

**YÜKSEK MERTEBEDEN BİR KISMI TÜREVLİ
DİFERANSİYEL DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİNİN
NİTELİKSEL ANALİZİ**

HACİRE GÜNEŞ

**ARALIK 2024
DİYARBAKIR**

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**YÜKSEK MERTEBEDEN BİR KISMI TÜREVLİ
DİFERANSİYEL DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİNİN
NİTELİKSEL ANALİZİ**

HACİRE GÜNEŞ

DİCLE ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM-ÖĞRETİM VE SINAV
YÖNETMELİĞİNİN BİR PARÇASI OLARAK
MATEMATİK ANA BİLİM DALINDA
YÜKSEK LİSANS TEZİ
OLARAK HAZIRLANMIŞTIR

ARALIK 2024
DİYARBAKIR

YÜKSEK MERTEBEDEN BİR KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİNİN NİTELİKSEL ANALİZİ

Hacire GÜNEŞ tarafından Dicle Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin bir parçası olarak hazırlanan bu çalışma, aşağıda bilgileri yazılı jüri üyeleri tarafından değerlendirilerek **Matematik Ana Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Neslihan DALKILIÇ
Müdür, **Fen Bilimleri Enstitüsü**

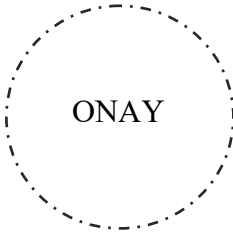
Prof. Dr. Erhan PİŞKİN
Danışman, **Matematik Bölümü**

Sınav Jürisi:

Prof. Dr. Erhan PİŞKİN^(***)
Matematik Bölümü, Dicle Üniversitesi

Doç. Dr. Ramazan YAZGAN
Matematik Bölümü, Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi

Doç. Dr. Faruk DÜŞÜNCELİ
Matematik Bölümü, Mardin Artuklu Üniversitesi



Savunma Tarihi: 12/ 12 / 2024



Canım Aileme...



Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tez çalışmasında yer alan tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu beyan ederim. Ayrıca, bahse konu bu kural ve ilkelerin gerektirdiği üzere, bu çalışmada özgün olmayan tüm bilimsel içerikleri kurallara uygun biçimde alıntılıyıp kaynak gösterdiğimi beyan ederim. Beyanıyla çelişen herhangi bir delil bulunduğu takdirde tüm sorumluluğu üstleneceğimi kabul ederim.

Ad, Soyad: Hacire GÜNEŞ

İmza:.....

TEŞEKKÜR

Öncelikle yüksek lisans eğitimim boyunca her türlü desteğini esirgemeyen, sabrıyla, tecrübe ve rehberlikleriyle yanımda olan çok değerli danışmanım Prof. Dr. Erhan PİŞKİN hocama sonsuz saygılarımı ve şükranlarımı sunarım. Daha sonra, tez yazma sürecimde desteği ile gücümü arttıran ve beni her daim motive eden çok değerli hocam ve arkadaşım Ayşe FİDAN’a teşekkürlerimi sunarım.

Bugünlere gelmemde en çok emeği geçen,her zaman bizi en iyi yerlerde görmek isteyen rahmetli babam Ömer ARIN’a, bıkmadan-usanmadan her türlü fedakarlığıyla her daim yanımda olan canım annem Emine ARIN’a ve her adımında bana destek olan, yardımlarını esirgemeyen, bana güç veren kıymetli eşim Ahmet GÜNEŞ’e, çalışırken büyük insanlarmış gibi anlayışlı olup beni rahatsız etmeyen akıllı kızlarım Rabia Dila, Beyza Afra, İnci Serra’ ya ve her aşamada beni motive eden kıymetli aileme sonsuz sevgilerimi, saygılarımı ve şükranlarımı sunarım...

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	v
İÇİNDEKİLER	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	vii
ÖZET.....	viii
ABSTRACT	ix
1. GİRİŞ	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	3
3. ÖN BİLGİLER.....	5
3.1 Yakınsaklık	6
3.2 Lebesgue Uzayı.....	7
3.3 Sobolev Uzayı	7
3.4 Bazı Önemli Eşitlikler, Eşitsizlikler ve Teoremler	8
3.5 Faedo-Galerkin Metodu.	10
3.6 Aubin-Lions Lemması.....	11
4. YÜKSEK MERTEBEDEN BİR KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI VE PATLAMASI.....	12
4.1 Giriş	12
4.2 Çözümlerin Varlığı	13
4.3 Çözümlerin Patlaması.....	16
5.SONUÇLAR VE ÖNERİLER	26
KAYNAKLAR	27
ÖZGEÇMİŞ	31

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

Simge	Açıklama
R^n	n -boyutlu Euclid Uzayı
Ω	R^n de sınırlı bir bölge
$\partial\Omega$	Ω bölgesinin sınırı
$C(\Omega)$	Süreklı Fonksiyonlar Uzayı
$L^p(\Omega)$	p . mertebeden Lebesgue İntegrallenebilir Fonksiyonlar Uzayı
$W^{m,p}(\Omega)$	Sobolev Uzayı
$H^m(\Omega)$	Hilbert Uzayı
∇	Nabla operatörü (Gradyent)
Δ	Laplace operatörü

ÖZET

YÜKSEK MERTEBEDEN BİR KISMI TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİNİN NİTELİKSEL ANALİZİ

GÜNEŞ, Hacire

Yüksek Lisans, Matematik Bölümü

Danışman: Prof. Dr. Erhan PİŞKİN

Aralık 2024, 41 sayfa

Yüksek mertebeli kısmi türevli diferansiyel denklemler, matematiksel fizik ve mühendisliğin gelişiminde önemli bir rol oynamaktadır. Bu denklemler, malzeme bilimi, akışkanlar dinamiği ve dalga yayılımı gibi çeşitli alanlarda yaygındır. Bu denklemlerin incelenmesi, 18. yüzyılda Bernoulli kardeşler ve Euler'in titreşen teller ve kirişler üzerindeki çalışmalarıyla başlamış ve sonraki matematikçiler bu denklemlerin akışkanlar mekaniği ve dalga teorisindeki uygulamalarına önemli katkılar sağlamıştır. Modern araştırmalar, viskoelastik ve akıllı malzemeler gibi alanlarda yüksek mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin uygulamalarına odaklanmaktadır. Bu denklemlerin anlaşılması ve çözülmesi, hem teorik matematik açısından hem de mühendislik uygulamaları açısından kritik öneme sahiptir.

Bu tezin temel amacı, uygun başlangıç ve sınır koşullarına sahip yüksek mertebeden bir kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümlerinin varlığını ve patlamasını incelemektir. Önceki çalışmalarda benzer problemleri ele alarak çözümlerin global varlığı, tekliği ve kararlılığı hakkında çalışmışlardır. Bu çalışma, yüksek mertebeden bir kısmi türevli diferansiyel denklemini inceleyerek ve patlama koşullarını genelleştirilmiş konvaylık yöntemi kullanarak ele alınmıştır.

Bu tezin ilk bölümünde uygulamalı bilimler ve mühendislik alanlarında ortaya çıkan yüksek mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin tanımına ve çözümlerin global varlığı ve patlaması kavramlarına basit bir adi diferansiyel denklem örneği üzerinden kısaca değinilmiştir.

İkinci bölümde yüksek mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerle ilgili günümüze kadar yapılan çalışmalar tarihi gelişimi ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde tez boyunca kullanılacak temel tanım, lemma, teorem, gerekli uzaylar ve eşitsizlikler hakkında bilgi verilmiştir.

Dördüncü bölüm tezin esas kısmı olup verilen başlangıç sınır değeri probleminin zayıf çözümlerinin global varlığını ve çözümlerin patlamasına yol açan koşullar araştırılmıştır.

Beşinci bölüm ise tezin sonuçları ve gelecekteki çalışmalar için önerileri içermektedir.

Anahtar Kelimeler:, Global varlık, Patlama, Yüksek mertebeden diferansiyel denklemler, Zayıf çözümler

ABSTRACT

QUALITATIVE ANALYSIS OF THE SOLUTIONS OF A HIGH-ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION

GÜNEŞ, Hacire

Master of Science in the Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Erhan PİŞKİN

December 2024, 41 pages

The higher-order partial differential equations play a significant role in the development of mathematical physics and engineering. These equations are prevalent in various fields such as materials science, fluid dynamics, and wave propagation. The study of these equations began in the 18th century with the works of the Bernoulli brothers and Euler on vibrating strings and beams. Subsequent mathematicians have made significant contributions to the applications of these equations in fluid mechanics and wave theory. Modern research focuses on the applications of high-order partial differential equations in areas such as viscoelastic and smart materials. Understanding and solving these equations is critically important both from a theoretical mathematics perspective and for engineering applications.

The primary aim of this thesis is to examine the existence and blow-up of solutions for a high-order partial differential equation with appropriate initial and boundary conditions. Previous studies have investigated similar problems, focusing on the global existence, uniqueness, and stability of solutions. This work addresses a high-order partial differential equation and generalizes blow-up conditions using the method of generalized concavity.

