



T.C.

TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

***q*- CESÀRO MATRİS ve İLİŞKİLİ DİZİ UZAYLARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Emre TÜRK

Danışman: Prof. Dr. Serkan DEMİRİZ

TOKAT – 2025

ETİK SÖZLEŞME

Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Serkan DEMİRİZ danışmanlığında hazırlamış olduğum “ q - CESÀRO MATRİS ve İLİŞKİLİ DİZİ UZAYLARI” adlı Yüksek Lisans tezinin bilimsel etik değerlere ve kurallara uygun, özgün bir çalışma olduğunu, aksinin tespit edilmesi halinde her türlü yasal yaptırımını kabul edeceğimi beyan ederim.

20/12/2024

Emre TÜRK



JÜRİ KABUL ve ONAY

Emre TÜRK tarafından hazırlanan “ **q - Cesàro Matris ve İlişkili Dizi Uzayları**” adlı tez çalışmasının savunma sınavı 20.12.2024 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen Jüri tarafından Oy Birliği ile Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri (Unvanı, Adı Soyadı)

İmzası

Üye (Başkan) : Prof. Dr. Uğur ULUSU

Üye (Danışman): Prof. Dr. Serkan DEMİRİZ

Üye : Prof. Dr. Adem ŞAHİN

ONAY

...../...../.....

Doç. Dr. Ercan ÇAÇAN

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

TEŞEKKÜR

Öncelikle lisans eğitimimden başlayarak danışmanlığımı yürüten, tez çalışmamın konusunun seçimi, yürütülmesi ve sonuçlandırılması aşamalarında beni yönlendiren destek olan hocam Sayın Prof. Dr. Serkan DEMİRİZ 'e, bu günlere gelmemde emeği geçen bütün hocalarıma, desteğini hiçbir zaman esirgemeyen daima yardımlarını hissettiğim aileme, güzel ve anlayışlı eşim Elif'e, bana güç veren güzel çocuklarım Ebrar ve Ömer Eren'e teşekkür ederim.



ÖZET

q - CESÀRO MATRİS ve İLİŞKİLİ DİZİ UZAYLARI

Emre TÜRK

Yüksek Lisans, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Serkan DEMİRİZ

Aralık 2024, vii + 59 sayfa

Üç bölümden oluşan bu tezde q - Cesàro matrisinin c, c_0, ℓ_p ve ℓ_∞ etki alanları kullanılarak tanımlanan $[\tilde{c}]$, $[\tilde{c}_0]$, $[\tilde{\ell}_p]$ ve $[\tilde{\ell}_\infty]$ dizi uzayları çalışılmıştır.

Giriş bölümde dizi uzayları hakkında temel sayılabilecek kavramlara ve bu alanda yapılan önemli çalışmalara yer verilmiştir.

Birinci bölümde tez çalışması boyunca kullanılan temel tanım ve teoremler sunulmuştur.

İkinci ve Üçüncü bölümde q - Cesàro matrisinin c, c_0, ℓ_p ve ℓ_∞ etki alanları kullanılarak tanımlanan $[\tilde{c}]$, $[\tilde{c}_0]$, $[\tilde{\ell}_p]$ ve $[\tilde{\ell}_\infty]$ dizi uzayları tanıtılmış ve ayrıntılı olarak incelenmiştir. Ayrıca tanıtılan bu uzayların cebirsel ve topolojik özellikleri de çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: q - Tamsayıları, Cesàro Matrisi, Dizi Uzayları, Matris Dönüşümleri.

ABSTRACT

q - CESÀRO MATRIX AND ASSOCIATED SEQUENCE SPACES

Emre TÜRK

Master's Thesis, Department of Mathematics

Thesis Advisor: Prof. Dr. Serkan DEMİRİZ

December 2024, vii + 59 pages

In this thesis, which consists of three chapters, the sequence spaces $[\tilde{c}]$, $[\tilde{c}_0]$, $[\tilde{\ell}_p]$ and $[\tilde{\ell}_\infty]$, defined by the c , c_0 , ℓ_p and ℓ_∞ action domains of the q - Cesàro matrix, have been studied.

The introduction provides foundational concepts about sequence spaces as well as an overview of significant work conducted in this area.

In the first chapter, the fundamental definitions and theorems used throughout the thesis are presented.

The second and third chapters introduce and examine in detail the sequence spaces $[\tilde{c}]$, $[\tilde{c}_0]$, $[\tilde{\ell}_p]$ and $[\tilde{\ell}_\infty]$, which are defined by the c , c_0 , ℓ_p and ℓ_∞ action domains of the q - Cesàro matrix. Additionally, the algebraic and topological properties of these spaces are analyzed.

Keywords: q - Integers, Cesàro Matrix, Sequence Spaces, Matrix Transformations.

İÇİNDEKİLER

ETİK SÖZLEŞME	i
JÜRİ KABUL VE ONAY.....	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
SİMGE ve KISALTMALAR	vii
GİRİŞ	1
1.TEMEL TANIMLAR ve TEOREMLER	5
1.1.Temel Kavramlar ve Teoremler	5
1.2. Dizi Uzayları ve Matris Dönüşümleri.....	8
1.3. q - Calculus	14
2. $[\tilde{c}]$ ve $[\tilde{c}_0]$ DİZİ UZAYLARI	18
2.1.Giriş	18
2.2. $[\tilde{c}]$ ve $[\tilde{c}_0]$ Dizi Uzaylarının α – ve β –Dualleri.....	28
3. $[\tilde{\ell}_\infty]$ ve $[\tilde{\ell}_p]$ DİZİ UZAYLARI	33
3.1.Giriş	33
3.2. $[\tilde{\ell}_\infty]$ ve $[\tilde{\ell}_p]$ Dizi Uzaylarının α – ve β –Dualleri	51
KAYNAKÇA.....	57

SİMGE ve KISALTMALAR

Simgeler	Açıklamalar
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
w	Reel veya kompleks terimli bütün dizilerin uzayı
c	Reel terimli yakınsak dizilerin uzayı
c_0	Reel terimli sıfıra yakınsak dizilerin uzayı
ℓ_∞	Reel terimli sınırlı dizilerin uzayı
ℓ_p	p . kuvvetten mutlak yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı
cs	Kısmi toplamaları yakınsak olan bütün reel terimli serilerin uzayı
bs	Kısmi toplamaları sınırlı olan bütün reel terimli serilerin uzayı
bv	Sınırlı salınımlı dizilerin uzayı
cs_0	Sıfıra yakınsayan serilerin uzayı
λ^α	λ dizi uzayının α - duali
λ^β	λ dizi uzayının β - duali
C_1	Birinci mertebede Cesàro matrisi
Δ^1	Fark matrisi
$\Delta^{(1)}$	Fark matrisi
$\check{e}kA$	A operatörünün sıfır uzayı (çekirdeği)
S	Toplam matrisi

GİRİŞ

Bütün kompleks veya reel terimli dizilerin uzayı w ile gösterelim. w uzayının herhangi bir alt uzayı, bir ‘dizi uzayı’ olarak adlandırılır. Toplanabilme teorisinde ise genel olarak dizi uzayları ile ilgili problemler incelenir.

Toplanabilme teorisinde dizi uzayları ile ilgili olarak yapılan temel çalışmalar;

- a) Yeni bir dizi uzayı inşa etmek,
- b) Bu uzayın, üzerinde tanımlanan bir norm veya paranormla tamlığını göstermek,
- c) Bu uzayla, bilinen dizi uzayları arasındaki kapsama bağlantılarını incelemek,
- d) Varsa uzayın Schauder tabanını belirlemek,
- e) Uzayın, α -, β - ve γ - duallerini hesaplamak,
- f) Bu uzaydan, bilinen dizi uzaylarına ve bilinen uzaylardan bu uzaya matris dönüşümlerini karakterize etmek

gibi problemlerin bir veya birkaçını ele alarak çözüme kavuşturur.

X bir dizi uzayı ve $A = (a_{nk})$ reel terimli bir sonsuz matris olmak üzere, $x = (x_k) \in X$ için $(Ax)_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x_k$ ($n \in \mathbb{N}$) serileri yakınsak ise $Ax = ((Ax)_n)$ dizisine x dizisinin A - dönüşümü denir.

X dizi uzayında bulunan dizilerin

$$X_A = \{x = (x_k) \in w : Ax \in X\}$$

cümlesi, A matrisinin X etki alanı olarak adlandırılır. X_A cümlesi, dizilerin toplama ve skalarla çarpma işlemleriyle birlikte bir vektör uzayı teşkil ettiğinden bir dizi uzayıdır. Bu düşünce ile yeni dizi uzayları inşa etmek üzere birtakım çalışmalar yapılmıştır. Bunlardan ilki Ng ve Lee tarafından 1978 yılında yapılan çalışmadır. Yazarlar bu çalışmada 1. mertebeden Cesàro matrisinin ℓ_p ve ℓ_{∞} etki alanı kullanılarak X_p ve X_{∞} dizi uzaylarını inşa etmiş ve incelemişlerdir.

1. mertebeden Cesàro matrisi $C_1 = (c_{ij})$

$$c_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{i}, & (1 \leq j \leq i) \\ 0, & (j > i) \end{cases}$$

olarak tanımlanmıştır.

Bu matrisin ℓ_p ve ℓ_∞ dizi uzayları üzerindeki etki alanları olan X_p ve X_∞ dizi uzayları sırasıyla

$$X_p = \left\{ v = (v_i) \in w : \sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i v_j \right|^p < \infty \right\}$$

ve

$$X_\infty = \left\{ v = (v_i) \in w : \sup_{i \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i v_j \right| < \infty \right\}$$

biçiminde tanımlanmıştır. (Ng ve Lee, 1978). Bu çalışma, üçgensel bir matrisin etki alanı kullanılarak dizi uzayı inşa etme yaklaşımında bir mihenk taşıdır. Aynı yıl Wang, Nörlund ortalamasını kullanarak $(\ell_p)_{N_q}$ uzayını inşa etmiştir. Daha sonraki yıllarda bu doğrultuda pek çok dizi uzayı tanımlanmış ve bu uzaylar üzerinde çalışılmıştır (Wang, 1978; Aydın ve Başar, 2004; Altay ve Başar, 2005; Aydın ve Başar, 2005; Şengönül ve Başar, 2005; Mursaleen ve ark., 2006).

Şengönül ve Başar, 2005 yılında 1. mertebeden Cesàro matrisinin c ve c_0 etki alanları üzerine çalışma yapmışlardır. Yazarlar bu çalışmada $\tilde{c}$ ve $\tilde{c}_0$ dizi uzaylarını

$$\tilde{c} = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x_k \text{ mevcut} \right\}$$

ve

$$\tilde{c}_0 = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x_k = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlamıştır (Şengönül ve Başar, 2005). Bu çalışmalardan yola çıkarak Cesàro dizi uzayları pek çok yazar tarafından toplanabilme teorisinde kullanılmaktadır (Malkowsky, 1997; Başar, 1999; Tripathy ve ark., 2005; Maji ve Srivastava, 2014).

Son yıllarda, q - tamsayıları içeren çalışmalar ve uygulamaları (Örneğin; pozitif lineer operatörlerin q - benzerleri ve yaklaşım özellikleri) aktif araştırma alanları haline gelmiştir (Bustoz ve ark., 2005; Aktuglu ve Bekar, 2011; Selmanogullari ve ark., 2011; Yildirim, 2020).

$0 < q < 1$ olmak üzere $C(q) = (c_{ij}^q)$ q - Cesàro matrisi

$$C_{ij}^q = \begin{cases} \frac{q^{j-1}}{[i]_q}, & (1 \leq j \leq i) \\ 0, & (j > i) \end{cases} \quad (1)$$

şeklinde tanımlanmıştır (Bekar, 2010).

