \sigma)(\rho_6, W_8(\xi, \rho_2)\xi) &= (\nabla_{\rho_4} \sigma)(\rho_6, \rho_2 - \eta(\rho_2)\xi) \\
&= (\nabla_{\rho_4} \sigma)(\rho_6, \rho_2) - (\nabla_{\rho_4} \sigma)(\rho_6, \eta(\rho_2)\xi) \\
&= (\nabla_{\rho_4} \sigma)(\rho_6, \rho_2) - \bar{\nabla}_{\rho_4}^\perp \sigma(\rho_6, \eta(\rho_2)\xi) \\
&\quad + \sigma(\bar{\nabla}_{\rho_4} \rho_6, \eta(\rho_2)\xi) + \sigma(\rho_6, \bar{\nabla}_{\rho_4} \eta(\rho_2)\xi) \\
&= (\nabla_{\rho_4} \sigma)(\rho_6, \rho_2) - \eta(\rho_2)\sigma(\rho_6, \rho_4),
\end{aligned} \tag{5.5.13}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\nabla_{(\xi \wedge_g \rho_2) \rho_4} \sigma \right) (\rho_6, \xi) = \bar{\nabla}_{(\xi \wedge_g \rho_2) \rho_4}^\perp \sigma (\rho_6, \xi) \\
& - \sigma \left(\bar{\nabla}_{(\xi \wedge_g \rho_2) \rho_4} \rho_6, \xi \right) - \sigma \left(\rho_6, \bar{\nabla}_{(\xi \wedge_g \rho_2) \rho_4} \xi \right) \\
& = -\eta(\rho_4) \sigma(\rho_6, \rho_2),
\end{aligned} \tag{5.5.14}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\nabla_{\rho_4} \sigma \right) \left((\xi \wedge_g \rho_2) \rho_6, \xi \right) = \bar{\nabla}_{\rho_4}^\perp \sigma \left((\xi \wedge_g \rho_2) \rho_6, \xi \right) \\
& - \sigma \left(\bar{\nabla}_{\rho_4} (\xi \wedge_g \rho_2) \rho_6, \xi \right) - \sigma \left((\xi \wedge_g \rho_2) \rho_6, \bar{\nabla}_{\rho_4} \xi \right) \\
& = -\sigma(g(\rho_2, \rho_6) \xi - g(\xi, \rho_6) \rho_2, -\rho_4 + \eta(\rho_4) \xi) \\
& = -\eta(\rho_6) \sigma(\rho_2, \rho_4),
\end{aligned} \tag{5.5.15}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\nabla_{\rho_4} \sigma \right) (\rho_6, (\xi \wedge_g \rho_2) \xi) = \left(\nabla_{\rho_4} \sigma \right) (\rho_6, \eta(\rho_2) \xi - \rho_2) \\
& = \left(\nabla_{\rho_4} \sigma \right) (\rho_6, \eta(\rho_2) \xi) - \left(\nabla_{\rho_4} \sigma \right) (\rho_6, \rho_2) \\
& = \eta(\rho_2) \sigma(\rho_6, \rho_4) - \left(\nabla_{\rho_4} \sigma \right) (\rho_6, \rho_2).
\end{aligned} \tag{5.5.16}$$

elde edilir. (5.5.10), (5.5.11), (5.5.12), (5.5.13), (5.5.14), (5.5.15), (5.5.16) eşitliklerini (5.5.9) eşitliğinde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
& R^\perp(\xi, \rho_2) \sigma(\rho_6, \rho_4) - \eta(\rho_4) \sigma(\rho_6, \rho_2) \\
& - \eta(\rho_6) \sigma(\rho_2, \rho_4) + 3\eta(\rho_2) \sigma(\rho_6, \rho_4) \\
& - \left(\nabla_{\rho_4} \sigma \right) (\rho_6, \rho_2) = -k_2 \{ -\eta(\rho_6) \sigma(\rho_4, \rho_2) \\
& - \eta(\rho_4) \sigma(\rho_2, \rho_6) + \eta(\rho_2) \sigma(\rho_6, \rho_4) \\
& - \left(\nabla_{\rho_4} \sigma \right) (\rho_6, \rho_2) \}.
\end{aligned} \tag{5.5.17}$$

