



**T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

q -STANCU OPERATÖRLERİNE YENİ BİR BAKIŞ

(Yüksek Lisans Tezi)

Feride BARANER

**Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Övgü GÜREL YILMAZ**

**RİZE
2025**

KABUL VE ONAY

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında, Dr. Öğr. Üyesi Övgü GÜREL YILMAZ danışmanlığında, Feride BARANER tarafından hazırlanan *q-Stancu Operatörlerine Yeni Bir Bakış* adlı bu tez çalışması, 16/12/2025 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda oy birliğiyle/~~oy çokluğuyla~~ başarılı bulunarak jürimiz tarafından **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	Ünvanı, Adı SOYADI	İmza
Başkan	: Prof. Dr. Gülen BAŞCANBAZ TUNCA	
Üye	: Doç. Dr. Mustafa Cemil BİŞGİN	
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Övgü GÜREL YILMAZ	

ETİK BEYAN

Matematik Tezli Yüksek Lisans Programından mezun olmak üzere teslim ettiğim “ q -Stancu Operatörlerine Yeni Bir Bakış” adlı tezim, bilim ve araştırma etiği prensiplerine riayet edilerek tarafımdan yazılmıştır.

Tez çalışmamda, başka kaynaklardan aktarılan bütün bilgi ve alıntılar, Enstitünüz Tez Yazım Kılavuzuna uygun olarak açıkça gösterilmiştir. Kaynağı gösterilenler dışında kalan bütün bilgiler uygun araştırma yöntemi kullanılarak tarafımdan edinilmiş ve esere bu şekilde yansıtılmıştır. Şahsıma ait olmayan hiçbir bilgi, kasıt veya kusurlar, şahsıma aitmiş gibi gösterilmemiştir. İnternet kaynakları dâhil, sahibine/kaynağına atıf yapılmaksızın hiçbir bilgi kullanılmamıştır. Aksinin ortaya çıkması halinde doğacak bütün hukuki, idari, akademik ve etik sorumluluk tarafıma ait olacaktır. Eserin tesliminden sonra herhangi bir zamanda, bilim etiğine aykırılık tespit edilmesi ve / veya eserimle ilgili intihal veya intihal şeklinde anlaşılabilecek bir durumun ortaya çıkması halinde; Üniversiteniz ve eğitim kadronuzun hiçbir şekilde sorumlu tutulmayacağımı hür irademle kabul, beyan ve taahhüt ederim.

16 /12 /2025

Feride BARANER

ÖN SÖZ

Bu tez çalışmasında, q -Stancu operatörlerinin q -Pochhammer sembolü kullanılarak yeni bir gösterimi sunulmuştur. Bu yeni gösterim aracılığıyla, literatürde bilinen bazı özellikler farklı bir yöntemle yeniden ispatlanmış ve bununla birlikte operatörlerin bazı yeni özellikleri elde edilmiştir.

Yüksek lisans çalışmamın her aşamasında bilgi birikimi, rehberliği, tecrübesi ve yönlendirmeleriyle bana yol gösteren, hem manevi hem de akademik anlamda desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, beni her zaman araştırmaya ve kendimi geliştirmeye teşvik eden, insani değerleriyle de örnek aldığım, yanında çalışmaktan onur duyduğum; ayrıca tecrübelerinden yararlanırken gösterdiği hoşgörü ve sabır için çok değerli tez danışmanım Dr. Öğretim Üyesi Övgü Gürel Yılmaz'a en içten teşekkürlerimi sunarım. Kendisi, araştırmanın şekillenmesinde ve bilimsel derinliğinin artmasında çok önemli katkılarda bulunmuş, akademik yaklaşımıyla çalışmanın nitelik kazanmasına büyük ölçüde destek olmuştur. Yüksek lisans eğitimim süresince, bilgi ve tecrübeleriyle akademik gelişime önemli katkılarda bulunan, ders aşamasında ve sonrasında bana her zaman yardımcı olan, yüreklendirip cesaretlendiren ve beraber çalışmaktan onur duyduğum Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Matematik Bölümü'nün tüm değerli hocalarına da teşekkür ederim. Özellikle, matematik bilimine dair düşünme biçimimi geliştiren, analitik bakış açımı zenginleştiren ve bilimsel merakımı teşvik eden katkıları, bu çalışmanın oluşum sürecinde bana rehberlik etmiştir. Bu süreçte her zaman yanımda olan ve desteğini her zaman hissettiğim canım anneme en derin şükranlarımı sunarım. Onun sabrı, anlayışı ve sürekli teşviki, bu akademik yolculuğun en güçlü dayanaklarından biri olmuştur. Aynı şekilde, varlıklarıyla bana güç veren ve hiçbir zaman desteklerini eksik etmeyen kardeşlerime de içtenlikle teşekkür ederim. Son olarak, bu tezin ortaya çıkmasında doğrudan veya dolaylı olarak katkısı bulunan tüm kişi ve kurumlara teşekkür ederim. Bu çalışma, yalnızca bireysel bir çabanın değil, aynı zamanda bilimsel dayanışma ve iş birliğinin bir ürünü olmuştur.

Feride BARANER
RİZE/2025

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	I
ETİK BEYAN	II
ÖN SÖZ	III
İÇİNDEKİLER	IV
ÖZET	V
ABSTRACT.....	VI
KISALTMALAR	VII
GİRİŞ	1
1. ÖN BİLGİLER	6
1.1. Operatör Teorisinde Kullanılan Temel Kavramlar	6
1.2. q -Analizde Kullanılan Temel Kavramlar	8
1.3. q -Bernstein Operatörleri	18
1.4. q -Stancu Operatörleri.....	22
2. q -STANCU OPERATÖRLERİNİN YENİ BİR GÖSTERİMİ.....	34
3. LİMİT q -STANCU OPERATÖRÜ.....	44
4. SONUÇ.....	55
KAYNAKÇA	56

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Anabilim Dalı : Matematik
Tez Türü : Yüksek Lisans Tezi
Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Övgü GÜREL YILMAZ
Hazırlayan : Feride BARANER
Yıl : 2025
Sayfa Sayısı : 60

ÖZET

q -STANCU OPERATÖRLERİNE YENİ BİR BAKIŞ

Bu tez çalışmasında, literatürde önemli bir yere sahip olan q -Bernstein operatörlerinin bir genellemesi niteliğindeki q -Stancu operatörleri kapsamlı bir şekilde incelenmiştir. Öncelikle operatör teorisinde kullanılan temel tanımlar ve teoremler sunulmuş, ardından q -analizine ilişkin gerekli kavramlar açıklanmıştır. Nowak tarafından tanımlanan q -Stancu operatörlerinin bilinen temel özellikleri ele alınmış, bu özellikler arasındaki ilişkiler değerlendirilmiş ve literatürde yer alan sonuçlar bir araya getirilmiştir. Daha sonra, söz konusu operatörlerin q -Pochhammer sembolü kullanılarak yeni bir gösterimi elde edilmiştir. Bu yeni gösterim aracılığıyla daha önce bilinen bazı özellikler alternatif bir ispat tekniği kullanılarak yeniden kanıtlanmıştır. Buna ek olarak, söz konusu operatörün yeni gösteriminin sağladığı bazı bağıntılar kullanılarak q -Stancu operatörlerinin m -inci mertebeden momentlerine ilişkin genel bir yineleme bağıntısı türetilmiştir ve bu momentlerin daha düşük mertebeden momentler cinsinden ifade edilebildiği gösterilmiştir. Çalışmanın devamında, q -Stancu operatörlerinin limit hali tanımlanmış ve bu operatörlerin limit operatörüne düzgün olarak yakınsadığı ispatlanmıştır. Son olarak, limit operatörünün momentleri hesaplanarak bu momentlerin sağladığı yineleme bağıntısı sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: q -analizi, q -Bernstein operatörü, q -Stancu operatörü, düzgün yakınsaklık, limit q -Stancu operatörü.

Recep Tayyip Erdogan University Institute of Graduate Studies

Department : Mathematics
Thesis Type : Master Thesis
Supervisor : Asst. Prof. Dr. Övgü GÜREL YILMAZ
Author : Feride BARANER
Year : 2025
Pages : 60

ABSTRACT

A NEW ASPECT OF q -STANCU OPERATORS

In this thesis, the q -Stancu operators, which constitute a generalization of the q -Bernstein operators, a class of operators with significant importance in the literature, are examined comprehensively. Initially, the fundamental definitions and theorems used in operator theory are presented, followed by an explanation of the necessary concepts from q -analysis. The well-known basic properties of the q -Stancu operators, as defined by Nowak, are discussed, the relationships among these properties are analyzed, and relevant results from the literature are compiled. Subsequently, a new representation of these operators is obtained using the q -Pochhammer symbol. Through this new representation, some previously known properties are re-established via an alternative proof technique. Moreover, by employing certain relations arising from this new representation, a general recurrence formula for the m -th order moments of the q -Stancu operators is derived, and it is shown that these moments can be expressed in terms of lower-order moments. The study then defines the limit form of the q -Stancu operators and proves that these operators converge uniformly to the limit operator. Finally, the moments of the limit operator are computed, and the recurrence relations they satisfy are presented.

Keywords: q -calculus, q -Bernstein operator, q -Stancu operator, uniform convergence, limit q -Stancu operator.

KISALTMALAR

B_n	:	Bernstein polinomu
S_n^α	:	Bernstein-Stancu polinomu
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar
$B_{\infty,q}$	:	Limit q -Bernstein operatörü
$S_\infty^{q,\alpha}$	:	Limit q -Stancu operatörü
$R_{n,q}$	:	Lupaş q -Bernstein operatörü
$\mathbb{N}_0$	:	Negatif olmayan tamsayılar
$C[a, b]$	:	$[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı
$B_{n,q}$	:	q -Bernstein operatörü
$S_n^{q,\alpha}$	:	q -Stancu operatörü

GİRİŞ

Matematiğin birçok uygulamasında, analizde karşımıza çıkan standart fonksiyonlardan (polinomlar, trigonometrik, üstel ve logaritmik fonksiyonlar gibi) çok daha karmaşık fonksiyonlarla karşılaşırız. Bu karmaşık fonksiyonlar bahsedilen standart fonksiyonlarla kapalı biçimde ifade edilemez, hatta bazen davranışları yalnızca grafikleri üzerinden izlenebilir. Bu tür durumlarda ele alınan karmaşık fonksiyonu daha basit bir fonksiyon ile yaklaşık olarak ifade edebilmek büyük önem taşır. Bu basit fonksiyon, üzerinde gerekli hesaplamaların rahatça yapılabileceği ve aynı zamanda orijinal fonksiyona yeterince yakın olacak şekilde bir fonksiyon seçilmelidir. Böylece basit fonksiyon üzerinde yürütülen hesaplamalar, karmaşık fonksiyonun temsil ettiği veri hakkında daha güvenilir bilgiler sağlayabilir.

Yaklaşım teorisinin amacı, karmaşık bir fonksiyonu onun yerine geçebilecek daha basit ve üzerinde işlem yapmaya daha uygun bir fonksiyonla ifade etmektir. Bu amaçla kullanılan fonksiyon sınıfları arasında polinomlar yaygın olarak tercih edilmektedir; çünkü hesaplamaları kolaydır, her mertebeden türevleri mevcuttur, integralleri rahatlıkla alınabilir ve süreklidir. Sonuç olarak, yaklaşım teorisinde polinomlar fonksiyonları temsil etmek için oldukça uygun yapılardır.

Bu alandaki en önemli adımlardan biri 1885 yılında K. Weierstrass tarafından atılmıştır (Weierstrass, 1885). Weierstrass kapalı ve sınırlı bir aralıkta tanımlı her sürekli fonksiyonun bir polinomla temsil edilebileceğini aşağıdaki teoremlerle kanıtlamıştır ve bu teoremler birlikte polinomların yaklaşım teorisinde önemli bir yere sahip olduğu vurgulanmıştır.

“ φ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlı ve sürekli olmak üzere, her $\epsilon > 0$ ve $x \in [a, b]$ için $|\varphi(x) - P(x)| < \epsilon$ olacak şekilde bir P polinomu vardır.”

Bu teorem H. Lebesgue, L. Fejer, E. Landau gibi birçok matematikçi tarafından ispatlanmıştır (Fejer, 1900; Landau, 1908; Lebesgue, 1898); ancak günümüzde bile hala önemini koruyan en etkili ispat, 1912 yılında S. N. Bernstein tarafından verilmiştir (Bernstein, 1912). Bernstein bu teoremin ispatını yapmak amacıyla literatürde Bernstein polinomları olarak bilinen aşağıdaki polinomları tanımlamıştır.

φ , $[0,1]$ aralığında tanımlı sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$B_n(\varphi; x) = \sum_{k=0}^n \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

polinomu φ fonksiyonunun n -inci dereceden Bernstein polinomu olarak adlandırılır. Bernstein, Weierstrass Teoremi'ni bu polinomlar yardımıyla ispatlarken olasılık teorisindeki kavram ve yöntemlerden faydalanmıştır ve $[0,1]$ üzerinde sürekli φ fonksiyonları için $B_n(\varphi; x)$ polinomlarının φ fonksiyonuna düzgün olarak yakınsadığını ispatlamıştır.

Bernstein polinomları, olasılık teorisi, nümerik analiz, yaklaşım teorisi ve özel fonksiyonlar teorisi gibi çeşitli matematiksel alanlarda olduğu gibi, aynı zamanda birçok farklı bilim dalında da geniş bir uygulama alanına sahiptir (Davis, 1975; Lorentz, 1986; Petrone, 1999; Rivlin 1981). Mühendislik, istatistik, finans, biyoteknoloji ve daha birçok alanda geniş çaplı uygulamalara sahip olmaları, Bernstein polinomlarını sadece teorik değil, aynı zamanda pratikte de son derece değerli bir araç haline getirmektedir. Örneğin Bernstein polinomları ve Bézier eğrileri, bilgisayar destekli geometri tasarımı (CAGD) için temel öneme sahiptir. Söz konusu polinomlar CAGD alanında, Bézier eğrileri ve yüzeyleri aracılığıyla grafik ve animasyon tasarımında merkezi bir rol oynamaktadır (Farin, 2002). Olasılık teorisinde, özellikle dağılım fonksiyonlarının modellenmesinde önemli bir araç olarak değerlendirilmektedir (Durrett, 2019). Sayısal analizde, interpolasyon teknikleri ve hata analizinde etkili bir yöntem sunmaktadır (Atkinson, 1989). Diferansiyel denklemlerde, lineer ve lineer olmayan problemlerin yaklaşık çözümlerinin elde edilmesinde kullanılmaktadır (Korn ve Korn, 2000). Finans ve ekonomide risk modelleme ve veri analizi için kullanılır (Meyer, 1970). Bernstein polinomlarının bu şekilde birçok alanda yaygın olarak kullanılması, her geçen gün yeni çalışmaların ortaya çıkmasına ve birçok geliştirmesinin literatüre kazandırılmasına olanak sağlamıştır.

Bu geliştirmelerden biri 1968 yılında D. D. Stancu tarafından verilmiştir (Stancu, 1968). Bernstein-Stancu polinomları olarak bilinen bu polinom ailesi, α negatif olmayan bir parametre olmak üzere,

$$S_n^\alpha(\varphi; x) = \sum_{k=0}^n \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} \frac{\prod_{s=0}^{k-1} (x + \alpha s) \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - x + \alpha s)}{\prod_{s=0}^{n-1} (1 + \alpha s)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

şeklinde tanımlanır. Tanımdan açıkça görülmektedir ki Bernstein-Stancu polinomları $\alpha = 0$ olduğunda (1) ile ifade edilen Bernstein polinomlarına dönüşmektedir.

Stancu 1968 yılında yapmış olduğu çalışmasında Bernstein-Stancu polinomlarının monotonluk ve konvekslik özelliklerini incelemiştir. Polinomların φ fonksiyonunun sonlu farkları yardımıyla gösterimini elde etmiş ve kalan terimini bölünmüş farkları kullanarak hesaplamıştır. Son olarak, bu polinomların φ fonksiyonuna düzgün yakınsadığını süreklilik modülü aracılığıyla ispatlamıştır.

2012 yılında D. Miclăuş Bernstein-Stancu polinomlarının momentlerini daha önceki yöntemlerden farklı olarak Stirling sayılarını kullanarak hesaplamış ve dördüncü mertebeye kadar olan momentlerini açık bir şekilde elde etmiştir (Miclăuş, 2012). Ayrıca, süreklilik modülü yardımıyla elde edilen Voronovskaya tipli teoremi kullanarak, sürekli fonksiyonlar ve ikinci mertebeden türevlenebilir fonksiyonlar için anlamlı sonuçlara ulaşmıştır.

Lineer pozitif operatörlerin genelleştirilmesinin bir başka yolu ise bu operatörlerin q -genellemelerini elde etmektir. Bu yaklaşım, operatörlerin özelliklerini farklı bir bakış açısıyla ele alma imkanı sunar.

Quantum analizinin (q -analizi) tarihi, matematikte analiz, özel fonksiyonlar ve sayı teorisi gibi alanlardaki gelişmelerle yakından ilişkilidir. Bu alanlardaki ilerlemeler, q -analoglarının geliştirilmesine ve uygulanmasına zemin hazırlamıştır ve zamanla matematiksel fizik, istatistik, Lie cebirleri ve kombinatorik analiz gibi geniş bir yelpazede önemli bir rol oynamaya başlamıştır. Quantum analizinin temelleri, Euler'in 1740'larda yaptığı çalışmalarla atılmıştır. Daha sonra Jacobi ve Gauss, q -analizinin kapsamını genişleterek q -seriler ve q -binom kavramlarını oluşturmuştur. 20. yüzyıla gelindiğinde ise q -türev ve q -integral tanımlarının da yapılmasıyla bu konu daha geniş bir uygulama alanı bulmuş ve matematik dahil olmak üzere birçok alanda önemli bir araç haline gelmiştir (Kac ve Cheung, 2001).

Bu konudaki gelişmelerin günden güne artmasıyla q kavramı lineer pozitif operatörlere uygulanmış ve Bernstein polinomlarının q -genellemeleri ortaya çıkmıştır. Bu doğrultuda ilk adım A. Lupaş tarafından 1987 yılında atılmıştır (Lupaş, 1987). Lupaş, Bernstein operatörünün q -analoğu olan bir versiyonunu geliştirmiş ve bu operatörün şekil koruma ve yakınsama özelliklerini incelemiştir. Ancak, Lupaş'ın çalışmaları başlangıçta çok geniş bir kitleye ulaşamamış, yalnızca yerel bir konferans

bildirisi olarak yayımlandığı için uzun bir süre göz ardı edilmiştir. Belirtilmelidir ki Lupaş'ın yaptığı genellemede polinomlar yerine rasyonel fonksiyonlar kullanılmıştır. On yıl sonra, 1997'de G. M. Phillips, Lupaş'ın çalışmalarından bağımsız olarak günümüzde q -Bernstein polinomları olarak adlandırılan polinomları inşa etmiştir (Phillips, 1997). Phillips'in q -Bernstein polinomları, matematiksel analiz, yaklaşım teorisi ve fonksiyonel analiz gibi alanlarda hızla dikkat çekmiş ve sayısız araştırmacı tarafından incelenmiştir. Bernstein polinomlarının q -genellemeleri üzerine yapılan çalışmalardan bazıları şunlardır: (Oruç ve Phillips, 1999; Oruç ve Tuncer, 2002; Ostrovska, 2003; Ostrovska, 2006; Ostrovska, 2011; Ostrovska ve Turan, 2014; Ostrovska vd. 2015; Turan, 2014; Videnskii, 2008; Wang ve Ostrovska, 2010).

q -Bernstein polinomlarının ortaya çıkışı, diğer lineer pozitif operatörlerin q -genelleştirmelerinin literatürde yaygınlaşmasına ve bu konunun önemli bir araştırma alanı hâline gelmesine zemin hazırlamıştır. Bu gelişmeler ışığında, 2009 yılında Nowak tarafından (2) ile verilen Stancu polinomlarının q -versiyonu inşa edilmiş ve bu operatörün önemli özellikleri günümüze kadar farklı açılardan ele alınmıştır (Nowak, 2009).