Bu matris kullanılarak q - calculus ile dizi uzayları arasındaki ilişki ilk olarak Demiriz ve Şahin tarafından ortaya konmuştur (Demiriz ve Şahin, 2016). 2022 yılında Euler fark dizi uzaylarının q - benzerleri Yaying ve Mohiuddine tarafından tanımlanmış ve incelenmiştir. Bu çalışmada $e_0^q(\nabla)$ ve $e_c^q(\nabla)$ fark dizi uzayları sırasıyla

$$e_0^q(\nabla) = \{z \in w : \nabla z \in e_0^q\}$$

ve

$$e_c^q(\nabla) = \{z \in w : \nabla z \in e_c^q\}$$

olarak tanımlanmıştır. Burada $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\nabla z = (\nabla)_z = z_k - z_{k-1}$ biçimindedir. Ayrıca bu uzayların α -, β - ve γ - dualleri hesaplanmış ve bazı matris sınıfları karakterize edilmiştir.

Bununla birlikte pek çok çalışma yapılmış ve bu çalışmalarla dizi uzayları ile ilgili literatüre katkıda bulunulmuştur (Yaying ve ark., 2021; Yaying ve ark., 2021; Yaying ve Mohiuddine, 2022; Yaying ve ark., 2022; Yaying ve ark., 2022).

Bu tezin amacı, (1)'de verilen q - Cesàro matrisinin c, c_0, ℓ_p ve ℓ_∞ etki alanları kullanılarak tanımlanan $[\tilde{c}]$, $[\tilde{c}_0]$, $[\tilde{\ell}_p]$ ve $[\tilde{\ell}_\infty]$ dizi uzaylarını ayrıntılı bir biçimde incelemektir.

1. TEMEL TANIMLAR ve TEOREMLER

1.1. Temel Kavramlar ve Teoremler

Bu bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan tanımlar ve teoremler ele alınacaktır.

Tanım 1.1.1. $X \neq \emptyset$ ve $K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} + : X \times X &\rightarrow X \\ (x, y) &\rightarrow x + y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} . : K \times X &\rightarrow X \\ (\lambda, x) &\rightarrow \lambda . x \end{aligned}$$

ikili işlemleri $\forall \alpha, \beta \in K$ ve $\forall x, y, z \in X$ için

- 1) $x + y = y + x$
- 2) $(x + y) + z = x + (y + z)$
- 3) $\forall x \in X$ için $x + e = e + x = x$ olacak şekilde bir $e \in X$ vardır.
- 4) $\forall x \in X$ için $x + (-x) = (-x) + x$ olacak şekilde bir $-x \in X$ vardır.
- 5) $1.x = x$
- 6) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
- 7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
- 8) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

şartlarını sağlıyorsa $(X, +, .)$ üçlüsüne, K üzerinde bir lineer uzay (vektör uzayı) denir.

X, K cismi üzerinde bir lineer uzay ve $Y \subset X$ olsun. Bu durumda; $x, y \in Y$ vektörleri ve $\alpha \in K$ skaları için $\alpha x + y \in Y$ olması halinde Y, X uzayının bir alt uzayıdır denir.

Tanım 1.1.2. Boş olmayan bir X kümesi ve bir

$$\begin{aligned} d : X \times X &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\rightarrow d(x, y) \end{aligned}$$

dönüşümü verilsin.

Eğer bu d dönüşümü $\forall x, y, z \in X$ için

$$(M1) \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$(M2) \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$(M3) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \text{ (üçgen eşitsizliği)}$$

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde uzaklık fonksiyonu ya da metrik adını alır. Bu durumda (X, d) ikilisine bir metrik uzay denir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 1.1.3. Bir (X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite sahipse, bu (X, d) metrik uzayına tam metrik uzay denir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 1.1.4. X, K cismi ($K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$) üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$x \rightarrow \| x \|$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in K$ için

$$(N1) \quad \| x \| = 0 \Leftrightarrow x = \theta,$$

$$(N2) \quad \| \alpha x \| = |\alpha| \| x \|,$$

$$(N3) \quad \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \| \text{ (üçgen eşitsizliği)}$$

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde norm adını alır. Bu durumda $(X, \| \cdot \|)$ ikilisine bir normlu vektör uzayı adı verilir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 1.1.5. Bir $(X, \| \cdot \|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite sahipse, bu $(X, \| \cdot \|)$ normlu uzayına tam normlu uzay ya da Banach uzayı denir.

Tanım 1.1.6. X ve Y , aynı cisim üzerinde iki lineer uzay olsun. Eğer $x_1, x_2 \in X$ ve c_1, c_2 skalarları için

$$T(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1Tx_1 + c_2Tx_2$$

oluyorsa $T: X \rightarrow Y$ dönüşümü lineerdir denir. $T: X \rightarrow Y$ lineer dönüşümü, örten ve birebir ise T dönüşümüne bir izomorfizm denir. Bu durumda, X ve Y uzayları lineer olarak izomorfik uzaylar adını alır ve $X \cong Y$ yazılır.

Tanım 1.1.7. $A: X \rightarrow Y$ lineer operatörü verilsin.

$$\text{Çek}A = \{x \in X: Ax = 0\}$$

Kümesine, A operatörünün sıfır uzayı veya çekirdeği denir (Şuhubi, 2001).

Teorem 1.1.8. A lineer operatörünün bire bir olması için gerek yeter koşul $\text{Çek}A = \{0\}$ olmasıdır (Şuhubi, 2001).

Tanım 1.1.9. X vektör uzayından skaler cisme giden dönüşümlere fonksiyonel denir.

Tanım 1.1.10. X, K cismi ($= \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$) üzerinde bir normlu uzay olsun. X üzerinde tanımlı tüm sınırlı lineer fonksiyonellerden oluşan $B(X, K)$ uzayına X uzayının sürekli duali denir ve X^* ile gösterilir.

Şimdi tez boyunca kullanacağımız bazı eşitsizlikleri verelim:

i) $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $x = (x_k) \in \ell_p, y = (y_k) \in \ell_q$ olsun. Bu taktirde,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (1.1.1)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik Hölder Eşitsizliği olarak bilinir (Kreyszig, 1980).

ii) $p \geq 1$ ve $x = (x_k), y = (y_k) \in \ell_p$ olsun. Bu takdirde,

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.1.2)$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizliğe Minkowski Eşitsizliği denir (Kreyszig, 1980).

1.2. Dizi Uzayları ve Matris Dönüşümleri

Tanım 1.2.1. $K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$ olmak üzere tüm dizilerin kümesi

$$w = \{x = (x_k) \in w : x : N \rightarrow K, k \rightarrow x_k = (x_k)\}$$

ile gösterilir.

w kümesi,

$$((x_k), (y_k)) \rightarrow (x_k + y_k)$$

ve

$$(\lambda, (x_k)) \rightarrow (\lambda x_k)$$

ikili işlemleri ile K üzerinde bir vektör uzayıdır. w' 'nın herhangi bir alt vektör uzayına bir dizi uzayı denir (Boss ve Peter, 2000).

Literatürde en çok ele alınan dizi uzaylarının listesi aşağıda verilmiştir.

Örnek 1.2.2.

$$\ell_{\infty} = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_k |x_k| < \infty \right\},$$

$$c = \left\{ x = (x_k) \in w : (x_k) \text{ yakınsak yani } \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \text{ mevcut} \right\},$$

$$c_0 = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0 \right\},$$

$$bs = \left\{ x = (x_k) \in w : \left(\sum_{k=0}^n x_k \right) \in \ell_{\infty} \right\},$$

$$cs = \left\{ x = (x_k) \in w : \left(\sum_{k=0}^n x_k \right) \in c \right\},$$

$$\ell_p = \left\{ x = (x_k) \in w : \left(\sum_k |x_k|^p \right) < \infty \right\},$$

$$bv = \left\{ x = (x_k) \in w : |x_0| + \left(\sum_k |x_k - x_{k+1}| \right) < \infty \right\},$$

uzayları birer dizi uzayıdır (Boss ve Peter, 2000).

Tanım 1.2.3. (K -, FK -, BK -Uzayları) λ bir lineer topolojik uzay olsun. Eğer $\forall i \in \mathbb{N}$ için $p_i(x) = x_i$ şeklinde tanımlanan $p_i : \lambda \rightarrow \mathbb{C}$ dönüşümü sürekliyse λ ya bir K - uzayı denir. Tam lineer metrik bir K - uzaya bir FK - uzayı, normlu FK - uzayına da bir BK - uzayı denir (Altay ve Başar, 2005).

Örnek 1.2.4. ℓ_{∞}, c ve c_0 uzayları $\|x\|_{\infty} = \sup_k |x_k|$ normuna göre, $1 \leq p < \infty$ için ℓ_p uzayı da $\|x\|_p = (\sum_{k=0}^n |x_k|^p)^{1/p}$ normuna göre birer BK - uzayıdır (Malkowsky, 2001).

Tanım 1.2.5. λ ve μ birer dizi uzayı ve $A = (a_{nk})$ ($n, k = 0, 1, 2, \dots$) da reel ya da kompleks sayıların bir sonsuz matrisi olsun. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $A_n(x) = \sum_k a_{nk} x_k$ yakınsak ise $Ax = (A_n(x))$ yazılır. Eğer $x = (x_k) \in \lambda$ iken $Ax = (A_n(x)) \in \mu$ ise o zaman A' ya λ dizi uzayından μ dizi uzayına bir matris dönüşümüdür denir ve bu durum $A : \lambda \rightarrow \mu$ olarak gösterilir. Ax dizisine de x' in A - dönüşümü denir.

$(\lambda : \mu)$ ile $A : \lambda \rightarrow \mu$ şeklindeki bütün A matrislerinin kümesi, $(\lambda : \mu; p)$ ile de limit ya da toplamı koruyan $A : \lambda \rightarrow \mu$ şeklindeki bütün A matrislerinin kümesi gösterilecektir. $(\lambda : \mu; p) \subset (\lambda : \mu)$ olduğu açıktır (Nanda, 1983).

Tanım 1.2.6. $A = (a_{nk})$ reel ya da kompleks sayıların bir sonsuz matrisi olsun. $\forall n = 0, 1, 2, \dots$ için $A_n(x) = \sum_k a_{nk} x_k$ mevcut ve $\lim_n A_n(x) = l \in \mathbb{C}$ ise $x = (x_n)$ dizisine l sayısı için A - toplanabilirdir denir. Bu durum x' in A - limiti l' dir diye ifade edilir ve

$$A - \lim_n x_n = l$$

olarak gösterilir (Malkowsky, 2001).

Tanım 1.2.7. $A = (a_{nk})$ reel ya da kompleks sayıların bir sonsuz matrisi olsun. $k > n$ olacak biçimdeki $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için $a_{nk} = 0$ ise $A = (a_{nk})$ matrisine üçgensel matris denir. $A = (a_{nk})$ üçgensel matrisinde $a_{nn} \neq 0$ ise A' ya normal matris denir (Boss ve Peter, 2000).

Teorem 1.2.8. $A \in (c : c)$ olması için gerek ve yeter şartlar

- i. $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |a_{nk}| < \infty$
- ii. Bazı $a \in \mathbb{C}$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k |a_{nk}| = a$
- iii. Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = a_k$

olmasıdır (Nanda, 1983).

Tanım 1.2.9. Teorem 1.2.8. deki şartları sağlayan bir matrise koruyucu (conservative) matris denir. Bu tip matrisler kısaca K -matrisi olarak gösterilir.

Teorem 1.2.10. $A \in (c; c; p)$ olması için gerek ve yeter koşul

- i. $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |a_{nk}| < \infty$
- ii. Bazı $k \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = 0$
- iii. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k a_{nk} = 1$

olmasıdır (Nanda, 1983).

Tanım 1.2.11. Teorem 1.2.10. daki şartları sağlayan matrise regüler matris veya Toeplitz matris denir ve bu tip matrisler kısaca T - matrisi olarak gösterilir.

Şimdi bazı özel matrisleri tanımlayalım.

Tanım 1.2.12. $t = (t_k)$ pozitif reel sayıların bir dizisi ve $T_n = \sum_{k=0}^n t_k$, $(n \in \mathbb{N})$ olsun. O zaman $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için

$$r_{nk}^t = \begin{cases} \frac{t_k}{T_n}, & (0 \leq k \leq n) \\ 0, & (k > n) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $R^t = (r_{nk}^t)$ matrisine Riesz ortalaması ($t = (t_k)$ dizisiyle ilişkili) denir (Polat ve Başar, 2007).

