T.C.

MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Q-HOMOTOPİ ANALİZ DÖNÜŞÜM METODU UYGULANARAK KESİRLİ BİR DİFERANSİYEL DENKLEMİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİNİN ARAŞTIRILMASI

Cengiz GÜLTEKİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz-2021

MUŞ

Her Hakkı Saklıdır

T.C.

MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Q-HOMOTOPİ ANALİZ DÖNÜŞÜM METODU UYGULANARAK KESİRLİ BİR DİFERANSİYEL DENKLEMİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİNİN ARAŞTIRILMASI

Cengiz GÜLTEKİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman
Doç. Dr. Zeliha KÖRPINAR

Temmuz-2021
MUŞ
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL ve ONAYI

Cengiz GÜLTEKİN tarafından hazırlanan "q-Homotopi Analiz Dönüşüm Metodu Uygulanarak Kesirli Bir Diferansiyel Denklemin Yaklaşık Çözümlerinin Araştırılması" adlı tez çalışması …/.../2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri **İmza**

Başkan
Doç. Dr. Erdal KORKMAZ ……..
Muş Alparslan Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Danışman
Doç. Dr. Zeliha KÖRPINAR ……..
Muş Alparslan Üniversitesi
İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, İşletme Bölümü

Üye
Dr. Öğr. Üyesi Esma ULUTAŞ ……..
Karadeniz Teknik Üniversitesi
Of Teknoloji Fakültesi, Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği

Yukarıdaki sonuç;
Enstitü Yönetimi Kurulu …./…./…. Tarih ve …./…. nolu kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Sedat BOZARI
F.B.E Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Cengiz GÜLTEKİN
Tarih:

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Q-HOMOTOPİ ANALİZ DÖNÜŞÜM METODU UYGULANARAK KESİRLİ BİR DİFERANSİYEL DENKLEMİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİNİN ARAŞTIRILMASI

Cengiz GÜLTEKİN

Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Zeliha KÖRPINAR

Bu çalışmada belli bir başlangıç şartından hareketle q-HATM yardımıyla kesirli Schrödinger modelinin seri çözümleri elde edildi. Bulunan çözümler için yakınsaklık analizi yapıldı. Ayrıca elde edilen çözümlerin güvenirliğini göstermek amacıyla β kesirli mertebesinin farklı değerleri karşılaştırıldı.

2021, 38 Sayfa

Anahtar Kelimeler: q-Homotopi Analiz Dönüşüm Metodu, Kesirli Diferansiyel Denklemler, Schrödinger Denklemi, Gamma Fonksiyonu, Caputo Kesirli Türevi.

ABSTRACT

MASTER'S THESIS

INVESTİGATİON OF THE APPROXİMATE SOLUTİONS OF A FRACTİONAL DİFFERENTİAL EQUATİON BY HOMOTOPY ANALYSİS TRANSFORM METHOD

Cengiz GÜLTEKİN

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF MUŞ ALPARSLAN UNIVERSITY

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Zeliha KÖRPINAR

In this study serial solutions of fractional Schrödinger model is obtained by detemining the initial condition for q-HATM method. Convergence analysis is done for obtained solutions. Additionally various values of β fractional order are compared to show the accuracy of the computed solutions.

2021, 38 Pages

Keywords: q-Homtopy Analysis Transform Method, Fractional differential equations, Schrödinger Equation, Gamma function, Caputo fractional derivative.

ÖNSÖZ

Tez çalışmamın hazırlanmasında, bana desteklerini esirmeyen, lisansüstü eğitim sürecinde akademik çalışmalarını her zaman örnek aldığım danışman hocam Sayın Doç. Dr. Zeliha KÖRPINAR'a teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Ayrıca hayatımda olduğu günden beri hem sosyal hem de akademik hayatımda desteklerini esirgemeyen çok sevdiğim eşim Yağmur CAN GÜLTEKİN'e ve hayatımın en önemli dönüm noktası olan oğlum Can GÜLTEKİN'e teşekkür ederim.

Cengiz GÜLTEKİN
MUŞ-2021

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

SİMGELER ve KISALTMALAR ..... **vii**

ŞEKİLLER DİZİNİ ..... **viii**

TABLO DİZİNİ ..... **ix**

1. GİRİŞ **1**

2. TEMEL TANIMLAR **5**

3. KESİRLİ SCHRÖDİNGER DENKLEMİ İÇİN Q-HATM **14**

4. NÜMERİK UYGULAMALAR **19**

5. FİZİKSEL YORUMLAR **24**

6. SONUÇ VE ÖNERİLER **33**

KAYNAKLAR **35**

ÖZGEÇMİŞ **38**

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

Δ	:	Diskriminant
Γ	:	Gamma fonksiyonu
∂	:	Kısmi türev
β	:	Beta
η	:	Eta
Z	:	Tam sayılar kümesi
Σ	:	Sigma
D	:	Türev
$D_z^{\beta} f(z)$	:	Caputo kesirli türev

Kısaltmalar

q-HATM	:	q-Homotopy Analysis Transform Method
LT	:	Laplace Transform
FSE	:	Fractional Schrödinger Equation

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 5.1 Kesirli mertebeden Schrödinger denkleminin gerçek ve yaklaşık çözümlerinin reel kısımlarının yüzey grafikleri ($\boldsymbol{\beta = 1, h = -1, n = 1}$) (a) $(\mathbf{4.3})$gerçek çözümü için, (b) q-HATM yaklaşık çözümü için..... 26

Şekil 5.2 Kesirli mertebeden Schrödinger denkleminin gerçek ve yaklaşık çözümlerinin imajiner kısımlarının yüzey grafikleri ($\boldsymbol{\beta = 1, h = -1, n = 1}$) (a)) $(\mathbf{4.3})$gerçek çözümü için, (b) q-HATM yaklaşık çözümü için..... 26

Şekil 5.3 Kesirli Shcrödinger denkleminin farklı $\boldsymbol{\beta}$ değerleri için yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması ($\boldsymbol{\beta = 0.1, \beta = 0.25, \beta = 0.5, \beta = 0.75, \beta = 0.9}$)..... 27

Şekil 5.4 Kesirli Shcrödinger denkleminin farklı $\boldsymbol{\beta}$ değerleri için yaklaşık çözümlerinin iki boyutlu grafiklerinin karşılaştırılması ($\boldsymbol{h = -1, n = 1, x = 0.8}$). 27

Şekil 5.5 Kesirli Shcrödinger denkleminin $\boldsymbol{\beta = 1}$ değeri için gerçek çözümü ile yaklaşık çözümünün iki boyutlu grafiklerinin karşılaştırılması ($\boldsymbol{h = -1, n = 1, x = 0.8}$). 28

Şekil 5.6 Kesirli mertebeden Schrödinger denkleminin gerçek ve yaklaşık çözümlerinin reel kısımlarının yüzey grafikleri ($\boldsymbol{\beta = 1, h = -1, n = 1}$) (a) $(\mathbf{4.9})$ gerçek çözümü için, (b) q-HATM yaklaşık çözümü için..... 30

Şekil 5.7 Kesirli mertebeden Schrödinger denkleminin gerçek ve yaklaşık çözümlerinin imajiner kısımlarının yüzey grafikleri ($\boldsymbol{\beta = 1, h = -1, n = 1}$) (a) $(\mathbf{4.9})$ gerçek çözümü için, (b) q-HATM yaklaşık çözümü için..... 30

Şekil 5.8 Kesirli Shcrödinger denkleminin farklı $\boldsymbol{\beta}$ değerleri için yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması ($\boldsymbol{\beta = 0.1, \beta = 0.25, \beta = 0.5, \beta = 0.75, \beta = 0.9}$)..... 31

Şekil 5.9 Kesirli Shcrödinger denkleminin farklı $\boldsymbol{\beta}$ değerleri için yaklaşık çözümlerinin iki boyutlu grafiklerinin karşılaştırılması ($\boldsymbol{h = -1, n = 1, x = 0.8}$). 31

Şekil 5.10 Kesirli Shcrödinger denkleminin $\boldsymbol{\beta = 1}$ değeri için gerçek çözümü ile yaklaşık çözümünün iki boyutlu grafiklerinin karşılaştırılması ($\boldsymbol{h = -1, n = 1, x = 0.8}$). 32

ÇİZELGE DİZİNİ

Çizelge 5.1 $\boldsymbol{x}$ ve $\boldsymbol{t}$ 'nin farklı değerleri için kesirli Schrödinger denkleminin q-HATM çözümü için mutlak hata değerleri ($\boldsymbol{\beta = 1, h = -1, n = 1}$)..... 25

Çizelge 5.2 $\boldsymbol{x}$ ve $\boldsymbol{t}$ farklı değerleri için kesirli Schrödinger denkleminin q-HATM çözümü için mutlak hata değerleri ($\boldsymbol{\beta = 0.7, h = -1, n = 1}$)..... 25

Çizelge 5.3 $\boldsymbol{x}$ ve $\boldsymbol{t}$ farklı değerleri için kesirli Schrödinger denkleminin q-HATM çözümü için mutlak hata değerleri ($\boldsymbol{\beta = 0.3, h = -1, n = 1}$)..... 25

Çizelge 5.4 $\boldsymbol{x}$ ve $\boldsymbol{t}$ 'nin farklı değerleri için kesirli Schrödinger denkleminin q-HATM çözümü için mutlak hata değerleri ($\boldsymbol{\beta = 1, h = -1, n = 1}$)..... 28

Çizelge 5.5 $\boldsymbol{x}$ ve $\boldsymbol{t}$ farklı değerleri için kesirli Schrödinger denkleminin q-HATM çözümü için mutlak hata değerleri ($\boldsymbol{\beta = 0.7, h = -1, n = 1}$)..... 29

Çizelge 5.6 $\boldsymbol{x}$ ve $\boldsymbol{t}$ farklı değerleri için kesirli Schrödinger denkleminin q-HATM çözümü için mutlak hata değerleri ($\boldsymbol{\beta = 0.3, h = -1, n = 1}$)..... 29

1. GİRİŞ

Bilim ve mühendislik alanındaki geniş kullanımları nedeniyle kesirli diferansiyel denklemler son yıllarda büyük önem kazanmıştır. Kesirli mertebeden diferansiyel denklemler, tam sayılı mertebeden türev kavramının fiziksel olayları modellemedeki yetersizliğinden dolayı geliştirilmiştir. Klasik türevler doğada yereldir, yani klasik türevleri kullanarak bir aralıktaki değişiklikler tanımlanabilir, kesirli türevleri kullanarak bu aralıktaki değişiklikler daha geniş biçimde tanımlanır. Bu özellik, kesirli türevlerin daha fazla fiziksel olayı sistematik hale getirmesine olanak tanır. Ayrıca, tam sayılı mertebeden türevler, kesirli türevlerin dar alt kümeleridir. Son zamanlarda birçok araştırmacı, akışkanlar dinamiği, sinyal işleme, viskoelastisite, biyomühendislik, finans ve titreşimler gibi birçok alanda önemli katkılarından dolayı kesirli analizle ilgilenmiştir (Al-Samadi ve Argup, 2019; Baleanu ve ark., 2012; Al-Samadi ve ark., 2017; Hasan ve ark., 2020; Al-samadi ve Simplified, 2018). Araştırmacıların çoğu gerçek dayalı problemleri modellemek için çeşitli sayıda kesirli türev tanımları göstermiştirler. Bunların arasında tanınan kesirli türevlerden biri olan Riemann-Liouville kesirli mertebeden türevdir. Bu tanımın problemleri modellemek için her zaman uygun olmadığı görülmüştür. Yine bir başka kesirli türev tanımı Caputo türevidir. Caputo türev fiziksel saha problemlerini modellemekte ve çözmekte oldukça avantajlıdır.

Kesirli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri ilgi çekicidir. Bu çözümler seri çözüm yöntemleri uygulanarak ya da doğrusallaştırma ile elde edilebilir (Srivastava ve ark., 2017; Kumar ve ark., 2018; Odibat ve Momani, 2008; Singh ve ark., 2019). Kesirli diferansiyel denklemlerinin yaklaşık çözümlerinin bulunması için çeşitli metotlar vardır. Bazı doğrusal olmayan fiziksel sistemlerin küçük parametreleri olmadığından bu yöntemlerin bazı sınırlamaları vardır. Bu nedenle, bazen karmaşıklığı gösteren küçük parametreler yaklaşık çözüm için temel gereksinimdir. Çoğu durumda, küçük parametrelerin uygun olmayan seçimleri, çözümlerde ciddi etkiler yaratmaktadır. Burada bu parametrelere ihtiyaç duyulmayan bir analitik yaklaşım verilmiştir. Geçtiğimiz yıllarda araştırmacılar, uygulamada çok basit ve düşük maliyetli bazı yeni yöntemler geliştirmişlerdir. Bu yöntemler doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemleri çok kesin ve etkili bir şekilde çözer. Örneğin Homotopi analiz tekniği, Adomian ayrışım metodu, Homotopi pertürbasyon tekniği, Laplace ayrışma metodu,

varyasyonel yineleme yaklaşımı, tanh metodu, Backlund dönüşüm tekniği, vb. (Yavuz ve ark., 2018; Singh ve ark., 2017; Yavuz ve Ozdemir, 2018; Kumar ve ark., 2015).

Modern fizik, klasik mekaniğin çeşitli fiziksel özelliklerini açıklamada başarısız olmasından sonra doğmuştur. Kuantum mekaniği nükleer fizik gibi birçok farklı modern fizik olayını başarılı bir şekilde incelemektedir. Bunlardan biri atom fiziğinde elektronların, nükleer fizikte nükleonların davranışlarını ele alan Schrödinger denklemini incelemesidir. Schrödinger denklemi; kuantum alan teorisinde, katı hal ve kuantum sıvı teorisinde, denge ve dengesizlik durumlarında, türbülans teorisinde, istatistiksel süreçlerde, polimer fiziğinde, matematikte, kimya ve ekonomik alanlarda güçlü bir araç olmuştur. Literatürde Schrödinger denklemini çözmek için birçok güçlü analitik çözüm oluşturulmuş ve geliştirilmiştir (Eleuch ve ark., 2010; Jha ve ark., 2011).