eşitliğini elde ederiz. Eğer (5.5.17) eşitliğinde $\rho_6 = \xi$ seçer,

$$(\nabla_{\rho_4} \sigma)(\xi, \rho_2) = \sigma(\rho_4, \rho_2),$$

eşitliğinden yararlanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$[k_2 + 1]\sigma(\rho_2, \rho_4) = 0$$

elde edilir. Böylece $\bar{M}$ ya total geodezik altmanifold yada $k_2 = -1$ olacaktır.

Sonuç 5.5.2 $\bar{M}$. $(2n + 1)$ boyutlu M Kenmotsu manifoldunun invariant altmanifoldu olsun. Eğer $\bar{M}$, W_8 2 semi-paralel altmanifold ise bu durumda $\bar{M}$ total geodeziktir.

Tanım 5.5.4 (M, g) Kenmotsu manifoldunun $(2n + 1)$ boyutlu bir altmanifoldu $(\bar{M}, \bar{g})$ olsun. $\bar{M}$ nin her noktasında $W_8 \cdot \sigma$ ve $Q(S, \sigma)$ tensörleri lineer bağımlı ise $\bar{M}$ ye M nin W_8 Ricci genelleştirilmiş pseudo-paralel altmanifoldu denir.

Bu durumda $\bar{M}$ nin W_8 Ricci genelleştirilmiş pseudo-paralel olması için gerekli ve yeterli koşul $\rho_4 = \{p \in \bar{M} | Q(\bar{g}, \sigma) \neq 0\}$ kümesi üzerinde

$$W_8 \cdot \sigma = k_3 Q(S, \sigma)$$

olacak şekilde U kümesi üzerinde k_3 fonksiyonunun olmasıdır.

Özel olarak $k_3 = 0$ ise yani $W_8 \cdot \sigma = 0$ ise $\bar{M}$ ye M nin W_8 Ricci genelleştirilmiş semi-paralel altmanifoldu denir.

Şimdi $(2n + 1)$ boyutlu bir M Kenmotsu manifoldunun $\bar{M}$ altmanifoldu için W_8 Ricci genelleştirilmiş pseudo-paralellik durumunun inceleyelim.

Teorem 5.5.3 $\bar{M}$. $(2n + 1)$ boyutlu M Kenmotsu manifoldunun invariant altmanifoldu olsun. Eğer $\bar{M}$, W_8 Ricci genelleştirilmiş pseudo-paralel altmanifold ise bu durumda $\bar{M}$ ya total geodeziktir yada $k_3 = \frac{1}{2n}$ dir.

İspat. Kabul edelim ki $\bar{M}$, W_8 Ricci genelleştirilmiş pseudo-paralel altmanifold olsun. Bu durumda

$$(W_8(\rho_1, \rho_2) \cdot \sigma)(\rho_4, \rho_6) = k_3 Q(S, \sigma)(\rho_4, \rho_6; \rho_1, \rho_2),$$

olmak üzere her $\rho_1, \rho_2, \rho_4, \rho_6 \in \Gamma(T\bar{M})$ için

$$\begin{aligned}
& R^\perp(\rho_1, \rho_2)\sigma(\rho_4, \rho_6) - \sigma(W_8(\rho_1, \rho_2)\rho_4, \rho_6) \\
& - \sigma(\rho_4, W_8(\rho_1, \rho_2)\rho_6) = -k_3\{\sigma((\rho_1 \wedge_S \rho_2)\rho_4, \rho_6) \\
& + \sigma(\rho_4, (\rho_1 \wedge_S \rho_2)\rho_6)\}.
\end{aligned} \tag{5.5.18}$$

