

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fikriye KURTOĞLU

QUANTILE REGRESYON: TEORİSİ VE UYGULAMALARI

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2011

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

QUANTILE REGRESYON: TEORİSİ VE UYGULAMALARI

Fikriye KURTOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Bu Tez 05/07/2011 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından
Oybirliği/Oyçokluğu ile Kabul Edilmiştir.

.....
Prof. Dr. Olcay ARSLAN
DANIŞMAN

.....
Yrd.Doç. Dr. Deniz ÜNAL
ÜYE

.....
Doç.Dr. Zerrin ESMERLİGİL
ÜYE

Bu Tez Enstitümüz İstatistik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.

Kod No:

Prof. Dr. İlhami YEĞİNGİL
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların
kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere
tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

QUANTILE REGRESYON: TEORİSİ VE UYGULAMALARI

Fikriye KURTOĞLU

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Danışman :Prof. Dr. Olcay ARSLAN

Yıl: 2011, Sayfa: 107

Jüri :Prof. Dr. Olcay ARSLAN

:Yrd. Doç. Dr. Deniz ÜNAL

:Doç. Dr. Zerrin ESMERLİGİL

Bu çalışmada, Lineer Regresyon analizinde kullanılan en küçük kareler yöntemine bir alternatif olarak geliştirilen “Quantile Regresyon” yöntemi ele alınmıştır. Quantile Regresyon, Medyan Regresyon’un belirlenen quantile’ler için geliştirilmiş halidir. Bu regresyon modelleri sapan değerlere En Küçük Kareler Yöntemi’nden daha az hassastır. Quantile regresyon yönteminde parametrelerin tahmini için literatürde önerilen tahmin yöntemleri incelenmiştir, regresyon parametreleri tahmin edilmiştir ve elde edilen tahmin edicilerin özellikleri incelenmiştir. Elde edilen tahmin ediciler diğer tahmin edicilerle karşılaştırılmıştır. Simülasyon çalışması yapılmıştır ve sonuçlar veri setleriyle örneklendirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: En Küçük Kareler Yöntemi, En Küçük Mutlak Sapma (LAD) Regresyon, Quantile Regresyon.

ABSTRACT

MSc THESIS

QUANTILE REGRESSION: THEORY AND APPLICATIONS

Fikriye KURTOĞLU

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF STATISTICS

Supervisor :Assoc. Prof. Dr. Olcay ARSLAN
Year: 2011, Pages: 107
Jury : Assoc. Prof. Dr. Olcay ARSLAN
: Asst. Prof. Dr. Deniz ÜNAL
: Assoc. Prof. Dr. Zerrin ESMERLİGİL

In this study, "Quantile Regression" method which was developed as an alternative to the least squares method is discussed. Quantile Regression is the generalized version of Median regression for specified quantiles. This regression model is less sensitive to extreme values than the OLS models. The parameter estimation methods suggested in the literature are investigated for the Quantile regression method. The parameters of the regression model are estimated, the properties of these estimators are examined and compared with other estimators. The simulation study is carried out and the results are illustrated in data sets.

Keywords: Least Squares Method, Least Absolute Deviation (LAD) Regression, Quantile Regression.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında bana destek olan ve hiçbir zaman yardımlarını, desteğini esirgemeyen danışmanım sayın Prof.Dr. Olcay ARSLAN' a sonsuz saygı, sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

Lisans ve Yüksek Lisans süresi boyunca beni destekleyen bölüm hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen anneme, babama ve sevgili kardeşime teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SAYFA

ÖZ	I
ABSTRACT	II
TEŞEKKÜR	III
İÇİNDEKİLER.....	IV
ÇİZELGELER DİZİNİ	VI
ŞEKİLLER DİZİNİ	VII
SİMGELER VE KISALTMALAR	VIII
1. GİRİŞ	1
2. REGRESYON MODELLERİ	5
2.1. Lineer Regresyon Modeli (LRM)	5
2.1.1. Parametrelerin Tahmin Edilmesi	6
2.2. Çoklu Lineer Regresyon Modeli	7
2.2.1. Model Parametrelerinin Tahmini.....	7
2.3. En Küçük Mutlak Sapmalar Regresyonu (LAD)	9
2.3.1. Basit LAD Regresyonu	10
2.3.2. Çoklu LAD Regresyonu.....	14
2.4. Örnekler	18
2.4.1.Star verisi.....	18
2.4.2.Marietta verisi.....	23
3. QUANTILE REGRESYON.....	29
3.1. Quantile Regresyona Giriş.....	29
3.2. Quantile’ler ve Quantile Fonksiyonları	29
3.2.1. Quantile Fonksiyonu	30
3.2.2. Quantile Yoğunluk Fonksiyonu.....	32
3.3. Quantile Regresyon	33
3.4. Quantile Regresyonun Özellikleri.....	37
3.5. Quantile Regresyon için Bir Örnek	38
3.6. Quantile Regresyonun Doğrusal Programlama Gösterimi	42
3.7. Asimptotik Kovaryans Matris Tahmini	45

3.7.1. Sıra İstatistiği Tahmin Edicisi	45
3.7.2. Bootstrap Tahmin Edicileri	47
3.8. Quantile Regresyonda Sabit Varyansın İncelenmesi	49
3.9. LAD Tahmin Edicileri ile Quantile Regresyon	51
4. UYGULAMALAR.....	55
4.1. Diabetes verisi uygulaması	55
4.2. Engel verisi uygulaması.....	64
4.3. Barro verisi uygulaması	69
5. SONUÇLAR	77
KAYNAKLAR.....	79
ÖZGEÇMİŞ	83
EKLER.....	85

ÇİZELGELER DİZİNİ

SAYFA

Çizelge 2.1. Star verisi.....	18
Çizelge 2.2. Star verisi için R programından elde edilen ekk sonuçları.....	20
Çizelge 2.3. Star verisi için R programından elde edilen medyan regresyon sonuçları.....	21
Çizelge 2.4. Marietta verisi.....	23
Çizelge 2.5. Marietta verisi için Ekk ve LAD($\tau=0.5$) yöntemlerinin sonuçları.....	25
Çizelge 4.1. Diabetes verisi için tanımlayıcı istatistikler.....	56
Çizelge 4.2. Diabetes verisinin R programından elde edilen Robust yöntem sonuçları.....	56
Çizelge 4.3. Diabetes verisi için R programından elde edilen Ekk sonuçları.....	57
Çizelge 4.4. Diabetes verisi için R programından $\tau=0.25$ için elde edilen QR sonuçları.....	58
Çizelge 4.5. Diabetes verisi için R programından $\tau=0.50$ için elde edilen QR sonuçları.....	58
Çizelge 4.6. Diabetes verisi için R programından $\tau=0.75$ için elde edilen QR sonuçları.....	59
Çizelge 4.7. Diabetes verisi için R programından $\tau=0.95$ için elde edilen QR sonuçları.....	59
Çizelge 4.8. Engel verisine ait R programından elde edilen Ekk regresyon sonuçları.....	65
Çizelge 4.9. Engel verisine ait R programından elde edilen QR sonuçları.....	65
Çizelge 4.10. Barro verisi için Ekk regresyon yöntemi sonuçları.....	69
Çizelge 4.11. 3 Bağımsız değişkenin yer aldığı ve tau değerinin 0.5 olduğu QR modeli sonuçları.....	70
Çizelge 4.12. 5 Bağımsız değişkenin yer aldığı ve tau değerinin 0.5 olduğu QR modeli sonuçları.....	70
Çizelge 4.13. 5 Bağımsız değişkenin yer aldığı ve tau değerinin 0.75 olduğu QR modeli sonuçları.....	70
Çizelge 4.14. 5 Bağımsız değişkenin yer aldığı ve tau değerinin 0.25 olduğu QR modeli sonuçları.....	71
Çizelge 4.15. Barro verisi için R programından elde edilen Varyans Analizi tablosu.....	71

Şekil 2.1. Star verisi saçılım grafiği.....	22
Şekil 2.2. Marietta verisine ait saçılım grafiği.....	26
Şekil 3.1. Quantile Fonksiyonu.....	31
Şekil 3.2. Check (p_{θ}) fonksiyonu	35
Şekil 3.3. Bağımsız ve özdeş dağılımlı hatalardan oluşan 2 değişkenli regresyonun quantile regresyonları.....	39
Şekil 3.4. Heterojen iki değişkenli regresyon için Quantile Regresyon	41
Şekil 4.1. Diabetes verisine ait matris saçılım grafiği	60
Şekil 4.2. Diabetes verisindeki glyhb ve stab.glu değişkenleri için Ekk ve QR yönteminden elde edilen regresyon doğruları.....	61
Şekil 4.3. Diabetes verisi için Robust standartlaştırılmış rezidü analizi grafiği.....	62
Şekil 4.4. Diabetes verisi için LS standartlaştırılmış rezidü analizi grafiği.....	63
Şekil 4.5. Engel verisine ait saçılım grafiği	64
Şekil 4.6. Farklı tau değerlerindeki QR doğruları.....	67
Şekil 4.7. Sabit ve income değişkeninin katsayı ve güven bandları grafiği	68
Şekil 4.8. Sabit ve lgdp2 değişkenlerinin katsayı ve güven bandları grafiği.....	72
Şekil 4.9. mse2, lexp2 ve llnr2 değişkenlerinin katsayı ve güven bandları grafiği ...	73
Şekil 4.10. gedy2 vely2 değişkenlerinin katsayı ve güven bandları grafiği	74
Şekil 4.11. gcony2 ve ttrad2 değişkenlerinin katsayı ve güven bandları grafiği	75

SİMGELER VE KISALTMALAR

QR	: Quantile Regresyon
EKK	: En Küçük Kareler
LAD	: En Küçük Mutlak Sapma
LRM	: Lineer RegresyonModeli
LS	: En Küçük Kareler
MLE	: En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi
GMM	: Genelleştirilmiş Momentler Yöntemi

1.GİRİŞ

İstatistik biliminin en önemli konularından biri olan regresyon analizi, bağımlı değişken ile bağımsız değişken(ler) arasındaki ilişkiyi inceleyen ve bu ilişkiyi matematiksel bir model ile ortaya koyan bir analiz yöntemidir.

Regresyon analizinin amacı; Bağımsız değişkenler aracılığıyla bağımlı değişkeni tahmin etmek, bağımsız değişkenlerden hangisi/hangilerinin bağımlı değişkeni en çok etkilediğini bulmak ve aralarındaki yapıyı matematiksel bir model ile ifade etmektir. Regresyon kavramı ilk kez 1897 yılında Galton'un kalıtım kuramı ile ilgili çalışmalarında ortaya çıkmıştır.

Bir tek bağımsız değişkenin kullanıldığı regresyon analizi tek değişkenli regresyon analizi, birden fazla değişkenin kullanıldığı regresyon analizi de çok değişkenli regresyon analizi olarak adlandırılır.

Regresyon analizi bazı varsayımlara dayanır. Bu varsayımların en önemlisi, bağımlı ve bağımsız değişken arasındaki ilişkinin fonksiyonel şeklinin biliniyor olmasıdır. Varsayımların sağlanmadığı durumlarda yapılan tahminler iyi bir tahmin olma niteliğine sahip olmazlar. Bu durumda alternatif regresyon modelleri gerekli olabilir. Parametrik regresyon modelleri normal dağılım varsayımını gerektirmektedir. Dağılımın normal olmadığı durumlarda alternatif regresyon modellerine ihtiyaç duyulur.

