

T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
İKTİSAT ANABİLİM DALI
FİNANSAL İKTİSAT VE BANKACILIK PROGRAMI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

**PÜRÜZLÜ PARÇALI STOKASTİK OYNAKLIK (PPSO) YAKLAŞIMI İLE
FİNANSAL ZAMAN SERİLERİNİN HAFIZA YAPISININ ANALİZİ**

Sarvarbek NAZAROV

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Aslı Seda KURT

İZMİR – 2018

TEZ ONAY SAYFASI

Savunmadan sonra başarılı olup, Öğrenci İşleri biriminden alınarak basılacak tezin içine eklenecektir



YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “**Pürüzlü Parçalı Stokastik Oynaklık (PPSO) Yaklaşımı İle Finansal Zaman Serilerinin Hafıza Yapısının Analizi**” adlı çalışmanın, tarafımdan, akademik kurallara ve etik değerlere uygun olarak yazıldığını ve yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

.../08/2018

Sarvarbek NAZAROV

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Pürüzlü Parçalı Stokastik Oynaklık (PPSO) Yaklaşımı İle Finansal Zaman

Serilerinin Hafıza Yapısının Analizi

Sarvarbek NAZAROV

Dokuz Eylül Üniversitesi

Sosyal Bilimler Enstitüsü

İktisat Anabilim Dalı

Finansal İktisat ve Bankacılık Programı

Zaman boyutlu oynaklık verilerinin hesaplanmasında, genel olarak rassal yürüyüşe dayalı yaklaşımdan hareket edilir. Ancak bu yaklaşım varyansın pürüzsüz olduğu varsayımına dayalıdır. Pürüzlülük oynaklığın içsel bir özelliği olduğu ve gürültü tahminlerinin etkisini ifade etmesi açısından bir olgu olarak incelenmesi gerekliliği ortaya çıkmıştır.

Genel olarak, tarihsel dalgalanmayı dikkate alan risk yönetim araçlarının oynaklıktaki pürüzlülük nedeni ile optimal korunma oranının hesaplanmasında sapmalı sonuçlar verdiği görülmüştür. Finansal oynaklık modelleri martingal, yarı-martingal süreçler ve Brown hareketlerine dayalı olarak, finans literatüründe önemli hale gelmiştir. Bu yaklaşımlarda sıra ile uzun dönemli bağımlılık, hafıza ve stokastik süreçler dikkate alınarak analizler geliştirilmiştir. Tahmin aşamasında Gauss ve Log-normal olasılık yoğunluk fonksiyonlarına dayalı tahminler kullanılmıştır.

Literatürde son yıllarda geliştirilen oynaklık yaklaşımları pürüzlülüğü dikkate almaktadır. Bu çerçevede, pürüzlülüğün olduğu durumda hafıza yapısının da nasıl oluştuğu veya hangi tür bilgileri taşıdığı da test edilmiştir. Bu çalışmada, RFSV modeli kullanarak, KOSPI endeksinin hafıza yapısı test edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Uzun Dönem Bağımlılık, Yapısal Kırılma, Aykırı gözlemler, Sahte Uzun Hafıza, RFSV, FSV, fBm.

ABSTRACT

Master's Thesis

Analysis of the Memory Structure of Financial Time Series Data with Rough Fractional Stochastic Volatility (RFSV) Approach

Sarvarbek NAZAROV

Dokuz Eylul University

Graduate School of Social Sciences

Department of Economics

Financial Economics and Banking Program

Calculation of time-scale volatility data, it is generally taken as a random walk-based approach. However, this approach assumes that the variance is smooth. Contrarily the roughness is an intrinsic characteristic of volatility and should be researched as important parameter in terms of expressing the effects of noise estimations.

In general, risk management tools that consider historical volatility have shown deviant consequences in calculating the optimal protection rate with the rough volatility. Financial volatility models have become important in the finance literature, based on martingale, semi-martingal processes and Brownian movements. In these approaches, analyzes by taking into consideration of long-term dependency, memory and stochastic processes have been developing. At the stage of estimation, there are normally been using Gaussian and Log-normal probability density functions.

Literature on approaches which use roughness of volatility developed in in recent years. In this context, when there is roughness of volatility, more important questions are testing of the memory structure and examining that what kind of information memory contains. In this research work, we estimated the memory structure of KOSPI index with the method of RFSV.

Keywords: Long-range Dependence, Structural Breaks, Spurious Long Memory, Outliers, RFSV, FSV, fBm.

PÜRÜZLÜ PARÇALI STOKASTİK OYNAKLIK (PPSO) YAKLAŞIMI İLE FİNANSAL ZAMAN SERİLERİNİN HAFIZA YAPISININ ANALİZİ

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI	ii
YEMİN METNİ	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
KISALTMALAR	viii
TABLolar LİSTESİ	ix
ŞEKİLLER LİSTESİ	x
EKLER LİSTESİ	xi
GİRİŞ	1

BİRİNCİ BÖLÜM

FİNANSAL ZAMAN SERİLERİNDE UZUN HAFIZA

1.1. AKIŞKAN VERİLERDE HAFIZA YAPISI	3
1.2. UZUN HAFIZA PARAMETRESİ OLARAK HURST	4
1.3. HURST ÜSTEL KATSAYISI	6
1.4. KESİRLİ UZUN HAFIZA PARAMETRELERİ: MANDELBROT	7
1.5. UZUN ARALIKLI BAĞIMLILIK	8
1.6. KOŞULLU GAUSS YAKLAŞIMI	9

İKİNCİ BÖLÜM

YÜKSEK FREKANSLI ZAMAN SERİLERİNİN HAFIZA YAPISI

2.1. ALGORİTMİK FİNANSAL İŞLEMLER	11
2.2. GERÇEKLEŞMİŞ ÇEKİRDEK YAKLAŞIMI	13
2.3. YARI MARTİNGALLAR VE İKİNCİ DERECEDEKİ DEĞİŞİM	16

2.4. FİNANS AÇISINDAN “GÜRÜLTÜ” HAKKINDA VARSAYIMLAR	17
2.5. OTOKOVARYANS SÜRECİNİN TANIMLANMASI	18
2.6. GERÇEKLEŞMİŞ ÇEKİRDEĞİN TANIMLANMASI	19
2.7. QV 'NİN MAKSİMUM OLABİLİRLİĞİ	19
2.8. İŞARETLEME VE SALINIM	21
2.9. $\gamma X \delta$ İÇİN MERKEZİ LİMİT TEORİSİ	21
2.10. $n^{1/4}$ İÇİN ÖZEL DURUMLAR	23
2.11. SONSUZ GEÇİKMELER İLE GERÇEKLEŞMİŞ ÇEKİRDEKLER	24
2.12. OPTİMAL ÇEKİRDEK FONKSİYONU	25
2.13. GERÇEKLEŞMİŞ OYNAKLIK	26
2.14. GERÇEKLEŞMİŞ OYNAKLIĞIN AMPİRİK DAVRANIŞI	28

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

RSFV MODELİ İLE KOSPI ENDEKSİNİN HAFIZA YAPISININ ANALİZİ

3.1. KOSPI ENDEKSİ	31
3.2. GERÇEKLEŞMİŞ VARYANSIN ZAMAN SERİLERİ	33
3.3. KESİRLİ OYNAKLIK	33
3.4. GETİRİ SERİSİ OYNAKLIĞI ARTIŞLARININ DAĞILIMI	35
3.5. RFSV MODELİNİN AÇIKLANMASI	36
3.6. RFSV VE FSV MODELLERİ ARASINDAKİ FARK	37
3.7. RFSV MODELİ OTOKOVARYANS FONKSİYONLARI	37
3.8. RFSV MODELİNİN SİMÜLASYON TABANLI ANALİZİ	38
3.9. Δ GECİKMESİ İLE $m(q, \Delta)$ ÖLÇEKLENDİRME	38
3.10. TEK KESİRLİ (MONOFRACTAL) ÖLÇEKLEME SONUCU	39
3.11. RFSV İLE UYGULAMALI VARYANS TAHMİNİNİ	40
3.12. FARKLI RV İÇİN HURST ÜSTEL KATSAYISI	42
3.13. OYNAKLIK, GERÇEKTEN UZUN HAFIZAYA SAHİP Mİ?	45
3.14. RFSV MODELİ İLE TAHMİN ETMEK	45
SONUÇ	48
EKLER	

KISALTMALAR

ACF	Auto-Correlation Function
AFİ	Algoritmik Finansal İşlemler
ARFIMA	Auto Regressive Fractionally Integrated Moving Average
ARMA	Autoregressive Moving Average
BDoA	Brownian Domain of Attraction
EMH	The Efficient Market Hypothesis
fBm	Fractional Brownian Motion
FGN	Fractional Gaussian Noise
FIGARCH	Fractionally Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity.
FSV	Fractional Stochastic Volatility
i.i.d.	Independent and Identically Distributed.
LRD	Long Range Dependence
LSV	Local Stochastic Volatility
RFSV	Rough Fractional Stochastic Volatility
RV	Realized Variance
SABR	Stochastic Alpha Beta Rho
SRD	Short Range Dependence
VaR	Value at Risk

TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 1: KOSPI Endeksi İstatistik Verileri	s. 32
Tablo 2: Farklı RV ‘ler İçin Hesaplanmış H (Hurst üstel katsayısı)	s. 43
Tablo 3: AR, HAR ve RFSV Modelleri ile P Oranı.	s. 47



ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1: ABD Borsalarındaki AFI Oranı	s.13
Şekil 2: Çekirdek Fonksiyonlar	s. 25
Şekil 3: Kore Bileşik Hisse Senetleri Fiyat Endeksi (KOSPI)	s. 32
Şekil 4: Getiri Serileri Oynaklığının Artışı	s. 35
Şekil 5: $\log \Delta$ 'nin Bir Fonksiyonu Olarak $\log m(q, \Delta)$. KOSPI	s. 39
Şekil 6: ζq nin q İle Ölçeklendirmesi	s. 40
Şekil 7: Δ Günlerinde Tahminlerin Dağılım Grafiği	s. 41
Şekil 8: Gerçek ve Öngörülen Oynaklığın Aynı Grafikteki Görünümü	s. 42
Şekil 9: KOSPI Endeksi İçin Modeller Arasındaki Fark.....	s. 44

EKLER LİSTESİ

EK 1: Gauss Kesirli Süreçlerinin Parametrik Örnekleri	ek s. 1
EK 2: $n^{1/4}$ Düz-Üst Gerçekleşmiş Çekirdeklerin Özellikleri	ek s. 2
EK 3: Bazı $n^{1/4}$ Düz-Üst Sonsuz log Gerçekleşmiş Çekirdekler	ek s. 3
EK 4: Ülke Finansal Piyasaları Endeksleri	ek s. 4
EK 5: Kullanılabilir Hesaplanmış Veriler Listesi	ek s. 5
EK 6: Araştırmada Kullanılan Python Kodları	ek s. 6



GİRİŞ

Dünya finansal piyasalarında son on yılda yaşanan değişimler neticesinde artan düzenleyici kısıtlamalardan dolayı, risk yönetimi konuları ön plana çıkmaktadır. Bugün borsada gerek aktif al-sat yapanlar açısından gerekse risk yönetimi açısından türev ürünlerini fiyatlandırmak için doğru modellere duyulan ihtiyaç her zamankinden daha fazla artmıştır.

Finansal piyasalarda anlık verilerin kullanımının artması, analizlerde kullanılan zaman serilerinde hafıza yapısının analizini gerekli kılmıştır. Özellikle finansal zaman serilerinin akışkan veri özelliğine sahip olması buna yönelik analiz araçlarının finansal ekonometrik teknikler olarak kullanımını artırmıştır. Literatürde akışkan verilerin hafıza yapısının analizine yönelik olarak geliştirilen en önemli yaklaşımının temel parametresi Hurst üstel katsayısıdır.

Genel olarak standart teori, zaman boyutunda hafızayı dikkate aldığından dolayı söz konusu fiyatlamalarda frekans etkisinin ortaya çıkaracağı sapmalara bağlı sonuçlar üzerinde durulmamıştır. Hafıza yapısının frekans düzeyinde etkisine yönelik bilgi (Mandelbrot) ile ampirik yöntemlerin geliştirilmesi sonucunda literatürde yeni bir akım ortaya çıkmıştır. Özellikle 1951 yılında Hurst'un zaman içinde akımların analizinde frekans etkisinin hafıza yapısını belirlediği konusunda ortaya koyduğu analiz aracının sonucunda frekans düzeyinde hafızanın analizi bir zorunluluk haline gelmiştir. Son yıllarda bu yaklaşımı esas alarak oynaklık modellerinde frekans temelli uzun hafıza analizleri önem kazanmıştır. Ancak bu analiz sonuçlarının ele aldıkları getiri serilerinin kapanış değerlerine bağlı olması piyasanın dinamiğini yakalama konusunda yeterli olmamıştır. Bundan dolayı yeni araştırmalarda, daha kısa zaman aralığındaki verilerle hafızanın analizini esas alan yöntemlere verilen önem artmıştır. Buna göre hesaplanan parametre aynı zamanda serilerin hafıza yapısı hakkında bilgi veren ilk tahmin edilmiş değerdir.

Literatürdeki gelişmeler bu parametreye bağlı olarak bir gelişim göstermiştir. Bu konu finansal zaman serilerinde zaman ve frekans bağımlı varyans hesaplamalarının yapılmasına olanak sağlamıştır. Yaklaşımlar zaman ve frekans boyutunda hafıza yapısının hesaplanmasına olanak sağlarken kısa hafıza yapısında olması gereken varyans için daha yüksek ve uzun hafıza bilgisi veren parametrelerin

hesaplanmasına yol açmıştır. Özellikle varyansın hesaplanmasında pürüzlülüğün dikkate alınmaması bu konuda önemli bir eksiklik olarak değerlendirilebilir.

Literatürde son yıllarda pürüzlülüğün dikkate alındığı yaklaşımlar geliştirilmeye başlanmıştır. Bu yaklaşımlar hafıza yapısının uzunluğu ve kısalığından çok tüm bilgiyi de içerecek biçimde bir tahmin elde edilmesini sağlamıştır. Yaklaşımların en önemli özelliği varyansın olması gereken uzun hafızaya sahip olup olmadığının tespitini olanaklı kılmış olmasıdır. Ayrıca pürüzlerin sahte uzun hafızaya neden olduğu yönündeki bilgi de önemlidir. Jim Gatheral, Thibault Jaisson ve Mathieu Rosenbaum'un geliştirdikleri “Pürüzlü Oynaklık Modeli” adını verdikleri anlık oynaklığın bir pürüzlü kesirli (parçalı) yapı göstermesini Brown süreçten yararlanarak ortaya koymuşlardır. Bu yazarlar yeni yaklaşımlarıyla literatürdeki katkıların aksine oynaklığın, Markov zinciri sürecine uymaması, kısa hafızalı olması durumunu ortaya koymuşlardır.

Bu çalışmada literatürde geliştirilen yaklaşımların sonuçlarının geçerliliğine yönelik bir katkı niteliğinde, KOSPI endeksi analiz edilmiştir. Bu çerçevede çalışmanın birinci bölümünde uzun hafıza kavramı finansal zaman serilerinin özelliğinden hareketle açıklanmıştır. İkinci bölümde literatürde son geliştirilen ve pürüzlülüğün olduğu varsayımı altında hafıza yapısının analiz edilmesine imkân veren yöntem tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde bu yöntemden hareketle KOSPI endeksinin kullanıldığı analizler yapılmıştır. Analiz sonuçları da söz konusu bölümde verilerek literatüre dayalı bir değerlendirme yapılmıştır.

BİRİNCİ BÖLÜM

FİNANSAL ZAMAN SERİLERİNDE UZUN HAFIZA

Günümüzde birçok bilim alanında frekansa dayalı analizlerin önem kazanması uzun hafız kavramını ortaya çıkarmıştır. Uzun hafıza sistemlerin davranışının tahmin edilebilirliği için yeni bir tekniktir. Özellikle, bir sürecin uzun bir hafıza sergileyip sergilemediğinin tespiti bir tarihsel veri setine dayanarak gelecekteki olayların tahmin edilmesinde doğruluk, hassasiyet ve güveni doğrudan etkilemektedir. Uzun hafızanın gelişimi ve araştırılmasında önemli rol oynayan akademisyenler Harold Edwin, Hurst ve Benoit B. Mandelbrot olup, farklı bilimsel topluluklarda uzun hafıza yaklaşımlarını açıklamışlar.

1.1. AKIŞKAN VERİLERDE HAFIZA YAPISI

Su, içme, yıkama, sulama, akaryakıt endüstrisi ve toplumun gelişmesi için gereklidir. Binlerce yıl boyunca, yerleşik tarım toplulukları, doğal su akışını düzenlemek için yöntemler aramışlardır. Uzun süreler boyunca ve bol miktarda suyu depolamak için rezervuarlar inşa ederek doğanın doğal durumunu kontrol etmeye çalışmışlardır. Hızlı kentsel nüfus artışı, kitlesel tarımsal üretim ve artan enerji gereksinimleri gibi on dokuzuncu yüzyıl Sanayi Devrimi'nin birleşik faktörleri, nehir vadilerinin zarar görmesiyle oluşan büyük ölçekli rezervuarlar inşa edilmesine ihtiyaç duyulmasına neden olmuştur. Rezervuarın kapasitesini barajın yüksekliği olarak kabul edersek, doğal çözüm ise “ideal barajdır” (Mandelbrot, 1969).

İdeal baraj konsepti, Mandelbrot'tan çok önce kısa bir matematiksel tanım olarak ortaya konmuştur. Doğal olarak, bu kısa matematiksel tanım, hata marjları, buharlaşma, kayıplar gibi komplikasyonları göz ardı etmiştir. Hurst'un (1951) belirttiği gibi, “baraj küçük olup, yıl boyunca depolamak için uygun olmadığı sürece, depolama nedeniyle artan kayıplar göz ardı edilir”. Hurst'un bu yaklaşımı hafızanın önemini vurgulamıştır. Geçmişten gelen bilgi yoksa hafıza kısalmaktadır. Hurst, yıl

boyunca depolanabilecek rezervuarların yeterli derecede büyük olmamasından kaynaklanan sorunlar oluşabileceğini göstermiştir.

İlk olarak uzun hafıza ile ilgili araştırmalar, sürekli akım halinde bulunan ve belli bir bölgede biriktirilecek su kaynakları için gerekli bilgiye duyulan ihtiyaçla ortaya çıkmıştır. Genel olarak hidroloji biliminde suları bir barajda toplamak için hesaplanması gerekli olan baraj yüksekliği, ilgili su kaynaklarının akış hızına bağlıdır. Bu konu ilk olarak Rippl (1883) tarafından ortaya konulan depolama rezervuarları teorisinde ele alınmıştır. Ancak Rippl'in yöntemi belirli bir debiye sahip nehirler için akımın gelecekteki hızının tahmin edilmesinin gerekli olduğu eleştirisiyle karşı karşıya kalmıştır. Bu eleştiriler geçmiş bilgiye sahip veriler ile istatistiksel özelliklere sahip bir stokastik süreçle geleceğin bir simülasyonunu içeren bir yaklaşımın geliştirilmesini sağlamıştır (Hazen, 1913). Ancak 1950'li yılların başına kadar stokastik teknikler rezervuar tasarımında kabul görmemiştir. Moran (1959) ve Lloyd (1967) tarafından yapılan önemli çalışmalar sonucunda modern rezervuar tasarımının temelleri atılmıştır. Ancak bu konuda temel bilgi ve parametrenin Hurst tarafından ortaya konduğu unutulmamalıdır.

1.2. UZUN HAFIZA PARAMETRESİ OLARAK HURST

Harold Edwin Hurst, Mısır'da (1906–1968) Nil havzasının hidrolojik özelliklerinin araştırılmasından sorumlu olarak gönderilmiş bir araştırmacıydı. Bir araştırmacı olarak, Akdeniz'deki büyük deltaya bütünsel bir bakış açısı kazandırmak, Nil'in binlerce yıl boyunca, düzenli selleri ve düzensiz akıntıları nedeniyle gelişime ciddi bir engel teşkil eden durumunu çözmek için araştırmalar yapmıştır. Nil üzerinde baraj kurup, akışını kontrol etmek için gerçekleştirilen önceki girişimler sadece kısmen başarılı olmuştur. Hurst ve beraberindekiler, Nil Havzası, Afrika Büyük Gölleri ve Etiyopya ovalarındaki kaynaklardan sorumluydular.

Hurst, özellikle Nil nehri üzerine yaptığı çalışmasında Rippl'e benzer bir yöntem kullanmıştır. “Ayarlanmış genişlik” (Adjusted Range) olarak adlandırılan ve zaman içinde nehirlerin debilerinin kümülatif akış hızları için istatistiksel bir yaklaşım olan yöntemi ortaya konmuştur. Hurst, bu yaklaşımda ayarlanmış genişliğin matematiksel eşitliğini aşağıdaki gibi tanımlamıştır. Bu eşitlikte R rastgele

değişkenler temsil eden serileri tanımlamaktadır. Bu serilerin önemli özelliği gecikmiş değerler arasında bir bağımlılığın olmaması ve güçlü durağanlığa sahip olmasıdır. N . kısmî toplamı $Y_n = X_1 + \dots + X_n$ olarak tanımlamıştır. Bu tanımlamadan hareketle Feller (1951) daha sonra ayarlanmış genişliği $R(n)$ şöyle ifade etmiştir:

$$R(n) = \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ Y_k - \frac{k}{n} Y_n \right\} - \min_{1 \leq k \leq n} \left\{ Y_k - \frac{k}{n} Y_n \right\}. \quad (1)$$

Hurst, bu eşitliği istatistiksel analizler için daha yaygın olarak kullanılan "genişlik" olarak tanımlamıştır. Eşitliğin daha genel bir tanımı şudur $R^*(n) = \max_{1 \leq k \leq n} \{Y_k\} - \min_{1 \leq k \leq n} \{Y_k\}$. Yeniden ölçeklendirilmiş ayarlanmış genişlik (Rescaled Adjusted Range) istatistiği, ayarlanmış genişlik örnek standart sapmasıyla normalleştirilerek elde edilmektedir. $R/S(n)$:

$$R/S(n) = \frac{\max_{1 \leq k \leq n} \left\{ Y_k - \frac{k}{n} Y_n \right\} - \min_{1 \leq k \leq n} \left\{ Y_k - \frac{k}{n} Y_n \right\}}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(X_k - \frac{k}{n} Y_n \right)^2}}. \quad (2)$$

Bu $R/S(n)$ eşitliğinde, n yıllık bir süre için, bu zaman periyodu boyunca en uygun baraj yüksekliği (boyutsuz) için bir vekil (proxy) kullanılabilir.