yazılır. (5.5.18) eşitliğinde $\rho_1 = \rho_6 = \xi$ seçersek

$$-\sigma(\rho_4, W_8(\xi, \rho_2)\xi) = k_3 S(\xi, \xi)\sigma(\rho_4, \rho_2). \tag{5.5.19}$$

elde edilir. Eğer (5.5.19) eşitliğinde (5.5.4) ve (3.2.8) eşitliklerinden yararlanırsak

$$(1 - 2nk_3)\sigma(\rho_4, \rho_2) = 0$$

elde edilir. Böylece $\bar{M}$, ya total geodeziktir ya da $k_3 = \frac{1}{2n}$ dir.

Sonuç 5.5.3 $\bar{M}$. $(2n + 1)$ boyutlu M Kenmotsu manifoldunun invariant altmanifoldu olsun. Eğer $\bar{M}$, W_8 Ricci genelleştirilmiş semi-paralel altmanifold ise bu durumda $\bar{M}$ total geodeziktir.

Tanım 5.5.5 (M, g) Kenmotsu manifoldunun $(2n + 1)$ boyutlu bir altmanifoldu $(\bar{M}, \bar{g})$ olsun. $\bar{M}$ nin her noktasında $W_8 \cdot \nabla \sigma$ ve $Q(S, \nabla \sigma)$ tensörleri lineer bağımlı ise $\bar{M}$ ye M nin W_8 2 Ricci genelleştirilmiş pseudo-paralel altmanifoldu denir.

Bu durumda $\bar{M}$ nin W_8 2 Ricci genelleştirilmiş pseudo-paralel olması için gerekli ve yeterli koşul $U = \{p \in \bar{M} | Q(S, \sigma) \neq 0\}$ kümesi üzerinde

$$W_8 \cdot \nabla \sigma = k_4 Q(S, \nabla \sigma)$$

olacak şekilde U kümesi üzerinde k_4 fonksiyonunun olmasıdır.

Özel olarak $k_4 = 0$ ise yani $W_8 \cdot \nabla \sigma = 0$ ise $\bar{M}$ ye M nin W_8 2 Ricci genelleştirilmiş semi-paralel altmanifoldu denir.

Şimdi $(2n + 1)$ boyutlu bir M Kenmotsu manifoldunun $\bar{M}$ altmanifoldu için W_8 2 Ricci genelleştirilmiş pseudo-paralellik durumunun inceleyelim.

Teorem 5.5.4 $\bar{M}$. $(2n + 1)$ boyutlu M Kenmotsu manifoldunun invariant altmanifoldu olsun. Eğer $\bar{M}$, W_8 2 Ricci genelleştirilmiş pseudo-paralel altmanifold ise bu durumda $\bar{M}$ ya total geodeziktir ya da $k_4 = \frac{1}{2n}$ dir.

İspat. Kabul edelim ki $\bar{M}$, W_8 2 Ricci genelleştirilmiş pseudo-paralel altmanifold olsun. Bu durumda her $\rho_1, \rho_2, \rho_4, \rho_6, \rho_3 \in \Gamma(T\bar{M})$ için

$$(W_8(\rho_1, \rho_2) \cdot \nabla \sigma)(\rho_4, \rho_6, \rho_3) = k_4 Q(S, \nabla \sigma)(\rho_4, \rho_6, \rho_3; \rho_1, \rho_2), \quad (5.5.20)$$

yazılabilir. (5.5.20) eşitliğinde $\rho_1 = \rho_6 = \xi$ seçilirse

$$\begin{aligned} & R^\perp(\xi, \rho_2)(\nabla_{\rho_4} \sigma)(\xi, \rho_3) - (\nabla_{W_8(\xi, \rho_2)\rho_4} \sigma)(\xi, \rho_3) \\ & - (\nabla_{\rho_4} \sigma)(W_8(\xi, \rho_2)\xi, \rho_3) - (\nabla_{\rho_4} \sigma)(\xi, W_8(\xi, \rho_2)\rho_3) \\ & = -k_4 \{ (\nabla_{(\xi \wedge_S \rho_2)\rho_4} \sigma)(\xi, \rho_3) + (\nabla_{\rho_4} \sigma)((\xi \wedge_S \rho_2)\xi, \rho_3) \\ & + (\tilde{\nabla}_{\rho_4} \sigma)(\xi, (\xi \wedge_S \rho_2)\rho_3) \}. \end{aligned} \quad (5.5.21)$$