Parametrik modellerde en uygun matematiksel modelin seçilmesi gibi, alternatif regresyon modellerinin de en uygunun seçilip kullanılması gerekir. Alternatif regresyon modellerinden biri de Quantile Regresyon (QR)'dur ve diğer regresyon modellerinde olduğu gibi bu yönteminde amacı değişkenler arasındaki ilişkiyi açıklamaktır.

Koenker ve Basett (1978) tarafından önerilen Quantile Regresyon, koşullu quantile fonksiyonlarının tahmin modeli için uygun bir yöntem sağlar (Koenker ve Hallock, 2001). Quantile Regresyon, özellikle koşullu quantile'lerin değişkenlik gösterdiği durumlarda kullanışlıdır. Quantile'lere bağlı olarak regresyon katsayılarını belirler (Chen, 2005).

Quantile Regresyon Modelleri koşullu ortalama fonksiyonları ve koşullu quantile fonksiyonları için tahmin yapılmasında kullanılır. Quantile Regresyon, Medyan Regresyon'un belirlenen quantile'ler için genelleştirilmiş halidir. Bu regresyon modelleri uç değerlere ve eğikliğe En Küçük Kareler (Ekk) Yöntemi'nden daha az hassastır.

Quantile Regresyon basit konum modeli,

$$Y_i = \beta + \varepsilon_i \quad (1.1.)$$

olarak ifade edilir.

Burada; Y_i ; simetrik F dağılım fonksiyonuna sahip, bağımsız, özdeş dağılımlı β medyanlı rastgele değişkendir.

Bu modelde θ .'cı quantile,

$$\min_{\beta} \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i: y_i \geq \beta} \theta |y_i - \beta| + \sum_{i: y_i < \beta} (1 - \theta) |y_i - \beta| \right\} \quad (1.2.)$$

ifadesinin minimizasyonu ile elde edilir. ($0 < \theta < 1$)

Bu tezin amacı, alternatif regresyon modeli olarak Quantile Regresyonu açıklamak ve diğer robust regresyon yöntemleriyle karşılaştırarak aradaki farklılıkları ve benzerlikleri ortaya koymaktır.

Bu çalışmanın ikinci bölümü Quantile regresyona altyapı hazırlaması amacıyla oluşturulmuştur. Bu bölümde parametrik regresyon modeli olan Lineer regresyon modeli (LRM), En küçük mutlak sapma (LAD) regresyon yöntemlerine ve bunların tahmininde kullanılan yöntemlere yer verilecektir. Bu bölümdeki amaç alternatif robust yöntemler arasında Quantile Regresyonunun önemini ortaya koymaktır.

Üçüncü bölümde Quantile Regresyon ayrıntılı bir biçimde incelenmiştir. Bu bölümde quantile kavramına, quantile yoğunluk fonksiyonuna, quantile regresyonuna, quantile regresyonunun doğrusal programlama gösterimine, sıra

istatistiği tahmin edicisine, QR için Bootstrap metoduna, QR için sabit varyansın incelenmesine yer verilmiştir.

Bu tezin dördüncü bölümü Quantile regresyon ile ilgili uygulamalara ayrılmıştır. Uygulamada üç farklı veri seti farklı modeller ile tahmin edilmeye çalışılmıştır. Bu tahminler yardımıyla sonuçlar karşılaştırılmıştır.

2. REGRESYON MODELLERİ

İstatistiğin en önemli konularından biri regresyon analizidir. Regresyon analizi finans, matematik, ekonomi, tıp, ziraat, mühendislik gibi bilim dallarında yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Regresyon analizi ile “Bağımlı ve bağımsız değişkenler arasında bir ilişki var mıdır?” “Varsa bu ilişkinin gücü ve türü nasıldır?” gibi sorulara cevap verilir. Regresyon analizinde değişkenler arasındaki ilişki matematiksel bir model yani fonksiyon yardımı ile ortaya konmaktadır. Lineer Regresyon Modeli’nde (En Küçük Kareler Regresyonu) hataların karelerinin toplamı minimize edilir. Hataların kareleri yerine farklı değerlerin minimizasyonu da söz konusu olabilir. Bu durumda farklı regresyon modelleri kullanılabilir.

2.1. Lineer Regresyon Modeli

Regresyon analizini uygulayabilmek için değişkenler arasındaki ilişkinin fonksiyonel yapısının bilinmesi gerekmektedir. Fonksiyonel yapıyı öğrenmek için değişkenlere ilişkin saçılım grafiklerinden yararlanılır. Eğer ilişki doğrusal ise bu iki değişken için doğrusal regresyon denklemi bulunabilir (Alpar, 2003).

İki değişken arasındaki ilişkinin doğrusal olduğu varsayılarak incelenen regresyon modeline “Basit Doğrusal Regresyon Modeli” denir ve genellikle

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \quad (2.1.)$$

şeklinde gösterilir.

Regresyon modelinde Y_i ile ifade edilen değişkene “bağımlı veya yanıt değişken”, X_i ile ifade edilen değişkene ise “bağımsız veya açıklayıcı değişken” denir. β_0 ve β_1 bilinmeyen parametrelerdir. Y_i değişkenindeki değişimler bağımsız X_i değişkeni tarafından açıklanmaktadır. Değişkenler arasında stokastik ilişki olduğu için değişkenlerden birinin alacağı değere karşılık diğer değişken farklı değer alabilmektedir. Bağımlı değişken Y_i hata terimi ε_i ’nin lineer bir fonksiyonudur. Temel varsayımlar nedeniyle ε_i normal dağılır. $E(\varepsilon) = 0$, bundan dolayı Y_i de

normal dağılmaktadır. Dağılımın ortalaması $(\beta_0 + \beta_1 X_i)$ ve varyansı σ^2 'dir. β_0 ve β_1 'in tahmini Y_i 'nin ortalamasının tahminidir.

2.1.1. Parametrelerin Tahmin Edilmesi (β_0 ve β_1)

β_0 ve β_1 'i tahmin etmek için birçok yöntem kullanılabilir. Bu yöntemlerden bir tanesi En Küçük Kareler Yöntemi'dir.

$$Q(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2 \quad (2.2.)$$

Bu fonksiyonda farkların kareleri toplamı β_0 ve β_1 'e göre minimize edilerek $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ tahmin edicileri bulunur. Bu yöntem "En Küçük Kareler Yöntemi" olarak adlandırılır.

Regresyon modeli için Y_i ile $E(Y_i)$ arasındaki farkların karelerinin minimizasyonu sonucunda,

$$\begin{aligned} \sum Y_i &= n \bar{\beta}_0 + \bar{\beta}_1 \sum X_i \\ \sum X_i Y_i &= \bar{\beta}_0 \sum X_i + \bar{\beta}_1 \sum X_i^2 \end{aligned} \quad (2.3.)$$

olarak iki denklem elde edilir. Bu denklemler "Normal Denklemler" olarak adlandırılır. Bunların çözümü

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_0 &= \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} \\ \hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^n Y_i X_i - \frac{(\sum Y_i)(\sum X_i)}{n}}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n}} \end{aligned}$$

ile $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ bulunur.

Burada $\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$ ve $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 'dir. (Montgomery, Peck, Vining, 2001).

Ekk Regresyonu sapan değerlerin etkisinde kalabilir. Hatalar normal dağılıyorsa değişkenler arasındaki ilişkiyi en iyi şekilde açıklar; ancak hataların

normal dağılmadığı durumlarda (sapan değerlerin olması durumunda hatalar normal dağılmayabilir) Ekk tahminleri iyi sonuç vermezler.

Belirlilik katsayısı (R^2), bağımlı değişkendeki değişmelerin bağımsız değişken veya değişkenler tarafından açıklanma oranını belirten katsayıdır.

Basit lineer regresyonda tek bağımsız değişken olduğundan, bağımlı değişkendeki değişmeler sadece bu değişken tarafından açıklanmaktadır.

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} \quad (2.4.)$$

olarak elde edilir. $0 \leq R^2 \leq 1$ olur. R^2 'nin 1'e yaklaşması bağımlı değişkendeki değişmelerin bağımsız değişken tarafından iyi açıklandığını ortaya koyacaktır

2.2. Çoklu Lineer Regresyon Modeli

Basit Lineer Regresyon modelinin bağımlı değişkenini etkileyecek, bağımlı değişkendeki değişmelerin nedeni olabilecek değişkenlerin eklenmesi ile oluşturulan modellere “Çoklu Lineer Regresyon Modelleri” denir.

Y bağımlı değişkeni $X_1, X_2, \dots, X_k$ açıklayıcı değişkenleri ile ilişkilendiren

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k + \epsilon \quad (2.5.)$$

modele çoklu lineer regresyon modeli denir.

2.2.1. Model Parametrelerinin Tahmini

Çoklu Lineer Regresyon modelindeki regresyon katsayılarının tahmini için En Küçük Kareler ve En Çok Olabilirlik (ML) yöntemi kullanılır. Matris gösterimi,

$$Y = X\beta + \epsilon \quad (2.6.)$$

formundadır.

Burada,

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}_{n \times 1} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{nk} \end{bmatrix}_{n \times (k+1)} \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}_{(k+1) \times 1}$$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

dır.

Y : $n \times 1$ tipinde gözlemlerin vektörü

X : $n \times (k+1)$ tipinde açıklayıcı değişkenlerin matrisi

β : $(k+1) \times 1$ tipinde regresyon katsayılarının vektörü

ε : $n \times 1$ tipinde rasgele hataların vektörüdür.

S ile gösterilen Ekk fonksiyonu

$$(\varepsilon = Y - X\beta)$$

$$\begin{aligned} S(\beta) &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \varepsilon' \varepsilon = (Y - X\beta)'(Y - X\beta) \\ &= Y'Y - 2\beta'X'Y + \beta'X'X\beta \end{aligned} \quad (2.7.)$$

dır.

Ekk tahmini hesaplanmasında $S(\beta)$ 'yı minimum yapan $\hat{\beta}$ bulunur. Ekk tahmin edici

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \beta} \Big|_{\hat{\beta}} &= -2X'Y + 2X'X\hat{\beta} = 0 \\ X'X\hat{\beta} &= X'Y \end{aligned} \quad (2.8.)$$

denklemini sağlamalıdır.

Bu denklemlere Ekk normal denklemleri denir. Eşitliğin her iki tarafının $(X'X)^{-1}$ ile çarpılmasıyla β nın Ekk tahmin edicisi

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y \quad (2.9.)$$

bulunur.

Açıklayıcı değişkenler lineer bağımsız ise yani X'in herhangi bir kolonu diğerinin lineer bir kombinasyonu değil ise $(X'X)^{-1}$ matrisi her zaman vardır.

2.3. En Küçük Mutlak Sapmalar Regresyonu

En Küçük Mutlak Sapmalar Regresyonu (LAD=Least Absolute Deviations)'nda hataların karelerinin mutlak değerleri minimize edilerek parametre tahminleri yapılır. Hataların normal dağılmaması ve/veya veri kümesi içinde sapan değerlerin bulunması durumunda LAD yöntemi diğer klasik tahmin yöntemlerine göre üstünlük göstermektedir.

En Küçük Mutlak Sapma Regresyonu'nun özel bir hali de Medyan Regresyon'dur. Bu regresyon modelinin açıklanabilmesi için örneklem ortalaması ve örneklem medyanı ile ilgili bazı özelliklerin hatırlanması gerekmektedir.

Hiç açıklayıcı değişken olmaması durumunda, Y rasgele değişkeninin medyanı herhangi γ sayısı ise,

$$P(Y \leq \gamma) \geq \frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad P(Y \geq \gamma) \geq \frac{1}{2}$$

olur.