Bu tez çalışmasında, Nowak tarafından tanımlanan q -Stancu operatörlerinin q -Pochhammer sembolü kullanılarak elde edilen yeni bir gösterimi sunulmaktadır. Bu gösterim yardımıyla literatürde bilinen bazı özellikler yeniden ispatlanmış; bunlara ek olarak operatörün sağladığı bazı yeni özellikler de ortaya konmuştur.

Tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, tezde elde edilen sonuçların anlaşılabilmesi için gerekli olan ön hazırlık niteliğindedir. Bu bölümde öncelikle operatör teorisinde sıkça kullanılan temel tanım ve teoremlere yer verilmiş, ardından q -analizine ilişkin başlıca kavramlar ele alınmıştır. Bölümün devamında Phillips'in tanımladığı q -Bernstein ve Nowak tarafından tanımlanan q -Stancu operatörleri incelenmiş ve bu operatörlere ait özellikler ile bunlara ilişkin teoremler ayrıntılı biçimde açıklanmıştır. Böylece, ilerleyen bölümlerde geliştirilecek sonuçlar için gerekli altyapı hazırlanmıştır.

İkinci bölümde, Nowak tarafından tanımlanan q -Stancu operatörlerinin, q -Pochhammer sembolü kullanılarak elde edilen yeni gösterimi sunulmaktadır. Bu gösterim aracılığıyla q -Stancu operatörlerinin ilk üç momenti Nowak'ın makalesinde kullanılan ispattan farklı bir yöntemle yeniden ispatlanmıştır. Ayrıca, operatörlerin

daha genel durumu olan m -inci mertebeden momentlere ilişkin yineleme bağıntıları elde edilmiş ve bu momentlerin daha düşük mertebeden momentler cinsinden ifade edilebildiği gösterilmiştir.

Üçüncü bölümde, söz konusu operatörlerin limit hali tanımlanmış ve bu limit operatörün sağladığı temel özellikler ele alınmıştır. Nowak tarafından verilen tanımda, operatörün yapısında yer alan çarpımın ıraksak olması nedeniyle q -Stancu operatörlerinin limit hali hesaplanamamaktadır. Bu tez kapsamında literatüre kazandırılan yeni gösterim, söz konusu limit operatörünün açık biçimde tanımlanmasına olanak sağlamıştır.

Son bölümde ise, çalışma boyunca elde edilen sonuçların genel bir değerlendirmesi yapılmış ve tezin temel katkıları ortaya konulmuştur.

1. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, tezin ilerleyen kısımlarında kullanılacak olan gösterimler, tanımlar, temel teoremler ve bazı önemli sonuçlar bir araya getirilmiştir.

1.1. Operatör Teorisinde Kullanılan Temel Kavramlar

Tanım 1.1.1. (Lineer Uzay) $\mathcal{V}$ boş olmayan bir küme, $\mathcal{K}$ ise bir cisim olsun. $\mathcal{V}$ kümesi üzerinde $(+)$ toplama ve $(\cdot)$ skalerle çarpma işlemleri tanımlansın. Buna göre her $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w} \in \mathcal{V}$ ve $\alpha, \beta \in \mathcal{K}$ için aşağıdaki koşulları sağlayan $\mathcal{V}$ kümesine $\mathcal{K}$ cismi üzerinde bir lineer (vektör) uzaydır denir.

- i) $\tilde{u} + \tilde{v} \in \mathcal{V}$ (kapalılık özelliği).
- ii) $(\tilde{u} + \tilde{v}) + \tilde{w} = \tilde{u} + (\tilde{v} + \tilde{w})$ (birleşme özelliği).
- iii) $0_v \in \mathcal{V}$ elemanı vardır; öyle ki $\tilde{u} + 0_v = 0_v + \tilde{u} = \tilde{u}$ (birim eleman özelliği).
- iv) $(-\tilde{u}) \in \mathcal{V}$ elemanı vardır; öyle ki $\tilde{u} + (-\tilde{u}) = (-\tilde{u}) + \tilde{u} = 0_v$ (ters eleman özelliği).
- v) $\tilde{u} + \tilde{v} = \tilde{v} + \tilde{u}$ (değişme özelliği).
- vi) $\alpha \cdot (\tilde{u} + \tilde{v}) = \alpha \cdot \tilde{u} + \alpha \cdot \tilde{v}$ (skalerin vektör üzerine dağılma özelliği).
- vii) $(\alpha + \beta) \cdot \tilde{u} = \alpha \cdot \tilde{u} + \beta \cdot \tilde{u}$ (vektörün skaler üzerine dağılma özelliği).
- viii) $(\alpha \cdot \beta) \cdot \tilde{u} = \alpha \cdot (\beta \cdot \tilde{u})$ (çarpımın birleşme özelliği).
- ix) $1_{\mathcal{K}} \cdot \tilde{u} = \tilde{u}$ (çarpımın birim eleman özelliği).

Tanım 1.1.2. (Operatör) $\mathcal{X}$ ve $\mathcal{Y}$ iki fonksiyon uzayı olsun. $\mathcal{X}$ 'ten alınan herhangi bir φ fonksiyonunu $\mathcal{Y}$ uzayında bir ψ fonksiyonuna eşleyen bir $\mathcal{L}$ kuralı varsa bu $\mathcal{L}$ kuralına $\mathcal{X}$ üzerinde bir operatördür denir ve her $\varphi \in \mathcal{X}$ için

$$\mathcal{L}(\varphi; x) = \psi(x)$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 1.1.3. (Pozitif Lineer Operatör) $\mathcal{X}$ bir fonksiyon uzayı olsun. $\mathcal{X}$ üzerinde tanımlı bir $\mathcal{L}$ operatörü,

- i) Her $\varphi, \psi \in \mathcal{X}$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için $\mathcal{L}(\alpha\varphi + \beta\psi; x) = \alpha\mathcal{L}(\varphi; x) + \beta\mathcal{L}(\psi; x)$ eşitliğini sağlıyorsa lineer operatör,

- ii) Her $\varphi \in \mathcal{X}$ için $\varphi(x) \geq 0$ olduğunda $\mathcal{L}(\varphi; x) \geq 0$ koşulunu sağlıyorsa pozitif operatör denir.

Lineerlik ve pozitiflik özelliklerini aynı anda taşıyan operatörlere ise lineer pozitif operatör adı verilir.

Tanım 1.1.4. (Normlu Uzay) $\mathcal{X}$ bir lineer uzay olsun. Eğer $\mathcal{X}$ üzerinde tanımlı bir $\|\cdot\|$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlarsa, bu fonksiyona $\mathcal{X}$ üzerinde bir norm denir.

- i) $\|\xi\| \geq 0, \|\xi\| = 0 \Leftrightarrow \xi = 0_{\mathcal{X}}, \xi \in \mathcal{X}$ (Pozitiflik).
- ii) $\|\alpha\xi\| = \alpha\|\xi\|, \alpha \in \mathbb{R}$ (Skalerle Çarpma Özelliği).
- iii) $\|\xi + \eta\| \leq \|\xi\| + \|\eta\|, \xi, \eta \in \mathcal{X}$ (Üçgen Eşitsizliği)

$\mathcal{X}$ uzayı, üzerinde tanımlanan norm ile birlikte lineer normlu uzay olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.5. (Sınırlı Lineer Operatör) $\mathcal{X}$ ve $\mathcal{Y}$ fonksiyonların lineer normlu uzayları ve $\mathcal{L}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ bir lineer operatör olsun. Eğer her $\varphi \in \mathcal{X}$ için $\|\mathcal{L}(\varphi)\|_{\mathcal{Y}} \leq C\|\varphi\|_{\mathcal{X}}$ eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $C > 0$ sabiti bulunabiliyorsa $\mathcal{L}$ operatörüne sınırlı operatör denir. Bu eşitsizliği sağlayan en küçük C değeri, operatörün normu olarak tanımlanır ve $\|\mathcal{L}\|$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.6. Kapalı bir $[a, b]$ aralığında tanımlı, sürekli ve reel değerli fonksiyonlardan oluşan kümeye $C[a, b]$ fonksiyon uzayı denir:

$$C[a, b] = \{ \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ sürekli} \}.$$

$C[a, b]$ fonksiyonlar uzayı üzerinde tanımlı toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile birlikte bir vektör uzayıdır.

Teorem 1.1.7. (Korovkin Teoremi) $\mathcal{L}_n: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ olmak üzere $\{\mathcal{L}_n\}_{n \geq 1}$ lineer pozitif operatörler dizisi verilsin. $e_i(x) = x^i, i = 0, 1, 2$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}_n(e_i; x) = e_i(x), \quad i = 0, 1, 2$$

yakınsamaları düzgün ise bu takdirde her $\varphi \in C[0, 1]$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}_n(\varphi; x) = \varphi(x)$$

düzgün yakınsaması gerçekleşir (Korovkin, 1953).

Tanım 1.1.8. (Süreklilik Modülü) $\varphi \in C[a, b]$ ve $\delta > 0$ olmak üzere

$$\omega_{\varphi}(\delta) = \sup_{\substack{x_1, x_2 \in [a, b] \\ |x_1 - x_2| \leq \delta}} |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)|$$

ifadesine φ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki süreklilik modülü denir.

Teorem 1.1.9. Süreklilik modülü aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i) Süreklilik modülü azalmayan bir fonksiyondur.

$$0 < \delta_1 \leq \delta_2 \Rightarrow \omega_{\varphi}(\delta_1) \leq \omega_{\varphi}(\delta_2).$$

ii) Süreklilik modülü δ ya göre alt toplamsaldır.

$$\omega_{\varphi}(\delta_1 + \delta_2) \leq \omega_{\varphi}(\delta_1) + \omega_{\varphi}(\delta_2).$$

iii) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\omega_{\varphi}(n\delta) \leq n \omega_{\varphi}(\delta)$ eşitsizliği geçerlidir.

iv) Her $\mu > 0$ için $\omega_{\varphi}(\mu\delta) \leq (1 + \mu) \omega_{\varphi}(\delta)$ sağlanır.

v) φ fonksiyonunun kapalı $[a, b]$ aralığında düzgün yakınsaması için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega_{\varphi}(\delta) = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

1.2. q -Analizde Kullanılan Temel Kavramlar

Tanım 1.2.1. $q > 0$ olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}_0$ için q -tamsayısı

$$[n]_q := 1 + q + \dots + q^{n-1}, \quad [0]_q := 0, \quad (3)$$

ve q -faktöriyel

$$[n]_q! = [1]_q [2]_q \dots [n]_q, \quad [0]_q! := 1 \quad (4)$$

şeklinde tanımlanır. $k, n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere q -binom katsayısı

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q! [n-k]_q!}, \quad 0 \leq k \leq n \quad (5)$$

eşitliği ile verilir.

Özellik 1.2.2.

i) $k < 0$ veya $k > n$ durumunda $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = 0$ olarak alınır.

ii) $q = 1$ için (3) ifadesi negatif olmayan tamsayılara, (4) eşitliği klasik faktöriyel tanımına, (5) ifadesi ise klasik binom katsayısına karşılık gelir.

iii) $q \neq 1$ için $[n]_q = (1 - q^n)/(1 - q)$ biçiminde yazılabilir.

Tanım 1.2.3. $q > 0$ olmak üzere, q -Pochhammer sembolü

$$(x; q)_0 := 1, \quad (x; q)_n := \prod_{j=0}^{n-1} (1 - q^j x), \quad (x; q)_\infty := \prod_{j=0}^{\infty} (1 - q^j x) \quad (6)$$

şeklinde tanımlanır.

Genel kabul gereği, hesaplamalarda boş çarpımlar 1, boş toplamalar ise 0 olarak alınacaktır.

Lemma 1.2.4. $k, n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$[n]_q = [k]_q + q^k [n - k]_q, \quad 0 \leq k \leq n \quad (7)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. (3) ifadesi ile verilen $[n]_q$ tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned} [k]_q + q^k [n - k]_q &= \frac{1 - q^k}{1 - q} + q^k \frac{1 - q^{n-k}}{1 - q} \\ &= \frac{1 - q^k + q^k (1 - q^{n-k})}{1 - q} \\ &= \frac{1 - q^n}{1 - q} = [n]_q \end{aligned}$$

elde edilir.

$k, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere klasik binom katsayıları için Pascal kuralı

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

biçimindedir. Bu bağıntının q -versiyonu aşağıdaki lemma ile ifade edilir.

Lemma 1.2.5. $k, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$[n]_q = [k-1]_q + q^k [n-k]_q, \quad 1 \leq k \leq n \quad (8)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. (5) ifadesinden

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q &= \frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q! [n-k]_q!} + q^k \frac{[n-1]_q!}{[k]_q! [n-k-1]_q!} \\ &= \frac{[n-1]_q! ([k]_q + q^k [n-k]_q)}{[k]_q! [n-k]_q!} \end{aligned}$$

yazılabilir. (7) eşitliğinin göz önüne alınmasıyla

$$\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q! [n-k]_q!} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$$

elde edilir.

Özellik 1.2.6. (8) ifadesinde k yerine $n-k$ alındığında ve q -binom katsayısının

$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_q$ simetri özelliği kullanıldığında, (8) eşitliği

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q + q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q \quad (9)$$

şeklinde alternatif bir biçimde yazılabilir.

Lemma 1.2.7. $k, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\frac{[k]_q}{[n]_q} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q, \quad 1 \leq k \leq n \quad (10)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. (5) ile verilen q -binom katsayısı tanımı kullanılarak

$$\frac{[k]_q}{[n]_q} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[k]_q}{[n]_q} \frac{[n]_q!}{[k]_q! [n-k]_q!} = \frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q! [n-k]_q!} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q$$

gerçeklenir.

Lemma 1.2.8. $k, n, s \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n-k \\ s-k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ s \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} s \\ k \end{bmatrix}_q, \quad 0 \leq k \leq s \leq n \quad (11)$$

biçimindedir.

İspat. (5) ile ifade edilen q -binom katsayısı tanımından

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n-k \\ s-k \end{bmatrix}_q &= \frac{[n]_q!}{[k]_q! [n-k]_q!} \cdot \frac{[n-k]_q!}{[s-k]_q! [n-s]_q!} \\ &= \frac{[n]_q!}{[k]_q! [s-k]_q! [n-s]_q!} \end{aligned}$$

yazılabilir. Eşitliğin sağ tarafı $[s]_q!$ ile çarpılıp bölündüğünde ve gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n-k \\ s-k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[s]_q! [n-s]_q!} \cdot \frac{[s]_q!}{[k]_q! [s-k]_q!} = \begin{bmatrix} n \\ s \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} s \\ k \end{bmatrix}_q$$

elde edilir. Böylece istenen eşitlik sağlanmış olur.

Lemma 1.2.9. $k, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q [k-1]_q + \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q [k]_q q^{k-1} = \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q [n]_q, \quad 1 \leq k \leq n-1 \quad (12)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. (8) ifadesinde k yerine $k-1$ yazıldığında

$$\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-2 \end{bmatrix}_q + q^{k-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q$$

ve sağ taraftaki q -binom katsayıları için Lemma 1.2.7 dikkate alındığında

$$\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q = \frac{[k-1]_q}{[n]_q} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^{k-1} \frac{[k]_q}{[n]_q} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$$

elde edilir. Son ifade $[n]_q$ ile çarpıldığında istenen özdeşlik bulunur.

Lemma 1.2.10. $k, n, s \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $1 \leq k \leq n-1$ ve $1 \leq s \leq n-k-1$ için

$$\begin{bmatrix} n-k-1 \\ s \end{bmatrix}_q ([k]_q - [k+s]_q) = - \begin{bmatrix} n-k-1 \\ s-1 \end{bmatrix}_q [n-k-s]_q q^k, \quad (13)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. (7) eşitliğinde n yerine $k+s$ alındığında

$$[k]_q - [k+s]_q = -q^k [s]_q$$

elde edilir. Buna göre

$$\begin{bmatrix} n-k-1 \\ s \end{bmatrix}_q ([k]_q - [k+s]_q) = - \begin{bmatrix} n-k-1 \\ s \end{bmatrix}_q [s]_q q^k$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade, (5) tanımı dikkate alınarak yeniden düzenlendiğinde

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n-k-1 \\ s \end{bmatrix}_q ([k]_q - [k+s]_q) &= -\frac{[n-k-1]_q!}{[s-1]_q! [n-k-s]_q!} [n-k-s]_q q^k \\ &= -\begin{bmatrix} n-k-1 \\ s-1 \end{bmatrix}_q [n-k-s]_q q^k \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da bizden istenendir.

Lemma 1.2.11. $k \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$(a; q)_{k+1} = (1-a)(aq; q)_k = (a; q)_k (1-aq^k) \quad (14)$$

şeklindedir.

İspat. (6) ile verilen q -Pochhammer sembolü tanımından

$$(a; q)_{k+1} = (1-a) \underbrace{(1-aq) \cdots (1-aq^k)}_{(aq; q)_k} = (1-a)(aq; q)_k$$

eşitliği sağlanır. Benzer şekilde

$$(a; q)_{k+1} = \underbrace{(1-a)(1-aq) \cdots (1-aq^{k-1})}_{(a; q)_k} (1-aq^k) = (a; q)_k (1-aq^k)$$

bulunur.

Lemma 1.2.12. $k, n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$(a; q)_n = (a; q)_k (aq^k; q)_{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n \quad (15)$$

biçimindedir.

İspat. (6) ile ifade edilen q -Pochhammer sembolünden yararlanarak

$$(a; q)_n = (1-a)(1-aq) \cdots (1-aq^{n-1})$$

yazılabilir. Burada ilk k terim ve geri kalan $n-k$ terim ayrı ayrı ele alınıp, gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned} (a; q)_n &= \underbrace{(1-a)(1-aq) \cdots (1-aq^{k-1})}_{(a; q)_k} \underbrace{(1-aq^k) \cdots (1-aq^{n-1})}_{(aq^k; q)_{n-k}} \\ &= (a; q)_k (aq^k; q)_{n-k} \end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 1.2.13. $k \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$(a; q)_\infty = (a; q)_k (aq^k; q)_\infty \quad (16)$$

yazılabilir.

İspat. (15) eşitliğinden $n \rightarrow \infty$ limiti alındığında (16) ifadesi elde edilir.

Lemma 1.2.14. $k, n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$(q^{-n}; q)_k = (-1)^k q^{\frac{k(k-1-2n)}{2}} \frac{(q; q)_n}{(q; q)_{n-k}}, \quad 0 \leq k \leq n \quad (17)$$

biçimindedir.