Kesirli Schrödinger denklemi, kuantum fiziğinin yeni bir temel denklemidir ve standart Schrödinger denkleminde ikinci dereceden uzay türevi yerine kesirli mertebeden uzay türevini içerir. Bu bağlamda, kesirli Schrödinger denklemi, modern terminolojiye göre kesirli diferansiyel denklemdir (Laskin, 2018). Kuantum mekaniğindeki, akışkan dinamiğindeki ve diğer fiziksel alanlardaki birçok önemli model, kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerle formüle edilmiştir. Doğrusal olmayan kesirli Schrödinger denklemi, kesirli dalga denklemi, kesirli sıvı akış modelleri ve kesirli Boussinesq-like denklemleri bu denklemlere örnek olarak verilebilir. Kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü, nükleer reaktörlerin dinamikleri, rastgele analitik modeller, akışkanlar mekaniği, viskoelastik sönümleme, elektromanyetizma ve elektrokimya gibi hem doğrusal hem de doğrusal olmayan fiziksel sistemlerin dinamik davranışını tanımlamak için çok önemlidir (Kilbas ve ark., 2010; Shqair, 2019; Momani ve ark., 2016; Nairat ve ark., 2019). Bununla birlikte, doğrusal ve doğrusal olmayan kesirli mertebeden denklemler üzerine birçok araştırma yapılmış ve birçok analitik teknik sunulmuştur.

$u(x,0) = u_0(x)$ başlangıç şartıyla, doğrusal olmayan zaman-kesirli Schrödinger denklemi (FSE)

$$iD_t^{\beta} u(x,t) + \xi u_{xx}(x,t) + \Psi(x)u(x,t) + \eta|u(x,t)|^2 u(x,t) = 0 \qquad (1)$$

şeklindedir. Burada $\xi, \eta \in \mathbb{R}$, $0 < \beta \leq 1$, $i^2 = -1$; D_t^{β}, β mertebeden kesirli türev operatörü, $u(x,t)$ bilinmeyen karmaşık değerli fonksiyondur. $x \in \mathbb{R}$; $t \geq 0$, $\psi(x)$

sınır potansiyelini,$|u|, u$ modülünü, $u_0(x)$, doğrusal fonksiyonu temsil eder. $\beta = 1$ için denklem (1), klasik doğrusal olmayan Schrödinger denklemine indirgenir. Doğrusal durum, $\eta = 0$ olduğunda ortaya çıkar.

Son zamanlarda, klasik ve kesirli mertebeden diferansiyel denklemleri sistematik olarak incelemek için çok sayıda teknik geliştirilmiştir (Shqair ve ark., 2020). Örneğin, Matematikçi Liao, homotopi analiz metodunu (HAM) önermiştir (Momani ve ark.,2014; Al-samadi ve ark.,2015). HAM, bilim ve mühendislikte doğrusallaştırma olmadan var olan doğrusal olmayan karmaşık problemlerin çözümünü türetmek için etkin bir şekilde kullanılmıştır. Ancak, HAM hesaplamalı çalışmalar ve büyük bilgisayar belleği gerektirdiği için daha fazla zaman gerektirir. Bu nedenle, bu tekniğin daha önce var olan dönüşüm algoritmaları ile birleştirme zorunluluğu doğmuştur ve q-HATM geliştirilmiştir (Saadeh ve ark.,2019; Freihet ve ark.,2019; Hasan ve ark.,2019). Bu teknik, geniş matematiksel hesaplamaları azaltıp, zor fiziksel parametreleri kolaylaştırmaktadır. Son zamanlarda etkinliği ve tutarlılığı nedeniyle, q-HATM birçok bilim adamları tarafından doğrusal olmayan problemlerin sonuçlarını yorumlamak için kullanılmıştır. Bu teknik bize doğrusal problemlerin denklem tipini, başlangıç tahminini ve çözümün temel işlevini seçme konusunda büyük bir kolaylık sağlar. Bu nedenle, karmaşık doğrusal olmayan diferansiyel denklemler genellikle basit bir şekilde çözülebilir. Bu tekniğin avantajı; çözümü, yakınsama bölgesi ve elde edilen çözümde yerel olmayan etkiyi bulmak için basit bir işlem sunmasıdır. Küçük bir bölgedeki analitik çözüme hızlı bir şekilde yaklaşan, ancak diğer geleneksel tekniklerle mümkün olmayan çözümleri kontrol eder. Bu algoritma ayrıca, diğer klasik yöntemlere göre hesaplamaları azaltmaktadır. Bu yöntemin en önemli farklılığı ve güçlü tarafı ise ele alınmış problemin çözümünde yakınsaklık hızı ve bölgesinin, yakınsaklık kontrol parametresi olan h ile kontrol edilmesine yardımcı olur. Bundan dolayı q-HATM avantajı olarak sınırlama olmadan lineer ve lineer olmayan problemlere uygulanmasını sağlar. Yöntemin başka bir avantajı probleme uyumlu şekilde başlangıç koşullarının ve yakınsaklık parametresi seçiminde genişçe bir seçim alanına sahip olmasıdır. Ama bunun rastgele bir seçim olması söz konusu değildir. Problemin tipi ve sınır koşulları serbestiyi sınırlamaktadır.

Bu çalışmada q –HATM kullanılarak Caputo türev operatörleri yardımıyla doğrusal olmayan zaman-kesirli Schrödinger denkleminin (FSE) sayısal çözümleri incelenecektir.

2. TEMEL TANIMLAR

Tanım 2.1 Bir fonksiyonu ve onun muhtelif mertebeden türevlerini içeren matematiksel denklemler diferansiyel denklemler olarak isimlendirilir. Tek bir bağımsız değişkene göre türev içeren diferansiyel denklemlere adi diferansiyel denklemler denir. Bir diferansiyel denklemin mertebesi denklemde görülen en yüksek mertebeden türevin mertebesidir. n. mertebeden bir adi diferansiyel denklem genel olarak,

$$H\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{2.1}$$

kapalı formunda gösterilebilir (Duchateau ve Zachmann, 1986).

Bir $k < x < t$ aralığında tanımlı bir ϕ fonksiyonunun $k < x < t, \ \forall x$ için tanımlı ve n. mertebeden türeve sahip fonksiyondur,

$$H\left(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n)}(x)\right) = 0,$$

ise ϕ fonksiyonuna $H\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0$ denkleminin bir çözümüdür denir.

Bir adi diferansiyel denklemin genel çözümü, diferansiyel denklemin mertebesi kadar sabit değeri parametre olarak kabul eden bir eğri ailesi olarak ortaya çıkar. Çözüm fonksiyonundaki sabitlere verilen her bir değere karşılık bulunan çözüme de özel çözüm denir (Cerit, 1997).

Tanım 2.2 İçinde en az iki bağımsız ve bir bağımlı değişken ile bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre çeşitli basamaktan kısmi türevlerini kapsayan denklemlere kısmi türevli diferansiyel denklemler denir. t bağımlı; x ve y bağımsız değişkenler olmak üzere bir kısmi türevli diferansiyel denklem genel olarak,

$$H\left(x, y, t, t_x, t_y, t_{xx}, t_{xy}, \dots\right) = 0 \tag{2.2}$$

şekilde ifade edilir. Burada

$$t_x = \frac{\partial t}{\partial x}, t_y = \frac{\partial t}{\partial y}, t_{xx} = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, t_{xy} = \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y}, \dots$$

şeklindedir.

n tane bağımsız ve bir tane bağımlı değişkene sahip kısmi türevli denklemlerin genel şekli,

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \qquad t = t(x)$$

olmak üzere,

$$H\left(x_1, x_2, \dots, x_n, t, t_{x_1}, t_{x_2}, \dots, t_{x_n}, t_{x_1x_1}, t_{x_1x_2}, \dots, \right) = 0$$

formundadır. Burada $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ bağımsız değişkenleri; t ise bağımlı değişkenli göstermekte ve

$$t_{x_i} = \frac{\partial t}{\partial x_i}\ , t_{x_iy_i} = \frac{\partial^2 t}{\partial x_i \partial y_i}\ ;\ i, j = 1,2, \dots, n$$

Bir kısmi türevli diferansiyel denklemi özdeş olarak sağlayan ve keyfi fonksiyon veya keyfi parametre içermeyen bir fonksiyona bu kısmi türevli denklemin bir özel çözümü denir. Diğer taraftan bir kısmi türevli denklemin mertebesi kadar (sürekli türetilebilir) keyfi fonksiyon kapsayan ve denklemi özdeş olarak sağlayan bir yüzey ailesine bu kısmi türevli denklemin genel çözümü denir (Duchateaun ve Zachmann, 1986).

Tanım 2.3 Eğer bir kısmi türevli diferansiyel denklemdeki bağımlı değişken (veya bağımlı değişkenler) ve bunların denklemdeki bütün kısmi türevleri birinci dereceden ve denklemi, bağımlı değişken ile onun türevleri parantezinde yazdığımızda katsayılar yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonu oluyorsa bu denkleme lineer diferansiyel denklemler denir. Aksi halde lineer olmayan diferansiyel denklem denir.

Tanım 2.4 Bir kısmi diferansiyel denklemin genel çözümü, denklemin mertebesi kadar keyfi fonksiyon içerir. Bu nedenle, adi diferansiyel denklemlere kıyasla kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmak daha zordur. Başlangıçta modellenen probleme uygun çözümün bulunabilmesi için problem oluşturulurken bazı yardımcı şartlar gerekir. Bu şartlar genel olarak iki başlık altında toplanabilir.

i) **Sınır Şartları:** Sınır şartları kısmi diferansiyel denklemin sağlandığı τ bölgesinin T sınırı boyunca sağlanması gereken şartlardır. Sınır şartlarının üç

farklı şekli $\alpha, \beta \; ve \; g$ fonksiyonları τ üzerinde tanımlı fonksiyonlar olmak üzere özel isimleriyle şu şekildedir:

Dirichlet Şartı: $u_\Gamma = \text{g}$,

Neumann Şartı: $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = \text{g}$,

Karışık (mixed) veya Robin Şartı: $\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = q$

ii) **Başlangıç Şartları:** Başlangıç şartları sistemin başlangıcında τ bölgesi boyunca sağlanması gereken şartlardır. Genel olarak, başlangıç şartları fonksiyonun ve zamana göre türevinin kombinasyonu şeklindedir.

Başlangıç şartlarıyla birlikte verilmiş diferansiyel denkleme 'Cauchy problemi' denir.

İkinci mertebeden, iki bağımsız değişkenli bir kısmi diferansiyel denklem,

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0$$

Genel şekliyle verilebilir. Burada A, B, C, D, E, F katsayı fonksiyonları ve G fonksiyonu da sabit veya değişken içeren fonksiyondur. Bu denklem, $\Delta = B^2 - 4AC$ diskriminantının işaretine göre şu şekilde sınıflandırılır;

$\Delta > 0$ ise Hiperbolik,

$\Delta = 0$ ise Parabolik,

$\Delta < 0$ ise Eliptik,

Herhangi bir tipteki problemin çözümü, klasik Hadamard testi gereğince aşağıdaki üç şartı sağlarsa problem 'iyi durumlu', en az bir şartı sağlamaz ise 'kötü durumlu' olarak adlandırılır. Bu şartlar aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir.

1) Varlık
2) Teklik
3) Kararlılık

Pratikte bir denklemin çözümünün varlığını ifade etmenin en iyi yolu problemdeki bütün şartları sağlayan ve problemde yerine konulduğunda denklemi sağlayan bir çözüm yapılandırmaktadır. Eğer çözümün tekliği gösterilirse denklemin çözümü bulunmuş demektir. Adi diferansiyel denklemlere göre kısmi diferansiyel denklemlerde çözüm tasvirleri seri veya integraller gibi limit yöntemleri içerir ve çözümler her zaman elementer fonksiyonların kapalı şekillerinde ifade edilemez. Bu durumda, bir yaklaşık çözüm ele alınır, eğer başlangıç şartındaki küçük bir değişim, çözüme küçük bir değişiklik olarak yansırsa bu çözüme kararlıdır denir ve çözüm kararlı kabul edilir (Gustafson, 1999).

Tanım 2.5 Diferansiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyonu ve onun türevleri üzerinde bağımsız değişkenin aynı değerleri için verilen şartlar altında çözümlerinin problemine başlangıç değer problemi, verilen şartlara da başlangıç şartları adı verilir (Dennemeyer, 1968).

Tanım 2.6 Kompleks değişkenli bir g fonksiyonu, bir t_0 noktasının belli bir $D(t_0, \delta)$ komşuluğundaki bütün noktalarda diferansiyellenebiliyorsa, g, t_0 noktasında analitiktir denir. Eğer kompleks değişkenli bir g fonksiyonu, bir S kümesinin bütün noktalarında analitikse g, S üzerinde analitiktir denir. Bir g fonksiyonu C kompleks sayılar kümesinin tüm noktalarında analitikse, g'ye tam fonksiyon denir (Franklin, 1964).