Örneklem medyanı c gibi bir sayı ise,

$$1/n \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(y_i \leq c) \geq 1/2 \quad \text{ve} \quad 1/n \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(y_i \geq c) \geq 1/2$$

olur. Burada $\emptyset(.)$ karakteristik fonksiyondur ve parantez içindeki ifade doğru ise 1 değerini, diğer durumlarda 0 değerini aldığını ifade etmektedir. Seride gözlemlerin aldığı değerlerin yarısı c'nin altında yarısı c'nin üstünde yer alacaktır.

2.3.1. Basit LAD Regresyonu

Ekk Regresyonu'nda hataların kareleri toplamını $(\sum \varepsilon_i^2)$ minimize eden $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ tahminleri elde ediliyordu, En Küçük Mutlak Sapmalar Regresyonu'nda ise hataların mutlak değerlerinin toplamını $(\sum |\varepsilon_i|)$ minimize eden $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ tahminleri elde edilir (Rao,1999).

$$\sum_{i=1}^n |Y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i)| \quad (2.10.)$$

ifadesi minimize edilir.

$Y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i)$, (X_i, Y_i) noktasının $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$ doğrusundan sapmasını gösterir.

LAD Regresyonda, ε_i^2 yerine $|\varepsilon_i|$ 'ler kullanıldığı için hesaplanması daha kolaydır ve hataların büyüklüğünü ölçmede ε_i^2 'den daha doğru sonuç verir, ancak tahminlerin hesaplanması çok daha zordur; çünkü LAD tahminleri için formüller yoktur, bunun yerine bir algoritma yardımıyla tahminler elde edilir. LAD Regresyonunda amaç Ekk regresyonunda olduğu gibi değişkenler arasındaki ilişkiyi en iyi açıklayan doğruyu bulmaktır. Herhangi (X_0, Y_0) noktası verildiğinde, algoritma yardımıyla, bu noktadan geçen birçok doğrudan en iyi olanı bulunur. Algoritma ile regresyon doğrusunun belirlenmesi; bir noktadan geçen çok sayıda doğrudan birinin en iyi doğru olduğu ve en iyi doğrunun aynı zamanda başka bir noktadan geçeceği varsayımlarına dayanır (Birkes ve Dodge, 1993). Belirlenen (X_0, Y_0) başlangıç noktasına göre diğer tüm noktaların eğimleri $(Y_i - Y_0)/(X_i - X_0)$ hesaplanır ve bunlar küçükten büyüğe sıralanır.

$X_i = X_0$ olan noktalar ihmal edilir. Böylece;

$$(Y_1 - Y_0)/(X_1 - X_0) \leq (Y_2 - Y_0)/(X_2 - X_0) \leq \dots \leq (Y_n - Y_0)/(X_n - X_0)$$

olur.

$$T - \sum |X_i - X_0|$$

olduğunda,

$$\begin{aligned} |X_1 - X_0| + \dots + |X_{k-1} - X_0| &< \frac{1}{2}T \\ |X_1 - X_0| + \dots + |X_{k-1} - X_0| + |X_k - X_0| &> \frac{1}{2}T \end{aligned} \quad (2.11.)$$

olarak k.-inci indeks bulunur.

Ardından yeni bir (X_k, Y_k) başlangıç noktası seçilir. Bu nokta $\frac{1}{2}T$ 'den daha büyük değere sahiptir ve (X_0, Y_0) noktasından geçen en iyi doğrunun bu noktadan da geçtiği kabul edilir. Yeni başlangıç noktasına göre diğer noktaların eğimleri hesaplanarak seçilen ilk nokta için yapılan işlemlerin aynısı bu nokta için de yapılır. Sonuçta (X_k, Y_k) noktasından geçen, sapmayı minimize eden en iyi doğru bulunur. Bu doğru aynı zamanda başka bir noktadan daha geçer, bu nokta (X_M, Y_M) ile gösterilirse, bu noktadan geçen, sapmayı minimize eden en iyi doğru bulunur, bu işlemler aynı şekilde devam eder. Bulunan her yeni doğru bir öncekinden daha iyi sonuç verir. En son bulunan doğrunun geçtiği nokta, daha önceki noktalardan biriyle aynı olana kadar işlemlere devam edilir. Aralarda hangi noktalardan geçtiğine bakılmaksızın en son bulunan noktadan geçen doğru en iyi doğrudur. Bu nokta (X_t, Y_t) ise,

$$Y_t = \beta_0^* + \beta_1^* X_t \quad (2.12.)$$

olur. Burada,

$$\begin{aligned}\beta_1^* &= \frac{Y_t - Y_0}{X_t - X_0} \\ \beta_0^* &= Y_0 - \beta_1^* X_0\end{aligned}\quad (2.13.)$$

dır (Birkes ve Dodge, 1993).

Daha önceden de belirtildiği gibi algoritmanın uygulanabilmesi için, bir noktadan geçen bir en iyi doğru vardır ve bir noktadan geçen en iyi doğru aynı zamanda sadece bir noktadan daha geçer varsayımları kabul edilir. Algoritmada ileriye doğru adım oluşturulmaktadır, her adımda verilen noktadan geçen, sapmayı minimize eden en iyi doğru bulunmaktadır. En iyi doğru her zaman başka bir noktadan geçmekte ve bu yeni nokta bir sonraki adımda kullanılmaktadır. Varsayımın aksine bir noktadan geçen birden fazla en iyi doğru olabilir, bir noktadan geçen en iyi doğru aynı zamanda iki ya da daha fazla noktadan da geçebilir. Diğer bir deyişle, bir sonraki adımda kullanmak için birden fazla nokta seçeneği olacaktır. Yanlış seçimler yapıldığında da algoritma ya sürekli tekrarlanacak ya da LAD Regresyon doğrusu olmayan başka bir doğruya son bulabilecektir. Bu sorun;

$$\begin{aligned}|X_1 - X_0| + \dots + |X_{k-1} - X_0| &< \frac{1}{2}T \\ |X_1 - X_0| + \dots + |X_{k-1} - X_0| + |X_k - X_0| &> \frac{1}{2}T\end{aligned}\quad (2.14.)$$

koşullarında eşitlik olması durumunda veya $\beta^* = (Y_k - Y_0)/(X_k - X_0)$ eğiminin $(Y_{k-1} - Y_0)/(X_{k-1} - X_0)$ ya da $(Y_{k+1} - Y_0)/(X_{k+1} - X_0)$ 'a eşit olması durumunda ortaya çıkabilir.

Bu durumda başka bir algoritma kullanılabilir. LAD regresyon doğrusunun en az iki noktadan geçtiği bilinmektedir. Böylelikle tüm nokta çiftleri arasında doğru bulunabilir. Bu doğruların bazıları çakışır. $\sum_{i=1}^n |Y_i - (\beta_0 + \beta_1 X_i)|$ 'yi her doğru için hesaplayarak en küçük toplamı veren(ler) seçilir. Bu algoritmanın uygunluğu örneklem hacmi n'e bağlıdır ve bu algoritmada en iyi doğru sadece iki noktadan

geçer, bir noktadan geçen birden fazla doğru olması durumunda da bir tanesi seçilir ya da ortalamaları alınabilir. Bu ortalama doğru aynı zamanda LAD Regresyon doğrusudur.

Eğim parametresinin anlamlılığının testinde; öncelikle LAD Regresyon tahminleri $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ bulunur. Bulunan $\hat{\beta}_1$ tahmini değerinin gerçek değere eşit olması beklenemez ancak β_1 'in gerçek değerinin sıfır olması mümkündür. Bundan dolayı β_1 in sıfıra eşit olup olmadığı test edilir.

$e_i = Y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i)$ rezidüleri hesaplanır, bunlar küçükten büyüğe sıralanır. En ortadan bağımsız değişken sayısından bir fazla (k+1) gözlem değeri atılır, basit regresyonda bir bağımsız değişken olduğundan m=n-2 olur, burada n başlangıç gözlem sayısını, m de sıfıra eşit olmayan rezidü sayısını yani yeni gözlem sayısını ifade etmektedir. Test istatistiği;

$$|t| = \frac{|\hat{\beta}_1|}{S_{\hat{\beta}_1}} t_{\alpha/2; (n-2)}$$

olarak hesaplanır.

Burada,

$$S_{\hat{\beta}} = \frac{\hat{t}}{\sqrt{\sum (X_i - \bar{X})^2}}$$

olacaktır.

Yukarıda parametrenin standart hatasının hesaplanmasında kullanılan $\hat{t}$,

$$\hat{t} = \frac{\sqrt{m} (e_{(k_2)} - e_{(k_1)})}{4} \quad (2.15.)$$

olarak hesaplanır.

Burada;

$k_1: \left(\frac{m+1}{2} - \sqrt{m}\right)$ 'e en yakın tamsayı değeridir.

$k_2: \left(\frac{m+1}{2} + \sqrt{m}\right)$ 'e en yakın tamsayı değeridir.

$e_{(k_1)}$ küçükten büyüğe sıralanmış rezidüleri içerisinde k_1 'ci rezidünün değeridir.

$e_{(k_2)}$ k_2 'ci rezidünün değerini göstermektedir.

β_1 tahmini değerinin $\hat{\beta}_1$ 'ya yakın olması beklenir. β_1 ve $\hat{\beta}_1$ arasındaki fark bir ya da iki standart sapmadan ($S_{\hat{\beta}}$) büyük olmamalıdır. $|t|$ değerinin büyük olması, $\hat{\beta}_1$ ile sıfır arasındaki uzaklığın $S_{\hat{\beta}}$ 'den büyük olmasını, böylelikle $\beta_1 \neq 0$ hipotezinin reddedilmemesi yönünde karar verilmemesini sağlar (Saçaklı, 2005)

2.3.2. Çoklu LAD Regresyonu

LAD Regresyon L_1 regresyon olarak da adlandırılır çünkü $\sum |Y_i - (\alpha + bX_i)|$, sapma vektörlerinin L_1 normudur. Bir v vektörünün L_1 normu $\sum |v_i|$ 'dir. Benzer şekilde Ekk regresyonu da L_2 regresyon olarak adlandırılabilir. Çünkü sapma vektörlerinin L_2 normunu minimize eder. v vektörünün L_2 normu $\sqrt{\sum v_i^2}$ 'dir.

Basit LAD Regresyonda, LAD Regresyon doğrusu iki noktadan geçmekteydi. Benzer şekilde çoklu LAD Regresyonda, k açıklayıcı değişkenli LAD Regresyon denklemi, $(k+1)$ gözlem noktasını sağlar.

Çoklu Ekk regresyonunda olduğu gibi ikiden fazla değişken olduğunda kullanılır. Kullanılan bu regresyon modeli,

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_k X_{ik} + \epsilon_i \quad (2.16.)$$

olarak ifade edilebilir. Rezidüleri mutlak değerlerinin toplamını mümkün olduğunca minimum yapan $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_k$ LAD tahmin edicileri elde edilir. Bu,

$$\sum |Y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{i1} + \hat{\beta}_2 X_{i2} + \dots + \hat{\beta}_k X_{ik})| \quad (2.17.)$$

şeklinde gösterilebilir.

Minimum yapacak değerleri bulmak için herhangi bir formül yoktur, bir algoritma kullanılır. Burada da basit LAD regresyonda olduğu gibi algoritmanın uygulanabilmesi için, bir noktadan geçen bir en iyi doğru vardır ve bir noktadan geçen en iyi doğru aynı zamanda sadece bir noktadan daha geçer varsayımları kabul edilir.