In the first chapter of the thesis, the definition of high-order partial differential equations emerging in applied sciences and engineering fields is briefly introduced, along with the concepts of global existence and blow-up of solutions, illustrated using a simple ordinary differential equation example.

The second chapter reviews the historical development of research conducted on high-order partial differential equations up to the present day.

The third chapter provides information on fundamental definitions, lemmas, theorems, necessary function spaces, and inequalities that will be used throughout the thesis.

The fourth chapter forms the core of the thesis, where the global existence of weak solutions to the given initial-boundary value problem is investigated, along with the conditions leading to blow-up.

The fifth chapter concludes the thesis with results and offers suggestions for future studies.

Keywords: Blow-up, Global existence, Higher-order differential equations, Weak solutions

1. GİRİŞ

Yüksek mertebeli kısmi türevli diferansiyel denklemler, matematiksel fizik ve mühendisliğin gelişiminde önemli bir yere sahiptir. Bu denklemlere başta malzeme bilimi, akışkanlar dinamiği ve dalga yayılımı olmak üzere bir çok alanda karşılaşılmaktadır.

Bu çalışmada

$$u_{tt} + u_{xxxxt} - u_{xxxxx} - u_{xxxxxt} = f(u_{xx})_{xx}$$

yüksek mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemini incelenecektir. Bu tez çalışmasında bu yüksek mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümlerinin varlığı ve patlamasını inceleyeceğiz. Akışkanlar dinamiği, sürekli ortamlar mekaniği ve malzeme bilimi gibi alanlarda sıkça karşılaşılan bir denklemdir.

Şimdi çözümlerin varlığı ve patlaması kavramlarını, basit bir adi diferansiyel denklem örneği üzerinden ifade edelim (Pişkin, 2019): $y = y(x)$ ve $p \in R$ olmak üzere

$$\begin{cases} y' = y^p, \\ y(4) = 1 \end{cases}$$

problemini ele alalım:

$$f(t, y) = y^p$$

fonksiyonu $(4, 1)$ noktasını içeren

$$D = \{(t, y) : |t - 4| \leq a, |y - 1| \leq b\}$$

bölgesinde sınırlı ve sürekli olduğundan verilen problemin en az bir çözümü vardır.

Ayrıca

$$\frac{\partial f(t, y)}{\partial y} = py^{p-1}$$

türev fonksiyonu D bölgesinde sürekli ve sınırlı (Lipschitz koşulu da sağlanır) olduğundan bu çözüm tektir. Gerçekten verilen denklem değişkenlerine ayrılırsa

$$\begin{aligned} y' &= y^p, \\ \frac{dy}{dt} &= y^p, \\ \int \frac{dy}{y^p} &= \int dt \end{aligned}$$

olur. Burada p nin durumlarına göre integral alalım.

$p = 1$ ise

$$\ln y = t + c$$

$y(4) = 1$ koşulundan

$$y = e^{t-4}$$

olur. Görüldüğü gibi bu çözüm aynı zamanda globaldir.

$p \neq 1$ ise

$$\frac{y^{-p+1}}{-p+1} = t + c$$

$y(4) = 1$ koşulundan

$$y^{-p+1} = t(1-p) - (4p-3)$$

olur.

$p < 1$ ise $-p+1 > 0$ olacağından

$$y^{-p+1} = t(1-p) - (4p-3)$$

çözümü global,

$p > 1$ ise $-p+1 < 0$ olacağından

$$y^{p-1} = \frac{1}{t(1-p) - (4p-3)}$$

çözümü global değildir. Burada

$$\lim_{t \rightarrow \left(\frac{4p-3}{1-p}\right)^-} \left[\frac{1}{t(1-p) - (4p-3)} \right] = \infty$$

olduğundan blow up olur.

Sonuç olarak

$$y' = y^p$$

denkleminde

$$\begin{cases} p \leq 1 \text{ ise global çözüm} \\ p > 1 \text{ ise patlama (blow up)} \end{cases}$$

olur.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu tezde, yüksek mertebeden kısmi türevli

$$u_{tt} + u_{xxxxt} - u_{xxxxx} - u_{xxxxxt} = f(u_{xx})_{xx}$$

başlangıç sınır değer probleminin zayıf çözümlerinin global varlığını ve çözümlerin patlamasını çalışacağız.

Şimdi daha önce yapılmış bazı çalışmaları verelim:

Daripa (2006)

$$u_{tt} - u_{xx} - \alpha (u^2)_{xx} \pm \alpha u_{xxx} - \varepsilon^2 \alpha u_{xxxxx} = 0$$

sığ su dalgalarının çift yönde yayılmasını simüle eden altıncı mertebeden Boussinesq denklemini elde etti.

Song ve Yang (2010)

$$u_{tt} + k_1 u_{xxx} + k_2 u_{xxxxt} = g(u_{xx})_{xx} \quad (2.1)$$

kiriş denkleminin global çözümlerinin varlığını ispatladılar.

Esfahani vd. (2012)

$$u_{tt} = u_{xx} + \beta u_{xxx} + u_{xxxxx} + (|u|^\alpha u)_{xx}$$

genelleştirilmiş altıncı mertebeden Boussinesq denkleminin çözümlerinin lokal varlığını ve iyi konulmuşluğunu ispatladılar.

Pişkin (2013)

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xtt} - u_{xxxxx} - k u_{xtt} = f(u)_{xx}$$

denkleminin çözümlerinin patlamasını genelleştirilmiş konkavlık metodunu kullanarak inceledi.

Polat ve Pişkin (2015)

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xtt} - u_{xxxxx} - \alpha u_{xtt} = f(u)_{xx}$$

denkleminin çözümlerinin varlığı ve azalmasını çalıştılar.

Wang (2017)

$$u_{tt} - u_{xxtt} - u_{xx} + \beta u_{xxxx} - u_{xxxxx} - \gamma u_{xxt} = (f(u))_{xx}$$

denkleminde global çözümlerin varlığını ve asimptotik davranışını inceledi.

Yu vd.(2018)

$$u_{tt} - u_{xxt} + u_{xxxx} - u_{xxxxt} = g(u_{xx})_{xx}$$

şeklinde ifade edilen problemin zayıf çözümlerinin global varlığını ve çözümlerinin patlamasını incelemiştir.

Pişkin ve İrkıl (2019)

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} + u_{xxxxt} + u_{xxxx} + u_{xxxxx} + \left(u_x \log |u_x|^k \right)_x = 0$$

altıncı mertebeden logaritmik Boussinesq denkleminin global varlığı ve patlamasını çalıştılar.

3. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, önce fonksiyonel analiz ve diferansiyel denklemler ile ilgili bazı önemli tanımlar verilecek, sonrasında Lebesgue uzayı, Sobolev uzayı ve bazı önemli eşitlikler ve eşitsizliklere değinilecektir (Adams ve Fournier, 2003; Brezis, 2011; Pişkin, 2013; Pişkin, 2017).

3.1 Yakınsaklık

Tanım 3.1.1 $(V, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir (a_n) dizisini ele alalım. Her $\varepsilon > 0$ için $\forall n, m \geq N_\varepsilon$ olduğunda

$$\|a_n - a_m\| < \varepsilon$$

olacak şekilde ε na bağlı N_ε gibi en az bir doğal sayı varsa (a_n) dizisine *Cauchy dizisi* denir.

Tanım 3.1.2 $(V, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir (a_n) dizisini ele alalım.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n - a\| = 0$$

ifadesini sağlayan bir $a \in V$ mevcutsa (a_n) dizisi yakınsak bir dizi olarak isimlendirilir ve $a_n \rightarrow a$ şeklinde yazılır.

Tanım 3.1.3 V bir normlu uzay olsun. Bu uzaydaki her Cauchy dizisi V nin bir elemanına yakınsıyorsa bu uzaya tam uzay adı verilir. $(V, \|\cdot\|)$ bir tam uzay ise buna *Banach uzayı* denir.

Tanım 3.1.4 V bir vektör uzayı olsun. V üzerinde $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ şeklinde iki norm tanımlansın. $K > 0, L > 0$ pozitif sabitleri için

$$K \|a\|_1 \leq \|a\|_2 \leq L \|a\|_1$$

eşitsizliği V uzayındaki her bir a noktası için geçerli ise, $\|\cdot\|_1$ ile $\|\cdot\|_2$ normları *denk normlar* olarak isimlendirilir.

Tanım 3.1.5 Her Cauchy dizisi, iç çarpım uzayındaki bir öğeye yakınsak ise bu uzay *Hilbert uzayı* olarak isimlendirilir.