Tanım 1.2.13. $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için

$$c_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & (0 \leq k \leq n) \\ 0, & (k > n) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $C_1 = (c_{nk})$ matrisine birinci mertebeden Cesàro ortalaması denir (Polat ve Başar, 2007).

Tanım 1.2.14. $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için

$$s_{nk} = \begin{cases} 1, & (0 \leq k \leq n) \\ 0, & (k > n) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $S = (s_{nk})$ matrisine toplam (summation) matrisi denir (Polat ve Başar, 2007).

Tanım 1.2.15. $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için

$$\delta_{nk} = \begin{cases} (-1)^{n-k}, & (n-1 \leq k \leq n+1) \\ 0, & (0 \leq k < n-1 \text{ ya da } k > n) \end{cases}$$

ve

$$d_{nk} = \begin{cases} (-1)^{n-k}, & (n \leq k \leq n+1) \\ 0, & (0 \leq k < n-1 \text{ ya da } k > n+1) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\Delta^{(1)} = (\delta_{nk})$ ve $\Delta^{(2)} = (d_{nk})$ matrislerine fark matrisleri denir (Polat ve Başar, 2007).

Tanım 1.2.16. $A^r = (a_{nk}^r)$ matrisi herhangi bir sabit $r \in \mathbb{R}$ ve $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için

$$a_{nk}^r = \begin{cases} \frac{1+r^k}{n+1}, & (0 \leq k \leq n) \\ 0, & (k > n) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan matristir (Altay ve Başar, 2005).

Tanım 1.2.17. $r \in \mathbb{R}$ ve $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için

$$e_{nk}^r = \begin{cases} \binom{n}{k} (1-r)^{n-k} r^k, & (0 \leq k \leq n) \\ 0, & (k > n) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $E^r = (e_{nk}^r)$ matrisine r . mertebeden Euler ortalaması denir (Boss ve Peter, 2000).

Tanım 1.2.18. λ bir normlu dizi uzayı olsun ve (b_n) dizisi verilsin. $\forall x \in \lambda$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - (a_0 b_0 + a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)\| = 0$$

olacak şekilde bir tek (a_n) skalerler dizisi varsa (b_n) dizi uzayına λ dizi uzayının bir Schauder bazı (kısaca bazı) denir ve bu durumda $x = \sum_k a_k b_k$ yazılır (Altay ve Başar, 2005).

Tanım 1.2.19. λ bir dizi uzayı olmak üzere bir A sonsuz matrisinin λ uzayındaki etki alanı (domain) olan λ_A kümesi

$$\lambda_A = \{x = (x_k) \in w : Ax \in \lambda\}$$

olarak tanımlanır (Altay ve Başar, 2005).

Şimdi yukarıda tanımları verilen C_1 , R^t , Δ ve A^r matrisleri yardımıyla tanımlanan bazı dizi uzaylarına örnek verelim.

Örnek 1.2.20. $(l_\infty)_{C_1} = x_\infty$, $(l_p)_{C_1} = X_p$, $(l_\infty)_{R_t} = r_\infty^t$, $C_R^t = r_c^t$, $(C_0)_{R_t} = r_0^t$, $(l_p)_\Delta = bv_p$, $(C_0)_{A^r} = a_0^r$, $c_{A^r} = a_c^r$, $(l_p)_{A^r} = a_p^r$, $(l_\infty)_{A^r} = a_\infty^r$ dır (Altay ve Başar, 2005).

Tanım 1.2.21. λ ve μ dizi uzayları için $S(\lambda, \mu)$ kümesi

$$S(\lambda, \mu) = \{z = (z_k) \in w : \forall x \in \lambda \text{ için } xz = (x_k z_k) \in \mu\}$$

çarpım uzayı olarak adlandırılır. $S(\lambda, \mu)$ kümesi yardımı ile λ uzayının α, β ve γ -dualleri olan $\lambda^\alpha, \lambda^\beta$ ve λ^γ kümeleri sırasıyla

$$\lambda^\alpha = S(\lambda, l_1), \quad \lambda^\beta = S(\lambda, cs) \text{ ve } \lambda^\gamma = S(\lambda, bs)$$

biçiminde tanımlanır (Wilansky, 1984; Altay ve Başar, 2002).

Şimdi yukarıda tanımları verilen dualler ile ilgili örnek verelim.

Örnek 1.2.22. $bv_0 = bv \cap c_0$ olmak üzere

$$cs^\alpha = bv^\alpha = bv_0^\alpha = bs^\alpha = l$$

$$cs^\beta = bv, \quad bv^\beta = cs, \quad bv_0^\beta = bs, \quad bs^\beta = bv_0$$

$$cs^\delta = bv, \quad bv^\gamma = bs, \quad bv_0^\gamma = bs, \quad bs^\gamma = bv$$

dir (Boss ve Peter, 2000).

Teorem 1.2.23. λ ve μ birer dizi uzayı ve $\sigma \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ olsun. O zaman $\lambda^\alpha \subseteq \lambda^\beta \subseteq \lambda^\gamma$ dir ve $\lambda \subset \mu$ ise $\lambda^\sigma \supset \mu^\sigma$ dir (Polat ve Başar, 2007).

1.3. q - Calculus

q - Calculus ve bilinen sonuçlarının q - benzerlerinin (analoglarının) çalışılması Euler zamanına kadar uzanır. q - Analizin matematik alanında, özellikle kombinatorik, özel fonksiyonlar, çoklu fractal ölçümlerinin incelenmesi, dinamik sistemler ve kuantum grupları gibi alanlarda çeşitli uygulamaları vardır.

Bu kısımda, ilk olarak q - analiz kavramı ile ilgili tezde ihtiyacımız olan tanım ve teoremlere yer verilecektir.

Tanım 1.3.1. Her $r \in \mathbb{Z}^+$ için, r tamsayısının q - benzeri $[r]$ ile belirtilir ve

$$[r] = [r]_q = \begin{cases} \frac{1 - q^r}{1 - q} & , \quad q \in \mathbb{R}^+ - \{1\} \\ r & , \quad q = 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Bir $q > 0$ sayısı için $\mathbb{N}_q$ kümesi

$$\mathbb{N}_q = \{[r], r \in \mathbb{N}\}$$

ile tanımlanır. Tanım 1.3.1. den görülür ki

$$\mathbb{N}_q = \{0, 1, 1 + q, 1 + q + q^2, 1 + q + q^2 + q^3, \dots\}. \quad (1.3.1)$$

Açıktır ki, (1.3.1)'de $q = 1$ alırsak, tüm q tam sayıların $\mathbb{N}_q$ kümesi tüm doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ ' ye indirgenir (Kac ve Cheung, 2002; Bekar, 2010).

Tanım 1.3.2. $q > 0$ değeri verildiğinde, q - kaydırılmış faktöriyel

$$(a; q)_n = (1 - a)(1 - aq) \dots (1 - aq^{n-1})$$

şeklinde tanımlanır. Tüm $n \geq 1$ için $(a; q)_0 = 1$ olur.

Bunun sonsuz versiyonu ise

$$(a; q)_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} (a; q)_n$$

şeklinde tanımlanır. $r \in \mathbb{N}$ ve belirli bir $q > 0$ değeri için $[r]!$ 'in q - benzeri

$$[r]! = \begin{cases} [r] [r-1] \dots [1] , & r > 1 \\ 1 & r = 0 \end{cases}$$

ile tanımlanır (Kac ve Cheuny, 2002; Bekar, 2010).

Tanım 1.3.3. Herhangi bir $n, k \in \mathbb{Z}$ ve $0 \leq k \leq n$ için q - binom katsayısı

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{(q; q)_n}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}} \quad (1.3.2)$$

şeklinde tanımlanır. (1.3.2)' yi başka şekilde yazacak olursak

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[n-k]! [k]!}$$

ile ifade edilebilir.

$1 \leq j \leq n-1$ olmak üzere Pascal kuralı olarak bilinen iki eşitlik

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix} + q^j \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = q^{n-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix}$$

biçiminde verilir (Kac ve Cheuny, 2002; Bekar, 2010).

Tanım 1.3.4. $(x - a)^n$ nin q - benzeri

$$(x - a)_q^n = \begin{cases} 1 & , \quad n = 0 \\ (x - a)(x - qa) \dots (x - q^{n-1}a) & , \quad n \geq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Kac ve Cheuny, 2002; Bekar, 2010).

Tez boyunca sonlu q - Binom teoremini aşağıdaki biçimde kullanacağız.

$$(x - a)_q^n = \sum_{j=0}^n (-1)^j q^{\frac{j(j-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} a^j x^{n-j}.$$

Son olarak, konuyla ilgili bazı limit örnekleri verelim.

Örnek 1.3.1. $q < 1$ ise,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{[n]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1 - q^n}{1 - q}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q}{1 - q^n} = 1 - q,$$

diğer taraftan eğer $q \geq 1$ ise,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{[n]} = 0$$

dır (Bekar, 2010).

Örnek 1.3.2. $0 < q < 1$ ise,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 - q^n)(1 - q^{n-1}) \dots (1 - q^{n-j+1})}{(1 - q)(1 - q^2) \dots (1 - q^j)} \\ &= \frac{1}{(1 - q)(1 - q^2) \dots (1 - q^j)} \end{aligned}$$

dır (Bekar, 2010).

2. $[\tilde{c}]$ ve $[\tilde{c}_0]$ DİZİ UZAYLARI

2.1. Giriş

Bu bölümde, q - Cesàro dizi uzaylarının bazı temel özelliklerinden bahsedeceğiz.

Klasik 1. mertebeden Cesàro matrisinin q - benzeri Aktuğlu ve Bekar tarafından 2011 yılında yapılan çalışmada her $n, k \in \mathbb{N}$ için $C_1(q^k) = (c_{nk}^1(q^k))$ matrisi $0 < q < 1$ için

$$C_{nk}^1(q^k) = \begin{cases} \frac{q^k}{[n+1]_q}, & (0 \leq k \leq n) \\ 0, & (k > n) \end{cases} \quad (2.1.1)$$

biçiminde tanımlamıştır (Aktuğlu ve Bekar, 2011). (2.1.1)'de $q \rightarrow 1$ iken limite geçildiğinde klasik 1. mertebeden Cesàro matrisi elde edilir. Bu matrisin standart dizi uzayları c ve c_0 üzerindeki etki alanları kullanılarak $[\tilde{c}]$ ve $[\tilde{c}_0]$ q - Cesàro dizi uzayları

$$[\tilde{c}] = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k x_k \text{ mevcut} \right\} \quad (2.1.2)$$

ve

$$[\tilde{c}_0] = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k x_k = 0 \right\} \quad (2.1.3)$$

şeklinde tanımlanmıştır (Demiriz ve Şahin, 2016).

Tanım 1.2.19. yardımıyla bu dizi uzayları $[\tilde{c}] = \{c\}_{C_1(q^k)}$ ve $[\tilde{c}_0] = \{c_0\}_{C_1(q^k)}$ şeklinde tanımlanır.

Şimdi herhangi bir $x = (x_k)$ dizisinin $C_1(q^k)$ – dönüşümünü $y = (y_k^q)$ ile gösterelim ve matris dönüşümü tanımı yardımıyla ifade edelim. Her bir $k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} y_k^q &= C_1(q^k)x = \sum_k c_{nk}^1(q^k)(x_k) \\ &= \sum_{k=0}^n c_{nk}^1(q^k)(x_k) + \sum_{k>n} c_{nk}^1(q^k)(x_k) \\ &= \frac{1}{[k+1]_q} \sum_{j=0}^k q^j x_j \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Yani

$$y_k^q = C_1(q^k)x = \frac{1}{[k+1]_q} \sum_{j=0}^k q^j x_j \quad (2.1.4)$$

dır.

Artık ilk teoremi verebiliriz. İlk teorem bu uzayların lineer uzaylığı hakkındadır.

Teorem 2.1.1. $[\tilde{c}]$ ve $[\tilde{c}_0]$ kümeleri, diziler üzerinde tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre birer lineer uzaydır (Demiriz ve Şahin, 2016).