Tanım 2.7 Diferansiyel denklemler için varlık ve teklik teoremi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir (Eser ve Özer, 2002).

$$y' = f(x, y)\ ,\quad y(x_0) = y_0 \tag{2. 3}$$

başlangıç değer problemini ele alalım. D bölgesi merkezi (x_0, y_o) noktasında olan

$$|x - x_0| \leq a,\quad |y - y_0| \leq b \tag{2. 4}$$

şeklinde tanımlanan bir dikdörtgensel bölge olsun. Ayrıca (2.3) denklemindeki f fonksiyonu ve $\frac{\partial f}{\partial y}$ kısmi türevi D de y'ye göre Lipschitz koşulunu sağlasın. Bu durumda $|f(x, y)| \leq m$ ve $h = \min\left\{a, \frac{b}{m}, \frac{1}{k}\right\}$ olmak üzere aşağıdaki özelliklere sahip olan bir $F(x)$ fonksiyonu y ve $|x - x_0| \leq h$ aralığı vardır.

i) $y = F(x)$, (2.3) denkleminin $|x - x_0| \leq h$ aralığında bir çözümüdür.

ii) $F(x)$ fonksiyonu $|x - x_0| \leq h$ aralığında $|F(x) - x_0| \leq b$ eşitsizliğini sağlar.

iii) $F(x_0) = y_0$ dır.

iv) (i), (ii), (iii) özelliklerinin hepsini birden sağlayan, $|x - x_0| \leq h$ aralığında tanımlı olan $F(x)$ fonksiyonu bir tanedir.

Tanım 2.8 D kapalı bölgesinde $f(x, y)$ fonksiyonu tanımlı olsun. Eğer her $(x, y_1) \in D$ ve $(x, y_2) \in D$ çiftleri için,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2| \tag{2.5}$$

olacak şekilde bir K sayısı bulunabiliyorsa, $f(x, y)$ fonksiyonu D üzerinde Lipschitz koşulunu sağlıyor denir (Eser ve Özer, 2002).

Tanım 2.9 X ve Y boş olmayan kümeler ve $D \subset X$ olsun. D'nin her elemanına Y 'nın bir elemanını karşılık getiren bir kurala D'den Y'ye bir operatör veya dönüşüm denir.

Tanım 2.10 X ve Y aynı Kcismi üzerinde iki lineer uzay ve $A: X \to Y$ operatörü verilsin. X_0 cümlesi X uzayının bir alt uzayı olsun. Eğer $\forall x, y \in X_0$ ve $\forall\, \alpha, \beta \in K$ için

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

ise A operatörüne lineer operatör denir.

Tanım 2.11 L, $D(L)$ tanım bölgesinde sınırlı lineer bir operatör olmak üzere, $Ly = \lambda$ y eşitsizliğini sağlayan $y(x) \neq 0$ fonksiyonu mevcut ise λ'ya L operatörünün öz değeri, $y(x, \lambda)$ fonksiyonuna ise λ 'ya karşılık gelen öz fonksiyon denir (Levitan ve Sargsjan, 1975).

Tanım 2.12 $a \in R$ ve $\forall\, k = 0, 1, 2, \ldots$ için $c_k \in R$ olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - a)^k = c_0 + c_1(x - a) + c_2 (x - a)^2 + \cdots + c_n (x - a)^n + \cdots$$

şeklindeki bir kuvvet serisi denir. Buradaki c_k sayılarına serinin katsayıları denir.

Tanım 2.13 Gamma fonksiyonu, $n > 0$ için,

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{n-1}\, du$$

ile tanımlanır. Bu integral $n > 0$ için yakınsaktır (Kannapan, 2009). Gamma fonksiyonunun bazı önemli özellikleri aşağıda verilmiştir.

1) $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$

2) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

3) $\int_0^{\infty} \frac{x^p}{1+x} dx = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}, \quad 0 < p < 1$

Tanım 2.14 f fonksiyonu her sonlu (β, x) aralığında sürekli ve integrallenebilir olsun. $m \in Z^+, m-1 \leq \beta < m$ olmak üzere $x > \beta$ için reel bir f fonksiyonunun β. mertebeden Riemann-Liouville kesirli türev

$$D_x^{\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \frac{d^m}{dx^m} \int_{\beta}^{x} f(t)(x-t)^{m-\beta-1}\, dt \qquad (2.6)$$

şeklindedir.

$\beta > 0$ olmak üzere, β. Mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali,

$$J^{\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{x} (x-t)^{\beta-1} f(t) dt\,, \quad x > 0 \qquad (2.7)$$

$J^0 f(x) = f(x)$.

olarak tanımlanır (Podlubny, 2009).

Tanım 2.15 Riemann-Liouville (2.6) kesirli türev tanımı, kesirli türev ve integral teorisinin gelişmesinde ve bunların matematikteki uygulamalarında önemli bir rol oynar.

Uygulama problemlerini açıklayabilmek için başlangıç koşulları fiziksel olarak yorumlanabilir kesirli türev tanımları gerekir. Bu açıdan bakıldığında, Riemann-

Liouville yaklaşımının problemlerin yorumlamasında yetersiz kaldığı ortaya konmuştur. Çünkü Riemann-Liouville yaklaşımı $t = 0$ noktasında Riemann-Liouville kesirli türevinin limit değerleri biçiminde tanımlanan başlangıç koşullarına sahiptir. Örneğin; $b_1, b_2, \dots, b_m$ keyfi sabitler olmak üzere

$$\lim_{t\to\beta} {}_{\beta}D_t^{\beta-1} f(z) = b_1$$

$$\lim_{t\to\beta} {}_{\beta}D_t^{\beta-2} f(z) = b_2$$

$$\dots = \dots$$

$$\lim_{t\to\beta} {}_{\beta}D_t^{\beta-3} f(z) = b_3$$

biçiminde tanımlanan başlangıç koşulları meydana gelir. Bu tipteki başlangıç koşullarına sahip başlangıç-değer problemleri matematiksel olarak başarılı bir şekilde çözülmesine rağmen, bunların sonuçları kullanışlı değildir. Çünkü bu tipteki başlangıç koşullarının bilinen fiziksel yorumu yoktur.

Kesirli diferansiyel tekniğinde başlangıç koşullarını fiziksel yorumlara en uygun şekilde veren M.Caputo olmuştur. Caputo'nun tanımı; m pozitif tam sayı olmak üzere $m - 1 < \beta < m$ için

$${}_{\beta}D_z^{\beta} f(z) = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \int_{\beta}^{z} (z-t)^{m-\beta-1} f^{(m)} dt \qquad (2.8)$$

şeklindedir.

$f(z)$ fonksiyonunun normal koşullar altında $\beta \to m$ için Caputo türevi, $f(z)$ fonksiyonunun m. basamaktan klasik türevine eşittir.

Caputo türevi için,

$$D^{\beta} x^{\alpha} = 0, \qquad \beta < \alpha$$

$$D^{\beta}x^{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1-\beta)}x^{\alpha-\beta}\,, \alpha \geq \beta.$$

özellikleri geçerlidir.

Tanım 2.16 n, β'dan büyük en küçük tam sayı olmak üzere $u(x,t)$ fonksiyonunun β.mertebeden Caputo zaman-kesirli türev operatörü şu şekilde tanımlanır (Podlubny, 2000).

$$D_t^{\beta}u(x,t) = \frac{\partial^{\beta}u(x,t)}{\partial t^{\beta}} = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)}\int_0^t (t-\tau)^{n-\beta-1}\frac{\partial^n u(x,\tau)}{\partial t^n}d\tau, \tag{2.9}$$

$n-1 < \beta < n,$

$$D_t^n u(x,t) = \frac{\partial^n u(x,t)}{\partial t^n}, n \in N$$

Tanım 2.17 $t = t_0$ noktasında bir kesirli kuvvet serisi açılımı

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m\,(t-t_0)^{m\beta} = c_0 + c_1(t-t_0)^{\beta} + c_2(t-t_0)^{2\beta} + \ldots$$

$$0 \leq m-1 < \beta \leq m, t \geq t_0 \tag{2.10}$$

şeklinde verilir (Podlubny, 2000).

Tanım 2.18 $t = t_0$ noktasında$f(x)$ fonksiyonunun bir kesirli kuvvet serisi açılımı

$$\sum_{m=0}^{\infty} f_m(x)\,(t-t_0)^{m\beta} = f_0(x) + f_1(x)(t-t_0)^{\beta} + f_2(x)(t-t_0)^{2\beta} + \ldots,$$

$$0 \leq m-1 < \beta \leq m, t \geq t_0, \tag{2.11}$$

şeklinde verilir (Podlubny, 2000).

Tanım 2.19 $t = t_0$ noktasında $u(x,t)$ fonksiyonunun kesirli kuvvet seri

$$u(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{{D_t}^{m\beta} u(x,t_0)}{\Gamma(m\beta+1)} (t-t_0)^{m\beta}$$

$$0 \le m-1 < \beta \le m,\ x \in I, t_0 \le t < t_0 + R, \tag{2.12}$$

şeklindedir. Burada Genelleştirilmiş Taylor seri formülleri kullanılmıştır.

$\beta = 1$ iken (2.6) denklemi klasik Taylor serisine eşittir.

$$u(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial^m u(x,t_0)}{\partial t^m} \frac{(t-t_0)}{m!}$$

$$x \in I,\ t_0 \le t < t_0 + R \tag{2.13}$$

Tanım 2.20

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \tag{2.14}$$

tanımlanan denklemde $L[f(t)]$ veya $F(s)$'e $f(t)$ fonksiyonun Laplace dönüşümü denir.

Tanım 2.21 Laplace dönüşümünün, Kesirli Caputo türevi ile gösterimi,

$$L\left[{D_t}^{n\beta} u(r,t)\right] = s^{n\beta} L[u(r,t)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n\beta-k-1} u^k(r,0) \tag{2.15}$$

$$n-1 < n\beta \le n$$

3. KESİRLİ SCHRÖDİNGER DENKLEMİ İÇİN Q-HATM

İlk olarak doğrusal olmayan kesirli Schrödinger denklemini ele alalım (Shqair ve ark., 2020).

$$i\frac{\partial^{\beta}u(x,t)}{\partial t^{\beta}} = -\xi\frac{\partial^{2}u(x,t)}{\partial x^{2}} - \Psi(x)u(x,t) - \eta|u(x,t)|^{2}u(x,t) \tag{3.1}$$

$$(x,t) \in R^{+} \times (O,t), \qquad 0 < \beta \leq 1$$

Başlangıç koşulları,

$$u(x,0) = f(x) \text{ ve } u_t(x,0) = g(x) \quad . \tag{3.2}$$

olsun.

Burada $\frac{\partial^{\beta}u(x,t)}{\partial t^{\beta}}$ fonksiyonu β. mertebeden Caputo kesirli türevi ve $u(x,t)$ sınırlı bir fonksiyondur.

(3.1) denkleminin q-HATM çözümünü bulmak için $u(x,t) = v(x,t) + iw(x,t)$ dönüşümünü uygulayıp bu denklemin reel ve imajer kısımlarını ayırırsak aşağıdaki denklemleri elde ederiz.

$$\frac{\partial^{\beta}v(x,t)}{\partial t^{\beta}} = -\xi\frac{\partial^{2}w(x,t)}{\partial x^{2}} - \Psi(x)w(x,t) - \eta(v^{2}(x,t)w(x,t) + w^{3}(x,t)) \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial^{\beta}w(x,t)}{\partial t^{\beta}} = \xi\frac{\partial^{2}v(x,t)}{\partial x^{2}} + \Psi(x)v(x,t) + \eta(w^{2}(x,t)v(x,t) + v^{3}(x,t))$$

Başlangıç koşulları,

$$v(x,0) = v_0(x)\ ,\ v_t(x,0) = v_1(x),\ w(x,0) = w_0(x) \text{ ve } w_t(x,0) = w_1(x)$$

Bu durumda $u(x,t) = u_0(x) + iw_0(x)$ olur,

Denklem sistemlerine Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$L[v(x,t)] - \frac{1}{s}[v_0(x)] - \frac{1}{s^2}[v_1(x)] - \frac{1}{s^\beta} L\left\{-\xi \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - \Psi(x)w(x,t) - \eta(v^2(x,t)w(x,t) + w^3(x,t))\right\} = 0$$

(3.4)

$$L[w(x,t)] - \frac{1}{s}[w_0(x)] - \frac{1}{s^2}[w_1(x)] - \frac{1}{s^\beta} L\left\{\xi \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + \Psi(x)v(x,t) + \eta(w^2(x,t)v(x,t) + v^3(x,t))\right\} = 0$$

denklem sistemi yazılabilir.

(3.4) denklemleri yardımıyla lineer olmayan operatör sistemini aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

$$N[P(x,t:q)] = L[P(x,t:q)] - \frac{1}{s}[v_0(x)] - \frac{1}{s^2}[v_1(x)] - \frac{1}{s^\beta} L\{-\xi \frac{\partial^2 S(x,t)}{\partial x^2} - \Psi(x)S(x,t) - \eta(P^2(x,t)S(x,t) + S^3(x,t))\}$$

(3.5)

$$N[S(x,t:q)] = L[S(x,t:q)] - \frac{1}{s}[w_0(x)] - \frac{1}{s^2}[w_1(x)] - \frac{1}{s^\beta} L\{\xi \frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2} + \Psi(x)P(x,t) + \eta(S^2(x,t)P(x,t) + P^3(x,t))\}$$

Burada $q \in [0, \frac{1}{n}]$, $P(x,t:q)$ ve $S(x,t:q)$ reel fonksiyondur. O halde homotopi şu şekilde gösterilebilir.

$$(1 - nq)L\{P(x,t:q) - v_0(x,t)\} = hqN[P(x,t:q)]$$

(3.6)

$$(1 - nq)L\{S(x,t:q) - w_0(x,t)\} = hqN[S(x,t:q)]$$

Burada $h \neq 0$; yardımcı parametreyi, $q \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ $(n \geq 1)$ ve L Laplace dönüşümünü belirtir.