Tanım 3.1.6 Bir V normlu uzayı üzerinde bulunan tüm sınırlı lineer fonksiyonellerin kümesi V nin *dual uzayını* teşkil eder. V' veya V^* ile gösterilen bu uzay

$$\|f\|_{V'} = \sup_{a \in V, a \neq 0} \frac{|f(a)|}{\|a\|_V} < \infty$$

normu ile bir Banach uzayı teşkil eder.

Tanım 3.1.7 V normlu uzayına ait bir (a_n) dizisi için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n - a\|_V = 0$$

eşitliğini sağlayan bir $a \in V$ varsa (a_n) dizisi *güçlü yakınsak* dizi olarak adlandırılır ve $a_n \rightarrow a$ şeklinde yazılır.

Tanım 3.1.8 V normlu uzayındaki bir (a_n) dizisi için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \rightarrow f(a), \quad \forall f \in V'$$

sağlayan bir $a \in V$ varsa (a_n) *zayıf yakınsak dizi* olarak isimlendirilir ve $a_n \rightharpoonup a$ veya $a_n \xrightarrow{z} a$ şeklinde yazılır.

Tanım 3.1.9

(a) V normlu uzayından seçilen sınırlı lineer fonksiyonellerin bir dizisi (f_n) olmak üzere

$$\|f_n - f\| \rightarrow 0$$

sağlayan bir $f \in V'$ varsa (f_n) dizisi *güçlü yakınsak* olarak adlandırılır ve $f_n \rightarrow f$ ile gösterilir.

(b) Her $a \in V$ için

$$f_n(a) \rightarrow f(a)$$

sağlayan bir $f \in V'$ mevcutsa (f_n) dizisine *zayıf* yakınsak dizi* adı verilir ve $f_n \xrightarrow{z^*} f$ şeklinde yazılır.

3.2 Lebesgue Uzayı ($L^p(\Omega)$)

Tanım 3.2.1 R^n de bir Ω bölgesi ve $1 \leq p < \infty$ için Ω bölgesinde tanımlanmış ölçülebilir tüm u fonksiyonlarının sınıfı

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty$$

koşulunu sağlıyorsa $L^p(\Omega)$ uzayı adı verilir. Böylece, bu uzay bir vektör uzayıdır. Ayrıca, $1 \leq p < \infty$ ise bu uzay

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

normuyla birlikte bir Banach uzayı olur.

Teorem 3.2.2 (Lebesgue baskın yakınsaklık teoremi) h , Ω bölgesi üzerinde integralenebilir fonksiyon ve $\{g_n\}$, Ω bölgesi üzerinde $|g_n| \leq h$ olacak şekilde ölçülebilir fonksiyonlar dizisi olsun. Hemen hemen her yerde $g = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$ ise

$$\int_{\Omega} g dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n dx$$

dir.

Tanım 3.2.3 V_1 ve V_2 normlu uzayları için, eğer

- (i) V_1 uzayının tüm elemanları V_2 uzayında ise ve
- (ii) α dan bağımsız olan bir β sabiti ve her $a \in V_1$ için

$$\|a\|_{V_2} \leq \beta \|a\|_{V_1}$$

oluyorsa " V_1 uzayı V_2 uzayına gömülür" şeklinde ifade edilir ve $V_1 \hookrightarrow V_2$ olarak yazılır.

3.3 Sobolev Uzayı ($W^{m,p}(\Omega)$)

Tanım 3.3.1 $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ olsun. Verilmiş bir α çoklu-indisi ve her $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega} \varphi v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^\alpha \varphi dx$$

ifadesi sağlanıyorsa, $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ fonksiyonuna u fonksiyonunun α . zayıf türevi denir. v fonksiyonu, u fonksiyonunun genelleştirilmiş türevi olarak da isimlendirilir ve $v = D^\alpha u$ olarak ifade edilir.

Klasik anlamda $D^\alpha u$ sürekli kısmi türevlere sahip olacak şekilde eğer u fonksiyonu yeteri kadar düzgünse, bu durumda $D^\alpha u$ aynı zamanda u fonksiyonunun zayıf kısmi türevidir deriz. Tabii ki $D^\alpha u$ klasik anlamıyla alınabileceği gibi zayıf anlamıyla da alınabilir.

Tanım 3.3.2 R^n de bir Ω bölgesi, $1 \leq p \leq \infty$ ve $m \geq 0$ şartını sağlayan bir m tamsayısı için,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

olarak tanımlanan uzay *Sobolev uzayı* diye adlandırılır. Bu uzay $1 \leq p < \infty$ için

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

ve $p = \infty$ için

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}$$

normlarıyla birlikte bir Banach uzayıdır.

$W^{m,p}(\Omega)$ uzayında $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının kapanışı $W_0^{m,p}(\Omega)$ ile gösterilir. Açıkça görülür ki $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ dır ve $C_0^\infty(\Omega)$ uzayı $L^p(\Omega)$ uzayında yoğun olduğundan $W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ dır. m herhangi bir pozitif tamsayısı iken

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

gömülmeleri geçerlidir.

3.4 Bazı Önemli Eşitlikler ve Eşitsizlikler

Lemma 3.4.1 (Cauchy eşitsizliği) $a, b \in R$ ve $\varepsilon > 0$ ise

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2} |a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |b|^2$$

eşitsizliği yazılabilir.

Lemma 3.4.2 (Young eşitsizliği) $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\varepsilon > 0$ ve $m, n \in R$ ise

$$|mn| \leq \frac{|m|^p}{p} + \frac{|n|^q}{q}$$

eşitsizliği ya da

$$|mn| \leq \varepsilon m^p + C(\varepsilon) n^q$$

eşitsizliği ifade edilebilir.

Lemma 3.4.3 (Hölder eşitsizliği) $p \geq 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, u \in L^p(\Omega)$ ve $v \in L^q(\Omega)$ ise $uv \in L^1(\Omega)$ uzayının elemanı olup

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}$$

eşitsizliği yazılabilir. Ayrıca, $p = q = 2$ olduğunda bu eşitsizliğe Cauchy-Schwarz-Bunyakowski eşitsizliği adı verilir.

Lemma 3.4.4 (Minkowski eşitsizliği) $u, v \in L^p(\Omega)$ ve $p \geq 1$ olsun. O halde

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}$$

eşitsizliği yazılabilir.

Lemma 3.4.5 (Green özdeşliği) $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ olsun. O halde

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_{\Omega} \nabla v \nabla u dx$$

şeklinde yazılabilir. Burada verilen n dışa doğru yönlendirilmiş bir birim vektördür ve $\frac{\partial u}{\partial n} = n \nabla u$ şeklindedir.

Lemma 3.4.6 (Sobolev Poincare eşitsizliği)

$$\begin{cases} 2 \leq r < \infty, & n \leq 2m, \\ 2 \leq r \leq \frac{2n}{n-2m}, & n > 2m \end{cases}$$

olsun. Bu durumda $\forall u \in H_0^m(\Omega)$ için

$$\|u\|_r \leq C \left\| (-\Delta)^{\frac{1}{2}} u \right\|$$

dir.

3.5 Faedo-Galerkin Metodu

Bu metod çözümlerin varlığının ispatında kullanılan önemli metotlardan biridir. Ayrılabilir bir V Hilbert uzayında tanımlı bir fonksiyon uzayında, bir (P) probleminin çözümlerinin varlığını bulmak isteyelim. Bu (P) probleminin tek bir çözümü u olsun. V nin bir V_n Galerkin yaklaşımını seçtikten sonra, sonlu boyutlu (V_n) uzayında, tek bir (u_n) çözümüne sahip yaklaşık bir (P_n) probleminin tanımlanması gereklidir. Daha sonra aşağıdaki adımlar uygulanır:

Adım 1: (P_n) probleminin çözümü u_n olsun.

Adım 2: u_n nin düzgün sınırlı olduğunu göstermek için u_n üzerinde kestirimler oluştururuz.

Adım 3: u_n nin düzgün sınırlı olmasından dolayı, ikinci adımdaki kestirimleri içeren uzayın zayıf topolojisinde, bir limite sahip, $\{u_n\}_{n \in N^*}$ dizisinin bir $\{u'_n\}_{n \in N^*}$ alt dizisini seçmek mümkündür. Elde edilen limit u olsun.

Adım 4: (P) probleminin çözümünün u olduğunu gösteririz.

Adım 5: Böylece, güçlü yakınsaklık sonuçları elde edilir.

Yaklaşım sürecinin oluşturulmasının esas amacı, bir çözümün varlığının elde edilmesini sağlamaktır, bu süreç $u_n(x, t)$ ya, $(x, t) \in \Omega \times [0; T]$ için

$$u_n(x, t) = \sum_{i=1}^n r_{in}(t) w_i$$

olacak şekilde w_i tabanlarının fonksiyonlarının doğrusal bir kombinasyonu olarak yaklaşıma tekabül eder. Başka bir deyişle, bir problem için yaklaşık bir problem tanımlanır. Adi diferansiyel denklemler teorisinden bilindiği gibi, ele alınan yaklaşık sistemin, doğrusal olmayan terimleri düzgün olduğundan Zorn Lemması kullanılarak maksimal bir $[0, t_m)$ aralığına genişletilecek şekilde tek bir lokal çözüme sahiptir. Sonraki adım olarak bazı kestirimler elde edilir. Böylece tüm $t > 0$ için tanımlı bir çözüm elde etmek için aralık $[0, t_m)$ dışına genişletilebilir (Lions, 1969).