İspat. (6) ile verilen q -Pochhammer tanımından

$$\begin{aligned} (q^{-n}; q)_k &= \prod_{j=0}^{k-1} (1 - q^{-n+j}) = \prod_{j=0}^{k-1} [-q^{-n+j} (1 - q^{n-j})] \\ &= (-1)^k q^{\sum_{j=0}^{k-1} (-n+j)} \prod_{j=0}^{k-1} (1 - q^{n-j}) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre

$$\sum_{j=0}^{k-1} (-n+j) = \frac{k(k-1)}{2} - nk = \frac{k(k-1-2n)}{2}$$

ve

$$\prod_{j=0}^{k-1} (1 - q^{n-j}) = (1 - q^n)(1 - q^{n-1}) \cdots (1 - q^{n-k+1}) = \frac{(q; q)_n}{(q; q)_{n-k}}$$

oldukları göz önüne alındığında istenen elde edilir.

Lemma 1.2.15. $k, n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q; q)_n}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}}, \quad 0 \leq k \leq n \quad (18)$$

şeklindedir.

İspat. (4) ile verilen q -faktöriyel ve (6) ile ifade edilen q -Pochhammer tanımları göz önüne alınarak

$$[n]_{q!} = \prod_{i=1}^n [i]_q = \prod_{i=1}^n \frac{1 - q^i}{1 - q} = (1 - q)^{-n} \prod_{i=1}^n (1 - q^i) = (1 - q)^{-n} (q; q)_n$$

yazılabilir. Buna göre q -binom katsayısı

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_{q!}}{[k]_{q!} [n-k]_{q!}} = \frac{(1 - q)^{-n} (q; q)_n}{(1 - q)^{-k} (q; q)_k (1 - q)^{-(n-k)} (q; q)_{n-k}} = \frac{(q; q)_n}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}}$$

olarak bulunur.

Tanım 1.2.16. $\varphi_j := \varphi(x_j)$, $j \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere, q -farklar

$$\Delta_q^{k+1}\varphi_j = \Delta_q^k\varphi_{j+1} - q^k\Delta_q^k\varphi_j, \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad (19)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır. Burada $\Delta_q^0\varphi_j = \varphi_j$ olarak kabul edilir.

Mertebesi k olan q -fark $\Delta_q^k\varphi_j$, uygun katsayılarla çarpılmış φ değerlerinin toplamı olarak açık bir biçimde ifade edilebilir. Bu açık gösterim bir sonraki teoremden verilecektir.

Teorem 1.2.17. $q > 0$ olmak üzere, tüm $j, k \in \mathbb{N}_0$ için

$$\Delta_q^k\varphi_j = \sum_{r=0}^k (-1)^r q^{r(r-1)/2} \begin{bmatrix} k \\ r \end{bmatrix}_q \varphi_{j+k-r} \quad (20)$$

şeklindedir (Phillips, 2003).

İspat. İspatı k üzerinden tümevarım yöntemi ile gerçekleştirelim. Öncelikle $k = 0$ için (20) eşitliğinin her iki tarafı da φ_j olarak bulunduğundan, ifadenin doğruluğu sağlanır. Kabul edelim ki (20) eşitliği herhangi bir $k \in \mathbb{N}_0$ değeri için sağlansın. Buna göre

$$\Delta_q^k\varphi_j = \sum_{r=0}^k (-1)^r q^{r(r-1)/2} \begin{bmatrix} k \\ r \end{bmatrix}_q \varphi_{j+k-r} \quad (21)$$

ve

$$\Delta_q^k\varphi_{j+1} = \sum_{r=0}^k (-1)^r q^{r(r-1)/2} \begin{bmatrix} k \\ r \end{bmatrix}_q \varphi_{j+k+1-r} \quad (22)$$

kabullenmesi yapılmış olur. (21) ve (22) eşitlikleri (19) eşitliğinde yerlerine yazıldığında

$$\begin{aligned} \Delta_q^{k+1}\varphi_j &= \Delta_q^k\varphi_{j+1} - q^k\Delta_q^k\varphi_j \\ &= \sum_{r=0}^k (-1)^r q^{\frac{r(r-1)}{2}} \begin{bmatrix} k \\ r \end{bmatrix}_q \varphi_{j+k+1-r} - q^k \sum_{r=0}^k (-1)^r q^{\frac{r(r-1)}{2}} \begin{bmatrix} k \\ r \end{bmatrix}_q \varphi_{j+k-r} \\ &= \sum_{r=0}^k (-1)^r q^{\frac{r(r-1)}{2}} \begin{bmatrix} k \\ r \end{bmatrix}_q \varphi_{j+k+1-r} - q^k \sum_{r=1}^{k+1} (-1)^{r-1} q^{(r-1)(r-2)/2} \begin{bmatrix} k \\ r-1 \end{bmatrix}_q \varphi_{j+k+1-r} \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafındaki ilk toplamda $r = k + 1$ ve ikinci toplamda $r = 0$ seçildiğinde, ilgili q -binom katsayıları sıfır olacağından, her iki toplam da $r = 0$ ile başlayıp $r = k + 1$ ile bitecek şekilde yazılabilir. Böylece

$$\Delta_q^{k+1} \varphi_j = \sum_{r=0}^{k+1} (-1)^r q^{r(r-1)/2} \left(\begin{bmatrix} k \\ r \end{bmatrix}_q + q^{k+1-r} \begin{bmatrix} k \\ r-1 \end{bmatrix}_q \right) \varphi_{j+k+1-r}$$

elde edilir. (9) Pascal kuralı dikkate alındığında

$$\Delta_q^{k+1} \varphi_j = \sum_{r=0}^{k+1} (-1)^r q^{r(r-1)/2} \begin{bmatrix} k+1 \\ r \end{bmatrix}_q \varphi_{j+k+1-r}$$

olarak bulunur. Böylece $\Delta_q^{k+1} \varphi_j$ için eşitliğin doğruluğu gösterilmiş olur. Dolayısıyla tümevarım yöntemi ile (20) eşitliği doğrulanmış olur. Bu da ispatı tamamlar.

Tanım 1.2.18. $q \neq 1$ olmak üzere f fonksiyonunun q -türevi

$$D_q f(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(qx)}{(1-q)x}, & x \neq 0 \\ f'(0), & x = 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır.

Teorem 1.2.19. $k \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere, $|x| < 1$, $|q| < 1$ için

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a; q)_k}{(q; q)_k} x^k = \frac{(ax; q)_{\infty}}{(x; q)_{\infty}} \quad (23)$$

şeklindedir (Andrews vd., 1999).

İspat. Öncelikle

$$\Theta_a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a; q)_k}{(q; q)_k} x^k$$

fonksiyonu tanımlansın. Dikkat edilirse $\Theta_a(0) = 1$ dir. Eşitliğin her iki tarafına q -türev operatörü uygulandığında

$$D_q \Theta_a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a; q)_k}{(q; q)_k} D_q x^k$$

veya

$$\frac{\Theta_a(x) - \Theta_a(qx)}{(1-q)x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a; q)_k}{(q; q)_k} \frac{1-q^k}{1-q} x^{k-1}$$

bulunur. Bu ifadeden

$$\frac{\Theta_a(x) - \Theta_a(qx)}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a; q)_k}{(q; q)_k} (1-q^k) x^{k-1}$$

elde edilir. (14) özelliği kullanılarak

$$\frac{\Theta_a(x) - \Theta_a(qx)}{x} = (1 - a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(aq; q)_{k-1}}{(q; q)_{k-1}} x^{k-1}$$

yazılabilir. Eşitliğin sağ tarafında bulunan toplamda k yerine $k + 1$ yazılıp, Θ_a fonksiyonunun tanımı göz önüne alındığında

$$\frac{\Theta_a(x) - \Theta_a(qx)}{x} = (1 - a) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(aq; q)_k}{(q; q)_k} x^k = (1 - a) \Theta_{aq}(x)$$

ya da

$$\Theta_a(x) - \Theta_a(qx) = (1 - a)x\Theta_{aq}(x) \quad (24)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \Theta_a(x) - \Theta_{aq}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a; q)_k}{(q; q)_k} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(aq; q)_k}{(q; q)_k} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a; q)_k - (aq; q)_k}{(q; q)_k} x^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(aq; q)_{k-1}}{(q; q)_k} (1 - a - 1 + aq^k) x^k \\ &= -a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(aq; q)_{k-1}}{(q; q)_k} (1 - q^k) x^k \\ &= -a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(aq; q)_{k-1}}{(q; q)_{k-1}} x^k \\ &= -ax \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(aq; q)_k}{(q; q)_k} x^k \\ &= -ax\Theta_{aq}(x) \end{aligned}$$

olup $\Theta_{aq}(x)$ terimleri bir tarafta toplandığında

$$\Theta_a(x) = (1 - ax)\Theta_{aq}(x) \quad (25)$$

elde edilir. (24) ve (25) eşitliklerinden $\Theta_{aq}(x)$ terimleri yok edildiğinde

$$\Theta_a(x) = \frac{1 - ax}{1 - x} \Theta_a(qx)$$

yazılır. Bu işlem art arda n kez devam ettirildiğinde

$$\Theta_a(x) = \frac{(1 - ax)(1 - axq)}{(1 - x)(1 - xq)} \Theta_a(q^2x)$$

⋮

$$\Theta_a(x) = \frac{(1-ax)(1-axq)\cdots(1-axq^{n-1})}{(1-x)(1-xq)\cdots(1-xq^{n-1})} \Theta_a(q^n x) = \frac{(ax;q)_n}{(x;q)_n} \Theta_a(q^n x)$$

bulunur. Son eşitlikte her iki tarafın $n \rightarrow \infty$ için limiti alınır ve $\Theta_a(0) = 1$ olduğu dikkate alınırsa

$$\Theta_a(x) = \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty} \Theta_a(0) = \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 1.2.20. (Rothe Teoremi) $k, n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere, $|x| < 1$, $|q| < 1$ için

$$\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k = (x;q)_n \quad (26)$$

şeklindedir (Andrews vd., 1999).

İspat. (23) denkleminde a yerine q^{-n} ve x yerine $q^n x$ alındığında

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^{-n};q)_k}{(q;q)_k} (q^n x)^k = \frac{(x;q)_\infty}{(q^n x;q)_\infty} \quad (27)$$

yazılabilir. Dikkat edilmelidir ki q -Pochhammer tanımı gereği $(q^{-n};q)_k$ ifadesi $k > n$ için sıfır olur. Dolayısıyla (27) eşitliğinin sol tarafında bulunan toplam ancak $k = n$ ye kadar devam eder. Diğer yandan (17) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{(q^{-n};q)_k}{(q;q)_k} (q^n x)^k &= \sum_{k=0}^n (-1)^k q^{\frac{k(k-1-2n)}{2}} \frac{(q;q)_n}{(q;q)_k (q;q)_{n-k}} (q^n x)^k \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{(q;q)_n}{(q;q)_k (q;q)_{n-k}} x^k \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. (18) eşitliği göz önüne alındığında

$$\sum_{k=0}^n \frac{(q^{-n};q)_k}{(q;q)_k} (q^n x)^k = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k \quad (28)$$

elde edilir. Öte yandan

$$\frac{(x;q)_\infty}{(q^n x;q)_\infty} = (x;q)_n \quad (29)$$

olduğundan, (28) ve (29) birlikte değerlendirildiğinde istenen eşitlik elde edilir.

Teorem 1.2.21. $k, n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$(ab; q)_n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q b^k (a; q)_k (b; q)_{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n \quad (30)$$

eşitliği gerçekenir (Andrews vd., 1999).

İspat. $|x| < 1$, $|q| < 1$ için (23) eşitliğinin bir sonucu olarak

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(b; q)_j}{(q; q)_j} x^j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a; q)_k}{(q; q)_k} (bx)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ab; q)_n}{(q; q)_n} x^n$$

yazılabilir (Gasper, 1997). Gerçekten de (23) eşitliğinden

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(b; q)_j}{(q; q)_j} x^j = \frac{(bx; q)_{\infty}}{(x; q)_{\infty}}; \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a; q)_k}{(q; q)_k} (bx)^k = \frac{(abx; q)_{\infty}}{(bx; q)_{\infty}}$$

olup

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(b; q)_j}{(q; q)_j} x^j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a; q)_k}{(q; q)_k} (bx)^k = \frac{(abx; q)_{\infty}}{(x; q)_{\infty}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ab; q)_n}{(q; q)_n} x^n$$

elde edilir. Buna göre eşitliğin sol tarafında yer alan ilk toplamda $j = n - k$ indeks değişikliği yapılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(b; q)_{n-k}}{(q; q)_{n-k}} \frac{(a; q)_k}{(q; q)_k} b^k x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ab; q)_n}{(q; q)_n} x^n$$

bulunur. Denklemin her iki tarafında bulunan x^n terimlerinin katsayıları karşılaştırıldığında

$$\sum_{k=0}^n \frac{(b; q)_{n-k}}{(q; q)_{n-k}} \frac{(a; q)_k}{(q; q)_k} b^k = \frac{(ab; q)_n}{(q; q)_n}$$

yazılabilir. (18) eşitliği göz önüne alındığında

$$(ab; q)_n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q b^k (a; q)_k (b; q)_{n-k}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

1.3. q -Bernstein Operatörleri

Bernstein operatörlerinin q -genellemeleri üzerine ilk çalışma, 1987 yılında A. Lupaş tarafından yapılmıştır. Lupaş, klasik Bernstein operatörünün q -analoğunu tanımlamış ve bu operatörün şekil koruma ile yakınsama özelliklerini incelemiştir.

Ancak çalışmaları başlangıçta yalnızca yerel bir konferans bildirisi olarak yayımlandığından uzun bir süre geniş bir kitle tarafından fark edilmemiştir. Yaklaşık on yıl sonra, 1997 yılında G. M. Phillips, Bernstein polinomların farklı bir q -genellemesini elde etmiştir. Bu bölümde, Lupaş ve Phillips'in geliştirdiği Bernstein polinomlarının q -versiyonları tanıtılacak ve özellikle Phillips tarafından tanımlanan q -Bernstein polinomlarının bazı temel özellikleri üzerinde durulacaktır.

Tanım 1.3.1. $\varphi \in C[0,1]$, $q > 0$ olmak üzere, Lupaş'ın tanımladığı q -Bernstein operatörleri

$$R_{n,q}(\varphi; x) = \sum_{k=0}^n \varphi \left(\frac{[k]_q}{[n]_q} \right) b_{nk}(q; x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (31)$$

biçimindedir. Burada $k = 0, 1, \dots, n$ için $b_{nk}(q; x)$ blok fonksiyonları

$$b_{nk}(q; x) = \frac{[n]_q}{[k]_q} \frac{q^{k(k-1)/2} x^k (1-x)^{n-k}}{(1-x+qx)(1-x+q^2x) \dots (1-x+q^{n-1}x)}$$

şeklindedir (Lupaş, 1987).

Tanım 1.3.2. $\varphi \in C[0,1]$, $q > 0$ olmak üzere, q -Bernstein operatörleri

$$B_{n,q}(\varphi; x) = \sum_{k=0}^n \varphi \left(\frac{[k]_q}{[n]_q} \right) p_{nk}(q; x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (32)$$

biçiminde tanımlanır. Burada $p_{nk}(q; x)$ baz polinomları

$$p_{nk}(q; x) = \frac{[n]_q}{[k]_q} x^k (x; q)_{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

şeklindedir (Phillips, 1997).

Özellik 1.3.3. $q = 1$ için Lupaş'ın q -genellemesi ve q -Bernstein operatörü klasik Bernstein operatörüne dönüşmektedir. $q \neq 1$ durumunda ise Lupaş'ın genellemesi bir rasyonel fonksiyon belirtirken, Phillips'in q -genellemesi bir polinom belirtir.

Özellik 1.3.4. q -Bernstein operatörleri aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i) Lineerlik Özelliği:

Her $\varphi, \psi \in C[0,1]$ ve c_1, c_2 sabitleri için

$$B_{n,q}(c_1\varphi + c_2\psi; x) = c_1B_{n,q}(\varphi; x) + c_2B_{n,q}(\psi; x).$$

ii) Uç nokta İnterpolasyonu:

$$B_{n,q}(\varphi; 0) = \varphi(0), \quad B_{n,q}(\varphi; 1) = \varphi(1).$$

iii) Pozitiflik:

$$0 < q < 1 \text{ ve } x \in [0,1] \text{ için } \varphi \geq 0 \text{ olduğunda } B_{n,q}(\varphi; x) \geq 0 \text{ olur.}$$

Özellik 1.3.5. $0 < q < 1$ iken her iki operatör de lineer ve pozitifdir. $q > 1$ durumunda ise Lupaş'ın genellemesi pozitifliği korurken, q -Bernstein operatörleri pozitiflik özelliğini kaybeder.

Teorem 1.3.6. $0 < q < 1$ olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}$ için q -Bernstein operatörleri

$$B_{n,q}(\varphi; x) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \Delta_q^k \varphi_0 x^k \quad (33)$$

gösterimine sahiptir. Burada $i, k \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere $\varphi_i = \varphi(i/n)$ şeklinde olup, $\Delta_q^k \varphi_i$ ifadesi ise (19) ile tanımlanan q -fark operatörüdür (Phillips, 1997).

Şimdi q -Bernstein operatörlerinin ilk üç momentini ifade edelim. Bu bölümde ve ilerleyen kısımlarda $e_m(x) = x^m$, $m \in \mathbb{N}_0$ şeklinde alınacaktır.

Teorem 1.3.7. $0 < q < 1$ olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in [0,1]$ için

$$B_{n,q}(e_0; x) = 1$$

$$B_{n,q}(e_1; x) = x$$

$$B_{n,q}(e_2; x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{[n]_q}$$

eşitlikleri geçerlidir (Phillips, 1997).

Sonuç 1.3.8. q -Bernstein operatörleri Teorem 1.3.7'den de görüldüğü üzere lineer fonksiyonları lineer fonksiyonlara dönüştürür. Başka bir ifadeyle, a, b sabit sayılar olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}$ için $B_{n,q}(at + b; x) = ax + b$ şeklindedir.

Teorem 1.3.9. $m \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in [0,1]$ için q -Bernstein operatörleri

$$B_{n,q}(e_{m+1}; x) = \frac{x}{[n]_q^m} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} ([n]_q - 1)^s B_{n-1,q}(e_s; x) \quad (34)$$

yineleme bağıntısını sağlar (Ostrovka, 2003).

Teorem 1.3.10. $m \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in [0,1]$ için q -Bernstein operatörleri

$$B_{n,q}(e_{m+1}; x) = B_{n,q}(e_m; x) - \frac{[n-1]_q^m}{[n]_q^m} (1-x) B_{n-1,q}(e_m; xq) \quad (35)$$

yineleme bağıntısını sağlar (Videnskii, 2005).

q -Bernstein operatörlerinin temel özelliklerinin incelenmesinin yanı sıra bu operatörlerin yakınsaklık özelliklerinin araştırılması da önemli bir çalışma konusu olmuştur. $0 < q < 1$ durumu için ilk çalışma Phillips tarafından yapılmıştır (Phillips, 1997). Limit q -Bernstein operatörü Il'inskii ve Ostrovka tarafından tanımlanmış ve bu çalışmada q -Bernstein polinomlar dizisinin limiti olduğu gösterilmiştir (Il'inskii ve Ostrovka, 2002). Bu konudaki diğer önemli katkılardan bazıları ise (Ostrovka, 2004; Videnskii, 2004; Videnskii, 2005; Wang 2005) çalışmalarında sunulmuştur. Buna göre, limit q -Bernstein operatörü ve onun yakınsaklık özelliği aşağıdaki tanım ve teorem ile verilmektedir.