$q = 0$ ve $q = \frac{1}{n}$ için aşağıdaki sonuçlar ortaya çıkar;

$$P(x,t:0) = v_0,\ P\left(x,t:\frac{1}{n}\right) = v(x,t),$$

$$S(x,t:0) = w_0,\ S\left(x,t:\frac{1}{n}\right) = w(x,t) \tag{3.7}$$

$q;0'$dan $\frac{1}{n}$'e artarken $P(x,t:q)$; $v_0(x,t)'$dan $v(x,t)'$ye ve $S(x,t:q)$; $w_0(x,t)$ 'dan $w(x,t)'$ye değişir. Taylor teoremi q civarında uygulanırsa $P(x,t:q)$ ve $S(x,t:q)$ seri haline genişletilebilir.

$$P(x,t:q) = v_0(x,t) + \sum_{m=1}^{\infty} v_m(x,t)q^m$$

$$S(x,t:q) = w_0(x,t) + \sum_{m=1}^{\infty} w_m(x,t)q^m \tag{3.8}$$

Buradan

$$v_m(x,t) = \frac{1}{m!}\frac{\partial^m P(x,t:q)}{\partial q^m}\Big|_{q=0}$$

$$w_m(x,t) = \frac{1}{m!}\frac{\partial^m S(x,t:q)}{\partial q^m}\Big|_{q=0} \tag{3.9}$$

yazılır.

(3.9) serisi uygun seçilen $v_0(x,t)$ ve $w_0(x,t)$ için $q = \frac{1}{n}$ de yakınsaktır. O halde,

$$v(x,t) = v_0(\mathrm{x},t) + \sum_{m=1}^{\infty} v_m(x,t)\left(\frac{1}{n}\right)^m \tag{3.10}$$

$$w(x,t) = w_0(x,t) + \sum_{m=1}^{\infty} w_m(x,t)(\frac{1}{n})^m$$

yazılabilir.(3.6) denklemini q'ya göre m kez diferansiyelleyip $\frac{1}{m!}$ ile çarpıp son olarak $q = 0$ dersek

$$L[v_m(x,t) - k_m v_{m-1}(x,t)] = hR_m(\vec{v}_{m-1})$$

$$L[w_m(x,t) - k_m w_{m-1}(x,t)] = hR_m(\vec{w}_{m-1}) \tag{3.11}$$

elde edilir. Buradan

$$\vec{v}_m = \{v_0(x,t), v_1(x,t), \dots, v_m(x,t)\}$$

$$\vec{w}_m = \{w_0(x,t), w_1(x,t), \dots, w_m(x,t)\} \tag{3.12}$$

(3.11) denklemine Ters Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$v_m(x,t) = k_m v_{m-1}(x,t) + hL^{-1}[R_m(\vec{v}_{m-1})]$$

$$w_m(x,t) = k_m w_{m-1}(x,t) + hL^{-1}[R_m(\vec{w}_{m-1})] \tag{3.13}$$

elde edilir. Yukarıdaki $R_m(\vec{v}_{m-1})$ ve $R_m(\vec{w}_{m-1})$ şu şekilde tanımlanabilir;

$$R_m(\vec{v}_{m-1}) = \mathrm{L}[v_{m-1}(x,t) - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right)\left(\frac{1}{s}[v_0(x)] + \frac{1}{s^2}[v_1(x)]\right) - \frac{1}{s^\mu} L\left\{-\xi \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - \Psi(x) w(x,t) - \eta(v^2(x,t) w(x,t) + w^3(x,t))\right\} \tag{3.14}$$

$$R_m(\vec{w}_{m-1}) = \mathrm{L}[v_{m-1}(x,t) - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right)\left(\frac{1}{s}[w_0(x)] + \frac{1}{s^2}[w_1(x)]\right) - \frac{1}{s^\mu} L\left\{\xi \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + \Psi(x) v(x,t) + \eta(w^2(x,t) v(x,t) + v^3(x,t))\right\}$$

Burada

$$\mathrm{k_m} = \begin{cases} 0\,, & \mathrm{m} \leq 1 \\ \mathrm{m}, & \mathrm{m} > 1 \end{cases} \tag{3.15}$$

(3.13) ve (3.14) denklemleri düşünüldüğünde,

$$v_m(x,t) = (k_m + h)v_{m-1}(x,t) - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right)\left(\frac{1}{s}[v_0(x)] + \frac{1}{s^2}[v_1(x)]\right) - \frac{1}{s^\mu} L\left\{-\xi \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - \Psi(x)w(x,t) - \eta(v^2(x,t)w(x,t) + w^3(x,t))\right\} \tag{3.16}$$

$$w_m(x,t) = (k_m + h)w_{m-1}(x,t) - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right)\left(\frac{1}{s}[w_0(x)] + \frac{1}{s^2}[w_1(x)]\right) - \frac{1}{s^\mu} L\left\{\xi \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + \Psi(x)v(x,t) + \eta(w^2(x,t)v(x,t) + v^3(x,t))\right\}$$

elde edilir. Başlangıç şartlarını kullanarak denklem sistemini ardışık olarak çözüp $v_m(x,t)$ ile $w_m(x,t)$ $(m = 1,2,\dots)$ terimleri elde edilir. O halde q-HATM çözümleri aşağıdaki gibidir.

$$v(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} v_m(x,t)$$

(3.17)

$$w(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} w_n(x,t)$$

q-HATM yardımıyla elde ettiğimiz çözümleri kullanarak (3.1) denkleminin yaklaşık çözümlerini elde ederiz.

$$u(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} v_m(x,t) + i\sum_{m=0}^{\infty} w_m(x,t) \tag{3.18}$$

elde edilir.

4. NÜMERİK UYGULAMALAR

Bu bölümde, Kesirli Schrödinger denklemlerinin seri çözümleri elde edilecektir.

Örnek 5.1 Aşağıdaki Kesirli Schrödinger denklemini ele alalım,

$$i\frac{\partial^{\beta}u(x,t)}{\partial t^{\beta}}+\frac{\partial^{2}u(x,t)}{\partial x^{2}}+\ 2|u(x,t)|^{2}u(x,t)=0 \tag{4.1}$$

bu denklem için başlangıç koşulu, (Shqair ve ark., 2020).

$$u(x,0)=e^{ix}\ ,\quad x\in R \tag{4.2}$$

ile verilsin.

Bu denklemin tam çözümü şu şekildedir (Shqair ve ark., 2020).

$$u(x,t)=e^{i(x+\frac{t^{\beta}}{\Gamma(1+\beta)})} \tag{4.3}$$

(4.1) denklemine $u(x,t)=v(x,t)+iw(x,t)$ dönüşümünü uygulayalım. Uygulandıktan sonra oluşan denklemin reel ve imajer kısımlarını ayırırsak aşağıdaki denklemleri elde edebiliriz.

$$D_t^{\beta}v(x,t)=-w_{xx}(x,t)-2(v^2(x,t)w(x,t)+w^3(x,t))$$

$$D_t^{\beta}w(x,t)=u_{xx}(x,t)+2(w^2(x,t)v(x,t)+v^3(x,t)) \tag{4.4}$$

Bu denklem sistemi için başlangıç koşulları ise,

$$v(x,0)=\cos(x)\text{ ve }w(x,0)=\sin(x) \tag{4.5}$$

şeklinde ifade edilebilir.

q-HATM kullanılarak denklem sistemlerinin algoritması,

$$\begin{aligned}v_m(x,t)=(k_m+h)v_{m-1}(x,t)-\left(1-\frac{k_m}{n}\right)\left(\frac{1}{s}\cos(\mathrm{x})\right)\\ -\frac{1}{s^{\beta}}L\left\{-\frac{\partial^2 w_{m-1}(x,t)}{\partial x^2}-2(v_{m-1}^2(x,t)w_{m-1}(x,t)+w_{m-1}^3(x,t))\right\}\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$w_m(x,t) = (k_m + h)w_{m-1}(x,t) - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right)\left(\frac{1}{s}\sin(\mathrm{x})\right) - \frac{1}{s^\beta} L\left\{\frac{\partial^2 v_{m-1}(x,t)}{\partial x^2} + 2(w_{m-1}^2(x,t)v_{m-1}(x,t) + v_{m-1}^3(x,t))\right\}$$

yazılır.

(4.6) denklem sistemini m=1 den başlayıp Mathematica programı yardımıyla ardışık olarak çözerek aşağıdaki $v_m(x,t)$ ve $w_m(x,t)$ terimlerini elde ederiz.

$v_0(x,t) = cos(x)$,

$w_0(x,t) = sin(x)$,

$v_1(x,t) = \frac{ht^\beta Sin(x)}{\Gamma(1+\beta)}$,

$w_1(x,t) = -\frac{ht^\beta Cos(x)}{\Gamma(1+\beta)}$,

$v_2(x,t) = \frac{h^2t^{2\beta}Cos(x)}{\Gamma(1+2\beta)} - \frac{2h^4t^{4\beta}Cos(x)\Gamma(1+3\beta)}{\Gamma(1+\beta)^3\Gamma(1+4\beta)} + \frac{h^2t^\beta Sin(x)}{\Gamma(1+\beta)} + \frac{hnt^\beta Sin(x)}{\Gamma(1+\beta)}$,

$w_2(x,t) = -\frac{h^2t^\beta Cos(x)}{\Gamma(1+\beta)} - \frac{hnt^\beta Cos(x)}{\Gamma(1+\beta)} + \frac{h^2t^{2\beta}Sin(x)}{\Gamma(1+2\beta)} - \frac{2h^4t^{4\beta}\Gamma(1+3\beta)Sin(x)}{\Gamma(1+\beta)^3\Gamma(1+4\beta)}$,

$v_3(x,t) = \left(-\frac{h^3Cos(x)}{\Gamma(1+\beta)} - \frac{2h^2nCos(x)}{\Gamma(1+\beta)} - \frac{hn^2Cos(x)}{\Gamma(1+\beta)}\right) + \frac{h^3t^{3\beta}Cos(x)}{\Gamma(1+3\beta)} +$
$t^{5\beta}\left(-\frac{2h^5Cos(x)\Gamma(1+3\beta)}{\Gamma(1+\beta)^3\Gamma(1+5\beta)} - \frac{2h^7Cos(x)\Gamma(1+4\beta)}{\Gamma(1+\beta)^2\Gamma(1+2\beta)\Gamma(1+5\beta)} - \frac{4h^6nCos(x)\Gamma(1+4\beta)}{\Gamma(1+\beta)^2\Gamma(1+2\beta)\Gamma(1+5\beta)} -$
$\frac{2h^5n^2Cos(x)\Gamma(1+4\beta)}{\Gamma(1+\beta)^2\Gamma(1+2\beta)\Gamma(1+5\beta)}\right) +$
$t^{7\beta}\left(-\frac{2h^7Cos(x)\Gamma(1+6\beta)}{\Gamma(1+2\beta)^3\Gamma(1+7\beta)} + \frac{4h^9Cos(x)\Gamma(1+3\beta)\Gamma(1+6\beta)}{\Gamma(1+\beta)^5\Gamma(1+4\beta)\Gamma(1+7\beta)} +$
$\frac{8h^8nCos(x)\Gamma(1+3\beta)\Gamma(1+6\beta)}{\Gamma(1+\beta)^5\Gamma(1+4\beta)\Gamma(1+7\beta)} + \frac{4h^7n^2Cos(x)\Gamma(1+3\beta)\Gamma(1+6\beta)}{\Gamma(1+\beta)^5\Gamma(1+4\beta)\Gamma(1+7\beta)}\right) + \cdots$,

$w_3(x,t) = t^{2\beta}\left(\frac{2h^3Cos(x)}{\Gamma(1+2\beta)} + \frac{2h^2nCos(x)}{\Gamma(1+2\beta)}\right) + t^{4\beta}\left(-\frac{2h^5Cos(x)\Gamma(1+3\beta)}{\Gamma(1+\beta)^3\Gamma(1+4\beta)} -$
$\frac{2h^7Cos(x)\Gamma(1+3\beta)}{\Gamma(1+\beta)^3\Gamma(1+4\beta)} - \frac{2h^4nCos(x)\Gamma(1+3\beta)}{\Gamma(1+\beta)^3\Gamma(1+4\beta)} - \frac{6h^6nCos(x)\Gamma(1+3\beta)}{\Gamma(1+\beta)^3\Gamma(1+4\beta)} -$
$\frac{6h^5n^2Cos(x)\Gamma(1+3\beta)}{\Gamma(1+\beta)^3\Gamma(1+4\beta)} - \frac{2h^4n^3Cos(x)\Gamma(1+3\beta)}{\Gamma(1+\beta)^3\Gamma(1+4\beta)}\right) + t^{6\beta}\left(-\frac{2h^7Cos(x)\Gamma(1+5\beta)}{\Gamma(1+\beta)\Gamma(1+2\beta)^2\Gamma(1+6\beta)} -$
$\frac{2h^6nCos[x]\Gamma[1+5\beta]}{\Gamma(1+\beta)\Gamma(1+2\beta)^2\Gamma(1+6\beta)}\right) + t^{8\beta}\left(\frac{8h^9Cos(x)\Gamma(1+3\beta)\Gamma(1+7\beta)}{\Gamma(1+\beta)^4\Gamma(1+2\beta)\Gamma(1+4\beta)\Gamma(1+8\beta)} +$
$\frac{8h^8nCos(x)\Gamma(1+3\beta)\Gamma(1+7\beta)}{\Gamma(1+\beta)^4\Gamma(1+2\beta)\Gamma(1+4\beta)\Gamma(1+8\beta)}\right) + \ldots$,