3.6 Aubin-Lions Lemması

Aubin-Lions lemması $L^p(0; T; V)$ uzayında bir fonksiyon dizisinin kompakt olduğu durumların belirlenmesini sağlar. Genel olarak sonlu boyutlu uzayda evolüsyon denklemleri çalışırken, adi diferansiyel denklem sistemleri için Cauchy-Lipschitz veya Carathéodory gibi varlık teoremleri ile çözümleri elde edilen sonlu boyutlu alt uzaylarla ilgili yaklaşık çözüm dizisi oluşturulur. Daha sonra $L^p(0; T; X)$ uzayında sınırlı olması ile önsel tahminler ve yaklaşık problemin kullanılmasıyla zamana göre türevlerinin de $L^q(0; T; Y)$ de sınırlı olduğu fonksiyon dizisi elde edilir. Kompaktlık yaklaşık çözümler kümesinin $L^p(0; T; V)$ kümesinde güçlü yakınsak dizilerinin belirlenmesi için gereklidir. Böylece evolüsyon denklemlerin orijinal çözümlerinin varlığı bulunabilir. Aubin- Lions Lemması $X; Y; V$ ve $p; q$ üzerinde yaklaşık problemin çözüm dizisinin $L^p(0; T; V)$ cinsinden nispeten kompakt olduğu koşulları oluşturur (Dubinskii, 1965).

Teorem 3.6.1 X, V ve Y uzayları Banach uzayı olsun. $X \hookrightarrow V$ kompakt ve $V \hookrightarrow Y$ sürekli gömülmeleri ve $1 \leq p < \infty$ ve $q = 1$ veya $p = \infty$ ve $q > 1$ şartları sağlansın. U kümesi $L^p(0, T; X)$ de sınırlı ve $\frac{\partial U}{\partial t} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} = u \in U \right\}$, $L^q(0, T, Y)$ de sınırlı ise U kümesi $L^p(0, T; V)$ de kompakttır (Aubin, 1963; Lions, 1969).

Teorem 3.6.2 (Aubin-Lions-Dubinskii) V ve Y uzayları Banach uzayı olsun. M, V Banach uzayında $M \cap Y \neq \emptyset$ olmak üzere negatif yarı normlu bir koni olsun. $1 \leq p \leq \infty$ olarak alınırsa, kabul edelim ki;

- (i) $M \hookrightarrow V$ kompakt,
 - (ii) Tüm $(\omega_n) \subset V \cap Y$ için V de $\omega_n \rightarrow \omega$, $n \rightarrow \infty$ iken $\omega = 0$ sağlanırsa Y de $\omega_n \rightarrow 0$,
 - (iii) $L^p(0, T; M)$ de $U \subset L^p(0, T; M \cap Y)$ sınırlıdır.
 - (iv) $u \in U$ da $h \rightarrow 0$ iken $\|\sigma_h u - u\|_{L^p(0, T-h; Y)} \rightarrow 0$ düzgündür.
- Böylece $L^p(0, T; V)$ de U kompakttır (Chen vd., 2014).

4. YÜKSEK MERTEBEDEN BİR KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI VE PATLAMASI

Bu bölümde

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxxt} - u_{xxxxx} - u_{xxxxxt} = f(u_{xx})_{xx}, & x \in \Omega, t > 0, \\ u(0, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xxxx}(0, t) = u(1, t) = u_{xx}(1, t) \\ = u_{xxxx}(1, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \in H_0^3(\Omega), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \in L^2(\Omega), & x \in \Omega \end{cases} \quad (4.1)$$

başlangıç-sınır değer probleminin global zayıf çözümlerinin varlığını ve patlamasını inceleyeceğiz.

Burada, $u(x, t)$ bilinmeyen fonksiyonu; $f(s)$ verilmiş bir lineer olmayan fonksiyonu; Ω , $(0, 1)$ aralığını; (4.1) in ikinci satırındaki koşullar $u(x, t)$ fonksiyonunun sınır koşullarını; (4.1) in üçüncü satırındaki $u_0(x)$ ve $u_1(x)$ ise başlangıç koşullarını sağlayan fonksiyonları temsil etmektedir.

4.1 Giriş

Bu kısımda bazı notasyonlar ile (4.1) başlangıç-sınır değer probleminin temel sonuçları ifade ediliyor. $L^2 = L^2(\Omega)$ ve $H = H_0^3(\Omega)$ olacak şekilde $H_0^3 \hookrightarrow L^2$ yazılabilir.

Kısa olması için aşağıdaki notasyonları kullanıyoruz:

$$\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}, \quad \|\cdot\|_H = \|\cdot\|_{H_0^3(\Omega)}.$$

Ayrıca, $(\cdot, \cdot)$ ifadesi L^2 deki iç çarpımdır. (4.1) deki parametrelerin aşağıdaki varsayımları sağladığını kabul edelim.

Varsayım 4.1.1

$$F(\xi) = \int_0^\xi f(\tau) d\tau, \quad f(\xi) = F'(\xi)$$

ifadesinin aşağıdaki koşulları sağladığını varsayıyoruz:

(a) $i = 1, 2, 3$ için C_i pozitif sabitleri vardır, öyle ki

$$-C_2 |\xi|^2 - C_3 \leq F(\xi) \leq \frac{1}{2}(1 - \varepsilon) |\xi|^2 + C_1, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

(b) $j = 1, 2$ için $\tilde{C}_j$ pozitif sabitleri mevcuttur, öyle ki

$$|f(\xi)| \leq \tilde{C}_1 |\xi| + \tilde{C}_2.$$

(c) f azalmayan bir fonksiyondur, yani

$$f'(\xi) \geq 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Tanım 4.1.1 Fonksiyon uzayını

$$X(T) = \{w | w \in L^2(0, T; H), w_t \in L^2(0, T; H)\}$$

ile ilgili normu ise

$$\|w\|_{X(T)} = \left(\|w\|_{L^2(0, T; H)}^2 + \|w_t\|_{L^2(0, T; H)}^2 \right)$$

ile gösteriyoruz.

Şimdi (4.1) probleminin bir zayıf çözümü kavramını tanımlıyoruz.

Tanım 4.1.2 Eğer bir $u \in X(T)$ fonksiyonu aşağıdaki özdeşliği her bir $t \in [0, T]$ ve her $v \in H$ için sağlıyorsa, bu durumda u fonksiyonu (4.1) in bir zayıf global çözümüdür.

$$(u_{tt}(t), v) + (u_{xxt}(t), v_{xx}) + (u_{xxx}(t), v_{xxx}) + (u_{xxxt}(t), v_{xxxx}) = (f(u_{xx}(t)), v_{xx}).$$

Ayrıca u

$$u(x, 0) = u_0(x) \in H, \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \in L^2$$

koşulunu da sağlamalıdır.

4.2 Çözümlerin Varlığı

Çalışmamızın bu aşamasında, uygun koşullar altında (4.1) probleminin varlık sonuçlarını ortaya koyuyoruz. Kullandığımız yöntem (Ackleh vd., 2002), (Bowers vd., 1995) ve (Yu vd., 2018) de kullanılanlara benzer bir Galerkin yaklaşım yöntemidir.

Teorem 4.2.1 $u_0(x) \in H, u_1(x) \in L^2$ olduğunu ve Varsayım 4.1.1 in sağlandığını kabul edelim. Bu durumda, (4.1) probleminin bir $u \in X(T)$ global zayıf çözümü

vardır.

İspat: $\{w_j(x)\}$, H deki baz fonksiyonlarının bir sistemi olsun. Şimdi, (4.1) probleminin aşağıdaki $u_m(x, t)$ yaklaşık çözümünü oluşturuyoruz:

$$u_m(x, t) = \sum_{j=1}^m \alpha_j^m(t) \omega_j(x), \quad m = 1, 2, \dots$$

Bu çözüm

$$\begin{aligned} & (u_{mtt}(t), \omega_i) + (u_{mxxxt}(t), \omega_{ixx}) + (u_{mxxx}(t), \omega_{ixxx}) + (u_{mxxxt}(t), \omega_{ixxx}) \\ & = (f(u_{mxx}(t)), \omega_{ixx}), \quad i = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (4.2)$$

ifadesini aşağıdaki başlangıç koşulları altında sağlar:

$$H \text{ de } m \rightarrow \infty \text{ iken } u_m(x, 0) = \sum_{j=1}^m a_j^m \omega_j(x) \rightarrow u_0(x), \quad (4.3)$$

$$L^2 \text{ de } m \rightarrow \infty \text{ iken } u_{mt}(x, 0) = \sum_{j=1}^m b_j^m \omega_j(x) \rightarrow u_1(x). \quad (4.4)$$

(4.2) ifadesini $\frac{d}{dt} \alpha_i^m(t)$ ile çarpıp i üzerinden toplarsak,

$$\begin{aligned} & (u_{mtt}(t), u_{mt}(t)) + (u_{mt}(t), u_{mxxx}(t)) \\ & + (u_{mxxx}(t), u_{mxxxt}(t)) + (u_{mxxxt}(t), u_{mxxxt}(t)) \\ & = (f(u_{mxx}(t)), u_{mxxxt}(t)) \end{aligned} \quad (4.5)$$

ifadesini elde ederiz.