Tanım 1.3.11. $\varphi \in C[0,1]$, $0 < q < 1$ olmak üzere, limit q -Bernstein operatörü

$$B_{\infty,q}(\varphi; x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(1 - q^k) p_{\infty k}(q; x), & x \in [0,1) \\ \varphi(1), & x = 1 \end{cases} \quad (36)$$

biçiminde tanımlanır. Burada $p_{\infty k}(q; x)$ blok fonksiyonu

$$p_{\infty k}(q; x) = \frac{x^k (x; q)_{\infty}}{(q; q)_k}$$

şeklindedir (Il'inskii ve Ostrovka, 2002).

Teorem 1.3.12. $\varphi \in C[0,1]$ olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_{n,q}(\varphi; x) = B_{\infty,q}(\varphi; x)$$

yakınsaması $[0,1]$ kapalı aralığında düzgündür (Il'inskii ve Ostrovska, 2002).

Sonuç 1.3.13. (34) ifadesinden $n \rightarrow \infty$ için limit alındığında limit q -Bernstein operatörü

$$B_{\infty,q}(e_{m+1}; x) = x \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} q^s (1-q)^{m-s} B_{\infty,q}(e_s; x) \quad (37)$$

eşitliğini sağlar (Ostrovska, 2003).

1.4. q -Stancu Operatörleri

q -Bernstein polinomlarının geliştirilmesi, literatürde diğer lineer pozitif operatörlerin q -genellemelerinin yaygın biçimde incelenmesinin önünü açmış ve bu alanı önemli bir araştırma konusu hâline getirmiştir. Bu gelişmeler doğrultusunda, 2009 yılında Nowak tarafından (2) ile verilen Stancu polinomlarının q -versiyonu elde edilmiş (Nowak, 2009) ve bu operatörün önemli özellikleri farklı çalışmalarla incelenmeye devam etmiştir. Y. Jiang ve J. Li 2009 yılında q -Stancu operatörlerinin yakınsama hızını süreklilik modülü yardımıyla incelemiş ve bu operatörler için Voronovskaya tipli teoremi ispat etmiştir (Jiang ve Li, 2009). 2010 yılında O. Agratini olasılık teorisini temel alarak bu operatör için olasılıksal bir yaklaşım geliştirmiş, Lipschitz sınıfına ait fonksiyonlar için operatörün yakınsaklık özelliklerini incelemiştir (Agratini, 2010) ve bir yıl sonra ise operatörün istatistiksel yakınsama davranışı üzerinde çalışmıştır (Agratini, 2011). Aynı yıl Nowak, q -Stancu polinomlarının Castel'au algoritması yardımıyla da üretilebildiğini ispatlamıştır (Nowak, 2011). Yine aynı yıl içerisinde V. Gupta ile birlikte q -türev ve q -integral kavramlarını içeren yeni ispat teknikleri kullanarak süreklilik modülü yardımıyla yakınsama hızlarını elde etmiş ve operatörün literatürde yer almayan farklı yakınsama özelliklerini incelemiştir (Nowak ve Gupta, 2011). Y. Wang ve Y. Zhou 2013 yılında q -Stancu operatörlerinin iterasyonları üzerine çalışmış ve bu operatörlerin öz değerleri ve öz vektörleri ile ilgili bilgiler sunmuştur (Wang ve Zhou, 2013). Bir yıl sonra ise söz konusu operatörlerin şekil koruma özelliklerini incelemişlerdir (Wang ve Zhou, 2014). Z. Finta 2016 yılında q -Beta fonksiyonlarını kullanarak q -Stancu

operatörlerinin yeni bir gösterimini elde etmiştir. Bu çalışmada ilgili operatörler için Korovkin tipli teoremi ispat etmiş, süreklilik modülü yardımıyla hata analizlerini gerçekleştirmiş ve son olarak yeni gösterimin limit operatörlerini tanımlayarak bunların yaklaşım özelliklerini incelemiştir (Finta, 2016a).

Literatürde, q -Stancu operatörlerinin Durrmeyer, Kantorovich gibi daha birçok genellemesi yapılmış olup, bu operatörler çeşitli çalışmalarla farklı açılardan incelenmiştir. Bu çalışmalardan bazıları şu şekildedir: (Acu ve Radu, 2019; Agrawal ve Gupta, 2018; Birou, 2019; Erençin vd., 2012; Erençin vd., 2014; Finta, 2016b; Gupta vd., 2016; Neer vd., 2017; Neer vd., 2018; Nowak ve Nowak, 2024; Sabancıgil, 2023; Sabancıgil Özder, 2024).

Bu bölümde Stancu operatörlerinin q -genellemesinin tanımı verilerek, bu genellenenin literatürde yer alan bazı önemli özellikleri ispatlarıyla ayrıntılı bir şekilde ele alınacaktır.

Tanım 1.4.1. $\varphi \in C[0,1]$, $q > 0$ ve $\alpha \geq 0$ olmak üzere, q -Stancu operatörleri

$$S_n^{q,\alpha}(\varphi; x) = \sum_{k=0}^n \varphi\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right) p_{nk}^{q,\alpha}(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (38)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $p_{nk}^{q,\alpha}(x)$ polinomları

$$p_{nk}^{q,\alpha}(x) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (x + \alpha[i]_q) \prod_{s=0}^{n-1-k} (1 - q^s x + \alpha[s]_q)}{\prod_{i=0}^{n-1} (1 + \alpha[i]_q)}, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (39)$$

biçimindedir (Nowak, 2009). Ayrıca

$$\sum_{k=0}^n p_{nk}^{q,\alpha}(x) = 1 \quad n = 1, 2, \dots \quad (40)$$

şeklindedir.

q -Stancu operatörleri bazı özel durumlarda literatürde iyi bilinen bazı operatörlere indirgenmektedir. $S_n^{q,\alpha}(f; x)$ operatörleri

- $\alpha = 0$ için (32) ile verilen ve Phillips tarafından tanımlanan q -Bernstein operatörlerine,
- $q = 1$ için (2) ile verilen ve Stancu tarafından tanımlanan Bernstein-Stancu polinomlarına,

- $q = 1$ ve $\alpha = 0$ için (1) ile verilen klasik Bernstein polinomlarına indirgenir (Nowak, 2009).

Özellik 1.4.2. q -Stancu operatörleri aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i) Lineerlik Özelliği:

Her $\varphi, \psi \in C[0,1]$ ve c_1, c_2 sabitleri için

$$S_n^{q,\alpha}(c_1\varphi + c_2\psi; x) = c_1S_n^{q,\alpha}(\varphi; x) + c_2S_n^{q,\alpha}(\psi; x)$$

şeklindedir.

ii) Uç Nokta İnterpolasyonu:

$$S_n^{q,\alpha}(\varphi; 0) = \varphi(0), \quad S_n^{q,\alpha}(\varphi; 1) = \varphi(1)$$

iii) Pozitiflik:

$0 < q < 1$ ve $x \in [0,1]$ için $\varphi \geq 0$ olduğunda $S_n^{q,\alpha}(\varphi; x) \geq 0$ olur.

i) ve iii) özellikleri dikkate alındığında q -Stancu operatörlerinin bir lineer pozitif operatörler dizisi olduğu görülür. Ayrıca

- $p_{n0}^{q,\alpha}(0) = 1, \quad p_{nk}^{q,\alpha}(0) = 0, \quad k = 1, \dots, n$
- $p_{nn}^{q,\alpha}(1) = 1, \quad p_{nk}^{q,\alpha}(1) = 0, \quad k = 0, \dots, n-1$

eşitlikleri ile birlikte (40) özelliği dikkate alındığında q -Stancu operatörlerinin uç nokta interpolasyonunu sağladığı elde edilir.

Lemma 1.4.3. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $0 < q < 1$ ve $\alpha \geq 0$ için

$$\prod_{s=0}^{n-1} (1 - q^s x + \alpha[s]_q) = \sum_{s=0}^n (-1)^s q^{\frac{s(s-1)}{2}} [n]_q \prod_{i=0}^{s-1} (x + \alpha[i]_q) \prod_{j=s}^{n-1} (1 + \alpha[j]_q) \quad (41)$$

eşitliği sağlanır (Nowak, 2009).

İspat. İspatı n üzerinden tümevarım yöntemini kullanarak yapalım.

$n = 1$ için (41) eşitliğinin doğruluğu açık bir şekilde görülmektedir. Kabul edelim ki verilen herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için (41) eşitliği sağlansın. Buna göre

$$\begin{aligned}
& \prod_{s=0}^n (1 - q^s x + \alpha[s]_q) \\
&= (1 - q^n x + \alpha[n]_q) \prod_{s=0}^{n-1} (1 - q^s x + \alpha[s]_q) \\
&= (1 - q^n x + \alpha[n]_q) \sum_{s=0}^n (-1)^s q^{\frac{s(s-1)}{2}} [n]_q \prod_{i=0}^{s-1} (x + \alpha[i]_q) \prod_{j=s}^{n-1} (1 + \alpha[j]_q)
\end{aligned}$$

yazılabilir. $1 - q^n x + \alpha[n]_q$ terimine $q^n \alpha[s]_q$ ifadesi eklenip çıkarıldıktan sonra uygun işlemler yapıldığında

$$\begin{aligned}
& \prod_{s=0}^n (1 - q^s x + \alpha[s]_q) \\
&= \sum_{s=0}^n (1 + \alpha[n]_q + q^n \alpha[s]_q) (-1)^s q^{\frac{s(s-1)}{2}} [n]_q \prod_{i=0}^{s-1} (x + \alpha[i]_q) \prod_{j=s}^{n-1} (1 + \alpha[j]_q) \\
&\quad - q^n \sum_{s=0}^n (-1)^s q^{\frac{s(s-1)}{2}} [n]_q \prod_{i=0}^s (x + \alpha[i]_q) \prod_{j=s}^{n-1} (1 + \alpha[j]_q)
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte ikinci toplamda s yerine $s - 1$ yazılıp, gerekli düzenlemeler gerçekleştirildiğinde

$$\begin{aligned}
& \prod_{s=0}^n (1 - q^s x + \alpha[s]_q) \\
&= \sum_{s=0}^n (1 + \alpha[n]_q + q^n \alpha[s]_q) (-1)^s q^{\frac{s(s-1)}{2}} [n]_q \prod_{i=0}^{s-1} (x + \alpha[i]_q) \prod_{j=s}^{n-1} (1 + \alpha[j]_q) \\
&\quad + q^n \sum_{s=1}^{n+1} (-1)^s q^{\frac{(s-1)(s-2)}{2}} \left[\begin{matrix} n \\ s-1 \end{matrix} \right]_q (1 + \alpha[s-1]_q) \prod_{i=0}^{s-1} (x + \alpha[i]_q) \prod_{j=s}^{n-1} (1 + \alpha[j]_q)
\end{aligned}$$

bulunur. Eşitliğin sağ tarafındaki ilk toplamda $s = 0$ durumu ve ikinci toplamda $s = n + 1$ durumu ayrı olarak yazılıp, toplam $s = 1$ 'den n 'ye kadar olacak biçimde düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}
& \prod_{s=0}^n (1 - q^s x + \alpha[s]_q) \\
&= (1 + \alpha[n]_q) \prod_{j=0}^{n-1} (1 + \alpha[j]_q) + (-1)^{n+1} q^{\frac{n(n+1)}{2}} (1 + \alpha[n]_q) \prod_{i=0}^n (x + \alpha[i]_q) \\
&\quad + \sum_{s=1}^n R_s (-1)^s \prod_{i=0}^{s-1} (x + \alpha[i]_q) \prod_{j=s}^{n-1} (1 + \alpha[j]_q) \tag{42}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada R_s ifadesi

$$R_s = (1 + \alpha[n]_q + q^n \alpha[s]_q) q^{\frac{s(s-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ s \end{bmatrix}_q + q^{n+\frac{(s-1)(s-2)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ s-1 \end{bmatrix}_q (1 + \alpha[s-1]_q)$$

biçimindedir. (12) ifadesi R_s eşitliğinde kullanıldığında

$$\begin{aligned}
R_s &= (1 + \alpha[n]_q) q^{\frac{s(s-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ s \end{bmatrix}_q \\
&\quad + q^{n+\frac{(s-1)(s-2)}{2}} \left\{ \begin{bmatrix} n \\ s-1 \end{bmatrix}_q + \alpha \left(\begin{bmatrix} n \\ s-1 \end{bmatrix}_q [s-1]_q + \begin{bmatrix} n \\ s \end{bmatrix}_q [s]_q q^{s-1} \right) \right\} \\
&= (1 + \alpha[n]_q) q^{\frac{s(s-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ s \end{bmatrix}_q + q^{n+\frac{(s-1)(s-2)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ s-1 \end{bmatrix}_q (1 + \alpha[n]_q)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Son olarak gerekli düzenlemeler yapıp, (9) ile verilen Pascal kuralının n yerine $n+1$ alınmış hali dikkate alındığında

$$\begin{aligned}
R_s &= (1 + \alpha[n]_q) q^{\frac{s(s-1)}{2}} \left(\begin{bmatrix} n \\ s \end{bmatrix}_q + q^{n-s+1} \begin{bmatrix} n \\ s-1 \end{bmatrix}_q \right) \\
&= (1 + \alpha[n]_q) q^{\frac{s(s-1)}{2}} \begin{bmatrix} n+1 \\ s \end{bmatrix}_q \tag{43}
\end{aligned}$$

bulunur. (42) ifadesi (43) ile birlikte kullanıldığında

$$\begin{aligned}
& \prod_{s=0}^n (1 - q^s x + \alpha[s]_q) \\
&= \sum_{s=0}^{n+1} (-1)^s q^{\frac{s(s-1)}{2}} \begin{bmatrix} n+1 \\ s \end{bmatrix}_q \prod_{i=0}^{s-1} (x + \alpha[i]_q) \prod_{j=s}^n (1 + \alpha[j]_q)
\end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Tümevarım hipotezi dikkate alındığında, verilen eşitliğin tüm $n \in \mathbb{N}$ için geçerli olduğu görülür. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Dikkat edilmelidir ki (41) ifadesinde $\alpha = 0$ alındığında, bu ifade (26) ile verilen Rothe özdeşliğine dönüşmektedir. Buna ek olarak (41) eşitliğinde $q = 1$ seçilip, x yerine $-x$ yazıldığında klasik binom açılımı elde edilir.

Lemma 1.4.4. $0 < q < 1$ ve $\alpha \geq 0$ olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$S_n^{q,\alpha}(\varphi; x) \prod_{i=0}^{n-1} (1 + \alpha[i]_q) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \varphi_k T_k \quad (44)$$

şeklinde dir. Burada $\varphi_k = \varphi([k]_q/[n]_q)$ ve

$$T_k = \sum_{s=0}^{n-k} (-1)^s q^{\frac{s(s-1)}{2}} \begin{bmatrix} n-k \\ s \end{bmatrix}_q \prod_{i=0}^{k+s-1} (x + \alpha[i]_q) \prod_{j=k+s}^{n-1} (1 + \alpha[j]_q) \quad (45)$$

olarak ifade edilir (Nowak, 2009).

İspat. (38), (39) ve (41) eşitlikleri göz önüne alınıp (44) ifadesinin sol tarafı düzenlendiğinde,

$$S_n^{q,\alpha}(\varphi; x) \prod_{i=0}^{n-1} (1 + \alpha[i]_q) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \varphi_k F_k$$

şeklinde yazılabilir. Burada F_k toplamı

$$F_k = \sum_{s=0}^{n-k} (-1)^s q^{\frac{s(s-1)}{2}} \begin{bmatrix} n-k \\ s \end{bmatrix}_q \prod_{i=0}^{k-1} (x + \alpha[i]_q) \prod_{j=0}^{s-1} (x + \alpha[j]_q) \prod_{l=s}^{n-k-1} (1 + \alpha[l]_q)$$

biçimindedir. Şimdi her $k \in \mathbb{N}_0$ için $F_k = T_k$ olduğunu ispatlayalım. Bunun için k değişkenine göre tümevarım yöntemini kullanalım. $k = 0$ için $F_0 = T_0$ eşitliği sağlanır. O halde herhangi bir k için $F_k = T_k$ ifadesinin doğru olduğunu varsayalım. Buna göre F_{k+1} toplamı için de aynı eşitliğin geçerli olduğunu göstermeye çalışalım.

$$\begin{aligned} F_{k+1} &= \sum_{s=0}^{n-k-1} (-1)^s q^{\frac{s(s-1)}{2}} \begin{bmatrix} n-k-1 \\ s \end{bmatrix}_q \\ &\quad \times \prod_{i=0}^k (x + \alpha[i]_q) \prod_{j=0}^{s-1} (x + \alpha[j]_q) \prod_{l=s}^{n-k-2} (1 + \alpha[l]_q) \\ &= \sum_{s=0}^{n-k-1} (x + \alpha[k]_q) (-1)^s q^{\frac{s(s-1)}{2}} \begin{bmatrix} n-k-1 \\ s \end{bmatrix}_q \\ &\quad \times \prod_{i=0}^{k-1} (x + \alpha[i]_q) \prod_{j=0}^{s-1} (x + \alpha[j]_q) \prod_{l=s}^{n-k-2} (1 + \alpha[l]_q) \end{aligned}$$

olup elde edilen son ifade $F_k = T_k$ eşitliğinde n yerine $n - 1$ alınmış halidir. Tümevarım hipotezine göre

$$F_{k+1} = \sum_{s=0}^{n-k-1} (x + \alpha[k]_q) (-1)^s q^{\frac{s(s-1)}{2}} \begin{bmatrix} n-k-1 \\ s \end{bmatrix}_q \prod_{i=0}^{k+s-1} (x + \alpha[i]_q) \prod_{j=k+s}^{n-2} (1 + \alpha[j]_q)$$

yazılabilir. $x + \alpha[k]_q$ terimine $\alpha[k+s]_q$ eklenip çıkarıldığında ve gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned} F_{k+1} &= \sum_{s=0}^{n-k-1} (-1)^s q^{\frac{s(s-1)}{2}} \begin{bmatrix} n-k-1 \\ s \end{bmatrix}_q \prod_{i=0}^{k+s} (x + \alpha[i]_q) \prod_{j=k+s}^{n-2} (1 + \alpha[j]_q) \\ &\quad + \alpha \sum_{s=0}^{n-k-1} (-1)^s q^{\frac{s(s-1)}{2}} \begin{bmatrix} n-k-1 \\ s \end{bmatrix}_q ([k]_q - [k+s]_q) \\ &\quad \times \prod_{i=0}^{k+s-1} (x + \alpha[i]_q) \prod_{j=k+s}^{n-2} (1 + \alpha[j]_q) \end{aligned}$$

elde edilir. (13) eşitliğinden

$$\begin{aligned} F_{k+1} &= \sum_{s=0}^{n-k-1} (-1)^s q^{\frac{s(s-1)}{2}} \begin{bmatrix} n-k-1 \\ s \end{bmatrix}_q \prod_{i=0}^{k+s} (x + \alpha[i]_q) \prod_{j=k+s}^{n-2} (1 + \alpha[j]_q) \\ &\quad - \alpha \sum_{s=1}^{n-k-1} (-1)^s q^{\frac{s(s-1)}{2}} \begin{bmatrix} n-k-1 \\ s-1 \end{bmatrix}_q [n-k-s]_q q^k \\ &\quad \times \prod_{i=0}^{k+s-1} (x + \alpha[i]_q) \prod_{j=k+s}^{n-2} (1 + \alpha[j]_q) \end{aligned}$$

yazılabilir. İkinci toplamda s yerine $s + 1$ dönüşümü yapıp terimler tek bir toplam altında birleştirildiğinde,

$$\begin{aligned} F_{k+1} &= (-1)^{n-k-1} q^{\frac{(n-k-1)(n-k-2)}{2}} \prod_{i=0}^{n-1} (x + \alpha[i]_q) \\ &\quad + \sum_{s=0}^{n-k-2} (-1)^s q^{\frac{s(s-1)}{2}} \begin{bmatrix} n-k-1 \\ s \end{bmatrix}_q (1 + \alpha[k+s]_q + \alpha q^{k+s} [n-k-s-1]_q) \\ &\quad \times \prod_{i=0}^{k+s} (x + \alpha[i]_q) \prod_{j=k+s+1}^{n-2} (1 + \alpha[j]_q) \end{aligned} \tag{46}$$

bulunur. (7) eşitliği dikkate alındığında

$$1 + \alpha[k+s]_q + \alpha q^{k+s} [n-k-s-1]_q = 1 + \alpha[n-1]_q$$

elde edilir ve bu ifadenin (46) eşitliğinde kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned}
F_{k+1} &= (-1)^{n-k-1} q^{\frac{(n-k-1)(n-k-2)}{2}} \prod_{i=0}^{n-1} (x + \alpha[i]_q) \\
&\quad + \sum_{s=0}^{n-k-2} (-1)^s q^{\frac{s(s-1)}{2}} \begin{bmatrix} n-k-1 \\ s \end{bmatrix}_q \prod_{i=0}^{k+s} (x + \alpha[i]_q) \prod_{j=k+s+1}^{n-1} (1 + \alpha[j]_q) \\
&= \sum_{s=0}^{n-k-1} (-1)^s q^{\frac{s(s-1)}{2}} \begin{bmatrix} n-k-1 \\ s \end{bmatrix}_q \prod_{i=0}^{k+s} (x + \alpha[i]_q) \prod_{j=k+s+1}^{n-1} (1 + \alpha[j]_q)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece (44) eşitliği ispatlanmış olur.