Hurst araştırmasında 690 farklı zaman serisini inceleyerek, nehir seviyeleri, yağış, sıcaklık, atmosfer basıncı, ağaç halkaları, çamur tortu kalınlığı ve güneş lekeleri gibi çeşitli miktarları kapsayan 75 farklı jeofiziksel faktörle analizlerini yapmıştır. Bu analizler sonucunda k için, istatistiğin $R/S(n) \propto n^k$ olarak davrandığını bulmuştur. Doğrusal regresyon metodunu kullanarak k 'yi tahmin etmiştir. Bu tahmini K olarak izlemiştir. Hurst, K 'nin normal olarak ortalama $0,72 \pm 0,006$ ile dağıldığını ortaya koymuştur. K 'nin farklı etmenlere göre biraz farklılaştığı ve 0,46'dan 0,96'ya kadar değişen bir değer ortalama değeri olduğunu kabul etmiştir. Bu bir Gauss parametresi için küresel maksimumda 0,72 değerine yakınsamıştır.

Son elli yılda geliştirilmiş olan R/S istatistiği bilimsel açıdan önemli bir katkıdır. Günümüzde k üstel katsayısını tahmin etmede hala Hurst'un orijinal olarak

kullandığı yöntem kullanılmamaktadır. Hurst'un araştırmaları uzun hafıza konusundaki ilk çalışmalardır. Bu çalışmaların zaman serilerine yönelik analiz aracı olarak kullanılmasıyla birlikte, Hurst üstel katsayısı olarak tanımlanan; bir serinin sahip olduğu hafızanın ölçüsüne ulaşılmıştır. Hurst, martingal bir süreç gibi söz konusu verilerde zaman açısından bir bağımsızlık olmama durumundan şüphe etmiş olmakla birlikte, bu konuda herhangi bir açıklama yapmamıştır.

1.3. HURST ÜSTEL KATSAYISI

Hurst üstel katsayısını (H) hesaplamak için çeşitli teknikler bulunmaktadır. Ancak bu tekniklerin en önemli sorunu, kullanılan verilerin frekansı ile yoğunluğunun yüksek olmasıdır. Hurst üstel katsayısını hesaplamak için ele alınan zaman aralığında dönüştürülmüş genişlik eşitlikleri kullanılır. Bunu yapmak için zaman serisi, bir ölçek yoluyla daha kısa zaman serilerine bölünür ve dönüştürülmüş genişlik, daha küçük zaman serilerinin her biri için hesaplanır. Zaman serilerinin en kısa zaman uzunluğu olarak genellikle en az sekiz uzunluk seçilir. Örneğin, bir zaman dizisinde 128 gözlem varsa aşağıdaki gibi bölümlere ayrılır:

- her biri 64 gözlemden oluşan 2 parça
- her biri 32 gözlemden oluşan 4 parça
- her biri 16 gözlemden oluşan 8 parça
- her biri 8 gözlemden oluşan 16 parça

Zaman serilerini parçalara ayırdıktan sonra Hurst üstel katsayısını hesaplamak için (her bir gözlem için ayrı ayrı hesaplamak şartı ile) aşağıdaki gibi bir hesaplama süreci izlenir:

- Zaman serilerinin ortalaması
- Serilerden ortalaması çıkartılmış serilerin merkezi ortalaması
- Ortalama merkezi serileri toplayarak serinin ortalamadan kümülatif sapması
- Kümülatif sapmanın maksimum değeri ile kümülatif sapmanın minimum değeri arasındaki fark olan genişlik (Range, R)

- Ortalama merkezi serilerin standart sapması (S) ve
- Genişliği standart sapmaya bölerek dönüştürülmüş genişlik.

Son olarak da tüm parçaların üzerinden dönüştürülmüş genişliğin ortalaması alınır.

1.4. KESİRLİ UZUN HAFIZA PARAMETRELERİ: MANDELBROT

1960'ların başlarında Mandelbrot, matematiksel finansın gelişmekte olan konularından hisse senedi fiyatlarını modelleme problemi üzerinde yoğun bir şekilde çalışmıştı. Bu konunun merkezinde Brown hareket modelleri için sağlanan "Rastgele Yürüyüş Hipotezi" (Random Walk Hypothesis) vardı. Bu, ilk olarak Bachelier (1900) tarafından verilen, yeni ufuklar açan (o zamana kadar keşfedilmemiş) doktora tezinde önerilmiştir.

Mandelbrot yaptığı araştırmaların kabullenilmesi belli bir zaman aldığından zaman kaybetmeden konuyu geliştirmeye çalıştı. Sonunda, 1968-1969 yıllarında matematikçi John Van Ness ve hidrologist James Wallis ile iş birliği yaparak beş makaleden oluşan bir seri yayınladı. Bir bütün olarak ele alındığında, bu makaleler uzun hafıza ve kesirli Brown hareketi hakkında kapsamlı bir kaynak oluşturmaktadır. Bu kaynaklar uzun hafızanın varlığına ve günümüze kadar devam eden kesirli Gauss gürültüsü FGN'nin (Fractional Gaussian Noise) pratiğine ilişkin tartışmaları başlatmıştır.

Mandelbrot çalışmaları literatürde kesirli Brown hareketi FBM (Fractional Brownian Motion) ve kesirli Gauss gürültüsü FGN ile ilgili gelişmeyi başlatmıştır. Bu çalışmalar asimetric etkilerin varlığına yönelik yeni araçların geliştirilmesini sağlamıştır. Özellikle Van Ness'in katkısıyla şişman kuyruk özelliğine sahip uzun hafıza süreçlerine yönelik yaklaşımlar geliştirilmiştir. Böylece sonsuz varyansın varlığında, korelasyon yapısının eksikliğinden kaynaklanan zorluklar nedeniyle, bu süreç ilk kez uygun şekilde tanımlanmış oldu.

Zaman serileri ile yapılan çalışmalarda ARMA yapısı ile söz konusu yöntemler arasında ortaya çıkan ayrımı ortadan kaldırmaya yönelik yaklaşımlar; iktisat alanında söz konusu çalışmaya yönelik ilginin artmasına yol açmıştır. Özellikle ARMA ve FGN

modelleri arasındaki zorlu ayrımın ortadan kaldırılması bu konuda önemli bir gelişmeyi başlatmıştır.

Granger ve Joyeux (1980) ve Hosking (1981), modellerinin Mandelbrot modellerine yönelik farklı temel varsayımlara dayandığını kabul etmişlerdir. Ayrıca, Box – Jenkins (1970) çerçevesine uzun hafızanın getirilmesinin faydalı olduğunu göstermişlerdir. Bir $ARIMA(0,d,0)$ süreci olarak kırılğan farklılaştırılmış modellerin göz önünde bulundurulması ve kısa vadeli etkileri modellemek için parametrelerin (p,q) dahil edilmesi, $ARFIMA(p,d,q)$ (Auto-Regressive Fractionally Integrated Moving Average) modeli için bir sıçrama oldu. Hem kısa hem de uzun hafıza özelliklerini modelleyebilecek bir süreç geliştirerek, yazarlar ARMA ve FGN modelleri arasındaki zorlu dikotomiye ortadan kaldırdılar. Her iki hafıza türünü eşzamanlı olarak modelleyebilen ARFIMA modelleri, Mandelbrot'un FGN modeline olan ana pratik itirazı ortadan kaldırdı.

1.5. UZUN ARALIKLI BAĞIMLILIK

Uzun hafıza olgusu düşük frekanslarda ortaya çıkan ortalamaya göre standart sapmadaki değişimlerin (varyasyonları) ve eğilimlerin ölçülmesi açısından önemli bir bilgi sunmaktadır. Ancak zaman boyutunda uzun hafıza kavramı ile frekans boyutunda uzun hafıza kavramları arasında farklılık vardır. Durağan zaman serilerinde, zaman boyutunda “Uzun hafıza”, “Uzun gecikmelerde bağımlılık” (Long Range Dependence, LRD) veya “Uzun süreli kalıcılık” (Long Term Persistence) kavramlarıyla tanımlanır. LRD kavramının bilimsel açıdan kullanımı Mandelbrot'un kolektif Brown modellerinin Kolmogorov'un çevresel gözlemine (Hurst'un hidrolojiye olan etkisine) uygulanması sonucunda yaygınlaşmaya başlamıştır.

Zaman boyutunda uzun hafıza otokorelasyon fonksiyonları yoluyla ölçülmektedir. Bir otokorelasyon fonksiyonunda serilerin gecikmeli değerleri arasında bir bağımlılık ortaya çıkıyorsa uzun bir hafızaya sahip olan durağan bir sonlu varyans süreci söz konusudur. Bu süreç: $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N \rho(k) \rightarrow \infty$ şeklinde tanımlanır. Bu, sıfır

frekansında sonlu bir güç spektrumuna eşdeğerdir. Bu, ACF ve güç spektrumunun her

ikisinin de bir güç yasasına tabi olduğu anlamına gelmektedir. Bir başka deyişle, şokların bir zaman serisinin herhangi bir zaman ölçeğinde bozulmamasıdır. Diğer yandan, her bir veri noktasının çok hızlı bir şekilde bozulması, sonuçta birçok standart (durağan) stokastik sürecin gürültüden ayırt edilemeyeceği çarpıcı bir durum oluşturmaktadır. Bu süreç sahte uzun hafıza kavramını ortaya çıkarmaktadır. Bunun ana nedeni zaman boyutunda gördüğümüz ancak frekans boyutunda ortadan kalkan etkilerdir.

Bu çalışmada uzun hafızanın üç önemli yönü tarihsel olarak açıklanmaktadır: (1) 1950'lerde ilk kez ilgi uyandıran çevresel gözlemler ve daha sonra "Hurst" olgusu olarak bilinen hidrolojik zaman serilerindeki anormal büyüme aralığı; (2) On yıldan fazla süren tartışmalardan sonra, Mandelbrot tarafından başlatılan ilk durağan model, kesirli Gauss gürültüsü (FGN) ve Hurst olgusunun açıklanması; ve (3) LRD'nin katılması ile kesirli bir farklılık parametresi (d)'nin, daha geleneksel ARMA(p, q) modeline Hosking ve Granger tarafından dahil edilmesi yoluyla ARFIMA(p, d, q) modelinin ortaya konması.

1.6. KOŞULLU GAUSS YAKLAŞIMI

Kesirli modeller, seriler üzerinde görülen etkilerin kalıcı ve geçici etkilerinin türbülans gibi ayrıştırılmasını sağlayan yaklaşımlardır (Corcuera ve diğerleri, 2013). Bu açıdan bu modeller günümüzde stokastik oynaklık modellerinin de katkısıyla (Burrough, 1981; Mandelbrot, 1982; Falconer, 1990) frekansın yüksekliğine bağlı olarak farklı pürüzsüz/pürüzlü süreçler olarak tanımlanmaktadır (Gatheral ve diğerleri, 2018; Bayer ve diğerleri, 2016; Bennedsen ve diğerleri, 2017a, b; Jacquier ve diğerleri, 2017). Uzun hafızanın parametresi olan kesir katsayısı, teorik olarak normal olmayan dağılımlarla, oynaklık tahmini yoluyla hesaplanabilmektedir. Bunun için aşağıdaki eşitlikten yararlanılmaktadır:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma_s dG_s, t \geq 0, \quad (3)$$

Bu eşitlikte, $X_0 \in \mathbb{R}$, $\sigma = (\sigma_t)_{t \geq 0}$ stokastik oynaklık sürecidir. $G = (G_t)_{t \geq 0}$ sıfır-ortalama Gauss sürecine karşılık gelmektedir. Bu süreç değişimlerin varlığına

karşın durağandır. X_t 'nin marjinal dağılımı, stokastik oynaklık sürecinin geçmişine ve başlangıç değerine bağlı olarak X_0 'dır.

$$X_t | (\sigma_s, s \in [0, t]; X_0) \sim N \left(X_0, \int_0^t \sigma_x^2 dx \right), t \geq 0, \quad (4)$$

Başka bir deyişle, X_t 'nin marjinal dağılımı, stokastik sürecin σ ve başlangıç değeri olan X_0 tarafından belirlenmekte; ortalama ve varyansa göre normal bir dağılım göstermektedir. Yüksek frekanslı zaman serilerinde, ortalama bir varyansa göre normal dağılım göstermeyen durumlarda bile, hafıza yapısına ilişkin analizler yapılabilmektedir. Bu açıdan, parametrik olmayan yaklaşımlar kullanılmaktadır. Bunun en bilinenleri çekirdek düzleştirme tekniklerinin kullanıldığı yaklaşımlardır.

İKİNCİ BÖLÜM

YÜKSEK FREKANSLI ZAMAN SERİLERİNİN HAFIZA YAPISI

Finansal piyasalar, içsel bilgilere ve ticari verilere erken erişim sağlamak için birçok yol sunar. Yüksek hızlı kablolar ve “ortak konum” ile birlikte pazar veri dağıtım platformları para karşılığı sunulabilecek hizmetler arasında sayılmaktadır. Ancak yatırımcıları tercih eden bilgi yatırımcıları gibi hizmetlerin varlığı ve daha hızlı erişimden yararlanan yüksek frekanslı al-sat yapanların ortaya çıkması, bilgi asimetrisi yaratmaktadır. Çünkü bilgi farklı hızlarda erişime sunulmuş olmaktadır. Ortaya çıkan farklı hızda erişilebilen bilgi yayma sistemleri, Verimli Sermaye Piyasaları Hipotezi’ne (ECMH) aykırı bir durum olup, bilgi eşitliğine dayalı piyasa etkinliğini etkileyebilmektedir.

2.1. ALGORİTMİK FİNANSAL İŞLEMLER

Genellikle emeklilik fonları veya sigorta şirketleri tarafından yapılan büyük ölçekli işlemler, hisse senedi fiyat seviyeleri üzerinde ciddi bir etkiye sahiptir. Algoritmik finansal işlemler (AFİ) büyük işlemleri, birçok küçük boyutlu işleme ayırarak bu fiyat etkisini azaltmayı hedeflemekte ve böylece işlem yapanlara fiyat avantajı sunmaktadır. Algoritmalar ayrıca işlemleri pazara gönderme zamanlamasını dinamik olarak kontrol eder. Bu algoritmalar gerçek zamanlı yüksek hızlı veri akışlarını okur, ticaret sinyallerini tespit eder, uygun fiyat seviyelerini belirler ve uygun bir fırsat belirledikten sonra ticaret emirlerini yerleştirir. Ayrıca, arbitraj fırsatlarını tespit edebilir ve takip eden trendlere, haber etkinliklerine ve hatta spekülasyona dayalı olarak esnek da verebilirler.

Artan likiditeye, spreadların daralmasına ve kısa vadeli oynaklığın azalmasına rağmen AFİ, özellikle krizler veya belirsizlik dönemlerinde piyasa istikrarını bozmakta ve daha hassas hale getirmektedir. Bununla birlikte, yasal bilgi eşitsizlikleri bile finansal piyasaların verimliliğini etkiler. Ticari verilere erken erişim, AFİ’nin al-sat akışını öngörmesini ve daha yavaş yatırımcıların önünde işlem yapmasını sağlar. AFİ bilgili tüccarların temel analizleri gerçekleştirmeye yönelik teşviklerini azaltırlar, çünkü temel araştırma ve analizlere yatırım yaparak kazanılan ilk avantajdan

yararlanma olasılığını ortadan kaldırır. Piyasa fiyatları uzun vadede daha az bilgilendirici olabilir ve tahsisat verimliliğini olumsuz yönde etkileyebilir. Ayrıca AFİ'nin uzun vadeli fiyat keşfine yapısal olarak katkısı yoktur çünkü AFİ sadece marjinal olarak menkul kıymetler, menkul değer ihraçları veya finansal analiz hakkındaki bilgilere dayanmaktadır.

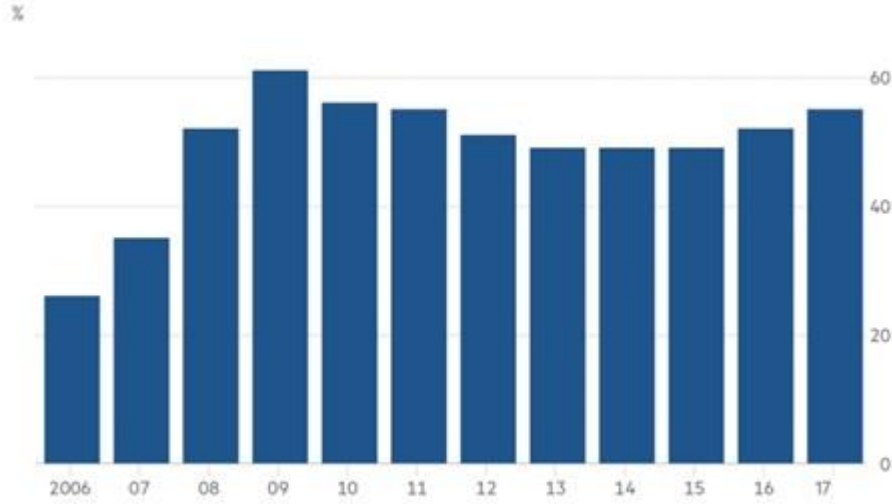
Bu bağlamda, AFİ'nin tahsisat piyasa etkinliği üzerindeki olumsuz etkilerini sınırlamayı amaçlayan olası düzenleyici stratejiler için kavramsal bir çerçeve geliştirilmelidir. AFİ'nin hız avantajının azaltılması ve rekabet ortamının sağlanması, bilinçli yatırımcılara baskılarla karşılaştıkları piyasalara girme konusunda daha fazla teşvik verilmesi amaçlanmalıdır. Mevcut iç ticaret rejiminin, tam anlamıyla uygulanması durumunda, kurumsal bilgilere erken erişim sağlayan veri dağıtımı kabloları satışını kısıtlayabildiği göz önüne alındığında, AFİ ile ilgili bilgi eşitsizliklerinin azaltılmasının, abonelerin ticaret bilgilerine daha hızlı erişim sağlayan veri akışlarına odaklanmasını gerektirdiği söylenebilir.

AFİ ve normal işlem yapanlar arasındaki bilgi eşitsizliğini azaltmak için, özel ticaret veri beslemelerini satma yasağı konması eşitsizliği ortadan kaldırmamaktadır. Yine, uzun vadeli fiyatlamamanın doğruluğu, AFİ ile ilgili riskleri açıkça engellememektedir. Bu noktada, likiditeyi ve kısa vadeli fiyat keşfini artırma becerisini zayıflatabilen teknikler önem arz etmektedir. Yukarıda gösterilen düzenleyici yaklaşımlar, iki katmanlı erişimin işlem verilerine olan etkisini azaltabilse de konu hala problemli olmaya devam etmekte ve ek ampirik çalışmalara duyulan ihtiyacı ortaya koyan çözülmemiş soruları gündeme getirmektedir.

Sonuç olarak, AFİ'nin hız avantajını azaltmaya yönelik tedbirlerin kabul edilmesinden bağımsız olarak, gelecekteki ampirik kanıtlar AFİ'nin gerçek kaynak tahsisi üzerindeki olumsuz etkisini teyit ederse, düzenleyici temel bilgi sahibi işlem yapanlar maruz kaldıkları baskıları hafifletmeyi amaçlayan eylemleri değerlendirebilirler. AFİ ağırlıklı sermaye piyasalarında bir gizlilik sözleşmesine bağlı olarak, kamuya açık olmayan önemli bilgilerin seçici olarak açıklanması, temel yatırımcıların bilgi araştırma maliyetlerini azaltmak için hâlihazırda mevcut olan bir araç olarak sayılabilir.

Geçtiğimiz 20 yıl boyunca otomasyon ve yeni teknoloji, ABD ve Avrupa finansal piyasalarını önemli ölçüde değiştirmiş; AFI ve Yüksek Frekanslı Ticaret, piyasalarda %50-%60 seviyesinde piyasa payına sahip olmuştur. Şekil 1, bu durumu yansıtmaktadır.

Şekil 1: ABD Borsalarındaki AFI Oranı



Kaynak: “TABB Group” verilerinden yararlanarak tarafımızdan hazırlanmıştır.

Piyasaya gönderilecek küçük ölçekli emirler, genellikle milisaniye (saniyenin binde biri) veya mikro saniye (milisaniyenin binde biri) gibi çok yüksek hızlarda yönetilir ve gerçekleşir. Bu işlemler, bir piyasa yapıcısının rolünü çoğaltan yüksek hızlı algoritmalar tarafından yönetildiği için AFI algoritmaları genellikle sat-al emirlerinden yararlanma girişimi için iki taraflı sipariş yerleşimlerini (alım-satım ve satış-yüksek) içerir.

2.2. GERÇEKLEŞMİŞ ÇEKİRDEK YAKLAŞIMI

Basitleştirilmiş piyasa sürtünme modellerinde temel sermaye fiyatlarındaki değişimlerin etkilerini yumuşatmak amacıyla çekirdeklerin nasıl seçileceğinin ve bu seçimdeki ölçütlerin bilinmesi büyük önem arz etmektedir. Ağırlıklar, mümkün olan en iyi yaklaşma oranını elde etmek ve asimptotik bir varyansa sahip olmak üzere seçilmektedir. Bu da parametrik yaklaşımlarda maksimum olabilirlik (Maximum Likelihood, ML) tahmincisinin istenilen özellikleri taşımasına bağlıdır. Çekirdeklerin çok yüksek oranda düzleştirmeye yol açacak biçimde kullanılması, verilerin

özelliklerini kaybetmesine yol açarken; iktisadi açıdan beklemeyen sonuçları da beraberinde getirmektedir. Bu nedenle gerçekleşmiş çekirdekler, işlemlerdeki veri tabanlarında olduğu gibi endojen aralıklı veriler kullanılarak tespit edilmekte; endojen olarak piyasa sürtünmelerine izin verilebilmektedir. Böylece geçici olarak bağımlı gürültünün varlığı tamamen ortadan kaldırılmamış olur.