Böylece

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} [\|u_{mt}(t)\|^2 + \|u_{mxxx}(t)\|^2] + 2\|u_{mxxxt}(t)\|^2 + 2\|u_{mxxxt}(t)\|^2 \\ & = 2(f(u_{mxx}(t)), u_{mxx}(t)) \end{aligned} \quad (4.6)$$

olur. Varsayım 4.1.1 ve (4.6) ifadesinden

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\|u_{mt}(t)\|^2 + \|u_{mxxx}(t)\|^2 - 2 \int_0^t F(u_{xx}) dx \right] \\ & + 2\|u_{mxxxt}(t)\|^2 + 2\|u_{mxxxt}(t)\|^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

elde edilir. Bunu kullanarak, $t \in [0, T]$ için

$$\begin{aligned} & \|u_{mt}(t)\|^2 + \varepsilon \|u_{mxxx}(t)\|^2 + 2 \int_0^t \|u_{mxx\tau}(\tau)\|^2 d\tau \\ & + 2 \int_0^t \|u_{mxxx\tau}(\tau)\|^2 d\tau \leq C \end{aligned} \quad (4.8)$$

olacak şekilde m üzerinde bir pozitif C sabiti var olduğu sonucuna varmış oluruz. Böylece, $u(x, t) \in W^{2,2}(0, T; H)$ limit fonksiyonları ve halen $\{u_m\}$ i temsil eden bir alt dizi vardır öyle ki $m \rightarrow +\infty$ iken u_m , u ya $W^{2,2}(0, T; H)$ de zayıf bir şekilde yakınsar. Varsayım 4.1.1(b) den,

$$\begin{aligned} \|f(u_{mxx})\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 &= \int_0^t \int_0^1 |f(u_{mxx}(x, \tau))|^2 dx d\tau \\ &\leq 2 \int_0^t \int_0^1 \left(\tilde{C}_1^2 |u_{mxx}(x, \tau)|^2 + \tilde{C}_2^2 \right) dx d\tau \\ &= 2\tilde{C}_1^2 \int_0^t \|u_{mxx}(\tau)\|^2 d\tau + 2\tilde{C}_1^2 t \\ &\leq 2\tilde{C}_1^2 C t + 2\tilde{C}_2^2 t \\ &\leq 2 \left(\tilde{C}_1^2 C + \tilde{C}_2^2 \right) T \end{aligned} \quad (4.9)$$

bulunur. Böylece her $t \in [0, T]$ için $\tilde{f}(t) \in L^2(0, T; L^2)$ vardır öyle ki $f(u_{mxx}(t))$, $\tilde{f}(t)$ ye $L^2(0, T; L^2)$ de zayıf bir şekilde yakınsar. (4.2) de i yi sabitliyoruz ve $m \rightarrow +\infty$ alıyoruz. Bu durumda,

$$\begin{aligned} & (u_{tt}(t), \omega_i) + (u_{xxt}(t), \omega_{ixx}) + (u_{xxx}(t), \omega_{ixxx}) + (u_{xxxt}(t), \omega_{ixxx}) \\ & = (\tilde{f}(t), \omega_{ixx}) \end{aligned} \quad (4.10)$$

ve $u(x, 0) = u_0(x)$ ile $u_t(x, 0) = u_1(x)$ olmak üzere, $\forall v \in H$ için

$$\begin{aligned} & (u_{tt}(t), v) + (u_{xxt}(t), v_{xx}) + (u_{xxx}(t), v_{xxx}) + (u_{xxxt}(t), v_{xxxx}) \\ & = (\tilde{f}(t), v_{xx}) \end{aligned} \quad (4.11)$$

olur.

Varsayım 4.1.1(c)'den ve (Bowers vd.,1995) teki fikirlerden yararlanarak, hemen hemen her $t \in [0, t]$ için $f(u_{xx}(t)) = \tilde{f}(t)$ olduğunu ispatlayabiliriz.

$u(x, t)$ nin (4.1) probleminin bir zayıf çözümü olduğunu elde ediyoruz.

Ayrıca,

$$\begin{aligned}
v \rightarrow (u_{tt}, v)_{H^*, H} &= - \int_0^t (u_\tau(\tau), v_\tau(\tau)) d\tau \\
&= \int_0^t (f(u_{xx}(\tau)), v_{xx}(\tau)) d\tau - \int_0^t (u_{xxx}(\tau), v_{xxx}(\tau)) d\tau \\
&\quad - \int_0^t (u_{xxx\tau}(\tau), v_{xxx}(\tau)) d\tau + \int_0^t (u_{xx\tau}(\tau), v_{xx}(\tau)) d\tau
\end{aligned} \tag{4.12}$$

ifadesinin $L^2(0, T; H)$ topolojisi ile donatılmış $D(0, T; H)$ de sürekli olduğunu ve yoğunluktan dolayı $L^2(0, T; H)$ de de sürekli olduğunu belirtiyoruz. Dolayısıyla, $u_{tt} \in L^2(0, T; H)^* = L^2(0, T; H^*)$ olur. $u(x, t) \in W^{2,2}(0, T; H)$ olduğunu önceden elde ettiğimiz için $u(x, t) \in X(T)$ olur ve (Dautray, 1991) den $u(x, t) \in C(0, T; H)$ ve $u(x, t) \in C(0, T; L^2)$ toplamsal düzgünlüğünü elde ederiz. Bu da ispatı tamamlar.

4.3 Çözümlerin Patlaması

Bu aşamada, (4.1) de ifade edilen problemin çözümünün patlamasını inceleyeceğiz. Burada kullanılan temel metod, Levine (Levine, 1974-I; Levine, 1974-II) tarafından geliştirilen konkavlık metodunu genelleştirilmiş olan metoda (Kalantarov ve Ladyzhenskaya 1978) dayanmaktadır. Temel sonucumuzu ispatlamak için, aşağıdaki lemmayı kullanacağız.

Lemma 4.3.1 (Kalantarov ve Ladyzhenskaya 1978). $F(t)$ iki kez türevlenebilen, $t > 0$ ve $\alpha, c_1, c_2 > 0$ için

$$F''(t) F(t) - (1 + \alpha) (F'(t))^2 \geq -2c_1 F(t) F'(t) - c_2 (F(t))^2$$

eşitsizliğini sağlayan pozitif bir fonksiyon olsun. Ayrıca

$$\alpha_1 = -c_1 + \sqrt{c_1^2 + \alpha c_2},$$

$$\alpha_2 = -c_1 - \sqrt{c_1^2 + \alpha c_2}$$

için

$$F(0) > 0, \quad F'(0) > -\alpha_2 \alpha^{-1} F(0) \quad \text{ve} \quad c_1 + c_2 > 0$$

olsun. Bu durumda, öyle bir

$$t_2 = \frac{1}{2\sqrt{c_1^2 + \alpha c_2}} \ln \left(\frac{\alpha_1 F(0) + \alpha F'(0)}{\alpha_2 F(0) + \alpha F'(0)} \right)$$

zamanı vardır ki $t_1 < t_2$ için

$$\lim_{t \rightarrow t_1} F(t) = \infty$$

olur.