⋮

Buradan $u(x,t) = \mathrm{v}_3(\mathrm{x},\mathrm{t}) + \mathrm{i}w_3(x,t)$ eşitliği kullanılarak (4.1) denkleminin q-HATM kullanılarak elde edilen sayısal çözümü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$u(x,t) = cos(x) + \frac{ht^{\beta}Sin(x)}{\Gamma(1+\beta)} + \frac{h^2t^{2\beta}Cos(x)}{\Gamma(1+2\beta)} - \frac{2h^4t^{4\beta}Cos(x)\Gamma(1+3\beta)}{\Gamma(1+\beta)^3\Gamma(1+4\beta)} +$$
$$\frac{h^2t^{\beta}Sin(x)}{\Gamma(1+\beta)} + \frac{hnt^{\beta}Sin(x)}{\Gamma(1+\beta)} + t^{\beta}\left(-\frac{h^3Cos(x)}{\Gamma(1+\beta)} - \frac{2h^2nCos(x)}{\Gamma(1+\beta)} - \frac{hn^2Cos(x)}{\Gamma(1+\beta)}\right) +$$
$$\frac{h^3t^{3\beta}Cos(x)}{\Gamma(1+3\beta)} + t^{5\beta}\left(-\frac{2h^5Cos(x)\Gamma(1+3\beta)}{\Gamma(1+\beta)^3\Gamma(1+5\beta)} - \frac{2h^7Cos(x)\Gamma(1+4\beta)}{\Gamma(1+\beta)^2\Gamma(1+2\beta)\Gamma(1+5\beta)} -\right.$$
$$\left.\frac{4h^6nCos(x)\Gamma(1+4\beta)}{\Gamma(1+\beta)^2\Gamma(1+2\beta)\Gamma(1+5\beta)} - \frac{2h^5n^2Cos(x)\Gamma(1+4\beta)}{\Gamma(1+\beta)^2\Gamma(1+2\beta)\Gamma(1+5\beta)}\right) +$$
$$t^{7\beta}\left(-\frac{2h^7Cos(x)\Gamma(1+6\beta)}{\Gamma(1+2\beta)^3\Gamma(1+7\beta)} + \frac{4h^9Cos(x)\Gamma(1+3\beta)\Gamma(1+6\beta)}{\Gamma(1+\beta)^5\Gamma(1+4\beta)\Gamma(1+7\beta)} +\right.$$
$$\left.\frac{8h^8nCos(x)\Gamma(1+3\beta)\Gamma(1+6\beta)}{\Gamma(1+\beta)^5\Gamma(1+4\beta)\Gamma(1+7\beta)} + \frac{4h^7n^2Cos(x)\Gamma(1+3\beta)\Gamma(1+6\beta)}{\Gamma(1+\beta)^5\Gamma(1+4\beta)\Gamma(1+7\beta)}\right) + \cdots + i(sin(x) -$$
$$\frac{ht^{\beta}Cos(x)}{\Gamma(1+\beta)} - \frac{h^2t^{\beta}Cos(x)}{\Gamma(1+\beta)} - \frac{hnt^{\beta}Cos(x)}{\Gamma(1+\beta)} + \frac{h^2t^{2\beta}Sin(x)}{\Gamma(1+2\beta)} - \frac{2h^4t^{4\beta}\Gamma(1+3\beta)Sin(x)}{\Gamma(1+\beta)^3\Gamma(1+4\beta)} -$$
$$t^{2\beta}\left(\frac{2h^3Cos(x)}{\Gamma(1+2\beta)} + \frac{2h^2nCos(x)}{\Gamma(1+2\beta)}\right) + t^{4\beta}\left(-\frac{2h^5Cos(x)\Gamma(1+3\beta)}{\Gamma(1+\beta)^3\Gamma(1+4\beta)} - \frac{2h^7Cos(x)\Gamma(1+3\beta)}{\Gamma(1+\beta)^3\Gamma(1+4\beta)} -\right.$$
$$\frac{2h^4nCos(x)\Gamma(1+3\beta)}{\Gamma(1+\beta)^3\Gamma(1+4\beta)} - \frac{6h^6nCos(x)\Gamma(1+3\beta)}{\Gamma(1+\beta)^3\Gamma(1+4\beta)} - \frac{6h^5n^2Cos(x)\Gamma(1+3\beta)}{\Gamma(1+\beta)^3\Gamma(1+4\beta)} -$$
$$\left.\frac{2h^4n^3Cos(x)\Gamma(1+3\beta)}{\Gamma(1+\beta)^3\Gamma(1+4\beta)}\right) +$$
$$t^{6\beta}\left(-\frac{2h^7Cos(x)\Gamma(1+5\beta)}{\Gamma(1+\beta)\Gamma(1+2\beta)^2\Gamma(1+6\beta)} - \frac{2h^6nCos[x]\Gamma[1+5\beta]}{\Gamma(1+\beta)\Gamma(1+2\beta)^2\Gamma(1+6\beta)}\right) +$$
$$t^{8\beta}\left(\frac{8h^9Cos(x)\Gamma(1+3\beta)\Gamma(1+7\beta)}{\Gamma(1+\beta)^4\Gamma(1+2\beta)\Gamma(1+4\beta)\Gamma(1+8\beta)} + \frac{8h^8nCos(x)\Gamma(1+3\beta)\Gamma(1+7\beta)}{\Gamma(1+\beta)^4\Gamma(1+2\beta)\Gamma(1+4\beta)\Gamma(1+8\beta)}\right) + \cdots)),$$

Örnek 4.2

$$i\frac{\partial^{\beta}u(x,t)}{\partial t^{\beta}} - \frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2} = 0, \quad t \geq 0,\, 0 < \beta \leq 1 \tag{4.7}$$

(4.7) Kesirli Schrödinger denklemini,

$$u(x,0) = 1 + cosh(2x), \; x \in R \tag{4.8}$$

başlangıç koşulu ile ele alalım (Shqair ve ark., 2020).

(4.7) denkleminin gerçek çözümü (Shqair ve ark., 2020).

$$u(x,t) = 1 + cosh(2x)\, e^{-4i\frac{t^{\beta}}{\Gamma(1+\beta)}} \tag{4.9}$$

(4.7) denklemine $u(x,t) = v(x,t) + iw(x,t)$ dönüşümünü uygulayalım. Uygulandıktan sonra oluşan denklemin reel ve imajer kısımlarını ayırırsak aşağıdaki denklemleri elde edebiliriz

$$D_t^{\beta} v(x,t) - w_{xx}(x,t) = 0,$$

$$D_t^{\beta} w(x,t) - v_{xx}(x,t) = 0, \tag{4.10}$$

denklem sistemi, aşağıdaki başlangıç koşulları ile ifade edilir;

$$v(x,0) = 1 + \cosh(2x) \text{ ve } w(x,0) = 0. \tag{4.12}$$

q-HATM kullanarak (4.10) denklem sisteminin algoritması,

$$v_m(x,t) = (k_m + h)v_{m-1}(x,t) - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right)\left(\frac{1}{s}v(x,0)\right) - \frac{1}{s^{\beta}}L\{w_{xx}(x,t)\}$$

$$w_m(x,t) = (k_m + h)w_{m-1}(x,t) - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right)\left(\frac{1}{s}w(x,0)\right) - \frac{1}{s^{\beta}}L\{v_{xx}(x,t)\}, \tag{4.13}$$

ile ifade edilir.

(4.13) denklem sistemini m=1 den başlayıp Mathematica programı yardımıyla ardışık olarak çözerek aşağıdaki $v_m(x,t)$ ve $w_m(x,t)$ terimlerini elde ederiz.

$$v_0(x) = 1 + Cosh(2x),$$

$$w_0(x) = 0,$$

$$v_1(x) = 0,$$

$$w_1(x) = \frac{4ht^{\beta}Cosh(2x)}{\Gamma(1+\beta)},$$

$$v_2(x) = -\frac{16h^2t^{2\beta}Cosh(2x)}{\Gamma(1+2\beta)},$$

$$w_2(x) = \frac{4h^2t^{\beta}Cosh(2x)}{\Gamma(1+\beta)} + \frac{4hnt^{\beta}Cosh(2x)}{\Gamma(1+\beta)},$$

$$v_3(x) = -\frac{32h^3t^{2\beta}Cosh(2x)}{\Gamma(1+2\beta)} - \frac{32h^2nt^{2\beta}Cosh(2x)}{\Gamma(1+2\beta)},$$

$$w_3(x) = \frac{4h^3t^{\beta}Cosh(2x)}{\Gamma(1+\beta)} + \frac{8h^2nt^{\beta}Cosh(2x)}{\Gamma(1+\beta)} + \frac{4hn^2t^{\beta}Cosh(2x)}{\Gamma(1+\beta)} - \frac{64h^3t^{3\beta}Cosh(2x)}{\Gamma(1+3\beta)},$$

$$v_4(x) = -\frac{48h^4t^{2\beta}Cosh(2x)}{\Gamma(1+2\beta)} - \frac{96h^3nt^{2\beta}Cosh(2x)}{\Gamma(1+2\beta)} - \frac{48h^2n^2t^{2\beta}Cosh(2x)}{\Gamma(1+2\beta)} + \frac{256h^4t^{4\beta}Cosh(2x)}{\Gamma(1+4\beta)},$$

$$w_4(x) = \frac{4h^4t^{\beta}Cosh(2x)}{\Gamma(1+\beta)} + \frac{12h^3nt^{\beta}Cosh(2x)}{\Gamma(1+\beta)} + \frac{12h^2n^2t^{\beta}Cosh(2x)}{\Gamma(1+\beta)} + \frac{4hn^3t^{\beta}Cosh(2x)}{\Gamma(1+\beta)} - \frac{192h^4t^{3\beta}Cosh(2x)}{\Gamma(1+3\beta)} - \frac{192h^3nt^{3\beta}Cosh(2x)}{\Gamma(1+3\beta)},$$

$$\vdots$$

Buradan $u(x,t) = \mathrm{v}_4(\mathrm{x},\mathrm{t}) + \mathrm{i}w_4(x,t)$ eşitliği kullanılarak (4.7) denkleminin q-HATM kullanılarak elde edilen sayısal çözümü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} u(x,t) = 1 + Cosh(2x) &- \frac{16h^2t^{2\beta}Cosh(2x)}{\Gamma(1+2\beta)} - \frac{32h^3t^{2\beta}Cosh(2x)}{\Gamma(1+2\beta)} \\ &- \frac{32h^2nt^{2\beta}Cosh(2x)}{\Gamma(1+2\beta)} - \frac{48h^4t^{2\beta}Cosh(2x)}{\Gamma(1+2\beta)} - \frac{96h^3nt^{2\beta}Cosh(2x)}{\Gamma(1+2\beta)} \\ &- \frac{48h^2n^2t^{2\beta}Cosh(2x)}{\Gamma(1+2\beta)} + \frac{256h^4t^{4\beta}Cosh(2x)}{\Gamma(1+4\beta)} + i(\frac{4ht^{\beta}Cosh(2x)}{\Gamma(1+\beta)} \\ &+ \frac{4h^2t^{\beta}Cosh(2x)}{\Gamma(1+\beta)} + \frac{4hnt^{\beta}Cosh(2x)}{\Gamma(1+\beta)} \frac{4h^3t^{\beta}Cosh(2x)}{\Gamma(1+\beta)} \\ &+ \frac{8h^2nt^{\beta}Cosh(2x)}{\Gamma(1+\beta)} + \frac{4hn^2t^{\beta}Cosh(2x)}{\Gamma(1+\beta)} - \frac{64h^3t^{3\beta}Cosh(2x)}{\Gamma(1+3\beta)} \\ &+ \frac{4h^4t^{\beta}Cosh(2x)}{\Gamma(1+\beta)} + \frac{12h^3nt^{\beta}Cosh(2x)}{\Gamma(1+\beta)} + \frac{12h^2n^2t^{\beta}Cosh(2x)}{\Gamma(1+\beta)} \\ &+ \frac{4hn^3t^{\beta}Cosh(2x)}{\Gamma(1+\beta)} - \frac{192h^4t^{3\beta}Cosh(2x)}{\Gamma(1+3\beta)} - \frac{192h^3nt^{3\beta}Cosh(2x)}{\Gamma(1+3\beta)} \\ &+ \cdots \end{aligned}$$

5. FİZİKSEL YORUMLAR

Sayısal çözümle ilgilenirken istediğimiz en önemli şey sayısal çözümümüzün gerçek çözüme yakınsamasıdır. Böyle sayısal çözümlemelerde yakınsaklık analizini göstermek çoğu kez uğraştırıcı ve zor iştir. Bu yüzden yakınsaklık analizinin yerine belirli yerlerde kararlılık ve tutarlılık analizlerinin gösterilmesi tercih edilir. **Tutarlılık** denklemin çözümünü elde edilen yaklaşık çözümlerle gerçeklik ve doğruluk açısından aynı özellikleri taşımasıdır. Tutarlılık yakınsaklık için gereklidir ancak bazı yaklaşık çözümler tutarlı olmalarına rağmen yakınsak değildir. **Kararlılık** ise başlangıç şartındaki küçük bir değişim, çözüme küçük bir değişiklik olarak yansırsa bu çözüme kararlıdır denir ve çözüm kararlı kabul edilir. Ayrıca kararlılık sayısal çözüm ile denklemin kesin çözümü arasındaki ilişkiyi verir. Genellikle sayısal çözümlerde yakınsaklık gösterilirken sayısal çözümün kararlı davranışlara sahip olması beklenir.

O halde sorulması gereken sorulardan biri uygulayacağımız yöntemin kararlı sayısal çözümler verip vermemesidir? Veriyorsa hangi durumlar altında oluşuyor, oluşmuyorsa buna göre bir eşik değeri var mıdır? Kullanılan yöntemlerin çoğu yakınsak olmaktadır. Böylece incelenecek bir alt kategori bu yöntemlerin ne kadar hızlı bir biçimde sonuca yakınsadığıdır. İki sayısal yöntem ele alığında (aynı adım sayısına) hangisinin daha güçlü bir şekilde yakınsadığını bulmak için hata paylarına bakılır. Böylece eşit miktarda işlem ile daha doğru sonuçlar veren sayısal yöntemler tercih edilir.

