

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

q -FARK OPERATÖRÜ VE q^{-1} -HİPONORMALLIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Coşkun SARAL

EKİM 2020
TRABZON



KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

q -FARK OPERATÖRÜ VE q^{-1} -HİPONORMALLIĞI

Coşkun SARAL

ORCID : 0000 -0002 - 4274 - 189x

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
"YÜKSEK LİSANS (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 09 / 09 / 2020

Tezin Savunma Tarihi : 02 / 10 / 2020

Tez Danışmanı : Dr. Öğr. Üyesi Meltem SERTBAŞ
ORCID : 0000 -0001 - 9606 - 951x

Trabzon 2020

ÖNSÖZ

Lisans ve yüksek lisans öğrenimim süresince, değerli zamanını ayırarak bilgi ve deneyimlerini paylaşan, tezin bu hale gelmesinde her türlü yardımını ve desteğini esirgemeyen değerli danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Meltem SERTBAŞ'a teşekkür eder saygılarımı sunarım. Ayrıca bu güne gelene kadar bilgilerini benden esirgemeyen tüm bölüm hocalarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Eğitim ve öğretim hayatım boyunca desteklerini benden esirgemeyen ve her zaman yanımda olan aileme sonsuz teşekkürlerimi ve minnetlerimi sunarım.



TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Yüksek lisans olarak sunduğum “ q -FARK OPERATÖRÜ VE q -HİPONORMALLIĞI” başlıklı bu çalışmayı baştan sona danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Meltem SERTBAŞ’ın sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 02.10.2020



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET	VI
SUMMARY	VII
SEMBOLLER DİZİNİ	VIII
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Metrik Uzaylar ve Lineer Uzaylar	2
1.3. Normlu Vektör Uzayları	5
1.4. İç Çarpım Uzayları ve HİLBERT Uzayları	7
1.5. Lineer Operatörler ve Temel Spektral Özellikler.....	10
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR VE BULGULAR	24
2.1. $L_q^2(0,1)$ Uzayı ve q -Fark Operatörü.....	24
2.2. $L_q^2(0, +\infty)$ Uzayı ve q -Fark Operatörü.....	39
2.3. $L_q^2(\mathbb{R})$ Uzayı ve q -Fark Operatörü	47
3. SONUÇLAR	54
4. ÖNERİLER.....	55
5. KAYNAKLAR	56
ÖZGEÇMİŞ	

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

q -FARK OPERATÖRÜ VE q^{-1} –HİPONORMALLIĞI

Coşkun SARAL

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Meltem SERTBAŞ
2020, 58 sayfa

Bu tez çalışmasında, q -fark operatörü ifadesinin formal eşleniği, tanımladığı minimal ve maksimal operatörler ve bu operatörlerin spektral problemleri $L_q^2(0,1), L_q^2(0, +\infty)$ ve $L_q^2(\mathbb{R})$ Hilbert uzaylarında ele alınmıştır. Ayrıca bu uzaylarda q^{-1} -fark ifadesi tarafından tanımlanan minimal operatörünün q^{-1} -formal normalliği ve q^{-1} -hiponormalliği incelenip q^{-1} -normal genişlemelerinin varlığı problemi de tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: q -türev, minimal ve maksimal operatörler, q -formal normal operatör, q - normal operatör, q -hiponormal operatör, spektrum.

Master Thesis

SUMMARY

q -DIFFERENCE OPERATOR AND q^{-1} -HYPONORMALITY

Coşkun SARAL

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Dr. Öğr. Üyesi Meltem SERTBAŞ
2020, 58 pages

In this thesis, the minimal and maximal operators generated by q -derivative operator expression, the adjoints of the minimal and maximal operators and the spectral problems of these operators are dealt on the Hilbert spaces $L_q^2(0,1)$, $L_q^2(0, +\infty)$ ve $L_q^2(\mathbb{R})$. In addition, the q^{-1} -formal normality and q^{-1} -hyponormality of the minimal operator defined by the q -derivative operator expression are examined and the problem apart from the q^{-1} -normal extensions is also discussed in these Hilbert spaces.

Keywords: q -derivative, minimal and maximal operators, q -formal normal operator, q -normal operator, q -hyponormal operator, spectrum.

SEMBOLLER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
$R(A)$	A operatörünün görüntü kümesi
$\bar{X}$	X kümesinin kapanışı
$\ \cdot \ _X$	X üzerinde tanımlı norm
$X \times Y$	X ve Y kümelerinin Kartezyen çarpımı
$(\cdot, \cdot)_H$	H üzerinde tanımlı iç çarpımı
$L(X, Y)$	X uzayından Y uzayına tanımlı tüm sürekli lineer operatörler kümesi
$C[a, b]$	$[a, b]$ aralığında tanımlı sürekli fonksiyonlar kümesi
$\dim X$	X lineer uzayının boyutu
A^{-1}	A operatörünün tersi
A^*	A operatörünün eşleniği
$A^{1/2}$	A operatörünün karekökü
$ A $	$ A = (A^* A)^{1/2}$
$\text{Ker} A$	A operatörünün çekirdeği
$\rho(A)$	A operatörünün rezolvent kümesi
$\sigma_c(A)$	A operatörünün sürekli spektrumu
$\sigma_r(A)$	A operatörünün kalan spektrumu
$\sigma_p(A)$	A operatörünün noktasal (ayrık) spektrumu
$\sigma(A)$	A operatörünün spektrumu
$R_\lambda(A)$	A operatörünün rezolvent operatör

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

q -Analizinin gelişimi 1740'larda, L. Euler in toplam analitik sayı teorisi olarak da adlandırılan bölümler teorisini başlatmasıyla başladı [15]. L. Euler, Latince yazdığı ve derlediği eserleri ancak 1800'lerin başında yayınlandı. q -Analizin ilerlemesi, 1813'de hipergeometrik seriler ve bunların birbiriyle olan ilişkilerini veren C.F. Gauss altında devam ettirildi [19]. C.F. Gauss daha sonra q -binom katsayılarını tanımlayarak onlar için q -analizinin temelini oluşturan bir özdeşliği ispatlamıştır. Bu, Schweins q -binom teoreminin özel bir durumu olan Rothe-von Gruson teoremidir.

P.A. MacMahon q serisini kombinatoriyal üretim fonksiyonları olarak kullandı ve simetrik grubun temsil teorisinde, Lie cebirlerinin kök sistemlerinde vb. uygulamalara yol açacak bir çalışmayı başlattı [2]. 1929'da G.N. Watson, Jacksons'un Dougalls toplama formülünün q -analouğuna eşdeğer olduğunu ortaya koyan ve aynı zamanda ilk anlaşılır kanıtını veren çok iyi dengelenmiş bir q serisi için bir dönüşüm formülü olduğunu kanıtladı [45]. E. Kummer in formülünün bir q -analogu [4], W.N Bailey 1941 ve J.A Daum 1942 tarafından bağımsız olarak kanıtlandı [6-13]. Bu, argümenti -1 bir q -hipergeometrik seri için bir toplama formülünün ilk örneklerinden biriydi.

L. Euler den beri 300 yıldır devam eden kuantum hesabı veya q -analizin incelenmesi, genellikle matematikte uğraşılması en zor konulardan biri olarak kabul edilmiştir. Günümüzde; matematik, mekanik ve fizik gibi çeşitli alanlardaki uygulamaları nedeniyle q -analiz alanındaki çalışmalarda hızlı bir ilerleme kaydedilmektedir. q -Analizinin çalışma tarihinde kuantum mekaniği, analitik sayı teorisi, teta fonksiyonları, hipergeometrik fonksiyonlar, sonlu farklar teorisi, gama fonksiyon teorisi, Bernoulli ve Euler polinomları, Mock teta fonksiyonları, kombinatoriklerde çok çeşitli uygulamaları mevcuttur.

L. Biedenharn [5] ve A. Macfarlane'nin [34] çalışmalarından, ilk olarak geçen yüzyılın başında F. Jackson [24] tarafından temel hipergeometrik fonksiyon çalışmasında ortaya konmuş olan q -analizinin, kuantum gruplarının gösteriminde temel bir rol oynadığı açıktır [16]. Aslında, deforme olmuş Jackson türevi veya sözde q -türevi operatörü [17-18] kullanılarak q -osilatörlerin Fock uzayının "koordinat" gerçekleştirilmesinin mümkün olduğu gösterilmiştir. Özellikle, E. Celeghini ve arkadaşları [8], kuantum Weyl-Heisenberg

cebirini, Fock-Bargmann gösterimi çerçevesinde incelemişler ve sıkıştırılmış durumların daha derin bir matematiksel anlayışını, tutarlı durumlar arasındaki ilişkiyi, kuantum mekaniği kafeslerini ve Bloch fonksiyonlarına izin veren tüm analitik fonksiyonları çalışmalarında göstermişlerdir.

q -deforme edilmiş cebirin termodinamiğin gerçekleştirilmesinin q -hesabının formalizasyonu üzerine inşa edilebileceğini gösterilmiştir. Sıradan termodinamik türev yerine uygun bir Jackson türevi kullanılırsa, termodinamiğin tüm yapısının korunduğu bulunmuştur [33].

q -normal, q -formal normal, q -hiponormal, q -yarınormal, q -altnormal ve q -formal altnormal operatörler sınıfları S. Ota tarafından tanımlanmıştır. Ayrıca V. Ostrovsky, Y. Samoilenko, S. Ota ve F.H. Szafraniec bu operatör sınıflarının bazı problemlerini ele almışlardır [36, 37, 38, 39]. Bu operatörlere genel olarak q -deforme operatörler de denilmektedir. Bu operator sınıfları kuantum grup teorisinde ortaya çıkmaktadır [9, 23, 30].

M.H. Annaby ve Z.S. Mansour, $L_q^2(0, a)$, $a > 0$ daki Sturm-Liouville problemlerinin bir q analogunu araştırdı [3]. $L_q^2(0,1)$ deki fonksiyonların tanım kümelerini $[0, qa]$ aralığına genişleterek q -fark ifadesinin formal eşleniğini yazdı. Fakat yoğun tanımlanan operatörlerin her zaman eşlenik operatöre sahip olduğundan, bu gerekli değildi. Bu tez çalışmasında, q -fark operatörü tarafından tanımlanan minimal ve maksimal operatör, bu minimal ve maksimal operatörlerin eşlenikleri ve spektral problemleri $L_q^2(0,1)$, $L_q^2(0, +\infty)$ ve $L_q^2(\mathbb{R})$ Hilbert uzaylarında ele alınmıştır. Ayrıca bu uzaylarda q -fark operatörünün tanımladığı minimal operatörünün q -formal normallliği ve q -hiponormallliği incelenip q -normal genişlemelerinin varlığı problemi de tartışılmıştır.

1.2. Metrik Uzaylar ve Lineer Uzaylar

Tanım 1.2.1 (Metrik Uzay, ([40], s.11)): X boştan farklı bir küme ve

$$d: X \times X \rightarrow [0, +\infty), (x, y) \rightarrow d(x, y)$$

bir fonksiyon olsun. Eğer d fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için

- i. $d(x, y) = 0$ ancak ve ancak $x = y$ (özdeşlik aksiyomu)
- ii. $d(x, y) = d(y, x)$ (simetrik aksiyomu)
- iii. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa ona X kümesi üzerinde bir uzaklık fonksiyonu veya metrik, (X, d) ikilisine bir metrik uzay ve yukarıda verilen i.)-iii.) özelliklerine ise metrik aksiyomları denir.

Tanım 1.2.2 (Ayrılabilir Metrik Uzay, ([40], s.19)): (X, d) bir metrik uzay olsun. Eğer bu metrik uzayın sayılabilir yoğun altkümesi var ise bu metrik uzaya ayrılabilir metrik uzay denir.

Tanım 1.2.3 (Lineer (Vektör) Uzay, ([40], s.3)): X boştan farklı bir küme ve K ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) bir cisim olsun.

$$+ : X \times X \rightarrow X, (x, y) \rightarrow x + y, x, y \in X$$

$$\cdot : K \times X \rightarrow X, (\alpha, x) \rightarrow \alpha \cdot x, \alpha \in K, x \in X$$

dönüşümleri ile toplama ve çarpma işlemleri denilen işlemler tanımlansın. Bu işlemler her $x, y, z \in X$ ve her $\alpha, \beta \in K$ için

- (1) $x + y = y + x$
- (2) $x + (y + z) = (x + y) + z$
- (3) $x + 0 = x$ bağıntısını sağlayan bir tek $0 \in X$ elemanı vardır
- (4) $x + (-x) = 0$ bağıntısını sağlayan bir tek $-x \in X$ elemanı vardır
- (5) $1 \cdot x = x$
- (6) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$
- (7) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
- (8) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$

koşulları sağlanıyor ise X kümesine K cismi üzerinde bir lineer uzay (vektör uzayı) denir.

Örnek 1.2.4:

$$l^p(\mathbb{N}) := \left\{ x = (x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}, p \geq 1,$$

uzayı $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n, \dots)$ ve $\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n, \dots)$, $x, y \in l_p(\mathbb{N})$, $\lambda \in K(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ işlemleri altında bir vektör uzayıdır.

Gerçekten, her $x = (x_n), y = (y_n), z = (z_n) \in l^p(\mathbb{N})$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

- (1) $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n, \dots) = (y_1 + x_1, \dots, y_n + x_n, \dots) = y + x.$
- (2) $x + (y + z) = (x_1 + (y_1 + z_1), \dots, x_n + (y_n + z_n), \dots)$
 $= ((x_1 + y_1) + z_1, \dots, (x_n + y_n) + z_n, \dots) = (x + y) + z.$
- (3) $0_{l^p} = (0, \dots, 0, \dots)$ olmak üzere

$$x + 0_{l^p} = (x_1 + 0, \dots, x_n + 0, \dots) = (x_1, \dots, x_n, \dots) = x.$$

(4) $-x = (-x_1, \dots, -x_n, \dots)$ olmak üzere

$$x + (-x) = (x_1 + (-x_1), \dots, x_n + (-x_n)) = (0, \dots, 0, \dots) = 0_{l^p}.$$

(5) Her $x \in l^p(\mathbb{N})$ için

$$(1).x = (1.x_1, \dots, 1.x_n, \dots) = (x_1, \dots, x_n, \dots) = x.$$

(6) $\alpha(x + y) = \alpha(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n, \dots) = ((\alpha(x_1 + y_1), \dots, \alpha(x_n + y_n), \dots))$

$$= (\alpha x_1 + \alpha y_1, \dots, \alpha x_n + \alpha y_n, \dots)$$

$$= (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n, \dots) + (\alpha y_1, \dots, \alpha y_n, \dots)$$

$$= \alpha(x_1, \dots, x_n, \dots) + \alpha(y_1, \dots, y_n, \dots) = \alpha x + \alpha y.$$

(7) $(\alpha + \beta)x = ((\alpha + \beta)x_1, \dots, (\alpha + \beta)x_n, \dots) = (\alpha x_1 + \beta x_1, \dots, \alpha x_n + \beta x_n, \dots)$

$$= (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n, \dots) + (\beta x_1, \dots, \beta x_n, \dots)$$

$$= \alpha(x_1, \dots, x_n, \dots) + \beta(x_1, \dots, x_n, \dots)$$

$$= \alpha x + \beta x.$$

(8) $(\alpha\beta)x = ((\alpha\beta)x_1, \dots, (\alpha\beta)x_n, \dots) = (\alpha(\beta x_1), \dots, \alpha(\beta x_n), \dots)$

$$= \alpha(\beta x_1, \dots, \beta x_n, \dots) = \alpha(\beta(x_1, \dots, x_n, \dots))\alpha(\beta x).$$

Benzer şekilde gösterilebilir ki $l^p(\mathbb{Z}), p \geq 1$ uzayı da bir vektör uzayıdır.

Tanım 1.2.5 (Lineer Manifold, ([40], s.3)): X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun ve Y , X in bir boş olmayan altkümesi olsun. Y , X in lineer uzayındaki cebirsel işlemlere göre kendi başına bir lineer uzay oluşturuyorsa Y ye X de bir lineer manifold (veya X in bir lineer altuzayı) denir.

Y altkümesinin vektör altuzay olduğunu anlamak için $x, y \in Y$ ve $\alpha, \beta \in K$ için $\alpha x + \beta y \in Y$ olması yeterlidir (altuzay testi).

Örnek 1.2.6: $X \subset l^p(K), p \geq 1$ olmak üzere $X := \{(x_n) \in l^p(K) : (x_n) = (0, x_2, x_3, \dots)\}$ kümesi $l^p(K)$ de bir lineer manifolddur.

Gerçekten, $(x_n) = (0, x_2, x_3, \dots), (y_n) = (0, y_2, y_3, \dots) \in X$ ve $\alpha, \beta \in K$ olmak üzere

$$(\alpha x_n + \beta y_n) = (0, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3, \dots) = (0, \alpha x_2, \alpha x_3, \dots) + (0, \beta y_2, \beta y_3, \dots)$$

$$= \alpha(0, x_2, x_3, \dots) + \beta(0, y_2, y_3, \dots) = \alpha(x_n) + \beta(y_n)$$

olduğundan X kümesi bir lineer manifolddur.

Tanım 1.2.7 ([40], s.4): X bir vektör uzayı, $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\} \subset X, n \geq 1, n \in \mathbb{N}$, sonlu bir küme ve $M \subset X$ boştan farklı keyfi bir küme olsun. Keyfi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ skalerleri için

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \dots + \alpha_n v_n \in V$$

yazımına V nin elemanlarının bir lineer kombinasyonu denir. Eğer,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

eşitliği ancak ve ancak

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0$$

olması halinde gerçekleşiyor ise $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ kümesine lineer bağımsız, aksi halde lineer bağımlı denir.

M nin her sonlu altkümeleri lineer bağımsız ise M ye lineer bağımsız, aksi halde M ye lineer bağımlı denir. M nin tüm sonlu altkümelerinin tüm lineer kombinasyonlarının kümesine M nin gereni (spanı) denir ve $SpanM$ ile gösterilir.

Eğer V lineer bağımsız ve $SpanV = X$ ise V ye X in bir bazı denir. Eğer X in sonlu bir bazı var ise bu bazın eleman sayısına X in boyutu denir ve $dimX$ ile gösterilir. X in sonlu bir bazı yok ise X e sonsuz boyutlu denir.