İspat.

$$\Phi(t) = F^{-\alpha}(t)$$

olsun. $\Phi(t)$ nin birinci ve ikinci türevleri sırasıyla

$$\begin{aligned}\Phi'(t) &= (F^{-\alpha}(t))' \\ &= -\alpha F^{-\alpha-1}(t) F'(t)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\Phi''(t) &= (-\alpha)(-\alpha-1) F^{-\alpha-2}(t) (F'(t))^2 + (-\alpha) F^{-\alpha-1}(t) F''(t) \\ &= -\alpha F^{-\alpha-2}(t) [F''(t) F(t) - (1+\alpha)(F'(t))^2] \\ &\geq -\alpha F^{-\alpha-2}(t) [-2c_1 F(t) F'(t) - c_2 F^2(t)] \\ &= 2\alpha c_1 F^{-\alpha-1}(t) F'(t) + \alpha c_2 F^{-\alpha}(t) \\ &= -2c_1 \Phi'(t) + \alpha c_2 \Phi(t)\end{aligned}$$

olur. Buradan ikinci mertebeden sabit katsayılı

$$\Phi''(t) + 2c_1 \Phi'(t) - \alpha c_2 \Phi(t) = f(t) \geq 0$$

adi diferansiyel denklemi yazılabilir. Bu denklemin $\Phi(t)$ genel çözümü; homojen kısmın genel çözümü ($\Phi_h(t)$) ile homojen olmayan kısmın özel çözümünün ($\Phi_p(t)$) toplamıdır. Önce diferansiyel denklemin homojen kısmının çözümünü bulalım ($c_1 + c_2 > 0$ olduğundan)

$$r^2 + 2c_1 r - \alpha c_2 = 0,$$

$$(r + c_1)^2 = c_1^2 + \alpha c_2$$

karakteristik denkleminde

$$r_1 = \alpha_1 = -c_1 + \sqrt{c_1^2 + \alpha c_2}$$

ve

$$r_2 = \alpha_2 = -c_1 - \sqrt{c_1^2 + \alpha c_2}$$

alınırsa

$$\Phi_h(t) = \beta_1 e^{\alpha_1 t} + \beta_2 e^{\alpha_2 t}$$

olur. Şimdi homojen olmayan kısmının özel çözümünü bulalım (Parametrelerin değişimi yöntemiyle)

$$\begin{aligned}\Phi_p(t) &= e^{\alpha_1 t} \int_0^t \frac{e^{-\alpha_1 \tau} f(\tau)}{\alpha_1 - \alpha_2} d\tau + e^{\alpha_2 t} \int_0^t \frac{e^{-\alpha_2 \tau} f(\tau)}{\alpha_2 - \alpha_1} d\tau \\ &= (\alpha_1 - \alpha_2)^{-1} \int_0^t f(\tau) [e^{\alpha_1(t-\tau)} - e^{\alpha_2(t-\tau)}] d\tau\end{aligned}$$

olur. Böylece genel çözüm

$$\Phi(t) = \Phi_h(t) + \Phi_p(t)$$

den

$$\Phi(t) = \beta_1 e^{\alpha_1 t} + \beta_2 e^{\alpha_2 t} + (\alpha_1 - \alpha_2)^{-1} \int_0^t f(\tau) [e^{\alpha_1(t-\tau)} - e^{\alpha_2(t-\tau)}] d\tau$$

olarak bulunur.

$$\beta_1 + \beta_2 = \Phi(0)$$

ve

$$\beta_1 \alpha_1 + \beta_2 \alpha_2 = \Phi'(0)$$

eşitliklerinden β_1 ve β_2 ifadeleri

$$\beta_1 = \frac{\Phi'(0) - \alpha_2 \Phi(0)}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

ve

$$\beta_2 = \frac{\Phi'(0) - \alpha_1 \Phi(0)}{\alpha_2 - \alpha_1}$$

olarak bulunur. $\Phi(0) = F^{-\alpha}(0)$ ve $\Phi'(0) = -\alpha F^{-\alpha-1}(0) F'(0)$ olduğundan

$$\beta_1 = -(\alpha_1 - \alpha_2)^{-1} [\alpha_2 F(0) + \alpha F'(0)] F^{-\alpha-1}(0)$$

ve

$$\beta_2 = (\alpha_1 - \alpha_2)^{-1} [\alpha_1 F(0) + \alpha F'(0)] F^{-\alpha-1}(0)$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= -(\alpha_1 - \alpha_2)^{-1} [\alpha_2 F(0) + \alpha F'(0)] F^{-\alpha-1}(0) e^{\alpha_1 t} \\ &\quad + (\alpha_1 - \alpha_2)^{-1} [\alpha_1 F(0) + \alpha F'(0)] F^{-\alpha-1}(0) e^{\alpha_2 t} \\ &\quad + \underbrace{(\alpha_1 - \alpha_2)^{-1} \int_0^t f(\tau) [e^{\alpha_1(t-\tau)} - e^{\alpha_2(t-\tau)}] d\tau}_{\geq 0 \text{ olduğundan ihmal edilirse}} \\ &\geq -(\alpha_1 - \alpha_2)^{-1} [\alpha_2 F(0) + \alpha F'(0)] F^{-\alpha-1}(0) e^{\alpha_1 t} \\ &\quad + (\alpha_1 - \alpha_2)^{-1} [\alpha_1 F(0) + \alpha F'(0)] F^{-\alpha-1}(0) e^{\alpha_2 t} \end{aligned}$$

olur. Son ifade sıfıra eşitlenirse

$$[\alpha_2 F(0) + \alpha F'(0)] e^{\alpha_1 t} = [\alpha_1 F(0) + \alpha F'(0)] e^{\alpha_2 t},$$

$$e^{(\alpha_1 - \alpha_2)t} = \frac{\alpha_1 F(0) + \alpha F'(0)}{\alpha_2 F(0) + \alpha F'(0)},$$

$$t_2 = \frac{1}{2\sqrt{c_1^2 + \alpha c_2}} \ln \left(\frac{\alpha_1 F(0) + \alpha F'(0)}{\alpha_2 F(0) + \alpha F'(0)} \right)$$

bulunur. Böylece

$$\lim_{t \rightarrow t_1 < t_2} F(t) = \infty$$

olur.

Teorem 4.3.1 $f \in C^2(R)$, $u_0 \in H^2(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$, $F(u_{0xx}) \in L^1(\Omega)$ ve bir $\gamma > 0$ sabiti vardır, öyle ki, $F(s) = \int_0^s f(\tau) d\tau$ olmak üzere

$$sf(s) \geq 2(1 + 2\gamma)F(s), \quad s \in R, \quad (4.13)$$

Bu durumda, (4.1) probleminin $u(x, t)$ çözümünün sonlu zamanda patlaması için gerek ve yeter koşul aşağıda verilen ifadelerin sağlanmasıdır:

$$(1) E(0) < 0;$$

$$(2) E(0) = 0, 2(u_0, u_1) > \frac{1}{\gamma} (\|u_{0xx}\|^2 + \|u_{0x}\|^2);$$

$$(3) E(0) = \|u_1\|^2 + \|u_{0xxx}\|^2 - 2 \int_{\Omega} F(u_{0xx}) dx \text{ olmak üzere } E(0) > 0, (u_0, u_1) > [E(0)(\|u_0\|^2 + T_0 \|u_{0x}\|^2 + T_0 \|u_{0xx}\|^2)]^{\frac{1}{2}}.$$

İspat: (4.1) in çözümünün maksimal zamanının sonsuz olduğunu kabul edelim. Enerji fonksiyonel şu şekilde tanımlanabilir:

$$E(t) = \|u_t(t)\|^2 + \|u_{xxx}(t)\|^2 + 2 \int_0^t \|u_{xxt}(\tau)\|^2 d\tau + 2 \int_0^t \|u_{xxx}(\tau)\|^2 d\tau - 2 \int_{\Omega} F(u_{xx}) dx. \quad (4.14)$$

(4.14) ve (4.1) den

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) &= \frac{d}{dt} [\|u_t(t)\|^2 + \|u_{xxx}(t)\|^2 + 2 \int_0^t \|u_{xxt}(\tau)\|^2 d\tau \\ &\quad + 2 \int_0^t \|u_{xxx}(\tau)\|^2 d\tau - 2 \int_{\Omega} F(u_{xx}) dx] \\ &= 2 \int_{\Omega} (u_{tt}u_t - u_{xxxxx}u_t - u_{xxxxxt}u_t + u_{xxxxt}u_t - f(u_{xx})_{xx}u_t) dx \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

(4.15) in 0 dan t ye integralini aldığımızda

$$E(t) = E(0) \quad (4.16)$$

elde edilir.

Şimdi, $0 \leq t \leq T_0$ olmak üzere ve β ile t_0 sonradan verilecek negatif olmayan reel sayılar olmak üzere,