elde edilir. Şimdi (5.5.21) eşitliğindeki tüm ifadeleri tek tek hesaplayalım.

$$\begin{aligned} & R^\perp(\xi, \rho_2)(\nabla_{\rho_4} \sigma)(\xi, \rho_3) = R^\perp(\xi, \rho_2) \{ \bar{\nabla}_{\rho_4}^\perp \sigma(\xi, \rho_3) \\ & - \sigma(\bar{\nabla}_{\rho_4} \rho_3, \xi) - \sigma(\rho_3, \bar{\nabla}_{\rho_4} \xi) \} \\ & = R^\perp(\xi, \rho_2) \sigma(\rho_3, \rho_4). \end{aligned} \quad (5.5.22)$$

$$\begin{aligned} & (\nabla_{W_8(\xi, \rho_2)\rho_4} \sigma)(\xi, \rho_3) = \bar{\nabla}_{W_8(\xi, \rho_2)\rho_4}^\perp \sigma(\xi, \rho_3) \\ & - \sigma(\bar{\nabla}_{W_8(\xi, \rho_2)\rho_4} \xi, \rho_3) - \sigma(\xi, \bar{\nabla}_{W_8(\xi, \rho_2)\rho_4} \rho_3) \\ & = \eta(\rho_4) \sigma(\rho_2, \rho_3) - \eta(\rho_2) \sigma(\rho_3, \rho_4), \end{aligned} \quad (5.5.23)$$

$$\begin{aligned} & (\nabla_{\rho_4} \sigma)(W_8(\xi, \rho_2)\xi, \rho_3) = (\nabla_{\rho_4} \sigma)(\rho_2 + \eta(\rho_2)\xi, \rho_3) \\ & = (\nabla_{\rho_4} \sigma)(\rho_2, \rho_3) - \eta(\rho_2) \sigma(\rho_4, \rho_3), \end{aligned} \quad (5.5.24)$$

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\rho_4} \sigma)(\xi, W_8(\xi, \rho_2) \rho_3) &= \bar{\nabla}_{\rho_4}^\perp \sigma(\xi, W_8(\xi, \rho_2) \rho_3) \\
&- \sigma(\bar{\nabla}_{\rho_4} \xi, W_8(\xi, \rho_2) \rho_3) - \sigma(\xi, \bar{\nabla}_{\rho_4} W_8(\xi, \rho_2) \rho_3) \\
&= \eta(\rho_3) \sigma(\rho_4, \rho_2) - \eta(\rho_2) \sigma(\rho_3, \rho_4),
\end{aligned} \tag{5.5.25}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla_{(\xi \wedge_S \rho_2) \rho_4} \sigma)(\xi, \rho_3) &= \bar{\nabla}_{(\xi \wedge_S \rho_2) \rho_4}^\perp \sigma(\xi, \rho_3) \\
&- \sigma(\bar{\nabla}_{(\xi \wedge_S \rho_2) \rho_4} \xi, \rho_3) - \sigma(\xi, \bar{\nabla}_{(\xi \wedge_S \rho_2) \rho_4} \rho_3) \\
&= 2n\eta(\rho_4) \sigma(\rho_2, \rho_3),
\end{aligned} \tag{5.5.26}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\rho_4} \sigma)((\xi \wedge_S \rho_2) \xi, \rho_3) &= (\nabla_{\rho_4} \sigma)(S(\rho_2, \xi) \xi - S(\xi, \xi) \rho_2, \rho_3) \\
&= (\nabla_{\rho_4} \sigma)(-2n\eta(\rho_2) \xi + 2n\rho_2, \rho_3) \\
&= -2n\{\bar{\nabla}_{\rho_4}^\perp \sigma(\eta(\rho_2) \xi, \rho_3) - \sigma(\bar{\nabla}_{\rho_4} \eta(\rho_2) \xi, \rho_3) \\
&- \sigma(\eta(\rho_2) \xi, \bar{\nabla}_{\rho_4} \rho_3) + 2n(\nabla_{\rho_4} \sigma)(\rho_2, \rho_3)\} \\
&= 2n(\nabla_{\rho_4} \sigma)(\rho_2, \rho_3) - 2n\eta(\rho_2) \sigma(\rho_4, \rho_3).
\end{aligned} \tag{5.5.27}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\rho_4} \sigma)(\xi, (\xi \wedge_S \rho_2) \rho_3) &= (\nabla_{\rho_4} \sigma)(\xi, S(\rho_2, \rho_3) \xi - S(\xi, \rho_3) \rho_2) \\
&= (\nabla_{\rho_4} \sigma)(\xi, S(\rho_2, \rho_3) \xi) + (\bar{\nabla}_{\rho_4} \sigma)(\xi, 2n\eta(\rho_3) \rho_2) \\
&= 2n\eta(\rho_3) \sigma(\rho_4, \rho_2).
\end{aligned} \tag{5.5.28}$$