Örnek 1.2.8: $l^p(\mathbb{N}), p \geq 1$, uzayı

$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n, \dots)$ ve $\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n, \dots)$, $x, y \in l^p(\mathbb{N}), \lambda \in K(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ işlemleri altında bir vektör uzayı olup

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0, \dots), e_2 = (0, 1, \dots, 0, \dots), \dots, e_n = \left(0, 0, \dots, \underbrace{1}_{n.terim}, 0, \dots\right), \dots$$

vektörler ailesi $l^p(\mathbb{N})$ nin bir tabanıdır. Buradan $dim(l^p) = \infty$ dur. Yani $l^p(\mathbb{N})$ vektör uzayı sonsuz boyutludur.

1.3. Normlu Vektör Uzayları

Tanım 1.3.1 (Normlu Lineer Uzay, ([40], s.31)): X , K cismi üzerinde tanımlı bir lineer uzay olsun. Eğer

$$\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow \|x\|$$

dönüşümü her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in K$ için

$$(N_1) \quad \|x\| \geq 0$$

$$(N_2) \quad \|x\| = 0 \text{ ancak ve ancak } x = 0$$

$$(N_3) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$(N_4) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ (üçgen eşitsizliği)}$$

özelliklerini sağlıyorsa $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow \|x\|$ dönüşümüne X üzerinde norm ve bu durumda $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine bir lineer normlu uzayı veya normlu uzay adı verilir. Yukarıda verilen $(N_1) - (N_4)$ özelliklerine norm aksiyomları denir.

Örnek 1.3.2 ([40], s.35):

$$l^\infty(\mathbb{N}) := \left\{ (x_n) : x_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N} \text{ ve } \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < +\infty \right\}$$

lineer uzayı

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|, x = (x_n) \in l^\infty(\mathbb{N})$$

fonksiyonu altında bir normlu uzaydır ve bu norma $l^\infty(\mathbb{N})$ üzerindeki standart norm adı verilir.

Gerçekten,

(N_1) Her $x = (x_n) \in l^\infty(\mathbb{N})$ için $|\cdot| \geq 0$ olduğundan

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| \geq 0$$

olur.

(N_2) Bir $x = (x_n) \in l^\infty(\mathbb{N})$ için

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| = 0$$

ise her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = 0$ yani $x = 0_{l^\infty}$ olur. Tersine $x = 0_{l^\infty}$ ise $x_n = 0$ yani

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| = 0$$

olur.

(N_3) Her $x = (x_n) \in l^\infty(\mathbb{N})$ ve her $\alpha \in \mathbb{C}$ için

$$\|\alpha x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\alpha x_n| = |\alpha| \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| = |\alpha| \|x\|_\infty$$

eşitliği doğrudur.

(N_4) Her $x = (x_n) \in l^\infty(\mathbb{N})$ ve her $y = (y_n) \in l^\infty(\mathbb{N})$ için her $n \in \mathbb{N}$ durumunda

$$|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| + \sup_{n \in \mathbb{N}} |y_n|$$

olduğundan

$$\|x + y\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n + y_n| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| + \sup_{n \in \mathbb{N}} |y_n| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

eşitsizliği sağlanır.

Örnek 1.3.3 ([1], s.255): Bir X kümesi üzerinde tanımlı $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ -değerli, Σ -ölçülebilir, $|f|^p$, $1 \leq p < \infty$ fonksiyonunun bir μ ölçümüne göre integralinin sonlu olduğu μ -denklik sınıflarının oluşturduğu aile $L^p(X, \Sigma, \mu)$ ile gösterilir. Bu $L^p(X, \Sigma, \mu)$ lineer uzayı

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_X |f|^p \right)^{1/p}, 1 \leq p < \infty$$

fonksiyonu altında bir normlu uzaydır ([1], s.257).

Tanım 1.3.4 (Yakınsak Dizi, ([40], s.36; s.12)): $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay, $(x_n) \subset X$ bir dizi olmak üzere, eğer $x \in X$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$ ise, $(x_n) \subset X$ dizisi $x \in X$ elemanına $\|\cdot\|$ normuna göre yakınsıyor denir ve $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ ya da $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ notasyonlarından biri ile gösterilir

Tanım 1.3.5 (Cauchy Dizisi, ([40], s.36)): $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay, $(x_n) \subset X$ bir dizi olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ ve $m, n > n_\varepsilon$ doğal sayıları için $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabilir ise $(x_n) \subset X$ dizisine $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 1.3.6 (Tam Uzay, ([40], s.36)): Eğer bir normlu uzayda her Cauchy dizisi bu normlu uzayda yakınsak ise bu uzaya tam uzay denir.

Tanım 1.3.7 (Banach Uzayı, ([40], s.16; s.48)): Tam normlu uzaya bir Banach uzayı adı verilir.

1.4. İç Çarpım Uzayları ve Hilbert Uzayları

Tanım 1.4.1 (İç Çarpım Uzayı, ([40], s.51; s.53)): $K = \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) olmak üzere X bir lineer uzay olsun. Eğer $(\cdot, \cdot): X \times X \rightarrow K$ dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahip ise $(\cdot, \cdot)$ ye X üzerinde bir iç çarpım ve $(X, (\cdot, \cdot))$ ikilisine de iç çarpım uzayı (veya ön Hilbert uzayı) denir.

- i. Her $x \in X$ için $(x, x) \geq 0$ ve $(x, x) = 0$ ancak ve ancak $x = 0$.
- ii. Her $x, y \in X$ için $(x, y) = \overline{(y, x)}$ (kompleks eşlenik).
- iii. Her $x, y \in X$ ve $\alpha \in K$ için $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$.
- iv. Her $x, y, z \in X$ için $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

$K = \mathbb{R}$ durumunda her $x, y \in X$ için $(x, y) = (y, x)$ eşitliği doğrudur. Ayrıca ii. ve iv. ifadelerinden her $x, y, z \in X$ ve her $\alpha, \beta \in K$ için

- a) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$
- b) $(x, \alpha y) = \bar{\alpha}(x, y) = \alpha(x, y)$
- c) $(x, \alpha y + \beta z) = \bar{\alpha}(x, y) + \bar{\beta}(x, z)$

formüllerinin doğruluğu kolayca gösterilebilir.

Örnek 1.4.2 ([20], s.40): $t \in [a, b]$ olmak üzere,

$$(f, g)_{L^2(a,b)} = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt, f, g \in L^2(a, b)$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm $L^2(a, b)$ lineer uzayı üzerinde bir iç çarpım fonksiyonudur.

Gerçekten,

i) Her $f \in L^2(a, b)$ için

$$(f, f)_{L^2(a, b)} = \int_a^b f(t) \overline{f(t)} dt = \int_a^b |f(t)|^2 dt \geq 0.$$

Eğer,

$$(f, f)_{L^2(a, b)} = \int_a^b f(t) \overline{f(t)} dt = \int_a^b |f(t)|^2 dt = 0$$

ise $|f(t)| = 0$ λ -h.h.y. olup buradan her $t \in [a, b]$ için $f(t) = 0$ λ -h.h.y. olduğu bulunur.

Tersine, eğer $f(t) = 0$ ise

$$(f, f)_{L^2(a, b)} = \int_a^b f(t) \overline{f(t)} dt = \int_a^b |f(t)|^2 dt = \int_a^b 0 dt = 0$$

olup $(f, f)_{L^2(a, b)} = 0$ eşitliği elde edilir.

ii) Her $f, g \in L^2(a, b)$ için,

$$(f, g)_{L^2(a, b)} = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt = \overline{\int_a^b \overline{f(t)} g(t) dt} = \overline{\int_a^b g(t) \overline{f(t)} dt} = \overline{(g, f)_{L^2(a, b)}}$$

iii) Her $f, g \in L^2(a, b)$ ve $\beta \in \mathbb{C}$ için,

$$(\beta f, g)_{L^2(a, b)} = \int_a^b \beta f(t) \overline{g(t)} dt = \beta \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt = \beta (f, g)_{L^2(a, b)}$$

iv) Her $f, g, h \in L^2(a, b)$ için

$$\begin{aligned} (f + h, g)_{L^2(a, b)} &= \int_a^b (f(t) + h(t)) \overline{g(t)} dt = \int_a^b (f(t) \overline{g(t)} + h(t) \overline{g(t)}) dt \\ &= \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt + \int_a^b h(t) \overline{g(t)} dt = (f, g)_{L^2(a, b)} + (h, g)_{L^2(a, b)}. \end{aligned}$$

Örnek 1.4.3: $x = (x_n), y = (y_n) \in l^2(\mathbb{N})$ dizileri için

$$(x, y) := \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \overline{y_n}$$

tanımıyla $l^2(\mathbb{N})$ lineer uzayı bir iç çarpım uzayıdır.

Gerçekten;

i) Her $x = (x_n) \in l^2(\mathbb{N})$ için,

$$(x, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \overline{x_n} = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 \geq 0;$$

eğer $(x, x) = 0$ ise, $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = 0$ olup $x_n = 0, n \geq 1$ ve buradan $x = 0_{l^2}$ 'dir. Tersine $x = 0_{l^2}$ ise, $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = 0$ olup $(x, x) = 0$ 'dır.

ii) Her $x = (x_n), y = (y_n) \in l^2(\mathbb{N})$ için,

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \overline{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^n x_n \overline{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\sum_{n=1}^n y_n \overline{x_n}} = \overline{\sum_{n=1}^{+\infty} y_n \overline{x_n}} = \overline{(y, x)};$$

iii) Her $x = (x_n), y = (y_n) \in l^2(\mathbb{N})$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ için,

$$(\alpha x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha x_n \overline{y_n} = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \overline{y_n} = \alpha (x, y);$$

iv) Her $x = (x_n), y = (y_n), z = (z_n) \in l^2(\mathbb{N})$ için,

$$\begin{aligned} (x + y, z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (x_n + y_n) \overline{z_n} = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \overline{z_n} + \sum_{n=1}^{+\infty} y_n \overline{z_n} = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \overline{z_n} + \sum_{n=1}^{+\infty} y_n \overline{z_n} \\ &= (x, z) + (y, z). \end{aligned}$$

Benzer şekilde $l^2(\mathbb{Z})$ lineer uzayının $(x, y) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \overline{y_n}$ tanımıyla bir iç çarpım uzayı olduğu gösterilebilir.

Tanım 1.4.4 ([32], s.131): $(X, (\cdot, \cdot))$ bir iç çarpım uzayı olmak üzere, $x, y \in X$ için,

$$(x, y) = 0$$

ise x ve y ortogonaldır veya diktir denir ve $x \perp y$ ile gösterilir. Benzer şekilde, $A \subset X$ ve $B \subset X$ olmak üzere her $y \in A$ için $x \perp y$ oluyorsa $x \perp A$, her $x \in A, y \in B$ için $y \perp x$ ise, $B \perp A$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.4.5 (Ortogonal Küme, Ortonormal Küme, ([32], s.152)): $(X, (\cdot, \cdot))$ bir iç çarpım uzayı olmak üzere, $M \subset X$ boştan farklı bir altküme olsun. Eğer her $x, y \in M, x \neq y$ için $x \perp y$ oluyor ise M ye ortogonal küme denir. Ayrıca M ortogonal kümesinin her x elemanı için $(x, x) = 1$ ise M ye ortonormal küme denir.

Tanım 1.4.6 (Ortonormal Baz, ([32], s.183)): $(X, (\cdot, \cdot))$ bir iç çarpım uzayı ve M altkümesi X in bir bazı olsun. Eğer M ayrıca bir ortonormal küme ise M ye bir ortonormal baz denir.

Tanım 1.4.7 (İç Çarpımın Ürettiği Norm, ([40], s.56)): $(X, (\cdot, \cdot))$ bir iç çarpım uzayı olsun.

$$\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}, \|x\| = (x, x)^{1/2}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon X üzerinde bir norm olup ve bu norma iç çarpımın ürettiği norm denir.

Tanım 1.4.8 (Hilbert Uzayı, ([40], s.63)): Eğer bir iç çarpım uzayı iç çarpımın ürettiği norma göre tam uzay ise bu iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir.

Örnek 1.4.9: $l_2(\mathbb{N})$ ve $l_2(\mathbb{Z})$ lineer uzayları bir Hilbert uzayıdır.

1.5. Lineer Operatörler ve Temel Spektral Özellikler

Tanım 1.5.1 ([40], s.7; [4] s.238): X ve Y iki lineer normlu uzay olsun. $A: D(A) \subset X \rightarrow Y$ olan her dönüşüme operatör adı verilir. Bu durumda

$$D(A) := \{x \in X: Ax \text{ tanımlı}\} \subset X \text{ kümesine } A \text{ operatörünün tanım kümesi,}$$

$R(A) := AD(A) = \{y = Ax: x \in D(A)\} \subset Y$ kümesine A operatörünün değer kümesi,

$\text{Ker } A := \{x \in X: Ax = 0\} \subset X$ kümesine ise A operatörünün sıfır kümesi veya çekirdeği denir.

Tanım 1.5.2 (Lineer Operatör, ([40], s.82)): X ve Y aynı K cismi üzerinde iki lineer uzay, $D(A); X$ in bir lineer altuzayı ve $A: D(A) \subset X \rightarrow Y$ bir operatör olsun. Eğer her $x, y \in D(A)$ ve $\alpha, \beta \in K$ için,

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$$

ise A operatörüne bir lineer operatör denir.

Örnek 1.5.3: $X = Y = l^2(\mathbb{N})$ ve

$$S_r: l^2(\mathbb{N}) \rightarrow l^2(\mathbb{N}),$$

$$S_l: l^2(\mathbb{N}) \rightarrow l^2(\mathbb{N}),$$

$$S_r(x_n) = (x_{n-1}) = (0, x_1, x_2, \dots), S_l(x_n) = (x_{n+1}) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$$

operatörlerine sırasıyla $l^2(\mathbb{N})$ de sağa ve sola öteleme operatörleri denir. Bunlar lineer operatörlerdir. Örneğin,

Her $x = (x_n), y = (y_n) \in l^2(\mathbb{N})$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için,

$$\begin{aligned} S_r(\alpha x + \beta y) &= S_r((\alpha x_n) + (\beta y_n)) = (0, \alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \dots) \\ &= (0, \alpha x_1, \alpha x_2, \dots) + (0, \beta y_1, \beta y_2, \dots) \\ &= \alpha(0, x_1, x_2, \dots) + \beta(0, y_1, y_2, \dots) \\ &= \alpha(x_{n-1}) + \beta(y_{n-1}) \\ &= \alpha S_r x + \beta S_r y. \end{aligned}$$

Örnek 1.5.3: $X = Y = C[a, b]$, $Af(t) = f(a) + 1$, $f \in C[a, b]$ şeklinde tanımlanan operatör lineer değildir.

$$\begin{aligned} \text{Gerçekten, } f, g \in C[a, b], f(t) = g(t) = 1 \text{ ve } \alpha = \beta = 1 \text{ için } f + g \in C[a, b] \text{ olup} \\ A(f + g)(t) = (f + g)(a) + 1 = f(a) + g(a) + 1 = 1 + 1 + 1 = 3 \neq 4 \\ = (f(a) + 1) + (g(a) + 1) = Af(t) + Ag(t). \end{aligned}$$

Tanım 1.5.4 (Birim Operatör, ([40], s.84)): X bir lineer uzay olmak üzere $E: X \rightarrow X$, her $x \in X$ için $Ex = x$ şeklinde tanımlanan operatöre birim operatör denir.

Tanım 1.5.5 (Sıfır Operatör, ([40], s.84)): X bir lineer uzay olmak üzere $0: X \rightarrow X$, her $x \in X$ için $0x = 0$ şeklinde operatöre sıfır operatörü denir.

Tanım 1.5.6 (Süreklili Operatör, ([40], s.96)): X ve Y iki normlu lineer uzay, $D(A)$; X in bir lineer altuzayı, $A: D(A) \subset X \rightarrow Y$ bir operatör ve $x_0 \in D(A)$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in D(A)$ için $\|x - x_0\| < \delta$ olduğunda $\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan öyle bir $\delta > 0$ sayısı var ise A operatörüne $x = x_0$ noktasında süreklidir denir. A operatörü her $x \in D(A)$ noktasında sürekli ise bu operatöre sürekli operatör denir.

Tanım 1.5.7 (Sınırlı Operatör, ([40], s.91)): X ve Y iki normlu lineer uzay, $A: X \rightarrow Y$ bir lineer operatör olsun. Her $x \in X$ için $\|Ax\|_Y \leq k\|x\|_X$ koşulunu sağlayan pozitif k reel sayısı var ise A operatörüne sınırlı operatör denir ve X den Y ye tanımlanan tüm sınırlı lineer operatörler kümesi $L(X, Y)$ ile gösterilir. Özel olarak $X = Y$ ise $L(X, X)$ yerine $L(X)$ yazılır.

Önerme 1.5.8 ([40], s.88): X ve Y iki normlu lineer uzay ve $A: X \rightarrow Y$ bir lineer operatör olsun. O halde aşağıdakiler birbirine denktir.

- a) A lineer operatörü düzgün süreklidir.
- b) A lineer operatörü süreklidir.
- c) A lineer operatörü, $x = 0$ noktasında süreklidir.
- d) $\|x\| \leq 1$ eşitsizliğini sağlayan her $x \in X$ için $\|Ax\| \leq k$ olacak şekilde k pozitif reel sayısı vardır.
- e) Her $x \in X$ için $\|Ax\| \leq k\|x\|$ koşulunu sağlayan pozitif k reel sayısı vardır, yani A lineer operatörü sınırlıdır

Tanım 1.5.9 (Operatör Normu, ([40], s.97)): X ve Y iki normlu lineer uzay olmak üzere, $A: X \rightarrow Y$ sınırlı operatörü için,

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\|_Y : x \in X, \|x\|_X \leq 1\} = \inf\{k : \|Ax\|_Y \leq k\|x\|_X, \text{ her } x \in X\}$$

şeklinde tanımlı, $\|\cdot\|: L(X, Y) \rightarrow \mathbb{R}$ normuna A sınırlı operatörünün normu denir.

Örnek 1.5.10: $X = Y = L^2(0,1)$ için $A: L^2(0,1) \rightarrow L^2(0,1)$,

$$Af(t) := \int_0^1 f(t) dt$$

şeklinde tanımlanan A lineer operatörü sınırlı bir operatör olup $\|A\| = 1$ dir.