Teorem 1.4.5. $0 < q < 1$ ve $\alpha \geq 0$ olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}$ için q -Stancu operatörleri

$$S_n^{q,\alpha}(\varphi; x) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \Delta_q^k \varphi_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{x + \alpha[i]_q}{1 + \alpha[i]_q}, \quad x \in [0,1] \quad (47)$$

gösterimine sahiptir (Nowak, 2009).

İspat. (45) eşitliğindeki toplamda s indeksi yerine $s - k$ alındığında

$$\begin{aligned}
S_n^{q,\alpha}(\varphi; x) \prod_{i=0}^{n-1} (1 + \alpha[i]_q) &= \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \varphi_k \sum_{s=k}^n (-1)^{s-k} q^{\frac{(s-k)(s-k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n-k \\ s-k \end{bmatrix}_q \\
&\quad \times \prod_{i=0}^{s-1} (x + \alpha[i]_q) \prod_{j=s}^{n-1} (1 + \alpha[j]_q)
\end{aligned}$$

elde edilir. (11) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
S_n^{q,\alpha}(\varphi; x) \prod_{i=0}^{n-1} (1 + \alpha[i]_q) &= \sum_{k=0}^n \varphi_k \sum_{s=k}^n \begin{bmatrix} n \\ s \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} s \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^{s-k} q^{\frac{(s-k)(s-k-1)}{2}} \\
&\quad \times \prod_{i=0}^{s-1} (x + \alpha[i]_q) \prod_{j=s}^{n-1} (1 + \alpha[j]_q) \\
S_n^{q,\alpha}(\varphi; x) \prod_{i=0}^{n-1} (1 + \alpha[i]_q) &= \sum_{s=0}^n \begin{bmatrix} n \\ s \end{bmatrix}_q \prod_{i=0}^{s-1} (x + \alpha[i]_q) \prod_{j=s}^{n-1} (1 + \alpha[j]_q) \\
&\quad \times \sum_{k=0}^s (-1)^{s-k} q^{\frac{(s-k)(s-k-1)}{2}} \begin{bmatrix} s \\ k \end{bmatrix}_q \varphi_k
\end{aligned}$$

yazılabilir. Son eşitlikte $S_n^{q,\alpha}(\varphi; x)$ ifadesi yalnız bırakıldığında

$$S_n^{q,\alpha}(\varphi; x) = \sum_{s=0}^n [n]_q \prod_{i=0}^{s-1} \frac{x + \alpha[i]_q}{1 + \alpha[i]_q} \sum_{k=0}^s (-1)^{s-k} q^{\frac{(s-k)(s-k-1)}{2}} [s]_q \varphi_k$$

bulunur ve (20) ifadesi göz önüne alındığında istenen elde edilmiş olur.

Sonuç 1.4.6. (47) eşitliğinde $\alpha = 0$ alındığında, (32) ile tanımlanan q -Bernstein polinomlarının (33) ile verilen q -fark operatörü cinsinden gösterimi elde edilir (Phillips, 1997).

Şimdi, q -Stancu operatörünün q -fark operatörü cinsinden gösterimi kullanılarak ilk üç momentinin bulunduğu teorem ifade edilecektir.

Teorem 1.4.7. $0 < q < 1$ ve $\alpha \geq 0$ olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in [0,1]$ için

$$S_n^{q,\alpha}(e_0; x) = 1$$

$$S_n^{q,\alpha}(e_1; x) = x$$

$$S_n^{q,\alpha}(e_2; x) = \frac{1}{1 + \alpha} \left\{ x(x + \alpha) + \frac{x(1 - x)}{[n]_q} \right\}$$

eşitlikleri geçerlidir (Nowak, 2009).

İspat. $k > m$ için $e_m(x) = x^m$ monomiallerinin q -farklarının sıfıra eşit olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla, (47) eşitliğinden, her $n \geq m$ için $S_n^{q,\alpha}(e_m; x)$ ifadesinin m . dereceden bir polinom olduğu sonucuna ulaşılır. Buna göre

$m = 0$ durumu, Teorem 1.4.5'te verilen (47) eşitliği $\varphi(t) = e_0(t)$ için kullanılarak, $n = 0$ ve $\Delta_q^0 \varphi_0 = 1$ olduğu dikkate alındığında kolaylıkla elde edilir.

$m = 1$ durumunda, $\varphi(t) = e_1(t)$ için (19) bağıntısı kullanıldığında

$$\Delta_q^0 \varphi_0 = 0 \quad \text{ve} \quad \Delta_q^1 \varphi_0 = \varphi_1 - \varphi_0 = \frac{1}{[n]_q}$$

yazılabilir. (47) ifadesi göz önüne alındığında $S_n^{(q,\alpha)}(e_1; x) = x$ gerçekleşir.

Benzer şekilde $m = 2$ durumunda $\varphi(t) = e_2(t)$ için (47) eşitliğinden,

$$\Delta_q^0 \varphi_0 = 0, \quad \Delta_q^1 \varphi_0 = \frac{1}{[n]_q^2},$$

$$\Delta_q^2 \varphi_0 = \varphi_2 - (1 + q)\varphi_1 + q\varphi_0 = \left(\frac{[2]_q}{[n]_q} \right)^2 - (1 + q) \left(\frac{1}{[n]_q} \right)^2 = \frac{q[2]_q}{[n]_q^2}$$

olduğu görülür. Bu durumda

$$S_n^{q,\alpha}(e_2; x) = \frac{1}{1+\alpha} \left\{ x(x+\alpha) + \frac{x(1-x)}{[n]_q} \right\}$$

elde edilir.

Sonuç 1.4.8. Teorem 1.4.7’de verilen momentler dikkate alındığında,

- $\alpha = 0$ için Phillips ile tanımlanan q -Bernstein operatörünün,
- $q = 1$ için Stancu tarafından tanımlanan Bernstein-Stancu polinomlarının
- $q = 1$ ve $\alpha = 0$ için ile verilen klasik Bernstein polinomlarının momentlerinin elde edildiği görülür.

Sonuç 1.4.9. Teorem 1.4.7’nin ispatının ilk paragrafı dikkate alındığında, q -Stancu operatörlerinin polinomlar üzerinde derece azaltıcı özelliğe sahip olduğu görülür. Buna göre P_m derecesi m olan bir polinom olmak üzere $S_n^{q,\alpha}(P_m; x)$ derecesi en fazla $\min(m, n)$ olan bir polinomdur. Buna ek olarak, bu operatörler Teorem 1.4.7’den de görüldüğü üzere lineer fonksiyonları lineer fonksiyonlara dönüştürür. Başka bir ifadeyle, a, b sabit sayılar olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}$ için $S_n^{q,\alpha}(at + b; x) = ax + b$ şeklindedir.

Teorem 1.4.10. $\varphi \in C[0,1]$ olmak üzere, her $x \in [0,1]$ için

$$S_n^{q,\alpha}(\varphi; x) = \varphi(x) \quad (48)$$

eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul φ fonksiyonunun lineer olmasıdır (Nowak, 2009).

İspat. Eğer $\varphi(x) = ax + b$ ise Sonuç 1.4.9’a göre, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$S_n^{q,\alpha}(\varphi; x) = ax + b = \varphi(x)$$

sağlanır. Şimdi tersini, yani $S_n^{q,\alpha}(\varphi; x) = \varphi(x)$ olduğunda φ fonksiyonunun lineer olduğunu gösterelim. Bunun için $\psi(x)$ fonksiyonunu

$$\psi(x) = \varphi(x) - (\varphi(1) - \varphi(0))x \quad (49)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $\psi(0) = \psi(1)$ olur ve $S_n^{q,\alpha}(\psi; x) = \psi(x)$ eşitliği sağlanır.

$$M = \max_{x \in [0,1]} \psi(x) = \psi(x_0)$$

olmak üzere, (48) eşitliği ve $p_{nk}^{q,\alpha}(x)$ in pozitifliğinden,

$$\begin{aligned}
M = \psi(x_0) &= S_n^{q,\alpha}(\psi; x_0) = \sum_{k=0}^n \psi\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right) p_{nk}^{q,\alpha}(x_0) \\
&= p_{n0}^{q,\alpha}(x_0)\psi(0) + \sum_{k=1}^n \psi\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right) p_{nk}^{q,\alpha}(x_0) \\
&\leq p_{n0}^{q,\alpha}(x_0)\psi(0) + M \sum_{k=1}^n p_{nk}^{q,\alpha}(x_0) \\
&= p_{n0}^{q,\alpha}(x_0)\psi(0) + M(1 - p_{n0}^{q,\alpha}(x_0)) \\
&= p_{n0}^{q,\alpha}(x_0)(\psi(0) - M) + M
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\psi(0) \geq M$ bulunur. Ayrıca tanım gereği $M = \max_{x \in [0,1]} \psi(x)$

olduğundan $\psi(0) \leq M$ eşitsizliği sağlanır. Bu da bize $\psi(0) = M$ olduğunu kanıtlar.

Benzer şekilde $\psi(0) = \min_{x \in [0,1]} \psi(x) = m$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Bu durumda

$M = \psi(0) = m$ elde edilir. ψ fonksiyonunun maksimumu ve minimumu aynı olduğundan bu fonksiyon bir sabit fonksiyon olup, $\psi(x) \equiv b$, $b \in \mathbb{R}$ yazılabilir. Dolayısıyla (49) eşitliğinden $\varphi(x) = ax + b$ şeklinde lineer bir fonksiyon olarak bulunur.

Teorem 1.4.II. Verilen (q_n) ve (α_n) dizileri için $0 < q_n \leq 1$ ve $\alpha_n \geq 0$ olsun. Her $\varphi \in C[0,1]$ fonksiyonu için $S_n^{q_n, \alpha_n}(\varphi; x) \rightarrow \varphi(x)$ yakınsamasının $[0,1]$ üzerinde düzgün olması için gerek ve yeter koşul $q_n \rightarrow 1$ ve $\alpha_n \rightarrow 0$ sağlanmasıdır (Nowak, 2009).

İspat. Eğer $q_n \rightarrow 1$ (yani $[n]_{q_n} \rightarrow \infty$) ve $\alpha_n \rightarrow 0$ ise, her $x \in [0,1]$ için $S_n^{q_n, \alpha_n}(e_0; x) \rightarrow e_0$ ve $S_n^{q_n, \alpha_n}(e_1; x) \rightarrow e_1$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Verilen koşullar altında ayrıca $S_n^{q_n, \alpha_n}(e_2; x) \rightarrow e_2$ ifadesi de sağlanır. Korovkin Teoremi'ne göre, bu durumda $S_n^{q_n, \alpha_n}(\varphi; x) \rightarrow \varphi(x)$ yakınsaması $[0,1]$ üzerinde düzgündür.

Tersine, her $\varphi \in C[0,1]$ için $S_n^{q_n, \alpha_n}(\varphi; x) \rightarrow \varphi(x)$ yakınsaması düzgün ise, yine Korovkin Teoremi'nden hareketle, her $x \in [0,1]$ için

$$S_n^{q_n, \alpha_n}(e_0; x) \rightarrow e_0, \quad S_n^{q_n, \alpha_n}(e_1; x) \rightarrow e_1, \quad S_n^{q_n, \alpha_n}(e_2; x) \rightarrow e_2$$

yakınsamaları düzgündür. Özellikle $S_n^{q_n, \alpha_n}(e_2; x) \rightarrow e_2$ gözönüne alındığında

$$\frac{1}{1 + \alpha_n} \left\{ x(x + \alpha_n) + \frac{x(1 - x)}{[n]_{q_n}} \right\} \rightarrow x^2$$

ya da

$$\frac{1}{1 + \alpha_n} \left(1 - \frac{1}{[n]_{q_n}} \right) x^2 + \frac{1}{1 + \alpha_n} \left(\alpha_n + \frac{1}{[n]_{q_n}} \right) x \rightarrow x^2$$

yakınsamasının gerçekleşmesi gerekir. Bunun için

$$\frac{1}{1 + \alpha_n} \left(1 - \frac{1}{[n]_{q_n}} \right) \rightarrow 1 \quad \text{ve} \quad \frac{1}{1 + \alpha_n} \left(\alpha_n + \frac{1}{[n]_{q_n}} \right) \rightarrow 0$$

sağlanmalıdır. $\alpha_n \geq 0$ ve $[n]_{q_n} \geq 0$ olduğundan, bu koşullar ancak

$$\alpha_n \rightarrow 0 \quad \text{ve} \quad [n]_{q_n} \rightarrow \infty \quad (q_n \rightarrow 1)$$

olmasıyla mümkündür. Böylece ispat tamamlanmış olur.



2. q -STANCU OPERATÖRLERİNİN YENİ BİR GÖSTERİMİ

Bu bölümde Nowak tarafından (38) ile tanımlanan q -Stancu operatörlerinin baz polinomunu oluşturan katsayılar, (6) ile gösterilen q -Pochhammer sembolü cinsinden yeniden ifade edilerek operatörün alternatif bir gösterimi elde edilecektir. İlerleyen kısımlarda hesaplamalar $0 < q < 1$ varsayımı altında gerçekleştirilecektir.

Lemma 2.1. $n \in \mathbb{N}$ ve $\alpha \geq 0$ olmak üzere $\gamma = \alpha/(1 - q)$ olarak tanımlansın. Bu durumda $0 \leq k \leq n$ için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$i) \prod_{i=0}^{k-1} (x + \alpha[i]_q) = (x + \gamma)^k \left(\frac{\gamma}{x + \gamma}; q \right)_k, \quad (50)$$

$$ii) \prod_{i=0}^{n-k-1} (1 - q^i x + \alpha[i]_q) = (1 + \gamma)^{n-k} \left(\frac{x + \gamma}{1 + \gamma}; q \right)_{n-k}, \quad (51)$$

$$iii) \prod_{i=0}^{n-1} (1 + \alpha[i]_q) = (1 + \gamma)^n \left(\frac{\gamma}{1 + \gamma}; q \right)_n. \quad (52)$$

İspat.

i) (3) tanımından

$$\prod_{i=0}^{k-1} (x + \alpha[i]_q) = \prod_{i=0}^{k-1} \left[x + \alpha \left(\frac{1 - q^i}{1 - q} \right) \right] = \prod_{i=0}^{k-1} [x + \gamma(1 - q^i)] = \prod_{i=0}^{k-1} [x + \gamma - \gamma q^i]$$

yazılabilir. (6) ile verilen q -Pochhammer sembolü kullanılarak

$$\prod_{i=0}^{k-1} (x + \alpha[i]_q) = (x + \gamma)^k \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{\gamma}{x + \gamma} q^i \right) = (x + \gamma)^k \left(\frac{\gamma}{x + \gamma}; q \right)_k$$

elde edilir.

ii) (3) eşitliğinde verilen q -tamsayısı tanımı ve (6) eşitliğinde verilen q -Pochhammer sembolü kullanılarak gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned}
& \prod_{i=0}^{n-k-1} (1 - q^i x + \alpha[i]_q) \\
&= \prod_{i=0}^{n-k-1} \left[1 - q^i x + \alpha \left(\frac{1 - q^i}{1 - q} \right) \right] = \prod_{i=0}^{n-k-1} [1 - q^i x + \gamma(1 - q^i)] \\
&= \prod_{i=0}^{n-k-1} [1 + \gamma - (x + \gamma)q^i] = (1 + \gamma)^{n-k} \prod_{i=0}^{n-k-1} \left[1 - \left(\frac{x + \gamma}{1 + \gamma} \right) q^i \right] \\
&= (1 + \gamma)^{n-k} \left(\frac{x + \gamma}{1 + \gamma}; q \right)_{n-k}
\end{aligned}$$

bulunur.

iii) Önceki şıklarda kullanılan benzer işlemler doğrultusunda,

$$\begin{aligned}
\prod_{i=0}^{n-1} (1 + \alpha[i]_q) &= \prod_{i=0}^{n-1} \left[1 + \alpha \left(\frac{1 - q^i}{1 - q} \right) \right] = \prod_{i=0}^{n-1} [1 + \gamma(1 - q^i)] \\
&= \prod_{i=0}^{n-1} (1 + \gamma - \gamma q^i) = (1 + \gamma)^n \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{\gamma}{1 + \gamma} q^i \right) \\
&= (1 + \gamma)^n \left(\frac{\gamma}{1 + \gamma}; q \right)_n
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Nowak tarafından tanımlanan (38) ile verilen q -Stancu operatörleri

$$S_n^{q,\alpha}(\varphi; x) = \sum_{k=0}^n \varphi \left(\frac{[k]_q}{[n]_q} \right) p_{nk}^{q,\alpha}(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (53)$$

olmak üzere $p_{nk}^{q,\alpha}(x)$ baz polinomları için (50), (51) ve (52) eşitlikleri dikkate alındığında

$$p_{nk}^{q,\alpha}(x) = [n]_q \frac{\left(\frac{\gamma}{x + \gamma}; q \right)_k \left(\frac{x + \gamma}{1 + \gamma}; q \right)_{n-k} \left(\frac{x + \gamma}{1 + \gamma} \right)^k}{\left(\frac{\gamma}{1 + \gamma}; q \right)_n}, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (54)$$

şeklinde yazılabilir ve böylece q -Stancu operatörleri için alternatif bir form elde edilmiş olur.