İspat: $x = (x_k), y = (y_k) \in [\tilde{c}]$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olsun. Bu taktirde

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{[k+1]_q} \sum_{j=0}^k q^j x_j = \alpha$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{[k+1]_q} \sum_{j=0}^k q^j y_j = \beta$$

olacak şekilde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mevcuttur.

Buradan,

$$\begin{aligned}
& \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{[k+1]_q} \sum_{j=0}^k q^j (x_j + y_j) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{[k+1]_q} \sum_{j=0}^k q^j x_j \\
&+ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{[k+1]_q} \sum_{j=0}^k q^j y_j \\
&= \alpha + \beta
\end{aligned}$$

yani $(x + y) \in [\tilde{c}]$ ve

$$\begin{aligned}
& \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{[k+1]_q} \sum_{j=0}^k q^j (\lambda x_j) \\
&= \lambda \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{[k+1]_q} \sum_{j=0}^k q^j x_j \\
&= \lambda \cdot \alpha
\end{aligned}$$

yani $(\lambda \cdot x) \in [\tilde{c}]$ elde edilir. Dolayısı ile $[\tilde{c}]$ kümesi bir lineer uzaydır. $[\tilde{c}_0]$ kümesinin de benzer şekilde ispatı yapılabilir.

Teorem 2.1.2. $[\tilde{c}]$ ve $[\tilde{c}_0]$ dizi uzayları

$$\|x\|_{[\tilde{c}]} = \|x\|_{[\tilde{c}_0]} = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{[k+1]_q} \sum_{j=0}^k q^j x_j \right| \quad (2.1.5)$$

normu ile birer *BK*- uzayıdır (Demiriz ve Şahin, 2016).

İspat : X uzayı c veya c_0 uzaylarından herhangi birini gösterebiliriz. $x = (x_k), y = (y_k)$ dizileri (2.1.4) bağıntısı ile bağlı olsun. $[\tilde{c}_0]$ uzayının Banach uzaylığına bakalım. $[\tilde{c}_0]$ dizi uzayının lineer uzaylığı Teorem 2.1.1 de ispatlanmıştır. Şimdi (2.1.5)'de tanımlanan fonksiyonun norm olduğunu gösterelim.

N1 Aksiyomu $x \in [\tilde{c}_0]$ için

$$\begin{aligned} \|x\|_{[\tilde{c}_0]} = 0 &\Leftrightarrow \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{[k+1]_q} \sum_{j=0}^k q^j x_j \right| = 0 \\ &\Leftrightarrow k \in \mathbb{N} \text{ için } \left| \frac{1}{[k+1]_q} \sum_{j=0}^k q^j x_j \right| \leq 0 \\ &\Leftrightarrow k \in \mathbb{N} \text{ için } \frac{1}{[k+1]_q} \sum_{j=0}^k q^j x_j = 0 \end{aligned}$$

olur. Bu durumda

$$k = 0 \text{ için } \frac{1}{[1]_q} x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 0$$

$$k = 1 \text{ için } \frac{1}{[2]_q} [q^0 x_0 + q^1 x_1] = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

.

.

.

$$k = m \text{ için } \frac{1}{[m+1]_q} \sum_{j=0}^m q^j x_j = 0 \Rightarrow x_m = 0$$

çıkar ki bu bize $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x_k = 0$ olduğunu verir.

N2 Aksiyomu $\forall x, y \in [\tilde{c}_0]$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned}\|\lambda x\|_{[\tilde{c}_0]} &= \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{[k+1]_q} \sum_{j=0}^k q^j (\lambda x_j) \right| \\ &= |\lambda| \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{[k+1]_q} \sum_{j=0}^k q^j x_j \right| \\ &= |\lambda| \|x\|_{[\tilde{c}_0]}\end{aligned}$$

elde edilir.

N3 Aksiyomu $\forall x, y \in [\tilde{c}_0]$ için

$$\begin{aligned}\|x + y\|_{[\tilde{c}_0]} &= \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{[k+1]_q} \sum_{j=0}^k q^j (x_j + y_j) \right| \\ &\leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{[k+1]_q} \sum_{j=0}^k q^j x_j \right| + \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{[k+1]_q} \sum_{j=0}^k q^j y_j \right| \\ &= \|x\|_{[\tilde{c}_0]} + \|y\|_{[\tilde{c}_0]}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|x + y\|_{[\tilde{c}_0]} \leq \|x\|_{[\tilde{c}_0]} + \|y\|_{[\tilde{c}_0]}$$

elde edilir. Böylece (2.1.5)' de tanımlanan dönüşümün norm aksiyomlarının sağladığı gösterilmiştir.

Şimdi ise $[\tilde{c}_0]$ dizi uzayının tamlığını gösterelim. Kabul edelim ki $(x^{(n)})$, $[\tilde{c}_0]$ 'da keyfi bir Cauchy dizisi olsun. Burada $(x^{(n)})$ dizisinin

$$x^{(n)} = (x^{(n)}) = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots)$$

biçiminde olduğuna dikkat edelim. Cauchy dizisinin tanımı gereğince $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyleki $\forall n, m \geq N(\varepsilon)$ için

$$\begin{aligned} \|x^n - x^m\|_{[\tilde{c}_0]} &= \|C_1(q^k)x^n - C_1(q^k)x^m\|_{c_0} \\ &= \sup_{i \in \mathbb{N}} |C_1(q^k)x_i^{(n)} - C_1(q^k)x_i^{(m)}| < \varepsilon \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ise $i = 1, 2, \dots$ ve $n, m \geq N(\varepsilon)$ için

$$|C_1(q^k)x_i^{(n)} - C_1(q^k)x_i^{(m)}| < \varepsilon \quad (2.1.6)$$

olduğu anlamına gelir.

(2.1.6) eşitsizliği bize her bir i için $(C_1(q^k)x_i^{(m)})$ dizisinin $\mathbb{R}$ 'de (veya $\mathbb{C}$ 'de) bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. $\mathbb{R}$ tam olduğundan bu dizi her bir i için

$$\lim_m C_1(q^k)x_i^{(m)} = x_i \quad ; x = (x_i)$$

olacak şekilde bir limite sahiptir. Şimdi (2.1.6) eşitsizliğinde n 'yi sabitleyip $m \rightarrow \infty$ iken limite geçerse

$$|C_1(q^k)x_i^{(n)} - x_i| \leq \varepsilon \quad ; \forall n \geq N$$

elde edilir. Buradan $\forall n \geq N$ için

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} |C_1(q^k)x_i^{(n)} - x_i| \leq \varepsilon \quad (2.1.7)$$

olur ki bu da

$$\|C_1(q^k)x^{(n)} - x\|_{c_0} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

olduğunu gösterir. Yani $(x^{(n)})$ Cauchy dizisi $[\tilde{c}_0]$ 'da yakınsaktır.

İspatı tamamlamak için $x \in [\tilde{c}_0]$ olduğunu göstermeliyiz. (2.1.7)'den $i, j \geq N(\varepsilon)$ için

$$\begin{aligned} |C_1(q^k)x_i - C_1(q^k)x_j| &= |C_1(q^k)x_i - x_i^N + x_i^N - x_j^N + x_j^N - C_1(q^k)x_j| \\ &\leq |C_1(q^k)x_i - x_i^N| + |x_i^N - x_j^N| + |x_j^N - C_1(q^k)x_j| \\ &\leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

olur ki bu $x \in [\tilde{c}_0]$ olduğunu ispatlar. $[\tilde{c}]$ dizi uzayı içinde benzer şekilde ispat yapılabilir.

Teorem 2.1.3. $[\tilde{c}]$ ve $[\tilde{c}_0]$ q -Cesàro dizi uzayları sırasıyla c ve c_0 uzaylarına lineer olarak izomorftur. Yani

$$[\tilde{c}] \cong c \text{ ve } [\tilde{c}_0] \cong c_0$$

dır (Demiriz ve Şahin, 2016).

İspat : İspatı $[\tilde{c}_0]$ dizi uzayı için yapacağız. $[\tilde{c}]$ dizi uzayı için benzer şekilde yapılabilir. $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizileri (2.1.4) bağıntısı ile bağlı olsun.

$[\tilde{c}_0]$ ile c_0 uzaylarının izomorf olduğunu göstermek için $[\tilde{c}_0]$ ile c_0 arasında lineer, birebir ve örten bir dönüşümün varlığını göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} T: [\tilde{c}_0] &\rightarrow c_0 \\ : x &\rightarrow Tx = y_k = \frac{1}{[k+1]_q} \sum_{j=0}^k q^j x_j \end{aligned}$$

dönüşümünü göz önüne alalım. T dönüşümünün lineerliği açıktır.

T dönüşümünün birebir olduğunu gösterelim. Bunu, dönüşümün çekirdeğinin sadece sıfır vektöründen oluştuğunu göstererek yapacağız. $Tx = \theta \Rightarrow x = \theta$ önermesinin sağladığını göstereceğiz.

$Tx = \theta$ olsun. Yani

$$Tx = y_k = \frac{1}{[k+1]_q} \sum_{j=0}^k q^j x_j = \theta$$

olsun. Bu durumda

$$k = 0 \text{ için } \frac{1}{[1]_q} x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 0$$

$$k = 1 \text{ için } \frac{1}{[2]_q} [q^0 x_0 + q^1 x_1] = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

.

.

.

$$k = m \text{ için } \frac{1}{[m+1]_q} \sum_{j=0}^m q^j x_j = 0 \Rightarrow x_m = 0$$

çıkar ki bu bize $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x_k = 0$ olduğunu verir. Dolayısı ile $x = \theta$ elde edilir.

Bu ise T dönüşümünün çekirdeğinin sadece sıfır vektöründen ibaret olduğunu gösterir.

Dolayısı ile T , birebirdir.

Şimdi, T dönüşümünün örten olduğunu gösterelim. $\forall y \in c_0$ için $\exists x \in [\tilde{c}_0]$ elemanının var olduğunu göstereceğiz.

$$Tx = y_k = \frac{1}{[k+1]_q} \sum_{j=0}^k q^j x_j$$

$$y_k [k+1]_q = \sum_{j=0}^k q^j x_j \tag{2.1.8}$$

burada k yerine $k - 1$ alırsak

$$y_{k-1}[k]_q = \sum_{j=0}^{k-1} q^j x_j \quad (2.1.9)$$

(2.1.8) ve (2.1.9) taraf tarafa çıkarılırsa

$$y_k[k+1]_q - y_{k-1}[k]_q = q^k x_k$$

$$x_k = \frac{[k+1]_q}{q^k} y_k - \frac{[k]_q}{q^k} y_{k-1} \quad (2.1.10)$$

olur. (2.1.10) eşitliği ile $x = (x_k)$ dizisini tanımlayalım. Amacımız bu dizinin $[\tilde{c}_0]$ 'da olduğunu göstermektir. Bunun için bu dizinin $C_1(q^k)$ dönüşümüne bakalım:

$$\begin{aligned} \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k x_k &= \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k \left\{ \frac{[k+1]_q}{q^k} y_k - \frac{[k]_q}{q^k} y_{k-1} \right\} \\ &= y_n \end{aligned}$$

Şimdi $n \rightarrow \infty$ iken limite geçilirse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$$

elde edilir. Bu ise $x = (x_k) \in [\tilde{c}_0]$ olduğunu gösterir. Dolayısı ile T , örtendir. T dönüşümünün lineer, birebir ve örten olduğu gösterilmiştir. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Şimdi tanımlanan q -Cesàro dizi uzayları ile ilgili bazı kapsama bağıntılarını verelim.

Teorem 2.1.4. $q \geq 1$ olmak üzere

$$c_0 \subset [\tilde{c}_0]$$

kapsaması kesin olarak sağlanır (Demiriz ve Şahin, 2016).

İspat: Keyfi bir $y \in c_0$ alalım. $q \geq 1$ için $C_1(q^k)$ metodu regüler olduğundan $\forall y \in c_0$ için $C_1(q^k)y \in c_0$ 'dır. Yani

$$y \in [\tilde{c}_0]$$

dır. Dolayısı ile

$$c_0 \subset [\tilde{c}_0]$$

kapsaması sağlanır. Şimdi kapsamanın kesinliğine bakalım. Bunun için $q \geq 1$ genel terimi

$$u_k(q) = \frac{(-1)^k}{q}$$

şeklinde tanımlanan $u = (u_k(q))$ dizisini göz önüne alalım.