Gerçekten, her $f \in L^2(0,1)$ için

$$\begin{aligned} \|Af\|_{L^2(0,1)}^2 &= \left\| \int_0^1 f(t) dt \right\|_{L^2(0,1)}^2 = \int_0^1 \left| \int_0^1 f(t) dt \right|^2 dx \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)| dt \right)^2 dx = \left(\int_0^1 |f(t)| dt \right)^2 \\ &\leq \left(\int_0^1 1^2 dt \right) \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right) = \|f\|_{L^2(0,1)}^2 \end{aligned}$$

olup

$$\|Af\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \|A\|_{L^2(0,1)}^2 \cdot \|f\|_{L^2(0,1)}^2.$$

Buradan $\|A\|_{L^2(0,1)} \leq 1$ olduğu çıkar. Eğer $f_*(t) = 1 \in L^2(0,1)$ alırsak

$$\|Af_*\|_{L^2(0,1)} = 1 = \|f_*\|_{L^2(0,1)}$$

olup $\|A\|_{L^2(0,1)} = 1$ bulunur.

Örnek 1.5.11 ([32], s.93): $X, J = [0,1]$ üzerindeki tüm polinomlardan oluşan ve $\|x\| = \max |x(t)|, t \in J$ ile verilen norma sahip bir normlu uzay olsun. (') sembolü t ye göre alınan türevi göstermek üzere, X üzerinde bir A türev operatörü

$$Ax(t) = x'(t)$$

ile tanımlanır. Bu operatör lineer olduğu halde, sınırlı değildir. Gerçekten, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $x_n(t) = t^n$ alınsın. Bu durumda, $\|x_n\| = 1$ dir ve

$$Ax_n(t) = x'_n(t) = nt^{n-1}$$

olur. Dolayısıyla, $\|Ax_n\| = n$ ve $\|Ax_n\|/\|x_n\| = n$ bulunur. $n \in \mathbb{N}$ keyfi olarak alındığından, bu sonuç, $\|Ax_n\|/\|x_n\| \leq k$ olacak şekilde, sabit bir k pozitif reel sayısının var olmadığını gösterir. Bu durumda A operatörünün sınırsız olduğu ortaya çıkar.

Tanım 1.5.12 ([32], s.92): X ve Y iki normlu uzay ve $A: X \rightarrow Y$ sınırlı lineer operatör olsun. Bu durumda A operatörünün normu için aşağıdaki formüller denktir.

a) $\|A\| := \sup \left\{ \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} : x \in X \text{ ve } x \neq 0_X \right\};$

- b) $\|A\| := \sup\{\|Ax\|_Y : x \in X \text{ ve } \|x\|_X \leq 1\};$
 c) $\|A\| := \sup\{\|Ax\|_Y : x \in X \text{ ve } \|x\|_X < 1\};$
 d) $\|A\| := \sup\{\|Ax\|_Y : x \in X \text{ ve } \|x\|_X = 1\}.$

Tanım 1.5.13 (Bire-Bir Operatör, ([32], s.614)): X ve Y iki normlu uzay, $D(A), X$ in lineer altuzayı ve $A: D(A) \subset X \rightarrow Y$ lineer bir operatör olsun. Eğer her $x_1, x_2 \in D(A)$ için $x_1 \neq x_2$ bağıntısı sağlandığında $Ax_1 \neq Ax_2$ bağıntısı sağlanıyorsa A operatörüne bir-bir operatör denir.

Tanım 1.5.14 (Ters Operatör, ([32], s.615)): X ve Y iki lineer uzay ve $A: D(A) \subset X \rightarrow Y$ lineer operatörü bire-bir olsun. Bu halde her $y = Ax$ ise $B: R(A) \subset Y \rightarrow X, B: y = Ax \rightarrow x$ şeklinde tanımlanan B operatörüne A operatörünün ters operatörü denir ve $B = A^{-1}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.5.15 (Grafik, ([32], s.292)): X ve Y iki lineer uzay olmak üzere $Z := X \oplus Y$ olsun. $A: X \rightarrow Y$ lineer operatörü için,

$$Gr(A) := \{(x, Ax) : x \in D(A)\} \subset Z$$

altkümese A operatörünün grafiği denir.

Tanım 1.5.16 (Kapalı Lineer Operatör, ([32], s.292)): X ve Y iki normlu uzay, $D(A), X$ in bir lineer altuzayı ve $A: D(A) \subset X \rightarrow Y$ lineer bir operatör olsun. Bu durumda,

$$Gr(A) := \{(x, Ax) : x \in D(A)\} \subset X \times Y$$

olarak tanımlanan A operatörünün grafiği $X \times Y$ normlu uzayında kapalı ise A operatörüne kapalı lineer operatör denir.

Teorem 1.5.17 ([32], s.293): X ve Y iki normlu uzay, $D(A), X$ in bir lineer altuzayı ve $A: D(A) \subset X \rightarrow Y$ lineer bir operatör olsun. Bu takdirde A operatörünün kapalı operatör olması için gerek ve yeter şart $(x_n) \subset D(A)$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = y$ ise $x \in D(A)$ ve $y = Ax$ olmasıdır.

Örnek 1.5.18: $A: L^2(0,1) \rightarrow L^2(0,1), Af = f'$

$$D(A) = \{f \in L^2(0,1) : f \in AC, f' \in L^2(0,1), f(0) = 0\}$$

şeklinde tanımlanan operatör kapalıdır.

Gerçekten, $n = 1, 2, \dots$ için $f_n(t) = t^n$ ise,

$$\|f_n\|_{L^2(0,1)}^2 = \int_0^1 t^{2n} dt = \frac{1}{2n+1} \leq 1 \text{ ve}$$

$$\|Af_n\|_{L^2(0,1)}^2 = \int_0^1 n^2 t^{2n-2} dt = \frac{n^2}{2n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

olup A operatörü sınırsızdır. Şimdi A operatörünün kapalı olduğunu gösterelim. Bunu göstermek için, ilk önce $\text{Ker } A = \{0\}$ ve $R(A) = L^2(0,1)$ olduğunu not edelim. $g \in L^2(0,1)$ için $f(t) = \int_0^t f(s)ds$ alalım. Buradan $f \in D(A)$ ve $Af(t) = g(t)$ 'dir. $g \in L^2(0,1)$ için $A^{-1}g(t) = f(t)$ şeklinde tanımlanır.

$$|(A^{-1}g)(t)| \leq \int_0^1 |g(s)| ds \leq \left(\int_0^1 |g(s)|^2 ds \right)^{1/2} = \|g(t)\|$$

olup A^{-1} sınırlı lineer operatördür. Buradan

$$\|A^{-1}g\|^2 = \int_0^1 |(A^{-1}g)(t)|^2 dt \leq \int_0^1 \|g(t)\|^2 dt$$

olup $\|A^{-1}\| \leq 1$ 'dir.

$$f_n \in D(A) \text{ için } f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \text{ ve } Af_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h \in L^2(0,1)$$

için $f_n = A^{-1}h$, $Af_n = A^{-1}h$ olarak alındığında $f = A^{-1}h \in D(A)$ ve $Af = h$ dir. Dolayısıyla A operatörü kapalıdır.

Tanım 1.5.19 (Kapanabilir Operatör, ([32], s.537)): $A: X \rightarrow Y$ operatörünün $D(A) \subset D(\bar{A})$ ve her $x \in D(A)$ için $Ax = \bar{A}x$ olacak şekilde bir kapalı $\bar{A}$ operatörü var ise A ya kapanabilir operatör ve $\bar{A}$ operatörüne A nın kapanışı denir.

Örnek 1.5.20: $A: L_2(0,1) \rightarrow L_2(0,1), Af = xf(1)$

$$D(A) = C[0,1]$$

şeklinde tanımlanan operatör kapalı değildir ve kapanışı yoktur.

Gerçekten, $\overline{C[0,1]} = L_2(0,1)$ olup

$$f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|} u(x)$$

$$h_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|} u(x), (f_n), (h_n) \subset C[0,1],$$

fakat $f_n(1) = 1, h_n(1) = 0, n = 1, 2, \dots$. O halde $Af_n = x, Ah_n = 0$ olduğundan durum açıktır.

Tanım 1.5.21 (Operatörün Genişlemesi, ([21])): X ve Y herhangi iki lineer uzay ve $A: D(A) \subset X \rightarrow Y, \tilde{A}: D(\tilde{A}) \subset X \rightarrow Y$ iki lineer operatör olsun. Eğer

1. $D(A) \subset D(\tilde{A})$ ve

2. Her $f \in D(A)$ için $Af = \tilde{A}f$

ise $\tilde{A}$ operatörüne A operatörünün bir genişlemesi denir.

Tanım 1.5.22 (Eşlenik Operatör, ([35], s.353)): H bir Hilbert uzayı, $D(A)$, H nın bir lineer altuzayı, $A: D(A) \subset H \rightarrow H$ lineer bir operatör ve $\overline{D(A)} = H$ olsun. Bu durumda,

$D(A^*) := \{y \in H : \text{her } x \in D(A) \text{ için bir } z \in H \text{ vardır öyle ki } (Ax, y)_H = (x, z)_H\}$ olmak üzere,

$$A^* = D(A^*) \subset H \rightarrow H, \quad A^*y = z$$

şeklinde tanımlanan A^* operatörüne A operatörünün eşlenik (adjoint) operatörü denir.

Tanım 1.5.23 (Özeşlenik Operatör, ([35], s.359)): H bir Hilbert uzayı, $D(A)$, H nın bir lineer altuzayı, $A: D(A) \subset H \rightarrow H$ lineer bir operatör ve A^* , A operatörünün eşlenik operatörü olsun. Bu durumda, eğer $D(A) = D(A^*)$ ve her $f \in D(A)$ için $Af = A^*f$ ise A operatörüne özeşlenik (self adjoint) operatör denir.

Tanım 1.5.24 (Normal Operatör, ([35], s.365)): H bir Hilbert uzayı, $A \in L(H)$ ve A^* operatörü, A lineer operatörünün eşlenik operatörü olmak üzere,

$$D(A) = D(A^*)$$

ve

$$AA^* = A^*A$$

ise A operatörüne normal operatör denir.

Teorem 1.5.25 ([35], s.379): H kompleks bir Hilbert uzayı, $A \in L(H)$ ve A^* operatörü, A lineer operatörünün eşlenik operatörü olmak üzere, A nın normal operatör olması için gerek ve yeter şart her $x \in H$ için,

$$\|Ax\| = \|A^*x\|$$

olmasıdır.

Tanım 1.5.26 (Yarı Normal Operatör, ([32], s.29)): H bir Hilbert uzayı, $A \in L(H)$ ve A^* operatörü, A lineer operatörünün eşlenik operatörü olmak üzere, A ile A^*A komütatif, yani

$$AA^*A = A^*AA$$

ise A operatörüne yarı normal (quasinormal) operatör denir.

Tanım 1.5.27 (Pozitif Operatör, ([35], s.411)): H bir Hilbert uzayı ve $A: D(A) \subset H \rightarrow H$ bir özeşlenik operatör olsun. Eğer her $x \in D(A)$ için

$$(Ax, x)_H \geq 0$$

ise A operatörüne pozitif operatör denir ve $A \geq 0$ sembolü ile gösterilir.

Tanım 1.5.28 (Karekök Operatör, ([35], s.422)): H bir Hilbert uzayı ve $A: D(A) \subset H \rightarrow H$ bir pozitif operatör olsun. O halde, $B^2 = A$ eşitliğini sağlayan B özeşlenik operatörüne A operatörünün karekök operatörü adı verilir. Ek olarak $B \geq 0$ olduğunda $B = \sqrt{A}$ ya da $B = A^{1/2}$ ile gösterilir.

Teorem 1.5.29 ([35], s.422): H bir Hilbert uzayı ve $A \in L(H)$ bir pozitif operatör olsun. $B^2 = A$ eşitliğini sağlayan tek bir $B \in L(H), B \geq 0$ operatörü vardır ve A operatörü ile komütatif olan $C \in L(H)$ operatörü ile komütatiftir.

Teorem 1.5.30 (Kutupsal Ayrışım, ([10], s.248, [22], s.74)): H_1, H_2 Hilbert uzayları $A \in L(H_1, H_2)$ ve A^* operatörü A nın eşlenik operatörü olsun. Başlangıç uzayı $(\ker A)^\perp$, bitiş uzayı $\overline{R(A)}$ olan $W: H_1 \rightarrow H_2$ kısmi izometrisi ve $P \in L(H_1)$ bir pozitif operatör olmak üzere,

$$A = WP$$

eşitliği yazılabilir ve bu yazıma A nın kutupsal ayrışımı denir. Ayrıca bu gösterimde $\ker W = \ker P$ olur. Gösterimde özel olarak $P = |A|: H_1 \rightarrow H_1, |A| = (AA^*)^{1/2}$ seçilebilir ve o halde bu gösterim,

$$A = W|A|$$

şeklinde olur.

Tanım 1.5.31 (Rezolvent Küme, ([35], s.298)): X kompleks normlu lineer uzay, $D(A), X$ in bir lineer alt uzayı ve $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ lineer operatör olsun. $E: X \rightarrow X$ birim operatör ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere, eğer $R(A - \lambda E)$ kümesi X de yoğun ve $(A - \lambda E)$ operatörünün tersi $R(A - \lambda E)$ kümesinde var ve sınırlı ise $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısı A operatörünün rezolvent kümesine aittir denir ve $\lambda \in \rho(A)$ ile gösterilir.

Tanım 1.5.32 (Süreklili Spektrum, ([35], s.298)): X kompleks normlu lineer uzay, $D(A), X$ in bir lineer alt uzayı ve $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ lineer operatör olsun. $E: X \rightarrow X$ birim operatör ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere, eğer $R(A - \lambda E)$ kümesi X de yoğun ve $(A - \lambda E)$ operatörünün tersi $R(A - \lambda E)$ kümesinde var fakat sınırlı değil ise λ sayısı A operatörünün sürekli spektrumuna aittir denir ve $\lambda \in \sigma_c(A)$ ile gösterilir.

Tanım 1.5.33 (Kalan Spektrum, ([35], s.298)): X kompleks normlu lineer uzay, $D(A), X$ in bir lineer alt uzayı ve $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ lineer operatör olsun. $E: X \rightarrow X$ birim operatör ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere, eğer $R(A - \lambda E)$ kümesi X de yoğun değil fakat $(A - \lambda E)$ operatörünün tersi $R(A - \lambda E)$ kümesinde var (sınırlı ya da sınırsız) ise λ sayısı A operatörünün kalan spektrumuna aittir denir ve $\lambda \in \sigma_r(A)$ ile gösterilir.

Tanım 1.5.34 (Noktasal Spektrum, ([35], s.298)): X kompleks normlu lineer uzay, $D(A)$, X in bir lineer alt uzayı ve $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ lineer operatör olsun. $E: X \rightarrow X$ birim operatör ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere, $(A - \lambda E)$ operatörünün tersi yok ise λ sayısı A operatörünün noktasal (ayrık) spektrumuna aittir denir ve $\lambda \in \sigma_p(A)$ ile gösterilir.

Tanım 1.5.35 (Spektrum, [35], s.298)): X kompleks normlu lineer uzay, $D(A)$, X in bir lineer alt uzayı ve $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ lineer operatör olmak üzere $\sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$ kümesine A operatörünün spektrumu denir ve $\sigma(A)$ ile gösterilir.

Tanım 1.5.36 (Özdeğer, Özvektör, ([35], s. 298)): X kompleks normlu lineer uzay, $D(A)$, X in bir lineer alt uzayı ve $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ lineer operatör olmak üzere $\lambda \in \sigma_p(A)$ sayısına A nın özdeğeri, $Ax = \lambda x$, $x \in X$, $x \neq 0$ denkleminin çözümüne ise A nın λ özdeğerine karşılık gelen özvektörü denir.

Tanım 1.5.37 (Rezolvent Operatör, ([32], s.370)): H bir Hilbert uzayı, $D(A)$, H in bir lineer alt uzayı ve $A: D(A) \subset H \rightarrow H$ lineer operatör olsun. Bu takdirde $\lambda \in \mathbb{C}$, $E: H \rightarrow H$ ise birim operatör olmak üzere $A_\lambda = A - \lambda E$ operatörü terslenebilir (tersi var ve sınırlı) ise

$$A_\lambda^{-1} = (A - \lambda E)^{-1}$$

operatörüne A operatörünün rezolvent operatörü denir ve $R_\lambda(A)$ sembolü ile gösterilir.