Vektör gösterimiyle,

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix} \quad X_i = \begin{bmatrix} 1 \\ X_{i1} \\ X_{i2} \\ \vdots \\ \vdots \\ X_{ik} \end{bmatrix}$$

olacaktır. Bu durumda mutlak sapma; $\sum |y_i - \hat{\beta}'x_i|$ olarak yazılır. Bunu minimize edecek $\hat{\beta}$ vektörünü bulmak amaçtır. Basit LAD Regresyonu'nda olduğu gibi, Çoklu LAD Regresyonu da iteratif olarak çözülür. $\hat{\beta}^i$ vektörüyle işlemlere başlanır, sonra $\sum |y_i - \hat{\beta}^i x_i|$ 'nin minimum değerini veren daha iyi bir vektör bulunur. Sonunda $\hat{\beta}^*$ 'nin en iyi vektörü bulunur. Her adımda, $\hat{\beta}$ tahminleri vektöründe daha iyi bir $\hat{\beta}^*$ vektörü,

$$\hat{\beta}^2 = \hat{\beta} + t.d$$

olarak bulunur.

Bu vektörün bulunması için yön vektörü d ve t değerlerinin elde edilmesi gerekir. Minimumluğu sağlayacak t'yi bulmak için bir yöntem geliştirilir. Minimize edilecek olan ifade,

$$\sum |Y_i - (\hat{\beta} + td)'X_i| \quad (2.18.)$$

olacağından, burada, $Z_i = Y_i - \hat{\beta}'X_i$, $W_i = d'X_i$ dönüşümü yapılarak,

$$\sum |Z_i - tW_i| \quad (2.19.)$$

olarak elde edilir. Bu gösterim, daha önce $\sum |(Y_i - Y_0) - \hat{\beta}(X_i - X_0)|$ 'u minimize edecek $\hat{\beta}$ 'yi bulmakla aynıdır. Z_i/W_i oranları hesaplanıp, artan sıraya göre dizilir. Z ve W'yi yeniden indeksleyerek k indeksi bulunur:

$$\begin{aligned} |W_1| + |W_2| + \dots + |W_{k-1}| &< \frac{1}{2}T \\ |W_1| + |W_2| + \dots + |W_{k-1}| + |W_k| &> \frac{1}{2}T \end{aligned} \quad (2.20.)$$

Burada $T = \sum |W_i|$ 'dir. t'nin minimum yapan değeri Z_k/W_k 'dir.

Algoritmanın her bir adımında k açıklayıcı değişken sayısından bir fazla (p+1) yön vektörü vardır. Her bir d_j vektörü için (+) pozitif yön söz konusu olduğu gibi (-) negatif yönde söz konusudur. Bu nedenle açıklayıcı değişken sayısının bir fazlasının iki katı sayıda yön olacaktır. Bunlar arasından $\sum |Y_i - (\hat{\beta} + td)'X_i|$ değerini mümkün olduğunca hızlı t=0 değerine yaklaştıran yön seçilir. Bu değer nasıl hızla azaldığını belirlemek için sağ tarafın t=0'daki türevini alırız.

$\sum |Z_i - tW_i|$ ifadesinde t=0'da sağ tarafın türevi, $W_- + W_0 - W_+$ 'dir. Burada,

W_- : $\frac{Z_i}{W_i}$ negatif olduğunda $\sum |W_i|$ 'lerin toplamıdır.

W_0 : $\frac{Z_i}{W_i}$ sıfır olduğunda $\sum |W_i|$ 'lerin toplamıdır.

W_+ : $\frac{Z_i}{W_i}$ pozitif olduğunda $\sum |W_i|$ 'lerin toplamıdır.

Mümkün yönlerin her biri için bu türevler hesaplanır. Türevi en çok negatif olan yön en uygun yöndür. Tüm türevler pozitifse, bu durumda geçerli β vektörü β' katsayı tahminlerinin en iyi vektörüdür ve işlemler bu noktada son bulur.

Katsayıların anlamlılığının test edilmesi LAD Regresyonunda katsayıların anlamlılığının test edilebilmesi kısıtlı ve kısıtsız regresyon modellerinin rezidülerinin mutlak değerlerinin toplamaları ile mümkün olmaktadır. Kısıtsız modelin parametre sayısı p , kısıtlı modelin parametre sayısı q 'dur. İki model tahmin edilip rezidülerinin mutlak toplamaları bulunarak iki model arasındaki farkı oluşturan $(p-q)$ sayıda parametrenin anlamlılığı birlikte test edilir. Bu durumda temel hipotez,

$$H_0: \beta_{q+1} = \dots = \beta_p = 0$$

şeklinde oluşturulacaktır. Alternatif hipotez ise temel hipotezin geçerli olmadığını ifade edecektir. Test istatistiği,

$$F_{LAD} = \frac{SAR_{kısıtlı} - SAR_{kısıtsız}}{(p - q)(t/2)}$$

olarak hesaplanır.

Burada SAR, rezidülerin mutlak değerleri toplamıdır yani $SAR = \sum |e_i|$ 'dir.

Ayrıca t ,

$$t = \frac{\sqrt{m}(e_{(k2)} - e_{(k1)})}{4} \quad (2.21.)$$

olarak elde edilir. t 'nin hesaplanması için değeri sıfır olmayan rezidülerin sayısı $m = n - (p + 1)$ elde edilir. $e_{(k1)}$ ve $e_{(k2)}$ basit LAD Regresyon'da açıklandığı gibi uygulanacaktır (Birkes ve Dodge, 1993).

2.4. Örnekler

Bu kısımda sapan değerlere sahip veriler için robust yöntemlerin performanslarını göstermek için bazı örnekler vereceğiz. Burada ele alacağımız problem sapan değerlere sahip veriler için sapan değerlerden etkilenmeyen bir model kurmaktır. Katsayı tahminleri yapılarak bunlar en küçük kareler yöntemi ile karşılaştırılacaktır.

Örnek 2.4.1. Star verisi

Çizelge 2.1 star verisi, CYG OB1 yıldız kümesinin Hertzsprung-Russell diyagramıdır. Cygnus yönündeki 47 yıldızı içermektedir. Burada x , (T_e) yıldızın yüzeyindeki ısı etkisinin logaritmasını, y ise (L/L_0) ışıık yoğunluğunun logaritmasını göstermektedir.

Çizelge 2.1. Star verisi

i	$\log T_e$ (x_i)	$\log (L/L_0)$ (y_i)
1	4,7	5,32
2	4,26	4,93
3	4,3	5,19
4	3,84	4,65
5	4,26	5,57
6	□3,49	5,73
7	4,48	5,42
8	4,29	4,26
9	4,23	3,94
10	4,23	4,18
11	4,29	4,38
12	4,42	4,42

13	4,38	5,02
14	4,29	4,66
15	4,22	4,39
16	4,38	4,42
17	4,45	5,22
18	4,23	4,34
19	4,53	5,1
20	4,53	5,18
21	4,38	4,62
22	4,5	5,34
23	4,55	5,54
24	4,42	4,5
25	4,56	5,74
26	4,46	5,74
27	4,46	5,46
28	4,57	5,27
29	4,37	5,12
30	4,43	5,45
31	4,01	4,05
32	4,42	4,58
33	4,42	4,18
34	3,49	5,89
35	4,29	4,22
36	4,49	4,85
37	4,42	4,66
38	4,38	4,9
39	3,48	6,05
40	4,45	5,1
41	3,49	6,26
42	4,62	5,62

43	4,45	5,22
44	4,43	5,57
45	4,45	5,06
46	4,45	5,34
47	4,45	4,98

Hertzprung-Russell diyagramı Şekil 2.1.'de gösterilmektedir. Bu saçılım grafiğinde gözlemler iki grup halinde görülmektedir. Bu noktaların çoğunluğunun dik bir bant oluşturduğu görülmektedir. Sol üst köşedeki dört gözlem ise bir grup oluşturmaktadır.

Star verisine Ekk yöntemi uygulandığında çıkan sonuçlar Çizelge 2.2.'de verilmiştir.

Çizelge2.2. Star verisi için R programından elde edilen Ekk sonuçları

```
> summary(fit1, se="nid")
```

```
Call:
```

```
lm(formula = y ~ x, data = star)
```

```
Residuals:
```

```
      Min       1Q   Median       3Q      Max
-1.1063 -0.5035  0.1347  0.4470  0.8909
```

```
Coefficients:
```

```
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   6.8911     1.2449   5.536 1.52e-06 ***
x             -0.4361     0.2885  -1.512   0.138
---

```

```
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
Residual standard error: 0.5629 on 45 degrees of freedom
```

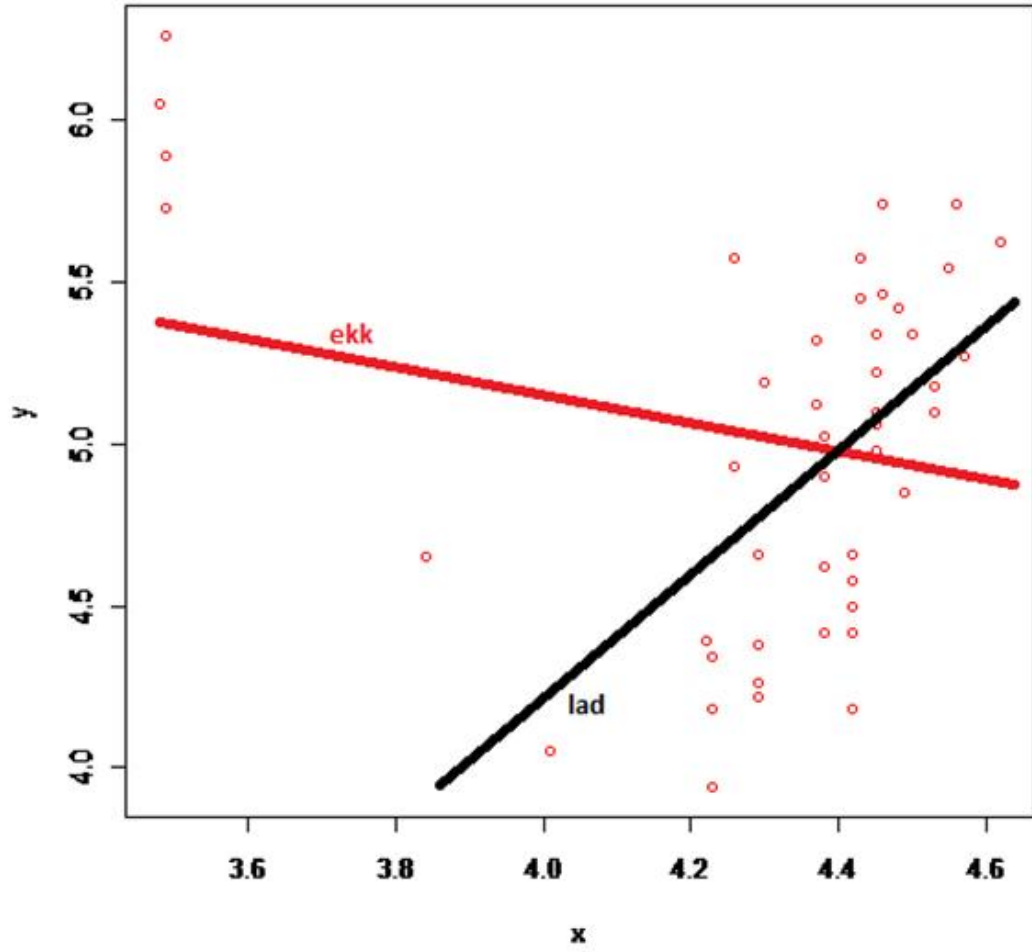
```
Multiple R-squared: 0.04833,    Adjusted R-squared: 0.02718
```

```
F-statistic: 2.285 on 1 and 45 DF,  p-value: 0.1376
```

Çizelge 2.3. Star verisi için R programından elde edilen $\tau=0.5$ (Medyan regresyon) sonuçları

```
> summary(fit2,se="nid")
Call: rq(formula = y ~ x, tau = 0.5, data = star)
tau: [1] 0.5
Coefficients:
              Value      Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  8.14920    4.02039    2.02697  0.04861
x           -0.69318    0.90706   -0.76421  0.44873
> summary(fit1,se="nid")
Call:
lm(formula = y ~ x, data = star)
Residuals:
      Min       1Q   Median       3Q      Max
-1.1063 -0.5035  0.1347  0.4470  0.8909
Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    6.8911     1.2449    5.536 1.52e-06 ***
x             -0.4361     0.2885   -1.512   0.138
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.5629 on 45 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.04833,    Adjusted R-squared:  0.02718
F-statistic: 2.285 on 1 and 45 DF,  p-value: 0.1376
```



Şekil 2.1. Star verisi saçılım grafiği

Saçılım grafiğine bakıldığında Ekk tahmin edicisinin sapan değerlerden etkilenip veriyi açıklamada yetersiz kaldığını, fakat alternatif robust yöntemlerden biri olan Lad tahmin edicisinin veriyi açıklamada etkili olduğunu görmekteyiz.