Bu taktirde

$$C_1(q^k)u = \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k \frac{(-1)^k}{q} = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{2[n+1]_q}$$

olup $n \rightarrow \infty$ iken limite geçilirse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_1(q^k)u = 0$$

elde edilir. Bu ise $u = (u_k(q)) \in [\tilde{c}_0]$ olduğunu gösterir. Dolayısı ile kapsama kesin olarak sağlanır.

Teorem 2.1.5. $[\tilde{c}_0] \subset [\tilde{c}]$ kapsaması kesin olarak sağlanır (Demiriz ve Şahin, 2016).

İspat: Keyfi bir $y \in [\tilde{c}_0]$ alalım. $c_0 \subset c$ olduğu akılda tutulursa

$$y \in [\tilde{c}_0] \Rightarrow C_1(q^k)y \in c_0$$

$$\Rightarrow C_1(q^k)y \in c$$

$$\Rightarrow y \in [\tilde{c}]$$

elde edilir. Dolayısı ile $[\tilde{c}_0] \subset [\tilde{c}]$ kapsaması geçerlidir.

Kesinlik için $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x = (x_k) = (1)$ dizisini göz önüne alalım. O zaman

$$C_1(q^k)x = \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k x_k = 1$$

olup $n \rightarrow \infty$ iken limite geçilirse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_1(q^k)x = 1$$

elde edilir. Yani $C_1(q^k)x \in c$ 'dir. Bu ise $x = (x_k) \in [\tilde{c}]$ olduğunu gösterir.

2.2. $[\tilde{c}]$ ve $[\tilde{c}_0]$ Dizi Uzaylarının α - ve β - Dualleri

Dual hesabı dizi uzayı çalışmalarının en önemli temel ayaklarından birini oluşturur. Özellikle matris sınıflarının karakterize edilmesinde β - dualin hesabı büyük önem taşır. Çünkü β - dualin hesabı ile dönüşüm dizisinin varlığı garanti edilmiş olur.

Bu kısımda $[\tilde{c}]$ ve $[\tilde{c}_0]$ dizi uzaylarının α - ve β - duallerini vereceğiz. İlk olarak, hesaplamalarda ihtiyaç duyacağımız bazı temel matris dönüşümleri ile ilgili lemmaları verelim.

Lemma 2.2.1. $A \in (c : \ell_1) = (c_0 : \ell_1)$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\sup_{N, K \in F} \left| \sum_{n \in N} \sum_{k \in K} a_{nk} \right| < \infty$$

dır (Stieglitz ve Tietz, 1977). Burada F ile $\mathbb{N}$ 'nin bütün sonlu alt kümelerinin kolleksiyonu belirtilmektedir.

Lemma 2.2.2. $A \in (c : c)$ olması için gerek ve yeter koşul

- i. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = a_k, (k \in \mathbb{N})$
- ii. $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |a_{nk}| < \infty$
- iii. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k a_{nk}$ mevcut.

şartlarının sağlanmasıdır (Stieglitz ve Tietz, 1977).

İlk teorem bu uzayların α - duali ile ilgili olacaktır.

Teorem 2.2.1. $[\tilde{c}]$ ve $[\tilde{c}_0]$ uzaylarının α - duali

$$C_1(q) = \left\{ a = (a_k) \in w : \sup_{N, K \in F} \left| \sum_{n \in N} \sum_{k \in K} (-1)^{n-k} \frac{[k+1]_q}{q^n} a_n \right| < \infty \right\}$$

dır (Demiriz ve Şahin, 2016).

İspat: Herhangi bir $a = (a_n) \in w$ alalım. (2.1.10) eşitliği yardımıyla

$$a_n x_n = \sum_{k=n-1}^n (-1)^{n-k} \frac{[k+1]_q}{q^n} a_n y_k$$

yazılabilir. Burada her $n, k \in \mathbb{N}$ için $B = (b_{nk})$ matrisi

$$b_{nk} = \begin{cases} (-1)^{n-k} \frac{[k+1]_q}{q^n} a_n, & n-1 \leq k \leq n \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa

$$a_n x_n = \sum_{k=n-1}^n (-1)^{n-k} \frac{[k+1]_q}{q^n} a_n y_k = (By)_n \quad (2.2.1)$$

elde edilir. Şimdi tam bu noktada (2.2.1) eşitliğini yorumlayalım: “ $x \in [\tilde{c}_0]$ (veya $[\tilde{c}]$) olduğu zaman $ax = (a_n x_n) \in \ell_1$ olması için gerek ve yeter koşul $y \in c_0$ (veya $y \in c$) olduğunda $By \in \ell_1$ olmasıdır” çift gerektirmesine sahip olduğunu görüyoruz. Yani

$$a = (a_n) \in \{[\tilde{c}_0]\}^a \Leftrightarrow B \in (c_0: \ell_1)$$

olur. Bu ise Lemma 2.2.1 gereğince $[\tilde{c}_0]$ ve $[\tilde{c}]$ uzaylarının α -dualinin $C_1(q)$ olduğunu gösterir. Yani

$$\{[\tilde{c}_0]\}^a = \{[\tilde{c}]\}^a$$

$$= \left\{ a = (a_k) \in w : \sup_{N, K \in F} \left| \sum_{n \in N} \sum_{k \in K} (-1)^{n-k} \frac{[k+1]_q}{q^n} a_n \right| < \infty \right\}$$

dır.

Sıradaki teorem bu uzayların β -dualı hakkındadır.

Teorem 2.2.2. Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\Delta\left(\frac{a_k}{q^k}\right) = \frac{a_k}{q^k} - \frac{a_{k+1}}{q^{k+1}}$$

olmak üzere $C_2(q)$ ve $C_3(q)$ cümlelerini sırasıyla

$$C_2(q) = \left\{ a = (a_k) \in w : \sum_k [k+1]_q \left| \Delta\left(\frac{a_k}{q^k}\right) \right| < \infty \right\}$$

ve

$$C_3(q) = \{ a = (a_k) \in w : ([k+1]_q a_k) \in \ell_\infty \}$$

olarak tanımlayalım. Bu taktirde

$$\{[\tilde{c}]\}^\beta = C_2(q) \cap cs$$

ve

$$\{[\tilde{c}_0]\}^\beta = C_2(q) \cap C_3(q)$$

dır (Demiriz ve Şahin, 2016).

İspat: İspatı sadece $[\tilde{c}]$ için yapacağız. Benzer olarak $[\tilde{c}_0]$ içinde yapılabilir. Abel Kısmi Toplam Formülü yardımıyla elde edilen aşağıdaki eşitliği göz önüne alalım:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k x_k &= \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{q^k} \{ y_k \cdot [k+1]_q - y_{k-1} \cdot [k]_q \} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} [k+1]_q \Delta\left(\frac{a_k}{q^k}\right) y_k + [n+1]_q a_n y_n \end{aligned}$$

Bu eşitlik yardımıyla $T = (t_{nk})$ matrisini her $n, k \in \mathbb{N}$ için

$$t_{nk} = \begin{cases} [k+1]_q \Delta\left(\frac{a_k}{q^k}\right) & , \quad 0 \leq k \leq n-1 \\ [n+1]_q a_n & , \quad k = n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. O zaman

$$\sum_{k=0}^n a_k x_k = (Ty)_n ; \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.2.2)$$

elde edilir. (2.2.2) eşitliğini yorumlayalım: “ $x = (x_k) \in [\tilde{c}]$ olduğu her zaman $ax = (a_k x_k) \in cs$ olması için gerek ve yeter koşul $y = (y_k) \in c$ olduğu her zaman $Ty \in c$ olmasıdır” çift gerektirmesine sahip oluruz. Böylece

$$a = (a_k) \in \{[\tilde{c}]\}^\beta \Leftrightarrow T \in (c:c)$$

elde edilir. Tam bu aşamada Lemma 2.2.2 kullanılırsa

$$\{[\tilde{c}]\}^\beta = C_2(q) \cap cs$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

Bu bölümde, q - Cesàro matrisinin c ve c_0 etki alanları kullanılarak tanımlanan $[\tilde{c}]$ ve $[\tilde{c}_0]$ dizi uzayları tanıtılmıştır. Ayrıca tanıtılan bu uzayların cebirsel ve topolojik özellikleri de detaylı bir şekilde incelenmiştir. Diğer bölümde ise q - Cesàro matrisinin ℓ_p ve ℓ_∞ etki alanları kullanılarak tanımlanan $[\tilde{\ell}_p]$ ve $[\tilde{\ell}_\infty]$ dizi uzayları tanıtılacak olup bu uzayların cebirsel ve topolojik özellikleri de incelenecektir.

3. $[\tilde{\ell}_\infty]$ ve $[\tilde{\ell}_p]$ DİZİ UZAYLARI

3.1. Giriş

Bu bölümde, q - Cesàro dizi uzaylarının bazı temel özelliklerinden bahsedeceğiz. Klasik 1. mertebeden Cesàro matrisinin q - benzeri Aktuğlu ve Bekar tarafından 2011 yılında yapmış olduğu çalışmada her $n, k \in \mathbb{N}$ için $C_1(q^k) = (c_{nk}^1(q^k))$ matrisi $0 < q < 1$ için

$$c_{nk}^1(q^k) = \begin{cases} \frac{q^k}{[n+1]_q}, & (0 \leq k \leq n) \\ 0, & (k > n) \end{cases}$$

biçiminde tanımlanmıştır (Aktuğlu ve Bekar, 2011). Bu matrisin standart dizi uzayları ℓ_∞ ve ℓ_p üzerindeki etki alanları kullanılarak $[\tilde{\ell}_\infty]$ ve $[\tilde{\ell}_p]$ q - Cesàro dizi uzayları

$$[\tilde{\ell}_\infty] = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k x_k < \infty \right\}$$

ve

$$[\tilde{\ell}_p] = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k x_k \right|^p < \infty \right\}, \quad (0 < p < \infty)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu uzayların cebirsel ve topolojik özellikleri ile ilgili teoremleri verebiliriz.

Teorem 3.1.1. $[\tilde{\ell}_\infty]$ ve $[\tilde{\ell}_p]$ kümeleri diziler üzerinde tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre birer lineer uzaydır (Yaying ve ark., 2021).

İspat: $x = (x_k), y = (y_k) \in [\tilde{\ell}_p]$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olsun. Şimdi $\lambda x + y \in [\tilde{\ell}_p]$ olduğunu göstereyim.

Üçgen eşitsizliği ile,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k(\lambda x_k + y_k) \right| &= \left| \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k(\lambda x_k) + \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k(y_k) \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k(\lambda x_k) \right| + \left| \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k(y_k) \right| \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k(\lambda x_k + y_k) \right|^p &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left| \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k(\lambda x_k) \right| + \left| \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k(y_k) \right| \right]^p \end{aligned}$$

yazılabilir. $0 < p < 1$ için Minkowski eşitsizliği ile

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k(\lambda x_k + y_k) \right|^p &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k(\lambda x_k) \right|^p + \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k(y_k) \right|^p \\ &= |\lambda|^p \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k(x_k) \right|^p + \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k(y_k) \right|^p \\ &< \infty \end{aligned}$$

ve $1 \leq p < \infty$ için yine Minkowski eşitsizliğini kullanarak,

$$\begin{aligned}
& \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k (\lambda x_k + y_k) \right|^p \right]^{1/p} \\
& \leq \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k (\lambda x_k) \right|^p \right]^{1/p} + \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k (y_k) \right|^p \right]^{1/p} \\
& = |\lambda| \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k (x_k) \right|^p \right]^{1/p} + \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k (y_k) \right|^p \right]^{1/p} \\
& < \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise, $\lambda x + y \in [\tilde{\ell}_p]$ olduğunu gösterir. Dolayısı ile $[\tilde{\ell}_p]$ kümesi bir lineer uzaydır. $[\tilde{\ell}_\infty]$ kümesi için de benzer şekilde ispatı yapılabilir.