Örnek 1.5.38 ([22], s.299): $V: L^2(0,1) \rightarrow L^2(0,1)$, $Vf(t) = \int_0^t f(s)ds$ ile tanımlı lineer sınırlı Volterra operatörünün spektrumu $\sigma(V) = \{0\}$ şeklindedir. Gerçekten de, $E: L^2(0,1) \rightarrow L^2(0,1)$ birim operatör olmak üzere $\lambda \in \mathbb{C}$ için,

$$(V - \lambda E)f(t) = g(t), \quad f, g \in L^2(0,1)$$

spektrum problemine bakılsın. İlk olarak

a) $g = 0, \lambda \neq 0$ durumu incelensin. Bu durumda problem

$$(V - \lambda E)f(t) = 0$$

şeklinde olup buradan,

$$\int_0^t f(s)ds = \lambda f(t), \quad f \in L^2(0,1)$$

şeklindedir. Bu integral denklemi,

$$\begin{cases} f(t) = \lambda f'(t), & \lambda - h. h. y. \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

diferansiyel denklem olan sınır-değer problemine dönüşür. Son eşitlikten,

$$f'(t) = \frac{1}{\lambda} f(t), \quad \lambda - h. h. y.$$

olup buradan ise $f(t)$ çözümü

$$f(t) = ce^{\frac{1}{\lambda}t}$$

şeklinde olur. Buradan $f(0) = 0$ sınır-değer şartı yerine yazılırsa $f(t) = 0, \lambda - h. h. y.$ bulunur. Bu $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$ sayısının özdeğer olamayacağı anlamına gelir. Şimdi,

b) $g(t) = 0, \lambda = 0$ durumu ele alınsın. Bu halde $Vf(t) = 0$ olup

$$\int_0^t f(s)ds = 0, \quad f \in L^2(0,1)$$

olur. Buradan $f(t) = 0, \lambda - h. h. y.$ olduğu bulunur. Bu ise, $\lambda = 0$ sayısının özdeğer olamayacağı anlamına gelir. Böylece (a) ve (b) durumlarından $\sigma_p(V) = \emptyset$ olduğu elde edilir.

c) $g(t) \neq 0, \lambda \neq 0$ durumunda,

$$(V - \lambda E)f(t) = g(t), \quad f, g \in L^2(0,1)$$

yani,

$$\int_0^t f(s)ds - \lambda f(t) = g(t), \quad f, g \in L^2(0,1)$$

olur. Bu halde,

$$h(t) := \int_0^t f(s)ds$$

olarak alınırsa integral denklemi

$$\begin{cases} h'(t) - \frac{1}{\lambda}h(t) = -\frac{1}{\lambda}g(t) \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

diferansiyel denklemin dönüşür. Bu denklemin genel çözümü

$$h(t) = ce^{\frac{1}{\lambda}t} - \frac{1}{\lambda} \int_0^t e^{\frac{1}{\lambda}(t-s)} g(s)ds$$

şeklindedir. $h(0) = 0$ olduğundan $c = 0$ olup buradan

$$h(t) = -\frac{1}{\lambda} \int_0^t e^{\frac{1}{\lambda}(t-s)} g(s)ds$$

eşitliği elde edilir. $h(t) = \int_0^t f(s)ds$ olduğundan,

$$(V - \lambda E)^{-1}g(t) = f(t) = h'(t) = \left(-\frac{1}{\lambda} \int_0^t e^{\frac{1}{\lambda}(t-s)} g(s)ds \right)'$$

$$= -\frac{1}{\lambda}g(t) - \frac{1}{\lambda^2} \int_0^t e^{\frac{1}{\lambda}(t-s)} g(s) ds$$

çözümü elde edilir. Son eşitlikten $R_\lambda(V) = (V - \lambda E)^{-1}$ in var olduğu ve

$$(V - \lambda E)^{-1} \in L(L^2(0,1))$$

olduğu elde edilir. Sonuç olarak,

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} = \rho(V)$$

olup

$$\sigma(V) = \{0\}$$

şeklindedir. Şimdi ise

d) $g \neq 0, \lambda = 0$ durumunda ise $0 \in \sigma_c(V)$ olduğu açıktır. Böylece

$$\sigma(V) = \sigma_c(V) = \{0\}$$

bulunur.

Örnek 1.5.39 ([42], s.269): $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ Banach uzayında $A_i: D(A_i) \subset C[0,1] \rightarrow C[0,1]$,

$i = 1,2,3$ operatörü için,

- a) $A_1 u(t) := u'(t), D(A_1) = \{u \in C[0,1]; u' \in C[0,1], u(0) = 0\},$
- b) $A_2 u(t) := u'(t), D(A_2) = \{u \in C[0,1]; u' \in C[0,1]\},$
- c) $A_3 u(t) := u'(t), D(A_3) = \{u \in C[0,1]; u' \in C[0,1], u(0) = u(1)\},$

operatörlerinin spektrumları bulunsun. Bu halde $E: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ birim operatör olmak üzere,

a) $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$A_1 u(t) = u'(t) = \lambda u(t) + f(t), f \in C[0,1]$$

denkleminin genel çözümü,

$$u(t) = ce^{\lambda t} + \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s) ds, c \in \mathbb{C}$$

şeklinde olup $u(0) = 0$ sınır değer koşullarından $c = 0$ bulunur. Dolayısıyla $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$(A_1 - \lambda)u(t) = f(t), f \in C[0,1]$$

denkleminin

$$u(t) = R_\lambda(A_1)f(t) = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s) ds \in C[0,1]$$

şeklinde tek bir çözümü vardır, yani

$$R_\lambda(A_1) = (A_1 - \lambda E)^{-1}$$

mevcut olup,

$$(A_1 - \lambda E)^{-1} \in L(C[0,1])$$

dir. Dolayısıyla $\sigma(A_1) = \emptyset$ ve $\rho(A_1) = \mathbb{C}$ olur.

b) $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$A_2 u(t) = u'(t) = \lambda u(t), \quad u \in D(A_2)$$

denkleminin çözüm kümesi,

$$u(t) = ce^{\lambda t}, \quad c \in \mathbb{C}$$

şeklinde olup her $\lambda \in \mathbb{C}$ için $A_2 u(t) = \lambda u(t)$ denkleminin $u(t) \neq 0, u \in C[0,1]$ şeklinde çözümü vardır. Dolayısıyla noktasal (ayrık) spektrum tanımından,

$$\sigma(A_2) = \sigma_p(A_2) = \mathbb{C}$$

olur.

c) $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$A_3 u(t) = u'(t) = \lambda u(t), \quad u \in D(A_3)$$

denkleminin çözüm kümesi,

$$u_\lambda(t) = ce^{\lambda t}, \quad c \in \mathbb{C}, 0 \leq t \leq 1$$

şeklindedir. Ayrıca $u_\lambda \in C[0,1]$ olup $u(0) = u(1)$ sınır değerleri kullanılırsa,

$$c = ce^\lambda$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$$c(1 - e^\lambda) = 0,$$

olup $c \neq 0$ için,

$$1 = e^\lambda$$

olur. Buradan ise $\lambda = 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$ olduğu bulunur. Noktasal (ayrık) spektrum tanımından,

$$\sigma_p(A_3) = \{2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$$

elde edilir. Şimdi $\lambda \neq \lambda_k = 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$ durumu incelensin.

$$A_3 u(t) = \lambda u(t) + f(t), \quad u, f \in C[0,1]$$

denkleminin çözüm kümesi,

$$u(t) = ce^{\lambda t} + \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s) ds, \quad c \in \mathbb{C}$$

şeklindedir. $u(0) = u(1)$ sınır değerleri kullanılırsa,

$$c = (1 - e^\lambda)^{-1} \int_0^1 e^{\lambda(1-s)} f(s) ds$$

olup,

$$R_\lambda f(t) = (1 - e^\lambda)^{-1} \int_0^1 e^{\lambda(1+t-s)} f(s) ds + \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s) ds, f \in C[0,1]$$

sonucuna ulaşılır. Buradan,

$$R_\lambda f(t) = \frac{1 + e^\lambda}{1 - e^\lambda} \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s) ds + \frac{e^\lambda}{1 - e^\lambda} \int_t^1 e^{\lambda(t-s)} f(s) ds$$

elde edilir. Şimdi $R_\lambda f(t) \in L(C[0,1])$ olduğu gösterilsin.

$$\begin{aligned} \|R_\lambda f(t)\|_\infty &= \sup_{t \in [0,1]} \{|R_\lambda f(t)|\} \\ &= \sup_{t \in [0,1]} \left\{ \left| \frac{1 + e^\lambda}{1 - e^\lambda} \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s) ds + \frac{e^\lambda}{1 - e^\lambda} \int_t^1 e^{\lambda(t-s)} f(s) ds \right| \right\} \\ &\leq \sup_{t \in [0,1]} \left\{ \left| \frac{1 + e^\lambda}{1 - e^\lambda} \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s) ds \right| \right\} + \sup_{t \in [0,1]} \left\{ \left| \frac{e^\lambda}{1 - e^\lambda} \int_t^1 e^{\lambda(t-s)} f(s) ds \right| \right\} \\ &\leq \sup_{t \in [0,1]} \left\{ \left| \frac{1 + e^\lambda}{1 - e^\lambda} \right| e^\lambda \int_0^1 |e^{-\lambda s} f(s)| ds \right\} + \sup_{t \in [0,1]} \left\{ \left| \frac{e^\lambda}{1 - e^\lambda} \right| e^\lambda \int_0^1 |e^{-\lambda s} f(s)| ds \right\} \\ &\leq \left| \frac{e^\lambda + e^{2\lambda}}{1 - e^\lambda} \right| \|f(t)\|_\infty + \left| \frac{e^{2\lambda}}{1 - e^\lambda} \right| \|f(t)\|_\infty = \left| \frac{e^\lambda + 2e^{2\lambda}}{1 - e^\lambda} \right| \|f(t)\|_\infty \end{aligned}$$

olacağından, $R_\lambda f(t) \in L(C[0,1])$ olur. Böylece her $\lambda \neq \lambda_k$, $k \in \mathbb{Z}$ ise $\lambda \in \rho(A_3)$. Sonuç olarak,

$$\sigma(A_3) = \{2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$$

olur.

Teorem 1.5.40 ([35], s.299): Eğer A lineer operatörü sonlu boyutlu X lineer uzayında tanımlı bir operatör ise $\sigma_r(A) = \emptyset$ ve $\sigma_c(A) = \emptyset$.

Teorem 1.5.41 ([32], s. 390): H bir kompleks Hilbert uzayı olmak üzere $A \in L(H)$ ise $\sigma(A) \neq \emptyset$.

Teorem 1.5.42 ([35] s.382): H bir Hilbert uzayı olmak üzere $A \in L(H)$ olsun.

a) Eğer $A = A^*$ ise, $\sigma_r(A) = \emptyset$, $\sigma(A) \subset [-\|A\|, \|A\|]$

b) Eğer A operatörü normal bir operatör ise, $\sigma_r(A) = \emptyset$.

Tanım 1.5.43 (Nümerik Alan, ([12], sf.95)): X kompleks bir Banach uzayı ve X^* , X in dual uzayı olsun. $S = \{x \in X: \|x\| = 1\}$ ve A, X Banach uzayında sınırsız bir operatör olsun.

$V(A, x) = \{f(Ax): f \in X^*, \|f\| = f(x) = 1\}$, $x \in S$ olmak üzere

$$V(A) = \cup\{V(A, x): x \in S\}$$

ifadesine A operatörünün nümerik alanı denir ve $V(A)$ ile gösterilir.

Teorem 1.5.44 ([41], s.10): H_1 ve H_2 birer Hilbert uzayı olmak üzere $A: H_1 \rightarrow H_2$ yoğun tanımlı kapanabilir bir lineer operatör olsun. Bu halde,

- i) $R(A)^\perp = \ker(A^*)$,
- ii) $R(A^*)^\perp = \ker(\bar{A})$,
- iii) $H_1 = \overline{R(A^*)} \oplus \ker(\bar{A})$
- iv) $H_2 = \overline{R(\bar{A})} \oplus \ker(A^*)$

Teorem 1.5.45 ([41], s.10): H_1 ve H_2 birer Hilbert uzayı olmak üzere $A: H_1 \rightarrow H_2$ yoğun tanımlı kapalı bir lineer operatör olsun. Bu halde,

$R(A)$, H_2 de kapalıdır ancak ve ancak $R(A^*)$, H_1 de kapalıdır.

Sonuç 1.5.46 ([41], s.10): Teorem 1.5.44 deki A operatörü yerine $A - \lambda E$, $\lambda \in \mathbb{C}$ operatörünü kullanırsak buradaki E birim operatör olmak üzere

$$H = \overline{R(A - \lambda E)} \oplus \ker(A^* - \bar{\lambda}E) = \overline{R(A^* - \bar{\lambda}E)} \oplus \ker(\bar{A} - \lambda E)$$

elde edilir.

Teorem 1.5.47 ([41], s.11): $A: H_1 \rightarrow H_2$ yoğun tanımlı bir lineer operatör olsun. Bu halde,

- i. A kapanabilir bir operatördür ancak ve ancak $R(A^*)$, H_2 de yoğundur.
- ii. Eğer A kapanabilir ise $(\bar{A})^* = A^*$ ve $A^{**} := (A^*)^*$ olduğundan $\bar{A} = A^{**}$ dır.
- iii. A kapalı bir operatördür ancak ve ancak $A = A^{**}$ dır.
- iv. $\ker(A) = \{0\}$ ve $R(A)$, H_2 de yoğun olsun. Bu halde A^* terslenebilirdir ve $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ dır.
- v. A kapanabilir bir operatör ve $\ker(A) = \{0\}$ olsun. Bu halde A operatörünün tersi A^{-1} kapanabilirdir ancak ve ancak $\ker(\bar{A}) = \{0\}$ dır.
- vi. A terslenebilir ise o zaman A kapalıdır ancak ve ancak A^{-1} kapalıdır.

Tanım 1.5.48 (q -Normal Operatör,([37])): $q \neq 1$ olmak üzere q pozitif bir sayı olsun. T , H Hilbert uzayında yoğun tanımlı ve kapalı bir operatör olmak üzere

$$TT^* = qT^*T \tag{1.1}$$

eşitliği sağlanıyorsa T operatörü q deformasyon parametresiyle deforme olmuş normal operatör olarak adlandırılır. $|T| = (T^*T)^{1/2}$ olmak üzere (1.1) eşitliğinden

$$|T^*| = \sqrt{q}|T|$$

ifadesi kolayca elde edilir.

Tanım 1.5.49 (q -Yarınormal operatör, ([37])): $q \neq 1$ olmak üzere q pozitif bir sayı olsun. T, H Hilbert uzayında yoğun tanımlı, kapalı ve $T = U|T|$ kutupsal ayrılışa sahip bir operatör olsun. Eğer, T operatörü

$$U|T| \subset \sqrt{q}|T|U$$

bağıntısını sağlıyor ise T operatörü q -yarınormal (deformasyon parametresi q olan yarınormal operatör) operatör olarak adlandırılır.

Önerme 1.5.50 ([37]): T, H Hilbert uzayında yoğun tanımlı ve kapalı bir operatör olsun. Bu halde aşağıdakiler doğrudur.

1. Eğer T operatörü q -normal ise, T operatörü q -yarı normaldir.
2. T operatörü q -normaldir ancak ve ancak

$$D(T) = D(T^*) \text{ ve } \|T^*x\| = \sqrt{q}\|Tx\|, x \in D(T).$$

3. Eğer T operatörü q -yarı normal ise,

$$D(T) \subseteq D(T^*) \text{ ve } \|T^*x\| \leq \sqrt{q}\|Tx\|, x \in D(T).$$

Tanım 1.5.51 (q -Hiponormal Operatör, ([37])): $q \neq 1$ olmak üzere q pozitif bir sayı olsun. Yoğun olarak tanımlanmış bir T operatörü, her $x \in D(T)$ için

$$D(T) \subseteq D(T^*) \text{ ve } \|T^*x\| \leq \sqrt{q}\|Tx\|$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, q -hiponormal (deformasyon parametresi q olan hiponormal operatör) operatör olarak adlandırılır.

Tanım 1.5.52 (q -Formal Normal Operatör, ([37])): Eğer T q -hiponormal operatör ise, her $x \in D(T)$ ve $D(T) \subseteq D(T^*)$ için

$$\|T^*x\| = \sqrt{q}\|Tx\|$$

eşitliği sağlanıyorsa T operatörüne q -formal normal operatör denir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR VE BULGULAR

2.1. $L_q^2(0, 1)$ Uzayı ve q -Fark Operatörü

$A \subset \mathbb{C}$ ve $\mu \in \mathbb{R}$ sabit olmak üzere, her $t \in A$ için $\mu t \in A$ ise A ya μ -geometrik küme denir. Eğer, $\mathbb{C}$ nin alt kümesi A , μ -geometrik ise her $t \in A$ için $\{t\mu^k\}_{k=0}^{\infty}$ tipindeki bütün geometrik dizileri A kümesi içerir.

$|q| \neq 1$ olmak üzere, q -geometrik küme olan A da tanımlanan, reel veya kompleks değerli bir $u(t)$ fonksiyonu için q -fark türevi veya q -türevi

$$D_q u(t) := \frac{u(t) - u(qt)}{t - qt}, t \in A \setminus \{0\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu şekilde tanımlanan operatöre q -fark operatörü denir. Bu operatörün tanımı E. Heine ve L. Euler'in çalışmalarına kadar uzanmakla birlikte son hali 1908 yılında F. H. Jackson tarafından verilmiştir [26].

F.H. Jackson, q -fark operatörünün bir sistematik çalışmasını yapmıştır [25-28]. q -fark operatörü; bazen Jackson q -fark operatörü, Euler-Jackson q -fark operatörü veya Euler-Heine-Jackson q -fark operatörü olarak da adlandırılır. Eğer $0 \in A$ ise sıfırdaki q -türevi $|q| < 1$ için limitin var olması ve t den bağımsız olması şartıyla

$$D_q u(0) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u(tq^n) - u(0)}{tq^n - 0}, t \in A \setminus \{0\}$$

şeklinde tanımlanır. Ek olarak, $|q| > 1$ için sıfırdaki q -türevi

$$D_q u(0) := D_{q^{-1}} u(0)$$

olarak tanımlanır.

Eğer $u(t)$ ve $v(t)$ fonksiyonlarının q -geometrik A kümesi üzerinde q -türevleri mevcut ise aşağıdaki eşitlikler doğrudur.

- i) $D_q(u \pm v)(t) = D_q u(t) \pm D_q v(t)$
- ii) $D_q(uv)(t) = D_q u(t)v(t) + u(qt)D_q v(t)$
- iii) $v(t) \neq 0$ ve $v(qt) \neq 0$ olmak üzere

$$D_q(u/v)(t) = \frac{D_q u(t)v(t) - u(t)D_q v(t)}{v(t)v(qt)}$$

Bazı kaynaklarda eğer $u(t)$ fonksiyonu $t = 0$ noktasında türevlenebilir ise $D_q u(0) = u'(0)$ şeklinde q -türevi tanımlanmaktadır [31,44].

F.H. Jackson çalışmasında q -türev işleminin sağ tersi olarak

$$\int_a^b u(t) d_q t := \int_0^b u(t) d_q t - \int_0^a u(t) d_q t, a, b \in A$$

şeklinde gösterilen bir integral tanımladı [27]. Burada,

$$\int_0^x u(t) d_q t := (1 - q) \sum_{k=0}^{+\infty} x q^k u(x q^k), x \in A$$

olup serinin $x = a$ ve $x = b$ için yakınsak olması gerekmektedir

V. Kac ve P. Cheung eğer, $0 \leq \alpha < 1$ için $[0, a]$ aralığı üzerinde $t^\alpha u(t)$ fonksiyonu sınırlıysa, her $t \in [0, a]$ için $\int_0^x u(t) d_q t$ var olduğunu kanıtladı [29]. Diğer taraftan, T.J.I'A. Bromwich eğer $u(t)$ fonksiyonu, $[0, b]$ üzerinde Riemann integrallenebilir ise

$$\int_0^b u(x) dx = \lim_{q \rightarrow 1^-} \int_0^b u(t) d_q t$$

olduğunu gösterdi [7].