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \|u(t)\|^2 + \int_0^t \|u_{xx}(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \|u_{xxx}(\tau)\|^2 d\tau \\ &\quad + (T_0 - t) \|u_{0xx}\|^2 + (T_0 - t) \|u_{0xxx}\|^2 + \beta(t + t_0)^2 \end{aligned}$$

ifadesini tanımlıyoruz. Böylece

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= 2 \int_{\Omega} uu_t dx + \|u_{xx}\|^2 + \|u_{xxx}\|^2 \\ &\quad - \|u_{0xx}\|^2 - \|u_{0xxx}\|^2 + 2\beta(t + t_0) \\ &= 2 \left[\int_{\Omega} uu_t dx + \int_0^t \int_{\Omega} u_{xx}(\tau) u_{xxt}(\tau) dx d\tau \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \int_{\Omega} u_{xxx}(\tau) u_{xxx}(\tau) dx d\tau + \beta(t + t_0) \right] \end{aligned} \quad (4.17)$$

olur. (4.17) ve (4.1) den

$$\begin{aligned}
\phi''(t) &= 2 \left[\|u_t\|^2 + \int_{\Omega} u_{tt}(t)u(t)dx + \int_{\Omega} u_{xxt}(t)u_{xx}(t)dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{\Omega} u_{xxx}(t)u_{xxxt}(t)dx + \beta \right] \\
&= 2 \left[\|u_t\|^2 + \int_{\Omega} [u_{tt}(t) - u_{xxxxxt}(t) + u_{xxxt}(t)] u(t)dx + \beta \right] \\
&= 2 \left[\|u_t\|^2 + \int_{\Omega} [u_{xxxxxx}(t) + f(u_{xx}(t))_{xx}] u(t)dx + \beta \right] \\
&= 2 [\|u_t\|^2 - \|u_{xxx}(t)\|^2 + f(u_{xx}), u_{xx} + \beta]
\end{aligned} \tag{4.18}$$

elde edilir. (4.17) den

$$\begin{aligned}
\phi'(t)^2 &= 4 \left[\int_{\Omega} uu_t dx + \int_0^t \int_{\Omega} u_{xx}(\tau)u_{xxt}(\tau)dx d\tau \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t \int_{\Omega} u_{xxx}(\tau)u_{xxxt}(\tau)dx d\tau + \beta(t + t_0)^2 \right] \\
&\leq 4 [\|u\| \|u_t\| + \left(\int_0^t \|u_{xx}(\tau)\|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \|u_{xxt}(\tau)\|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \left(\int_0^t \|u_{xxx}(\tau)\|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \|u_{xxxt}(\tau)\|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\beta}\sqrt{\beta}(t + t_0)]^2 \\
&\leq 4\phi(t) \left[\|u_t\|^2 + \int_0^t \|u_{xxt}(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \|u_{xxxt}(\tau)\|^2 d\tau + \beta \right]
\end{aligned} \tag{4.19}$$

yazabiliriz.

Şimdi, (4.17)-(4.19) dan

$$\begin{aligned}
&\phi(t)\phi''(t) - \phi'(t)^2(1 + \gamma) \\
&= 2\phi(t) \left[\|u_t\|^2 - \|u_{xxx}\|^2 + \int_{\Omega} f(u_{xx}(t))u_{xx}(t)dx + \beta \right] - (1 + \gamma)\phi'(t)^2 \\
&\geq 2\phi(t) [\|u_t\|^2 - \|u_{xxx}\|^2 + \int_{\Omega} f(u_{xx}(t))u_{xx}(t)dx + \beta \\
&\quad - 2(1 + \gamma) \left(\|u_t\|^2 + \int_0^t \|u_{xxt}(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \|u_{xxxt}(\tau)\|^2 d\tau + \beta \right)] \\
&\geq 2\phi(t)\psi(t)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
\psi(t) &= - \|u_{xxx}\|^2 + \int_{\Omega} f(u_{xx}(t))u_{xx}(t)dx - (2\gamma + 1) (\|u_t\|^2 + \beta) \\
&\quad - 2(1 + \gamma) \int_0^t (\|u_{xxt}(\tau)\|^2 + \|u_{xxxt}(\tau)\|^2) d\tau
\end{aligned} \tag{4.21}$$

şeklindedir.

(4.1) ve (4.17) den

$$\begin{aligned}
\psi'(t) &= -2 \int_{\Omega} u_{xxx}(t) u_{xxxt}(t) dx + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} f(u_{xx}(t)) u_{xx}(t) dx \\
&\quad - 2(2\gamma + 1) \int_{\Omega} u_t(t) u_{tt}(t) dx - 2(1 + \gamma) (\|u_{xxt}\|^2 + \|u_{xxxt}\|^2) \\
&= -2 \int_{\Omega} u_{xxx}(t) u_{xxxt}(t) dx + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} f(u_{xx}(t)) u_{xx}(t) dx \\
&\quad - 2(2\gamma + 1) \int_{\Omega} u_t [u_{xxxxx}(t) - u_{xxxxxt}(t) - u_{xxxt}(t) + f(u_{xx}(t))_{xx}] dx \\
&\quad - 2(1 + \gamma) (\|u_{xxt}(t)\|^2 + \|u_{xxxt}(t)\|^2) \\
&= -2 \int_{\Omega} u_{xxx}(t) u_{xxxt}(t) dx + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} f(u_{xx}(t)) u_{xx}(t) dx \\
&\quad + 2(2\gamma + 1) \int_{\Omega} u_{xxx}(t) u_{xxxt}(t) dx + 2\gamma (\|u_{xxt}(t)\|^2 + \|u_{xxxt}(t)\|^2) \\
&\quad - 2(2\gamma + 1) \int_{\Omega} f(u_{xx}(t)) u_{xxt}(t) dx \\
&= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} f(u_{xx}(t)) u_{xx}(t) dx - 2(2\gamma + 1) \int_{\Omega} f(u_{xx}(t)) u_{xxt}(t) dx \\
&\quad + 4\gamma \int_{\Omega} u_{xxx}(t) u_{xxxt}(t) dx + 2\gamma \|u_{xxt}(t)\|^2 + 2\gamma \|u_{xxxt}(t)\|^2
\end{aligned} \tag{4.22}$$

elde edilir.

(4.22) nin 0 dan t ye kadar integralini alıp Varsayım 4.1.1 den yararlanırsak

$$\begin{aligned}
\psi(t) &\geq \psi(0) - \int_{\Omega} f(u_{0xx}) u_{0xx} dx + \int_{\Omega} f(u_{xx}(t)) u_{xx}(t) dx \\
&\quad - 2(2\gamma + 1) \int_{\Omega} F(u_{xx}(t)) dx + 2(2\gamma + 1) \int_{\Omega} F(u_{0xx}) dx \\
&\quad + 2\gamma \|u_{xxx}(t)\|^2 - 2\gamma \|u_{0xxx}\|^2 \\
&\geq \psi(0) - \int_{\Omega} f(u_{0xx}) u_{0xx} dx + 2(2\gamma + 1) \int_{\Omega} F(u_{0xx}) dx - 2\gamma \|u_{0xxx}\|^2 \\
&\geq - (2\gamma + 1) \left(\|u_{0xxx}\|^2 + \|u_1\|^2 - 2 \int_{\Omega} F(u_{0xx}) dx + \beta \right) \\
&\geq - (2\gamma + 1) (E(0) + \beta)
\end{aligned} \tag{4.23}$$

olur. Bu eşitsizliği (4.20) ile birleştirirsek

$$\phi(t) \phi''(t) - \phi'(t)^2 (1 + \gamma) \geq -2(2\gamma + 1) (E(0) + \beta) \phi(t) \tag{4.24}$$

ifadesini elde ederiz.

$E(0)$ başlangıç enerjisinin işareti için üç farklı durumu dikkate alıyoruz:

(i) Eğer $E(0) < 0$ ise $\beta = -E(0)$ seçeriz, bu durumda (4.24) şu şekilde olur:

$$\phi(t)\phi''(t) - \phi'(t)^2(1 + \gamma) \geq 0. \quad (4.25)$$

Eğer T_0 ve t_0 ı $\frac{\phi(0)}{\gamma\phi'(0)} \leq T_0$ olacak şekilde seçip Varsayım 4.1.1 den yararlanırsak, Lemma 4.3.1 den

$$t \rightarrow t_1 \leq \frac{\phi(0)}{\gamma\phi'(0)} = \frac{\|u_0\|^2 + T_0 \|u_{0xx}\|^2 + T_0 \|u_{0xxx}\|^2 - E(0)t_0^2}{\gamma \left[\int_{\Omega} 2u_0(x)u_1(x)dx - E(0)t_0 \right]}$$

iken $\phi(t)$ nin sonsuza yakınsamasını gerektirir. Bu da, çözümün varlığının maksimal zamanının sonsuz olduğu gerçeğiyle çelişir. Dolayısıyla, (4.1) probleminin çözümünün sonlu zaman içerisinde patladığı sonucunu çıkarabiliriz.

İspatı tamamlamak için, T_0 ve t_0 ın pozitif sabitler olduğunu belirlemeliyiz. t_0 ı

$$2(u_0, u_1) - E(0)t_0 - \frac{1}{\gamma} (\|u_{0xxx}\|^2 + \|u_{0xx}\|^2) > 0$$

olacak şekilde yeterince büyük seçiyoruz. Dahası, $\frac{\phi(0)}{\gamma\phi'(0)} \leq T_0$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{\|u_0\|^2 - E(0)t_0^2}{\gamma \left[\int_{\Omega} 2u_0(x)u_1(x)dx - E(0)t_0 \right] - \|u_{0xxx}\|^2 - \|u_{0xx}\|^2} \leq T_0$$

olmasıdır. T_0 ve t_0 ın pozitif sabitler olduğu açıktır.