Teorem 3.1.2. $0 < p < 1$ olmak üzere $[\tilde{\ell}_p]$ uzayı

$$\|x\|_{[\tilde{\ell}_p]} = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k x_k \right|^p \quad (3.1.1)$$

normu ile bir p -normlu uzaydır (Yaying ve ark., 2021).

İspat: Bunun için (3.1.1)' de tanımlanan fonksiyonun norm olduğunu gösterelim.

N1 Aksiyomu $x = x_k \in [\tilde{\ell}_p]$ için

$$\begin{aligned}
\|x\|_{[\tilde{\ell}_p]} = 0 & \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k x_k \right|^p = 0 \\
& \Leftrightarrow \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k x_k = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\
& \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n q^k x_k = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\
& \Leftrightarrow x_n = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)
\end{aligned}$$

olduğundan N1 aksiyomu sağlanır.

N2 Aksiyomu $x = x_k \in [\tilde{\ell}_p]$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned}\|\lambda x\|_{[\tilde{\ell}_p]} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k \lambda x_k \right|^p \\ &= |\lambda|^p \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k x_k \right|^p \\ &= |\lambda|^p \|x\|_{[\tilde{\ell}_p]}\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece N2 aksiyomu sağlanır.

N3 Aksiyomu $x, y \in [\tilde{\ell}_p]$ için

$$\begin{aligned}\|x + y\|_{[\tilde{\ell}_p]} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k (x_k + y_k) \right|^p \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k (x_k) + \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k (y_k) \right|^p\end{aligned}$$

Üçgen eşitsizliğin yardımıyla

$$\|x + y\|_{[\tilde{\ell}_p]} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left| \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k (x_k) \right| + \left| \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k (y_k) \right| \right]^p$$

ve Minkowski eşitsizliği yardımıyla

$$\|x + y\|_{[\tilde{\ell}_p]} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k (x_k) \right|^p + \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k (y_k) \right|^p$$

elde edilir ve böylece N3 aksiyomu sağlanır.

Böylece (3.1.1)'de tanımlanan fonksiyonun norm aksiyomlarını sağladığı gösterilmiştir. Şu halde $0 < p < 1$ için $[\tilde{\ell}_p]$ bir normlu uzaydır.

Teorem 3.1.3. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $[\tilde{\ell}_p]$ uzayı

$$\|x\|_{[\tilde{\ell}_p]} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k x_k \right|^p \right)^{1/p} \quad (3.1.2)$$

normu ile bir BK- uzaydır (Yaying ve ark., 2021).

İspat: Bunun için (3.1.2)' de tanımlanan fonksiyonun norm olduğunu gösterelim.

N1 Aksiyomu $x \in [\tilde{\ell}_p]$ olsun Bu durumda,

$$\begin{aligned} \|x\|_{[\tilde{\ell}_p]} = 0 &\Leftrightarrow \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k x_k \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k x_k = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n q^k x_k = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\ &\Leftrightarrow x_n = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

olduğundan N1 aksiyomu sağlanır.

N2 Aksiyomu $\forall x \in [\tilde{\ell}_p]$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned} \|\lambda x\|_{[\tilde{\ell}_p]} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k \lambda x_k \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= |\lambda| \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k x_k \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= |\lambda| \|x\|_{[\tilde{\ell}_p]} \end{aligned}$$

bulunduğundan N2 aksiyomu sağlanır.

N3 Aksiyomu $\forall x, y \in [\tilde{\ell}_p]$ için,

$$\begin{aligned}\|x + y\|_{[\tilde{\ell}_p]} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k (x_k + y_k) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k (x_k) + \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k (y_k) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

Üçgen eşitsizliği yardımıyla

$$\|x + y\|_{[\tilde{\ell}_p]} \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left| \left| \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k (x_k) \right| + \left| \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k (y_k) \right| \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ve Minkowski eşitsizliği yardımıyla

$$\begin{aligned}\|x + y\|_{[\tilde{\ell}_p]} &\leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k (x_k) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k (y_k) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|x\|_{[\tilde{\ell}_p]} + \|y\|_{[\tilde{\ell}_p]}\end{aligned}$$

elde edilir ve dolayısıyla da N3 aksiyomu sağlanmış olur. Bu durumda $[\tilde{\ell}_p]$ bir normlu uzaydır.

Şimdi ise $[\tilde{\ell}_p]$ uzayının (3.1.2)'de tanımlanan norma göre tam olduğunu gösterelim.

Kabul edelim ki $(x^{(n)})$, $[\tilde{\ell}_p]$ 'da keyfi bir Cauchy dizisi olsun. Burada $(x^{(n)})$ dizisinin

$$x^{(n)} = (x^{(n)}) = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots)$$

biçiminde olduğuna dikkat edelim.

Cauchy dizisinin tanımı gereğince $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyleki $\forall n, m \geq N(\varepsilon)$ için

$$\|x^{(n)} - x^{(m)}\|_{[\tilde{\ell}_p]} = \|C_1(q^k)x^{(n)} - C_1(q^k)x^{(m)}\|_{\ell_p} < \varepsilon$$

yazılabilir.

Bu ise $i = 1, 2, \dots$ ve $n, m \geq N(\varepsilon)$ için

$$\begin{aligned} \left| (C_1(q^k)x^{(n)})_i - (C_1(q^k)x^{(m)})_i \right| &\leq \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left| (C_1(q^k)x^{(n)})_i - (C_1(q^k)x^{(m)})_i \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left\| (C_1(q^k)x^{(n)})_i - (C_1(q^k)x^{(m)})_i \right\| < \varepsilon \end{aligned}$$

olduğu anlamına gelir. Böylece her bir i için $(C_1(q^k)x^{(n)})_i$ dizisinin $\mathbb{R}$ 'de (veya $\mathbb{C}$ 'de) bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. $\mathbb{R}$ tam olduğundan bu dizi her bir i için

$$(C_1(q^k)x^{(n)})_i \rightarrow (C_1(q^k)x)_i, \quad (n \rightarrow \infty)$$

yakınsaktır. Şimdi $x \in [\tilde{\ell}_p]$ ve

$$\|x^{(n)} - x\|_{[\tilde{\ell}_p]} \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty)$$

olduğunu gösterelim. $C_1(q^k)x^{(n)} \in \ell_p$ olduğundan

$$\|C_1(q^k)x^{(n)}\|_{\ell_p} \leq M$$

eşitsizliğini sağlayan en az bir $M > 0$ sayısı mevcuttur.

Bu taktirde her bir $t \in \mathbb{N}$ için

$$\left(\sum_{i=0}^t |(C_1(q^k)x^{(n)})_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \|C_1(q^k)x^{(n)}\|_{\ell_p} \leq M$$

yazılabilir.

Önce n , sonra da t üzerinden limit alınırsa

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} |(C_1(q^k)x)_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq M$$

bulunur ki bu ise $x = (x_k) \in [\tilde{\ell}_p]$ olduğunu gösterir.

Şimdi

$$\|x^{(n)} - x\| \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty)$$

olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ verilsin. O zaman,

$$\|C_1(q^k)x^{(n)} - C_1(q^k)x^{(m)}\|_{\ell_p} < \varepsilon, \quad (n, m \geq n_0)$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Böylece herhangi bir $t \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=0}^t |(C_1(q^k)x^{(n)})_i - (C_1(q^k)x^{(m)})_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \|C_1(q^k)x^{(n)} - C_1(q^k)x^{(m)}\|_{\ell_p} \\ &< \varepsilon, \quad (n, m \geq n_0) \end{aligned}$$

olur.

Buradan $m \rightarrow \infty$ için

$$\left(\sum_{i=0}^t |(C_1(q^k)x^{(n)})_i - (C_1(q^k)x^{(m)})_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon, \quad (i \geq n_0)$$

elde edilir. t keyfi olduğundan, $t \rightarrow \infty$ için

$$\|x^{(n)} - x\|_{[\tilde{\ell}_p]} = \|C_1(q^k)x^{(n)} - C_1(q^k)x\|_{\ell_p} \leq \varepsilon, \quad (i \geq n_0)$$

kalır ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.1.4. $[\tilde{\ell}_\infty]$ uzayı

$$\|x\|_{[\tilde{\ell}_\infty]} = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{[k+1]_q} \sum_{j=0}^k q^j x_j \right|$$

normu ile bir BK - uzaydır (Yaying ve ark., 2021).

İspat: Teorem 2.1.2'nin ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 3.1.5. $[\tilde{\ell}_p]$ uzayı, ℓ_p uzayına lineer olarak izomorftur (Yaying ve ark., 2021).

İspat: $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizileri (2.1.4) bağıntısı ile bağlı olsun. $[\tilde{\ell}_p]$ ile ℓ_p uzayları arasında lineer, birebir ve örten bir dönüşümün varlığını göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} T: [\tilde{\ell}_p] &\rightarrow \ell_p \\ : x &\rightarrow Tx = y_k = \frac{1}{[k+1]_q} \sum_{j=0}^k q^j x_j \end{aligned}$$

dönüşümünü göz önüne alalım. T dönüşümünün lineerliği açıktır.

T dönüşümünün birebir olduğunu gösterelim. $Tx = Ty$ olduğunu kabul edelim. $x = y$ olduğunu göstereceğiz. Buna göre;

$$Tx = Ty \Leftrightarrow Tx - Ty = \theta$$

ve T dönüşümü lineer olduğundan $T(x - y) = \theta$ elde edilir.

Bu durumda

$$k = 0 \text{ için } \frac{1}{[1]_q} (x_0 - y_0) = 0 \Rightarrow x_0 = y_0,$$

$$k = 1 \text{ için } \frac{1}{[2]_q} [q^0(x_0 - y_0) + q^1(x_1 - y_1)] = 0 \Rightarrow x_1 = y_1,$$

.

.

.

$$k = m \text{ için } \frac{1}{[m+1]_q} \sum_{j=0}^m q^j (x_j - y_j) = 0 \Rightarrow x_m = y_m$$

çıkar ki bu bize $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x = y$ elde edilir. Bu ise T dönüşümünün birebir olduğunu kanıtlar.

Şimdi, T dönüşümünün örten olduğunu gösterelim. $\forall y \in \ell_p$ için $\exists x \in [\tilde{\ell}_p]$ elemanının var olduğunu göstereceğiz.

$y = (y_k) \in \ell_p$ alalım ve $x = (x_k)$ dizisini (2.1.10)'dan,

$$x_k = \frac{[k+1]_q}{q^k} y_k - \frac{[k]_q}{q^k} y_{k-1}$$

şeklinde tanımlayalım.

Bu durumda; $0 < p < 1$ ve $1 \leq p < \infty$ halleri için,

$$\begin{aligned}
\|x\|_{[\tilde{\ell}_p]} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k x_k \right|^p \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n ([k+1]_q y_k - [k]_q y_{k-1}) \right|^p \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^p = \|y\|_{\ell_p}
\end{aligned}$$

ve

$$\|x\|_{[\tilde{\ell}_p]} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n q^k x_k \right|^p \right)^{1/p} = \|y\|_{\ell_p}$$

elde edilir. Bu ise $x \in [\tilde{\ell}_p]$ olduğunu ve üstelik T dönüşümünün normu koruduğunu gösterir. T dönüşümü örtendir. O halde $[\tilde{\ell}_p]$ uzayı, ℓ_p uzayına lineer olarak izomorftur.

Teorem 3.1.6. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $[\tilde{\ell}_p]$ uzayı $p \neq 2$ iken bir Hilbert uzayı değildir (Yaying ve ark., 2021).

İspat: Bunu göstermek için $[\tilde{\ell}_p]$ üzerindeki normun paralelkenar kuralının sağlamadığını göstereceğiz.

$$u = (u_i) = \left(1, \frac{-(1 + [2]_q)}{q}, \frac{[2]_q}{q^2}, 0, 0, \dots \right), \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

ve

$$v = (v_i) = \left(1, 1, \frac{-[2]_q}{q^2}, 0, 0, \dots\right), \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

dizilerini göz önüne alalım.