Sıradaki teorem, q -Stancu operatörlerinin momentlerinin hesaplanmasını ele almaktadır. Bu operatörlerin ilk üç momenti, 2009 yılında Nowak tarafından elde edilmiş olup, bu hesaplamalarda operatörlerin (47) ile verilen q -farklar cinsinden

gösterimi esas alınmıştır (Nowak, 2009). Bu teoremden, momentlerin hesaplanması farklı bir ispat tekniği kullanılarak gerçekleştirilecektir.

Teorem 2.2. $\alpha \geq 0$ olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} S_n^{q,\alpha}(e_0; x) &= 1, \\ S_n^{q,\alpha}(e_1; x) &= x, \\ S_n^{q,\alpha}(e_2; x) &= \frac{1}{1+\alpha} \left\{ x(x+\alpha) + \frac{x(1-x)}{[n]_q} \right\} \end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat.

i) q -Stancu operatörlerinin (53)-(54) gösteriminden

$$S_n^{q,\alpha}(e_0; x) = \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q\right)_n} \sum_{k=0}^n [n]_q \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)^k \left(\frac{\gamma}{x+\gamma}; q\right)_k \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{n-k}$$

yazılabilir. Burada (30) eşitliğinde $a = \gamma/(x+\gamma)$ ve $b = (x+\gamma)/(1+\gamma)$ alınırsa

$$S_n^{q,\alpha}(e_0; x) = \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q\right)_n} \left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q\right)_n = 1$$

olarak elde edilir.

ii) (53) ifadesinde $\varphi(t) = e_1(t)$ alındığında,

$$S_n^{q,\alpha}(e_1; x) = \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q\right)_n} \sum_{k=0}^n \frac{[k]_q}{[n]_q} [n]_q \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)^k \left(\frac{\gamma}{x+\gamma}; q\right)_k \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{n-k}$$

yazılabilir. (10) eşitliği son ifade de kullanıldığında

$$S_n^{q,\alpha}(e_1; x) = \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q\right)_n} \sum_{k=1}^n [n-1]_q \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)^k \left(\frac{\gamma}{x+\gamma}; q\right)_k \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{n-k}$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafında bulunan toplam $k \rightarrow k+1$ için yazılıp, gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$S_n^{q,\alpha}(e_1; x) = \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q\right)_n} \sum_{k=0}^{n-1} [n-1]_q \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)^{k+1} \left(\frac{\gamma}{x+\gamma}; q\right)_{k+1} \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{n-k-1}$$

bulunur. q -Pochhammer sembolünün (14) özelliğinden

$$\begin{aligned}
& S_n^{q,\alpha}(e_1; x) \\
&= \frac{\left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)\left(1-\frac{\gamma}{x+\gamma}\right)}{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q\right)_n} \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)^k \left(\frac{q\gamma}{x+\gamma}; q\right)_k \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{n-k-1}
\end{aligned}$$

yazılabilir. (30) ifadesi göz önüne alındığında

$$S_n^{q,\alpha}(e_1; x) = \frac{\left(\frac{x}{1+\gamma}\right)\left(\frac{q\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{n-1}}{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q\right)_n} = \frac{x}{1+\gamma} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)} = x$$

elde edilir.

iii) (53) eşitliğinde $\varphi(t) = e_2(t)$ alındığında

$$\begin{aligned}
S_n^{q,\alpha}(e_2; x) &= \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q\right)_n} \sum_{k=0}^n \left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)^2 \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)^k \left(\frac{\gamma}{x+\gamma}; q\right)_k \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{n-k} \\
&= \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q\right)_n} \sum_{k=1}^n \frac{[k]_q}{[n]_q} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)^k \left(\frac{\gamma}{x+\gamma}; q\right)_k \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{n-k}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Eşitliğin sağ tarafında bulunan toplamda k yerine $k+1$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}
& S_n^{q,\alpha}(e_2; x) \\
&= \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q\right)_n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{[k+1]_q}{[n]_q} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)^{k+1} \left(\frac{\gamma}{x+\gamma}; q\right)_{k+1} \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{n-k-1}
\end{aligned}$$

elde edilir. (7) eşitliğinden $[k+1]_q = 1 + q[k]_q$ olduğu bilindiğinden bu ifade toplamda yerine koyulduğunda;

$$\begin{aligned}
& S_n^{q,\alpha}(e_2; x) \\
&= \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q\right)_n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1+q[k]_q}{[n]_q}\right) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)^{k+1} \left(\frac{\gamma}{x+\gamma}; q\right)_{k+1} \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{n-k-1} \\
&= \frac{1}{[n]_q \left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q\right)_n} \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)^{k+1} \left(\frac{\gamma}{x+\gamma}; q\right)_{k+1} \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{n-k-1} \\
&\quad + \frac{q}{[n]_q \left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q\right)_n} \sum_{k=0}^{n-1} [k]_q \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)^{k+1} \left(\frac{\gamma}{x+\gamma}; q\right)_{k+1} \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{n-k-1} \\
&=: I_1 + I_2
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bundan sonraki adımda son ifadede görülen I_1 ve I_2 terimleri ayrı ayrı hesaplanacaktır. I_1 toplamı için (14) eşitliği dikkate alınıp gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$I_1 = \frac{\left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)\left(1-\frac{\gamma}{x+\gamma}\right)}{[n]_q\left(\frac{\gamma}{1+\gamma};q\right)_n} \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)^k \left(\frac{q\gamma}{x+\gamma};q\right)_k \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma};q\right)_{n-k-1}$$

şeklinde bulunur. (30) eşitliği kullanılarak eşitliğin sağ tarafı yeniden ifade edildiğinde

$$I_1 = \frac{\left(\frac{x}{1+\gamma}\right)}{[n]_q\left(\frac{\gamma}{1+\gamma};q\right)_n} \left(\frac{q\gamma}{1+\gamma};q\right)_{n-1} = \frac{x}{[n]_q(1+\gamma)\left(1-\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)} = \frac{x}{[n]_q}$$

sonucu elde edilir. Bundan sonraki adımda I_2 terimine geçildiğinde

$$I_2 = \frac{q}{[n]_q\left(\frac{\gamma}{1+\gamma};q\right)_n} \sum_{k=0}^{n-1} [k]_q \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)^{k+1} \left(\frac{\gamma}{x+\gamma};q\right)_{k+1} \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma};q\right)_{n-k-1}$$

olmak üzere, bu eşitlikte (10) özelliğinin kullanılmasıyla

$$I_2 = \frac{q[n-1]_q}{[n]_q\left(\frac{\gamma}{1+\gamma};q\right)_n} \sum_{k=1}^{n-1} \begin{bmatrix} n-2 \\ k-1 \end{bmatrix}_q \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)^{k+1} \left(\frac{\gamma}{x+\gamma};q\right)_{k+1} \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma};q\right)_{n-k-1}$$

yazılabilir. Son toplam $k \rightarrow k+1$ olacak şekilde değiştirildiğinde

$$I_2 = \frac{q[n-1]_q}{[n]_q\left(\frac{\gamma}{1+\gamma};q\right)_n} \sum_{k=0}^{n-2} \begin{bmatrix} n-2 \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)^{k+2} \left(\frac{\gamma}{x+\gamma};q\right)_{k+2} \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma};q\right)_{n-k-2}$$

bulunur. (14) ve (30) eşitlikleri göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{q[n-1]_q}{[n]_q\left(\frac{\gamma}{1+\gamma};q\right)_n} \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)^2 \left(1-\frac{\gamma}{x+\gamma}\right) \left(1-q\frac{\gamma}{x+\gamma}\right) \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{n-2} \begin{bmatrix} n-2 \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)^k \left(\frac{q^2\gamma}{x+\gamma};q\right)_k \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma};q\right)_{n-k-2} \\ &= \frac{q[n-1]_q}{[n]_q\left(\frac{\gamma}{1+\gamma};q\right)_n} \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)^2 \left(\frac{x}{x+\gamma}\right) \left(\frac{x+(1-q)\gamma}{x+\gamma}\right) \left(\frac{q^2\gamma}{1+\gamma};q\right)_{n-2} \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli sadeleşmeler yapıldığında

$$I_2 = \frac{q[n-1]_q}{[n]_q} \frac{x(x+(1-q)\gamma)}{(1+(1-q)\gamma)}$$

bulunmuş olur. Elde edilen I_1 ve I_2 sonuçları bir araya getirildiğinde,

$$S_n^{q,\alpha}(e_2; x) = I_1 + I_2 = \frac{x}{[n]_q} + \frac{q[n-1]_q}{[n]_q} \frac{x(x + (1-q)\gamma)}{(1 + (1-q)\gamma)}$$

eşitliği elde edilir. Burada $\gamma = \alpha/(1-q)$ olduğu dikkate alınıp (7) eşitliğinden $[n]_q = 1 + q[n-1]_q$ bağıntısı kullanılırsa,

$$\begin{aligned} S_n^{q,\alpha}(e_2; x) &= \frac{x}{[n]_q} + \frac{[n]_q - 1}{[n]_q} \frac{x(x + \alpha)}{(1 + \alpha)} \\ &= \frac{x}{[n]_q} + \left(1 - \frac{1}{[n]_q}\right) \frac{x(x + \alpha)}{(1 + \alpha)} \\ &= \frac{x(1 + \alpha) - x(x + \alpha)}{[n]_q(1 + \alpha)} + \frac{x(x + \alpha)}{(1 + \alpha)} \\ &= \frac{1}{1 + \alpha} \left\{ x(x + \alpha) + \frac{x(1 - x)}{[n]_q} \right\} \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak operatörün ilk üç momenti Nowak'ın elde ettiği değerlerle aynı bulunmuş olup bu teoremden söz konusu eşitlikler farklı bir ispat tekniği kullanılarak kanıtlanmıştır.

Çalışmamızın bu bölümüne kadar q -Stancu operatörlerinin ilk üç momenti ele alınmıştır. Şimdi söz konusu operatörlerin daha genel durumu olan m -inci mertebeden momentleri için yineleme (rekürans) bağıntıları ele alınacaktır. Bu bağıntılar, hesaplanması istenen herhangi bir m -inci ($m = 0, 1, 2, \dots$) mertebeden momentin, kendisinden önceki momentler cinsinden ifade edilmesine olanak sağlamaktadır.

Teorem 2.3. $m \in \mathbb{N}_0$ ve $\alpha \geq 0$ olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in [0, 1]$ için q -Stancu operatörleri

$$S_n^{q,\alpha}(e_{m+1}; x) = \frac{x}{[n]_q^m} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} q^s [n-1]_q^s S_{n-1}^{q, \frac{q\alpha}{1+\alpha}} \left(e_s; \frac{x + \alpha}{1 + \alpha} \right) \quad (55)$$

yineleme bağıntısını sağlar.

İspat. q -Stancu operatörlerinin (53) tanımında $\varphi(t) = e_{m+1}(t)$ alındığında

$$\begin{aligned} &S_n^{q,\alpha}(e_{m+1}; x) \\ &= \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q\right)_n} \sum_{k=0}^n \left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)^{m+1} [k]_q \left(\frac{x + \gamma}{1 + \gamma}\right)^k \left(\frac{\gamma}{x + \gamma}; q\right)_k \left(\frac{x + \gamma}{1 + \gamma}; q\right)_{n-k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& S_n^{q,\alpha}(e_{m+1}; x) \\
&= \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q\right)_n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)^m \frac{[k]_q}{[n]_q} [n]_q \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)^k \left(\frac{\gamma}{x+\gamma}; q\right)_k \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{n-k} \\
&= \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q\right)_n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)^m [n-1]_q \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)^k \left(\frac{\gamma}{x+\gamma}; q\right)_k \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{n-k}
\end{aligned}$$

elde edilir. Sağ taraftaki toplamda $k \rightarrow k+1$ indeks değişimi yapıldığında

$$\begin{aligned}
& S_n^{q,\alpha}(e_{m+1}; x) \\
&= \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q\right)_n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{[k+1]_q}{[n]_q}\right)^m [n-1]_q \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)^{k+1} \left(\frac{\gamma}{x+\gamma}; q\right)_{k+1} \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{n-k-1}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada (7) ile verilen $[k+1]_q = 1 + q[k]_q$ özelliği ve binom açılımı uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
& S_n^{q,\alpha}(e_{m+1}; x) \\
&= \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q\right)_n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1+q[k]_q}{[n]_q}\right)^m [n-1]_q \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)^{k+1} \left(\frac{\gamma}{x+\gamma}; q\right)_{k+1} \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{n-k-1} \\
&= \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q\right)_n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} q^s [k]_q^s [n-1]_q \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)^{k+1} \left(\frac{\gamma}{x+\gamma}; q\right)_{k+1} \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{n-k-1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadede gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned}
S_n^{q,\alpha}(e_{m+1}; x) &= \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q\right)_n} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} q^s \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right) \left(1 - \frac{\gamma}{x+\gamma}\right) \\
&\quad \times \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} [k]_q^s [n-1]_q \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)^k \left(\frac{q\gamma}{x+\gamma}; q\right)_k \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{n-k-1} \right\} \\
&= \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q\right)_n} \left(\frac{x}{1+\gamma}\right) \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} q^s [n-1]_q^s \\
&\quad \times \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{[k]_q}{[n-1]_q}\right)^s [n-1]_q \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)^k \left(\frac{q\gamma}{x+\gamma}; q\right)_k \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{n-k-1} \right\} \quad (56)
\end{aligned}$$

bulunur. Son eřitlikteki ikinci toplam

$$\Omega_s := \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{[k]_q}{[n-1]_q}\right)^s [n-1]_q \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)^k \left(\frac{q\gamma}{x+\gamma}; q\right)_k \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{n-k-1}$$

olmak üzere, q -Stancu operatörlerinin (53)-(54) gösteriminde α yerine $q\alpha/(1 + \alpha)$ ve x yerine $(x + \alpha)/(1 + \alpha)$ alındığında

$$\begin{aligned} & S_{n-1}^{q, \frac{q\alpha}{1+\alpha}} \left(e_s; \frac{x + \alpha}{1 + \alpha} \right) \\ &= \frac{1}{\left(\frac{q\gamma}{1 + \gamma}; q \right)_{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{[k]_q}{[n-1]_q} \right)^s [n-1]_q \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x + \gamma}{1 + \gamma} \right)^k \left(\frac{q\gamma}{x + \gamma}; q \right)_k \left(\frac{x + \gamma}{1 + \gamma}; q \right)_{n-k-1} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{q\gamma}{1 + \gamma}; q \right)_{n-1}} \Omega_s \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Son eşitliğin (56) ifadesinde kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} & S_n^{q, \alpha}(e_{m+1}; x) \\ &= \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{1 + \gamma}; q \right)_n [n]_q^m} \left(\frac{x}{1 + \gamma} \right) \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} q^s [n-1]_q^s \left(\frac{q\gamma}{1 + \gamma}; q \right)_{n-1} S_{n-1}^{q, \frac{q\alpha}{1+\alpha}} \left(e_s; \frac{x + \alpha}{1 + \alpha} \right) \\ &= \frac{x}{[n]_q^m} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} q^s [n-1]_q^s S_{n-1}^{q, \frac{q\alpha}{1+\alpha}} \left(e_s; \frac{x + \alpha}{1 + \alpha} \right) \end{aligned}$$

yineleme bağıntısı elde edilir.

Bir önceki teoremden, q -Stancu operatörlerinin momentleri arasında kurulan yineleme bağıntısı ayrıntılı biçimde elde edilmiştir. Şimdi, söz konusu operatörler için farklı bir yöntem kullanılarak alternatif bir yineleme bağıntısı daha elde edilecektir. Bu amaçla, 2005 yılında Videnskii tarafından q -Bernstein operatörleri için türetilen (35) numaralı bağıntının ispatında kullanılan yöntem dikkate alınacaktır (Videnskii, 2005).

Lemma 2.4. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\frac{[k]_q}{[n]_q} p_{nk}^{q, \alpha}(x) = p_{nk}^{q, \alpha}(x) - (1 - x) p_{n-1, k}^{q, \frac{q\alpha}{1+\alpha}} \left(\frac{qx}{1 + \alpha} \right), \quad 0 \leq k \leq n \quad (57)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. Öncelikle (7) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\frac{[k]_q}{[n]_q} p_{nk}^{q,\alpha}(x) &= \left(\frac{[n]_q - q^k [n-k]_q}{[n]_q} \right) p_{nk}^{q,\alpha}(x) \\ &= p_{nk}^{q,\alpha}(x) - \frac{q^k [n-k]_q}{[n]_q} p_{nk}^{q,\alpha}(x)\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ifade de (54) ile verilen baz polinomları yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}\frac{[k]_q}{[n]_q} p_{nk}^{q,\alpha}(x) &= p_{nk}^{q,\alpha}(x) - \frac{q^k [n-k]_q}{[n]_q} [k]_q \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma} \right)^k \frac{\left(\frac{\gamma}{x+\gamma}; q \right)_k \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q \right)_{n-k}}{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q \right)_n} \\ &= p_{nk}^{q,\alpha}(x) - \left[\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right]_q \left(q \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma} \right) \right)^k \frac{\left(\frac{\gamma}{x+\gamma}; q \right)_k \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q \right)_{n-k}}{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q \right)_n}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada q -Pochhammer sembolünün (14) özelliği kullanıldığında

$$\begin{aligned}\frac{[k]_q}{[n]_q} p_{nk}^{q,\alpha}(x) &= p_{nk}^{q,\alpha}(x) - \left[\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right]_q (1-x) \left(q \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma} \right) \right)^k \frac{\left(\frac{\gamma}{x+\gamma}; q \right)_k \left(q \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma} \right); q \right)_{n-k-1}}{\left(\frac{q\gamma}{1+\gamma}; q \right)_{n-1}} \quad (58)\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Son olarak (54) ifadesinde α yerine $q\alpha/(1+\alpha)$ ve x yerine $qx/(1+\alpha)$ alındığında

$$p_{n-1,k}^{q,\frac{q\alpha}{1+\alpha}} \left(\frac{qx}{1+\alpha} \right) = \left[\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right]_q \left(q \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma} \right) \right)^k \frac{\left(\frac{\gamma}{x+\gamma}; q \right)_k \left(q \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma} \right); q \right)_{n-k-1}}{\left(\frac{q\gamma}{1+\gamma}; q \right)_{n-1}}$$

elde edilir. Bulunan ifade (58) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$\frac{[k]_q}{[n]_q} p_{nk}^{q,\alpha}(x) = p_{nk}^{q,\alpha}(x) - (1-x) p_{n-1,k}^{q,\frac{q\alpha}{1+\alpha}} \left(\frac{qx}{1+\alpha} \right)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu da bizden istenendir.

Teorem 2.5. $m \in \mathbb{N}_0$ ve $\alpha \geq 0$ olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in [0,1]$ için q -Stancu operatörleri

$$S_n^{q,\alpha}(e_{m+1}; x) = S_n^{q,\alpha}(e_m; x) - (1-x) \left(\frac{[n-1]_q}{[n]_q} \right)^m S_{n-1}^{q,\frac{q\alpha}{1+\alpha}} \left(e_m; \frac{qx}{1+\alpha} \right) \quad (59)$$

yineleme bağıntısını sağlar.