Örnek 2.4.2. Marietta verisi

Çizelge 2.4. Marietta verisi 60 gözlemlili ve iki değişkenden oluşan bir veri setidir (Bulter et al(1990). Robust and Partly Adaptive Estimation of Regression Models)

crsp: New York borsası için fazla iade oranının indeksi

mm: Martin Marietta şirketinin fazla iadeleri

Çizelge 2.4. Marietta verisi

<i>i</i>	<i>crsp</i>	<i>mm</i>
1	-0,03	-0,14
2	-0,06	-0,08
3	-0,02	-0,06
4	0,03	0,05
5	-0,04	-0,04
6	-0,03	-0,09
7	-0,03	-0,07
8	0,12	0,69
9	0,01	-0,08
10	0,11	0,09
11	0,04	0,00
12	0,01	0,08
13	0,03	-0,04
14	0,02	-0,09
15	0,03	0,23
16	0,07	0,11
17	0,00	0,04
18	0,03	0,10

19	-0,04	0,02
20	0,00	-0,07
21	0,01	0,08
22	-0,03	-0,06
23	0,02	-0,06
24	-0,02	-0,04
25	-0,02	0,02
26	-0,04	-0,08
27	0,01	-0,01
28	0,00	0,01
29	-0,06	-0,04
30	0,02	0,00
31	-0,02	0,09
32	0,10	0,10
33	-0,01	-0,05
34	-0,01	0,20
35	-0,02	-0,07
36	0,02	0,05
37	0,07	0,13
38	0,01	0,05
39	-0,01	-0,03
40	-0,01	-0,01
41	0,05	0,13
42	0,01	-0,01
43	-0,01	0,02
44	-0,01	-0,02
45	-0,04	-0,15
46	0,04	-0,01
47	0,06	0,04
48	0,04	0,02

49	0,00	-0,07
50	0,07	0,13
51	0,05	0,15
52	-0,02	0,01
53	0,05	0,07
54	0,01	-0,02
55	-0,06	-0,06
56	0,07	0,08
57	-0,08	-0,09
58	0,05	-0,09
59	0,01	0,10
60	-0,03	-0,12

Marietta verisi için Ekk ve Lad ($\tau=0.5$) yöntemlerin analiz sonuçları çizelge 2.5.'de verilmiştir.

Çizelge 2.5. Marietta verisi için Ekk ve Lad ($\tau=0.5$) yöntemlerinin sonuçları

```
> fit1<-lm(mm~crsp,data=mm)
> summary(fit1,se="nid")

Call:
lm(formula = mm ~ rsp, data = mm)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.181972 -0.057313 -0.008481  0.039773  0.471624

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  0.001683   0.012514   0.135   0.893
rsp          1.805777   0.290161   6.223 5.82e-08 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.09496 on 58 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.4004,    Adjusted R-squared:  0.3901
F-statistic: 38.73 on 1 and 58 DF,  p-value: 5.82e-08
```

```

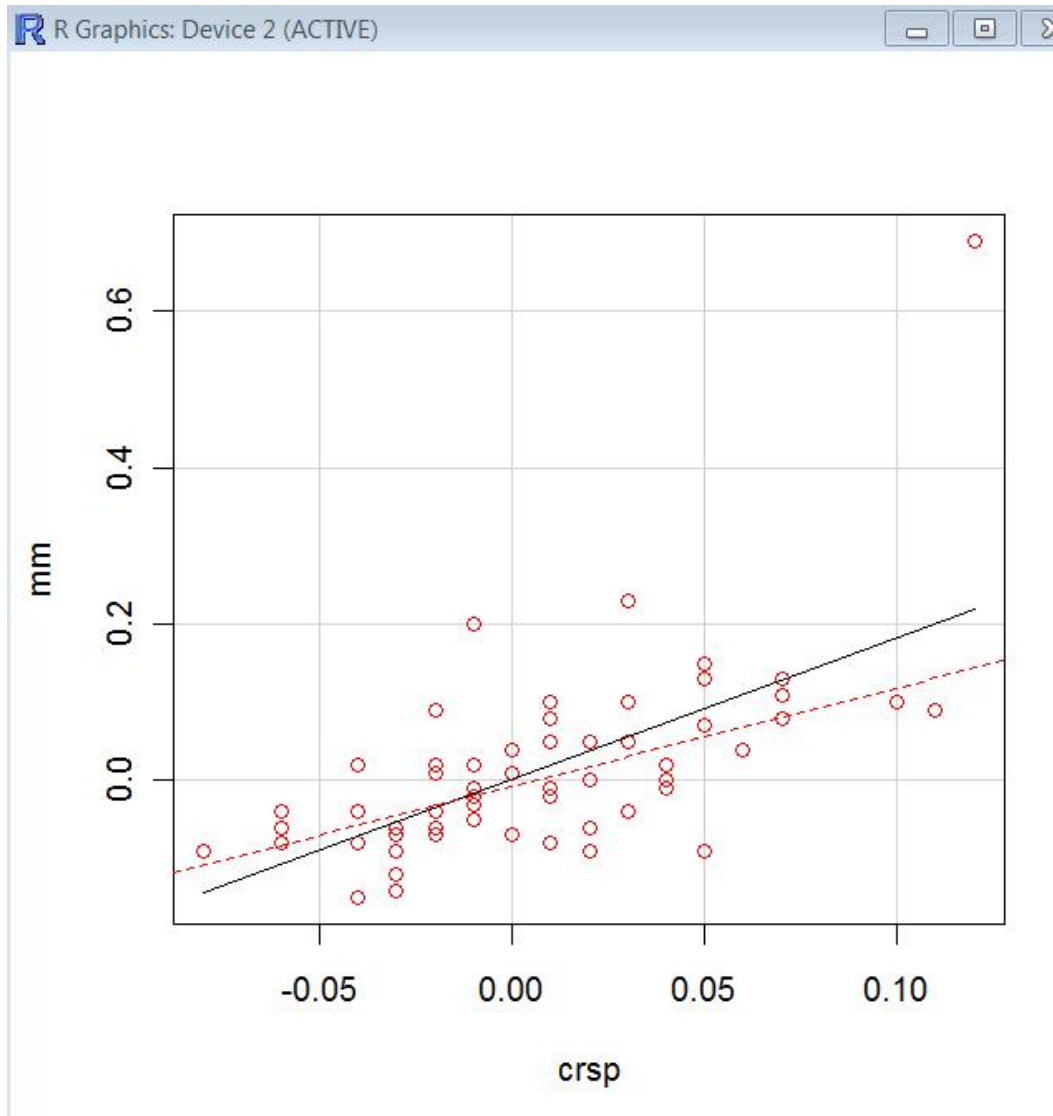
> fit<-rq(mm~crsp,tau=0.5,data=marietta)
> summary(fit, se="nid")

Call: rq(formula = mm ~ crsp, tau = 0.5, data = marietta)

tau: [1] 0.5

Coefficients:
            Value      Std. Error t value  Pr(>|t|)
(Intercept) -0.00750    0.01019   -0.73587  0.46477
crsp         1.25000    0.26172    4.77608  0.00001
> abline(rq(mm~crsp, data=marietta),lty=2,col="red")

```



Şekil 2.2. Marietta verisine ait saçılım grafiği

Şekil 2.2’de Marietta verisine ait saçılım grafiği görülmektedir. Bu grafikte lineer regresyon doğrusu ve LAD yöntemi (kesikli çizgi) uygulanmıştır. LAD regresyon yönteminin Ekk yöntemine göre biraz daha etkin olduğu görülmektedir.

3. QUANTILE REGRESYON

Değişkenler arasındaki ilişkiler incelenmek istendiğinde korelasyon ve regresyon analizi akla gelmektedir. Regresyon analizinde değişkenler arasındaki ilişkiler matematiksel bir model ile ortaya konmaktadır. Değişkenler arasındaki ilişkiyi açıklamak için parametrik modellerde, modelin fonksiyonel şeklinin doğru seçilmesi, modelde gerekli tüm değişkenlerin yer alması gibi bazı kriterler bulunmaktadır. Sonuç olarak en uygun regresyon modeli seçilse bile, “Değişkenler arasındaki ilişkiyi açıklamak yeterli midir? Değişkenler arasındaki ilişkiyi daha iyi açıklayacak farklı modeller olabilir mi?” soruları her zaman düşünülebilir. Ayrıca bazı durumlarda modellerin tahmin edileceği verinin yapısı, sapan değerlerin olması, serilerin normal dağılmaması gibi nedenlerle regresyon modelleri iyi sonuç vermeyebilir. Bu durumda alternatif regresyon modelleri gerekli olabilir. Alternatif regresyon modellerinden biri de Quantile Regresyon’dur.

3.1. Quantile Regresyona Giriş

En Küçük Kareler Regresyonu’nda hataların karelerinin toplamı minimize edilir. Hataların kareleri yerine farklı değerlerin minimizasyonu da söz konusu olabilir. Bu durumda Alternatif Regresyon Modelleri olarak adlandırılan farklı regresyon modelleri kullanılabilir. Alternatif regresyon yöntemlerinden biri de Quantile Regresyon’dur.

3.2. Quantile’ler ve Quantile Fonksiyonları

Herhangi bir dağılıma sahip örneğin yapısını göstermenin dört yolu vardır. Bunlar; kümülatif dağılım fonksiyonu, olasılık yoğunluk fonksiyonu, Quantile fonksiyonu ve Quantile yoğunluk fonksiyonudur.

Bir X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu $F(X)$ ile gösterilir ve X in x e eşit ya da daha küçük olması olasılığıdır. O halde,

$$F(X) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) \quad (3.1.)$$

dir.

Bir değişkenin alabileceği değerlerle bu değerleri alma olasılıkları arasındaki bağıntıyı gösteren fonksiyona “Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu” denir ve $f(x)$ ile gösterilir.

$$f(x)dx = P(x \leq X \leq x + dx), \quad (3.2.)$$

olarak tanımlanabilir.

Burada dx , x ’ in sonsuza doğru küçük aralığıdır. $f(x)$ eğrisinin altındaki alan, herhangi gözlenen değer toplam olasılığı, 1 olmalıdır. Kümülatif dağılım fonksiyonu ve Olasılık yoğunluk fonksiyonu arasındaki ilişki,

$$f(x)dx = F(x + dx) - F(x) = dF(x)$$

olacaktır.