Bu tezde $0 < q < 1$ olarak alınacaktır.

Tanım 2.1.1: $u: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyon olmak üzere

$$\int_0^1 u(t) d_q t = (1 - q) \sum_{k=0}^{+\infty} q^k u(q^k) < +\infty$$

ise $u(t)$ fonksiyonuna $[0,1]$ üzerinde q -integrallenebilir denir.

$[0,1]$ üzerinde tanımlı kompleks değerli $u(t)$ ve $v(t)$ fonksiyonları için, $[0,1]$ üzerinde $|u(t)|^2$ ve $|v(t)|^2$ fonksiyonları q -integrallenebilir olsun. $u \sim v$ ancak ve ancak her $n \in \mathbb{N}_0$ için $u(q^n) = v(q^n)$ biçiminde tanımlanan ' $\sim$ ' bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Bu halde

$$L_q^2(0,1) := \left\{ [u]: u: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}, \int_0^1 |u(t)|^2 d_q t = (1 - q) \sum_{k=0}^{+\infty} q^k |u(q^k)|^2 < +\infty \right\}$$

kümesi $u, v \in L_q^2(0,1)$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$[u] + [v] = [u + v]$$

ve

$$\alpha[u] = [\alpha u]$$

şeklinde tanımlanan toplama ve skaler ile çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayıdır.

Önerme 2.1.2: $L_q^2(0,1)$ vektör uzayı

$$(u, v)_{L_q^2(0,1)} := \int_0^1 u(t) \overline{v(t)} d_q t$$

olarak tanımlanan iç çarpım ile bir Hilbert uzayıdır.

İspat: İlk olarak $L_q^2(0,1)$ vektör uzayının iç çarpım fonksiyonunun özelliklerini sağladığı gösterilsin.

i. Her $u \in L_q^2(0,1)$ için

$$\begin{aligned} (u, u)_{L_q^2(0,1)} &= \int_0^1 u(t) \overline{u(t)} d_q t = \int_0^1 |u(t)|^2 d_q t \\ &= (1-q) \sum_{k=0}^{+\infty} q^k |u(q^k)|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Eğer $u \in L_q^2(0,1)$ için

$$(u, u)_{L_q^2(0,1)} = \int_0^1 u(t) \overline{u(t)} d_q t = \int_0^1 |u(t)|^2 d_q t = 0$$

olduğundan her $k \in \mathbb{N}_0$ için $u(q^k) = 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla $u \in [0]$. Tersine $u(t) \in [0]$ ise

$$(u, u)_{L_q^2(0,1)} = \int_0^1 u(t) \overline{u(t)} d_q t = \int_0^1 |u(t)|^2 d_q t = \int_0^1 0 d_q t = 0$$

olduğundan $(u, u)_{L_q^2(0,1)} = 0$ olduğu elde edilir.

ii. Her $u, v \in L_q^2(0,1)$ için

$$\begin{aligned} (u, v)_{L_q^2(0,1)} &= \int_0^1 u(t) \overline{v(t)} d_q t = (1-q) \sum_{k=0}^{+\infty} q^k u(q^k) \overline{v(q^k)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1-q) \sum_{k=0}^n q^k u(q^k) \overline{v(q^k)} \\ &= \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} (1-q) \sum_{k=0}^n q^k \overline{u(q^k)} v(q^k)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \overline{(1-q) \sum_{k=0}^{+\infty} q^k \overline{u(q^k)} v(q^k)} = \overline{\int_0^1 v(t) \overline{u(t)} d_q t} \\
&= \overline{(v, u)}_{L_q^2(0,1)}
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

iii. Her $u, v \in L_q^2(0,1)$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned}
(\alpha u, v)_{L_q^2(0,1)} &= \int_0^1 \alpha u(t) \overline{v(t)} d_q t = (1-q) \sum_{k=0}^{+\infty} q^k \alpha u(q^k) \overline{v(q^k)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} (1-q) \sum_{k=0}^n q^k \alpha u(q^k) \overline{v(q^k)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha (1-q) \sum_{k=0}^n q^k u(q^k) \overline{v(q^k)} \\
&= \alpha (1-q) \sum_{k=0}^{+\infty} q^k u(q^k) \overline{v(q^k)} \\
&= \alpha \int_0^1 u(t) \overline{v(t)} d_q t = \alpha (u(t), v(t))_{L_q^2(0,1)}
\end{aligned}$$

olur.

iv. Her $u, v, w \in L_q^2(0,1)$ için

$$\begin{aligned}
(u + v, w)_{L_q^2(0,1)} &= \int_0^1 (u(t) + v(t)) \overline{w(t)} d_q t \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} (1-q) \sum_{k=0}^n q^k (u(q^k) + v(q^k)) \overline{w(q^k)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} (1-q) \sum_{k=0}^n q^k (u(q^k) + v(q^k)) \overline{w(q^k)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} (1-q) \sum_{k=0}^n q^k (u(q^k) \overline{w(q^k)} + v(q^k) \overline{w(q^k)}) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} (1-q) \sum_{k=0}^n q^k u(q^k) \overline{w(q^k)} + q^k v(q^k) \overline{w(q^k)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left((1-q) \sum_{k=0}^n q^k u(q^k) \overline{w(q^k)} + (1-q) \sum_{k=0}^n q^k v(q^k) \overline{w(q^k)} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} (1-q) \sum_{k=0}^n q^k u(q^k) \overline{w(q^k)} + \lim_{n \rightarrow \infty} (1-q) \sum_{k=0}^n q^k v(q^k) \overline{w(q^k)} \\
&= (1-q) \sum_{k=0}^{\infty} q^k u(q^k) \overline{w(q^k)} + (1-q) \sum_{k=0}^{\infty} q^k v(q^k) \overline{w(q^k)} \\
&= \int_0^1 u(t) \overline{w(t)} d_q t + \int_0^1 v(t) \overline{w(t)} d_q t \\
&= (u, w)_{L_q^2(0,1)} + (v, w)_{L_q^2(0,1)}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi $(u_n(t)), L_q^2(0,1)$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Bu halde her $\varepsilon > 0$ olmak üzere bir $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mevcuttur öyle ki her $n, m \geq N_0$ için

$$\|u_n(t) - u_m(t)\|_{q,2}^2 = (1-q) \sum_{k=0}^{+\infty} q^k |u_n(q^k) - u_m(q^k)|^2 < \varepsilon$$

ve her $s \in \mathbb{N}$ için

$$(1-q) \sum_{k=0}^s q^k (|u_n(q^k) - u_m(q^k)|^2) < (1-q)\varepsilon^2.$$

Buradan, her $k \in \mathbb{N}$ ve her $n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq N_0$ ve için

$$q^{\frac{k}{2}} |u_n(q^k) - u_m(q^k)| < \varepsilon$$

olur. Buradan da her $k \in \mathbb{N}$ için $(u_n(q^k)) \subset \mathbb{C}$ bir Cauchy dizisi olup $\mathbb{C}$ de yakınsaktır. $u(t)$ fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde $k \in \mathbb{N}_0$ için

$$u(q^k) := \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(q^k)$$

$$u(t) = 0, t \neq q^k$$

şeklinde tanımlansın. Her $n \geq N_0$, her $k \in \mathbb{N}$ ve her $s \in \mathbb{N}$ için

$$(1-q) \sum_{k=0}^s q^k (|u_n(q^k) - u(q^k)|^2) \leq (1-q)\varepsilon^2$$

eşitsizliğinden $s \rightarrow +\infty$ iken $n \geq N_0$ için

$$(1-q) \sum_{k=0}^s q^k (|u_n(q^k) - u(q^k)|^2) < +\infty$$

olur ki buradan da $u_n - u \in L_q^2(0,1)$ sonucu elde edilir. $u_n \in L_q^2(0,1)$ ve $L_q^2(0,1)$ vektör uzayı olduğundan $u \in L_q^2(0,1)$ olur. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Önerme 2.1.3: $M \subset L_q^2(0,1)$ yoğun bir küme olmak üzere her $k \in \mathbb{N}_0$ için $u(q^k) \neq 0$ olacak şekilde en az bir $u \in M$ mevcuttur.

İspat: $M, L_q^2(0,1)$ de yoğun olsun. $k \in \mathbb{N}_0$ için

$$\psi_k: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\psi_k(t) = \begin{cases} 1, & t = q^k \\ 0, & t \neq q^k \end{cases}$$

fonksiyonları tanımlansın. Açıkça görülür ki $\psi_k(t) \in L_q^2(0,1)$ dir. Şimdi, M yoğun bir küme ise bir $(u_n) \subset M$ dizisi mevcuttur öyle ki

$$\|u_n(t) - \psi_k(t)\|_{q,2}^2 = \int_0^1 |u_n(t) - \psi_k(t)|^2 d_q t \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \int_0^1 |u_n(t) - \psi_k(t)|^2 d_q t &= (1-q) \sum_{k=0}^{+\infty} q^k |u_n(q^k) - \psi_k(q^k)|^2 \\ &= (1-q)q^k |u_n(q^k) - 1|^2 + (1-q) \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{+\infty} q^i |u_n(q^i)|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Bu halde, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(q^k) = 1$ olmak zorundadır. Bu durumda ise $u_{n_k}(q^k) \neq 0$ olacak şekilde bir $n_k \in \mathbb{N}$ var olduğu görülür. ■

Sonuç 2.1.4: $M := \{u \in L_q^2(0,1) : u(1) = 0\}$, $L_q^2(0,1)$ Hilbert uzayında yoğun değildir.

Şimdi $D = \{u \in L_q^2(0,1) : D_q u(t) \in L_q^2(0,1)\}$ olmak üzere, bu küme üzerinde

$$L : D \subset L_q^2(0,1) \rightarrow L_q^2(0,1)$$

$$Lu(t) = D_q u(t)$$

lineer operatörü tanımlansın. Bu operatör q -fark ifadesi tarafından üretilen maksimal operatör olarak adlandırılacaktır.

Teorem 2.1.5: $L: D \subset L_q^2(0,1) \rightarrow L_q^2(0,1)$ maksimal lineer operatörü $L_q^2(0,1)$ Hilbert uzayında kapalı ve yoğun tanımlı bir operatördür.

İspat : $L: D \subset L_q^2(0,1) \rightarrow L_q^2(0,1)$ maksimal operatörünün lineer olduğu açıktır. Şimdi L maksimal operatörünün kapalı olduğunu gösterilsin. Şimdi, $\{u_n\} \subset D$, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u$ ve $Lu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$ olmak üzere

$$\|u_n - u\|_{L_q^2(0,1)}^2 = (1-q) \sum_{k=0}^{+\infty} q^k |u_n(q^k) - u(q^k)|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Buradan her $k \in \mathbb{N}_0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(q^k) = u(q^k)$$

olmak zorundadır.

Diğer taraftan, $Lu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$ olduğundan

$$\|Lu_n(t) - f(t)\|_{L_q^2(0,1)}^2 = (1-q) \sum_{k=0}^{+\infty} q^k \left| \frac{u_n(q^k) - u_n(q^{k+1})}{(1-q)q^k} - f(q^k) \right|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Buradan ise her $k \in \mathbb{N}_0$ için

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n(q^k) - u_n(q^{k+1})}{(1-q)q^k} = f(q^k)$$

ve

$$u_n(q^k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u(q^k)$$

olup limitin tekliğinden

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n(q^k) - u_n(q^{k+1})}{(1-q)q^k} = \frac{u(q^k) - u(q^{k+1})}{(1-q)q^k} = f(q^k)$$

eşitliği elde edilir. Bu sonuncudan $D_q u(t) \in L_q^2(0,1)$ olduğu görülür ki dolayısıyla $u \in D$ ve $Lu_n(t) = f(t)$. Bu ise $L: D \subset L_q^2(0,1) \rightarrow L_q^2(0,1)$ lineer operatörünün kapalı operatör olduğunu verir. ■

Önerme 2.1.6: $L: D \subset L_q^2 \rightarrow L_q^2$ maksimal operatörünün $L_q^2(0,1)$ Hilbert uzayındaki eşlenik operatörü

$$L^*u(t) = \begin{cases} \frac{1}{1-q}u(1) & , \quad q < t \leq 1 \\ -\frac{1}{q}D_{q^{-1}}u(t), & 0 < t \leq q \end{cases}$$

olarak tanımlanır ve eşlenik operatörün tanım kümesi

$$D(L^*) = \left\{ u \in L_q^2(0,1) : D_q u \in L_q^2(0,1) \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} u(q^n) = 0 \right\}$$

şeklindedir.

İspat : $u \in D$ için,

$$\begin{aligned}
(Lu(t), v(t))_{L_q^2(0,1)} &= \int_0^1 Lu(t) \overline{v(t)} d_q t = (1-q) \sum_{k=0}^{+\infty} q^k D_q u(q^k) \overline{v(q^k)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} (1-q) \sum_{k=0}^n q^k \left(\frac{u(q^k) - u(q^{k+1})}{(1-q)q^k} \right) \overline{v(q^k)} \\
&= u(1) \overline{v(1)} - \lim_{n \rightarrow +\infty} u(q^n) \overline{v(q^n)} + (1-q) \sum_{k=1}^{+\infty} -\frac{1}{q} q^k \overline{D_q v(q^k)} u(q^k) \\
&= (1-\alpha) u(1) \overline{v(1)} - \lim_{n \rightarrow +\infty} u(q^n) \overline{v(q^n)} \\
&\quad + \left[(1-q) \left(u(1) \frac{\alpha}{1-q} \overline{v(1)} \right) + (1-q) \sum_{k=1}^{+\infty} -\frac{1}{q} q^k \overline{D_q v(q^k)} u(q^k) \right].
\end{aligned}$$

Buradan

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u(q^k) \overline{v(q^k)} = (1-\alpha) u(1) \overline{v(1)}$$

ve

$$L^* u(t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{1-q} u(1) & , \quad q < t \leq 1 \\ -\frac{1}{q} D_{q^{-1}} u(t) & , \quad 0 < t \leq q \end{cases}$$

olduğu elde edilir. Eğer $\alpha \neq 1$ ise maksimal operatörün tanım kümesinin tanımından $u(1) = 1$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} u(q^k) = 0$ alınabilir. Buradan

$$D(L^*) \subset M = \{u \in L_q^2(0,1) : u(1) = 0\}$$

olmak zorunda olduğu açıkça görülür. Fakat Sonuç 2.1.3 den $M, L_q^2(0,1)$ Hilbert uzayında yoğun olmadığından $D(L^*), L_q^2(0,1)$ Hilbert uzayında yoğun olamaz. Oysa L kapalı operatör olduğundan L^* eşlenik operatörünün tanım kümesi yoğun olmak zorundadır [41]. Dolayısıyla $\alpha = 1$ olur. Sonuç olarak

$$D(L^*) = \left\{ u \in L_q^2(0,1) : D_q u(t) \in L_q^2(0,1), \lim_{k \rightarrow +\infty} u(q^k) = 0 \right\}$$

olduğu elde edilir. ■

Şimdi

$$D_0 = \left\{ u \in L_q^2(0,1) : D_q u(t) \in L_q^2(0,1), \lim_{k \rightarrow +\infty} u(q^k) = 0 \right\}$$

lineer manifoldu üzerinde

$$L_0: D_0 \subset L_q^2(0,1) \rightarrow L_q^2(0,1)$$

$$L_0 u(t) = D_q u(t)$$

operatörü tanımlansın. Bu şekilde tanımlanan operatör q -fark ifadesinin ürettiği minimal operatör olarak adlandırılacaktır.

Teorem 2.1.7: $L_0: D_0 \subset L_q^2(0,1) \rightarrow L_q^2(0,1)$ minimal operatörü $L_q^2(0,1)$ Hilbert uzayında kapalı operatördür.

Sonuç 2.1.8: $L_0 \subset L$ ve L_0 operatörünün kendisi ve L operatöründen başka kapalı bir operatör genişlemesi yoktur. Üstelik, $D(L_0^*) = D(L)$ ve $D(L^*) = D(L_0)$ eşitlikleri doğrudur.

Sonuç 2.1.9: L^* operatörü bir q -hiponormal operatördür.

İspat: Her $u(t) \in D(L)$ için $D(L) \supset D(L^*)$ olduğu açıktır. Bu halde

$$\begin{aligned} \|Lu(t)\|_{L_q^2(0,1)}^2 &= \int_0^1 |D_q u(t)|^2 d_q t \\ &= (1-q) \sum_{k=0}^{+\infty} q^k |D_q u(q^k)|^2 \\ &= (1-q) \sum_{k=0}^{+\infty} q^k \left| \frac{u(q^k) - u(q^{k+1})}{(1-q)q^k} \right|^2 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \|L^* u(t)\|_{L_q^2(0,1)}^2 &= (1-q)|u(1)|^2 + \int_0^1 \left| -\frac{1}{q} D_{q^{-1}} u(t) \right|^2 d_q t \\ &= (1-q)|u(1)|^2 + (1-q) \sum_{k=1}^{+\infty} q^k \left| -\frac{1}{q} D_{q^{-1}} u(t) \right|^2 \\ &= (1-q)|u(1)|^2 + \frac{1}{q^2} (1-q) \sum_{k=1}^{+\infty} q^k \left| \frac{u(q^k) - u(q^{k-1})}{\left(1 - \frac{1}{q}\right) q^k} \right|^2 \\ &= (1-q)|u(1)|^2 + \frac{1}{q^2} (1-q) \sum_{k=1}^{+\infty} q^k q^2 \left| \frac{u(q^k) - u(q^{k-1})}{(1-q)q^k} \right|^2 \\ &= (1-q)|u(1)|^2 + (1-q) \sum_{k=1}^{+\infty} q^k \left| \frac{u(q^k) - u(q^{k-1})}{(1-q)q^k} \right|^2 \\ &= (1-q)|u(1)|^2 + (1-q) \sum_{k=1}^{+\infty} q^k \frac{1}{q^2} \left| \frac{u(q^{k-1}) - u(q^k)}{(1-q)q^{k-1}} \right|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1-q)|u(1)|^2 + \frac{1}{q}(1-q) \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} \left| \frac{u(q^{k-1}) - u(q^k)}{(1-q)q^{k-1}} \right|^2 \\
&= (1-q)|u(1)|^2 + \frac{1}{q}(1-q) \sum_{n=0}^{+\infty} q^n \left| \frac{u(q^n) - u(q^{n+1})}{(1-q)q^n} \right|^2 \\
&\geq \frac{1}{q}(1-q) \sum_{k=0}^{+\infty} q^k \left| \frac{u(q^k) - u(q^{k+1})}{(1-q)q^k} \right|^2 \\
&= \frac{1}{q} \|Lu(t)\|_{L_q^2(0,1)}^2
\end{aligned}$$

olur ki buradan da $\|Lu(t)\| \leq \sqrt{q}\|L^*u(t)\|$ olduğu elde edilir. ■

Teorem 2.1.10: L_0 minimal ve L maksimal operatörlerinin noktasal spektrum kümeleri

$$\sigma_p(L_0) = \left\{ \frac{1}{(1-q)q^m} : m \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

$$\sigma_p(L) = \mathbb{C}$$

şeklindedir.