Gerçekleşmiş çekirdek (realised kernel) tahmin edicileri kullanılarak herhangi bir sabit zaman periyodunda, örneğin günlük getiri serilerinin gerçekleşmiş varyasyonu için çıkarımlar yapılabilir. Tek bir aralığa sahip periyod $[0, t]$ olmak üzere, devamlı bir getiri serisi süreci X ve zaman aralığı $\delta > 0$ için düz-üst gerçekleşmiş çekirdekler aşağıdaki eşitlik ile düzleştirilebilir. Düzleştirme parametrelerinin seçimi yoğunluk fonksiyonun tahmininin sistematik ve rassal hatası arasındaki dengeyi kurmak için yapılmaktadır.

$$K(X_\delta) = \gamma_0(X_\delta) + \sum_{h=1}^H k\left(\frac{h-1}{H}\right) \{\gamma_h(X_\delta) + \gamma_{-h}(X_\delta)\}, \quad (5)$$

Burada $x \in [0, 1]$ için stokastik olmayan $k(x)$ bir ağırlık fonksiyonudur ve h . gerçekleşmiş otokovaryans aşağıdaki gibidir:

$$\gamma_h(X_\delta) = \sum_{j=1}^n (X_{\delta j} - X_{\delta(j-1)}) (X_{\delta(j-h)} - X_{\delta(j-h-1)}), \quad (6)$$

Burada $h = -H, \dots, 0, 1, \dots, H$ ve $n = \lfloor t/\delta \rfloor$ şeklindedir. δ 'nin küçük olduğu düşünüldüğünde, $X_{\delta j} - X_{\delta(j-1)}$ ifadesi j . yüksek frekanslı getiri serisini temsil eder ve aynı anda X , $\gamma_0 X_\delta$ 'in gerçekleşmiş varyansıdır. Burada $K(X_\delta) - \gamma_0(X_\delta)$ ifadesi piyasa sürtünmeleri için gerçekleşmiş varyansa göre gerçekleşmiş çekirdek düzeltmesidir.

Verilenlere göre $k(0) = 1, k(1) = 0$ ve $H = c_0 n^{2/3}$ ise, sonuçta elde edilen tahmin edici, asimptotik kompleks Gauss, $n^{1/6}$ oranına yakınsar. Burada c_0 , tahmin edilebilir bir sabit olup, k 'nin bir fonksiyonu, gürültünün varyansı, oynaklığın eğilimi ve ortalama etrafındaki değişimdir. Burada tahmin edicinin asimptotik varyansını

azaltmak için k optimal olarak seçilmelidir. Düz-üst Bartlett çekirdeği adındaki özel durumda $k(x) = 1 - x$ 'in asimptotik dağılımı, iki ölçekli tahmincisi ile aynıdır¹.

Gerçekleşmiş çekirdek literatürde üç amaçla kullanılmaktadır:

- (i) çok ölçekli tahmin edicinininkinden daha küçük bir asimptotik varyansa sahip olacak şekilde bir çekirdek tasarlama,
- (ii) işlemlerin veri tabanlarındaki gibi, endojen aralıklı veri için $K(X\delta)$ tasarlama (Renault ve Werker (2008)),
- (iii) piyasa sürtünmelerinin endojen olduğu durumun kapsanması.

Genel olarak gerçekleşmiş çekirdekler, örneğin Gallant (1987), Newey ve West (1987) ve Andrews (1991) tarafından tartışılan/araştırılan HAC (Heteroskedastic and Autocorrelation Consistent) tahmin edicilerin etkinliğine yönelik bir yaklaşım sunmaktadır. Birinci otokovaryans birim ağırlığın yüklendiği, Politis ve Romano (1995) ve Politis (2005) tarafından başlatılan düz-üst teknikleri bu çerçevede geliştirilmiştir. Bununla birlikte, gerçekleşmiş çekirdekler, çok sayıda teknik çıkarımları olan örnek büyüklüğü tarafından ölçeklendirilmemektedir. Bu açıdan bu yaklaşımlar küçük örnek tahmincilerinin etkinliğine yönelik tekniklerdir.

Gerçekleşmiş çekirdekler üzerine literatür, Zhou (1996) tarafından $K(X\delta)$ ve $H = 1$ önerisi ile başlatılmıştır. Bu öneri, piyasa sürtünmelerinin yüksek dereceli otokovaryanslarının örneklem değerlerinin sıfır olduğu durumlar için ve sürtünmelerin basit bir model altında neden olduğu yanlılığı ortadan kaldırmak amacıyla ortaya konmuştur. Ancak, bu tahmin ediciler tutarsızdır. Hansen ve Lunde (2006) piyasadaki mikroyapı gürültüsünün ikinci dereceden özelliklerini karakterize etmede genel H için $k(x) = 1$ olan gerçekleşmiş çekirdek tipi tahmin edicilerini kullanmıştır. Bunlar de tutarsız tahmin edicilerdir. Bir tür tutarsız gerçekleşmiş çekirdeğin sınırlı örnek

¹ Buna ek olarak gerektiğinde, $k'(0) = 0$ ve $k'(1) = 0$ olarak alırsak, $H = c_0 n^{1/2}$ değerini almaktadır. Bu durumda tahmin edici, en hızlı oran olan $n^{1/4}$ oranına yakınsayan, asimptotik karışık Gauss $k(x) = 1 - 3x^2 + 2x^3$ olmaktadır. Bu tahmin edici, çok ölçekli tahmin ediciyle aynı asimptotik dağılıma sahiptir.

performansı Bandi ve Russell (2006) tarafından sağlanmıştır, ancak bu yaklaşım, $k(x) = 1 - x$, Bartlett çekirdeği olduğu durumda H 'nin seçimine odaklanmıştır.

2.3. YARI MARTİNGALLAR VE İKİNCİ DERECEDEN DEĞİŞİM

Varlık fiyatlarının temel teorisine göre, t, Y_t , zamanındaki getiri serilerinin, sürtünmesiz arbitrajsız bir piyasada, filtrelenmiş olasılık alanı $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq T^*}, P)$, $T^* \leq 0$ üzerinde bir yarı martingal sürecine ($Y \in SM$) (Semimartingale) uymalıdır. Martingal yaklaşımı (1965) yılında Samuleson tarafından hisse senedi piyasalarındaki eğilimleri ifade etmek için kullanılmıştır. Bu tanıma göre hisse senetlerinin bir sonraki dönemde beklenen fiyatının tahmininde geçmiş fiyat serilerindeki tüm bilgiler içermektedir. Bu konu daha sonra Fama tarafından hisse senetleri piyasalarının etkinliğine yönelik geliştirilen yaklaşımın temelini oluşturmuştur. Böylece hisse senetleri piyasasında fiyatların “rassal yürüyüş”e sahip olup olmadığının test edilmesi önemli hale gelmiştir. Yaklaşımın en temel özelliği, piyasadaki geçmiş fiyatların bir sonraki dönemin fiyatlarının olasılık dağılımını tahmin etmek için tüm bilgileri içermesidir. Bunun anlamı bir finansal piyasadaki değerlerin bir sonraki dönemin koşullu değerlerini veren bir stokastik süreç olmasıdır. Bu stokastik süreç finansal risk olgusunun parametrelerinin ortaya konmasını sağlayan bir araç niteliğindedir. Bundan dolayı martingal süreçler, finansal risklerin tahmin edilmesine yönelik yaklaşımların temelini oluşturmuştur. Genel olarak etkin olduğu ifade edilen finansal piyasada fiyatların bir martingal süreci izlemesi beklenir. Martingal süreç, bir hafızaya sahip olmayan ve finansal değişkenleri temsil eden serilerin gözlemleri arasında bir ilişkinin olmadığı süreci tanımlar. Buradan hareketle, cari getirilerin önceki fiyatlar ile ilişkisi olmaması bir martingal süreç olarak ifade edilir. Finansal risklerin tahmininde yarı martingallar, $Y \in SM$ 'nin ikinci dereceden değişikliği QV (Quadratic Variation) ifade eden bir süreçtir. Bu süreç aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$[Y]_t = \text{plim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{t_j \leq t} (Y_{t_j} - Y_{t_{j-1}})^2, \quad (7)$$

Protter (2004; 66–77) ve Jacod ve Shiryaev (2003; 51) bu eşitliğin herhangi bir deterministik parametresi için $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ ile $\sup_j \{t_{j+1} - t_j\} \rightarrow 0$

için $n \rightarrow \infty$ dir. Yarı martingal süreçlerinin literatürde en bilineni Brown yarı martingaldir ($Y \in BSM$) (Brownian Semimartingale).

$$Y_t = \int_0^t a_u du + \int_0^t \sigma_u dW_u, \quad (8)$$

8. eşitlikte a , deterministik katsayısı verisi iken, σ oynaklık surecidir. W bir Brown hareketidir (Ghysels, Harvey ve Renault, 1996; Shephard, 2005). Y eğer $Y \in BSM$ ise;

$$[Y_t] = \int_0^t \sigma_u^2 du, \quad (9)$$

Bu eşitliği asimptotik gereklilik koşulları için ifade edecek olursak, büyük örnekler için geçerli tahminlerin yapılmasına olanak sağlayan eşitliğe ulaşılır. Bu eşitlik aşağıda verilmiştir:

$$\sigma_t = \sigma_0 + \int_0^t a_u^\# du + \int_0^t \sigma_u^\# dW_u + \int_0^t v_u^\# dV_u, \quad (10)$$

Burada, $a^\#$, $\sigma^\#$ ve $v^\#$ uyarlanmış kadlag (càdlàg) süreçleri, $a^\#$ ile öngörülebilir ve lokal olarak sınırlıdır; V , ise W 'den bağımsız Brown hareketidir. Ayrıca, σ^2 'nin her bir kompakt aralık için hemen hemen kesinlikle yol üzerinde pozitif olduğu varsayılır. Büyük bir kısmı Barndorff-Nielsen, Graversen, Jacod ve Shephard (2006)'ın araştırmaları izlenerek σ 'da sıçramaya izin verecek şekilde genişletilebilir.

2.4. FİNANS AÇISINDAN “GÜRÜLTÜ” HAKKINDA VARSAYIMLAR

Piyasadaki fiyat sürtünmesi etkilerini U olarak yazarsak, böylece süreç şu şekilde tanımlanabilir:

$$X = Y + U, \quad (11)$$

$Y \in BSM$ 'yi uygun fiyat olarak düşünüldüğünde, bilimsel olarak $[Y_t] = \int_0^t \sigma_u^2 du$ yaklaşımıyla tahmin edilecektir. Çalışmamızda, $Y \perp U$ olduğu varsayımı altında, genel olarak da $A \perp B$ 'de A ve B 'ler birbirinden bağımsızdır. Piyasanın

fiyat dinamikleri açısından, U 'nun, Y 'deki artışlarla korelasyona girmesini bekleyeceğine dair güçlü bir varsayım vardır (Kalnina ve Linton: 2006). Bununla birlikte, Hansen ve Lunde (2006)'ın ampirik çalışmalarında gösterdiği gibi her dürtünün bir dakikalık kaydedilen hisse senedi verileri analiz edildiğinde, bu bağımsızlık varsayımının istatistiksel olarak çok bozucu bir etki ortaya çıkarmadığı görülmüştür. Bu varsayım gevşetildiğinde gerçekleşmiş çekirdeklerin tutarlı olduğu gösterilebilir.

Sahip olduğumuz U süreci ($U \in \mathcal{WN}$) beyaz gürültü varsayımı altında çalışmaktadır. Bu nedenle aşağıdaki varsayımlar yapılmaktadır:

$$E(U_t) = 0, \text{Var}(U_t) = \omega^2, \text{Var}(U_t^2) = \lambda^2 \omega^4, U_t \perp U_s, \quad (12)$$

Bunlar herhangi bir $t, s, \lambda \in \mathbb{R}^+$ için varsayılabilir. Bu beyaz gürültü varsayımı pek çok bakış açısından yeterli kabul edilmektedir (Phillips ve Yu, 2006; Kalnina ve Linton, 2006). Ancak piyasa sürtünmelerinin dürtme süresinde çalıştığını düşünürsek $U \in \mathcal{WN}$ 'nin bir özelliği de $[U]_t = \infty$ olmasıdır (Bandi ve Russell, 2005; Zhang, Mykland ve Ait-Sahalia, 2005 ve Hansen ve Lunde, 2006). Böylece $U \notin SM$ olur ve sürtünmesiz bir piyasada arbitraj fırsatlarına imkân veren koşul ortaya konmuş olur. Ampirik çalışmalarda, sürtünmeler olduğunda da söz konusu varsayımlar altında analizler yapılmaktadır. Bu varsayımlar altında beyaz gürültü varsayımı olmaması durumunda da çekirdekler tutarlı olmaktadır. Bu tür özelliklere sahip iki ölçekli tahminciler geliştirilmiştir. Genel olarak piyasadaki sürtünmelerin analizi için oynaklıklar tahmin edilmelidir. Bu amaçla otokovaryans sürecinin tahmin edilmesi gereklidir.

2.5. OTOKOVARYANS SÜRECİNİN TANIMLANMASI

Öncelikli olarak finansal zaman serilerinde tespit edilen δ uzunluğuna göre belirlenecek zaman aralıklarıyla getiri serileri hesaplanır. Bu getiri serilerini X ve Z süreci olarak tanımlarsak, süre aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\gamma_h(Z_\delta, X_\delta) = \sum_{j=1}^n (Z_\delta - Z_{(j-1)\delta}) (X_{(j-h)\delta} - X_{(j-h-1)\delta}), h = -H, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, H, \quad (13)$$

Bu eşitlikte gerçekleşmiş otokovaryans süreci $\gamma_h(X_\delta) = \gamma_h(X_\delta, X_\delta)$ dir.

$$\gamma_h(X_\delta) = \gamma_h(Y_\delta) + \gamma_h(Y_\delta, U_\delta) + \gamma_h(U_\delta, Y_\delta) + \gamma_h(U_\delta), \quad (14)$$

Yukarıdaki eşitlikte gerçekleşmiş QV, $\gamma_0(X_\delta)$ 'nin günlük artışlarının gerçekleşmiş varyansı, onların karekökleri ise gerçekleşmiş oynaklık olarak adlandırılır. Bu kovaryans süreci düzleştirme parametresi ile veri pürüzsüz şekle dönüşür.

2.6. GERÇEKLEŞMİŞ ÇEKİRDEĞİN TANIMLANMASI

Gerçekleşmiş çekirdek aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$K(X_\delta) = \gamma_0(X_\delta) + \sum_{h=1}^H k\left(\frac{h-1}{H}\right) \{\gamma_h(X_\delta) + \gamma_{-h}(X_\delta)\}, \quad (15)$$

Eğer, $k(0) = 1$ ve $k(1) = 0$ olursa, o zaman $K(X_\delta) = K(Y_\delta) + K(Y_\delta, U_\delta) + K(U_\delta, Y_\delta) + K(U_\delta)$ olur. "T" ile aktarımı (transpose) yazıldığında aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\gamma(X_\delta) = \{\gamma_0(X_\delta), \gamma_1(X_\delta) + \gamma_{-1}(X_\delta), \dots, \gamma_H(X_\delta) + \gamma_{-H}(X_\delta)\}^T, \quad (16)$$

$$\gamma(Y_\delta, U_\delta) = (\gamma_0(Y_\delta, U_\delta), \gamma_1(Y_\delta, U_\delta) + \gamma_{-1}(Y_\delta, U_\delta), \dots, \gamma_H(Y_\delta, U_\delta) + \gamma_{-H}(Y_\delta, U_\delta))^T, \quad (17)$$

2.7. QV 'NİN MAKSİMUM OLABİLİRLİĞİ

Parametrik olmayan tahminler için parametrik tahminlerden elde edilen sonuçların karşılaştırılması konunun anlaşılmasını sağlayan en önemli yaklaşımdır. Bu amaçla $Y_t = \sigma W_t$ ve Gauss gürültüsü durumunda olduğu varsayımı altında $\sigma^2 = [Y]_1$ 'in maksimum olabilirliği ile tahmin edicisinin davranışı olduğu bilinmektedir. Burada belirttiğimiz tüm sonuçlar ve verilen $Y \perp U$ nin $t = 1$ durumu aşağıdaki gibidir:

$$\begin{pmatrix} X_{1/n} - X_0 \\ X_{2/n} - X_{1/n} \\ \vdots \\ X_1 - X_{(n-1)/n} \end{pmatrix} \sim N \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\sigma^2}{n} I + \begin{pmatrix} 2\omega^2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\omega^2 & 2\omega^2 & \cdot & \cdot \\ 0 & -\omega^2 & 2\omega^2 & \cdot \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \right\}, \quad (18)$$

Gauss modelinin ML tahmin edicisi olarak $\hat{\sigma}_{ML}^2$ ve $\hat{\omega}_{ML}^2$ olduğunu belirtelim. Bunların asimptotik özellikleri, MA(1) sürecinin klasik sonuçlarından elde edilir. Ait-Sahalia, Mykland ve Zhang (2005)'dan hareketle, $\omega^2 > 0$ durumu için aşağıdaki tanıma ulaşılır:

$$\begin{Bmatrix} n^{1/4}(\hat{\sigma}_{ML}^2 - \sigma^2) \\ n^{1/2}(\hat{\omega}_{ML}^2 - \omega^2) \end{Bmatrix} \xrightarrow{L} N\left\{0, \begin{pmatrix} 8\omega\sigma^3 & 0 \\ 0 & 2\omega^4 \end{pmatrix}\right\}, \quad (19)$$

Burada $\hat{\sigma}_{ML}^2$ 'nin yaklaşma oranı yavaştır (Stein, 1987; Gloter ve Jacod, 2001a; Gloter ve Jacod, 2001b).

Doğal olarak, $\hat{\sigma}_{ML}^2$ ifadesi, Gauss modeli yanlış tanımlamadığı sürece; yarı maksimum olabilirlik tahmin edicisi (Quasi Maximum Likelihood Estimator, QMLE) olarak yorumlanabilir. Burada $\hat{\sigma}_{ML}^2$ 'nin asimptotik dağılımı, U 'nun gerçek dağılımına bağlı değildir (Ait-Sahalia, Mykland ve Zhang, 2005). Bu yaklaşımın özelliği, U normal olmayan bir dağılıma sahip ise de $n^{1/4}(\hat{\sigma}_{ML}^2 - \sigma^2) \xrightarrow{L} N(0, 8\omega\sigma^3)$ durumunun sürmesidir. $\hat{\sigma}_{ML}^2$, U için normal dağılımdan türetilmiş olsa bile U 'nun dağılımı hakkında ilave varsayımlar yapılmadığı sürece, en yakın olası yaklaşma oranı $n^{1/4}$ dür. U 'nun iki noktalı dağılıma sahip olduğunu varsayarsak, bu alternatif parametrik model üzerinde ML tahmini yapıldığında, $n^{1/2}$ 'nin yakınsama oranını iyileştirmek (recover) mümkün olur.

Piyasa fiyat oluşumunda gürültünün bulunmadığı özel durum (yani, gerçek değeri $\omega^2 = 0$), $n^{1/2}(\hat{\sigma}_{ML}^2 - \sigma^2) \xrightarrow{L} N(0, 6\sigma^4)$ 'den beri, $\hat{\sigma}_{ML}^2$ için daha hızlı yakınsama oranlarına yol açmaktadır. ω^2 , aynı zamanda, bir önsel varsayım gereği sıfır kabul edilir ve bu nedenle tahmin edilmezse o zaman eşitlik aşağıdaki gibi olur:

$$n^{1/2}(\hat{\sigma}_{ML}^2 - \sigma^2) \xrightarrow{L} N(0, 2\sigma^4), \quad (20)$$

Bu eşitlik ortalamanın olmadığı, varyansın ise sonlu olduğu bir durumu ifade eder. Eşitliğin önemi, salınımlar olduğunda tahmin değerini verebilecek yakınsama oranını gösterecek olmasıdır.

2.8. İŞARETLEME VE SALINIM

Bazı sonuçların açıklanmasını basitleştirmek için, X_0 ve X_t gibi iki uç noktadaki fiyat ölçümleri, sırasıyla $(-\delta, \delta)$ ve $(t - \delta, t + \delta)$ aralıklarında ayrı ayrı gözlemlenmiş m ortalaması olarak kullanılabilir. Bu, bazı durumlarda $K(U_\delta)$ 'nin asimptotik varyansında ortaya çıkacak olan etkileri ortadan kaldırmak için kullanılabilir. Salınım, $K(Y_\delta)$ ve $K(Y_\delta, U_\delta)$ ile ilgili olarak, tutarlılık, yakınsama oranı veya asimptotik sonuçlarda sapmaya neden olmamaktadır.

Aşağıda, çekirdek ağırlıklı fonksiyonlarının $k(x)$, $[0, 1]$ 'de iki kere sürekli olarak farklılaşabileceği düşünüldüğünde aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$k_{\bullet}^{0,0} = \int_0^1 k(x)^2 dx, k_{\bullet}^{1,1} = \int_0^1 k'(x)^2 dx, k_{\bullet}^{2,2} = \int_0^1 k''(x)^2 dx, \quad (21)$$

Her zamanki gibi, primler kullanılarak türevler yazılır. Bu bağlamda $k'(0)^2 + k'(1)^2 = 0$ olan çekirdekler özellikle ilgi çekicidir ve bu çekirdek sınıfına pürüzsüz çekirdekler denmektedir.

2.9. $\gamma(X_\delta)$ İÇİN MERKEZİ LİMİT TEORİSİ

Burada, $\gamma(X_\delta)$ parametrelerinin büyük örnek davranışı incelenmektedir. Bu sonuçlar, $K(X_\delta)$ 'nin özelliklerine ilişkin sonuçların ispatında kullanılmaktadır. Böylece $[Y]$ 'nin iyi tahmin edicilerini üretmek için k seçilecektir. Bu çalışma boyunca $\xrightarrow{L_Y}$ ele alınacak olan bir yakınsama türü olan Y işlemiyle üretilen σ -alan, $\sigma(Y)$ ile ilgili olarak istikrarlı yasayı gösterecektir.