Olasılık Yoğunluk fonksiyonu, Kümülatif Dağılım fonksiyonunun türevine eşittir ve

$$f(x) = dF/dx \quad (3.3.)$$

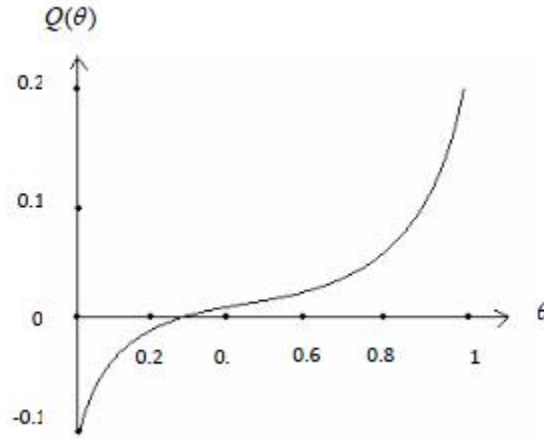
olarak elde edilir.

3.2.1. Quantile Fonksiyonu

Quantile Fonksiyonu QF veya $Q(\theta)$ ile gösterilir. Dağılımı tarif etmenin üçüncü yoludur. Quantile değeri değişkenin dağılımında yer alan ve dağılımı, kendisinden büyük olanlar ve kendisinden küçük olanlar diye ikiye bölen herhangi

bir değerdir. Şöyle ki, değerlerin θ 'sı, θ ' cı quantile'den daha küçüktür. (θ olasılık değerini ifade etmektedir.)

$x_\theta = (X \leq x_\theta)$ olasılığı için x 'in değeridir.



Şekil 3.1. Quantile Fonksiyonu Grafiği

x_θ 'nın değeri, kitlenin θ 'cı quantile'ı olarak adlandırılır. $x_\theta = Q(\theta)$ fonksiyonu, θ 'cı quantile, θ 'nın bir fonksiyonu olarak ifade edilir ve quantile fonksiyon olarak adlandırılır.

QF ve kümülatif dağılım fonksiyonu, herhangi (x, θ) çifti için $x = Q(\theta)$ ve $\theta = F(x)$ şeklinde yazılabilir. Bu fonksiyonlar birbirlerinin tersine eşittir ve sürekli artan fonksiyonlardır. Böylelikle

$$Q(\theta) = F^{-1}(\theta) \text{ ve } F(x) = Q^{-1}(x) \quad (3.4.)$$

şeklinde de gösterilebilir.

$Q(\theta)$ quantile fonksiyonu ise, θ 'nın tüm olasılıkları için, $0 \leq \theta \leq 1$, quantile değerlerini verir. Medyan da $Q(0,5)$ ' tir. Benzer şekilde $Q(1/4)$ ve $Q(3/4)$ quantile'lerdir.

Dağılımları modelleyebilmek için quantile fonksiyon kullanılabilir. x verilmişken y 'nin θ ' cı quantile'ı,

$$Q_y(\theta/x) = \beta x + \eta S(\theta) \quad (3.5.)$$

olarak gösterilir. Burada,

$\eta S(\theta)$; hata terimidir,

$S(\theta)$ simetrik olması gerekmeyen quantile fonksiyonudur,

η ölçek parametresidir.

y'nin x üzerindeki quantile regresyon fonksiyonu ya da koşullu quantile fonksiyonu olarak adlandırılır (Saçaklı, 2005).

3.2.2. Quantile Yoğunluk Fonksiyonu

Dağılımları modelleyebilmek için, dağılım fonksiyonunun türevini alarak olasılık yoğunluk fonksiyonu elde edildiği gibi, QF 'in de türevi alınarak quantile yoğunluk fonksiyonu (QDF) belirlenebilir ve,

$$q(\theta) = dQ(\theta)/d\theta \quad (3.6.)$$

olarak gösterilir.

$Q(\theta)$ azalmayan bir fonksiyon olduğu için eğimi $q(\theta)$ negatif değildir, her zaman $0 \leq \theta \leq 1$ birim aralığında yer alır, olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ ise sonsuz tanım aralığında yer alır.

Serinin mod değerinin olasılığı $p\text{-mod} \geq 0,5$ ise, dağılım sola çarpıktır ve $q(\theta)$ quantile yoğunluk fonksiyonu $q(\theta) \leq q(1-\theta)$ durumunu sağlar, $0 \leq \theta \leq 0,5$ ' tir. Quantile fonksiyonu da $Q(\theta) + Q(1-\theta) \leq 2Q(0,5)$ durumunu sağlar ve,

$$\text{ortalama} \leq \text{medyan} \leq \text{mod}$$

sıralaması sağlanır.

Benzer şekilde serinin mod değerinin olasılığı $p\text{-mod} \leq 0,5$ ise, dağılım sağa çarpıktır ve $q(\theta)$ quantile yoğunluk fonksiyonu $q(\theta) \geq q(1-\theta)$ durumunu sağlar, $0 \leq \theta \leq 0,5$ tir. Quantile fonksiyonu da $Q(\theta) + Q(1-\theta) \geq 2Q(0,5)$ durumunu sağlar ve,

$$\text{ortalama} \geq \text{medyan} \geq \text{mod}$$

sıralaması sağlanır (Saçaklı, 2005).

3.3. Quantile Regresyon

Quantile Regresyon ilk olarak regresyondaki klasik varsayımlardan hata terimlerinin normal dağılması varsayımını ihmal eden robust bir regresyon yöntemi olarak ortaya çıkmıştır.

Ekk yöntemi bir ya da daha fazla açıklayıcı değişken arasındaki ilişkiyi ve $X - x$ verildiğinde Y bağımlı değişkeninin koşullu ortalamasını modeller (Chen, 2005). Koenker ve Bassett (1978) tarafından öne sürülen Quantile Regresyon ise koşullu quantile fonksiyonlarının modeli için uygun bir yöntem sağlar (Koenker ve Hallock, 2001). Quantile regresyon, özellikle koşullu quantillerin değişkenlik gösterdiği durumlarda kullanışlıdır. Quantillere bağlı olarak regresyon katsayılarını belirler (Chen, 2005).

Ücretlerdeki ve gelirdeki eşitsizlik gibi dağılımın bozulduğu konuların incelenmesinde ekonomide yaygın olarak kullanılan Quantile Regresyon Modelleri koşullu ortalama fonksiyonları ve koşullu quantile fonksiyonları için tahmin yapılmasında kullanılır. Quantile Regresyon, Lad Regresyon'un belirlenen quantile'ler için genelleştirilmiş halidir. Bu regresyon modelleri uç değerlere ve eğikliğe En Küçük Kareler Yöntemi'nden daha az hassastır.

Quantile Regresyon basit konum modeli,

$$Y_i = \beta + \epsilon_i \quad (3.7.)$$

olarak ifade edilir.

Burada; $\mathbf{Y}_i$; simetrik F dağılım fonksiyonuna sahip, bağımsız, özdeş dağılımlı β medyanlı rastgele değişkendir.

Bu modelde θ .'cı quantile,

$$\min_{\beta} \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i: y_i \geq \beta} \theta |y_i - \beta| + \sum_{i: y_i < \beta} (1 - \theta) |y_i - \beta| \right\} \quad (3.8.)$$

ifadesinin minimizasyonu ile elde edilir.

Bu ifadenin doğrusal regresyon modeli,

$$y_i = x_i' \beta + e_i \quad (3.9.)$$

dir.

Burada; $\mathbf{x}_i'$, bağımsız değişken vektörüdür, e_i bağımsız, sıfır etrafında simetrik ve F dağılımına sahiptir.

Bu durumda θ .'cı quantile regresyon,

$$\min_{\beta} \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i: y_i \geq x_i' \beta} \theta |y_i - x_i' \beta| + \sum_{i: y_i < x_i' \beta} (1 - \theta) |y_i - x_i' \beta| \right\}$$

$$\min_{\beta} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \rho_{\theta}(y_i - x_i' \beta) \quad (3.10.)$$

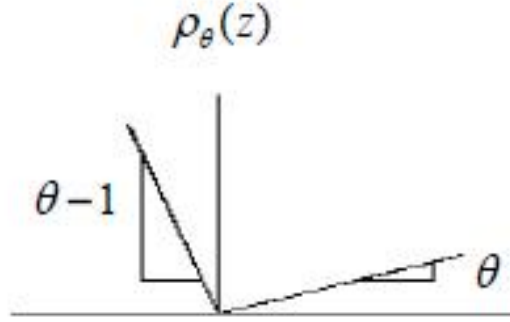
minimizasyon ile tahmin edilir. y 'nin θ .'cı quantile olarak da adlandırılabilir. Quantile regresyonu bu şekildeki gösterimi doğrusal programlama gösterimidir.

$$\rho_{\theta}(z) = z(\theta - I(z \leq 0)) \quad (3.11.)$$

I: karakteristik fonksiyonu

ρ_θ : Check fonksiyonudur.

Bu fonksiyon,



Şekil 3.2. Check (ρ_θ) fonksiyonu

Şekil 3.2 deki gibi gösterilebilir (Koenker ve Hallock, 2001). $\theta=0,5$ olması durumunda quantile regresyon amaç fonksiyonu LAD amaç fonksiyonuna eşittir. Quantile regresyon amaç fonksiyonu mutlak sapmaların ağırlıklandırılmış toplamıdır.

θ .'cı quantile regresyon gözlem değerlerinin işaretlerine dayalı olarak,

$$\theta \min_{\beta} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\theta - 1/2 + 1/2 \operatorname{sgn}(y_i - x_i' \beta))(y_i - x_i' \beta) \quad (3.12.)$$

şeklinde tahmin edilir. Burada $\operatorname{sgn}(a)$, a 'nın işaretidir ve a pozitif ise 1, negatif veya sıfır ise -1 değerini alır. Tahminlerin bu şekilde, yani gözlem değerlerinin büyüklüğü yerine gözlem değerlerinin işaretlerine dayalı olması, Quantile Regresyon'un robust bir yöntem olmasını sağlamaktadır. Minimizasyon için Birinci Mertebe Koşulu'nun sağlanması gerekir. Birinci Mertebe Koşulu'nun $K \times 1$ vektörü,

$$\min_{\beta} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\theta - 1/2 + 1/2 \operatorname{sgn}(y_i - x_i' \beta)) x_i = 0 \quad (3.13.)$$

olarak gösterilir.

Bu ifade, Birinci Mertebe Koşullu Genelleştirilmiş Momentler Yöntemi (GMM)'ne uyan bir moment fonksiyonudur. Moment fonksiyonu,

$$\psi(x_i, y_i, \beta) = (\theta - \frac{1}{2} + 1/2 \operatorname{sgn}(y_i - x_i' \beta)) x_i \quad (3.14.)$$

olarak tanımlanabilir.

$\psi(\cdot)$ 'nın moment fonksiyon olarak geçerli olabilmesi için belirli düzenleme şartları altında,

$$E[\psi(x_i, y_i, \beta_0)] = 0$$

olması gerekir.

Genelleştirilmiş Momentler Yöntemi kullanılarak elde edilen parametre tahmin edicileri tutarlı ve asimptotik olarak normal olacaktır.

Belirli düzenleme şartları altında,

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_\theta - \beta_\theta) \xrightarrow{L} N(0, \Lambda_\theta)$$

olarak gösterilebilir. Burada,

$$\Lambda_\theta = \theta(1 - \theta) (E[f_{u_\theta}(0/x_i) x_i x_i'])^{-1} E[x_i x_i'] (E[f_{u_\theta}(0/x_i) x_i x_i'])^{-1} \quad (3.15.)$$

olarak tanımlanır.