elde edilir. (5.5.22), (5.5.23), (5.5.24), (5.5.25), (5.5.26), (5.5.27), (5.5.28) eşitliklerini (5.5.21) eşitliğinde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
& R^\perp(\xi, \rho_2)\sigma(\rho_3, \rho_4) - \eta(\rho_4)\sigma(\rho_2, \rho_3) \\
& + 3\eta(\rho_2)\sigma(\rho_4, \rho_3) - \eta(\rho_3)\sigma(\rho_4, \rho_2) \\
& - (\nabla_{\rho_4}\sigma)(\rho_2, \rho_3) = -k_4\{2n\eta(\rho_4)\sigma(\rho_2, \rho_3) \\
& - 2n\eta(\rho_2)\sigma(\rho_4, \rho_3) + 2n\eta(\rho_3)\sigma(\rho_4, \rho_2) \\
& + 2n(\nabla_{\rho_4}\sigma)(\rho_2, \rho_3)\}.
\end{aligned} \tag{5.5.29}$$

eşitliğini elde ederiz. Eğer (5.5.29) da $\rho_3 = \xi$ seçer ve

$$(\nabla_{\rho_4}\sigma)(\rho_2, \xi) = \sigma(\rho_4, \rho_2),$$

eşitliğinden yararlanırsak

$$[2nk_4 - 1]\sigma(\rho_4, \rho_2) = 0$$

elde ederiz. Böylece $\bar{M}$ ya total geodeziktir yada $k_4 = \frac{1}{2n}$ dir.

Sonuç 5.5.4 $\bar{M}$. $(2n + 1)$ boyutlu M Kenmotsu manifoldunun invaryant altmanifoldu olsun. Eğer $\bar{M}$, W_8 2 Ricci genelleştirilmiş semi-paralel altmanifold ise bu durumda $\bar{M}$ total geodeziktir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışma Kenmotsu manifoldların üzerinde tanımlı olan eğrilik tensörlerinin birbirleri üzerindeki etkileri ve invaryant altmanifoldları üzerinde daha detaylı çalışmalar yapabilmesine katkı sağlamak üzere hazırlanmıştır. İlk iki bölümde konunun daha iyi anlaşılabilmesi için gerekli tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde Kenmotsu manifoldları incelenmiştir. Dördüncü bölüm tamamen Kenmotsu manifoldların eğrilik tensörlerine ayrılmıştır. Bu bölümde Kenmotsu manifoldların eğrilik tensörlerinin birbirleri üzerindeki etkilerini karakterize eden tanım, teorem ve sonuçları ayrıntılı olarak incelenmiştir. Son bölümde ise Kenmotsu manifoldların invaryant altmanifoldlarının özel bir sınıfı olan pseudo-paralel altmanifoldları detaylı olarak incelenmiştir.