Varsayalım ki $(Y \in BSM)$, σ ile birlikte (10)'un formu olsun ve $U \in \mathcal{WN}$ ile $U \perp Y$ olsun:

$$\Gamma_{\delta,H} = \left(\gamma_0(Y_\delta) - \int_0^t \sigma_u^2 du, \gamma_1(Y_\delta) + \gamma_{-1}(Y_\delta), \dots, \gamma_H(Y_\delta) + \gamma_{-H}(Y_\delta) \right)^T, \quad (22)$$

$n \rightarrow \infty$ olduğu için, *rastgele değişkenler* kuralda ortaklaşa birleştiklerinde ve $\sigma(Y)$ sabit olmak üzere aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$\delta^{-1/2}\Gamma_{\delta,H}, \gamma(Y_\delta, U_\delta) + \gamma(U_\delta, Y_\delta), \delta^{1/2}\{\gamma(U_\delta) - E_\gamma(U_\delta)\}, \quad (23)$$

Sınırlayıcı kurallar aşağıdaki gibidir:

$$\delta^{-1/2}\Gamma_{\delta,H} \xrightarrow{L_Y} MN \left(0, 2 \int_0^t \sigma_u^4 du \times A\right), A = \text{diag}(1, 2, \dots, 2), \quad (24)$$

Burada, MN karışık normal dağılımı gösterir. $\gamma(Y_\delta, U_\delta) + \gamma(U_\delta, Y_\delta) \xrightarrow{L_Y} MN(0, 8\omega^2[Y]B)$ ifadesinde $(H+1) \times (H+1)$ olmak üzere B 'nin blok yapısı ile simetrik matrisi

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}, B_{11} = \begin{pmatrix} 1 & \bullet \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B_{21} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_{22} = \begin{pmatrix} 2 & \bullet & \bullet & \bullet \\ -1 & 2 & \bullet & \bullet \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

$$B_{12} = B_{21}^\top \text{ ve}$$

$E\{\gamma(U_\delta)\} = 2\omega^2 n(1, -1, 0, 0, \dots, 0)^\top$, $\text{Cov}\{\gamma(U_\delta)\} = 4\omega^4(nC + D + m^{-1}E)$ şeklindedir. Burada, $C, D, \text{ve } E$ simetrik $(H+1) \times (H+1)$ matrisler; C blok yapısı ile aşağıdaki gibidir:

$$C_{11} = \begin{pmatrix} 1+\lambda^2 & \bullet \\ -2-\lambda^2 & 5+\lambda^2 \end{pmatrix}, C_{21} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C_{22} = \begin{pmatrix} 6 & \bullet & \bullet & \bullet \\ -4 & 6 & \bullet & \bullet \\ 1 & -4 & 6 & \bullet \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (26)$$

$$C_{12} = C_{21}^\top;$$

$$D = \begin{pmatrix} -\lambda^2 - 2 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \lambda^2 + 4 & -\lambda^2 - \frac{21}{2} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ -\frac{4}{2} & 9 & -15 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & -\frac{5}{2} & 11 & -18 & \bullet & \bullet \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{H+2}{2} & 2H+5 & -3(H+3) \end{pmatrix}, \quad (27)$$

ve blok yapısıyla $E: E_{12} = E_{21}^\top$,

$$E_{11} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda^2}{2} + (m-1) & \bullet \\ \frac{\lambda^2}{2} + (m-1) & \frac{\lambda^2}{2} + (m-1) \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 8 & \bullet & \bullet & \dots \\ -5 & 8 & \bullet & \ddots \\ 0 & -5 & 8 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (28)$$

Sonunda, $n^{-1/2}\{\gamma(U_\delta) - E\gamma(U_\delta)\} \xrightarrow{L} N(0, 4\omega^4 C)$.

Burada $2\gamma_h(U_\delta)$ yerine gerçekleşmiş çekirdeklerin inşasında $\gamma_h(U_\delta) + \gamma_{-h}(U_\delta)$ 'nın kullanılması, tutarlı bir tahmin edicinin elde edilmesi için şarttır. Gerçekleşmiş varyansın bir kısmı $\gamma_0(U_\delta)$, $U_0^2 + 2\sum_{j=1}^{n-1} U_{\delta j}^2 + U_t^2$ ile verilir ve $\gamma_1(U_\delta)$ ve $\gamma_{-1}(U_\delta)$ 'de karşılık gelen terimler sırasıyla $U_0^2 + \sum_{j=1}^{n-1} U_{\delta j}^2$ ve $\sum_{j=1}^{n-1} U_{\delta j}^2 + U_t^2$ ile verilir. Bu nedenle, iki terim U_0^2 ve U_t^2 'yi ortadan kaldırmak için hem $\gamma_1(U_\delta)$ hem de $\gamma_{-1}(U_\delta)$ 'ye ihtiyaç vardır çünkü bu terimler $|h| \geq 2$ için $\gamma_h(U_\delta)$ 'da yer almaz.

2.10. $n^{1/4}$ İÇİN ÖZEL DURUMLAR

Bu düzlemin sekizinci düz-üst durumu EK 2'de analiz edilmiş ve Şekil 2'de dört çekirdek fonksiyonu çizilmiştir. Birincisi, a_1 , a_2 , a_3 'ün sabit olduğu çekirdeğin küpü $k(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ 'den hareketle elde edilir. $k'(0)^2 + k'(1)^2 = 0$ 'ye $k(0) = 1$ ve $k(1) = 0$ 'yi uygulanarak a_1 , a_2 , a_3 'ü seçilmektedir. Oluşan çekirdeğin küpü $k(x) = 1 - 3x^2 + 2x^3$, kardinal kamaları (spline) küpünün (Park ve Schowengerdt, 1983) ve ikinci dereceden ana çekirdeklerinin (Phillips, Sun ve Jin, 2003) bazı özelliklerine sahiptir. Daha önce de belirtildiği gibi, çekirdeğin küpü, pürüzsüz çekirdek sınıfında $k_{\bullet}^{2,2}$ 'yi en aza indirir. Bu nedenle genel olarak $k_{\bullet}^{2,2} \geq 12$ durumuna erişilir. Çekirdeğin küpüne dayanan gerçekleşmiş çekirdek çok ölçekli tahmin ediciyle aynı asimptotik dağılıma sahip olduğunu ve $k_{\bullet}^{2,2}$ 'yi en aza indirmek için g 'yi en aza indirmeye gerek olmadığını göstermektedir. Burada daha küçük bir asimptotik varyansa sahip olan iyi bilinen bir çekirdek, düz-üst Parzen çekirdeğidir. Bu çekirdek aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$k(x) = \begin{cases} 1 - 6x^2 + 6x^3 & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2(1 - x)^3 & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (29)$$

Ayrıca düz-üst Tukey – Hanning_p çekirdeği aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$k(x) = \sin^2 \left\{ \frac{\pi}{2} (1 - x)^p \right\}, \quad (30)$$

Bu tanıma değiştirilmiş Tukey – Hanning çekirdeği denir. $p = 1$ iken $\sin^2\{\pi/2 (1 - x)\} = \{1 + \cos(\pi x)\}/2$, her zaman Tukey – Hanning çekirdeğine karşılık gelir.

EK 2 dikkate alındığında, Tukey – Hanning₁ çekirdeğinin performansının çekirdeğin küpündeki ile hemen hemen aynı olduğunu görülmektedir. Parzen çekirdeği, çekirdeğin küpünden daha iyidir. Ancak $p \geq 2$ olduğunda değiştirilmiş Tukey – Hanning çekirdeği daha iyidir. Standart çekirdeklerden hiçbir parametrik varsayımlara bağlı kalmasa da, değiştirilmiş Tukey – Hanning çekirdeğinin p değerini arttırdıkça, alt sınıra yaklaşmaktadır. Bu çekirdek, p arttıkça daha fazla gecikme kullanır ve daha sonra $k(1) = 0$ gereksinimi koşuluna gerek kalmayacak duruma gelir. Böylece ikinci dereceden spektral çekirdek gibi tüm gecikmelerden yararlanan çekirdek tahminlerde dikkate alınacaktır (Andrews, 1991).

2.11. SONSUZ GEÇİKMELER İLE GERÇEKLEŞMİŞ ÇEKİRDEKLER

Eğer çekirdek fonksiyonu için daha yüksek gecikmeler dikkate alınırsa $x \geq 1$ için $k(x) = 0$ 'a göre, gerçekleşmiş çekirdekler şöyle ifade edilebilir:

$$K(X_\delta) = \gamma_0(X_\delta) + \sum_{h=1}^{n-1} k\left(\frac{h-1}{H}\right) \{\gamma_h(X_\delta) + \gamma_{-h}(X_\delta)\}, \quad (31)$$

H 'den daha yüksek olan tüm sıralar için otokovaryansa sıfır ağırlık verilirse $x > 1$ için $k(x) = 0$ olmasına karşılık gerekmeyen durumlar için çekirdekler ortaya konabilir. Bu tür çekirdekler potansiyel olarak tüm otokovaryanslara sıfır olmayan ağırlık atayabilir. Bu nedenle “ $k(x) = 0$ için $x > 1$ ” ifadesi “ $k(x) \rightarrow 0, x \rightarrow \infty$ ” olarak ifade edilir. Bu durumda $k(x), [0, \infty]$ 'da iki kez değerli” olabilir. Literatürde bu tür çekirdeklerin küçük değişikliklerle sonuçlarımıza uygun hale getirilebileceği ortaya konmaktadır. Genel olarak hızlı birleşme oranını elde etmek için $k'(0) = 0$ olması ve integralleri temsil etmek için $k_{\bullet}^{0,0}$, $k_{\bullet}^{1,1}$, ve $k_{\bullet}^{2,2}$ değerlerinin kullanılması gereklidir. Tüm pozitif eksen üzerinde, örneğin $k_{\bullet}^{0,0} = \int_0^\infty k(x)^2 dx$ şeklinde tanımlanan gerçekleşmiş çekirdekler sınıfı, en uygun şekilde tanımlanmış olur.

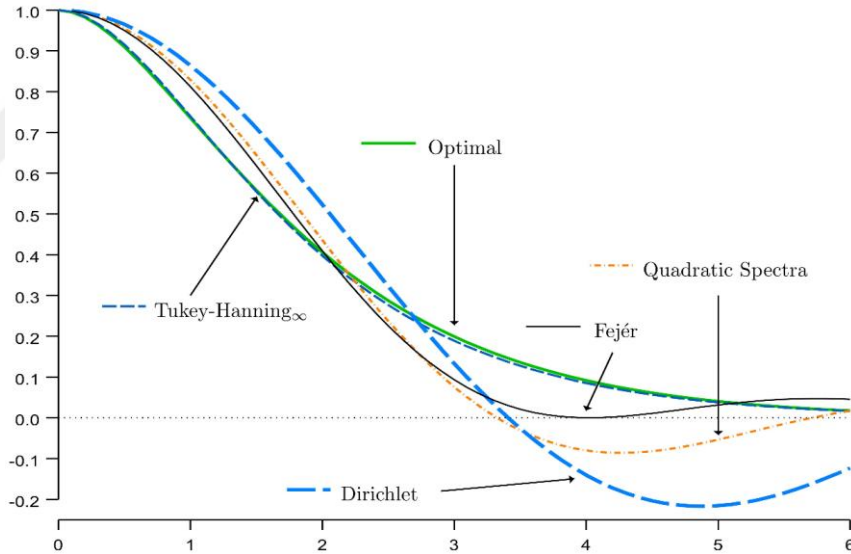
2.12. OPTİMAL ÇEKİRDEK FONKSİYONU

Sonsuz-gecikme gerçekleşmiş çekirdeği $H^* = \xi n^{1/2}$ ile parametrik yeterliliğe ulaşılır.

$$k(x) = (1 + x)e^{-x}, \quad (32)$$

Bu optimum çekirdek fonksiyonu olarak tanımlanır. Yukarıda, (19)'a dayanan gerçekleştirilmiş çekirdek, parametrik olarak tanımlanan maksimum olabilirlik tahmin edicisine asimptotik olarak ilk sıradan eşdeğerdir. Yani, $\sigma_u^2 = \sigma^2$ (sabit oynaklık) olduğunda, her ikisi de asimptotik varyansa $8\omega\sigma^3$, (bakınız (7)) sahiptir ve her ikisi de $n^{1/4}$ oranında birleşir. Bu çekirdek fonksiyonların bir özelliği $k(x) = (1 + x)e^{-x}$, in en uygun bant genişliğinin $H^* = \xi n^{1/2}$ olmasıdır. Yani bu çekirdek fonksiyonu için $c^* = 1$ 'dir.

Şekil 2: Çekirdek Fonksiyonlar



Kaynak: Barndorff-Nielsen, Hansen, Lunde ve Shephard, 2008: 16.

Şekil 2'de sonsuz log gerçekleşmiş çekirdekler için gerçekleşmiş beş çekirdek fonksiyonuna ait simülasyon sonuçların karşılaştırılması görülmektedir. Bu çekirdek fonksiyonlar için anahtar (key) istatistikler EK.3'te görülebilir. İlk sırada, parametrik alt sınırı sağlayan optimal çekirdek; ikinci sırada ise, $p = \infty$ 'ın limiti olduğunda Tukey – Hanning $_{\infty}$ çekirdeği verilmiştir. Bu çekirdek, optimal çekirdeğe çok benzerdir. Üçüncü olarak, ikinci dereceden spektral çekirdek gösterilmiştir. Son iki çekirdek ise, literatürde kullanılan Fourier tabanlı tahmin edicilere aittir (Malliavin ve

Mancino, 2002). Malliavin ve Mancino'nun (2002) Fourier tahmin edicisi, Dirichlet çekirdeği ağırlıklarını kullanan gerçekleştirilmiş çekirdek ile yakından ilgilidir.

$$k_N(z) = \frac{1}{2N+1} \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)z\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}z\right)} \rightarrow k(x) = \frac{\sin(x)}{x} \text{ as } N \rightarrow \infty, x = \left(N + \frac{1}{2}\right)z, \quad (33)$$

Mancino ve Sanfelici (2007), aynı zamanda gerçekleştirilmiş çekirdek temsiline sahip olan bir başka Fourier tahmin edici farklılığını da ortaya koymaktadır. Bu tahmin edicinin ima edilen asimptotik ağırlıkları Fejér çekirdeği tarafından gösterilmektedir: $k(x) = \sin^2(x)/x^2$.

Sonsuz-gecikme gerçekleşmiş çekirdeklerin dezavantajı, çok fazla sayıda periyod için gün içi getiri serileri gerektirmesidir. Bunun nedeni, h . otokovaryans kestiricisinin, saat 0'dan önce ve t zamanından sonra gün içi getiri serilerine ihtiyaç duymasıdır. Bu tahmin edicilerden elde edilen getirilerin hassasiyeti nispeten küçük olduğunda, bu “sonsuz-log” tahmin edicileri simülasyonlarda ve ampirik analizlerde kullanılmayacaktır.

2.13. GERÇEKLEŞMİŞ OYNAKLIK

Varlıkların getiri serilerinin tahmininde gün içi verileri, türev fiyatlandırma, yüksek frekanslı al-sat ve risk yönetimini içeren çeşitli uygulamalarda en temel araçlardır (Andersen ve diğerleri, 2000; Rossi ve Fantazzini, 2015). Oynaklığın değerlendirilmesinde en önemli bilgi, gereken zaman ölçeği ile seçilecek uygulamadır. Yüksek frekanslı al-sat bağlamında, söz konusu zaman ölçeği çok kısa; birkaç dakika veya daha az olabilmektedir. Diğer taraftan, eğer hedef günlük oynaklığı tahmin etmek ise orta frekanslı verileri (örneğin bir saat) kullanan tahmin yaklaşımları kullanılmaktadır. Bu yaklaşımlar çok yüksek frekansları (örneğin 5 dakika) veya çok düşük frekansları (örneğin günlük) kullanan alternatif tekniklerden daha iyi performans gösterebilmektedir (Andersen ve diğerleri, 1999).

Araştırmacılar amaç olarak, tüm zaman ölçeklerinde gerçekleşmiş oynaklığın ampirik özellikleriyle tutarlı bir sürekli-zaman oynaklık tahmin teknikleri sınıfını ortaya koymaya çalışmışlardır (Bollerslev ve Wright, 2000; Andersen ve diğerleri, 2003). Bu anlamda hem pürüzlülüğü (kısa zaman ölçeklerinde düzensiz davranış) hem de kalıcılığı

(uzun zaman ölçeklerine güçlü bağımlılık) içeren bir tahmin tekniğinin gerekliliği ortaya çıkmıştır (Gatheral ve diğerleri, 2018; Bayer ve diğerleri, 2016).

Oynaklığın üç temel özelliğini yakalayabilen bir stokastik model sınıfının ortaya konması açısından, Brown yarı-durağan (Brownian Semistationary, BSS) süreçlerin (Barndorff-Nielsen ve Schmiegel, 2007; 2009) logaritmik oynaklık modelleri olarak kullanılması savunulmuştur. Bu yaklaşımlar, saf özelliklerinin (pürüzlülük) uzun vadeli davranıştan (hafıza/kalıcılık) ayrıştırılması bakımından esneklik sunmaktadır. BSS süreçleri, uygun özellikler altında, hem uzun hafızayı (yani, entegre edilemeyen otokorelasyonları) hem de kısa hafızayı (üstel olarak azalan otokorelasyonları) barındırabildiğini göstermiştir. Bu süreçler hafıza özellikleriyle ilgili genel teorik sonuçlar ortaya koymaktadır. Daha genel koşullar altında, BSS süreçleri kaldıraç etkilerinden dolayı ortaya çıkan durağan ve normal dağılıma sahip olmayan yapıların analizi için araçlar sunmaktadır. Bu konuda hızlı ve verimli simülasyon yaklaşımları da mevcuttur (Bennedsen ve diğerleri, 2017).

Son zamanlarda, pürüzlü oynaklık modelleri ile ilgili yeni yaklaşımlar geliştirilmektedir. Bunun nedeni ise zımni oynaklık modellemesindeki teorik gelişmeler (Alòs ve diğerleri, 2007; Fukasawa, 2017) ve gerçekleşmiş oynaklığa dayanan ampirik bulgulardır (Gatheral ve diğerleri, 2018; Bennedsen, 2016). Pürüzlü kesirli stokastik oynaklık konusu literatürüne önemli katkı sağlayanlar; Gatheral ve diğerleri (2018) ile Comte ve Renault (1996)'tur. Comte ve Renault (1996)'un "Kesirli Stokastik Oynaklık" (FSV, Fractional Stochastic Volatility) modeli adı altındaki çalışmaları alan açısından önem taşımaktadır. Bu modeller bir kesirli Brown hareketi (fBm fractional Brownian motion) tarafından yönlendirilen bir kesirli Ornstein–Uhlenbeck sürecine dayanmaktadır. Comte ve Renault (1996) uzun hafızaya yol açan FSV modeli ile Hurst üstel katsayısı $H > 1/2$ olan bir fBm modeli kullanılırken; Gatheral ve diğerleri (2018) pürüzlülüğe yol açan $H < 1/2$ değerine sahip bir fBm modelini kullanmışlardır. Bu nedenle modellerini Pürüzlü Kesirli (Parçalı) Stokastik Oynaklık (RFSV, Rough Fractional Stochastic Volatility) modeli olarak adlandırmışlardır. Bayer ve diğerleri (2016), opsiyon fiyatlama ve zımni oynaklık gülümsemesi modellemesinden ilham alarak, başka bir pürüzlü oynaklık modeli, pürüzlü Bergomi (rBergomi) modelini sunmuşlardır. Burada logaritmik oynaklık, çoğunlukla (durağan olmayan) Riemann–Liouville tipi Gauss süreci ile modellenmiş

ve uzun hafızalı zaman serileri modelleri üzerine literatürde “Tip II” kesirli Brown hareketi olarak adlandırılmıştır (Marinucci ve Robinson, 1999).

RFSV modeli, genellikle kısa hafızanın varlığının analizine yönelik bir yaklaşım sunmaktadır. Böylece uzun hafızanın olmamasına yönelik bir bilgi vermektedir (Andersen ve diğerleri, 2003). Bundan dolayı durağan olmayan bir rBergomi modeli, oynaklığın gerçekçi uzun vadeli davranışları sergileyemeyeceği konusunda bir kanıt sunmaktadır. fBm yaklaşımları hem pürüzlülük hem de esnek uzun vadeli özellikleri sağlayan gerçekçi bir oynaklık modeli olarak tanımlanabilir. Bu yaklaşım kendi kendine benzer süreçlerin uzun hafıza veya pürüzlülüğe neden olduğunu göstermesi açısından önemlidir (Gneiting ve Schlather, 2004). Kısa ve uzun zaman ölçeklerinde, oynaklık davranışının uygun bir şekilde ayrıştırılması için özellikle hem pürüzlülüğün hem de uzun hafıza özelliğinin analizine imkân veren modeller gereklidir. Bu alanda önerilen modeller matematiksel yapılar oldukça basittir ve sırasıyla kısa ve uzun vadeli davranışları kontrol eden iki parametreye dayalı yöntemlerdir. Bu nedenle modellerin tahmin edilmesi ve simülasyonu kolaydır.

Önerilen modellerin en önemli özelliği gün içi gerçekleşen fiyatların tahmini için araç sunmasıdır. Diğer yandan, tahminlerde stokastik oynaklığın hem küçük hem de büyük ölçekli davranışlarının da modellenmesi önemlidir.

2.14. GERÇEKLEŞMİŞ OYNAKLIĞIN AMPİRİK DAVRANIŞI

Yüksek frekanslı varlık getiri serileri, bir varlığın etkin logaritmik fiyatı $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ olduğu varsayımı altında Itô yarı-martingal eşitliği olarak tanımlanır:

$$dY_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t + dJ_t, t \geq 0, \quad (34)$$

Bu eşitlikte, $B = (B_t)_{t \geq 0}$ standart bir Brown hareketinin, $\mu = (\mu_t)_{t \geq 0}$ deterministik sürecin, $J = (J_t)_{t \geq 0}$ bir atlama işleminin ve $\sigma = (\sigma_t)_{t \geq 0}$ oynaklık sürecinin parametreleridir. Bu parametreler uyarlanmışlık ve yerel sınırlılık durumuna karşılık gelmektedir. Yüksek frekanslı fiyat örneklerinde, piyasa getirilerindeki gürültü sonucunda ortaya çıkan salınımlar Y etkin logaritmik fiyatı olan gürültülü gözlemler üzerinden tanımlanır.

$$\log S_t = Y_t + U_t, t \geq 0, \quad (35)$$

Burada, $U = (U_t)_{t \geq 0}$ bir piyasadaki göstergenin gürültü sürecidir.

Bu eşitlikte oynaklık süreci σ alındığından dolayı, atlama işlemi J veya gürültü süreci U , oynaklık sürecinin güçlü tahmin edicisinin tutarlı bir tahmincisidir. Bunun için gerekli ve gerekli olmayan şartlar bulunmaktadır. Örneğin atlama teriminin bir bileşik Poisson süreci ile verilmesi ve gürültü teriminin sıfır ortalama ve dördüncü momentum ile uygun fiyat Y ’den bağımsız olması varsayımlarının geçerliliği gereklidir (Christensen ve diğerleri, 2014). Ayrıca, yüksek frekanslı getiri serileri bağlamında, μ kayma süreci ampirik olarak göz ardı edilebilir. S için kullanılan veriler, gizli oynaklık süreci σ ’nın nasıl tahmin edildiğini ve bu süreç üzerindeki ampirik sonuçları açıklamaktadır.

Gerçekleşmiş spot oynaklık sürecinin $(\sigma_t)_{t \in [0, T]}$, bir zaman dilimi $T > 0$ için, S varlık fiyatının yüksek frekanslı gözlemlerinden elde edildiği varsayımı altında, σ doğrudan gözlemlenemediği için, bir vekil kullanılması gerekir. Bu yaklaşım, özellikle gün içi oynaklık değişkenliğini (varyasyonunu) değerlendirmede sonuç verir (Gatheral ve diğerleri, 2018).