Bu yöntemlerle çalışırken sayısal çözümlerin davranışlarının, kesin çözüm ile uyumlu olması gerekmektedir. Yani incelenen denklemin başlangıç koşulları altındaki özelliği ne ise sayısal çözümünde bu koşullara sahip olması gerekir. Tabi ki sayısal yöntem ile kesin değerleri bulması mümkün olmayabilir ama hedef, kesin sonuca yakın optimal sonuçlar elde etmektedir. Ayrıca sayısal yöntem üzerinde farklı değişiklikler yapılarak optimal değerler elde edebilir.

Bu bölümde kesirli Schrödinger denklemleri için elde edilen sayısal çözümün davranışı ile gerçek çözümün davranışı arasında tutarlı ve kararlı bir ilişki olup olmadığını, q-HATM yönteminin bilgisayar hesaplaması açısından verimli olup olmadığını incelemek için grafikler ve tablolar oluşturduk.

Örnek 4.1 için veriler;

Çizelge 5.1 $\boldsymbol{x}$ ve $\boldsymbol{t}$ 'nin farklı değerleri için kesirli Schrödinger denkleminin q-HATM çözümü için mutlak hata değerleri ($\boldsymbol{\beta = 1, h = -1, n = 1}$).

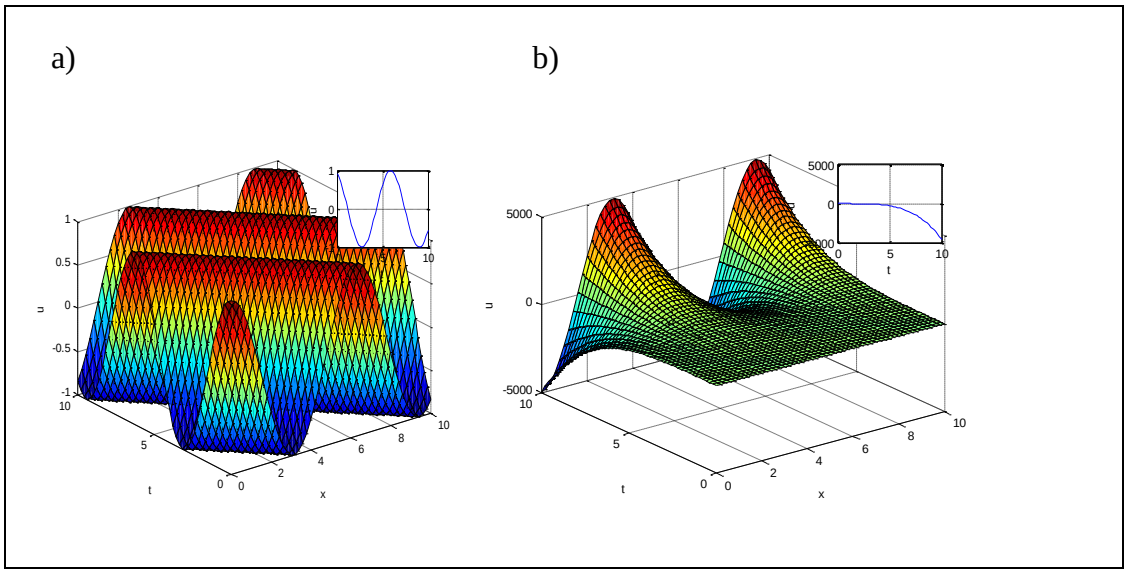
$\boldsymbol{t\backslash x}$	$\boldsymbol{0.01}$	$\boldsymbol{0.02}$	$\boldsymbol{0.03}$	$\boldsymbol{0.04}$	$\boldsymbol{0.05}$
$\boldsymbol{0.01}$	0,009999	0.009997	0.009994	0.009990	0.009986
$\boldsymbol{0.02}$	0.019997	0.019993	0.019987	0.0199796	0.019969
$\boldsymbol{0.03}$	0.029995	0.029988	0.029978	0.029965	0.029950
$\boldsymbol{0.04}$	0.039991	0.039981	0.039967	0.039949	0.039927
$\boldsymbol{0.05}$	0.049986	0.049972	0.049953	0.049929	0.049901

Çizelge 5.2 $\boldsymbol{x}$ ve $\boldsymbol{t}$ farklı değerleri için kesirli Schrödinger denkleminin q-HATM çözümü için mutlak hata değerleri ($\boldsymbol{\beta = 0.7, h = -1, n = 1}$).

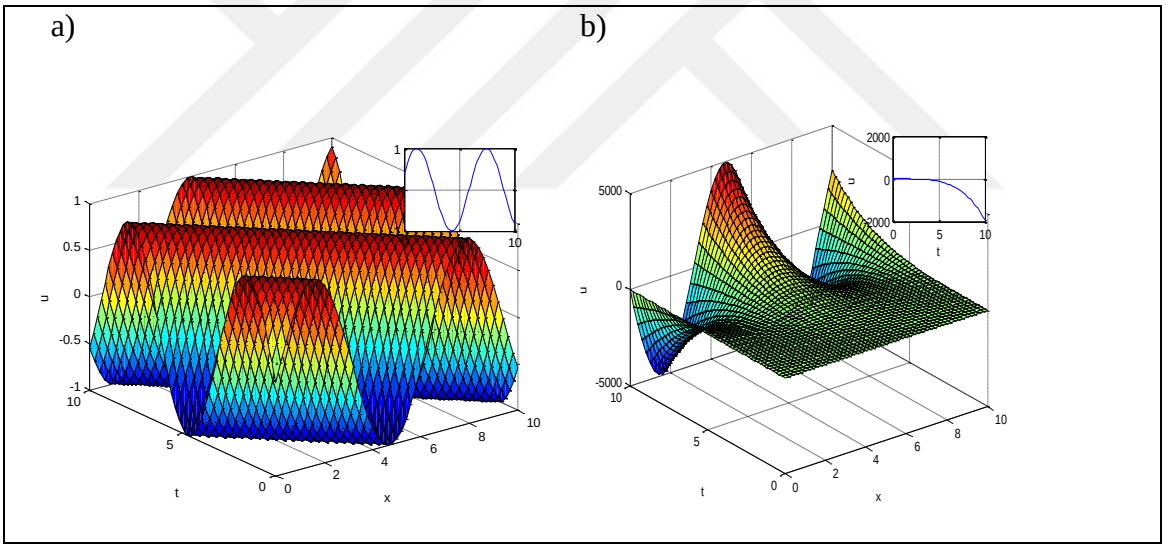
$\boldsymbol{t\backslash x}$	$\boldsymbol{0.01}$	$\boldsymbol{0.02}$	$\boldsymbol{0.03}$	$\boldsymbol{0.04}$	$\boldsymbol{0.05}$
$\boldsymbol{0.01}$	0.043804	0.043794	0.043780	0.043762	0.043739
$\boldsymbol{0.02}$	0.071148	0.071129	0.071102	0.071069	0.071028
$\boldsymbol{0.03}$	0.094480	0.094451	0.094412	0.094364	0.094307
$\boldsymbol{0.04}$	0.115532	0.115492	0.115441	0.115378	0.115303
$\boldsymbol{0.05}$	0.135032	0.134981	0.134916	0.134838	0.134747

Çizelge 5.3 $\boldsymbol{x}$ ve $\boldsymbol{t}$ farklı değerleri için kesirli Schrödinger denkleminin q-HATM çözümü için mutlak hata değerleri ($\boldsymbol{\beta = 0.3, h = -1, n = 1}$).

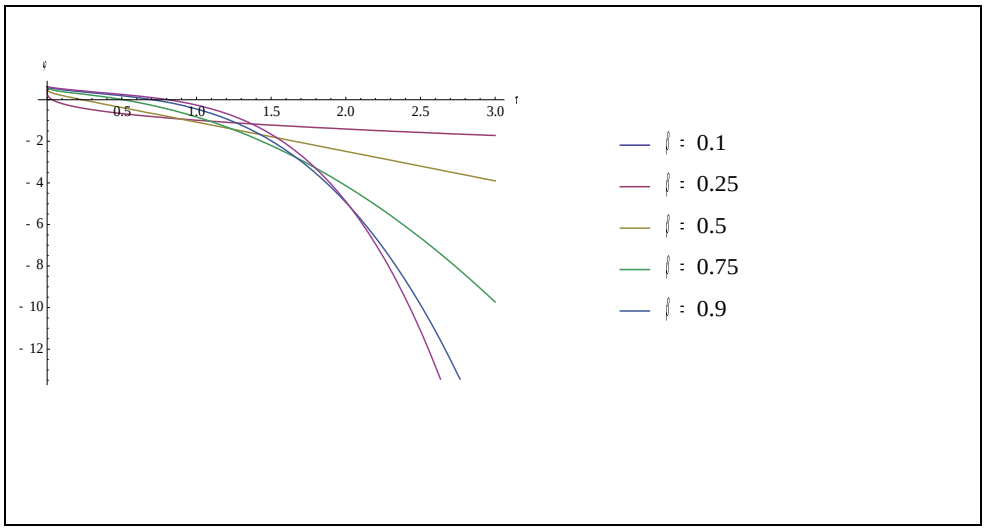
$\boldsymbol{t\backslash x}$	$\boldsymbol{0.01}$	$\boldsymbol{0.02}$	$\boldsymbol{0.03}$	$\boldsymbol{0.04}$	$\boldsymbol{0.05}$
$\boldsymbol{0.01}$	0.278920	0.278839	0.278731	0.278595	0.278431
$\boldsymbol{0.02}$	0.342801	0.342691	0.342548	0.342369	0.342157
$\boldsymbol{0.03}$	0.386604	0.386472	0.386302	0.386092	0.385845
$\boldsymbol{0.04}$	0.420943	0.420792	0.420599	0.420364	0.420087
$\boldsymbol{0.05}$	0.449596	0.449428	0.449215	0.448958	0.448655



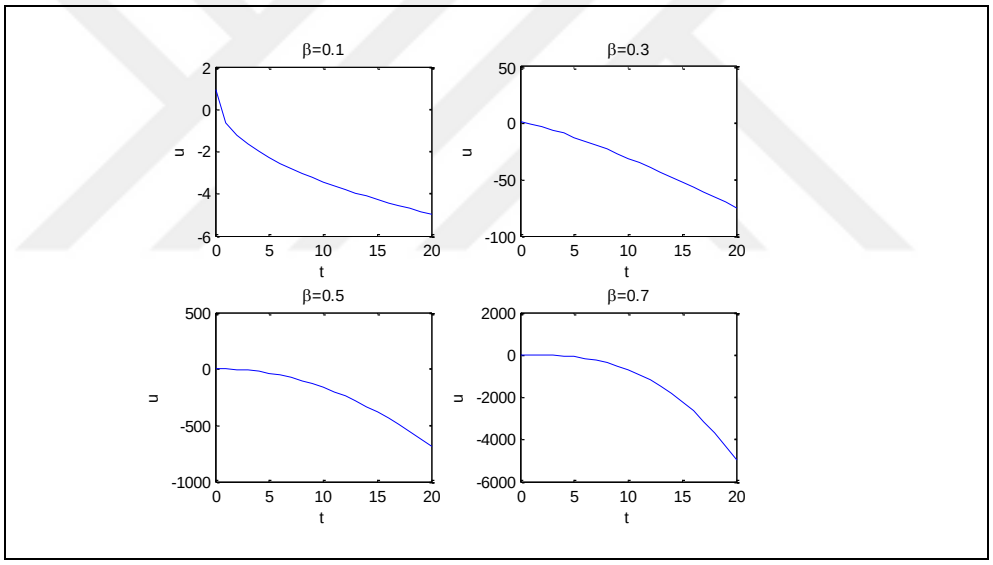
Şekil 5.1 Kesirli mertebeden Schrödinger denkleminin gerçek ve yaklaşık çözümlerinin reel kısımlarının yüzey grafikleri ($\boldsymbol{\beta = 1, h = -1, n = 1}$) (a) $(\mathbf{4.3})$gerçek çözümü için, (b) q-HATM yaklaşık çözümü için.



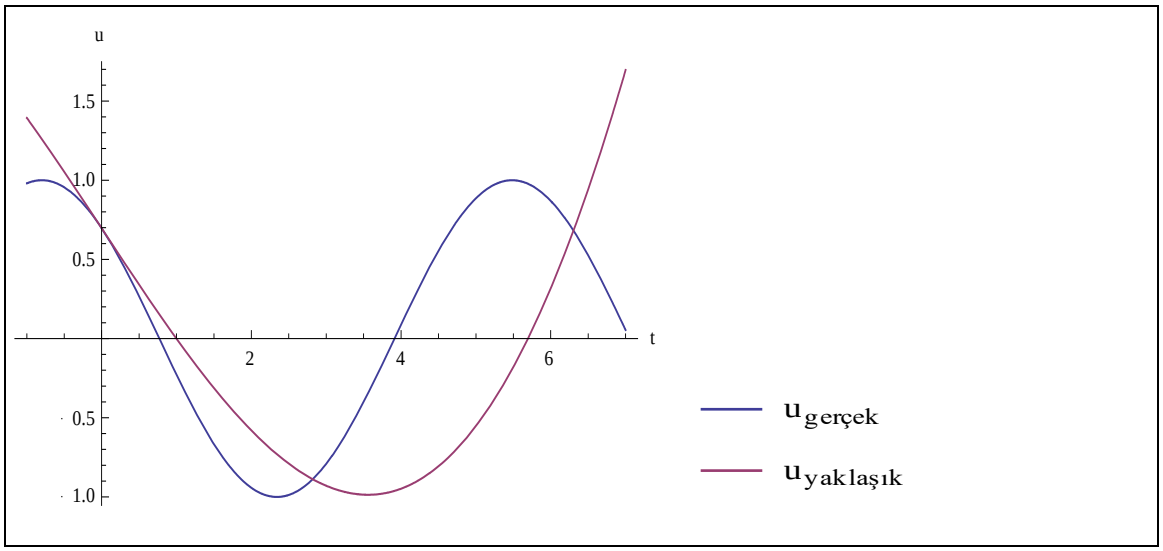
Şekil 5.2 Kesirli mertebeden Schrödinger denkleminin gerçek ve yaklaşık çözümlerinin imajiner kısımlarının yüzey grafikleri ($\boldsymbol{\beta = 1, h = -1, n = 1}$) (a)) $(\mathbf{4.3})$gerçek çözümü için, (b) q-HATM yaklaşık çözümü için.