Şimdi bu dizilerin $C_1(q^k)$ – dönüşümlerine bakalım.

$$C_1(q^k)u = (C_1(q^k)u_0, C_1(q^k)u_1, \dots)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} C_1(q^k)u_0 &= \frac{1}{[1]_q} \sum_{k=0}^0 q^k u_k \\ &= \frac{1}{[1]_q} \{q^0 u_0\} = \frac{1}{[1]_q} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1(q^k)u_1 &= \frac{1}{[2]_q} \sum_{k=0}^1 q^k u_k \\ &= \frac{1}{[2]_q} \{q^0 u_0 + q^1 u_1\} \\ &= \frac{1}{[2]_q} \left\{1 + q \frac{-(1 + [2]_q)}{q}\right\} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1(q^k)u_2 &= \frac{1}{[3]_q} \sum_{k=0}^2 q^k u_k \\ &= \frac{1}{[3]_q} \{q^0 u_0 + q^1 u_1 + q^2 u_2\} \\ &= \frac{1}{[3]_q} \left\{1 + q \frac{-(1 + [2]_q)}{q} + q^2 \frac{[2]_q}{q^2}\right\} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1(q^k)u_3 &= \frac{1}{[4]_q} \sum_{k=0}^3 q^k u_k \\
&= \frac{1}{[4]_q} \{q^0 u_0 + q^1 u_1 + q^2 u_2 + q^3 u_3\} \\
&= \frac{1}{[4]_q} \left\{ 1 + q \frac{-(1 + [2]_q)}{q} + q^2 \frac{[2]_q}{q^2} + q^3 0 \right\} = 0
\end{aligned}$$

·
·
·

$$C_1(q^k)u = (1, -1, 0, 0, \dots)$$

olduğu görülür. Benzer olarak

$$C_1(q^k)v = (C_1(q^k)v_0, C_1(q^k)v_1, \dots)$$

dizisine bakalım.

$$\begin{aligned}
C_1(q^k)v_0 &= \frac{1}{[1]_q} \sum_{k=0}^0 q^k v_k \\
&= \frac{1}{[1]_q} \{q^0 v_0\} = \frac{1}{[1]_q} = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1(q^k)v_1 &= \frac{1}{[2]_q} \sum_{k=0}^1 q^k v_k \\
&= \frac{1}{[2]_q} \{q^0 v_0 + q^1 v_1\} \\
&= \frac{1}{[2]_q} \{1 + q1\} = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1(q^k)v_2 &= \frac{1}{[3]_q} \sum_{k=0}^2 q^k v_k \\
&= \frac{1}{[3]_q} \{q^0 v_0 + q^1 v_1 + q^2 v_2\} \\
&= \frac{1}{[3]_q} \left\{ 1 + q1 + q^2 \frac{-[2]_q}{q^2} \right\} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1(q^k)v_3 &= \frac{1}{[4]_q} \sum_{k=0}^3 q^k v_k \\
&= \frac{1}{[4]_q} \{q^0 v_0 + q^1 v_1 + q^2 v_2 + q^3 v_3\} \\
&= \frac{1}{[4]_q} \left\{ 1 + q1 + q^2 \frac{-[2]_q}{q^2} + q^3 0 \right\} = 0
\end{aligned}$$

$\cdot$
 $\cdot$
 $\cdot$

$$C_1(q^k)v = (1, 1, 0, 0, \dots)$$

olur.

Diğer taraftan $v + u$ ve $v - u$ dizilerini oluşturalım.

$$\begin{aligned}
v + u &= (v_i + u_i) \\
&= \left(2, \frac{-1 + q - [2]_q}{q}, 0, 0, 0, \dots \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v - u &= (v_i - u_i) \\
&= \left(0, \frac{q + 1 + [2]_q}{q}, \frac{-2[2]_q}{q^2}, 0, 0, \dots \right)
\end{aligned}$$

Bu dizilerin $C_1(q^k)$ - dönüşümlerini hesaplayalım.

$$C_1(q^k)(v + u) = (C_1(q^k)(v_0 + u_0), C_1(q^k)(v_1 + u_1), \dots)$$

$$\begin{aligned}
C_1(q^k)(v_0 + u_0) &= \frac{1}{[1]_q} \sum_{k=0}^0 q^k (v_k + u_k) \\
&= \frac{1}{[1]_q} \{q^0 (v_0 + u_0)\} = \frac{2}{[1]_q} = 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1(q^k)(v_1 + u_1) &= \frac{1}{[2]_q} \sum_{k=0}^1 q^k (v_k + u_k) \\
&= \frac{1}{[2]_q} \{q^0 (v_0 + u_0) + q^1 (v_1 + u_1)\} \\
&= \frac{1}{[2]_q} \left\{ 2 + q \frac{-1 + q - [2]_q}{q} \right\} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1(q^k)(v_2 + u_2) &= \frac{1}{[3]_q} \sum_{k=0}^2 q^k (v_k + u_k) \\
&= \frac{1}{[3]_q} \{q^0 (v_0 + u_0) + q^1 (v_1 + u_1) + q^2 (v_2 + u_2)\} \\
&= \frac{1}{[3]_q} \left\{ 2 + q \frac{-1 + q - [2]_q}{q} + q^2 0 \right\} = 0
\end{aligned}$$

.

.

.

olduğundan

$$C_1(q^k)(v + u) = (2, 0, 0, \dots)$$

elde edilir.

$v - u$ ' nun $C_1(q^k)$ dönüşümüne bakalım.

$$C_1(q^k)(v - u) = (C_1(q^k)(v_0 - u_0), C_1(q^k)(v_1 - u_1), \dots)$$

$$\begin{aligned} C_1(q^k)(v_0 - u_0) &= \frac{1}{[1]_q} \sum_{k=0}^0 q^k (v_k - u_k) \\ &= \frac{1}{[1]_q} \{q^0 (v_0 - u_0)\} = \frac{0}{[1]_q} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1(q^k)(v_1 - u_1) &= \frac{1}{[2]_q} \sum_{k=0}^1 q^k (v_k - u_k) \\ &= \frac{1}{[2]_q} \{q^0 (v_0 - u_0) + q^1 (v_1 - u_1)\} \\ &= \frac{1}{[2]_q} \left\{ 0 + q \frac{q + 1 + [2]_q}{q} \right\} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1(q^k)(v_2 - u_2) &= \frac{1}{[3]_q} \sum_{k=0}^2 q^k (v_k - u_k) \\ &= \frac{1}{[3]_q} \{q^0 (v_0 - u_0) + q^1 (v_1 - u_1) + q^2 (v_2 - u_2)\} \\ &= \frac{1}{[3]_q} \left\{ 0 + q \frac{q + 1 + [2]_q}{q} + q^2 \frac{-2[2]_q}{q^2} \right\} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1(q^k)(v_3 - u_3) &= \frac{1}{[4]_q} \sum_{k=0}^3 q^k (v_k - u_k) \\
&= \frac{1}{[4]_q} \{0\} = 0
\end{aligned}$$

·
·
·

Olduğundan

$$C_1(q^k)(v - u) = (0, 2, 0, 0, \dots)$$

elde edilir.

Şimdi bu bulunan dizileri göz önüne alarak aşağıdaki paralelkenar kuralının sağlanıp sağlanmadığına bakalım:

$$\begin{aligned}
\|v + u\|_{[\tilde{\ell}_p]}^2 + \|v - u\|_{[\tilde{\ell}_p]}^2 &= \|C_1(q^k)(v + u)\|_{\ell_p}^2 + \|C_1(q^k)(v - u)\|_{\ell_p}^2 \\
&= 4 + 4 = 8
\end{aligned}$$

$$\|v\|_{[\tilde{\ell}_p]}^2 = \|C_1(q^k)v\|_{\ell_p}^2 = 2^{2/p}$$

ve

$$\|u\|_{[\tilde{\ell}_p]}^2 = \|C_1(q^k)u\|_{\ell_p}^2 = 2^{2/p}$$

olup

$$2 \left(\|v\|_{[\tilde{\ell}_p]}^2 + \|u\|_{[\tilde{\ell}_p]}^2 \right) = 2 \cdot 2 \cdot 2^{2/p} = 2^{2+2/p}$$

yazılır.

Sonuç olarak

$$\|v + u\|_{[\tilde{\ell}_p]}^2 + \|v - u\|_{[\tilde{\ell}_p]}^2 = 8 \neq 2^{2+\frac{2}{p}} = 2 \left(\|v\|_{[\tilde{\ell}_p]}^2 + \|u\|_{[\tilde{\ell}_p]}^2 \right), \quad (p \neq 2)$$

elde edilir. Bu da paralelkenar eşitliğinin sağlanmadığını gösterir. $(p \neq 2)$ iken $[\tilde{\ell}_p]$ uzayı bir Hilbert uzayı değildir.

Şimdi bu bölümde tanımlanan dizi uzayları ile ilgili bazı kapsama bağıntılarını verelim.

Teorem 3.1.7. $1 \leq p \leq \infty$ için

$$\ell_p \subset [\tilde{\ell}_p]$$

kapsaması sağlanır (Yaying ve ark., 2021).

İspat: $1 \leq p < \infty$ ve $v = (v_r) \in \ell_p$ alalım. $r \in \mathbb{N}$ için Hölder eşitsizliği yardımıyla

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{\infty} |(C_1(q^k)v)_r|^p &\leq \sum_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^r \frac{q^{s-1}}{[r]_q} \right)^p \\ &\leq \sum_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^r \frac{q^{s-1}}{[r]_q} |v_s|^p \right) \left(\sum_{s=1}^r \frac{q^{s-1}}{[r]_q} \right)^{p-1} \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^r \frac{q^{s-1}}{[r]_q} |v_s|^p \right) \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} |v_s|^p \left(q^{s-1} \sum_{r=s}^{\infty} \frac{1}{[r]_q} \right) \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $U = \sup_{r \in \mathbb{N}} \left(\sum_{s=1}^r \frac{q^{s-1}}{[r]_q} \right)$ alınırsa $\|v\|_{[\tilde{\ell}_p]}^p \leq U \|v\|_{\ell_p}^p$ elde edilir. Bu da $\ell_p \subset [\tilde{\ell}_p]$ kapsamasının sağlandığını gösterir.

Teorem 3.1.7. $\ell_\infty \subset [\tilde{\ell}_\infty]$ kapsaması sağlanır (Yaying ve ark., 2021).

İspat: $v = (v_r) \in \ell_\infty$ alalım. Sınırlı dizinin tanımı gereği $\forall r \in \mathbb{N}$ için $|v_r| \leq K$ olacak biçimde bir $K > 0$ sayısı vardır. Böylelikle $r \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} |C_1(q^k)v| &= \left| \frac{1}{[r]_q} \sum_{s=1}^r q^{s-1} v_s \right| \\ &\leq \frac{1}{[r]_q} \sum_{s=1}^r q^{s-1} |v_s| \\ &\leq \frac{K}{[r]_q} \sum_{s=1}^r q^{s-1} = K \\ &\Rightarrow |C_1(q^k)v| \leq K \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $(C_1(q^k)v) \in \ell_\infty$ yani $v \in [\tilde{\ell}_\infty]$ olduğunu gösterir. O halde $\ell_\infty \subset [\tilde{\ell}_\infty]$ kapsaması geçerlidir.

3.2. $[\tilde{\ell}_p]$ ve $[\tilde{\ell}_\infty]$ Dizi Uzaylarının α - ve β - Dualleri

Bu kısımda $[\tilde{\ell}_p]$ ve $[\tilde{\ell}_\infty]$ dizi uzaylarının α - ve β - duallerini verelim. İlk olarak, hesaplamalarda ihtiyaç duyacağımız bazı temel matris dönüşümleri ile ilgili lemmaları verelim.

Lemma 3.2.1. $\Lambda = (\lambda_{ij}) \in (\ell_p, \ell_1)$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\sup_{I \in F} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{i \in I} \lambda_{ij} \right|^{p'} < \infty, \quad (1 < p \leq \infty), \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \right)$$

sağlanmasıdır (Stieglitz ve Tietz, 1977). Burada F ile $\mathbb{N}$ 'nin bütün sonlu alt kümelerinin koleksiyonu belirtilmektedir.