İlk büyük $n \in N$ için $T = n\Delta$ olacak şekilde adım büyüklüğü, $\Delta > 0$ olarak belirtilir. Ardından entegre varyansı (IV integrated variance) tahmin etmek amacıyla aşağıdaki eşitlikten yararlanılır:

$$IV_t^\Delta := \int_{t-\Delta}^t \sigma_s^2 ds, t = \Delta, 2\Delta, \dots, n\Delta, \quad (36)$$

IV’in tahmin edicileri kapsamlı bir şekilde tanımlanmıştır. Bunlar, gerçekleşmiş varyans (Andersen ve diğerleri, 2001; Barndorff-Nielsen ve Shephard, 2002), gerçekleşmiş çekirdekler (Barndorff-Nielsen ve diğerleri, 2008), iki ölçekli tahmin ediciler (Zhang ve diğerleri, 2005) ve ön ortalama yöntemleri (Jacod ve diğerleri, 2009) olarak ifade edilir. Bu yöntemler, yüksek frekanslarda örneklenmiş fiyatlar kullanıldığında, piyasadaki fiyat ve getiri değişimleriyle ortaya çıkan etkiler açısından etkili araçlardır (Hansen ve Lunde, 2006). Ayrıca, aşağıda göreceğimiz gibi, ön ortalama yöntemleri, fiyat sürecindeki sıçramaları yakalamaktadır. Bu yaklaşımın seçilmesinin temel nedenlerinden birisi de budur.

Δ ’nın küçük olmasına izin verilerek ve Δ boyutunun her zaman aralığında oynaklığının çok fazla değişmediği varsayılarak, vekiller kullanılabilir:

$$\hat{\sigma}_t^2 = \Delta^{-1} \widehat{IV}_t^\Delta, t = \Delta, 2\Delta, \dots, n\Delta, \quad (37)$$

$\widehat{IV}_t^\Delta$, belirtilen yöntemlerden birinden türetilen bir IV tahminidir. Öncelikle, bu parametrenin seçiminde, oynaklık tahmini için adım büyüklüğünün herhangi bir özel değerine gerek yoktur. Bu nedenle, Δ 'nin çeşitli değerleri için sonraki analizler gerçekleştirilip, ampirik değerler, gün içi zaman büyüklüğünün yanı sıra tüm günlük büyüklüklerle karşılaştırılarak verilir.



ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

RSFV MODELİ İLE KOSPI ENDEKSİNİN HAFIZA YAPISI

RSFV modeli 2014 yılında Gatheral ve diğerleri tarafından geliştirilmiş bir stokastik oynaklık modelidir. Model ampirik çalışmalar için hesaplamalar, günlük RV (gerçekleşmiş varyans), anlık varyans ve vekil gösterge olarak kullanılan zaman serileri üzerinden geliştirilmiştir.

Tam ismi “Oxford-Man Institute of Quantitative Finance” olan Oxford-Man Enstitüsü tarafından, “Realized Library” (Gerçekleşmiş Kütüphane) adı altında, <http://realized.oxford-man.ox.ac.uk> web adresinde açık tabanlı olarak hesaplanmış tarihsel gerçekleşmiş varyans (RV) verileri günlük olarak güncellenerek verilmektedir. Her gün, 21 farklı endeks için, tüm alım satımlar, işlem gününde gerçekleşmiş (veya entegre) varyans hesaplamaları, listedeki ülkelerin (liste ek de) borsalarının açılışından kapanışına kadar tüm verileri kullanılarak hazırlanmaktadır.

Oxford-Man kütüphanesinde her biri birbirine çok benzeyen farklı varyans hesaplamaları bulunmaktadır. Araştırmamızda KOSPI endeksi için hesaplanmış gerçekleşmiş çekirdek verileri kullanılmıştır. Veri seti 04/12/2000 – 30/06/2018 arasındaki geniş bir zaman aralığını kapsamaktadır.

Ampirik çalışmalarımızda Python programlama dilinden (gerekli tüm kütüphaneleri ile birlikte) yararlanılmıştır. Çalışmada kullanılan veri, kod ve kütüphaneler ekler bölümünde verilmiştir.

3.1. KOSPI ENDEKSİ

Kore Bileşik Hisse Senetleri Fiyat Endeksi (KOSPI)’nin günlük getiri serileri aşağıdaki şekil yardımı ile izlenebilir.

Şekil 3: Kore Bileşik Hisse Senetleri Fiyat Endeksi (KOSPI)



Kaynak: Oxford-Man kütüphanesi verilerinden yararlanarak tarafımızdan hazırlanmıştır.

2007-2009 küresel finans krizinin “Lehman Brothers” bankasının iflası ile başlamasından sonra KOSPI endeksi Şekil 3’te görüldüğü üzere en sert düşüşü bu iki yılın ortası olan 2008 yılında yaşamıştır. Bu durum KOSPI endeksinin temsil ettiği finansal piyasa olan Güney Kore piyasasının ABD piyasası ile olan bağımlılığı hakkında bilgi sunmaktadır. Gerçekte söz konusu kriz, ülkelerin finansal piyasaları üzerinde, yüksek ölçüdeki risklerin (oynaklıkların) yayıldığını da göstermektedir. Bu çalışmada ele alınan KOSPI endeksine ait ilk beş ve son beş veriye ait bilgiler Tablo 1’de yer almaktadır.

Tablo 1: KOSPI Endeksi İstatistik Verileri

KOSPI.head()		KOSPI.tail()	
2000-01-04	0.00113	2018-06-25	0.00005
2000-01-05	0.00075	2018-06-26	0.00008
2000-01-06	0.00091	2018-06-27	0.00004
2000-01-07	0.00107	2018-06-28	0.00006
2000-01-10	0.00030	2018-06-29	0.00007

Kaynak: Oxford-Man kütüphanesi verilerinden yararlanarak tarafımızdan hazırlanmıştır.

Tablo 1’de verilen bilgiler 2000’li yıllarda oynaklık değerlerinin ele alınan dönemdeki en son oynaklık değerlerine göre yüksek olduğu görülmektedir. Bu durum hafıza yapılarında dönem başı verilere bağımlılığı ortaya çıkaran kaotik durum hakkında bilgi vermektedir.

3.2. GERÇEKLEŞMİŞ VARYANSIN ZAMAN SERİLERİ

Gerçekleşmiş finansal getiri serilerinde v_s 'nin bir varyans süreci olduğu varsayılırsa; tümleşik varyans $\frac{1}{\delta} \int_t^{t+\delta} v_s ds$ olarak ifade edilebilir. Bu tanımlama rastgele bir şekilde, yeterli fiyat verisi olduğunda, ileriye yönelik olarak minimum varyansta bir tahmin verir. Ancak çok yüksek frekanslı ve oynaklığı yüksek olan getirilerin tahmini zordur. Bu durum, piyasa mikroyapısının gürültüsünün yüksek frekansta oynaklığın yüksekliği ile tanımlanmasından ileri gelmektedir. Bundan dolayı varyansın karmaşık tahmin edicileri için yeni yöntemler gerekli olmaktadır (Gatheral ve Oomen, 2010).

Önceden de belirtildiği üzere türev ürünleri getiri serileri genellikle sürekli yarı-martingallar olarak modellenmektedir. Getiri serisi Y_t olan bir varlık için süreç aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$dY_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t, \quad (38)$$

Burada, μ_t başlangıç noktasının göstergesini ve W_t tek boyutlu Brown hareketini temsil eder. σ_t ise modelin en önemli bileşeni olan oynaklık sürecini ifade etmektedir. Black-Scholes modeli çerçevesinde, oynaklık fonksiyonu ya zamana göre sabit ya da oynaklığa bağlı bir matematiksel yapı sergilemektedir. Bu denklemde, stokastik oynaklık yapısına ait σ_t , sürekli Brown yarı martingal sürecin parametresidir. Bu parametreyi dikkate alan stokastik oynaklık modelleri arasında, Hull ve White (1993) modeli, Heston modeli (1993) ve SABR modeli (2002) en yaygın kullanılan modellerdir. Bugün stokastik oynaklık modelleri arasında ampirik çalışmalarda yeni piyasa pratiği olan, pazarı tam olarak etkileyen ve makul dinamikler üreten yerel stokastik oynaklık (LSV, Local Stochastic Volatility) modelleri kullanılmaktadır. Stokastik oynaklık modellerinin özelliklerinden biri de kesirli oynaklık özelliğini taşımalarıdır.

3.3. KESİRLİ OYNAKLIK

Oynaklığın uzun bir hafıza yapısı olduğundan yola çıkarak araştırmacılar, oynaklık için daha geniş bir düzenlilik yelpazesi sunan modeller önermişlerdir.

Onlardan biri de Comte ve Renault (1998) tarafından oluşturulan ve Hurst üstel katsayısının $H > 1/2$ olduğu, uzun hafıza özelliğini koruyan, kesirli Brown hareketini (fBm) kullanan logaritmik oynaklık modelidir. Daha sonra, bu tür kesirli oynaklık modelleri etrafında geniş bir literatür geliştirilmiş ve önceki bölümlerde onlar hakkında geniş bilgiler verilmiştir.

Mandelbrot ve Van Ness (1968) tarafından, Hurst üstel katsayısı $H \in (0, 1)$ olan fBm $(W_t^H)_{t \in \mathbb{R}}$, herhangi bir $t \in \mathbb{R}, \Delta \geq 0, q > 0$ durumu için sabit artışlarla merkezlenmiş kendine benzer bir Gauss sürecidir:

$$\mathbb{E}[|W_{t+\Delta}^H - W_t^H|^q] = K_q \Delta^{qH}, \quad (39)$$

K_q standart Gauss değişkeninin mutlak değerinin q . sıradan momentini temsil etmektedir. $H = 1/2$ için klasik Brownian hareketi ele alındığında, W^H 'nin örnek yolları, herhangi bir $r < H$ için üssü r ile Hölder-devamlılığı olarak ifade edilir.

Sonuçta, $H > 1/2$ olduğunda, fBm'nin artışları pozitif olarak ilişkilendir:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \text{Cov}[W_1^H, W_k^H - W_{k-1}^H] = +\infty, \quad (40)$$

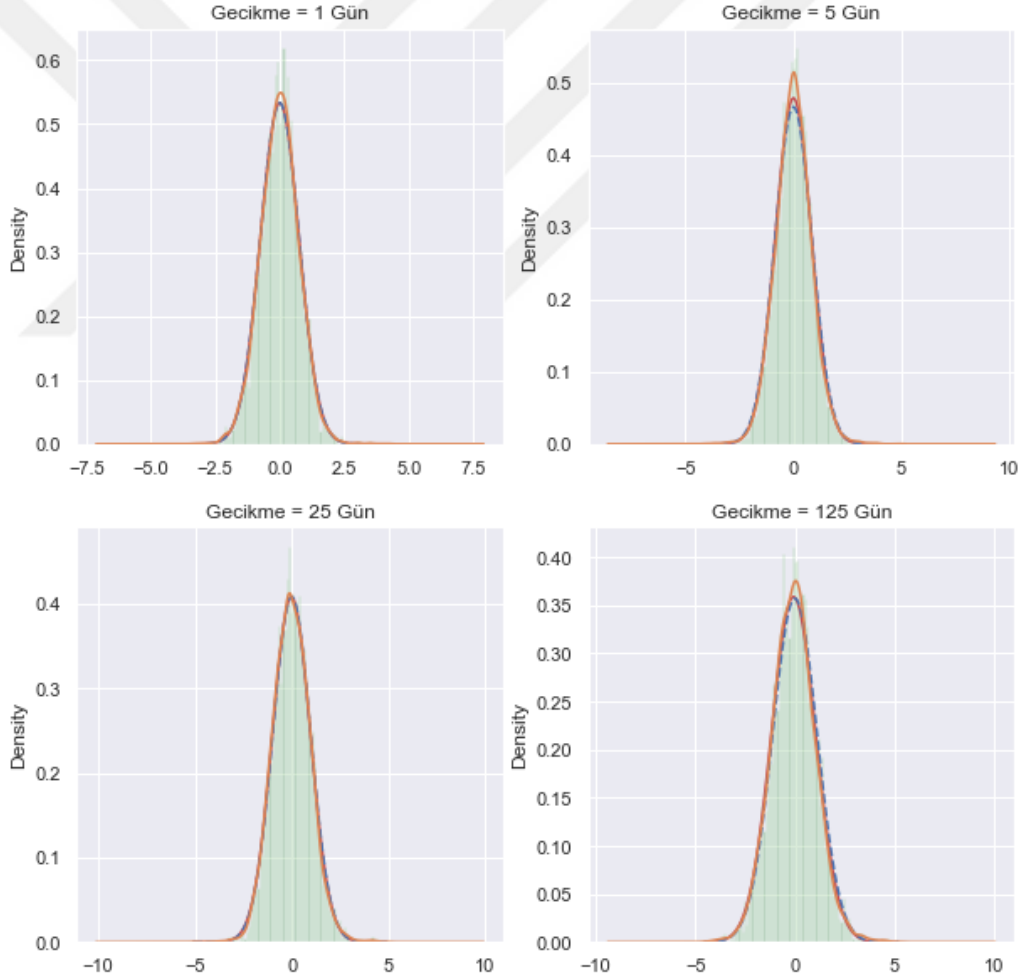
Gerçekten, $k \rightarrow \infty$ olduğunda $\text{Cov}[W_1^H, W_k^H - W_{k-1}^H]$, k^{2H-2} nin tertibidir. fBm dağılımı olduğu durumda, Hurst üstel katsayısı H üzerinden düzenlilik ve uzun hafıza arasında birebir ilişki vardır.

Daha önce de belirtildiği gibi, oynaklık sürecinin uzun hafıza özelliği, Ding, Granger ve Engle (1993), Andersen ve Bollerslev (1997) ve Andersen ve diğerleri (2001) tarafından geniş bir şekilde incelenerek kabul edilmiş bir durumdur. Adı geçen araştırmacılara en son aşamada Gatheral ve diğerleri (2018) önemli bir katkı vererek, finansal getiri serilerinin oynaklığının uzun hafıza (teknik anlamda) özelliğine sahip olup olmadığını test eden yeni bir tekniği ortaya koymuşlardır. Bu yeni modelin en önemli özelliği, ultra yüksek frekanslı finansal getiri serilerinin analizinde önemli bir katkı sunmuş olmasıdır. Bu katkının getirdiği en önemli farklılık; Hull ve White, Heston ve SABR modellerinin geleneksel zaman-homojen modellerin eksiklerini gidermiş olmasıdır. Geleneksel zaman-homojen modeller finansal getirilerin oynaklık dağılımını dikkate almakla birlikte, oynaklığın dağılımını dikkate almamışlardır.

3.4. GETİRİ SERİSİ OYNAKLIĞI ARTIŞLARININ DAĞILIMI

Ampirik çalışmalar, tüm varlıkların aynı ölçeklemede yer aldıklarında aynı davranışları sergilediği sonucunu vermiştir. Şekil 4'te getiri serisi oynaklığının artışları histogram yardımı ile gösterilmiştir. Kırmızıyla gösterilen normal yoğunluk ile birlikte, herhangi bir Δ için, getiri serileri oynaklığının artışlarının ampirik dağılımının Gauss hareketine yakın olduğunu doğrulandığını görebiliriz. Normal yoğunluğun 1 günlük kırmızı olarak ifade edilen çizgileri ve Δ^H değeri ile yeniden şekillendirilen mavi çizgiyle temsil edilen eğrilerin tam bir benzerlik sergilediği görülmektedir.

Şekil 4: Getiri Serileri Oynaklığının Artışı



Kaynak: Oxford-Man kütüphanesi verilerinden yararlanarak tarafımızdan hazırlanmıştır.

Şekil 4'de gözlemlenen normal dağılımdan gelen küçük sapmalar, yine bir kesirli Brown hareketinin artışlarının benzer noktalardaki ampirik dağılımının

hesaplanmasıyla tutarlıdır. Mevcut grafikler farklı gecikme uzunluklarında, dağılımın farklılaştığını göstermektedir. Bu da her farklı gecikme uzunluğunda farklı bir ortalama varyansın ortaya çıktığı anlamına gelmektedir. Bu sonuç, uzun hafızanın farklı frekans aralıklarında aynı özelliğe sahip olmadığı konusunda bilgi vermektedir. Bu açıdan değerlendirildiğinde, farklı dağılımları ortaya çıkaran etkilerin, uzun hafıza açısından da bir etki ortaya çıkardığı ileri sürülebilir.

3.5. RFSV MODELİNİN AÇIKLANMASI

Bir önceki bölümde, ampirik olarak çeşitli varlıkların log-oyunaklık verisinin artışlarının sabit pürüzsüzlük parametresi olan bir ölçekleme özelliğinden yararlandığı ve bunların dağılımlarının Gauss'a yakın olduğu gösterilmiştir. Bu doğal olarak basit modeli önermektedir:

$$\log \sigma_{t+\Delta} - \log \sigma_t = v(W_{t+\Delta}^H - W_t^H), \quad (41)$$

Burada W^H , Hurst üstel katsayısı ile oynaklığın ölçülen akıcılığına eşit bir kesirli Brown hareketidir ve v pozitif bir sabittir. Bu aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\sigma_t = \sigma \exp(vW_t^H), \quad (42)$$

Burada σ başka bir pozitif sabittir. Ancak bu model durağan değildir. Durağanlık hem matematiksel izlenebilirlik için hem de modelin çok geniş zamanlardaki işlevselliğini sağlamak için istenmektedir. Getiri serisi oynaklığı çok uzun bir zaman ölçeğiyle kesirli bir Ornstein-Uhlenbeck süreci olarak modellenerek durağanlık saklanabilir.

Durağan bir kesirli Ornstein-Uhlenbeck süreci (X_t) stokastik diferansiyel denklemin durağan çözümü olarak tanımlanmaktadır:

$$dX_t = v dW_t^H - \alpha(X_t - m)dt, \quad (43)$$

Burada $m \in \mathbb{R}$, v ve α pozitif parametrelerdir. Tüm Ornstein-Uhlenbeck süreçlerinde olduğu gibi verilen çözüm için açık bir form da bulunmaktadır:

$$X_t = v \int_{-\infty}^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s^H + m, \quad (44)$$

Burada, fBm'ye göre stokastik integral, basit bir Riemann-Stieltjes integralidir. Bu nedenle, oynaklık için Pürüzlü Kesirli Stokastik Oynaklık (RFSV) modeline $[0, T]$ zaman aralığında ulaşılmıştır:

$$\sigma_t = \exp(X_t), t \in [0, T], \quad (45)$$

Burada (X_t) , bazı $\nu > 0, \alpha > 0, m \in \mathbb{R}$ ve $H < 1/2$ için oynaklığın ölçülen akıcılığı (40) denklemini karşılar. Kesirli Brown hareketi ve kesirli Ornstein-Uhlenbeck süreci için istatistiksel çıkarım yöntemleri iyi bilinmektedir.

Bu model gerçekten durağandır. Bununla birlikte, eğer $\alpha \ll 1/T$ ise, getiri serisinin oynaklığı fBm olarak lokal (T zamanından daha küçük ölçeklerde) davranır.

3.6. RFSV VE FSV MODELLERİ ARASINDAKİ FARK

RFSV modeli (41) numaralı denklemde olduğu gibi, Comte ve Renault'un klasik FSV modelinin özel bir durumu olarak görünmektedir. Buradaki temel fark, yeni RFSV modelinde $H < 1/2$ ve $\alpha \ll 1/T$ alınırken, uzun hafıza varsayımını karşılamak için Comte ve Renault'un $H > 1/2$ durumunu dikkate almamasıdır.

$H < 1/2$ seçimi, gözlenen pürüzsüzlük ve oynaklık sürecinin ölçeklenmesinin yeniden üretilmesine ve gözlenen uyum içinde bir oynaklığın dalgalanma yapısının oluşturulmasına olanak sağlar. Gerçekten de zaman ölçeklerinin önemli bir özelliğinin, getiri serisi oynaklığının fBm benzeri davranışı olduğu bilinmektedir.

3.7. RFSV MODELİ OTOKOVARYANS FONKSİYONLARI

α sifıra yaklaştıkça $0(1)$ sıra yaklaşacağı varsayımından hareketle, $Q > 0, t > 0, \Delta > 0$ olduğu durumda α sifıra yaklaştıkça aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$\text{Cov}[X_t^\alpha, X_{t+\Delta}^\alpha] = \text{Var}[X_t^\alpha] - \frac{1}{2} \nu^2 \Delta^{2H} + o(1), \quad (46)$$

Sonuç olarak, RFSV modelinde, sabitlenmiş t için X_t ve $X_{t+\Delta}$ arasındaki kovaryans Δ^{2H} nispeten doğrusaldır.

Getiri serileri oynaklığının otokovaryans fonksiyonunu hesapladıktan sonra, oynaklığın kendisine bakıldığında aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$\mathbb{E}[\sigma_{t+\Delta}\sigma_t] = \mathbb{E}[e^{X_t^\alpha + X_{t+\Delta}^\alpha}], \quad (47)$$

X^α , denklem (40)'ta tanımlanmıştır. X^α bir Gauss süreci olduğun için aşağıdaki eşitlik söz konusudur:

$$\mathbb{E}[\sigma_{t+\Delta}\sigma_t] = e^{\mathbb{E}[X_t^\alpha] + \mathbb{E}[X_{t+\Delta}^\alpha] + \text{Var}[X_t^\alpha]/2 + \text{Var}[X_{t+\Delta}^\alpha]/2 + \text{Cov}[X_t^\alpha, X_{t+\Delta}^\alpha]}, \quad (48)$$

RFSV modelinde $\log(\mathbb{E}[\sigma_{t+\Delta}\sigma_t])$, Δ^{2H} de doğrusaldır.

3.8. RFSV MODELİNİN SİMÜLASYON TABANLI ANALİZİ

Pürüzsüzlüğün (düzgünlük) ölçümleri açısından, RFSV modelinden simülasyon yoluyla elde edilen verilerin, ampirik veriler üzerinde gözlemlenenlerle aynı davranışları sergilediği görülmektedir.