İspat : $\lambda \in \sigma_p(L_0)$ olsun. Bu halde bir $u(t) \in D_0, u(t) \neq 0$ mevcuttur öyle ki,

$$L_0 u(t) = \lambda u(t).$$

Buradan, her $k \in \mathbb{N}_0$ için

$$\frac{u(q^k) - u(q^{k+1})}{(1-q)q^k} = \lambda u(q^k)$$

olup her $k \in \mathbb{N}_0$ için

$$u(q^{k+1}) = (1 - (1-q)\lambda q^k)u(q^k)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik yardımıyla

$$u(q) = (1 - (1-q)\lambda)u(1)$$

$$u(q^2) = (1 - (1-q)\lambda q)u(q) = (1 - (1-q)\lambda q)(1 - (1-q)\lambda)u(1)$$

$$= \left(\prod_{k=0}^1 (1 - (1-q)\lambda q^k) \right) u(1)$$

ve

$$u(q^3) = (1 - (1-q)\lambda q^2)u(q^2)$$

$$= (1 - (1-q)\lambda q^2)(1 - (1-q)\lambda q)(1 - (1-q)\lambda)u(1)$$

$$= \left(\prod_{k=0}^2 (1 - (1-q)\lambda q^k) \right) u(1)$$

olup genelleştirirsek

$$u(q^{k+1}) = \left(\prod_{n=0}^k (1 - (1-q)\lambda q^n) \right) u(1)$$

$u(1) \neq 0$ eşitliği elde edilir. Üstelik $u \in D_0$ olduğundan $u(q^k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ olur ancak ve ancak

bir $m \in \mathbb{N}_0$ mevcuttur öyle ki

$$1 - \lambda(1-q)q^m = 0$$

eşitliği sağlanır [13]. Buradan $\lambda = \frac{1}{(1-q)q^m}$, $m \in \mathbb{N}_0$ elde edilir. Bu halde

$$\sigma_p(L_0) = \left\{ \frac{1}{(1-q)q^m} : m \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Şimdi L maksimal operatörünün noktasal spektrum kümesi incelensin. Bu halde

$$Lu(t) = \lambda u(t), u \in D \setminus \{0\}$$

eşitliğinin çözümü benzer şekilde her $k \in \mathbb{N}$ için

$$u(q^{k+1}) = \left(\prod_{n=0}^k (1 - (1-q)\lambda q^n) \right) u(1), \quad u(1) \neq 0$$

olup $D_0 \subset D$ olduğundan $\sigma_p(L_0) \subset \sigma(L)$ olduğu açıktır. Diğer taraftan, her $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_p(L_0)$ için $\left(\prod_{n=0}^k (1 - (1-q)\lambda q^n) \right)$ çarpım dizisi yakınsaktır [43]. Buradan

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u(q^k) = \left(\prod_{k=0}^{+\infty} (1 - (1-q)\lambda q^k) \right) u(1)$$

olup $u \in L_q^2(0,1)$ olduğu açıktır. Diğer taraftan, her $k \in \mathbb{N}_0$ için

$$\frac{u(q^k) - u(q^{k+1})}{(1-q)q^k} = \lambda u(q^k)$$

eşitliği sağlandığından $D_q u(t) \in L_q^2(0,1)$ olduğu elde edilir. Ayrıca D lineer manifoldu için bir sınır koşulu olmadığından $u \in D$ olup $\lambda \in \sigma_p(L)$ olur. Böylece $\sigma_p(L) = \mathbb{C}$ eşitliği sağlanır. ■

Teorem 2.1.11: L_0 operatörü için kalan ve sürekli spektrum kümeleri

$$\sigma_r(L_0) = \emptyset$$

$$\sigma_c(L_0) = \emptyset$$

şeklindedir.

İspat: Varsayalım ki $\lambda \in \sigma_r(L_0)$ olsun. Bu halde

$$L_q^2(0,1) = \overline{R(L_0 - \lambda E)} \oplus \text{Ker}(L_0^* - \lambda E)$$

olduğundan $\bar{\lambda} \in \sigma_p(L_0^*)$. Buradan, bir $u \in D(L_0^*) = D$, $u \neq 0$ mevcuttur öyle ki

$$L_0^* u(t) = u(t) \bar{\lambda}$$

eşitliği sağlanır. Şimdi, her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-q} u(1) &= \bar{\lambda} u(1) \\ \frac{u(q^k) - u(q^{k-1})}{(1-q)q^k} &= \bar{\lambda} u(q^k) \quad (*) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Buradan ise $n \geq 1$ için

$$\begin{aligned} u(q^k) &= \frac{1}{1 - \lambda(1-q)q^k} u(q^{k-1}) \\ &= \left(\prod_{n=1}^k (1 - \lambda(1-q)q^n)^{-1} \right) u(1) \end{aligned}$$

Bu halde $u(1) \neq 0$ ise $\lambda = \frac{1}{1-q}$ ve her $k \geq 1$ için, eğer

$$u(1) = u(q) = \dots = u(q^m) = 0$$

ve

$$u(q^{m+1}) \neq 0$$

ise (*) dan

$$\frac{u(q^{m+1})}{(1-q)q^{m+1}} = \bar{\lambda} u(q^{m+1})$$

olup $\bar{\lambda} = \frac{1}{(1-q)q^{m+1}}$ olur. Üstelik her $k > m+1$ için

$$u(q^k) = \left(\prod_{j=m+2}^k (1 - \lambda(1-q)q^j)^{-1} \right) u(q^{m+1})$$

olur. Burada $\prod_{j=m+2}^k (1 - \lambda(1-q)q^j)^{-1}$, $\lambda \neq \frac{1}{(1-q)q^j}$ ve $j > m+2$ olduğundan çarpım dizisi yakınsaktır. Dolayısıyla $\{u(q^k)\} \subset \mathbb{C}$ dizisi sınırlıdır. Buradan $u \in L_q^2(0,1)$ olduğu elde edilir. Dolayısıyla

$$\sigma_p(L_0^*) = \left\{ \frac{1}{(1-q)q^k} : k \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

olduğu görülür. Oysa

$$\sigma_p(L_0) = \sigma_p(L_0^*)$$

olup $\sigma_r(L_0) = \emptyset$ olduğu elde edilir.

Şimdi $\sigma_c(L_0) = \emptyset$ olduğunu gösterilsin. Bunun için $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_p(L_0)$ ve $f \in L_q^2(0,1)$ keyfi alınsın. Bu halde

$$(L_0 - \lambda E)u(t) = f(t)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u(q^n) = 0$$

denkleminin çözümünün varlığını $L_q^2(0,1)$ vektör uzayında araştırılsın. Buradan her $k \in \mathbb{N}_0$ için

$$\frac{u(q^k) - u(q^{k+1})}{(1-q)q^k} - \lambda u(q^k) = f(q^k).$$

Buradan $k \in \mathbb{N}_0$ için

$$u(q^{k+1}) = (1 - \lambda(1-q)q^k)u(q^k) - (1-q)q^k f(q^k)$$

elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned} u(q) &= (1 - \lambda(1-q))u(1) - (1-q)f(1) \\ u(q^2) &= (1 - \lambda(1-q)q)[(1 - \lambda(1-q))u(1) - (1-q)f(1)] - (1-q)qf(q) \\ &= (1 - \lambda(1-q)q)(1 - \lambda(1-q))u(1) - (1-q)((1 - \lambda(1-q)q)f(1) + qf(q)) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} u(q^3) &= (1 - \lambda(1-q)q^2)[(1 - \lambda(1-q)q)(1 - \lambda(1-q))u(1) \\ &\quad - (1-q)(1 - \lambda(1-q)q)f(1) + qf(q)] - (1-q)q^2 f(q^2) \\ &= \left(\prod_{n=0}^2 (1 - \lambda(1-q)q^n) \right) u(1) \\ &\quad - (1-q) \left[\left(\prod_{n=1}^2 (1 - \lambda(1-q)q^n) \right) f(1) \right. \\ &\quad \left. + \left(\prod_{n=2}^2 (1 - \lambda(1-q)q^n) \right) qf(q) + q^2 f(q^2) \right] \end{aligned}$$

olup genelleştirilirse

$$\begin{aligned} u(q^{k+1}) &= \left(\prod_{n=0}^k (1 - \lambda(1-q)q^n) \right) u(1) \\ &\quad - (1-q) \left[\left(\prod_{n=1}^k (1 - \lambda(1-q)q^n) \right) f(1) \right. \\ &\quad \left. + \left(\prod_{n=2}^k (1 - \lambda(1-q)q^n) \right) qf(q) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\prod_{n=k-1}^k (1 - \lambda(1-q)q^n) \right) q^{k-1} f(q^{k-1}) + q^k f(q^k) \right] \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Diğer taraftan $\lambda \notin \sigma_p(L_0^*)$ olduğundan $\{\prod_{k=0}^n (1 - \lambda(1 - q)q^k)\}$ çarpım serisi sıfırdan farklı bir limiti olup sınırlıdır. Üstelik $\{\prod_{k=0}^n (1 - (1 - q)\lambda q^k)\} \subset \mathbb{C}$ yakınsak ve $\lambda \notin \sigma_p(L_0)$ olduğundan $m, M > 0$ mevcuttur öyle ki her $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$0 < m \leq \left| \prod_{k=0}^n (1 - \lambda(1 - q)q^k) \right| \leq M$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca $m \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \left| \prod_{k=m}^{n+m} (1 - (1 - q)\lambda q^k) \right| &= \frac{|\prod_{k=0}^{n+m} (1 - \lambda(1 - q)q^k)|}{|\prod_{k=0}^{m-1} (1 - \lambda(1 - q)q^k)|} \\ &\leq \frac{M}{|\prod_{k=0}^{m-1} (1 - \lambda(1 - q)q^k)|} \leq \frac{M}{m}. \end{aligned}$$

$f \in L_q^2(0,1)$ ise bir $m \in \mathbb{N}_0$ mevcuttur öyle ki her $k \geq m$ için $q^k |f(q^k)|^2 \leq 1$ olup her $k \geq m$ için $q^k |f(q^k)| < q^{\frac{k}{2}}$ olduğundan $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k |f(q^k)|$ serisi yakınsaktır. Bu halde

$$\begin{aligned} |u(q^{k+1})| &\leq \left| \prod_{n=0}^k (1 - \lambda(1 - q)q^n) \right| |f(1)| + \left| \prod_{n=2}^k (1 - \lambda(1 - q)q^n) \right| q |f(q)| + \dots \\ &\quad + q^k |f(q^k)| \\ &\leq \frac{M}{m} \sum_{k=0}^n q^k |f(q^k)| < +\infty. \end{aligned}$$

Ayrıca

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \prod_{k=0}^{+\infty} (1 - \lambda(1 - q)q^k) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \alpha_n &= \prod_{k=n}^{+\infty} (1 - \lambda(1 - q)q^k) \end{aligned}$$

olarak tanımlanırsa

$$u(1) = \alpha^{-1} \sum_{k=0}^n \alpha_k q^k f(q^k)$$

eşitliği elde edilir. Buradan $\lim_{n \rightarrow +\infty} u(q^n) = 0$ olur. Böylece $u \in D(L_0)$. Buradan da

$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_p(L_0) \subset \rho(L_0)$ olduğu elde edilir. Sonuç olarak $\sigma_c(L_0) = \emptyset$ eşitliği sağlanır. ■

Sonuç 2.1.12: L_0 operatörünün spektrum kümesi $\sigma(L_0) = \sigma_p(L_0) = \left\{ \frac{1}{(1-q)q^k} : k \in \mathbb{N}_0 \right\}$

şeklindedir.

Teorem 2.1.13: $V(L_0) = \mathbb{C}$ dir.

İspat: $\lambda \neq \mathbb{C} \setminus \sigma_p(L_0)$ keyfi ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\alpha_n^2 := (1-q) \sum_{k=0}^n q^k \left| \prod_{i=0}^k (1 - \lambda(1-q)q^{i-1}) \right|^2$$

olmak üzere

$$u_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_n} \prod_{i=0}^k (1 - \lambda(1-q)q^{i-1}), & t = q^k, \quad 0 \leq k \leq n \\ 0 & , t \neq q^k, \end{cases}$$

şeklinde bir fonksiyon ailesi tanımlansın. Her $n \in \mathbb{N}$ için $u_n \in D(L_0)$ ve $\|u_n\|_{q,2} = 1$ olduğu açıktır. Bu halde $0 \leq k \leq n-1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} L_0 u_n(q^k) &= \frac{u_n(q^k) - u_n(q^{k+1})}{(1-q)q^k} \\ &= \frac{\frac{1}{\alpha_n} \prod_{i=0}^k (1 - \lambda(1-q)q^{i-1}) - \frac{1}{\alpha_n} \prod_{i=0}^{k+1} (1 - \lambda(1-q)q^{i-1})}{(1-q)q^k} \\ &= \frac{\frac{1}{\alpha_n} (1 - (1 - \lambda(1-q)q^k)) \prod_{i=0}^{k-1} (1 - \lambda(1-q)q^{i-1})}{(1-q)q^k} \\ &= \frac{\lambda}{\alpha_n} \prod_{i=0}^k (1 - \lambda(1-q)q^{i-1}). \end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned} (L_0 u_n(t), u_n(t)) &= (1-q) \sum_{k=0}^{n-1} q^k \frac{\lambda}{\alpha_n} \left(\prod_{i=0}^k (1 - \lambda(1-q)q^{i-1}) \right) \\ &\quad \cdot \frac{1}{\alpha_n} \prod_{i=0}^k (1 - \lambda(1-q)q^i) \\ &\quad + (1-q) \frac{q^n}{\alpha_n} \left| \prod_{i=0}^n (1 - \lambda(1-q)q^{i-1}) \right|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lambda}{|\alpha_n|^2} \left((1-q) \sum_{k=0}^{n-1} q^k \left| \prod_{i=0}^k (1 - \lambda(1-q)q^{i-1}) \right|^2 \right) \\
&\quad + (1-q) \frac{q^n}{\alpha_n} \left| \prod_{i=0}^n (1 - \lambda(1-q)q^{i-1}) \right|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda
\end{aligned}$$

olup $V(L_0)$, $\mathbb{C}$ de yoğun olduğu elde edilir. Ayrıca nümerik alan konveks küme olduğundan $V(L_0) = \mathbb{C}$ sonucuna ulaşılır.

2.2. $L_q^2(0, +\infty)$ Uzayı ve q -Fark Operatörü

Tanım 2.2.1: $u: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyon olmak üzere

$$\int_0^{+\infty} u(t) d_q t = (1-q) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k u(q^k) < +\infty$$

ise $u(t)$ fonksiyonuna $[0, +\infty)$ üzerinde q -integrallenebilir denir.

$[0, +\infty)$ üzerinde tanımlı kompleks değerli $u(t)$ ve $v(t)$ fonksiyonları $[0, +\infty)$ üzerinde $|u(t)|^2$ ve $|v(t)|^2$ fonksiyonları q -integrallenebilir olsunlar. $u \sim v$ ancak ve ancak her $n \in \mathbb{Z}$ için $u(q^n) = v(q^n)$ biçiminde tanımlanan ' $\sim$ ' bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Bu halde

$$L_q^2(0, +\infty) = \left\{ [u]: u: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}, \int_0^{+\infty} |u(t)|^2 d_q t = (1-q) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k |u(q^k)|^2 < +\infty \right\}$$

kümesi $u, v \in L_q^2(0, +\infty)$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$[u] + [v] = [u + v]$$

ve

$$\alpha[u] = [\alpha u]$$

şeklinde tanımlanan toplama ve skaler ile çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayıdır.

Önerme 2.2.2: $L_q^2(0, +\infty)$ vektör uzayı

$$(u, v)_{L_q^2(0, +\infty)} := \int_0^{+\infty} u(t) \overline{v(t)} d_q t, u, v \in L_q^2(0, +\infty)$$

olarak tanımlanan iç çarpım ile bir Hilbert uzayıdır.