Lemma 3.2.2. $\Lambda = (\lambda_{ij})$ matrisinin (ℓ_p, c) sınıfına ait olması için gerek ve yeter koşul

$$\forall j \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_{ij} \text{ mevcut} \quad (3.2.1)$$

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_{ij}|^{p'} < \infty, (1 < p \leq \infty), \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \right) \quad (3.2.2)$$

şartlarının sağlanmasıdır (Stieglitz ve Tietz, 1977).

Lemma 3.2.3. $\Lambda = (\lambda_{ij})$ matrisinin (ℓ_{∞}, c) sınıfına ait olması için gerek ve yeter koşul (3.2.1) ve ilave olarak

$$\sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_{ij}| < \infty, \quad (3.2.3)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_{ij} - \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_{ij}| = 0. \quad (3.2.4)$$

şartlarının sağlanmasıdır (Stieglitz ve Tietz, 1977).

Teorem 3.2.1. $G = (g_{ij}^q)$ matrisi

$$g_{ij}^q = \begin{cases} (-1)^{i-j} \frac{[j]_q}{q^{i-1}} t_i & , \quad i-1 \leq j \leq i \\ 0 & , \quad j > i \text{ ve } 0 \leq j < i-1 \end{cases} \quad (3.2.5)$$

biçiminde olmak üzere $D_1(q)$ cümlesini

$$D_1(q) = \left\{ t = (t_j) \in w : \sup_{I \in F} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{i \in I} g_{ij} \right|^{p'} < \infty \right\}$$

biçiminde tanımlansın. Bu takdirde

$$\{[\tilde{\ell}_p]\}^a = D_1(q), \quad 1 < p \leq \infty$$

dır (Yaying ve ark., 2021).

İspat: $1 < p \leq \infty$ olsun. $t = (t_j) \in w$ ve $v = (v_j)$ Teorem 3.1.5. de ki gibi tanımlansın.

Aşağıdaki eşitliği göz önüne alalım:

$$t_i v_i = \sum_{j=i-1}^i (-1)^{i-j} \frac{[j]_q}{q^{i-1}} t_i u_j$$

$G = (g_{ij}^q)$ matrisi (3.2.5) eşitliğinde tanımlandığı gibi olmak üzere o zaman yukarıdaki eşitliği her bir $i \in \mathbb{N}$ için

$$t_i v_i = (Gu)_i, \quad (3.2.6)$$

yazabiliriz. Şimdi (3.2.6) eşitliğini yorumlayalım: $v = (v_j) \in [\tilde{\ell}_p]$ olduğu zaman $tv = (t_i v_i) \in \ell_1$ olması için gerek ve yeter koşul $u = (u_j) \in \ell_p$ olduğunda $(Gu) \in \ell_1$ olmasıdır.

Bu ise

$$t = (t_i) \in \{[\tilde{\ell}_p]\}^a \Leftrightarrow G \in (\ell_p, \ell_1)$$

çift gerektirmesine sahip olduğumuzu gösterir. Tam bu noktada Lemma 3.2.1. kullanılırsa

$$\{[\tilde{\ell}_p]\}^a = D_1(q), \quad 1 < p \leq \infty$$

elde edilir.

Teorem 3.2.2.

$$\Delta(t_j, q^j) = \left(\frac{t_j}{q^{i-1}} - \frac{t_{j+1}}{q^j} \right)$$

olmak üzere $D_2(q), D_3(q)$ ve $D_4(q)$ cümleleri sırasıyla

$$D_2^{(p')}(q) = \left\{ t = (t_j) \in w : \sum_{j=1}^{\infty} |\Delta(t_j, q^j)[j]_q|^{p'} < \infty \right\}$$

$$D_3(q) = \left\{ t = (t_j) \in w : \sup_j \left| \frac{t_j}{q^{j-1}} [j]_q \right| < \infty \right\}$$

ve

$$D_4(q) = \left\{ t = (t_j) \in w : \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{t_j}{q^{j-1}} [j]_q = 0 \right\}$$

olarak tanımlansın. Bu taktirde

$$\{[\tilde{\ell}_p]\}^\beta = D_2^{(p')}(q) \cap D_3(q)$$

ve

$$\{[\tilde{\ell}_\infty]\}^\beta = D_2^{(1)}(q) \cap D_4(q)$$

dır (Yaying ve ark., 2021).

İspat: $t = (t_j) \in w$ ve $v = (v_j)$ Teorem 3.1.5. de ki gibi tanımlansın. $H(q) = (h_{ij}^q)$ matrisi

$$h_{ij}^q = \begin{cases} \Delta(t_j, q^j)[j]_q & (0 \leq j < i), \\ \frac{t_j}{q^{i-1}} [j]_q & (j = i), \\ 0 & (j > i). \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmak üzere her bir $i \in \mathbb{N}$ için Abel Kısmi Toplama Formülü kullanılarak elde edilen aşağıdaki eşitliği göz önüne alalım.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^i t_j v_j &= \sum_{j=1}^i t_j \left(\sum_{l=j-1}^i (-1)^{j-l} \frac{[l]_q}{q^{j-1}} u_l \right) \\
&= \sum_{j=1}^{i-1} [j]_q \left(\frac{t_j}{q^{j-1}} - \frac{t_{j+1}}{q^j} \right) u_j + \frac{[i]_q}{q^{j-1}} u_i t_i \\
&= \sum_{j=1}^{i-1} \Delta(t_j, q^j) [j]_q u_j + \frac{[i]_q}{q^{j-1}} u_i t_i \tag{3.2.7}
\end{aligned}$$

$$= (H(q)u) \tag{3.2.8}$$

(3.2.8) eşitliğini yorumlayalım. $v = (v_j) \in [\tilde{\ell}_p]$ olduğu zaman $tv = (t_j v_j) \in cs$ olması için gerek ve yeter koşul $u = (u_j) \in \ell_p$ olduğunda $(H(q)u) \in c$ olmasıdır. Buradan

$$t = (t_j) \in \{[\tilde{\ell}_p]\}^\beta \Leftrightarrow H(q) \in (\ell_p, c), (1 < p < \infty)$$

çift gerektirmesine sahip oluruz.

Tam bu noktada Lemma 3.2.2'nin (3.2.1) ve (3.2.2) şartlarını sırasıyla uyguladığımızda

$$\lim_{i \rightarrow \infty} h_{ij}^q = \Delta(t_j, q^j) [j]_q,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\Delta(t_j, q^j) [j]_q|^{p'} < \infty,$$

$$\sup_j \left| \frac{t_j}{q^{j-1}} [j]_q \right| < \infty.$$

koşullarını elde ederiz. Bu ise bize

$$\{[\tilde{\ell}_p]\}^\beta = D_2^{(p')}(q) \cap D_3(q)$$

olduğunu gösterir.

$p = \infty$ olması durumunda $H(q)$ matrisi (ℓ_∞, c) sınıfına ait olacaktır. Bu durumda Lemma 3.2.3 kullanılırsa

$$\{[\tilde{\ell}_\infty]\}^\beta = D_2^{(1)}(q) \cap D_4(q)$$

elde edilir.

KAYNAKÇA

- Aktuglu, H. ve Bekar, Ş., 2011. q – Cesàro matrix and q – statistical convergence. J. Comput. Appl. Math., 235, 4717-4723.
- Altay, B. ve Başar, F., 2002. On the paranormed Riesz sequence spaces of non-absolute type. Southeast Asian Bull. Math., 26:701-715.
- Altay, B. ve Başar, F., 2005. Some Euler sequence spaces of non-absolute type. Ukrainian Math. J., 57(1):1-17.
- Aydın, C. ve Başar, F., 2004. On the new sequence spaces which include the spaces c_0 and c . Hokkaido Math. J., (33)383–398.
- Aydın, C. ve Başar, F., 2005. Some new sequence spaces which include the spaces ℓ_p and ℓ_∞ , Demonstratio Math., 38(3):641-656.
- Başar, F., 1999. Infinite matrices and Cesàro sequence spaces of non-absolute type. Math. J. Ibaraki Univ. 31.
- Bekar, Ş., 2010. q – Matrix Summability Methods (Doktora Tezi), Eastern Mediterranean University, Famagusta.
- Boss, J. ve Peter, C., 2000. Classical and Modern Methods in Summability, Oxford University Press. 586 p, Canada.
- Bustoz, J., Gordillo, L. ve Luis, F., 2005. q -Hausdorff summability, J. Comput. Anal. Appl. 7(1) 35–48.
- Demiriz, S. ve Şahin, A., 2016. q -Cesàro sequence spaces derived by q -analogue. Advances in Mathematics Scientific Research, 5(2), 97-110.
- Kac, V. ve Cheuny, P., 2002. Quantum Calculus, Springer- Verlag.
- Kreyszig, E., 1980. Introduction to Functional with Applications Analysis. Jhom Willey and Sons, New York.
- Maji, A. ve Srivastava, P.D., 2014. On operator ideals using weighted Cesàro sequence space. J. Egypt. Math. Soc., 22, 446–452.
- Malkowsky, E., 1997. Recent results in the theory of matrix transformations in sequence spaces, Mat. Vesn. 49 187–196.
- Malkowsky, E., 2001. FK spaces, matrix transformations and the Hausdorff measure of noncompactness, Seminar, Van, Turkey.
- Mursaleen, M., Başar, F. ve Altay B., 2006. On the Euler sequence spaces which include the spaces ℓ_p and ℓ_∞ II, Nonlinear Anal., 65, 707–717.
- Nanda, S., 1983. Matrix Transformations and Sequence Spaces, International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italy.
- Ng, P.-N. ve Lee, P.-Y., 1978. Cesaro sequences spaces of non-absolute type, Comment Math. Prace. Mat., 20(2):429-433.
- Polat, H. ve Basar, F., 2007. Some Euler spaces of difference sequences of order $\cdot$, Acta Math. Sci., 27B(2):254-266.
- Selmanogullari, T., Savaş, E. ve Rhoades, B.E., 2011. On q -Hausdorff matrices, Taiwan. J. Math., 15(6) 2429–2437.
- Stieglitz, M. ve Tietz, H., 1977. Matrix transformationen von folgenräumen eine ergebnisübersicht, Math. Z. 154, 1-16.
- Şuhubi, E.S., 2001. Fonksiyonel Analiz, İTÜ Vakfı Yayınları.
- Şengönül, M. ve Başar, F., 2005. Some new Cesàro sequence spaces of non-absolute type which include the spaces c_0 and c , Soochow J. Math., 31(1)107–119.

- Tripathy, B.C., Esi, A. ve Tripathy, B., 2005. On a new type of generalized difference Cesàro sequence spaces, *Soochow J. Math.*, 31(3) 333–340.
- Yaying, T., Hazarika, B. ve Mursaleen, M., 2021. On sequence space derived by the domain of q -cesàro matrix in ℓ_p space and the associated operator ideal, *J. Math. Anal. Appl.* 493 (1) 1–17, doi:10.1016/j.jmaa.2020.124453.
- Yaying, T., Hazarika, B. ve Mursaleen, M., 2021. On generalized (p, q) – Euler matrix and associated suquence spaces. *J. Funct. Spaces.*, 8899960.
- Yaying, T., Hazarika, B., Tripathy, B.C. ve Mursaleen, M., 2022. The spectrum of second order quantum difference operatör. *Symmetry*, 14, 557.
- Yaying, T., Hazarika, B. ve Mohiuddine, S.A., 2022. Domain of Padovan q – difference matrix in squence spaces ℓ_p and ℓ_∞ , *Filomat*, 36, 905-919.
- Yaying, T. ve Mohiuddine, S.A., 2022. A Study on q-Euler Difference Sequence Spaces. *Approximation Theory, Sequence Spaces and Applications*, 257-273
- Yildirim, M.E., 2020. The spectrum and fine spectrum of q -Cesàro matrices with $0 < q < 1$ on c_0 , *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 41(3) 361–377.
- Wang, C.-S., 1978. On Norlund sequence spaces, *Tamkang J. Math.*, 9:269-274.
- Wilansky, A., 1984. *Summability Through Functional Analysis*, North-Holland Mathematics Studies 85, Amsterdam-Newyork-Oxford.