Şekil 5.3 Kesirli Shcrödinger denkleminin farklı $\boldsymbol{\beta}$ değerleri için yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması ($\boldsymbol{\beta = 0.1, \beta = 0.25, \beta = 0.5, \beta = 0.75,\ \beta = 0.9}$).



Şekil 5.4 Kesirli Shcrödinger denkleminin farklı $\boldsymbol{\beta}$ değerleri için yaklaşık çözümlerinin iki boyutlu grafiklerinin karşılaştırılması ($\boldsymbol{h = -1,\ n = 1, x = 0.8}$).



Şekil 5.5 Kesirli Shcrödinger denkleminin $\boldsymbol{\beta = 1}$ değeri için gerçek çözümü ile yaklaşık çözümünün iki boyutlu grafiklerinin karşılaştırılması ($\boldsymbol{h = -1, n = 1, x = 0.8}$).

Örnek 4.2 için veriler;

Çizelge 5.4 $\boldsymbol{x}$ ve $\boldsymbol{t}$ 'nin farklı değerleri için kesirli Schrödinger denkleminin q-HATM çözümü için mutlak hata değerleri ($\boldsymbol{\beta = 1, h = -1, n = 1}$).

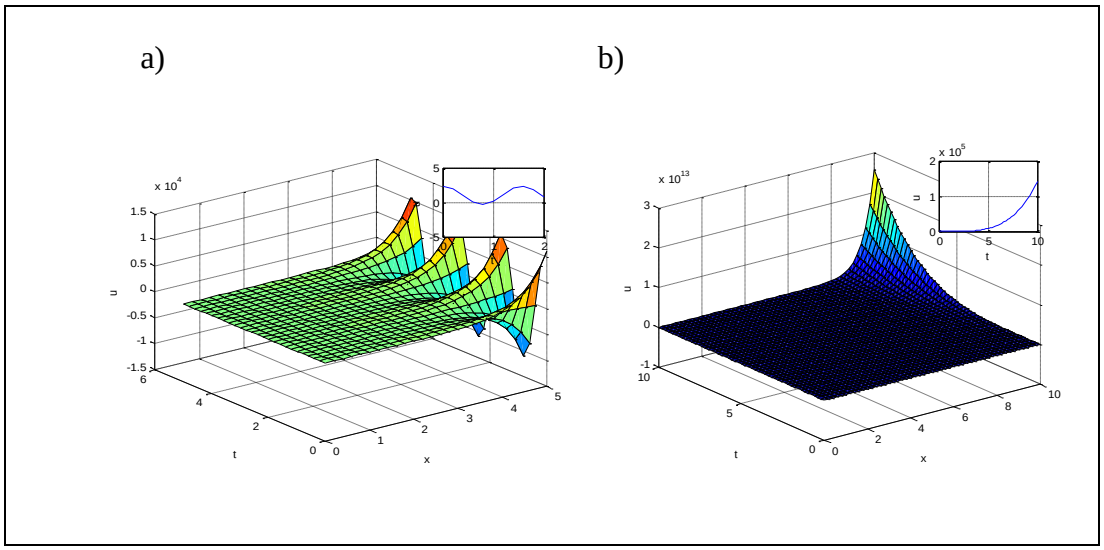
$\boldsymbol{t\backslash x}$	$\boldsymbol{0.01}$	$\boldsymbol{0.02}$	$\boldsymbol{0.03}$	$\boldsymbol{0.04}$	$\boldsymbol{0.05}$
$\boldsymbol{0.01}$	0.000400	0.000400	0.000400	0.000401	0.000401
$\boldsymbol{0.02}$	0.00160	0.001601	0.001602	0.001605	0.001607
$\boldsymbol{0.03}$	0.003600	0.003602	0.003606	0.003611	0.003617
$\boldsymbol{0.04}$	0.006400	0.006404	0.006410	0.006419	0.006431
$\boldsymbol{0.05}$	0.009999	0.010005	0.010015	0.010029	0.010047

Çizelge 5.5 $\boldsymbol{x}$ ve $\boldsymbol{t}$ farklı değerleri için kesirli Schrödinger denkleminin q-HATM çözümü için mutlak hata değerleri ($\boldsymbol{\beta = 0.7}$, $\boldsymbol{h = -1}$, $\boldsymbol{n = 1}$).

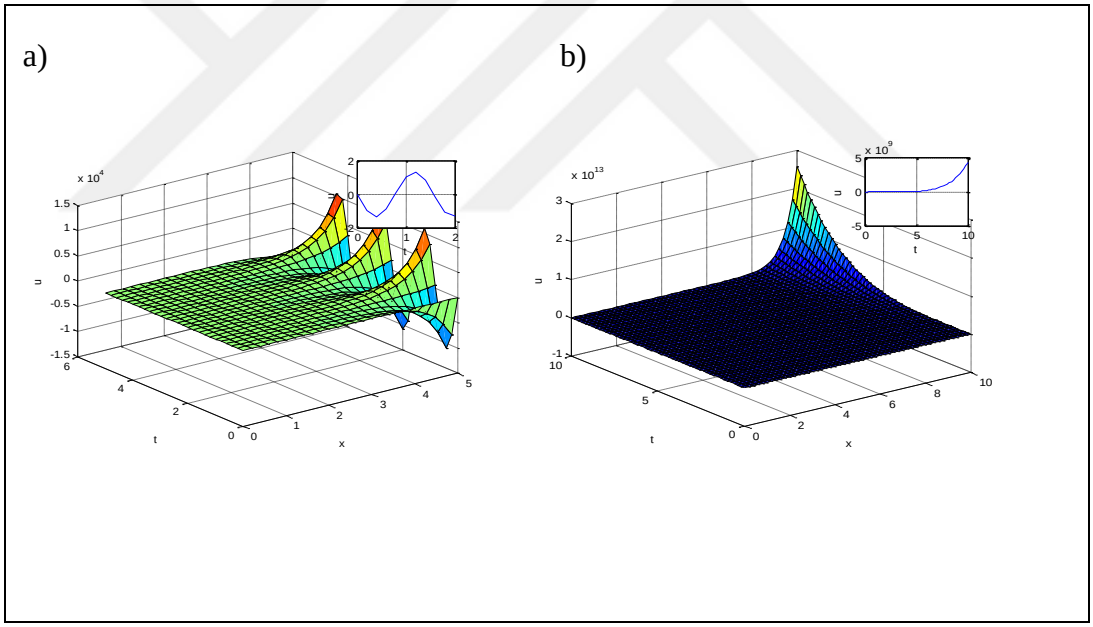
$\boldsymbol{t\backslash x}$	$\boldsymbol{0.01}$	$\boldsymbol{0.02}$	$\boldsymbol{0.03}$	$\boldsymbol{0.04}$	$\boldsymbol{0.05}$
$\boldsymbol{0.01}$	0.005151	0.005154	0.005159	0.005166	0.005175
$\boldsymbol{0.02}$	0.013595	0.013603	0.013616	0.013635	0.013660
$\boldsymbol{0.03}$	0.023986	0.024000	0.024024	0.024058	0.024101
$\boldsymbol{0.04}$	0.035886	0.035908	0.035944	0.035994	0.036059
$\boldsymbol{0.05}$	0.049053	0.049082	0.049132	0.049200	0.049289

Çizelge 5.6 $\boldsymbol{x}$ ve $\boldsymbol{t}$ farklı değerleri için kesirli Schrödinger denkleminin q-HATM çözümü için mutlak hata değerleri ($\boldsymbol{\beta = 0.3}$, $\boldsymbol{h = -1}$, $\boldsymbol{n = 1}$).

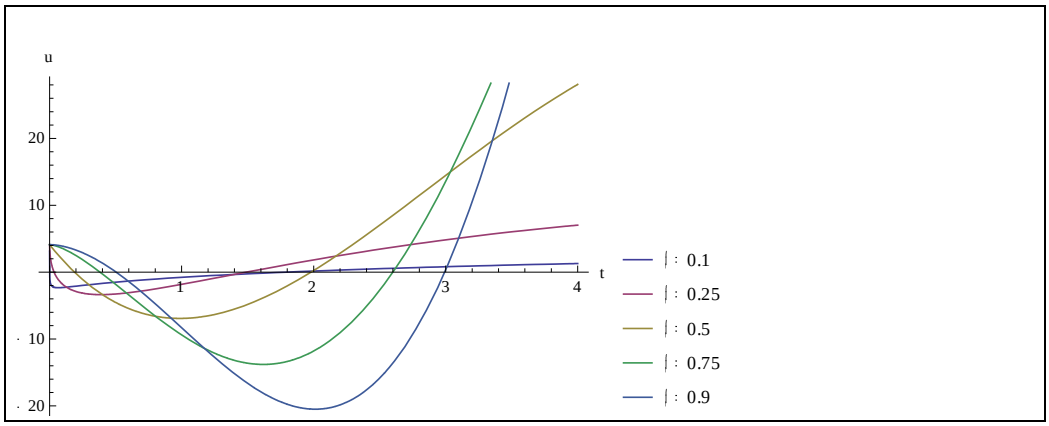
$\boldsymbol{t\backslash x}$	$\boldsymbol{0.01}$	$\boldsymbol{0.02}$	$\boldsymbol{0.03}$	$\boldsymbol{0.04}$	$\boldsymbol{0.05}$
$\boldsymbol{0.01}$	0.062177	0.062215	0.062277	0.062364	0.062476
$\boldsymbol{0.02}$	0.094555	0.094612	0.094707	0.094839	0.095009
$\boldsymbol{0.03}$	0.120919	0.120992	0.121112	0.121282	0.121500
$\boldsymbol{0.04}$	0.144032	0.144118	0.144262	0.144464	0.144724
$\boldsymbol{0.5}$	0.165008	0.165107	0.165272	0.165503	0.165800



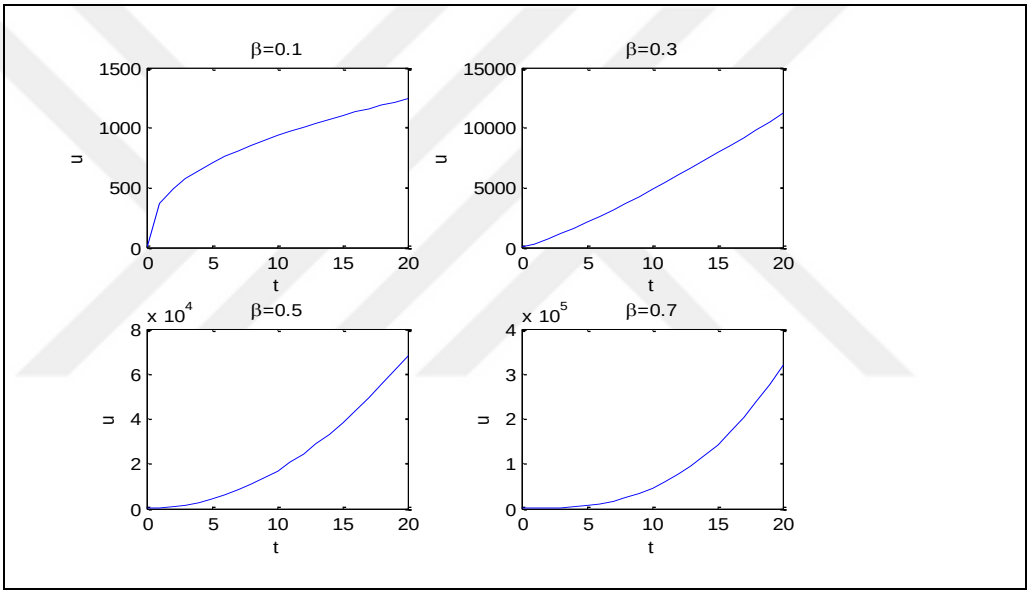
Şekil 5.6 Kesirli mertebeden Schrödinger denkleminin gerçek ve yaklaşık çözümlerinin reel kısımlarının yüzey grafikleri ($\boldsymbol{\beta = 1, h = -1, n = 1}$) (a) $(\mathbf{4.9})$ gerçek çözümü için, (b) q-HATM yaklaşık çözümü için.



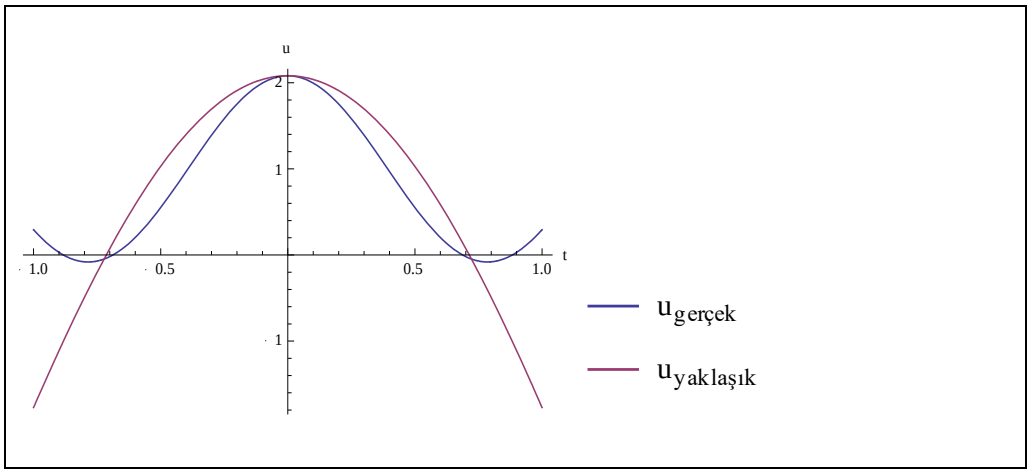
Şekil 5.7 Kesirli mertebeden Schrödinger denkleminin gerçek ve yaklaşık çözümlerinin imajiner kısımlarının yüzey grafikleri $\boldsymbol{(\beta = 1, h = -1, n = 1)}$ (a) $(\mathbf{4.9})$ gerçek çözümü için, (b) q-HATM yaklaşık çözümü için.