Olasılık değeri “1” olduğunda ve $f_{u\theta}(0/x) = f_{u\theta}(0)$ ise, yani hata teriminin yoğunluğu sıfır etrafında ise ve x 'ten bağımsızsa, Λ_θ ,

$$\Lambda_\theta = \frac{\theta(1-\theta)}{f_{u\theta}^2(0)} (E[x_i x_i'])^{-1} \quad (3.16.)$$

şeklinde sadeleştirilebilir.

$f_{u\theta}(\cdot/x)$ x 'ten bağımsız olduğunda, tüm quantile'lerin parametre vektörleri sadece kesim noktalarında farklılık gösterir.

Quantile katsayılarını yorumlayabilmek için, y 'nin k açıklayıcı değişkenine göre koşullu quantile'nin kısmi türevi alınmaktadır. Türev alındığında,

$$\partial Q_{u\theta}(y_i/x_i)/\partial x_{ik}$$

olacaktır. Bu türev, x 'in k 'cı değerindeki marjinal değişime göre, θ 'cı koşullu quantile'deki marjinal değişimi vermektedir.

3.4. Quantile Regresyonun Özellikleri

1) Ekk ve Lad Regresyon y 'nin koşullu dağılımının ortası hakkında bilgi vermekte, Quantile Regresyon ise farklı quantile değerleri için y 'nin x 'e göre koşullu dağılımının tümü hakkında bilgi vermektedir.

2) Quantile Regresyon'da;

$$\min_{\beta} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \rho_{\theta}(y_i - x_i' \beta)$$

minimizasyonu, doğrusal programlama (LP) gösterimidir, bu durum tahmini kolaylaştırır.

- 3) Quantile'ler monoton dönüşümlere olanak verirler. Herhangi $h(.)$ monoton fonksiyonu için $Q_{h(y)/x}(\tau/x) = h(Q_{y/x}(\tau/x))$ olur.
- 4) Quantile'ler y 'deki sapan değerlere karşı kararlıdır (Robust).
- 5) Hata terimi normal dağılmadığında, quantile regresyon tahmin edicileri Ekk tahmin edicilerinden çok daha etkin olabilir.
- 6) Quantile Regresyon değişen varyansın belirlenmesine imkan verir.
- 7) Quantile Regresyon amaç fonksiyonu için tahmin edilen katsayı vektörü bağımlı değişkendeki sapan değerlere duyarlı değildir ve yerleşimin robust bir ölçüsüdür.
- 8) Farklı quantile'lerde farklı sonuçların ortaya çıkması, bağımlı değişkenin koşullu dağılımının farklı noktalarındaki açıklayıcı değişkenlerdeki değişikliklere farklı tepki vermesi olarak yorumlanabilir.
- 9) Lad Tahmin edicileri, quantile tahmin edicilerin doğrusal kombinasyonuna dayanır. Lad Tahmin edicileri, $Y_1, Y_2, \dots, Y_T$ sıra istatistiklerinin doğrusal kombinasyonları olan tahmin edicilerdir. Bu tahmin ediciler doğrusal model için genelleştirilmiş, Lad regresyon da diğer quantile'ler için geliştirilmiştir (Saçaklı, 2005).

3.6. Quantile Regresyon için Bir Örnek

Bağımsız ve özdeş dağılımlı hatalardan oluşan iki değişkenli regresyon modeli için simülasyon yardımı ile yapay bir veri oluşturulsun.

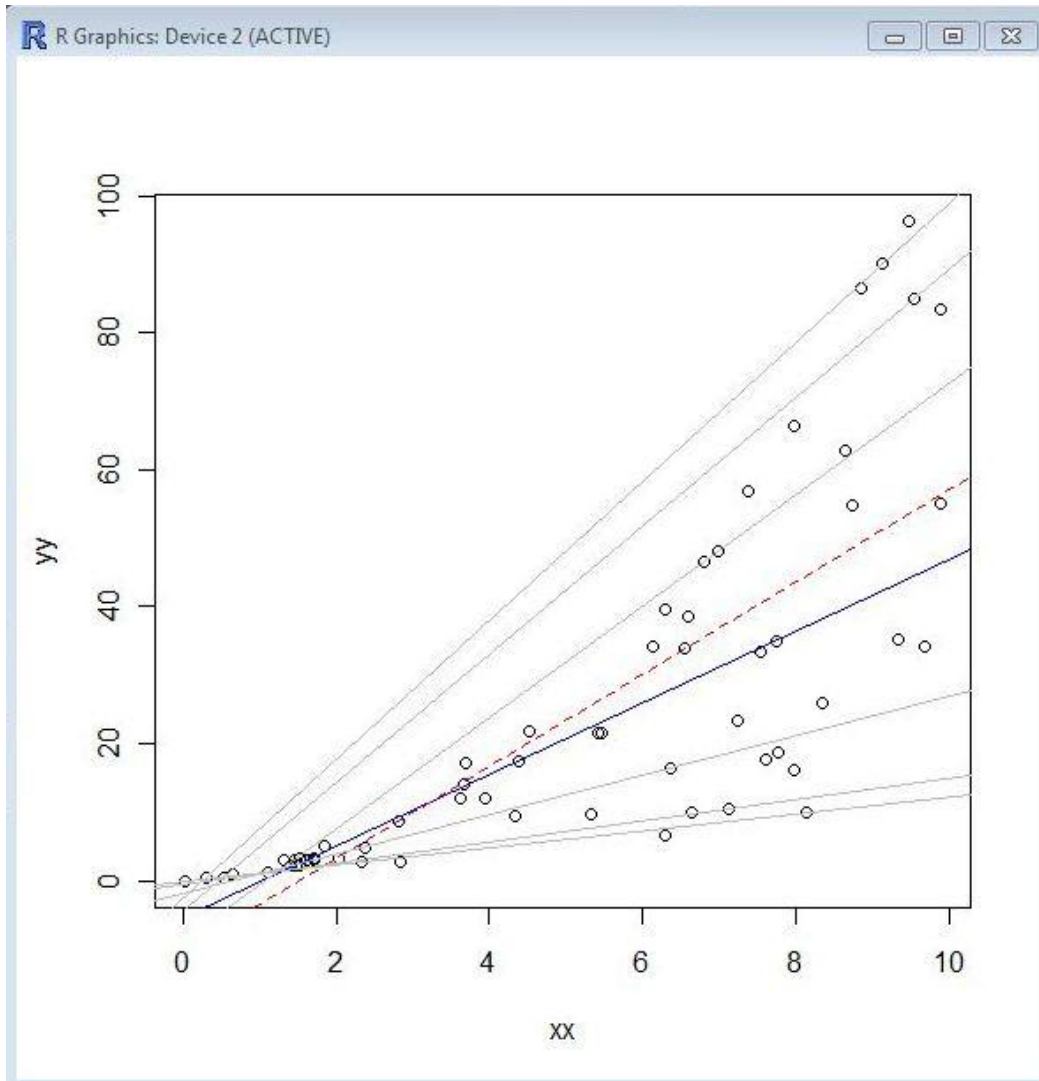
$$y_i = \beta_0 + x_i\beta_1 + F_x^{-1}(\tau) \quad (3.17.)$$

ve böylece y 'nin koşullu quantile fonksiyonu,

$$Q(\tau|x) = \beta_0 + x_t\beta_1 + F_u^{-1}(\tau) \quad (3.18.)$$

dir. Burada, F_u hataların dağılım fonksiyonunu gösterir.

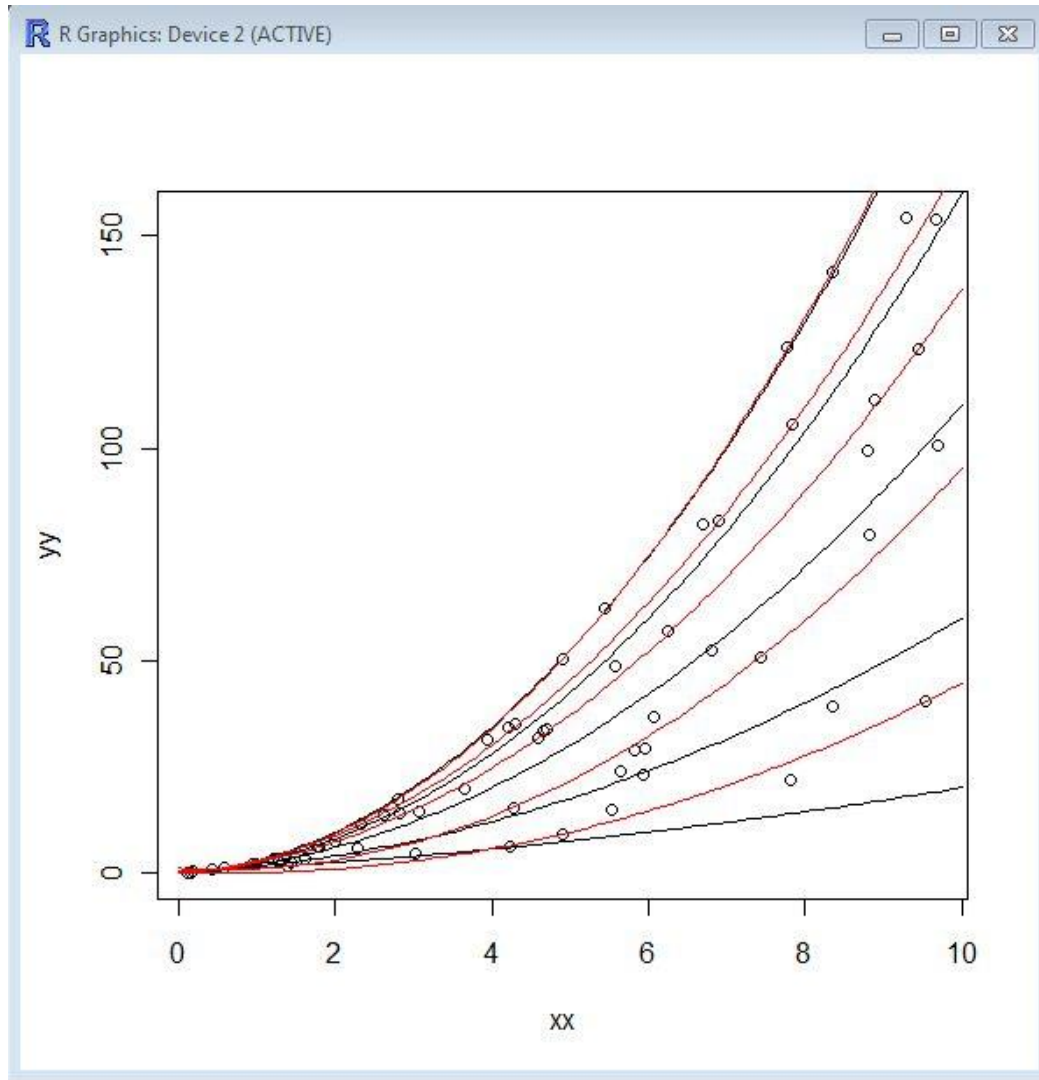
Bu durumlarda quantile fonksiyonları, kitle parametresi kestiricileri $\hat{\beta}(\tau)$ ile bir diğer dikey çizgiyi basit bir şekilde yer değiştirmesidir, $(\beta_0 + F^{-1}(\tau), \beta_1)^T$.