Sonuç olarak bu tez çalışması Kenmotsu manifoldların eğrilik tensörleri ve altmanifoldlarının geometrisi üzerine çalışmalar yapacak olan her matematikçinin yararlanabileceği bir Türkçe kaynak olarak literatüre sunulmuştur.

KAYNAKLAR

- Aslım, G. , 1988. Genel Topoloji, Ege Üniv. Fen Fakültesi Yayınları. , No. 109, İzmir.
- Arslan, K. , Lumiste, U. , Murathan, C. ve Özgür, C. , 2000. 2 – Semiparalel Surfaces in Space Sorms, Two particular cases. Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math. 49. , No. 3, 139 – 148.
- Asperti, A. C. , Lobos, G. A. ve Mercuri, F. , 1999. Pseudo – Parallel Immersions in Space Forms, 10th School on Differential Geometry (Portuguese) (Belo Horizonte, 1998) Mat. Contemp. 17, 59 – 70.
- Atçeken, M. , 2008. Warped Product Semi-Slant Submanifolds in Locally Riemannian Product Manifolds, Bulletin of the Astralian Matematical Society. 77, doi: 1017/ S0004972708000191.
- Atçeken, M. , 2010. Slant Submanifolds of a Riemannian Product Manifold, Acta Mathematica Scientie, 30B(1),215-224.
- Atçeken, M. , 2010. Semi-Slant Submanifolds of an Almost Paracontact Metric Manifold, Canad. Math. Bull., Vol. 53(2), 206 – 207.
- Atçeken, M. , 2010. Warped Product Semi-Slant Submanifolds in Kenmotsu Manifolds, Turk J. Math. , 34, 425-432.
- Blair, D. E. , 2002. Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds, Progress in Mathematics, 203. Birkhauser Boston, Inc. , Boston, MA.
- Boothby, W. M. , 1986. An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, Academic Press, Inc. London.
- Cabrerizo, J. L. , Carriazo, A. ve Fernandez, L. M. , 2000. Slant Submanifolds in Sasakian Manifolds, Glasgow Math. J. 42, 125-138.
- Cabrerizo, J. L. , Carriazo, A. , Fernandez, L. M. ve Fernandez, M. , 2000. Structure on a Slant Submanifolds of a Contact Manifold, Indian J. Pure and Appl. Math. 31 (7), 857-864.
- Chaki, M. C. , 1987. On Pseudo Symmetric Manifolds, An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi Sect. I a Mt. 33, No. 1, 53 – 58.
- Chen, B. Y. , 1973. Geometry of Submanifolds, Pure and Applied Mathematics, No. 22. Marcel Dekker, Inc. , New York.
- Chen, B. Y. , 1990. Geometry of Slant Submanifolds, Katholieke Universiteit Leuven.
- Chen, B. Y. , 1990. Slant Immersions, Bull. Australion Math. Soc. 41, 857-864.