Şekil 5.8 Kesirli Shcrödinger denkleminin farklı $\boldsymbol{\beta}$ değerleri için yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması ($\boldsymbol{\beta = 0.1, \beta = 0.25, \beta = 0.5}$, $\boldsymbol{\beta = 0.75}$, $\boldsymbol{\beta = 0.9}$).



Şekil 5.9 Kesirli Shcrödinger denkleminin farklı $\boldsymbol{\beta}$ değerleri için yaklaşık çözümlerinin iki boyutlu grafiklerinin karşılaştırılması ($\boldsymbol{h = -1, n = 1, x = 0.8}$).



Şekil 5.10 Kesirli Shcrödinger denkleminin $\boldsymbol{\beta = 1}$ değeri için gerçek çözümü ile yaklaşık çözümünün iki boyutlu grafiklerinin karşılaştırılması $\boldsymbol{(h = -1, n = 1, x = 0.8}$).

6. SONUÇ ve ÖNERİLER

Son zamanlarda etkinliği ve tutarlılığı nedeniyle, q-HATM doğrusal olmayan problemlerin çözümlerini yorumlamak için kullanılmıştır. Bu teknik ile doğrusal olmayan diferansiyel denklemler genellikle basit bir şekilde çözülebilir. Bu tekniğin avantajı; küçük bir bölgedeki analitik çözüme hızlı bir şekilde yaklaşan, ancak diğer geleneksel tekniklerle mümkün olmayan çözümler vermesidir. Bu algoritma ayrıca, diğer klasik yöntemlere göre hesaplamaları azaltmaktadır. Yöntemin temel farklılığı ve güçlü yanı ele alınan problemin çözüm serisinin yakınsaklık hızının ve bölgesinin, yakınsaklık kontrol parametresi h ile kontrol edilebilir olmasıdır. Bu nedenle q-HATM herhangi bir kabul ya da kısıtlama olmaksızın lineer ve lineer olmayan problemlere uygulanabilmektedir.

Bu çalışmada q –HATM kullanılarak Caputo türev operatörleri yardımıyla doğrusal olmayan zaman-kesirli Schrödinger denkleminin (FSE) sayısal çözümleri incelenmiştir.

3. bölümde doğrusal olmayan zaman-kesirli Schrödinger denkleminin genel formu için q –HATM algoritmasının nasıl uygulanacağı ve çözümün nasıl elde edileceği gösterildi. Bu algoritmadan hareketle 4.bölümde doğrusal olmayan zaman-kesirli Schrödinger denkleminin bazı özel durumları için elde edilen örnek 1 ve örnek 2'nin Caputo türev operatörleri yardımıyla yaklaşık çözümleri elde edildi. Bu çözümler elde edilirken Mathematica programı kullanıldı. Bulunan bu çözümler seri şeklindedir. Bu çözümleri elde ederken yazım kolaylığı açısından 4. adıma kadar ilerledik. Çözüm seri şeklinde elde edildiğinden adım sayısını arttırdıkça gerçek çözüme daha yakın sonuçlar bulunabilir.

Sayısal çözümle ilgilenirken istediğimiz en önemli şey sayısal çözümümüzün gerçek çözüme yakınsamasıdır. Bunu gösterebilmek için 5. bölümde bazı tablolar ve şekiller çizildi. β Kesirli mertebenin çözümü nasıl etkilediği göstermek için $0.1, 0.25, 0.5,\ 0.75, 0.9$ ve $0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ değerleri için 2. boyutlu grafikler çizildi. Ayrıca şekil 5 ile şekil 10 da $\beta = 1$ alınarak yaklaşık çözümün, gerçek çözüme yakınsadığı gösterildi. Bu grafiklere bakıldığında β kesirli mertebesinin 1'e yaklaştıkça, yaklaşık çözümün gerçek çözüme yakınsadığı görünmektedir. Ayrıca bu tablolar ve şekiller, Kesirli Schrödinger denklemleri için elde edilen sayısal çözümün davranışı ile

gerçek çözümün davranışı arasında tutarlı bir ilişki olup olmadığını, q-HATM yönteminin bilgisayar hesaplaması açısından verimli olup olmadığını incelemektedir.

Elde edilen sonuçlar göstermektedir ki, q-HATM; matematik, fizik ve mühendislikte incelenen kesirli lineer ve lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin Caputo türev operatörleri yardımıyla sayısal çözümlerini elde etmek için alternatif olarak kullanılabilir. Bu metotla elde edilen çözümler adım sayısının artmasıyla gerçek çözüme yakın sonuçlar vermektedir.

KAYNAKLAR

Andwers, L.C. 1985, Special Functions for Engineersand Applied Mathematicians, Macmillan, New York.

Al-Smadi, M. Abu Arqub, O. 2019. Computational Algorithm For Solving Fredholm Time-Fractional Partial İntegrodifferential Equations Of Dirichlet Functions Type With Error Estimates. Appl. Math. Comput. 342, 280–294.

Al-Smadi, M. Freihat, A. Khalil, H. Momani, S. Khan, R.A. 2017. Numerical Multistep Approach For Solving Fractional Partial Differential Equations. Int. J. Comput. Methods 14, 1750029.

Al-Smadi, M. Simplified. 2018. İterative Reproducing Kernel Method For h

Handling Time-Fractional BVPs With Rrror Estimation. Ain Shams Eng. J., 9, 2517–2525.

Al-Smadi, M. Freihat, A. Abu Arqub, O. Shawagfeh, N. 2015. A Novel Multistep Generalized Differential Transform Method For Solving Fractional-Order Lü chaotic and Hyperchaotic Systems. J. Comput. Analy. Appl. 19, 713–724.

Baleanu, D. Machado, J.A.T. Luo, A.C. 2012, Fractional Dynamics and Control; Springer: Berlin, Germany.

Cerit C. 1997, Bilgisayar Uygulamalı Diferensiyel Denklemler (Çeviri), Beta Basım Yayınevi.

Dalir, M., Bashour, M.2010. Applications of Fractional Calculus. Applied Mathematical Sciences, 4(21), 1021-1032.

Dennemeyer R. 1968, Partial Differential Equations and Boundary Value Problems. New York, McGraw-Hill.

Duchateau P., and Zachmann D. W. 1986, Partial Differential Equations, McGraw Hill, Shaum's Outline Series.

Duchateauand P., Zachmann D. W. 1986, Shaum's Outline of Theory and Problems of Partial Differential Equations, Mc Graw-Hill Companies.

Eleuch, H. Rostovtsev, Y.V. Scully, M.O., 2010. New Analytic Solution of Schrödinger's Equation. EPL (Europhysics Letters). 89, 50004.

Eleuch, H., Rostovtsev, Y.V., 2010. Analytical Solution for 3D Stationary Schrödinger Equation implementation of Huygens Principle for Matter waves. J. Mod. Opt. 57, 1877-1881.

Franklin P. 1964, Functions of Complex Analysis, Sir Isaac Pitman-Sons Ltd.

Freihet, A. Hasan, S. Al-Smadi, M. Gaith, M. Momani, S. 2019. Construction of Fractional Power Series Solutions to Fractional Stiff System Using Residual Functions Algorithm. Adv. Differ. Equ. 95.

Hasan, S. Al-Smadi, M. Freihet, A. Momani, S. 2019. Two Computational Approaches For Solving a Fractional Obstacle System in Hilbert Space. Adv. Differ. Equ. 55.

Hasan, S., El-Ajou, A., Hadid, S. Al-Smadi, M.; Momani, S., 2020. Atangana-Baleanu fractional framework of reproducing kernel technique in solving fractional population dynamics system. Chaos Solitons Fractals, 133, 109624

Hifler, 2000. R. Applications of Fractionalcalculus in Physics, World Scientific, Singapore.

Kannapan, Pl. 2009. FunctionalEquationsandInequalitieswithApplications. Springer.

Kilbas, A.A., Srivastava, H. M., Trujillo, J. J., 2006, Theoryand Applications of Fractioanal Differential Equations, Elsevier, Amsterdam.

Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., Trujillo, J. J., 2010. Theory and Applications of Fractional Differential Equations, 1st ed. Elsevier: Amsterdam, The Netherlands, p. 523, ISBN 100444518320.

Kumar P., Agrawal O. P. 2006. An Approximate Method for Numerical Solution of Fractional Differantial Equations, Signal Processing, 86, 2602-2610.

Kumar, D., Sing, J., Baleanu,D. 2018. A New Numerical Algorithm for Fractional Fitzhugh-Nagumo Equationarising in Transmission of Nerveimpulses, NonlinearDyn. 91, 307-317.

Laskin, N., 2018, Fractional Quantum Mechanics, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

Liao, SJ., 1995. An approximate solution technique not depending on small parameters on small parameters: a special example. Int J Nonlinear Mech, 30, 371–380.

Liao, SJ., 1997. Boundary element method for general nonlinear differential operators. Eng Anal Bound Elem, 20,91–99.

Levitanand B. Sargsjan, M.I.S., 1975, Introductionto Spectral Theory. Rhode Island.

Liu, F., Anh, V., Turner, I.2004. Numerical Solution of The Space Fractional Fokker–Planck equation. Journal of Computational and Applied Mathematics, 166(1), 209-219.

Loverro, A. 2004. Fractional Calculus: History, Definitions and Applications forthe Engineer. Rapport Technique, Univeristy of Notre Dame. Department of Aerospace and Mechanical Engineering, 1-28.

Momani, S., Odibat, Z. 2007. Numerical Approachto Differential Equations of Fractional Order, J.Comput. Appl. Math. 96-110.

Momani, S., Noor M. A. 2006. Numerical Methods For Fourth-Order Fractional İntegro-Differential Equations, Appl. Math. Comput. 182, 754-760.

Momani, S. Freihat, A. Al-Smadi, M. 2014. Analytical study of fractional-order multiple chaotic Fiĵhugh-Nagumo neurons model using multistep generalized differential transform method. Abst. Appl. Analy. 2014, 276279.

Momani, S. Abu Arqub, O. Freihat, A. Al-Smadi, M., 2016. Analytical approximations for Fokker-Planck Equations of Fractional Order in Multistep Schemes. Appl. Comput. Math. 15, 319–330.

Nairat, M. Shqair, M. Alhalholy, T., 2019, Cylindrically Symmetric Fractional Helmholtz Equation. Applied Mathematics E-Notes In press.

Jha, P.K. Eleuch, H.. Rostovtsev, Y. V., 2011. Analytical Solution to Position Dependent Mass Schrödinger Equation. J. Mod. Opt. 58, 652-656.

Özer M. N., ve Eser,D. 2002, Diferensiyel Denklemler (Teori ve Uygulamaları) Birlik Ofset, Eskişehir.

Podlubny I. 1998, Fractional Differential Equations. Technical University of Kosice.

Podlubny, 1999, I. Fractional Differential Equations, Academic Pres, New York.

Rudolf, H. 2000. Applications of fractionalcalculus in physics. World Scientific.

Samko, S.G., Kilbas, A. A., Marichev,O .I. 1993, Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications, Gordon and Breach, Switzerland.

Saadeh, R. Alaroud, M. Al-Smadi, M. Ahmad, R.R. Salma Din, U.K. 2019. Application of fractional residual power series algorithm to solve Newell–Whitehead–Segel equation of fractional order. Symmetry 11, 1431.

Shqair, M., 2019. Developing a new approaching technique of homotopy perturbation method to solve two-group reflected cylindrical reactor. Results in Physics 12, 1880-1887.

Shqair, M. Al-Smadi, M. Momani, S. El-Zahar., 2020. Adaptation of Conformable Residual Power Series Scheme in Solving Nonlinear Fractional Quantum Mechanics Problems. Appl. Sci. ,10, 890.

Singh, J. Secer, A. Swroop, R. Kumar, D. 2019, A reliableanalyticalapproachfor a fractional model of advection-dispersionequation, NonlinearEng. 9, 107-216.

Srivasta H. M., Kumar D., SinghJ. 2017. An efficient analytical technique for fractional model of vibration equation, Appl. Math. Model. 45, 192-204.

Tchier F., Inc M., Korpinar Z.S. and Baleanu D., 2016. Solutions of the time fractional reaction–diffusion equations with residual power series method. Advances in Mechanical Engineering, 8(10) 1–10.

Yavuz, M., Ozdemir, N., 2018. A Different Approach To The European Option Pricing Model With New Fractional Operatör, Math. Model. Nat. Phenom. 13(1), 1-12.

Yavuz, M., Ozdemir, N. 2018. Europe an vanilla optionpricing model of fractional order with out singular kernel, Fractal Fract., 2(1), 3.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Cengiz GÜLTEKİN
Uyruğu :
Doğum Yeri ve Tarihi :
Telefon :
Faks :
e-mail :

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	**Feyzi Çakmak Lisesi**	**2009**
Üniversite	:	**Harran Üniversitesi**	**2017**
YüksekLisans	:		
Doktora	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2015	**EGM**	**MEMUR**