$q \geq 0$ için verili bir gecikme süresinde log-oynaklık farklılıklarının q . örnek momenti $\log \Delta$ olarak tanımlanabilir. Burada $\langle \cdot \rangle$ örnek ortalamasını gösterir:

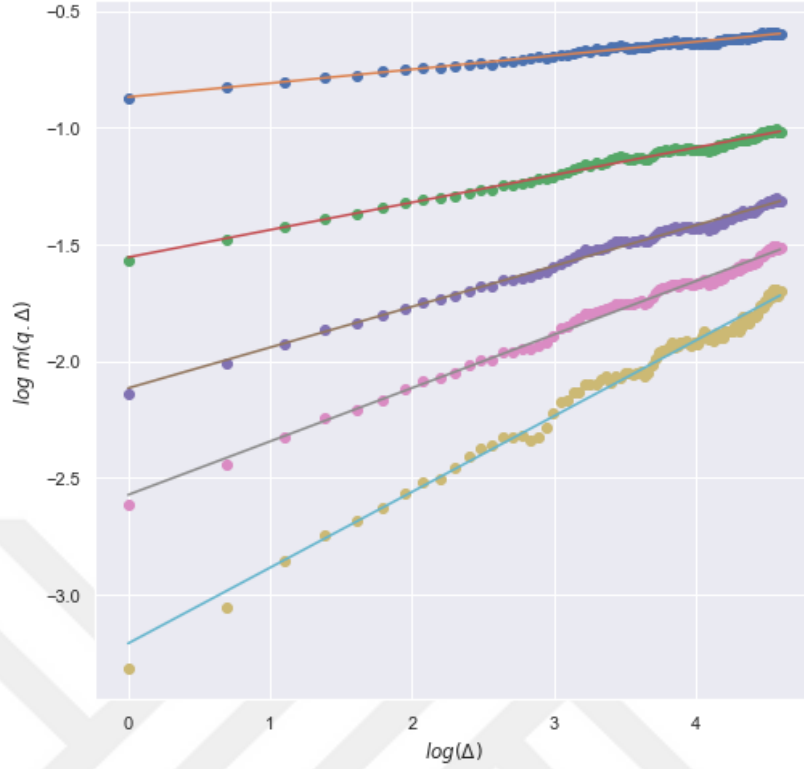
$$m(q, \Delta) = \langle |\log \sigma_{t+\Delta} - \log \sigma_t|^q \rangle, \quad (49)$$

Sadece Δ gecikmesi süresinde, log-oynaklık farklılıklarının örnekleme varyansıdır.

3.9. Δ GECİKMESİ İLE $m(q, \Delta)$ ÖLÇEKLENDİRME

KOSPI endeksi için hesaplanan ζ_q sonuçları ile [0.0591447, 0.1174627, 0.1743636, 0.2288070, 0.3244728] oluşan grafik aşağıdaki Şekil 5'te gösterilmektedir.

Şekil 5: $\log \Delta$ 'nin Bir Fonksiyonu Olarak $\log m(q, \Delta)$. KOSPI



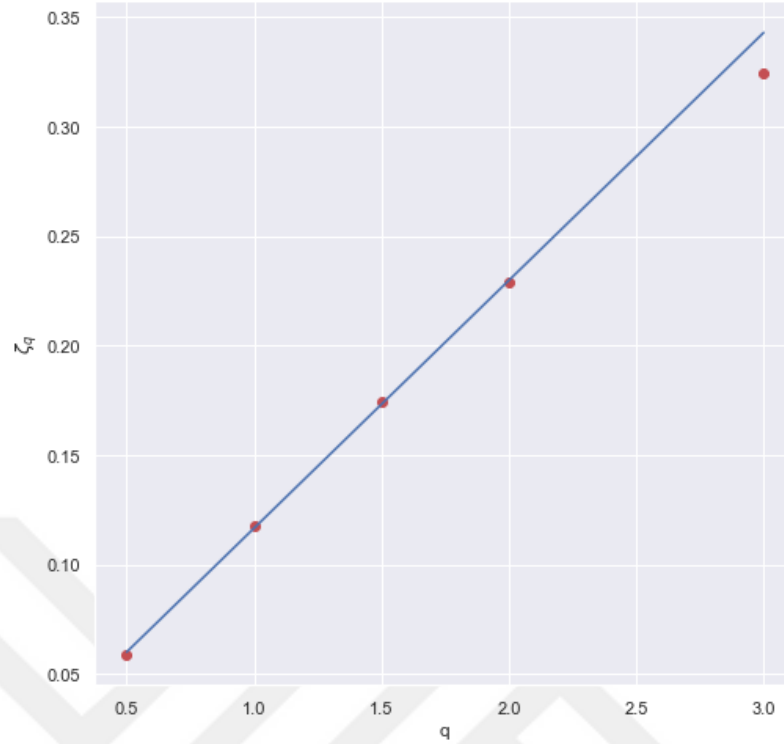
Kaynak: Oxford-Man kütüphanesi verilerinden yararlanarak tarafımızdan hazırlanmıştır.

Simülasyonla elde edilmiş gerçekleşmiş varyans ile belirsizlik bölgeleri tahmin edicileri KOSPI endeksi için $\log \Delta$ 'nin bir fonksiyonu olarak $\log m(q, \Delta)$ verileri alınmıştır. Şekil 5 farklı gecikme uzunluklarındaki yüzde değişmeye karşı ölçeklendirmenin, yüzde değişimini göstermektedir. Buna göre, Şekil 5'teki her bir trend ve bunun üzerindeki noktalar, gecikme uzunluğuna karşı ölçeklendirmeyi göstermektedir.

3.10. TEK KESİRLİ (MONOFRACTAL) ÖLÇEKLEME SONUCU

Tek kesirli analizlerde, ölçeklenme önemli bir sonuçtur. Bu sonuçlar q ve $m(q, \Delta) \propto \Delta^{\zeta_q}$ için log-log grafiğinden, ζ_q 'nin q ile nasıl ölçeklendiğine bakıldığında, tek kesirli ilişki ortaya çıkmaktadır.

Şekil 6: ζ_q 'nin q İle Ölçeklendirmesi



Kaynak: Oxford-Man kütüphanesi verilerinden yararlanarak tarafımızdan hazırlanmıştır.

Mono kesirli ölçekleme ilişkisi formülde $\zeta_q = qH$ olarak ifade edilmektedir.

Burada bilinmesi gereken iki şey vardır:

- H 'nin dar bir aralık zamanında değiştiği,
- H 'nin tahmin edicisinin “koşullu” olduğu. (Her gün için anlık varyans v_t ve ortalama hesaplaması üzerinden $\frac{1}{T} \int_0^T v_t dt$ ’dir. Burada T bir işlem günüdür ve vekil olarak alınır.)

3.11. RFSV İLE UYGULAMALI VARYANS TAHMİNİNİ

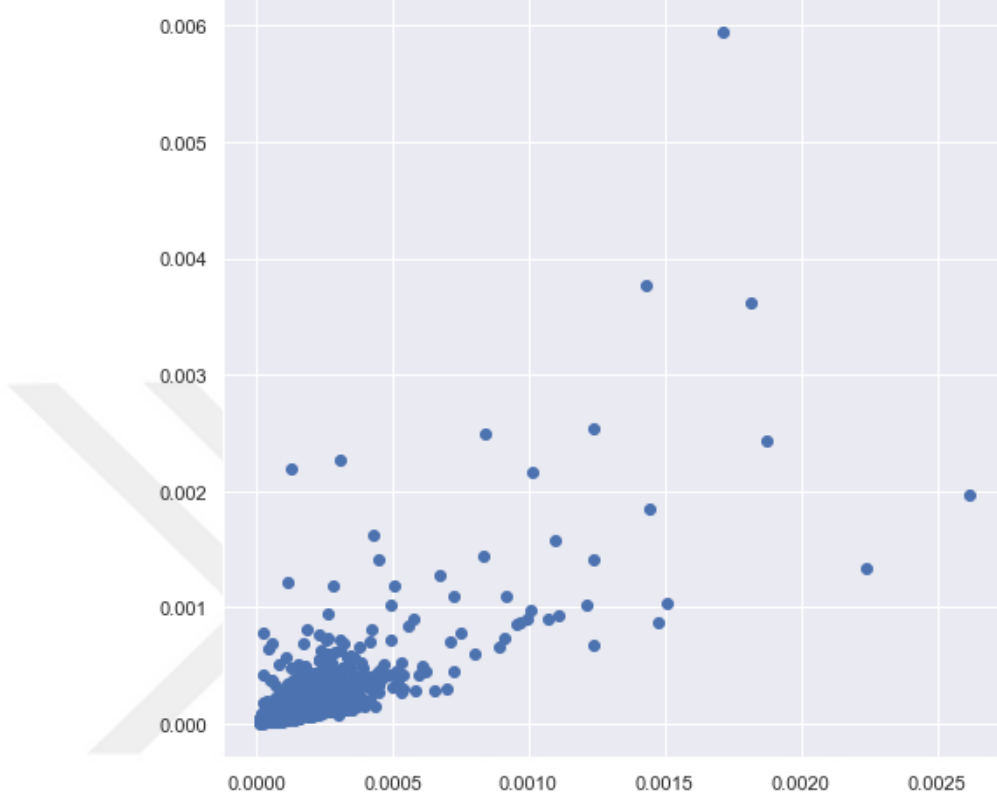
Gatheral tarafından geliştirilen yeni yaklaşımda koşullu varyans aşağıdaki formül yardımı ile hesaplanmaktadır:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[v_{t+\Delta}|\mathcal{F}_t] = \exp\{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\log(v_{t+\Delta})|\mathcal{F}_t] + 2cv^2\Delta^{2H}\}, \quad (50)$$

Ele alınan KOSPI endeksine ait varyans bu eşitlik yardımı ile oluşturulmuştur. KOSPI endeksi için hesaplanmış gerçek ve tahmini varyans grafiği Şekil 7’de

gösterilmiştir. Hesaplamalar ve grafikler Python programlama dilinde oluşturulmuştur.

Şekil 7: Δ Günlerinde Tahminlerin Dağılım Grafiği

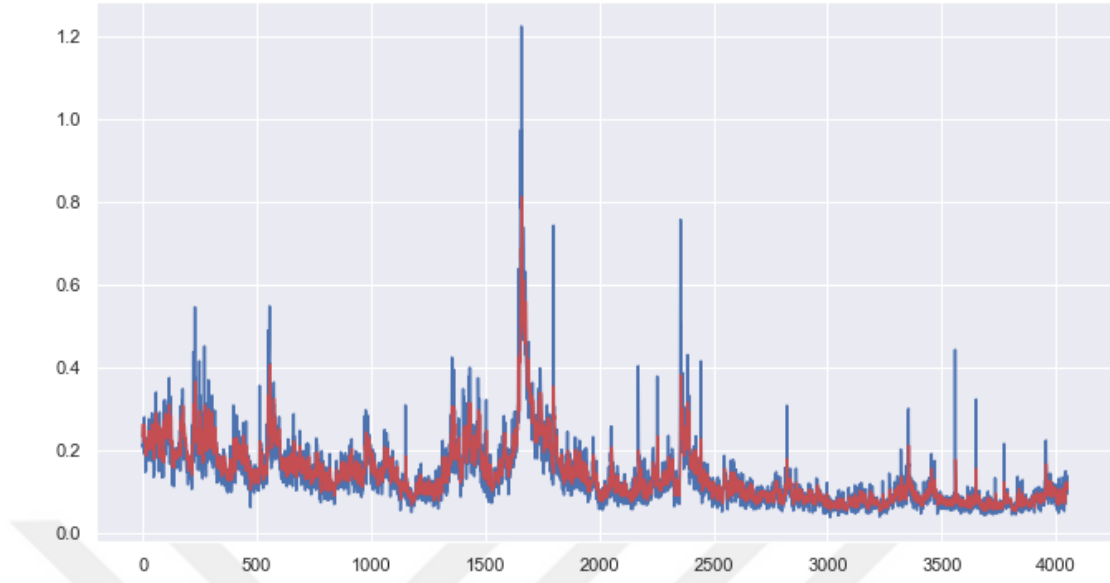


Not. Gerçek oynaklık ve Öngörülen (forecasting) oynaklık.

Kaynak: Oxford-Man kütüphanesi verilerinden yararlanarak tarafımızdan hazırlanmıştır.

Şekil 7 gecikme değerleri ile hesaplanan oynaklık (gerçek varyans) ve tahmin edilen oynaklık arasındaki bağlantıyı göstermektedir. Grafikteki yoğun maviler küçük gecikmelerde bu bağlantının güçlü olduğu yönünde bilgi vermektedir. Bu durum, finansal getiri serilerinin genel olarak kısa hafıza yapısına sahip olduğu anlamına gelmektedir. Yüksek gecikmelerde tahmini oynaklık ile gerçekleşmiş oynaklık arasındaki bağ azalmaktadır. Eksende zaman boyutu yer aldığı anda gerçekleşen oynaklık ile tahmin edilen oynaklık arasındaki ilişki Şekil 8'deki gibidir.

Şekil 8: Gerçek ve Öngörülen Oynaklığın Aynı Grafikteki Görünümü



Not. Gerçek oynaklık mavi, tahmin edilen oynaklık kırmızı renktedir.
Kaynak: Oxford-Man kütüphanesi verilerinden yararlanarak tarafımızdan hazırlanmıştır.

Tahmini oynaklığı ifaden kırmızı renkli seriye ait eğilim görülmektedir. Dikkat edilmesi gereken temel nokta gerçek oynaklıktaki aşırı sapmaların ve oynaklık kümelenmelerinin yakalanmış olmasıdır. Bu kırmızı çizgilerin mavi çizgi ile gösterilen gerçek oynaklık değerlerinin üzerinde kalmış olması, başka bir ifade ile gerçek oynaklığın standart sapmasının arasında yer alması söz konusu gerçek oynaklığın yumuşatıldığını göstermektedir.

3.12. FARKLI RV İÇİN HURST ÜSTEL KATSAYISI

Gerçek varyans tahmin edicileri yolu ile belirsizlik bölgeleri benzetim yapılarak 5 dakikalık gerçekleşmiş varyans için, $H = 0.11$ sonucu elde edilmiştir. Söz konusu değerler, 10 dakikalık veriler ile gerçekleştirildiğinde Hurst üstel katsayısı H yaklaşık 0.098 olarak elde edilmiştir. RV için belirtilen farklı oynaklık dağılımları Tablo 2’de verilmiştir.

Tablo 2’de yer alan önemli bir bulgu, varyans değerlerinin pozitiflik koşulunu sağlamış olmalarıdır. Bir başka önemli sonuç da gerçekleşmiş çekirdek varyansının Tukey-Hanning ve iki-ölçekli Bartlett yöntemine göre benzer çıkmış olmasıdır. Değer tahmin sonuçları için de aynı yorum yapılabilir. Bu iki yöntemde, nu-est (ortalama

varyans) da birbirine yakın çıkmıştır. Regresyonların kesişme noktalarından elde edilen ν (“oynaklığın oynaklığı” gibi) tahmin edilen değerleri de beklendiği gibi, birbirine yakındır.

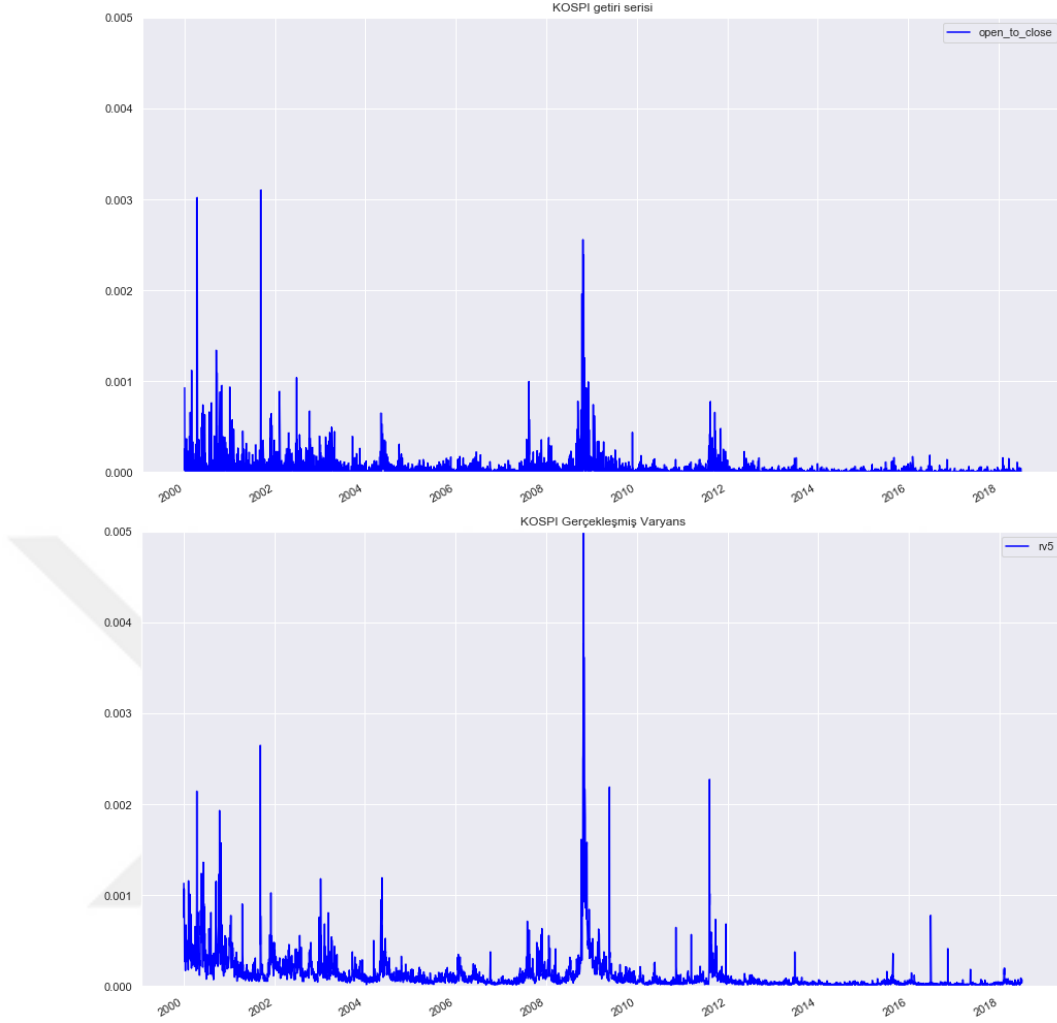
Tablo 2: Farklı RV ‘ler İçin Hesaplanmış H (Hurst Üstel Katsayısı)

No.	Başlık Kod	Açıklama	h_est	nu_est
0	rv5	Gerçekleşmiş Varyans (5 dk.)	0.1144	0.2763
1	rsv_ss	Gerçekleşmiş Yarı Varyans (5 dk. Alt örneklem)	0.0830	0.3695
2	rsv	Gerçekleşmiş Yarı Varyans (5 dk.)	0.0830	0.3695
3	rk_parzen	Gerçekleşmiş Çekirdek Varyansı (Düz Olmayan Parzen)	0.0657	0.4399
4	rv10_ss	Gerçekleşmiş Varyans (10 dk. Alt örneklem)	0.0981	0.3152
5	rk_th2	Gerçekleşmiş Çekirdek Varyansı (Tukey-Hanning (2))	0.1226	0.2678
6	rv5_ss	Gerçekleşmiş Varyans (5 dk. Alt örneklem)	0.1144	0.2763
7	rv10	Gerçekleşmiş Varyans (10 dk.)	0.0981	0.3152
8	rk_twoscale	Gerçekleşmiş Çekirdek Varyansı (İki Ölçekli/Bartlett)	0.1227	0.2616

Kaynak: Oxford-Man kütüphanesi verilerinden yararlanarak tarafımızdan hazırlanmıştır.

4,552 gün boyunca KOSPI endeksinin RFSV modelinin ve normal getiri serisinin iki ayrı grafiği kıyaslanabilir. Şekil 9’da, getiri serilerinin tahmin edilen oynaklığa duyarlılığı görülmektedir. Tahmin edilen oynaklık ile gerçek oynaklık arasındaki farklılığa karşın, gerçek getiri değerlerinin duyarlılığının tahmin edilen oynaklığa duyarlılığı yüksek bulunmuştur. Bunun anlamı getiri serilerinin oynaklığının yumuşatılmaması durumunda belirsizliğin daha etkili olduğudur. Bu bulguya göre, belirsizlikler ne kadar çok artarsa serilerin hafıza yapılarının o kadar yüksek derecede bilgi taşımış gibi görüldüğü ve uzun hafızaya sahip olduğu ifade edilebilir. Çalışmada kullanılan yaklaşımın, bize sağlamış olduğu önemli katkı da budur. Ampirik oynaklık serileri daha yakından incelendiğinde ve sınırlı bir zaman penceresi içinde araştırıldığında, ikisinin de hareket yönlerinin ve yollarının aynı tarafa yönelmiş durumda olduğunu izleyebiliriz. Oynaklığın bu kesirli (parçalı) tip davranışları, ampirik olarak ve teorik olarak araştırılmıştır.

Şekil 9: KOSPI Endeksi İçin Modeller Arasındaki Fark



Kaynak: Oxford-Man kütüphanesi verilerinden yararlanarak tarafımızdan hazırlanmıştır.

Görsel düzeyde, bu kesirli tip davranışı, RFSV modelinde yeniden üretilmiştir. $L^{x,H}$, nin Hurst üstel katsayısı H ile geometrik kesirli Brown hareketi, $[0, 1]$ 'deki oynaklık x , $\left(e^{xW_t^H}\right)_{t \in [0,1]}$ olarak ifade edilir. α da çok küçük olduğunda, $[0, \Delta]: (\sigma_{t\Delta}/\sigma_0)_{t \in [0,1]}$ arasında yeniden boyutlandırılmış oynaklık süreci, yaklaşık olarak $L^{\nu\Delta^H, H}$ durumuna sahiptir. Eğer H küçük ise, u^H çok yavaş artacaktır. Böylece, geniş bir gözlem süreci aralığı boyunca, $[0, \Delta]$ 'de yeniden boyutlandırılmış oynaklık süreçleri yaklaşık olarak aynı kanuna sahiptir. Örneğin, bir gün ve 5 yılın (1250 gün) bir gözlem ölçeği arasında, oynaklık sürecinin yasasını karakterize eden x değeri $1250^{0.14} = 2.7$ ile çarpılır. Buna göre RFSV modelinde, bir gün içindeki oynaklık süreci, on yıl boyunca neredeyse aynı durumu izler.

3.13. OYNAKLIK, GERÇEKTEN UZUN HAFIZAYA SAHİP Mİ?

RFSV modelinin objektifi aracılığıyla oynaklığın uzun hafızası durumu yeniden değerlendirilebilir. Otokovaryans fonksiyonu $\text{Cov}[\log(\sigma_t), \log(\sigma_{t+\Delta})]$ yavaşça $\Delta \rightarrow \infty$ olduğunda sıfıra giderse, durağan bir zaman serisinin uzun hafıza özelliği sergilediği ifade edilir.

Spesifik olarak, RFSV modelinde,

$$\text{Cov}[\log(\sigma_t), \log(\sigma_{t+\Delta})] \approx A - B\Delta^{2H}, \quad (51)$$

Dolayısıyla, otokovaryans fonksiyonu ne RFSV modelinde ve ne de verilerde bir güç yasası olarak sistem büzücü olarak görünmez. Ampirik çalışmalarda hem mali hem de finansal ekonometri literatüründe kullanılmış olan uzun hafızayı tanımlamayı amaçlayan bazı standart istatistiksel süreçlerin özelliğini taşıdığı için RFSV modelini aynı kategorideki “sahte uzun hafıza” modeli gibi değerlendirmek olanaklıdır. Ama unutulmaması gereken nokta, bu süreçlerin, oldukça katı modelleme varsayımları altında, uzun hafızayı tanımlamak için tasarlanmış olduklarıdır.