İspat. q -Stancu operatörlerinin (53) tanımında $\varphi(t) = e_{m+1}(t)$ seçildiğinde

$$S_n^{q,\alpha}(e_{m+1}; x) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{[k]_q}{[n]_q} \right)^{m+1} P_{nk}^{q,\alpha}(x) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{[k]_q}{[n]_q} \right)^m \frac{[k]_q}{[n]_q} P_{nk}^{q,\alpha}(x)$$

yazılabilir. Baz polinomlarının sağladığı (57) özelliği dikkate alındığında

$$\begin{aligned} S_n^{q,\alpha}(e_{m+1}; x) &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{[k]_q}{[n]_q} \right)^m \left(P_{nk}^{q,\alpha}(x) - (1-x) P_{n-1,k}^{q, \frac{q\alpha}{1+\alpha}} \left(\frac{qx}{1+\alpha} \right) \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{[k]_q}{[n]_q} \right)^m P_{n,k}^{q,\alpha}(x) - (1-x) \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{[k]_q}{[n]_q} \right)^m P_{n-1,k}^{q, \frac{q\alpha}{1+\alpha}} \left(\frac{qx}{1+\alpha} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned} S_n^{q,\alpha}(e_{m+1}; x) &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{[k]_q}{[n]_q} \right)^m P_{nk}^{q,\alpha}(x) - (1-x) \left(\frac{[n-1]_q}{[n]_q} \right)^m \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{[k]_q}{[n-1]_q} \right)^m P_{n-1,k}^{q, \frac{q\alpha}{1+\alpha}} \left(\frac{qx}{1+\alpha} \right) \\ &= S_n^{q,\alpha}(e_m; x) - (1-x) \left(\frac{[n-1]_q}{[n]_q} \right)^m S_{n-1}^{q, \frac{q\alpha}{1+\alpha}} \left(e_m; \frac{qx}{1+\alpha} \right) \end{aligned}$$

yineleme bağıntısı elde edilir.

Sonuç 2.6.

- (55) ve (59) yineleme bağıntılarında özel olarak $m = 1, 2$ alındığında q -Stancu operatörlerinin Teorem 2.2 ile verilen momentleri elde edilir.
- (55) numaralı yineleme bağıntısında $\alpha = 0$ alındığında q -Bernstein polinomları için Ostrovska tarafından verilen (34) yineleme bağıntısına (Ostrovska, 2003), benzer şekilde (59) yineleme bağıntısında $\alpha = 0$ alındığında Videnskii tarafından elde edilen (35) numaralı yineleme bağıntısına ulaşılır (Videnskii, 2005).

3. LİMİT q -STANCU OPERATÖRÜ

q -Bernstein tipli operatörlere ilişkin çalışmalarda, bu operatörlerin limit formlarının incelenmesi önemli bir rol oynamaktadır (Aral vd., 2013; Gupta, 2008; Gupta ve Wang, 2008; Il'inskii ve Ostrovska, 2002; Mahmudov, 2011; Wang, 2007). Nowak tarafından tanımlanan q -Stancu operatörlerinin limitinin elde edilmesi şimdiye kadar mümkün olmamıştır. Bunun temel nedeni, (39) ile verilen baz polinomlarında n 'ye bağlı olarak ortaya çıkan sonsuz çarpımların ıraksak olmasıdır. Bir önceki bölümde baz polinomlarının (54) biçiminde ifade edilmesiyle, bu çarpımların yakınsak hâle geldiği görülmektedir. Bu durum, limit q -Stancu operatörünün tanımlanmasına imkân sağlamaktadır. Dolayısıyla limit operatörün elde edilebilmesindeki asıl önemli nokta, baz polinomlarının (54) formuna dönüştürülmesidir.

Aradığımız limit operatörünü oluşturmada önce, hem kendi içinde önemli olan hem de sonraki adımlarda ihtiyaç duyacağımız bazı ara sonuçları verelim.

Lemma 3.1. $\varphi \in C[0,1]$ ve $\alpha \geq 0$ olmak üzere,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(1-q^k)}{(q;q)_k} \left(\frac{\gamma}{x+\gamma}; q\right)_k \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)^k \quad (60)$$

serisi her kapalı $[a, b] \subseteq [0, 1)$ aralığında düzgün yakınsar.

İspat. φ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında sürekli olduğundan aynı zamanda sınırlıdır. Buna göre öyle bir pozitif K sayısı bulunabilir ki her $x \in [0,1]$ için $|\varphi(x)| \leq K$ yazılabilir.

Ayrıca, her $k \in \mathbb{N}_0$ ve $x \in [0,1]$ için $(q;q)_k \geq (q;q)_{\infty}$ ve $\left|\left(\frac{\gamma}{x+\gamma}; q\right)_k\right| \leq 1$ olduğundan

$$\left| \frac{\varphi(1-q^k)}{(q;q)_k} \left(\frac{\gamma}{x+\gamma}; q\right)_k \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)^k \right| \leq \frac{K}{(q;q)_{\infty}} \left|\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right|^k$$

elde edilir. Şimdi $[a, b]$ kapalı aralığı $[0, 1)$ aralığının keyfi bir alt kümesi olmak üzere

$$\left|\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right| \leq \frac{b+\gamma}{1+\gamma} < 1$$

olduğundan Weierstrass M -testi gereği verilen seri $[a, b]$ aralığında düzgün yakınsar.

Sonuç 3.2. $\varphi \in C[0,1]$ ve $\alpha \geq 0$ olmak üzere, (60) ile verilen seri her $x \in [0,1]$ için yakınsar.

Lemma 3.3. $k = 0,1, \dots$ olmak üzere,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{nk}^{q,\alpha}(x) = \frac{\left(\frac{\gamma}{x+\gamma}; q\right)_k \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q\right)_\infty \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)^k}{(q; q)_k \left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q\right)_\infty} =: p_{\infty k}^{q,\alpha}(x), \quad x \in [0,1] \quad (61)$$

yakınsaması düzgündür.

İspat. Öncelikle (18) eşitliği göz önüne alındığında

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[n]_q}{[k]_q} \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q\right)_n} = \frac{1}{(q; q)_k \left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q\right)_\infty} \quad (62)$$

olduğu görülür. Buna ek olarak (16) özdeşliği kullanılarak

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{n-k} - \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q\right)_\infty \\ &= \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{n-k} \left[1 - \left(\left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right) q^{n-k}; q\right)_\infty\right] \\ &\leq 1 - \prod_{i=n-k}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right) q^i\right) \leq 1 - \prod_{i=n-k}^{\infty} (1 - q^i) \end{aligned}$$

bulunur. Bu noktada, literatürde iyi bilinen aşağıdaki Bernoulli eşitsizliği faydalı olacaktır: $a_1, a_2, \dots, a_n \in (0,1)$ olmak üzere

$$1 - \prod_{i=1}^n (1 - a_i) \leq \sum_{i=1}^n a_i$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $n \rightarrow \infty$ limiti alınır, terimleri $(0,1)$ açık aralığında olan her $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi için

$$1 - \prod_{i=1}^{\infty} (1 - a_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Dolayısıyla, her $x \in [0,1]$ için

$$0 \leq \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{n-k} - \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q\right)_\infty \leq 1 - \prod_{i=n-k}^{\infty} (1 - q^i) \leq \sum_{i=n-k}^{\infty} q^i = \frac{q^{n-k}}{1-q}$$

elde edilir. Son eşitsizliğin sağ tarafı x değişkeninden bağımsız olarak 0'a yakınsadığı için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x + \gamma}{1 + \gamma}; q \right)_{n-k} = \left(\frac{x + \gamma}{1 + \gamma}; q \right)_{\infty} \quad (63)$$

yakınsaması $[0,1]$ aralığında düzgündür. (62) ve (63) ifadeleri (54) ile birlikte düşünüldüğünde istenen yakınsama elde edilir.

Lemma 3.4. $\alpha \geq 0$ olmak üzere $k \in \mathbb{N}_0$ ve $x \in [0, 1)$ için $p_{\infty k}^{q, \alpha}(x) \geq 0$ olup

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{\infty k}^{q, \alpha}(x) = 1, \quad x \in [0, 1) \quad (64)$$

şeklindedir.

Lemma 3.5. $\varphi \in C[0,1]$ ve $\alpha \geq 0$ olmak üzere

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(1 - q^k) p_{\infty k}^{q, \alpha}(x) = \varphi(1)$$

biçimindedir.

İspat. $\epsilon > 0$ sayısı verilsin. $p_{\infty k}^{q, \alpha}(x)$ fonksiyonları sürekli ve $p_{\infty k}^{q, \alpha}(1) = 0$ olduğundan öyle bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilir ki $1 - \delta < x < 1$ iken $|p_{\infty k}^{q, \alpha}(x)| < \epsilon$ sağlanır. Diğer yandan $\varphi \in C[0,1]$ olduğundan öyle bir M pozitif tamsayısı vardır ki $k > M$ için $|\varphi(1 - q^k) - \varphi(1)| < \epsilon$ yazılabilir. Şimdi (64) özelliği göz önüne alındığında her $x \in (1 - \delta, 1)$ için

$$\begin{aligned} \Delta &:= \left| \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(1 - q^k) p_{\infty k}^{q, \alpha}(x) - \varphi(1) \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(1 - q^k) p_{\infty k}^{q, \alpha}(x) - \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(1) p_{\infty k}^{q, \alpha}(x) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} |\varphi(1 - q^k) - \varphi(1)| p_{\infty k}^{q, \alpha}(x) \\ &= \sum_{k=0}^M |\varphi(1 - q^k) - \varphi(1)| p_{\infty k}^{q, \alpha}(x) + \sum_{k=M+1}^{\infty} |\varphi(1 - q^k) - \varphi(1)| p_{\infty k}^{q, \alpha}(x) \\ &\leq \sum_{k=0}^M 2\|\varphi\| \epsilon + \sum_{k=M+1}^{\infty} \epsilon p_{\infty k}^{q, \alpha}(x) \leq [2\|\varphi\|(M+1) + 1] \epsilon \end{aligned}$$

elde edilir ki son ifade $\lim_{x \rightarrow 1^-} \Delta = 0$ olduğunu gösterir.

Tanım 3.6. $\varphi \in C[0,1]$ ve $\alpha \geq 0$ olmak üzere, limit q -Stancu operatörleri

$$S_{\infty}^{q,\alpha}(\varphi; x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(1 - q^k) p_{\infty k}^{q,\alpha}(x), & x \in [0,1) \\ \varphi(1), & x = 1 \end{cases} \quad (65)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $p_{\infty k}^{q,\alpha}(x)$ ifadesi (61) ile verilen blok fonksiyonlarıdır.

Sonuç 3.2 ve Lemma 3.5 dikkate alındığında $S_{\infty}^{q,\alpha}: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ operatörünün iyi tanımlı olduğu görülür.

Limit q -Stancu operatörleri $\alpha = 0$ için (36) ile verilen ve Il'inskii ve Ostrovska tarafından tanımlanan limit q -Bernstein operatörlerine dönüşmektedir (Il'inskii ve Ostrovska, 2002).

Özellik 3.7. Limit q -Stancu operatörleri aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i) Lineerlik Özelliği:

Her $\varphi, \psi \in C[0,1]$ ve c_1, c_2 sabitleri için

$$S_{\infty}^{q,\alpha}(c_1\varphi + c_2\psi; x) = c_1 S_{\infty}^{q,\alpha}(\varphi; x) + c_2 S_{\infty}^{q,\alpha}(\psi; x)$$

şeklindedir.

ii) Uç Nokta İnterpolasyonu:

$$S_{\infty}^{q,\alpha}(\varphi; 0) = \varphi(0), \quad S_{\infty}^{q,\alpha}(\varphi; 1) = \varphi(1)$$

iii) Pozitiflik:

$0 < q < 1$ ve $x \in [0,1]$ için $\varphi \geq 0$ olduğunda $S_{\infty}^{q,\alpha}(\varphi; x) \geq 0$ olur.

Tanım 3.6 ile verilen limit q -Stancu operatörü aslında $S_n^{q,\alpha}(\varphi; x)$ polinomlar dizisinin limitidir. Bu gerçek bir sonraki teoremden kanıtlanmıştır. Böylece yeni tanımlanan operatör limit q -Stancu operatörü olarak anlam kazanır.

Teorem 3.8. $\varphi \in C[0,1]$ olmak üzere,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{q,\alpha}(\varphi; x) = S_{\infty}^{q,\alpha}(\varphi; x)$$

yakınsaması $[0,1]$ kapalı aralığında düzgündür.

İspat. Özellik 1.4.2 de ve Özellik 3.7 de belirtildiği üzere söz konusu operatörler uç nokta interpolasyon özelliğine sahip olduklarından teoremin hipotezini $x \in [0,1)$ için ispatlamak yeterlidir. φ sürekli bir fonksiyon olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi \left(\frac{[k]_q}{[n]_q} \right) = \varphi \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[k]_q}{[n]_q} \right) = \varphi \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^k}{1 - q^n} \right) = \varphi(1 - q^k) \quad (66)$$

eşitliği vardır.

İspatı gerçekleştirmek adına keyfi $\epsilon > 0$ alalım. Bu ϵ değeri için öyle bir $a \in (0,1)$ bulunabilir ki her $t \in [a, 1]$ için $|\varphi(t) - \varphi(1)| < \epsilon/3$ sağlanır. Ayrıca $1 - q^{M+1} \geq a$ eşitsizliğini sağlayan bir M pozitif tam sayısı bulunabilir. Şimdi $n > M$ ve $x \in [0,1)$ olmak üzere

$$\Delta := |S_n^{q,\alpha}(\varphi; x) - S_\infty^{q,\alpha}(\varphi; x)|$$

olarak tanımlayalım. (40) ve (64) özellikleri dikkate alınıp üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \Delta &= \left| \sum_{k=0}^n \left(\varphi \left(\frac{[k]_q}{[n]_q} \right) - \varphi(1) \right) p_{nk}^{q,\alpha}(x) - \sum_{k=0}^{\infty} \left(\varphi(1 - q^k) - \varphi(1) \right) p_{\infty k}^{q,\alpha}(x) \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=0}^M \left(\varphi \left(\frac{[k]_q}{[n]_q} \right) - \varphi(1) \right) p_{nk}^{q,\alpha}(x) - \sum_{k=0}^M \left(\varphi(1 - q^k) - \varphi(1) \right) p_{\infty k}^{q,\alpha}(x) \right| \\ &\quad + \sum_{k=M+1}^n \left| \varphi \left(\frac{[k]_q}{[n]_q} \right) - \varphi(1) \right| p_{nk}^{q,\alpha}(x) + \sum_{k=M+1}^{\infty} |\varphi(1 - q^k) - \varphi(1)| p_{\infty k}^{q,\alpha}(x) \\ &=: I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

yazılabilir.

Her $k = 0, 1, \dots, M$ için (61) ve (66) eşitliklerinden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\varphi \left(\frac{[k]_q}{[n]_q} \right) - \varphi(1) \right) p_{nk}^{q,\alpha}(x) = \left(\varphi(1 - q^k) - \varphi(1) \right) p_{\infty k}^{q,\alpha}(x)$$

yakınsamasının $[0,1]$ aralığında düzgün olduğu görülür. I_1 toplamı sonlu sayıda terim içerdiğinden yeteri kadar büyük n 'ler için $I_1 < \epsilon/3$ yazılabilir.

Her $n > k$ için $\frac{[k]_q}{[n]_q} \in (1 - q^k, 1)$ olduğundan M sayısının seçimi gereği her $k > M$

için $\left| \varphi \left(\frac{[k]_q}{[n]_q} \right) - \varphi(1) \right| < \epsilon/3$ ve $|\varphi(1 - q^k) - \varphi(1)| < \epsilon/3$ eşitsizlikleri sağlanır.

Şimdi (40) özelliği kullanılarak

$$I_2 < \frac{\epsilon}{3} \sum_{k=M+1}^n p_{nk}^{q,\alpha}(x) < \frac{\epsilon}{3}$$

ve (64) özelliği kullanılarak

$$I_3 < \frac{\epsilon}{3} \sum_{k=M+1}^{\infty} p_{\infty k}^{q,\alpha}(x) < \frac{\epsilon}{3}.$$

elde edilir. Üç durum göz önüne alındığında

$$\Delta \leq I_1 + I_2 + I_3 < \epsilon$$

bulunur. Keyfi bir ϵ için bu ifade yazıldığından $S_n^{q,\alpha}(\varphi; x)$ operatörü $S_{\infty}^{q,\alpha}(\varphi; x)$ limit operatörüne düzgün olarak yakınsar.

Teorem 3.9. $\alpha \geq 0$ olmak üzere, her $x \in [0,1]$ için

$$S_{\infty}^{q,\alpha}(e_0; x) = 1,$$

$$S_{\infty}^{q,\alpha}(e_1; x) = x,$$

$$S_{\infty}^{q,\alpha}(e_2; x) = x - \frac{qx(1-x)}{1+\alpha}$$

şeklindedir.

İspat.

i) Limit q -Stancu operatörlerinin (65) gösteriminden

$$S_{\infty}^{q,\alpha}(e_0; x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{\infty k}^{q,\alpha}(x)$$

yazılabilir. (64) özelliğinden

$$S_{\infty}^{q,\alpha}(e_0; x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{\infty k}^{q,\alpha}(x) = 1$$

elde edilir.

ii) (65) ifadesinde $\varphi(t) = e_1(t)$ alındığında,

$$S_{\infty}^{q,\alpha}(e_1; x) = \frac{\left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{\infty}}{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{\infty}} \sum_{k=0}^{\infty} (1-q^k) \frac{\left(\frac{\gamma}{x+\gamma}; q\right)_k \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)^k}{(q; q)_k}$$

$$S_{\infty}^{q,\alpha}(e_1; x) = \frac{\left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{\infty}}{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{\infty}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\gamma}{x+\gamma}; q\right)_k \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)^k}{(q; q)_k} \\ - \frac{\left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{\infty}}{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{\infty}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\gamma}{x+\gamma}; q\right)_k \left(q \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)\right)^k}{(q; q)_k}$$

bulunur. Teorem 3.9 un i) şikkından ve (23) özelliğinden

$$S_{\infty}^{q,\alpha}(e_1; x) = S_{\infty}^{q,\alpha}(e_0; x) - \frac{\left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{\infty}}{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{\infty}} \cdot \frac{\left(q \left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right); q\right)_{\infty}}{\left(q \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right); q\right)_{\infty}}$$

yazılabilir. q -Pochhammer sembolünün (16) özelliğinden

$$S_{\infty}^{q,\alpha}(e_1; x) = 1 - \frac{\left(1 - \frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)}{\left(1 - \frac{\gamma}{1+\gamma}\right)} = 1 - (1 - x) = x$$

elde edilir.

iii) (65) eşitliğinde $\varphi(t) = e_2(t)$ alındığında

$$S_{\infty}^{q,\alpha}(e_2; x) = \frac{\left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{\infty}}{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{\infty}} \sum_{k=0}^{\infty} (1 - q^k)^2 \frac{\left(\frac{\gamma}{x+\gamma}; q\right)_k \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)^k}{(q; q)_k} \\ = \frac{\left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{\infty}}{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{\infty}} \sum_{k=0}^{\infty} (1 - 2q^k + q^{2k}) \frac{\left(\frac{\gamma}{x+\gamma}; q\right)_k \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)^k}{(q; q)_k} \\ = \frac{\left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{\infty}}{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{\infty}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\gamma}{x+\gamma}; q\right)_k \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)^k}{(q; q)_k} \\ - 2 \frac{\left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{\infty}}{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{\infty}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\gamma}{x+\gamma}; q\right)_k \left(q \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)\right)^k}{(q; q)_k} \\ + \frac{\left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{\infty}}{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{\infty}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\gamma}{x+\gamma}; q\right)_k \left(q^2 \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)\right)^k}{(q; q)_k}$$

şeklinde yazılabilir. (23) özelliği kullanıldığında

$$S_{\infty}^{q,\alpha}(e_2; x) = 1 - 2 \frac{\left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{\infty}}{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{\infty}} \cdot \frac{\left(q\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right); q\right)_{\infty}}{\left(q\left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right); q\right)_{\infty}} \\ + \frac{\left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{\infty}}{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{\infty}} \cdot \frac{\left(q^2\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right); q\right)_{\infty}}{\left(q^2\left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right); q\right)_{\infty}}$$

elde edilir. Buradan (16) özelliği yardımıyla

$$S_{\infty}^{q,\alpha}(e_2; x) = 1 - 2 \frac{\left(1 - \frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)}{\left(1 - \frac{\gamma}{1+\gamma}\right)} + \frac{\left(1 - \frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right) \left(1 - q\left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)\right)}{\left(1 - \frac{\gamma}{1+\gamma}\right) \left(1 - q\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)\right)} \\ = 1 - 2(1-x) + \frac{(1-x)(1 + (1-q)\gamma - qx)}{1 + (1-q)\gamma}$$

bulunur. Son olarak $\gamma = \alpha/(1-q)$ olduğundan

$$S_{\infty}^{q,\alpha}(e_2; x) = x - \frac{qx(1-x)}{1+\alpha}$$

ifadesine ulaşılır.