(ii) Eğer $E(0) = 0$ ise $\beta = 0$ ve T_0

$$\frac{\|u_0\|^2}{2\gamma \left[\int_{\Omega} u_0(x)u_1(x)dx \right] - \|u_{0xxx}\|^2 - \|u_{0xx}\|^2} \leq T_0$$

olacak şekilde seçeriz. Bu durumda (4.24)

$$\phi(t)\phi''(t) - \phi'(t)^2(1 + \gamma) \geq 0 \quad (4.26)$$

olur. Varsayım 4.1.1 i dikkate aldığımızda, Lemma 4.3.1,

$$t \rightarrow t_2 \leq \frac{\|u_0\|^2 + T_0 \|u_{0xx}\|^2 + T_0 \|u_{0xxx}\|^2}{2\gamma \int_{\Omega} u_0(x)u_1(x)dx}$$

iken $\phi(t)$ nin sonsuza yakınsamasını gerektirir. Bu da, çözümün varlığının maksimal zamanının sonsuz olduğu gerçeğiyle çelişir. Dolayısıyla, (4.1) probleminin çözümünün sonlu zaman içerisinde patladığı sonucunu çıkarabiliriz.

(iii) Eğer $E(0) > 0$ ise $\beta = 0$ seçeriz, bu durumda (4.24) şu şekilde olur:

$$\phi(t)\phi''(t) - \phi'(t)^2(1 + \gamma) \geq -2E(0)(2\gamma + 1)\phi(t). \quad (4.27)$$

Şimdi, $J(t)$ yardımcı fonksiyonunu tanımlıyoruz:

$$J(t) = \phi^{-\gamma}(t). \quad (4.28)$$

J nin birinci ve ikinci türevlerini hesaplarsak,

$$J'(t) = -\gamma\phi^{-\gamma-1}(t)\phi'(t) \quad (4.29)$$

ve

$$\begin{aligned} J''(t) &= \gamma(1 + \gamma)\phi'(t)^2\phi^{-\gamma-2}(t) - \gamma\phi''(t)\phi^{-\gamma-1}(t) \\ &= -\gamma\phi^{-\gamma-2}(t) [\phi(t)\phi''(t) - (1 + \gamma)\phi'(t)^2] \\ &\leq 2\gamma(2\gamma + 1)E(0)\phi^{-\gamma-1}(t). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Varsayım 4.1.1 i dikkate aldığımızda,

$$J'(0) = -\gamma\phi^{-\gamma-1}(0)\phi'(0) < 0$$

sonucuna varırız.

Şimdi, $t^* = \sup \{\tau | J'(\tau) < 0, \tau \in [0, t)\}$ olsun. $J'(t)$ nin sürekliliği nedeniyle t^* pozitifdir. (4.30) u $2J'(t)$ ile çarparsak,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [J'(t)]^2 &\geq 4\gamma(2\gamma + 1)E(0)\phi^{-\gamma-1}(t)J'(t) \\ &= -4\gamma^2(2\gamma + 1)E(0)\phi^{-2\gamma-2}(t)\phi'(t) \\ &= 4\gamma^2E(0)\frac{d}{dt} [\phi^{-2\gamma-1}(t)], \quad \forall t \in [0, t^*). \end{aligned} \quad (4.31)$$

elde ederiz. (4.31) i $[0, t)$ de integralini alırsak,

$$\begin{aligned} J'(t)^2 &\geq J'(0)^2 + 4\gamma^2E(0)\phi^{-2\gamma-1}(t) - 4\gamma^2E(0)\phi^{-2\gamma-1}(0) \\ &\geq J'(0)^2 - 4\gamma^2E(0)\phi^{-2\gamma-1}(0). \end{aligned} \quad (4.32)$$

olur. 4.1.1 varsayımından

$$J'(0)^2 - 4\gamma^2E(0)\phi^{-2\gamma-1}(0) > 0$$

bulunur. Buradan, $J'(t)$ nin sürekliliğinden yararlanarak

$$J'(t) \leq - [J'(0)^2 - 4\gamma^2 E(0)\phi^{-2\gamma-1}(0)]^{\frac{1}{2}}, \quad \forall t \in [0, t^*) \quad (4.33)$$

elde ederiz. (4.33) in $[0, t)$ de integralini alırsak,

$$J(t) \leq J(0) - [J'(0)^2 - 4\gamma^2 E(0)\phi^{-2\gamma-1}(0)]^{\frac{1}{2}} t, \quad \forall t > 0 \quad (4.34)$$

olur. T_0 ı

$$\frac{J(0)}{[J'(0)^2 - 4\gamma^2 E(0)\phi^{-2\gamma-1}(0)]^{\frac{1}{2}}} \leq T_0$$

olacak şekilde seçiyoruz. Bu durumda, $J(t_3) = 0$ ve

$$0 < t_3 \leq T^* = \frac{J(0)}{[J'(0)^2 - 4\gamma^2 E(0)\phi^{-2\gamma-1}(0)]^{\frac{1}{2}}}$$

olacak şekilde bir t_3 sonlu pozitif sayısı vardır. Böylece, $t \rightarrow t_3$ iken $\phi(t) \rightarrow \infty$ olur. Bu da, çözümün varlığının maksimal zamanının sonsuz olduğu gerçeğiyle çelişir. Böylece teorem ispatlanmış oldu.

5.1 SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmanın amacı, $f(s)$ verilmiş bir lineer olmayan fonksiyon olmak üzere

$$u_{tt} + u_{xxxxt} - u_{xxxxx} + u_{xxxxxt} = f(u_{xx})_{xx}$$

denkleminin başlangıç sınır değer probleminin global zayıf çözümünün varlığını incelemektir. $u_0 \in H$, $u_1 \in L^2$ ve Varsayım 4.1.1 sağlandığında, herhangi bir $T > 0$ için (4.1) problemi, bir tek $u \in X(T)$ global zayıf çözümünü gerçekler. Bunun yanısıra, $u_0 \in H_0^3(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$, $F(u_{0x}) \in L^2(\Omega)$ belirli koşulları sağladığında, (4.1) probleminin çözümü sonlu zamanda patlar.

Ele almış olduğumuz problemin çözümlerinin varlığını ve patlaması başka koşullar altında incelenebilir. Diğer yandan, problemin enerji azalması, üstel büyümesi, vb. farklı matematiksel davranışları da çalışılabilir.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyad, Ad

GÜNEŞ, Hacıre

Web sayfası

(Research Gate, Academia, vs.)

Eğitim Bilgileri

Derece	Kurum	Mezuniyet Yılı
Lisans	Dicle Üniversitesi	2008
Lise	Nevzat Ayaz Anadolu Lisesi	2003

İş Deneyimi

Dönem (Yıl)	Şirket, Kurum	Görev
2010-	Milli Eğitim Bakanlığı	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

Yayınlar

1. Hacıre Güneş and Erhan Pişkin, Existence and nonexistence of solutions for a hyperbolic –type equation, 10th International Conference on Applied Sciences, 21- 23 June, 2024 in Konya-TÜRKİYE

Özel İlgiler

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ BENZERLİK BİLDİRİMİ FORMU

Öğrencinin Adı, Soyadı	Hacire GÜNEŞ
Öğrenci No	09804407
Ana Bilim Dalı	Matematik
Program Türü	Proje ☐ Yüksek Lisans ☒ Doktora ☐
Tez Danışmanı (Ünvanı, Adı, Soyadı)	Prof. Dr. Erhan PİŞKİN
(Varsa) II. Tez Danışmanı (Ünvanı, Adı, Soyadı)	
Tez Başlığı	Yüksek Mertebeden bir Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemin Çözümlerinin Niteliksel Analizi
RAPOR BİLGİLERİ	
Raporlama Aşaması	Tez Savunma Sınavı Sonrası
Sayfa Sayısı	41
Raporlama Tarihi	26/12/2024
Benzerlik Oranı (%)	%15

Yukarıda bilgileri verilen tez çalışmamın toplam 41 sayfalık kısmına ilişkin, 26/12/2024 tarihinde şahsım/tezdanışmanım tarafından Turnitin isimli intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 15 olarak tespit edilmiştir.

Uygulanan filtrelemeler:

- ☒Başlangıç Bölümleri (Kabul ve Onay sayfası, Teşekkür sayfası, Özet/Abstract) hariç
☒Kaynaklar hariç
☐Alıntılar hariç/dâhil
☐Diğer (Açıklayınız)

Tezimin benzerlik oranı, Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İntihal Raporu Uygulama Esaslarında belirtilen üst sınır benzerlik oranını aşmamaktadır. Benzerlik oranım üst sınır benzerlik oranının altında olsa dahi aksinin tespit edilmesi durumunda her türlü yasal sorumluluğu kabul ettiğimi ve hukuki sonuçlarına razı olduğumu bildirir, gereğini arz ederim.

Öğrencinin Adı, Soyadı: Hacire GÜNEŞ

Tarih: 26/12/2024

İmza:

Danışman Adı, Soyadı: Prof. Dr. Erhan PİŞKİN

İmza:

Tarih: 26/12/2024

Ana Bilim Dalı Başkanı Adı, Soyadı: Prof. Dr. H. Özlem GÜNEY

İmza:

Tarih: 26/12/2024