Sonuç olarak, RFSV modeli de klasik tahmin süreçlerinin sahte uzun hafıza özelliğini taşıdığı bir başka modeldir. Bu süreçler, ampirik verilerden yola çıkarak, uygun şekilde kalibre edilmiş bir RFSV modelinden elde edilen verilerle ulaşılan aynı uzun hafıza parametresini tahmin etmektedir. RFSV modelinin aslında durağan olmayan durağanlığı, oynaklıkta uzun dalgalanmalar yaratmasına rağmen, uzun menzilli bağımlılığı yansıtırsa da klasik güç kanunu anlamında bir uzun hafıza sergilemez.

3.14. RFSV MODELİ İLE TAHMİN ETMEK

Tahmin yönteminin özünü oluşturan temel formül aşağıdaki gibidir:

$$\mathbb{E}[W_{t+\Delta}^H | \mathcal{F}_t] = \frac{\cos(H\pi)}{\pi} \Delta^{H+1/2} \int_{-\infty}^t \frac{W_s^H}{(t-s+\Delta)(t-s)^{H+1/2}} ds, \quad (52)$$

Burada W^H , $H < 1/2$ ve $\mathcal{F}_t$ filtrelerinin ürettiği fBm’dir. Yapım yoluyla, herhangi bir makul zaman ölçeği üzerinde, RFSV modelindeki kesirli Ornstein-

Uhlenbeck oynaklık süreci, ν ve C sabitleri için $\log \sigma_t^2 \approx 2\nu W_t^H + C$ olarak tahmin edilebilir. O zaman log-varyans için formül şu şekildedir:

$$\mathbb{E}[\log \sigma_{t+\Delta}^2 | \mathcal{F}_t] = \frac{\cos(H\pi)}{\pi} \Delta^{H+1/2} \int_{-\infty}^t \frac{\log \sigma_s^2}{(t-s+\Delta)(t-s)^{H+1/2}} ds, \quad (53)$$

Bu yaklaşımın öngörme gücü, otoregresif (Autoregressive kısaca AR) ve heterojen otoregresif (Heterogeneous Autoregressive kısaca HAR) tahmin yöntemleri ile karşılaştırılmıştır (Gatheral ve diğerleri, 2018). Belirli bir tam sayı $p > 0$ için, AR(p) ve HAR tahmin edicileri aşağıdaki formüllere sahiptir:

- AR(p):

$$\log(\widehat{\sigma_{t+\Delta}^2}) = K_0^\Delta + \sum_{i=0}^p C_i^\Delta \log(\sigma_{t-i}^2), \quad (54)$$

- HAR:

$$\log(\widehat{\sigma_{t+\Delta}^2}) = K_0^\Delta + C_5^\Delta \frac{1}{5} \sum_{i=0}^4 \log(\sigma_{t-i}^2) + C_{20}^\Delta \frac{1}{20} \sum_{i=0}^{19} \log(\sigma_{t-i}^2), \quad (55)$$

Hesaplamalar Gatheral ve diğerleri (2018) araştırmasından alınmıştır. Bunun nedeni hesaplamaların, R istatistik kütüphanesi kullanılarak, iyi donatılmış bilgisayarlar ile çok uzun (500 günlük) hesaplama sürecinde ve zor yöntemlerle gerçekleştirilebilmesidir. Araştırmacıların ampirik çalışmalarına göre AR formülünde $p = 5$ ve $p = 10$ kabul edilmiştir. Bu parametreler esas olarak oynaklığı tahmin etmek istenilen gün (1, 5 ve 20 gün) için en iyi sonuçları vermiştir. Her gün ve farklı göstergeler için oynaklık tahmin edilmiştir. Yine her gün ve farklı endeksler (S&P, NASDAQ, CAC40, FTSE ve Nikkei) için oynaklık tahmin edilmiştir.

Tahmin ediciler ortalama kare hatası ile log-varyansın varyansı arasındaki P oranı hesaplanarak çeşitli tahminlerin kalitesi değerlendirilmiştir:

$$P = \frac{\sum_{k=500}^{N-\Delta} (\log(\sigma_{k+\Delta}^2) - \log(\widehat{\sigma_{k+\Delta}^2}))^2}{\sum_{k=500}^{N-\Delta} (\log(\sigma_{k+\Delta}^2) - \mathbb{E}[\log(\sigma_{k+\Delta}^2)])^2}, \quad (56)$$

Burada, $\mathbb{E}[\log(\sigma_{t+\Delta}^2)]$ tüm zaman periyodu boyunca log-varyansın ampirik ortalamasını belirtir.

Tablo 3: AR, HAR ve RFSV Modelleri İle P Oranı.

	AR(5)	AR(10)	HAR(3)	RFSV
SPX.rv Δ =1	0.317	0.318	0.314	0.313
SPX.rv Δ =5	0.459	0.449	0.437	0.426
SPX.rv Δ =20	0.764	0.694	0.656	0.606
FTSE.rv Δ =1	0.230	0.229	0.225	0.223
FTSE.rv Δ =5	0.357	0.344	0.337	0.320
FTSE.rv Δ =20	0.651	0.571	0.541	0.472
N225.rv Δ =1	0.357	0.358	0.351	0.345
N225.rv Δ =5	0.553	0.533	0.513	0.504
N225.rv Δ =20	0.875	0.795	0.746	0.714
GDAXI.rv Δ =1	0.237	0.238	0.234	0.231
GDAXI.rv Δ =5	0.372	0.362	0.350	0.339
GDAXI.rv Δ =20	0.661	0.590	0.550	0.498
FCHI.rv Δ =1	0.244	0.244	0.241	0.238
FCHI.rv Δ =5	0.378	0.373	0.366	0.350
FCHI.rv Δ =20	0.669	0.613	0.598	0.522

Kaynak: Gatheral ve diğerleri, 2018: 34.

Tablo 3 incelendiğinde, RFSV modelinin özellikle daha uzun geleceğe yönelik tahminlerde, AR ve HAR modellerinden daha iyi sonuçlar verdiği görülmektedir. RFSV modelinde, sadece H parametresinin log-varyansı kullanılarak sonuçlar hesaplanmaktadır. Ancak, AR ve HAR yöntemleriyle yapılan hesaplamalar tahmin edilen zamana bağlıdır ve bu zaman değiştiğinde yeniden hesaplama yapmak gerekmektedir. Aynı şekilde, Gatheral ve diğerleri (2018) dikkate alındığında ve varyans hesaplama açısından bir karşılaştırma yapıldığında, RFSV modelinin diğer iki modele nazaran daha iyi sonuçlar verdiği söylenebilir.

SONUÇ

Pürüzlü Kesirli Stokastik Oynaklık (RFSV) modeli ile Comte ve Renault'nun FSV modeli yaklaşımları neredeyse aynıdır. Sadece FSV modelinde $H > 1/2$ ve RFSV modelinde $H < 1/2$ 'dir. RFSV modelinde farklı zaman skalaları için hesaplanan üstel değer farklı sonuçlar verebilmektedir. Ancak bütün değerlerin $H=0.1$ 'e yaklaştığı bulgusuna ulaşılmaktadır. Bu da frekans düzleminde oynaklığın uzun hafıza özelliğine sahip olmadığının göstergesidir. Finansal getiri serilerinde zaman boyutunda, etkilerin ve şokların etkisi ayrıştırılmadığında görülen uzun hafıza bu açıdan sahtedir.

RFSV yaklaşımı literatürde kullanılan daha önceki uzun hafıza testlerinin sonuçlarının sapmalı olduğunu ortaya koymuştur. Bu yaklaşımın bilimsel olarak en önemli katkısı oynaklığın bir uzun hafıza özelliğine sahip olmadığını göstermiş olmasıdır. Özellikle çok yüksek frekanslı verilerde görülen hafıza yapısının sahte bir özellik göstermesi şeklindeki bulgu, risk yönetiminde yeni yaklaşımların kullanılması gerektiği yönünde önemli bir bilgidir.

RFSV yaklaşımı zaman serilerinin modellenenabilir gerçeklerinin analizini kolaylaştırmıştır. Böylece oynaklığın pürüzlü olarak tahmin edilmesinde yeni bir teknik geliştirilmiştir. Bu teknik gerçek varyans değerlerinin pürüzlü olduğundan hareketle, yapılacak tahminlerin daha güvenilir olmasını sağlayacak bir yöntemdir. Anlık verilerin tahmininde varyans etkin ve pürüzlü bir yapı göstermekle birlikte tahmin etme aşamasında yüksek frekansa bağlı olarak sapmalı sonuçlar elde edilmesine yol açabilmektedir. Özellikle frekans düzeyinde ya da farklı zaman aralıklarında anlık verilerde varyans farklılaşabilmektedir. Bu da frekans düzlemesi veya alanında varyansın farklı hesaplanması gerekliliğini ortaya çıkarmaktadır. Finansal zaman serilerinin sahip olduğu bilgi ve yapısı dikkate alındığında bu konu çok önemli hale gelmiştir.

RFSV yaklaşımının önemi gerçek değerler ve tahmin değerleri arasındaki sapmayı azaltmış olmasıdır. Bu yaklaşım çerçevesinde oynaklığın hesaplanmasında ortaya çıkan kestirim hataları, bazı modellerde olduğu gibi pürüzsüzlüğün ölçülmesinde aşağı yönlü sapmaya neden olmaz. Ancak henüz literatürde bu konuda tam bir görüş birliğine varıldığı söylenemez.

RFSV yaklaşımının finansal zaman serileri açısından önemi, finansal piyasaların çalışma dinamiğinden ortaya çıkan sıçramanın, varyanstaki yapısal değişim ve rejimlerin varlığının analizlere dahil edilmesine gerek kalmadan, bir tahmin yapılmasına olanak sağlamasıdır. Bununla birlikte süreç içinde her bir duruma karşı bir simülasyonun yapılması, sürece ilişkin çok sayıda bilginin üretilmesini sağlar. Bu da farklı piyasa dinamiklerine ortaya çıkan oynaklıkların yakalanmasına olanak sağlar.

Bu yeni pürüzlü yaklaşımın literatürdeki diğer çalışmalardan farkı, kendi gecikmiş değerleriyle bağımlılık özelliğine sahip finansal zaman serilerinin Markov zinciri sürecine uymayan davranışlara sahip olduğunu ortaya koymasıdır. Bu durum hafıza yapısının frekans ve zaman boyutunda farklı olacağının ifadesidir. Böyle bir durumda söz konusu yaklaşım stokastik oynaklık modellerinin aksine kısa vadeli zımni oynaklık gülümsemesinin dikliğini yakalamada daha başarılıdır. Bu nedenle opsiyon fiyatlarından hareketle hesaplanan zımni oynaklık ile gerçek oynaklık arasındaki farklılıktan ortaya çıkan oynaklık gülümsemesinin tahmininde bu yeni yöntem önemli bir katkı sunmuştur. Bu nedenle, bu yeni yaklaşım, önde gelen uzmanlar, akademisyenler ve uygulamacılar tarafından ilgiyle karşılanmış ve literatürde üzerinde çalışılmaya başlanmıştır. Özellikle bu yaklaşım sayesinde piyasa dinamiklerinin yakalanmasında, fiyatlandırma, ayarlama ve risk yönetiminde hızlı ve sağlam algoritmalarla tahmin yapılması olanaklı hale gelmiştir.

RFSV modelinin yeni bir yaklaşım olarak literatüre yapmış olduğu katkı, KOSPI endeksinden hareketle bu çalışmada ortaya konmaya çalışılmıştır. Uygulama sonuçlarına göre daha önce yapılmış çalışmalarla paralel bulgulara ulaşılmıştır. En önemli sonuç, Hurst üstel parametresinin yaklaşığı en yüksek değerin 0.11 olarak bulunabileceği yönündeki hipotezin doğrulanmış olmasıdır. Bununla birlikte anlık verilerin kullanılması durumunda bulunan uzun hafıza özelliğinin sahte olabileceği yönündeki bilginin elde edilmiş olması da oldukça önemlidir. Bu çalışmada KOSPI endeksi üzerinden finansal getiri serilerinin özellikle varyansının, uzun hafıza özelliğine sahip olmadığı ortaya konmuştur. Bu da ultra-yüksek frekanslı zaman serilerinde, karşılaşılan hafıza özelliğinin sahte olduğu yönünde bir bilgi sunmaktadır. Bu açıdan değerlendirildiğinde, oynaklığın dikkate alındığı risk yönetim tekniklerinde, kullanılacak varyans tahminlerinin gerektiğinden fazla pozisyon alınmasına yol

açabildiği söylenebilir. Örneğin, hafıza parametresinin gerektiğinden daha yüksek hesaplandığı GARCH yöntemlerine dayalı hesaplanan VaR (Value at Risk), opsiyon fiyatları ile risk yönetiminden elde edilecek optimal korunma oranları sapmalı olabilir.

KOSPI endeksi ile yapılan çalışmadan elde edilen bulgulara göre, finansal zaman serilerinde frekans düzleminde piyasa hareketleri zamana göre farklı hafıza özelliği göstermektedir. Bu açıdan, çalışmada kullanılan yeni yaklaşım, sıçramalar ve kırılmalara karşı hafıza yapısının duyarlı olmadığı bir tekniktir. Bu nedenle ilave testlerin yapılmasına ihtiyaç kalmamıştır. Çalışmada ele alınan KOSPI endeksinin uzun hafıza özelliğine sahip olmadığı yönünde bulgulara ulaşılmış, frekans düzleminde şoklardan etkilenmediği bulunmuştur. Bunun anlamı, söz konusu endeksin zaman aralıklarında ortaya çıkan şoklara karşı benzer tepkiyi vermiş olmasıdır. Hurst üstel katsayısının farklı algoritmalarla göre yaklaşık 0.11 olması, bunu göstermektedir. Bu değer aynı zamanda, bir şok karşısında söz konusu serinin ortalamaya dönme hızının da yüksek olduğunu ortaya koymaktadır. Bu açıdan değerlendirildiğinde, çalışmanın bulgularına göre, finansal zaman serilerinde frekans ölçeği ve frekans aralıklarının zamana bağımlı oynaklık tahmininde belirleyici olduğu ifade edilebilir.

KAYNAKÇA

Adelman, I. (1965). Long Cycle-Fact or Artifact? *The American Economic Review*. 55: 444-463.

Aït-Sahalia, Y., Mykland, P. A. ve Zhang, L. (2005). How Often to Sample A Continuous-Time Process in The Presence of Market Microstructure Noise. *Review of Financial Studies*. 18: 351-416.

Aldous, D. J. ve Eagleson G. K. (1978). On Mixing and Stability of Limit Theorems. *Annals of Probability*. 6: 325-331.

Andersen, T. G., Bollerslev, T., Diebold, F. X. ve Ebens, H. (2001). The Distribution of Realized Stock Return Volatility. *Journal of Financial Economics*. 61: 43-76.

Andersen, T. G., Bollerslev, T., Diebold, F. X. ve Labys, P. (2000). Great Realizations. *Risk*. 13: 105-108.

Andersen, T. G., Bollerslev, T., Diebold, F. X. ve Labys, P. (2001). The Distribution of Exchange Rate Volatility. *Journal of the American Statistical Association*. 96: 42-55.

Andrews, D. W. K. (1991). Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix Estimation. *Econometrica*. 59: 817-858.

Back, K. (1991). Asset Pricing for General Processes. *Journal of Mathematical Economics*. 20: 371-395.

Baillie, R.T. (1996). Long Memory Processes and Fractional Integration in Econometrics. *Journal of Econometrics*. 73: 5-59.

Bandi, F. M. ve Russell J. R. (2008). Microstructure Noise, Realized Variance, and Optimal Sampling. *Review of Economic Studies*. 75: 339-369.

Barnard, G.A. (1956). Discussion of "Methods of Using Long-Term Storage in Reservoirs". *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*. 5: 552-553.

Barndorff-Nielsen, O. E. ve Shephard N. (2002). Econometric Analysis of Realised Volatility and Its Use in Estimating Stochastic Volatility Models. *Journal of the Royal Statistical Society*. B64: 253-280.

Barndorff-Nielsen, O. E. ve Shephard N. (2004). Econometric Analysis of Realised Covariation: High Frequency Covariance, Regression and Correlation in Financial Economics. *Econometrica*. 72: 885-925.

Barndorff-Nielsen, O. E. ve Shephard N. (2005). Power Variation and Time Change. *Theory of Probability and Its Applications*. 50: 1-15.

Barndorff-Nielsen, O. E. ve Shephard N. (2006). Econometrics of Testing for Jumps in Financial Economics Using Bipower Variation. *Journal of Financial Econometrics*. 4: 1-30.

Barndorff-Nielsen, O. E., Graversen, S. E., Jacod, J. ve Shephard, N. (2006). Limit Theorems for Realized Bipower Variation in Econometrics. *Econometric Theory*. 22: 677-719.

Barndorff-Nielsen, O. E., Hansen, P. R., Lunde, A. ve Shephard, N. (2008). Designing Realized Kernels to Measure the ex post Variation of Equity Prices in the Presence of Noise. *Econometrica*. 76(6): 1481-1536.

Barnes, J.A. ve Allan, D.W. (1966). A Statistical Model of Flicker Noise. *Proceedings of the IEEE*. 54: 176-178.

Bartlett, M. S. (1946). On the Theoretical Specification of Sampling Properties of Autocorrelated Time Series. *Journal of the Royal Statistical Society*. Ek 8: 27-41.

Bayer, C., Friz, P. ve Gatheral, J. (2016). Pricing Under Rough Volatility. *Quantitative Finance*. 16(6): 887-904.

Bennedsen, M. (2018). Semiparametric Estimation and Inference on The Fractal Index of Gaussian and Conditionally Gaussian Time Series Data. *arXiv*. arXiv:1608.01895v3

Bennedsen, M., Lunde, A. ve Pakkanen, M. S. (2017a). Decoupling the Short- and Long-Term Behavior of Stochastic Volatility. *arXiv*. arXiv:1610.00332.

Bennedsen, M., Lunde, A. ve Pakkanen, M. S. (2017b). Hybrid Scheme for Brownian Semistationary Processes. *Finance and Stochastics*. 4: 931-965.

Beran, J. (1994). *Statistics for Long Memory Processes*. New York, NY, USA: Chapman & Hall.

Beran, J., Feng, Y., Ghosh, S. ve Kulik, R. (2013). *Long Memory Processes*. Heidelberg, Germany: Springer.

Bollen, B. ve Inder B. (2002). Estimating Daily Volatility in Financial Markets Utilizing Intraday Data. *Journal of Empirical Finance*. 9: 551-562.

Brockwell, P.J. ve Davis, R.A. (1991). *Time Series: Theory and Methods* (2. Baskı). New York, NY, USA: Springer.

Chow, V.T. (1951). Discussion of "Long-Term Storage Capacity of Reservoirs". *Transactions of the American Society of Civil Engineers*. 116: 800-802.

Comte, F. ve Renault E. (1998). Long Memory in Continuous-Time Stochastic Volatility Models. *Mathematical Finance* 8: 291-323.

Davies, R.B. ve Harte, D.S. (1987). Tests for Hurst Effect. *Biometrika*. 74: 95-102.

Delattre, S. ve Jacod J. (1997). A Central Limit Theorem for Normalized Functions of The Increments of a Diffusion Process in The Presence of Round Off Errors. *Bernoulli*. 3: 1-28.

Diebold, F.X. ve Inoue, A. (2001). Long Memory and Regime Switching. *Journal of Economic Geography*. 105: 131-159.

Fiering, M.B. (1967). *Streamflow Synthesis*. Cambridge MA, USA: Harvard University Press.

French, K. R., Schwert, G. W. ve Stambaugh, R. F. (1987). Expected Stock Returns and Volatility. *Journal of Financial Economics*. 19: 3-29.

Gallant, A. R. (1987). *Nonlinear Statistical Models*. New York: John Wiley.

Gatheral, J., Jaisson, T. ve Rosenbaum, M. (2018). Volatility Is Rough. *Quantitative Finance*. 18(6): 933-949.

Gatheral, J. ve Oomen, R. C. A. (2010). Zero-Intelligence Realized Variance Estimation. *Finance and Stochastics*. 14(2): 249-283.

Ghysels, E., Harvey, A. C. ve Renault E. (1996). Stochastic volatility. Editörler Rao, C. R. ve Maddala, G. S. *Statistical Methods in Finance* (ss. 119–191). Amsterdam: North-Holland.

Gloter, A. ve Jacod, J. (2001). Diffusions with Measurement Errors. I – Local Asymptotic Normality. *ESAIM: Probability and Statistics*. 2001a(5): 225-242.

Gloter, A. ve Jacod, J. (2001). Diffusions with Measurement Errors. II – Measurement Errors. *ESAIM: Probability and Statistics*. 2001b(5): 243-260.

Gneiting, T. ve Schlather, M. (2004). Stochastic Models That Separate Fractal Dimension and The Hurst Effect. *SIAM Review* 46(2): 269-282.

Granger, C.W.J. (1980). Long Memory Relationships and the Aggregation of Dynamic Models. *Journal of Econometrics*. 14: 227-238.

Granger, C.W.J. (1978). New Classes of Time Series Models. *Journal of the Royal Statistical Society. Series D*. 27: 237-253.

Granger, C.W.J. (1966). The Typical Spectral Shape of an Economic Variable. *Econometrica*. 34: 150-161.

Granger, C.W.J. ve Joyeux, R. (1980). An Introduction to Long-memory Time Series Models and Fractional Differencing. *Journal of Time Series Analysis*. 1: 15-29.

Hall, P. ve Heyde, C. C. (1980). *Martingale Limit Theory and its Applications*. San Diego: Academic Press.

Hansen, P. R. ve Lunde, A. (2005). A Realized Variance for The Whole Day Based on Intermittent High-Frequency Data. *Journal of Financial Econometrics*. 3: 525-554.

Hansen, P. R. ve Lunde, A. (2006). Realized Variance and Market Microstructure Noise. *Journal of Business and Economic Statistics*. 24: 127-218.

Hansen, P. R., Large, J. ve Lunde, A. (2008). Moving Average-Based Estimators of Integrated Variance. *Econometric Reviews*. 27: 79-111.

Hayashi, T. ve Yoshida, N. (2005). On Covariance Estimation of Non-Synchronously Observed Diffusion Processes. *Bernoulli*. 11: 359-379.

Heston, S. L. (1993). A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. *The Review of Financial Studies*. 6(2): 327-343.

Hull, J. ve White, A. (1993). One-Factor Interest-Rate Models and the Valuation of Interest-Rate Derivative Securities. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*. 28(2): 235-254.

Hurst, H.E. (1957). A Suggested Statistical Model of Some Time Series Which Occur in Nature. *Nature*. 180: 494.