Sonuç 3.10. Teorem 3.9 ile verilen momentler dikkate alındığında $\alpha = 0$ için limit q -Bernstein operatörünün momentleri elde edilir (Il'inskii ve Ostrovska, 2002).

Şu ana kadar limit q -Stancu operatörünün ilk üç momentini verdik. Genel olarak tüm momentler aşağıdaki teoremden ifade edilmiştir.

Teorem 3.11. $\alpha \geq 0$ olmak üzere, her $x \in [0,1]$ için

$$S_{\infty}^{q,\alpha}(e_m; x) = \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} (-1)^s \frac{\left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q\right)_s}{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q\right)_s}, \quad m = 0, 1, \dots \quad (67)$$

biçimindedir.

İspat. Limit q -Stancu operatörlerinin (65) tanımından

$$S_{\infty}^{q,\alpha}(e_m; x) = \frac{\left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{\infty}}{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{\infty}} \sum_{k=0}^{\infty} (1-q^k)^m \frac{\left(\frac{\gamma}{x+\gamma}; q\right)_k \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)^k}{(q; q)_k}$$

yazılabilir. Binom açılımı kullanılarak

$$\begin{aligned} S_{\infty}^{q,\alpha}(e_m; x) &= \frac{\left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{\infty}}{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{\infty}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} (-1)^s q^{ks} \frac{\left(\frac{\gamma}{x+\gamma}; q\right)_k \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)^k}{(q; q)_k} \\ &= \frac{\left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{\infty}}{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{\infty}} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} (-1)^s \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\gamma}{x+\gamma}; q\right)_k \left(q^s \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)\right)^k}{(q; q)_k} \end{aligned}$$

elde edilir. (23) bağıntısından ve q -Pochhammer sembolünün (16) özelliğinden yararlanılarak

$$\begin{aligned} S_{\infty}^{q,\alpha}(e_m; x) &= \frac{\left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{\infty}}{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q\right)_{\infty}} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} (-1)^s \frac{\left(q^s \left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right); q\right)_{\infty}}{\left(q^s \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right); q\right)_{\infty}} \\ &= \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} (-1)^s \frac{\left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q\right)_s}{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q\right)_s} \end{aligned}$$

ifadesine ulaşılır. Sonuç olarak, istenen elde edilmiş olur.

Teorem 3.12. $\alpha \geq 0$ olmak üzere, her $x \in [0,1]$ için

$$S_{\infty}^{q,\alpha}(e_{m+1}; x) = S_{\infty}^{q,\alpha}(e_m; x) - (1-x) S_{\infty}^{q, \frac{q\alpha}{1+\alpha}}\left(e_m; \frac{qx}{1+\alpha}\right)$$

yineleme bağıntısı sağlanır.

İspat. (67) ifadesinden

$$S_{\infty}^{q,\alpha}(e_{m+1}; x) = \sum_{s=0}^{m+1} \binom{m+1}{s} (-1)^s \frac{\left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q\right)_s}{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q\right)_s}$$

yazılabilir. Pascal kuralından bilindiği üzere $\binom{m+1}{s} = \binom{m}{s} + \binom{m}{s-1}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
S_{\infty}^{q,\alpha}(e_{m+1}; x) &= \sum_{s=0}^{m+1} \left[\binom{m}{s} + \binom{m}{s-1} \right] (-1)^s \frac{\left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q \right)_s}{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q \right)_s} \\
&= \sum_{s=0}^{m+1} \binom{m}{s} (-1)^s \frac{\left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q \right)_s}{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q \right)_s} + \sum_{s=0}^{m+1} \binom{m}{s-1} (-1)^s \frac{\left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q \right)_s}{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q \right)_s}
\end{aligned}$$

elde edilir. İlk toplamda $\binom{m}{m+1} = 0$ ve ikinci toplamda $\binom{m}{-1} = 0$ olduğundan ilk toplam $s = 0$ dan $s = m$ 'ye olacak şekilde göz önüne alındığında, ikinci toplam ise $s = 1$ 'den başlatılıp s yerine $s + 1$ yazıldığında

$$S_{\infty}^{q,\alpha}(e_{m+1}; x) = \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} (-1)^s \frac{\left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q \right)_s}{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q \right)_s} + \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} (-1)^{s+1} \frac{\left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}; q \right)_{s+1}}{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}; q \right)_{s+1}}$$

bulunur. Teorem 3.11 dikkate alındığında

$$S_{\infty}^{q,\alpha}(e_{m+1}; x) = S_{\infty}^{q,\alpha}(e_m; x) - \frac{\left(1 - \frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right)}{\left(1 - \frac{\gamma}{1+\gamma}\right)} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} (-1)^s \frac{\left(q \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right); q\right)_s}{\left(q \left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right); q\right)_s} \quad (68)$$

şeklinde düzenlenebilir. Son olarak (67) ifadesinde α yerine $q\alpha/(1+\alpha)$ ve x yerine $qx/(1+\alpha)$ yazıldığında

$$S_{\infty}^{q, \frac{q\alpha}{1+\alpha}}\left(e_m; \frac{qx}{1+\alpha}\right) = \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} (-1)^s \frac{\left(q \left(\frac{x+\gamma}{1+\gamma}\right); q\right)_s}{\left(q \left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right); q\right)_s}$$

elde edilir. Buna göre bulunan ifade (68) ile birlikte değerlendirildiğinde

$$S_{\infty}^{q,\alpha}(e_{m+1}; x) = S_{\infty}^{q,\alpha}(e_m; x) - (1-x) S_{\infty}^{q, \frac{q\alpha}{1+\alpha}}\left(e_m; \frac{qx}{1+\alpha}\right)$$

yineleme bağıntısına ulaşılır. Bu da bizden istenendir.

Sonuç 3.13. (55) ile verilen yineleme bağıntısında $n \rightarrow \infty$ için limit alındığında limit q -Stancu operatörü

$$S_{\infty}^{q,\alpha}(e_{m+1}; x) = x \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} q^s (1-q)^{m-s} S_{\infty}^{q, \frac{q\alpha}{1+\alpha}}\left(e_s; \frac{x+\alpha}{1+\alpha}\right)$$

eşitliğini sağlar. Bu eşitlikte $\alpha = 0$ alındığında limit q -Bernstein operatörünün sağladığı (37) numaralı bağıntıya ulaşılır.

Sonuç 3.14. Limit q -Stancu operatörleri polinomlar üzerinde derece azaltıcı özelliğe sahiptir. Buna göre P_m derecesi m olan bir polinom olmak üzere $S_{\infty}^{q,\alpha}(P_m; x)$ derecesi m olan bir polinomdur.



4. SONUÇ

Yaklaşım teorisinde önemli bir yere sahip olan lineer pozitif operatörlerin, q -kalkülüs çerçevesinde ele alınması, hem klasik sonuçların q parametresine bağlı olarak yeniden değerlendirilmesine hem de bu alanda yeni problemlerin keşfedilmesine olanak sağlamıştır. Bu tez çalışmasında Lupaş ve Phillips'in q -Bernstein operatörleri ile başlattığı lineer pozitif operatörlerin q -genellemeleri doğrultusunda, Nowak tarafından tanımlanan q -Stancu operatörleri ele alınmıştır. Söz konusu operatörlerin q -Pochhammer yardımıyla farklı bir gösterimi elde edilmiş ve bu gösterim ışığında bu operatörlerin literatürde bilinen bazı özellikleri tekrar ispatlanmış ve buna ek olarak operatörün sağladığı yeni bulgular da ortaya konmuştur.

Tezin özgün katkılarını oluşturan bölümde, q -Stancu operatörleri için yeni yineleme bağıntıları elde edilmiş, bu bağıntılardan yararlanılarak operatörlerin momentleri daha genel bir biçimde ifade edilmiştir. Ayrıca q -Stancu operatörlerinin limit hali tanımlanmış ve $0 < q < 1$ durumunda q -Stancu operatörlerinin limit operatöre düzgün yakınsadığı ispat edilmiştir. Bunlara ek olarak limit operatörün momentleri hesaplanmış ve bu momentlerin sağladığı yeni özellikler ispatlanmıştır.

Bu çalışma kapsamında ortaya konan yeni gösterim, bu operatörlerin farklı yönlerinin incelenmesine, bu konuyla ilgili literatürde yer alan çeşitli sonuçların genişletilmesine olanak tanımakta ve ileride yapılacak olan araştırmalar için de bir temel oluşturmaktadır.

KAYNAKÇA

- Acu, A. M., & Radu, V. A. (2019). About the iterates of some operators depending on a parameter and preserving the affine functions. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Sciences*, 43, 265-271.
- Agratini, O. (2010). On a q -analogue of Stancu operators. *Central European Journal of Mathematics*, 8, 191-198.
- Agratini, O. (2011). Statistical convergence of a non-positive approximation process. *Chaos, Solitons & Fractals*, 44(11), 977-981.
- Agrawal, P. N., & Gupta, P. (2018). q -Lupaş Kantorovich operators based on Pólya distribution. *Annali dell'Università di Ferrara*, 64(1), 1-23.
- Andrews, G. E., Askey, R., & Roy, R. (1999). *Special functions*. Cambridge University Press.
- Aral, A., Gupta, V., & Agarwal, R. P. (2013). *Applications of q -Calculus in Operator Theory*. Springer.
- Atkinson, K. E. (1989). *An introduction to numerical analysis* (2nd ed.). Wiley.
- Bernstein, S. N. (1912). Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités. *Communications de la Société Mathématique de Kharkow*, 13, 1-2.
- Birou, M. M. (2019). Quantitative results for the convergence of the iterates of some King type operators. *Studia Universitatis Babeş-Bolyai, Mathematica*, 64(2), 173-182.
- Davis, P. J. (1975). *Interpolation and approximation*. Dover Publications.
- Durrett, R. (2019). *Probability: Theory and examples* (5th ed.). Cambridge University Press.
- Erençin, A., Başcanbaz-Tunca, G., & Taşdelen, F. (2012). Kantorovich type q -Bernstein-Stancu operators. *Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica*, 57(1), 89-105.
- Erençin, A., Başcanbaz Tunca, G., & Taşdelen Yeşildal, F. (2014). Some preservation properties of MKZ-Stancu type operators. *Sarajevo Journal of Mathematics*, 10(1), 93-102.
- Farin, G. (2002). *Curves and surfaces for CAGD: A practical guide* (5th ed.). Academic Press.

- Fejér, L. (1900). Sur les fonctions bornées et intégrables. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 131, 984-987.
- Finta, Z. (2016a). Approximation by Stancu type q -operators. *Annali dell'Università di Ferrara*, 62, 217-230.
- Finta, Z. (2016b). A generalization of the Lupaş q -analogue of the Bernstein operator. *Journal of Numerical Analysis and Approximation Theory*, 45(2), 147-162.
- Gasper, G. (1997). Elementary derivations of summation and transformation formulas for q -series. *Fields Institute Communications*, 14, 55-70.
- Gupta, V. (2008). Some approximation properties of q -Durrmeyer operators. *Applied Mathematics and Computation*, 197(1), 172-178.
- Gupta, V., & Wang, H. (2008). The rate of convergence of q -Durrmeyer operators for $0 < q < 1$. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 31(16), 1946-1955.
- Gupta, V., Rassias, T. M., & Sharma, H. (2016). q -Durrmeyer operators based on Pólya distribution. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 9(4), 1497-1504.
- Il'inskii, A., & Ostrovska, S. (2002). Convergence of generalized Bernstein polynomials. *Journal of Approximation Theory*, 116(1), 100-112.
- Jiang, Y., & Li, J. (2009). The rate of convergence of q -Bernstein-Stancu polynomials. *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, 7(6), 773-779.
- Kac, V., & Cheung, P. (2001). *Quantum calculus*. Springer-Verlag.
- Korn, G., & Korn, T. (2000). *Mathematical handbook for scientists and engineers*. Dover Publications.
- Korovkin, P. P. (1953). Convergence of linear positive operators in the spaces of continuous functions (Russian). *Doklady Akademii Nauk SSSR (N.S.)*.
- Landau, E. (1908). Über die Approximation einer stetigen Funktion. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 25, 337-345.
- Lebesgue, H. (1898). Sur l'approximation des fonctions. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 22, 278-287.
- Lorentz, G. G. (1986). *Approximation of functions* (2nd ed.). Chelsea Publishing.
- Lupaş, A. (1987). A q -analogue of the Bernstein operator. In *Seminar on numerical and statistical calculus* (Vol. 9, pp. 85-92). University of Cluj-Napoca.

- Mahmudov, N. I. (2011). Higher order limit q -Bernstein operators. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 34(13), 1618-1626.
- Meyer, P. L. (1970). *Introduction to probability and statistics*. Springer-Verlag.
- Miclăuș, D. (2012). The revision of some results for Bernstein-Stancu type operators. *Carpathian Journal of Mathematics*, 28(2), 289-300.
- Neer, T., Agrawal, P. N., & Araci, S. (2017). Stancu-Durrmeyer type operators based on q -integers. *Applied Mathematics & Information Sciences*, 11(3), Article 17.
- Neer, T., Acu, A. M., & Agrawal, P. (2018). Approximation of functions by bivariate q -Stancu-Durrmeyer type operators. *Mathematical Communications*, 23(2), 161-180.
- Nowak, G. (2009). Approximation properties for generalized q -Bernstein polynomials. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 350(1), 50-55.
- Nowak, G. (2011). A de Casteljau algorithm for q -Bernstein-Stancu polynomials. *Abstract and Applied Analysis*, 2011, 609431, 13 pages.
- Nowak, G., & Gupta, V. (2011). The rate of pointwise approximation of positive linear operators based on q -integers. *Ukrainian Mathematical Journal*, 63, 403-415.
- Nowak, A. S., & Nowak, G. (2024). On Stancu modification of (p, q) -Bernstein polynomials. *Dolomites Research Notes on Approximation*, 17(1), 82-87.
- Oruç, H., & Phillips, G. M. (1999). A generalization of Bernstein polynomials. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 42(2), 403-413.
- Oruç, H., & Tuncer, N. (2002). On the convergence and iterates of q -Bernstein polynomials. *Journal of Approximation Theory*, 117, 301-313.
- Ostrovska, S. (2003). q -Bernstein polynomials and their iterates. *Journal of Approximation Theory*, 123(2), 232-255.
- Ostrovska, S. (2004). On the limit q -Bernstein operator. *Mathematica Balkanica, New Series*, 18, 165-172.
- Ostrovska, S. (2006). On the Lupaș q -analogue of the Bernstein operator. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 36(5), 1615-1629.
- Ostrovska, S. (2011). On the Lupaș q -transform. *Computers & Mathematics with Applications*, 61(3), 527-532.
- Ostrovska, S., & Turan, M. (2014). On the eigenvectors of the q -Bernstein operators. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 37(4), 562-570.

- Ostrovskaya, S., Özban, A. Y., & Turan, M. (2015). How do singularities of functions affect the convergence of q -Bernstein polynomials? *Journal of Mathematical Inequalities*, 9(1), 121-136.
- Petrone, S. (1999). Random Bernstein polynomials. *Scandinavian Journal of Statistics*, 26(3), 373-393.
- Phillips, G. M. (1997). Bernstein polynomials based on the q -integers. *Annals of Numerical Mathematics*, 4, 511-518.
- Phillips, G. M. (2003). *Interpolation and approximation by polynomials* (CMS Books in Mathematics). Springer-Verlag.
- Rivlin, T. J. (1981). *An introduction to the approximation of functions*. Dover Publications.
- Sabancıgil, P. (2023). Genuine q -Stancu-Bernstein-Durrmeyer operators. *Symmetry*, 15(2), 437.
- Sabancıgil Özder, P. (2024). Local approximation properties for the new type q -Stancu-Durrmeyer operators. *Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 7(1), 310-319.
- Stancu, D. D. (1968). Approximation of functions by a new class of linear polynomial operators. *Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées*, 13(8), 1173-1194.
- Turan, M. (2014). The truncated-Bernstein polynomials in the case $q > 1$. *Abstract and Applied Analysis*, 2014, 126319.
- Videnskii, V. S. (2004). On q -Bernstein polynomials and related positive linear operators. In *Problems of Modern Mathematics and Mathematical Education, Herten Readings* (pp. 118-126). St. Petersburg. (in Russian).
- Videnskii, V. S. (2005). On some classes of q -parametric positive operators. *Operator Theory: Advances and Applications*, 158, 213-222.
- Videnskii, V. S. (2008). A remark on the rational linear operators considered by A. Lupas. In *Some current problems in modern mathematics and education in mathematics* (pp. 134-146). Ross. Gos. Ped. Univ., St. Petersburg. (In Russian)
- Wang, H. (2005). Korovkin-type theorem and application. *Journal of Approximation Theory*, 132(2), 258-264.
- Wang, H. (2007). Properties of convergence for the q -Meyer-König and Zeller operators. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 335(2), 1360-1373.

- Wang, H., & Ostrovska, S. (2010). The norm estimates for the q -Bernstein operator in the case $q > 1$. *Mathematics of Computation*, 79(269), 353-363.
- Wang, Y., & Zhou, Y. (2013). Iterates properties for q -Bernstein-Stancu operators. *International Journal of Modeling and Optimization*, 3(4), 362-368.
- Wang, Y., & Zhou, Y. (2014). Shape preserving properties for q -Bernstein-Stancu operators. *Journal of Mathematics*, 2014, Article ID 603694.
- Weierstrass, K. (1885). Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen einer reellen Veränderlichen. *Sitzungsberichte der Akademie zu Berlin*, 633-639.