İspat: İlk olarak $L_q^2(0, +\infty)$ vektör uzayının iç çarpım fonksiyonunun özelliklerini sağlandığı gösterilsin.

i. Her $u \in L_q^2(0,1)$ için

$$\begin{aligned} (u, u)_{L_q^2(0,+\infty)} &= \int_0^{+\infty} u(t) \overline{u(t)} d_q t = \int_0^{+\infty} |u(t)|^2 d_q t \\ &= (1-q) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k |u(q^k)|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Eğer $u \in L_q^2(0,+\infty)$ ve

$$(u, u)_{L_q^2(0,+\infty)} = \int_0^{+\infty} u(t) \overline{u(t)} d_q t = 0$$

yani

$$(u, u)_{L_q^2(0,+\infty)} = \int_0^{+\infty} |u(t)|^2 d_q t = 0$$

olur ki her $n \in \mathbb{N}_0$ için $u \in [0]$. Diğer taraftan $u \in [0]$ ise

$$(u, u)_{L_q^2(0,+\infty)} = \int_0^{+\infty} u(t) \overline{u(t)} d_q t = \int_0^{+\infty} |u(t)|^2 d_q t = \int_0^{+\infty} 0 d_q t = 0$$

olduğundan $(u, u)_{L_q^2(0,+\infty)} = 0$ olduğu görülür.

ii. Her $u, v \in L_q^2(0,+\infty)$ için

$$\begin{aligned} (u, v)_{L_q^2(0,+\infty)} &= \int_0^{+\infty} u(t) \overline{v(t)} d_q t = (1-q) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k u(q^k) \overline{v(q^k)} \\ &= \lim_{n, m \rightarrow +\infty} (1-q) \sum_{k=-m}^n q^k u(q^k) \overline{v(q^k)} \\ &= \lim_{n, m \rightarrow +\infty} (1-q) \sum_{k=-m}^n q^k \overline{u(q^k)} v(q^k) \\ &= (1-q) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k \overline{u(q^k)} v(q^k) \\ &= \int_0^{+\infty} v(t) \overline{u(t)} d_q t \\ &= \overline{(v, u)}_{L_q^2(0,+\infty)} \end{aligned}$$

iii. Her $u, v \in L_q^2(0,+\infty)$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned}
(\alpha u, v)_{L_q^2(0, +\infty)} &= \int_0^{+\infty} \alpha u(t) \overline{v(t)} d_q t = (1-q) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k \alpha u(q^k) \overline{v(q^k)} \\
&= \lim_{n, m \rightarrow +\infty} (1-q) \sum_{k=-m}^n q^k \alpha u(q^k) \overline{v(q^k)} \\
&= \alpha \lim_{n, m \rightarrow +\infty} (1-q) \sum_{k=-m}^n q^k u(q^k) \overline{v(q^k)} \\
&= \alpha (1-q) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k u(q^k) \overline{v(q^k)} = \alpha \int_0^{+\infty} u(t) \overline{v(t)} d_q t \\
&= \alpha (u, v)_{L_q^2(0, +\infty)}
\end{aligned}$$

iv. Her $u, v, w \in L_q^2(0, +\infty)$ için

$$\begin{aligned}
(u + v, w)_{L_q^2(0, +\infty)} &= \int_0^{+\infty} (u(t) + v(t)) \overline{w(t)} d_q t \\
&= (1-q) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k (u(q^k) + v(q^k)) \overline{w(q^k)} \\
&= \lim_{n, m \rightarrow +\infty} (1-q) \sum_{k=-m}^n q^k (u(q^k) + v(q^k)) \overline{w(q^k)} \\
&= \lim_{n, m \rightarrow +\infty} (1-q) \sum_{k=-m}^n q^k (u(q^k) \overline{w(q^k)} + v(q^k) \overline{w(q^k)}) \\
&= \lim_{n, m \rightarrow +\infty} (1-q) \sum_{k=-m}^n q^k u(q^k) \overline{w(q^k)} + q^k v(q^k) \overline{w(q^k)} \\
&= \lim_{n, m \rightarrow +\infty} (1-q) \sum_{k=-m}^n q^k u(q^k) \overline{w(q^k)} \\
&\quad + \lim_{n, m \rightarrow +\infty} (1-q) \sum_{k=-m}^n q^k v(q^k) \overline{w(q^k)} \\
&= (1-q) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k u(q^k) \overline{w(q^k)} \\
&\quad + (1-q) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k v(q^k) \overline{w(q^k)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{+\infty} u(t) \overline{w(t)} d_q t + \int_0^{+\infty} v(t) \overline{w(t)} d_q t \\
&= (u, w)_{L_q^2(0, +\infty)} + (v, w)_{L_q^2(0, +\infty)}.
\end{aligned}$$

Tamlığı Önerme 2.1.2 nin ispatına benzer şekilde gösterilir. ■

Önerme 2.2.3: Eğer $u \in L_q^2(0, +\infty)$ ise

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u(q^{-n}) = 0.$$

İspat: $u \in L_q^2(0, +\infty)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L_q^2(0, +\infty)}^2 &= \int_0^{+\infty} |u(t)|^2 d_q t = (1-q) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k |u(q^k)|^2 \\
&= (1-q) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k |u(q^k)|^2 = \lim_{n, m \rightarrow +\infty} (1-q) \sum_{k=-n}^m q^k |u(q^k)|^2 < +\infty
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u(q^{-n}) = 0$$

elde edilir. ■

Önerme 2.2.4: Eğer $D_q u \in L_q^2(0, +\infty)$ ise

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u(q^n)$$

limiti mevcuttur.

İspat: $D_q u, \chi_{[0,1]} \in L_q^2(0, +\infty)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
(D_q u, \chi_{[0,1]})_{L_q^2(0, +\infty)} &= \int_0^{+\infty} \chi_{[0,1]}(t) D_q u(t) d_q t = \int_0^1 D_q u(t) d_q t \\
&= (1-q) \sum_{k=0}^{+\infty} q^k \frac{u(q^k) - u(q^{k+1})}{(1-q)q^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} u(q^k) - u(q^{k+1}) \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u(q^k) - u(q^{k+1}) \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} [u(1) - u(q) + u(q) - u(q^2) \\
&\quad + \cdots + u(q^n) - u(q^{n+1}) + \cdots] < +\infty
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u(q^n)$$

limiti mevcuttur. ■

Şimdi $L_q^2(0, +\infty)$ Hilbert uzayında q -fark operatörü ele alınsın. Bu halde

$$D_q(uv)(t) = v(t)D_q u(t) + u(qt)D_q v(t)$$

olmak üzere, $u, v, D_q u, D_q v \in L_q^2(0, +\infty)$ için

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} D_q(uv)(t) d_q t &= (1-q) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k \left(\frac{u(q^k)v(q^k) - u(q^{k+1})v(q^{k+1})}{(1-q)q^k} \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(q^k)v(q^k) - u(q^{k+1})v(q^{k+1}) \\ &= \lim_{n,m \rightarrow +\infty} \sum_{k=-m}^n u(q^k)v(q^k) - u(q^{k+1})v(q^{k+1}) \\ &= \lim_{n,m \rightarrow +\infty} [u(q^{-m})v(q^{-m}) - u(q^{-m+1})v(q^{-m+1}) \\ &\quad + u(q^{-m+1})v(q^{-m+1}) - u(q^{-m+2})v(q^{-m+2}) \\ &\quad + u(q^{-m+2})v(q^{-m+2}) - \dots + u(q^{-1})v(q^{-1}) \\ &\quad - u(1)v(1) + u(q)v(q) + \dots + u(q^n)v(q^n) - u(q^{n+1})v(q^{n+1})] \\ &= \lim_{n,m \rightarrow +\infty} (u(q^{-m})v(q^{-m}) - u(q^n)v(q^n)) \\ &= - \lim_{n \rightarrow +\infty} u(q^n)v(q^n) < +\infty \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} (D_q u, v)_{L_q^2(0, +\infty)} &= \int_0^{+\infty} D_q u(t) \overline{v(t)} d_q t \\ &= - \lim_{k \rightarrow +\infty} u(q^k) \overline{v(q^k)} - \int_0^{+\infty} u(qt) \overline{D_q v(t)} d_q t \\ &= - \lim_{k \rightarrow +\infty} u(q^k) \overline{v(q^k)} - (1-q) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k u(q^{k+1}) \frac{\overline{v(q^k) - v(q^{k+1})}}{(1-q)q^k} \\ &= - \lim_{k \rightarrow +\infty} u(q^k) \overline{v(q^k)} + (1-q) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^{k+1} u(q^{k+1}) \frac{\overline{v(q^{k+1}) - v(q^k)}}{(1-q)q^{k+1}} \\ &= - \lim_{k \rightarrow +\infty} u(q^k) \overline{v(q^k)} - (1-q) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k u(q^k) \overline{\left(-\frac{1}{q} D_{q^{-1}} v(t) \right)} \end{aligned}$$

eşitliği doğrudur. Buradan q -fark operatörünün $L_q^2(0, +\infty)$ uzayındaki formal eşleniği

$-\frac{1}{q} D_{q^{-1}}$ olduğu görülür. Bu halde,

$$D_0 = \left\{ u \in L_q^2(0, +\infty) : D_q u(t) \in L_q^2(0, +\infty) \text{ ve } \lim_{k \rightarrow \infty} u(q^k) = 0 \right\}$$

$$D = \left\{ u \in L_q^2(0, +\infty) : D_q u(t) \in L_q^2(0, +\infty) \right\}$$

lineer manifoldları üzerinde

$$Lu(t) = D_q u(t)$$

$$L_0 u(t) = D_q u(t)$$

şeklinde tanımlanan operatörler sırasıyla q -fark operatörünün $L_q^2(0, +\infty)$ Hilbert uzayında ürettiği maksimal ve minimal operatörler olarak adlandırılacaktır. Açıkça $L_0 \subset L$ olup $D(L^*) = D(L_0)$ ve $D(L_0^*) = D(L)$ dir.

Teorem 2.2.5: L_0 minimal ve L maksimal operatörleri kapalı operatörlerdir.

İspat: Teorem 2.1.5 in ispatına benzer şekilde gösterilebilir. ■

Teorem 2.2.6: L_0 minimal operatörü formal q^{-1} -normal operatördür.

İspat: Her $u(t) \in D_0 \subset D(L^*)$ için

$$\begin{aligned} \|L_0 u\|_{L_q^2(0, +\infty)}^2 &= \int_0^{+\infty} |D_q u(t)|^2 d_q t \\ &= (1-q) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k |D_q u(q^k)|^2 \\ &= (1-q) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k \left| \frac{u(q^k) - u(q^{k+1})}{(1-q)q^k} \right|^2 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \|L_0^* u\|_{L_q^2(0, +\infty)}^2 &= \int_0^{+\infty} \left| -\frac{1}{q} D_{q^{-1}} u(t) \right|^2 d_q t \\ &= (1-q) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k \left| -\frac{1}{q} D_{q^{-1}} u(q^k) \right|^2 \\ &= \frac{1}{q^2} (1-q) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k \left| \frac{u(q^k) - u(q^{k-1})}{\left(1 - \frac{1}{q}\right) q^k} \right|^2 \\ &= \frac{1}{q^2} (1-q) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k q^2 \left| \frac{u(q^k) - u(q^{k-1})}{(1-q)q^k} \right|^2 \\ &= (1-q) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k \left| \frac{u(q^k) - u(q^{k-1})}{(1-q)q^k} \right|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1-q) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k \frac{1}{q^2} \left| \frac{u(q^{k-1}) - u(q^k)}{(1-q)q^{k-1}} \right|^2 \\
&= \frac{1}{q} (1-q) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^{k-1} \left| \frac{u(q^{k-1}) - u(q^k)}{(1-q)q^{k-1}} \right|^2 \\
&= \frac{1}{q} (1-q) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k \left| \frac{u(q^k) - u(q^{k+1})}{(1-q)q^k} \right|^2
\end{aligned}$$

buradan

$$\|L_0 u(t)\| = \sqrt{q} \|L_0^* u(t)\|$$

olduğu elde edilir. ■

Sonuç 2.2.7: L_0 minimal operatörünün q^{-1} -normal genişlemesi yoktur.

Teorem 2.2.8: L_0 minimal operatörü için noktasal ve kalan spektrum kümeleri

$$\sigma_p(L_0) = \left\{ \frac{q^m}{1-q} : m \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\sigma_r(L_0) = \emptyset$$

şeklindedir.

İspat: $\lambda \in \sigma_p(L_0)$ olsun. Bu takdirde her $k \in \mathbb{Z}$ için

$$D_q u(q^k) = \lambda u(q^k)$$

Buradan da

$$\frac{u(q^k) - u(q^{k+1})}{(1-q)q^k} = \lambda u(q^k).$$

Şimdi bu denklemin çözümü incelensin. Bu halde her $k \in \mathbb{Z}$ için

$$(1 - \lambda(1-q)q^k)u(q^k) = u(q^{k+1})$$

elde edilir. Eğer bir $m \in \mathbb{Z}$ için $\lambda = \frac{1}{(1-q)q^m}$ ise $u(t)$ özvektörü

$$u(q^k) = 0, k \geq m+1$$

$$u(q^k) = \left(\prod_{i=k-m}^{-1} \frac{1}{1-q^i} \right) u(q^m), k \leq m-1$$

olur. $0 < q < 1$ olduğundan

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} |1 - q^k| = +\infty$$

eşitliği doğrudur. Bir negatif k tamsayısı vardır öyle ki

$$\prod_{n=k+1-m}^{-1} \frac{1}{|1 - q^n|} \leq 1.$$

Bu sonuncu eşitsizlikten her $m \in \mathbb{Z}$ için $\frac{q^m}{1-q}$ özdeğerine karşılık $u(t)$ fonksiyonunun bir özvektör olduğu elde edilir.

Diğer taraftan, bir $m \in \mathbb{Z}$ için $\lambda \neq \frac{q^m}{1-q}$ olsun. Bu halde

$$u(q^k) = \left(\prod_{i=0}^{k-1} (1 - \lambda(1-q)q^i) \right) u(1), k \in \mathbb{N}.$$

Fakat, $u \in D_0$, $u(q^k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ olmak zorunda olduğundan

$$1 - \lambda(1-q)q^m = 0, \quad m \in \mathbb{N}$$

[43] ya da $u(1) = 0$ olmalıdır. Bu durumda, $u(1) = 0$ ve $u = 0$ olduğu elde edilir. Sonuç olarak $\sigma_p(L_0) = \left\{ \frac{q^m}{1-q} : m \in \mathbb{Z} \right\}$ elde edilir.

Şimdi kalan spektrumu incelensin. Bu halde $\lambda \in \sigma_r(L_0)$ ise $\lambda \in \sigma_p(L_0^*)$ olmak zorundadır. Buradan

$$-\frac{1}{q} D_{q^{-1}} u(q^k) = \lambda u(q^k), k \in \mathbb{Z}$$

olup

$$-\frac{1}{q} \left(\frac{u(q^k) - u(q^{k-1})}{\left(1 - \frac{1}{q}\right) q^k} \right) = \lambda u(q^k), k \in \mathbb{Z}$$

eşitliği elde edilir. Bu sonuncudan,

$$\frac{u(q^k) - u(q^{k-1})}{(1-q)q^k} = \lambda u(q^k), k \in \mathbb{Z}$$

$$u(q^{k-1}) = (1 - \lambda(1-q)q^k) u(q^k), k \in \mathbb{Z}$$

olduğu elde edilir. Eğer bir $m \in \mathbb{Z}$ için $\lambda = \frac{q^m}{1-q}$ ise

$$u(q^k) = 0, k \leq m-1$$

$$u(q^k) = \left(\prod_{i=m+1}^k \frac{1}{1-q^{i-m}} \right) u(q^m), k \geq m+1$$

eşitlikleri sağlanır. Çünkü $\sum_{k=m+1}^{+\infty} q^k \left(\prod_{i=m+1}^k \frac{1}{1-q^{i-m}} \right)^2$ serisi yakınsak olduğundan $u \in L_q^2(0, +\infty)$ olur.

Diğer taraftan, eğer $m \in \mathbb{Z}$ için $\lambda \neq \frac{q^m}{1-q}$ ise $u(1) \neq 0$ ve

$$u(q^k) = \left(\prod_{i=0}^{-k} (1 - \lambda(1-q)q^{-i}) \right) u(1), k \leq 0$$

olmalıdır. Ama $m \in \mathbb{Z}$ için $\lambda \neq \frac{q^m}{1-q}$ ise $\lim_{k \rightarrow -\infty} u(q^k)$ limiti mevcut değildir. Sonuç olarak,

$$\sigma_r(L_0) = \emptyset$$

elde edilir.

2.3. $L_q^2(\mathbb{R})$ Uzayı ve q -Fark Operatörü

Tanım 2.3.1: $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyon olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t) d_q t = (1-q) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k (u(q^k) + u(-q^k)) < +\infty$$

ise $u(t)$ fonksiyonuna $\mathbb{R}$ üzerinde q -integrallenebilir denir.

$\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı kompleks değerli $u(t)$ ve $v(t)$ fonksiyonları için $\mathbb{R}$ üzerinde $|u(t)|^2$ ve $|v(t)|^2$ fonksiyonları q -integrallenebilir olsunlar.

$u \sim v$ ancak ve ancak her $n \in \mathbb{Z}$ için $u(q^n) = v(q^n)$ biçiminde tanımlanan ' $\sim$ ' bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Bu halde

$$L_q^2(\mathbb{R}) = \left\{ [u]: u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^2 d_q t = (1-q) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k |u(q^k) + u(-q^k)|^2 < +\infty \right\}$$

kümesi $u, v \in L_q^2(\mathbb{R})$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$[u] + [v] = [u + v]$$

ve

$$\alpha[u] = [\alpha u]$$

şeklinde tanımlanan toplama ve skaler ile çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayıdır.

Önerme 2.3.2: $L_q^2(\mathbb{R})$ vektör uzayı

$$(u, v)_{L_q^2(\mathbb{R})} := \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \overline{v(t)} d_q t, u, v \in L_q^2(\mathbb{R})$$

olarak tanımlanan iç çarpım ile bir Hilbert uzayıdır.