Hurst, H.E. (1951). Long-Term Storage Capacity of Reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*. 116: 770-799.

Hurst, H.E. (1956). Methods of Using Long-Term Storage in Reservoirs. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*. 5: 519-590.

Hurst, H.E. (1956). The Problem of Long-Term Storage in Reservoirs. *Hydrological Sciences Journal*. 1: 13-27.

Hurst, H.E., Black, R.P. ve Simaika, Y.M. (1965). *Long-Term Storage: An Experimental Study*. London: Constable.

Jacod, J. (1994). *Limit of Random Measures Associated with The Increments of a Brownian Semimartingale*. Paris: Laboratoire de Probabilités, Université Pierre et Marie Curie.

Jacod, J. (1997). *On Continuous Conditional Gaussian Martingales and Stable Convergence in Law*. Editörler Azema, J., Emery, M. ve Yor, M. Lecture Notes in Mathematics, Cilt 1655 (ss. 232-246). Berlin: Springer Verlag.

Jacod, J. ve Protter, P. (1998). Asymptotic Error Distributions for the Euler Method for Stochastic Differential Equations. *Annals of Probability*. 26: 267-307.

Lloyd, E.H. (1967). Stochastic Reservoir Theory. *Advances in Hydroscience* 4: 281.

Lo, A.W. (1991) Long-term Memory in Stock Market Prices. *Econometrica*. 59: 1279-1313.

Malliavin, P. ve Mancino, M. E. (2002). Fourier Series Method for Measurement of Multivariate Volatilities. *Finance and Stochastics*. 6(1): 49-61.

Mancino, M. E. ve Sanfelici, S. (2007). Robustness of Fourier Estimator of Integrated Volatility in The Presence of Microstructure Noise. *Computational Statistics and Data Analysis* 52: 2966-2989.

Mandelbrot, B.B. (1971). A Fast-Fractional Gaussian Noise Generator. *Water Resources Research*. 7: 543-553.

Mandelbrot, B.B. (1972). Broken Line Process Derived as An Approximation to Fractional Noise. *Water Resources Research*. 8: 1354-1356.

Mandelbrot, B.B. (1970). Comment on "Stochastic Models in Hydrology". *Water Resources Research*. 6: 1791.

Mandelbrot, B.B. (1967). Some Noises With $1/f$ Spectrum, A Bridge Between Direct Current and White Noise. *IEEE Transactions on Information Theory*. 13: 289-298.

Mandelbrot, B.B. (2013). *The Fractalist: Memoir of a Scientific Maverick*. New York: Vintage Books.

Mandelbrot, B.B. ve Hudson, R.L. (2008). *The (mis) Behaviour of Markets: A Fractal View of Risk, Ruin, and Reward*. (2. Baskı). London: Profile Books.

Mandelbrot, B.B. ve Van Ness, J.W. (1968). Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications. *Society for Industrial and Applied Mathematics Review*. 10: 422-437.

Mandelbrot, B.B. ve Wallis, J.R. (1969). Computer Experiments with Fractional Gaussian Noises. *Water Resources Research*. 5: 228-267.

Mandelbrot, B.B. ve Wallis, J.R. (1968). Noah, Joseph and Operational Hydrology. *Water Resources Research*. 4: 909-918.

Mandelbrot, B.B. ve Wallis, J.R. (1969). Robustness of The Rescaled Range R/S in the Measurement of Noncyclic Long Run Statistical Dependence. *Water Resources Research*. 5: 967-988.

Mandelbrot, B.B. ve Wallis, J.R. (1969). Some Long-Run Properties of Geophysical Records. *Water Resources Research* 5: 321-340.

Marinucci, D., ve Robinson, P. M. (1999). Alternative Forms of Fractional Brownian Motion. *Journal of Statistical Planning and Inference*. 80(1-2): 111-122

Meddahi, N. (2002). A Theoretical Comparison Between Integrated and Realized Volatilities. *Journal of Applied Econometrics*. 17: 479-508.

Merton, R. C. (1980). On Estimating the Expected Return on The Market: An Exploratory Investigation. *Journal of Financial Economics* 8: 323-361.

Mykland, P. A. ve Zhang, L. (2006). ANOVA For Diffusions and Ito Processes. *Annals of Statistics*. 34: 1931-1963.

Newey, W. K. ve West, K. D. (1987). A Simple Positive Semi-Definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix. *Econometrica*. 55: 703-708.

Oomen, R. A. A. (2005). Properties of Bias Corrected Realized Variance in Calendar Time and Business Time. *Journal of Financial Econometrics*. 3: 555-577.

Hagan, P. S., Kumar, D., Lesniewski A. S., ve Woodward D. E. (2002). Managing Smile Risk. *Wilmott Magazine*. September.

Phillips, P. C. B. ve Ouliaris, S. (1990). Asymptotic Properties of Residual Based Tests for Cointegration. *Econometrica*. 58: 165-193.

Politis, D. N. ve Romano, J. P. (1995). Bias-Corrected Nonparametric Spectral Estimation. *Journal of Time Series Analysis*. 16: 67-103.

Protter, P. (2004). *Stochastic Integration and Differential Equations*. New York: Springer-Verlag.

Renault, E. ve Werker, B. J. M. (2011). Causality Effects in Return Volatility Measures with Random Times. *Journal of Econometrics*. 160(1): 272-279.

Ripley, B. D. (1987). *Stochastic Simulation*. New York: Wiley.

Rippl, W. (1883). The Capacity of Storage-Reservoirs for Water-Supply. *Minutes of the Proceedings of the Institution of Civil Engineers*. 71: 270-278.

Rossi, E. ve Fantazzini, D. (2015). Long Memory and Periodicity in Intraday Volatility. *Journal of Financial Econometrics*. 13(4): 922-961

Samorodnitsky, G. (2006). Long Range Dependence. *Foundations and Trends in Stochastic Systems*. 1: 163-257.

Samorodnitsky, G. ve Taqqu, M.S. (1994). *Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance*. New York: Chapman & Hall.

Shephard, N. (2005). *Stochastic Volatility: Selected Readings*. Oxford: Oxford University Press.

Sornette, D. (2004). *Why Stock Markets Crash: Critical Events in Complex Financial Systems*. Princeton: Princeton University Press.

Turcotte, D. (1997). *Fractals and Chaos in Geology and Geophysics*. (2. Baskı). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Wallis, J.R. ve Matalas, N.C. (1972). Sensitivity of Reservoir Design to the Generating Mechanism of Inflows. *Water Resources Research*. 8: 634-641.

Wallis, J.R. ve O'Connell, P.E. (1973). Firm Reservoir Yield-How Reliable are Historic Hydrological Records? *Hydrological Sciences Bulletin*. 18: 347-365.

Watkins, N.W. (2016). Mandelbrot's $1/f$ Fractional Renewal Models of 1963-67: The Non-Ergodic Missing Link Between Change Points and Long-Range Dependence. *arXiv*. arXiv:16030.00738.



EKLER



EK 1: Gauss Kesirli Süreçlerinin Parametrik Örnekleri

Sınıf	Otokorelasyon fonksiyonu	Yavaşça değişen fonksiyon	Parametreler
fBm	-	$L(x) = \beta$	$\alpha \in (-1/2, 1/2)$
Matérn	$\rho(x) = \frac{2^{-\alpha+1/2}}{\Gamma(\alpha+1/2)} \beta x ^{\alpha+1/2} K_{\alpha+1/2}(\beta x)$	$L(x) = 2x^{-2\alpha-1}(1 - \rho(x))$	$\alpha \in (-1/2, 1/2)^a$
Powered exp	$\rho(x) = \exp(- \beta x ^{2\alpha+1})$	$L(x) = 2x^{-2\alpha-1}(1 - \rho(x))$	$\alpha \in (-1/2, 1/2)^b$
Cauchy	$\rho(x) = (1 + \beta x ^{2\alpha+1})^{-\frac{r}{2\alpha+1}}$	$L(x) = 2x^{-2\alpha-1}(1 - \rho(x))$	$\alpha \in (-1/2, 1/2)^b, r > 0$
Dagum	$\rho(x) = 1 - \left(\frac{ \beta x ^{2r+1}}{1 + \beta x ^{2r+1}} \right)^{\frac{2\alpha+1}{2r+1}}$	$L(x) = 2x^{-2\alpha-1}(1 - \rho(x))$	$\alpha \in (-1/2, 1/2)^c, \alpha \in (-1/2, r)$

Kaynak: Bennesen M., 2018: 4.

EK 2: $n^{1/4}$ Düz-Üst Gerçekleşmiş Çekirdeklerin Özellikleri

	$k(x)$	$k_{\bullet}^{0,0}$	$k_{\bullet}^{1,1}$	$k_{\bullet}^{2,2}$	c^*	g
Kübik çekirdek	$1 - 3x^2 + 2x^3$	0.317	1.20	12.0	3.68	9.04
5. sıradan çekirdek	$1 - 10x^3 + 15x^4 - 6x^5$	0.391	1.42	17.1	3.70	10.2
6. sıradan çekirdek	$1 - 15x^4 + 24x^5 - 10x^6$	0.471	1.55	22.8	3.97	12.1
7. sıradan çekirdek	$1 - 21x^5 + 35x^6 - 15x^7$	0.533	1.71	31.8	4.11	13.9
8. sıradan çekirdek	$1 - 28x^6 + 48x^7 - 21x^8$	0.582	1.87	43.8	4.31	15.7
Parzen	$k(x) = \begin{cases} 1 - 6x^2 + 6x^3 & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2(1 - x)^3 & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$	0.269	1.50	24.0	4.77	8.54
Tukey-Hanning ₁	$\sin^2\{\pi/2(1 - x)\}$	0.375	1.23	12.1	3.70	9.18
Tukey-Hanning ₂	$\sin^2\{\pi/2(1 - x)^2\}$	0.219	1.71	41.7	5.74	8.29
Tukey-Hanning ₅	$\sin^2\{\pi/2(1 - x)^5\}$	0.097	3.50	489.0	8.07	8.07
Tukey-Hanning ₁₆	$\sin^2\{\pi/2(1 - x)^{16}\}$	0.032	10.26	14374.0	39.16	8.02

Not. Çekirdeğin küpü çoklu ölçekli tahmin ediciyle aynı asimptotik dağılıma sahiptir. g , $\rho = 1$ durumu için hesaplanır ve bu sınıftaki gerçekleşmiş çekirdeklerin göreceli asimptotik etkinliğini ölçer, – 8 parametrik verim sınırındır.

Kaynak: Barndorff-Nielsen O. E. ve diğerleri, 2008: 13.

EK 3: Bazı $n^{1/4}$ Düz-Üst Sonsuz Log Gerçekleşmiş Çekirdekler

$k(x)$		$k_{\bullet}^{0,0}$	$k_{\bullet}^{1,1}$	$k_{\bullet}^{2,2}$	c^*	g
Optimal	$(1+x)e^{-x}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1.0000	8.0000
Tukey-Hanning $_{\infty}$	$\sin^2\left\{\frac{\pi}{2}\exp(-x)\right\}$	0.52	$\frac{\pi^2}{16}$	$\frac{\pi^2(1+\pi^2)}{32}$	2.3970	8.0124
Quadratic Spectral	$\frac{3}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right)$	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{35}$	$\frac{\pi}{35}$	0.7395	9.3766
Dirichlet $_{\infty}$	$\frac{\sin x}{x}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{10}$	1.0847	11.662
Fejér	$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{15}$	$\frac{16\pi}{105}$	1.2797	8.8927

Not. g , bu sınıfta gerçekleşmiş çekirdeklerin göreceli asimptotik yeterliliğini ölçer, -8 parametrik verim sınırındır.

Kaynak: Barndorff-Nielsen O. E. ve diğerleri, 2008: 17.

EK 4: Seçilmiş Ülkeler Finansal Piyasalarının Endeksleri

AEX	Amsterdam Exchange index
AORD	ALL ORDINARIES
BFX	Brussels Stock Exchange (BEL 20)
BSESN	Bombay Stock Exchange
BVLG	PSI All Share Gross Return (BVLG) Lisbon, Portugal
BVSP	IBOVESPA Sao Paulo, Brasil
DJI	Dow Jones Industrial Average USA
FCHI	CAC 40 Paris, France
FTMIB	Borsa FTSE MIB Borsa Italiana
FTSE	London Stock Exchange London, UK
GDAXI	Frankfurt Stock Exchange
GSPTSE	Toronto Stock Exchange
HSI	The Hang Seng Index
IBEX	Index of the Bolsa de Madrid, Spain
IXIC	NASDAQ Composite USA
KS11	KOSPI Korea Composite Stock Price Index
KSE	Karachi Stock Exchange Pakistan
MXX	Mexican Bolsa IPC Index
N225	Nikkei 225 Tokyo Stock Exchange,
NSEI	NIFTY 50 National Stock Exchange of India
OMXC20	OMX Copenhagen Stock Exchange. Denmark
OMXHPI	OMX Helsinki All-Share Index, Finland
OMXSPI	OMX Stockholm All-Share Index, Sweden
OSEAX	Oslo All-Share Index Norway
RUT	Russell 2000 Index USA
SMSI	General Madrid Spain
SPX	The Standard & Poor's 500
SSEC	Shanghai Stock Exchange
SSMI	Swiss Market Index
STI	Singapore
STOXX50E	Euro Stoxx 50

Kaynak: Oxford-Man kütüphane verilerinden yararlanarak tarafımızdan hazırlanmıştır.

EK 5: Kullanılabilir Hesaplanmış Veriler Listesi

Başlık (Kod)	Açıklama (İngilizce)	Açıklama (Türkçe)
bv	Bipower Variation (5-min)	Bipower Varyasyonu (5 dk.)
bv_ss	Bipower Variation (5-min Sub-sampled)	Bipower Varyasyonu (5 dk. Alt örneklem)
close_price	Closing (Last) Price	Kapanış (Son) Fiyat
close_time	Closing Time	Kapanış Zamanı
medrv	Median Realized Variance (5-min)	Ortanca Gerçekleşmiş Varyans (5 dk.)
nobs	Number of Observations	Gözlem Sayısı
open_price	Opening (First) Price	Açılış (İlk) Fiyatı
open_time	Opening Time	Açılış Zamanı
open_to_close	Open to Close Return	Günlük Getiri Serisi
rk_parzen	Realized Kernel Variance (Non-Flat Parzen)	Gerçekleşmiş Çekirdek Varyansı (Düz Olmayan Parzen)
rk_th2	Realized Kernel Variance (Tukey-Hanning(2))	Gerçekleşmiş Çekirdek Varyansı (Tukey-Hanning(2))
rk_twoscale	Realized Kernel Variance (Two-Scale/Bartlett)	Gerçekleşmiş Çekirdek Varyansı (İki Ölçekli/Bartlett)
rsv	Realized Semi-variance (5-min)	Gerçekleşmiş Yarı Varyans (5 dk.)
rsv_ss	Realized Semi-variance (5-min Sub-sampled)	Gerçekleşmiş Yarı Varyans (5 dk. Alt örneklem)
rv10	Realized Variance (10-min)	Gerçekleşmiş Varyans (10 dk.)
rv10_ss	Realized Variance (10-min Sub-sampled)	Gerçekleşmiş Varyans (10 dk. Alt örneklem)
rv5	Realized Variance (5-min)	Gerçekleşmiş Varyans (5 dk.)
rv5_ss	Realized Variance (5-min Sub-sampled)	Gerçekleşmiş Varyans (5 dk. Alt örneklem)

Kaynak: Oxford-Man kütüphane verilerinden yararlanarak tarafımızdan hazırlanmıştır.

EK 6: Araştırmada Kullanılan Python Kodları

Aşama 1:

```
import warnings; warnings.simplefilter('ignore')
import datetime as dt
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.mlab as mlab
from matplotlib.mlab import stineman_interp
import pandas as pd
pd.core.common.is_list_like = pd.api.types.is_list_like
import pandas_datareader
from pandas_datareader import data, wb
import requests
import zipfile as zi
import io as io
from sklearn import datasets, linear_model
import scipy.special as scsp
import statsmodels.api as sm
import math
import seaborn as sns; sns.set()
%matplotlib inline
```

Aşama 2:

```
df = pd.read_csv('kospi.csv', index_col=0, header=0 )
rv1 = pd.DataFrame(index=df.index)
for col in df.columns:
    if col[1] == 'r':
        rv1[col] = df[col]
rv1.index = [dt.datetime.strptime(str(date), "%Y%m%d") for date in rv1.index.values]
```

Aşama 3:

```
rv2 = pd.DataFrame(index=df.index)
for col in df.columns:
    if col[-3:] == 'rv5':
        rv2[col] = df[col]
rv2.index = [dt.datetime.strptime(str(date), "%Y%m%d") for date in rv2.index.values]
```

```
spx = pd.DataFrame(rv2['rv5'])
spx.plot(color='blue', grid=True, title='KOSPI Gerçekleşmiş Varyans',
         figsize=(16, 9), ylim=(0,0.005));
```

Aşama 4:

```
spx.head()
spx.tail()
```

Aşama 5:

```
KOSPI = pd.read_csv('kospi.csv', index_col=0, header=0)
rv2 = pd.DataFrame(index=KOSPI.index)
for col in KOSPI.columns:
    if col[-11:] == 'close_price':
        rv2[col] = KOSPI[col]
rv2.index = [dt.datetime.strptime(str(date), "%Y%m%d") for date in rv2.index.values]
```

Aşama 6:

```
kospi = pd.DataFrame(rv2['close_price'])
kospi.plot(color='blue', grid=True, title='KOSPI',
           figsize=(18, 9), ylim=(400,2700));
```

Aşama 7:

```
spx['sqrt'] = np.sqrt(spx['rv10'])
spx['log_sqrt'] = np.log(spx['sqrt'])

def del_Raw(q, x):
    return [np.mean(np.abs(spx['log_sqrt'] - spx['log_sqrt'].shift(lag)) ** q)
            for lag in x]
```

Aşama 8:

```
plt.figure(figsize=(8, 8))
plt.xlabel('$\log(\Delta)$')
plt.ylabel('$\log m(q, \Delta)$')
plt.ylim=(-3, -.5)

zeta_q = list()
qVec = np.array([.5, 1, 1.5, 2, 3])
x = np.arange(1, 100)
for q in qVec:
    plt.plot(np.log(x), np.log(del_Raw(q, x)), 'o')
    model = np.polyfit(np.log(x), np.log(del_Raw(q, x)), 1)
    plt.plot(np.log(x), np.log(x) * model[0] + model[1])
    zeta_q.append(model[0])

print(zeta_q)
```

Aşama 9:

```
plt.figure(figsize=(8,8))
plt.xlabel('q')
plt.ylabel('$\zeta_q$')
plt.plot(qVec, zeta_q, 'or')
line = np.polyfit(qVec[:4], zeta_q[:4],1)
plt.plot(qVec, line[0] * qVec + line[1])
h_est= line[0]
print(h_est)
```

Aşama 10:

```
def dlsig2(sic, x, pr=False):
    if pr:
        a= np.array([(sig-sig.shift(lag)).dropna() for lag in x])
        a=a ** 2
        print(a.info())
    return [np.mean((sig-sig.shift(lag)).dropna() ** 2) for lag in x]

h = list()
nu = list()

for col in rv1.columns:
    sig = rv1[col]
```

```

sig = np.log(np.sqrt(sig))
sig = sig.dropna()
model = np.polyfit(np.log(x), np.log(dlsig2(sig, x)), 1)
nu.append(np.sqrt(np.exp(model[1])))
h.append(model[0]/2.)

```

```
OxfordH = pd.DataFrame({'names':rv1.columns, 'h_est': h, 'nu_est': nu})
```

OxfordH

Aşama 11:

```

def plotScaling(j, scaleFactor):
    col_name = rv1.columns[j]
    v = rv1[col_name]
    x = np.arange(1,101)

    def xDel(x, lag):
        return x-x.shift(lag)

    def sdl(lag):
        return (xDel(np.log(v), lag)).std()

    sd1 = (xDel(np.log(v), 1)).std()
    h = OxfordH['h_est'][j]
    f, ax = plt.subplots(2,2,sharex=False, sharey=False, figsize=(10, 10))

    for i_0 in range(0, 2):
        for i_1 in range(0, 2):
            la = scaleFactor ** (i_1*1+i_0*2)

            hist_val = xDel(np.log(v), la).dropna()
            std = hist_val.std()
            mean = hist_val.mean()

            ax[i_0][i_1].set_title('Gecikme = %s Gün' %la)
            n, bins, patches = ax[i_0][i_1].hist(hist_val.values, bins=100,
                                                normed=1, facecolor='green',alpha=0.2)
            ax[i_0][i_1].plot(bins, mlab.normpdf(bins,mean,std), "r")
            ax[i_0][i_1].plot(bins, mlab.normpdf(bins,0,sd1 * la ** h), "b--")
            hist_val.plot(kind='density', ax=ax[i_0][i_1])
    plotScaling(1,5)

```

Aşama 12:

```

def c_tilde(h):
    return scsp.gamma(3. / 2. - h) / scsp.gamma(h + 1. / 2.) * scsp.gamma(2. - 2. * h)

def forecast_XTS(rvdata, h, date, nLags, delta, nu):
    i = np.arange(nLags)
    cf = 1./((i + 1. / 2.) ** (h + 1. / 2.) * (i + 1. / 2. + delta))
    ldata = rvdata.truncate(after=date)
    l = len(ldata)
    ldata = np.log(ldata.iloc[l - nLags:])
    ldata['cf'] = np.fliplr([cf])[0]

```

```

# print ldata
ldata = ldata.dropna()
fcst = (ldata.iloc[:, 0] * ldata['cf']).sum() / sum(ldata['cf'])

return math.exp(fcst + 2 * nu ** 2 * c_tilde(h) * delta ** (2 * h))

rvdata = pd.DataFrame(rv2['rv5'])
nu = OxfordH['nu_est'][0] # Vol of vol estimate for SPX
h = OxfordH['h_est'][0]
n = len(rvdata)
delta = 1
nLags = 500
dates = rvdata.iloc[nLags:n-delta].index
rv_predict = [forecast_XTS(rvdata, h=h, date=d, nLags=nLags,
                           delta=delta, nu=nu) for d in dates]
rv_actual = rvdata.iloc[nLags+delta:n].values

plt.figure(figsize=(8, 8))
plt.plot(rv_predict, rv_actual, 'bo');

```

Aşama 13:

```

plt.figure(figsize=(11, 6))
vol_actual = np.sqrt(np.multiply(rv_actual, 252))
vol_predict = np.sqrt(np.multiply(rv_predict, 252))
plt.plot(vol_actual, "b")
plt.plot(vol_predict, "r");

```

Kaynak: Gatheral J., ve değerleri, 2018, yönteminden kullanarak taframızdan hazırlanmıştır.