- Chen, B. Y. ve Tazawa, Y. , 1990. Slant Surfaces With Codimensions 2, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. 11 (3) , 29-43.
- Chen, B. Y. ve Tazawa, Y. , 1991. Slant Submanifolds in Complex Euclidean Spaces, Tokyo J. Math. 14 (1), 101-120.
- De, U. C. ve Guha, N. , 1991. On Generalised Recurrent Manifolds, Proc. Math. Soc. 7, 7–11.
- De, U. C. , Guha, N. ve Kamilya, D. , 1995. On Generalized Ricci – Recurrent Manifolds, Tensor (NS), 56, No. 3. , 312 – 317.
- De, U. C. , Yıldız, A. ve Yalınız, A. F. , 2009. On ϕ -Recurrent Kenmotsu Manifolds, Turkish Journal of Mathematics, 33. 17 – 25.
- Deprez, J. , 1985. Semiparallel Surfaces in Euclidean Sapace, J. Geom. 25, No. 2, 192- 200.
- Deszcz, R. , 1992. On Pseudosymmetric Spaces, Bull. Soc. Math. , Belg. Ser. A 44, No. 1. 1-34.
- Duggal, K. L. ve Bejancu, A. , 1996. Lightlike Submanifolds of Semi – Riemannian Manifold and Applications, Kluwer, Dordrecht.
- Gupta, R. S. , Haider, S. M. K. ve Shahid, M. H. , 2004. Slant Submanifolds of a Kenmotsu Manifold, Rodavi Matematıckı, Vol. 12, 205-204.
- Hacısalıhoğlu, H. H. , 1980. Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş, Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.
- Hacısalıhoğlu, H. H. , 1983. Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Yayınları.
- Jun, J. B. , De, U. C. Ve Pathak, G. , 2005. On Kenmotsu Manifolds, J. Korean Math. Soc. 42, No. 3, pp. 434 – 445.
- Kenmotsu, K. , 1972. A Class of Contact Riemannian Manifold, Tohoku Math. Jour. 24, 93 – 103.
- Lotta, A. , 1996. Slant Submanifolds in Contact Geometry, Bull. Math. Soc. Roumanie, 39, 183-198.
- Lotta, A. , 1998. Three-Dimensional Slant Submanifolds of K-Contact manifolds, Balkan J. Geom. Appl. 3 (1), 37-51.
- O’Neill, B., 1983. Semi-Riemann Geometry With Applications to Relativity, Pure and Applied Mathematics, 103. Acedemic Press, Inc. Newyork.
- Pandey, P. K. ve Gupta, R. S. , 2008. Characterization of a Slant Submanifold of a Kenmotsu Manifold, Novı. Sad. J. Math, Vol. 38 (1), 97-102.

- Pitiş, G. , 2007. Geometry of Kenmotsu Manifolds, Publishing House of Transilvania University of Braşov.
- Roter, W., 1982. On Conformally Recurrent Ricci – Recurrent Manifolds, Collog Math. , 46, 45–57.
- Sular, S. , 2009. Kenmotsu Manifoldlar ve Bunların Bazı Altmanifoldları. Doktora Tezi, Balıkesir Üniv. Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir.
- Szabo, Z. I. , 1982. Structure Theorem on Riemannian Spaces Satisfying $R(X,Y)Z = 0$, The Local Version, J. Dierential Geom. 17, 531 – 582.
- Verstraelen, L. , 1933. Comments on Pseudo – Symmetry in The Sence of R.Deszcz, Geometry and Topology of Submanifolds VI, World scientific, 199 – 209.
- Yano, K. ve Kon, M. , 1976. Anti – Invariant Submanifolds, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, No. 21. Marcel Dekker, Inc. , New York – Basel.
- Yano, K. ve Kon, M. , 1984. Structures on Manifolds, Series in Pure Mathematics, 3. World Scientific Publishing Co. , Singapore.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Nurnisa KARAMAN

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi Matematik Bölümü, 2010-2018

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, 2021-2024

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLERİ

1. Milli Eğitim Bakanlığı - Öğretmen

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Uluslararası Hakemli Dergilerde Yayınlanan Makaleler

1. Karaman N., Atçeken M., Pseudoparallel Invariant Submanifolds of Kenmotsu Manifolds, Journal of Amasya University the Institute of Sciences and Technology, 4(2), (2023), 72-81.

Kongrelerde Sunulan Makaleler

1. Atçeken M., Karaman N., Some Curvature Conditions Provided By Kenmotsu Manifolds on Some Special Curvature Tensor, International Asian Congress On Contemporary Sciences- VIII, May 5-7, 2023, Aksaray, Türkiye.