İspat: İlk olarak $L_q^2(\mathbb{R})$ vektör uzayının iç çarpım fonksiyonunun özelliklerini sağladığı gösterilsin.

i. Her $u \in L_q^2(\mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned}
(u, u)_{L_q^2(\mathbb{R})} &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \overline{u(t)} d_q t = \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^2 d_q t \\
&= (1-q) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k |u(q^k) + u(-q^k)|^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Eğer $u \in L_q^2(\mathbb{R})$ ve

$$(u, u)_{L_q^2(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \overline{u(t)} d_q t = 0$$

yani

$$(u, u)_{L_q^2(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^2 d_q t = 0$$

ise buradan her $n \in \mathbb{N}_0$ için $u \in [0]$. Diğer taraftan $u \in [0]$ ise

$$(u, u)_{L_q^2(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \overline{u(t)} d_q t = \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^2 d_q t = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 d_q t = 0$$

olduğundan $(u, u)_{L_q^2(\mathbb{R})} = 0$ olduğu görülür.

ii. Her $u, v \in L_q^2(\mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned}
(u, v)_{L_q^2(\mathbb{R})} &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \overline{v(t)} d_q t = (1-q) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k (u(q^k) \overline{v(q^k)} + u(-q^k) \overline{v(-q^k)}) \\
&= \lim_{n, m \rightarrow +\infty} (1-q) \sum_{k=-n}^m q^k (u(q^k) \overline{v(q^k)} + u(-q^k) \overline{v(-q^k)}) \\
&= \lim_{n, m \rightarrow +\infty} (1-q) \sum_{k=-n}^m q^k (\overline{u(q^k)} v(q^k) + \overline{u(-q^k)} v(-q^k)) \\
&= (1-q) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k (\overline{u(q^k)} v(q^k) + \overline{u(-q^k)} v(-q^k)) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) \overline{u(t)} d_q t \\
&= \overline{(v, u)}_{L_q^2(\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

iii. Her $u, v \in L_q^2(\mathbb{R})$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ için

$$(\alpha u, v)_{L_q^2(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha u(t) \overline{v(t)} d_q t = (1-q) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k \alpha (u(q^k) \overline{v(q^k)} + u(-q^k) \overline{v(-q^k)})$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n,m \rightarrow +\infty} (1-q) \sum_{k=-n}^m q^k \alpha (u(q^k) \overline{v(q^k)} + u(-q^k) \overline{v(-q^k)}) \\
&= \alpha \lim_{n,m \rightarrow +\infty} (1-q) \sum_{k=-n}^m q^k (u(q^k) \overline{v(q^k)} + u(-q^k) \overline{v(-q^k)}) \\
&= \alpha (1-q) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k (u(q^k) \overline{v(q^k)} + u(-q^k) \overline{v(-q^k)}) \\
&= \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \overline{v(t)} d_q t \\
&= \alpha (u, v)_{L_q^2(\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

iv. Her $u, v, w \in L_q^2(\mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned}
(u + v, w)_{L_q^2(\mathbb{R})} &= \int_{-\infty}^{+\infty} (u(t) + v(t)) \overline{w(t)} d_q t \\
&= (1-q) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k \left((u(q^k) + v(q^k)) \overline{w(q^k)} + (u(-q^k) + v(-q^k)) \overline{w(-q^k)} \right) \\
&= \lim_{n,m \rightarrow +\infty} (1-q) \sum_{k=-n}^m q^k \left((u(q^k) + v(q^k)) \overline{w(q^k)} + (u(-q^k) + v(-q^k)) \overline{w(-q^k)} \right) \\
&= \lim_{n,m \rightarrow +\infty} (1-q) \sum_{k=-n}^m q^k (u(q^k) \overline{w(q^k)} + v(q^k) \overline{w(q^k)} + u(-q^k) \overline{w(-q^k)} \\
&\quad + v(-q^k) \overline{w(-q^k)}) \\
&= \lim_{n,m \rightarrow +\infty} (1-q) \sum_{k=-n}^m q^k (u(q^k) \overline{w(q^k)} + v(q^k) \overline{w(q^k)}) \\
&\quad + \lim_{n,m \rightarrow +\infty} (1-q) \sum_{k=-n}^m q^k (u(-q^k) \overline{w(-q^k)} + v(-q^k) \overline{w(-q^k)}) \\
&= (1-q) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k (u(q^k) \overline{w(q^k)} + v(q^k) \overline{w(q^k)}) \\
&\quad + (1-q) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k (u(-q^k) \overline{w(-q^k)} + v(-q^k) \overline{w(-q^k)}) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \overline{w(t)} d_q t + \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) \overline{w(t)} d_q t
\end{aligned}$$

$$= (u, w)_{L_q^2(\mathbb{R})} + (v, w)_{L_q^2(\mathbb{R})}.$$

Tamлығы Önerme 2.1.2 nin ispatına benzer şekilde gösterilir. ■

Önerme 2.3.3: Eğer $u \in L_q^2(\mathbb{R})$ ise

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} u(q^n) = \lim_{n \rightarrow -\infty} u(-q^n) = 0.$$

İspat: $u \in L_q^2(\mathbb{R})$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_q^2(\mathbb{R})}^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^2 d_q t \\ &= (1-q) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k (|u(q^k)|^2 + |u(-q^k)|^2) \\ &= (1-q) \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k |u(q^k)|^2 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k |u(-q^k)|^2 \right] \\ &= (1-q) \lim_{n, m \rightarrow +\infty} \sum_{k=-m}^n q^n |u(q^k)|^2 + (1-q) \lim_{n, m \rightarrow +\infty} \sum_{k=-m}^n q^n |u(-q^k)|^2 < +\infty \end{aligned}$$

olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} u(q^n) = \lim_{n \rightarrow -\infty} u(-q^n) = 0$$

olduğu elde edilir. ■

Önerme 2.3.4: Eğer $D_q u \in L_q^2(\mathbb{R})$ ise

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u(q^n)$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u(-q^n)$$

limitleri mevcuttur.

İspat: $D_q u, \chi_{[0,1]} \in L_q^2(\mathbb{R})$ olmak üzere

$$\begin{aligned} (D_q u, \chi_{[0,1]})_{L_q^2(\mathbb{R})} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[0,1]} D_q u(t) d_q t = \int_0^1 D_q u(t) d_q t \\ &= (1-q) \sum_{k=0}^{+\infty} q^k \left(\frac{u(q^k) + u(-q^k) - u(q^{k+1}) - u(-q^{k+1})}{(1-q)q^k} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (u(q^k) + u(-q^k) - u(q^{k+1}) - u(-q^{k+1})) < +\infty \end{aligned}$$

olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u(q^n), \lim_{n \rightarrow +\infty} u(-q^n)$$

limitleri mevcuttur. ■

Şimdi $L_q^2(\mathbb{R})$ Hilbert uzayı üzerinde q -fark operatörü ele alınsın. $u, v \in L_q^2(\mathbb{R})$ için

$$D_q(uv)(t) = D_q u(t)v(t) + u(qt)D_q v(t)$$

olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} D_q(uv) d_q t = - \lim_{k \rightarrow +\infty} u(-q^k)v(-q^k) - \lim_{k \rightarrow +\infty} u(q^k)v(q^k)$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} (D_q u, \bar{v})_{L_q^2(\mathbb{R})} &= \int_{-\infty}^{+\infty} D_q u(t) \overline{v(t)} d_q t \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} (-u(-q^k) \overline{v(-q^k)} - u(q^k) \overline{v(q^k)}) - \int_{-\infty}^{+\infty} u(qt) \overline{D_q v(t)} \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} (-u(-q^k) \overline{v(-q^k)} - u(q^k) \overline{v(q^k)}) \\ &\quad - (1-q) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k \left(u(q^{k+1}) \frac{\overline{v(q^k) - v(q^{k+1})}}{(1-q)q^k} \right. \\ &\quad \left. + u(-q^{k+1}) \frac{\overline{v(-q^k) - v(-q^{k+1})}}{(1-q)q^k} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} (-u(-q^k) \overline{v(-q^k)} - u(q^k) \overline{v(q^k)}) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} (-u(-q^k) \overline{v(-q^k)} - u(q^k) \overline{v(q^k)}) - \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \overline{-\frac{1}{q} D_{q^{-1}} v(t)} d_q t \end{aligned}$$

olup q -fark operatörünün formal eşleniği $-\frac{1}{q} D_{q^{-1}}$ olur. Bu halde,

$$D_0 = \left\{ u \in L_q^2(\mathbb{R}) : D_q u(t) \in L_q^2(\mathbb{R}) \text{ ve } \lim_{k \rightarrow \infty} u(\pm q^k) = 0 \right\}$$

$$D = \left\{ u \in L_q^2(\mathbb{R}) : D_q u(t) \in L_q^2(\mathbb{R}) \right\}$$

lineer manifoldları üzerinde

$$L_0: D_0 \rightarrow L_q^2(\mathbb{R})$$

$$L_0 u(t) = D_q u(t)$$

ve

$$L: D \rightarrow L_q^2(\mathbb{R})$$

$$Lu(t) = D_q u(t)$$

olarak tanımlanan operatörler sırasıyla q -fark operatörünün $L_q^2(\mathbb{R})$ Hilbert uzayında ürettiği minimal ve maksimal operatörler olarak adlandırılacaktır. Açıkça $L_0 \subset L$, $D(L^*) = D(L_0)$ ve $D(L_0^*) = D(L)$ dir.

Teorem 2.3.5: L_0 minimal ve L maksimal operatörleri kapalı operatörlerdir.

İspat: Teorem 2.1.5 in ispatına benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 2.3.6: L_0 minimal operatörü formal q^{-1} -normal operatördür.

İspat: Her $u(t) \in D_0$ için

$$\begin{aligned} \|L_0 u(t)\|_{L_q^2(\mathbb{R})}^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |D_q u(t)|^2 d_q t = (1-q) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k |D_q u(q^k)|^2 \\ &= (1-q) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k \left(\left| \frac{u(q^k) - u(q^{k+1})}{(1-q)q^k} \right|^2 + \left| \frac{u(-q^k) - u(-q^{k+1})}{(1-q)q^k} \right|^2 \right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \|L_0^* u(t)\|_{L_q^2(\mathbb{R})}^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| -\frac{1}{q} D_{q^{-1}} u(t) \right|^2 d_q t \\ &= (1-q) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k \left| -\frac{1}{q} D_{q^{-1}} u(q^k) \right|^2 \\ &= (1-q) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k \frac{1}{q^2} \left(\left| \frac{u(q^k) - u(q^{k+1})}{(1-\frac{1}{q})q^k} \right|^2 + \left| \frac{u(-q^k) - u(-q^{k+1})}{(1-\frac{1}{q})q^k} \right|^2 \right) \\ &= (1-q) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k \left(\left| \frac{u(q^k) - u(q^{k+1})}{(1-q)q^k} \right|^2 + \left| \frac{u(-q^k) - u(-q^{k+1})}{(1-q)q^k} \right|^2 \right) \\ &= (1-q) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k \frac{1}{q^2} \left(\left| \frac{u(q^{k-1}) - u(q^k)}{(1-q)q^{k-1}} \right|^2 + \left| \frac{u(-q^{k-1}) - u(-q^k)}{(1-q)q^{k-1}} \right|^2 \right) \\ &= \frac{1}{q} (1-q) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^{k-1} \left(\left| \frac{u(q^{k-1}) - u(q^k)}{(1-q)q^{k-1}} \right|^2 + \left| \frac{u(-q^{k-1}) - u(-q^k)}{(1-q)q^{k-1}} \right|^2 \right) \\ &= \frac{1}{q} (1-q) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k \left(\left| \frac{u(q^k) - u(q^{k+1})}{(1-q)q^k} \right|^2 + \left| \frac{u(-q^k) - u(-q^{k+1})}{(1-q)q^k} \right|^2 \right) \end{aligned}$$

olup

$$\|L_0 u(t)\|_{L_q^2(\mathbb{R})} = \sqrt{q} \|L_0^* u(t)\|_{L_q^2(\mathbb{R})}$$

olduğu elde edilir. ■

Sonuç 2.3.7: L_0 minimal operatörünün q^{-1} -normal genişlemesi yoktur

Teorem 2.3.8: L_0 minimal operatörü için noktasal ve kalan spektrum kümeleri

$$\sigma_p(L_0) = \left\{ \frac{q^m}{1-q} : m \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\sigma_r(L_0) = \emptyset$$

şeklindedir.

İspat: Teorem 2.2.8 in ispatına benzer olarak gösterilebilir.



3. SONUÇLAR

1. Hilbert uzayında q -türev ifadesi tarafından tanımlanan minimal ve maksimal operatörlerin eşlenekleri hesaplandı.
2. Hilbert uzayında q -türev ifadesinin ürettiği minimal ve maksimal operatörlerin spektrum kümeleri belirlendi.
3. Hilbert uzayında q -türev ifadesinin ürettiği minimal ve maksimal operatörler tanıtıldı. Minimal operatörün maksimal q^{-1} -formal normal olduğu sonucuna ulaşıldı. Ayrıca bu operatörlerin spektrum kümelerine ulaşıldı.

Alınan sonuçlar ve bulgular “Complex Analysis and Operator Theory” adlı dergide makale olarak kabul edilmiştir.

4. ÖNERİLER

1. Benzer problemler ikinci mertebeden q -türev operatör ifadesi için $L_q^2(0,1)$ Hilbert uzayında incelenebilir.
2. İkinci mertebeden q -türev bir potansiyel fonksiyon eklenerek q^{-1} -normal genişlemelerinin varlığı serbest inceleme konusu olabilir.



5. KAYNAKLAR

1. Aiprantis, D. ve Burkinshaw O., Principles of Real Analysis, Academic Press, New York, 1998.
2. Andrews G.E., The theory of partitions, Reprint of the 1976 original, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
3. Annaby M.H. ve Mansour Z.S., q -Fractional Calculus and Equations, Lecture Notes in Mathematics, 2056, Springer, Heidelberg, 2012.
4. Barnes E.W., A new development of the theory of the hypergeometric functions, Proc. London Math. Soc., 2, 6 (1908) 141-177.
5. Biedenharn L., J. Phys., C, Matematik Gen., 22 (1989) L873.
6. Bailey W.N., A note on certain q -identities, Quarterly J. Math., Oxford, 12 (1941) 173-175.
7. Bromwich T.J.I.A., An Introduction to the Theory of Infinite Series, 1st edn. Macmillan, London, 1908.
8. Celeghini E. ve diğ erleri, Ann. Phys., 241 (1995) 50.
9. Chaichian M. ve Demichev A., Introduction to quantum groups, World Scientific Publ., Singapore, 1996.
10. Conway, J.B., A Course in Functional Analysis, Springer Verlag, New York Inc., 1985.
11. Conway, J.B., The Theory of Subnormal Operators, Mathematical Surveys and Monographs, USA, 1991.
12. Crabb M. J., The Numerical Range of an Unbounded Operator, Amer. Math. Soc., 55, 1 (1976).
13. Daum J.A., The basic analog of Kummers theorem, Bull. Amer. Math. Soc., 48 (1942) 711-713.
14. Dunford, N. ve Schwartz, J. T., Linear Operators, I; Interscience, New York, 1958.
15. Euler L., Introductio in Analysin Infinitorum, 1, Lausanne, Switzerland, Bousquet (in Latin), 1748.
16. Exton H., q -Hypergeometric Functions and Applications, John Wiley and Sons, New York 1983.
17. Floratos E. G., J. Phys., Matematik. 24 (1991) 4739.
18. Finkelstein R. J., Int. J. Mod. Phys., A 13 (1998) 1795.
19. Gauss C.F., Disquisitiones Generales Circa Seriem infinitam, Werke, 124-162, 1813.
20. Gohberg, I.C., Goldberg, S. ve Kaashoek, M.A., Basic Classes of Linear Operators, Birkhauser, Berlin, 2003.
21. Gorbachuk, V.I. ve Gorbackhuk, M.I. Boundary Value Problems for Operator Differential Equations, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.

22. Halmos, P.R., A Hilbert Space Problem Book, Springer Verlag, New York Inc., 1974.
23. Hebecker S., Schwenk J., Weich W. ve Wess J., Representations of a q -deformed Heisenberg algebra, journal of math. Phys., 64 (1994) 355–359.
24. Jackson F., Mess. Math., 38 (1909) 57.
25. Jackson F.H., On generalized functions of Legendre and Bessel, Trans. Roy. Soc. Edinb., 41(1903) 1–28.
26. Jackson F.H., On q -functions and a certain difference operator, Trans. Roy. Soc. Edinb., 46 (1908) 64–72.
27. Jackson F.H., On q -definite integrals, Quart., J. Pure Appl. Math., 41 (1910) 193–203.
28. Jackson F.H., The q -integral analogous to Borel's integral, Messenger of Math., 47 (1917) 57–64.
29. Kac V. ve Cheung P., Quantum Calculus, Springer, New York, 2002.
30. Klimyk A. ve Schmüdgen K., Quantum groups and their representations, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1997.
31. Koelink H.T. ve Swarttouw R.F., On the zeros of the Hahn-Exton q -Bessel function and associated q -Lommel polynomials, J. Math. Anal. Appl., 186, 3 (1994) 690–710.
32. Kreyszig, E., Introductory Functional Analysis with Applications, John and Sons, 1978.
33. Lavagno A. ve Scarfone A.M., q -deformed structure and generalized thermodynamics, Rep. Math. Phys., 55 (2005) 423.
34. Macfarlane A., J. Phys., C: Matematik. Gen. 22 (1989) 4581.
35. Narici, L. ve Bachman G., Functional Analysis, Academic Press, Inc. London, 1972.
36. Ostrovskiy V. ve Samoilenko Y., Introduction to the Theory of Representations of Finitely Presented $*$ -Algebras, I. Gordon and Breach, London, 1999.
37. Ota S., Some classes of q -deformed operators, J. Operator Theory, 48, 1 (2002) 151–186.
38. Ota S. ve Szafraniec F.H., Notes on q -deformed operators, Studia Math., 165, 3 (2004) 295–301.
39. Ota S. ve Szafraniec F.H., q -Positive definiteness and related topics, J. Math. Anal. Appl., 329, 2 (2007) 987–997.
40. Rynne, B.P. ve Youngson, M.A., Linear Functional Analysis, Springer, 2008.
41. Schmüdgen K., Unbounded Self-adjoint Operators on Hilbert Spaces, Springer, 2012.
42. Soykan Y., Fonksiyonel Analiz Çözümlü Alıştırmaları, 978-605-201-7, Nobel Yayınevi, Genişletilmiş ve Yeniden Düzenlenmiş 2. Basım, Şubat 2012.
43. Stein E. M. ve Shakarchi R., Complex Analysis. Princeton, NJ, USA, Princeton Univ. Press, 2003.
44. Swarttouw R.F., The Hahn-Exton q -Bessel Function, PhD thesis, The Technical University of Delft, 1992.

45. Watson G.N., A new proof of the Rogers-Ramanujan identities, J. London Math. Soc., 4 (1929) 4-9.



ÖZGEÇMİŞ

Coşkun SARAL, 09.12.1993 tarihinde Rize’de doğdu. İlköğrenimini ve ortaöğrenimini İstanbul ilinin Şişli ilçesinde, liseyi İstanbul Mecidiyeköy Lisesi’nde tamamladı.

2013-2014 Eğitim-Öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümüne girdi. 2017 yılında Matematik Bölümü lisans eğitimini ikincilikle bitirdi.

2017-2018 Eğitim-Öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Tezli Yüksek Lisans programına kabul edildi. Aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi yüksek lisan İngilizce hazırlık programını tamamladı. 2018-2019 Eğitim-Öğretim yılında Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı yüksek lisans öğrenimine başladı.