Şekil 3.3. Bağımsız ve özdeş dağılımlı hatalardan oluşan iki değişkenli regresyonun quantile regresyonları

Şekil 3.3’de, bazı uydurulmuş quantile regresyon doğruları ile veri örneklendirilmiştir. Noktalar Düzgün dağılımdan alınan 60 tane gözlemi göstermektedir. Gri doğrular $\{0.05, 0.1, 0.25, 0.75, 0.9, 0.95\}$ değerli koşullu quantile çizgileridir. Siyah doğru grubun τ aralığı için uydurulmuş quantile doğrusunu göstermektedir. τ arttıkça bu uydurulan doğru yukarı doğru çıkmaktadır. Bu örnekte 66 farklı quantile regresyon oluşur.

Gerçek veri analizlerinde lineer regresyon modeli Şekil 3.3’deki gibi davranır. Bu durumlarda quantile regresyona ihtiyaç vardır. Koşullu ortalama fonksiyonunun en küçük kareler kestiricisi ve dağılımın bazı birleşmiş ölçümü genellikle yeterli olur. En küçük karelere robust alternatifler uzun kuyruklu durumlarda uyum sağlayabilir.



Şekil 3.4. Heterojen iki değişkenli regresyon için Quantile Regresyon

Şekil 3.4 daha karmaşık durumu örneklendirir. Model heterojen formdadır.

$$y_i = \beta_0 + x_i\beta_1 + \sigma(x_i)u_i \quad (3.19.)$$

dir.

Burada $\sigma(x) = \gamma x^2$ ve $\{u_i\} \rightarrow$ özdeş bağımsız dağılımlıdır.

y 'nin koşullu quantile fonksiyonu

$$Q_y(\tau|x) = \beta_0 + x\beta_1 + \sigma(x)F^{-1}(\tau) \quad (3.20.)$$

minimize edilirse,

$$\sum \rho_\tau(y_i - \beta_0 - x_i\beta_1 - x_i^2\beta_2)$$

$$\hat{\beta}(\tau) = (\beta_0, \beta_1, \gamma F^{-1}(\tau))^T \text{ ye yakınsar.}$$

Uydurulmuş Quantile regresyon eğrileri, kitledeki koşullu quantile fonksiyonların ailesi için karşılaştırılabilir bir deney sağlar.

3.7. Quantile Regresyonun Doğrusal Programlama Gösterimi

Quantile Regresyon' un doğrusal programlama gösterimi sonlu sayıdaki simpleks iterasyonlarla tahminin belirleneceğini ifade eder. İterasyon sayısı doğrusal programlama algoritmasına göre küçüktür (Barrodale, 1968). Ekk Regresyonu'ndan farklı olarak parametre vektör tahmini sapan değerlere karşı robusttır.

Daha önce söz ettiğimiz gibi y_i 'nin θ 'cı quantile'i,

$$\min_{\beta} \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i: y_i \geq x_i' \beta} \theta |y_i - x_i' \beta| + \sum_{i: y_i < x_i' \beta} (1 - \theta) |y_i - x_i' \beta| \right\} = \min_{\theta} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \rho_{\theta}(u_{\theta_i})$$

ifadesinin minimizasyonu ile elde edilmekteydi. Bunu doğrusal programlama gösterimi olarak ifade edebilmek için y_i sadece pozitif elemanların bir fonksiyonu olarak,

$$y_i = \sum_{j=1}^K x_{ij} \beta_{\theta_j} + u_{\theta_i} = \sum_{j=1}^K x_{ij} (\beta_{\theta_j}^1 - \beta_{\theta_j}^2) + (e_{\theta_i} - v_{\theta_i}) \quad (3.21.)$$

$$\beta_{\theta j}^1 \geq 0, \quad \beta_{\theta j}^2 \geq 0 \quad (j = 1, \dots, K) \text{ ve } \varepsilon_{\theta l} \geq 0, \quad v_{\theta l} \geq 0 \quad (l = 1, \dots, n)$$

şeklinde yazılabilir. İlk denklem matris gösterimiyle yazıldığında doğrusal programlamanın primal problemine dönüşür ve

$$Az = y \text{ kısıtı altında } \min_z c'z$$

olarak ifade edilir. Burada,

$$A = (X, -X, I_n, -I_n),$$

$$y = (y_1, \dots, y_n)'$$

$$z = (\beta^1, \beta^2, u, v)'$$

$$c = (0', 0', \theta l', (1 - \theta)l')'$$

$$X = (x_1, \dots, x_n)'$$

I_n : n boyutlu birim matristir,

$0'$: Sıfırların $K \times 1$ vektörü,

l : Birlerin $n \times 1$ vektörüdür.

Doğrusal programlamanın dual problemi yaklaşık olarak daha önce,

$$\min_{\beta} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\theta - 1/2 + 1/2 \operatorname{sgn}(y_i - x_i' \tilde{\beta}_{\theta})) x_i = 0 \quad (3.22.)$$

gösteriminde belirlenen Birinci Mertebe Koşuluyla aynıdır ve

$$w'A \leq c' \text{ kısıtı altında } \max_w w'y$$

olarak gösterilir.

Dualite teoremi, X matrisinin tüm sütunlarının sıralı olması durumunda hem primal hem de dual problemlerin çözümünün mümkün olduğunu ileri sürmektedir. Doğrusal programlamanın denge teoremi ancak bu durumda çözümün optimal olduğunu ifade eder.

Doğrusal programlama problemini çözmek için birçok algoritma öne sürülmüştür. Bunlardan en çok ilgi göreni $\theta=1/2$ olan medyan regresyon için geliştirilmiştir (Barodale, 1973). Bu algoritma küçük değişikliklerle herhangi bir quantile regresyonuna da uyarlanabilir (Koenker ve D'Orey, 1987). Söz konusu algoritmanın en büyük avantajı, bilinen diğer algoritmalara göre anlamlı bir şekilde simpleks dönüşümlerin sayısını azaltmasıdır.

$$\hat{\beta}(\theta, y + X\gamma, X) = \hat{\beta}(\theta, y + X) + \gamma, \quad \gamma \in R^K \quad (3.23.)$$

eşvaryans özelliği ile doğrusal programlama algoritması hesaplanır. $\hat{\beta}_\theta$ 'nın ilk değeri $\hat{\beta}_\theta^0$ biliniyorsa, gözlemleri düzlemin sağ tarafına yerleştirerek hesaplama süresini kısaltmak için kullanılabilir. $y_R = y - X\hat{\beta}_\theta^0$ olsun, $\hat{\beta}_\theta^R$, y_R 'nin x'e göre quantile regresyon tahminidir.

$\hat{\beta}(\theta, y + X\gamma, X) = \hat{\beta}(\theta, y + X) + \gamma$, $\gamma \in R^K$ eşvaryans özelliğini kullanarak, $\hat{\beta}_\theta = \hat{\beta}_\theta^R + \hat{\beta}_\theta^0$ bulunur. $\hat{\beta}_\theta^R$ ve $\hat{\beta}_\theta^0$ 'ı belirlemek, doğrudan $\hat{\beta}_\theta$ 'yı belirlemekten çok daha hızlıdır.

Mümkün ilk değer, sabitin $\hat{\epsilon}_1, \dots, \hat{\epsilon}_n$ hatalarının $[n\theta]'$ cı sıra istatistiğiyle değiştirildiği, düzeltilmiş Ekk tahminidir. Alternatif ilk değer, gözlem değerlerinin çok büyük olması durumunda gözlem değerlerinin bir kısmına uygulanan quantile regresyonla belirlenebilir (Saçaklı, 2005).

3.8. Asimptotik Kovaryans Matris Tahmini

Quantile Regresyon modellerinde kovaryans matrisinin tahmini özellikle sabit varyans ve simetriklik varsayımlarının incelenmesi nedeni ile önem taşımaktadır. $\hat{\beta}_\theta$ için asimptotik kovaryans matris formülleri $f_{u_\theta}(0/x)$ 'in iki alternatif varsayımı altında,

$$\Lambda_\theta = \theta(1-\theta)(E[f_{u_\theta}(0/x_i)x_i x_i']^{-1} E[x_i x_i'] (E[f_{u_\theta}(0/x_i)x_i x_i']^{-1})^{-1}$$

$$\Lambda_\theta = \frac{\theta(1-\theta)}{f_{u_\theta}^2(0)} (E[x_i x_i'])^{-1} \quad (3.24.)$$

denklemlerinden elde edilir. Kovaryans matrisinin farklı tahmin ediciler kullanılarak tahmin edilmesi mümkündür. Bu tahmin edicilerden en çok kullanılanları Sıra İstatistiği Tahmin edicisi, Bootstrap Tahmin edicisidir

3.8.1. Sıra İstatistiği Tahmin Edicisi

Quantile kovaryans matrisinin tahmininde kullanılan sıra istatistiği tahmin edicisi, $f_{u_\theta}(0/x) = f_{u_\theta}(0)$ olması durumunda geçerlidir. Bu varsayım altında asimptotik kovaryans matrisi,

$$\Lambda_\theta = \sigma_\theta^2 E[x_i x_i']^{-1}$$

$$\Lambda_\theta = \frac{\theta(1-\theta)}{f_{u_\theta}^2(0)} \quad (3.25.)$$

olarak sadeleştirilebilir.

$\hat{E}(xx') = 1/N \sum_{i=1}^n x_i x_i'$ ile tahmin edilir. İlk terim $\sigma_\theta^2, \hat{u}_{\theta_1}, \dots, \hat{u}_{\theta_n}$ 'in $[n\theta]$.'c1 sıralı istatistiğinden oluşan bir güven aralığından belirlenir. Genelde, bir rasgele değişkenin θ . 'c1 quantile'ı için güven aralığı hesaplanabilir. Özellikle,

$$P(y_{(j)} \leq \xi_\theta \leq y_{(k)}) = P(y_{(j)} \leq \xi_\theta) - P(y_{(k)} \leq \xi_\theta) \quad (3.26.)$$

$y_{(j)}$ ve $y_{(k)}$, $y_1, \dots, y_n$ 'in j.ci ve k.cı sıra istatistikleridir.

$$P(y_{(j)} \leq \xi_\theta) = P(j \text{ ya da daha fazla gözlem} \leq \xi_\theta) = \sum_{i=j}^n \binom{n}{i} \theta^i (1-\theta)^{n-i}.$$

Benzer şekilde,

$$P(y_{(j)} \leq \xi_\theta) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \theta^i (1-\theta)^{n-i}$$

yazılabilir. Denklemler (3.26.) denklemde yerine konulursa,

$$P(y_{(j)} \leq \xi_\theta \leq y_{(k)}) = \sum_{i=j}^k \binom{n}{i} \theta^i (1-\theta)^{n-i} \quad (3.27.)$$

olur.

ξ_θ için $(1-\alpha)$ düzeyinde simetrik bir güven aralığı oluşturmak daha doğru olur (Buchinsky, 1998).

$j = [n\theta - l]$, $k = [n\theta + l]$, $X \sim B(n, \theta)$ olsun.

$$P(y_{[n\theta-l]} \leq \xi_\theta \leq y_{[n\theta+l]}) = P([n\theta - l] \leq X \leq [n\theta + l])$$

$$\approx \left(\left| \frac{X - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \right)$$

$\frac{X - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \xrightarrow{L} N(0,1)$ olduğundan, en son denklemdeki olasılık $(1-\alpha)$ alınırsa,

$l = Z_{1-\alpha/2} \sqrt{n\theta(1-\theta)}$ olacaktır. $P(y_{(j)} \leq \xi_\theta \leq y_{(k)}) = \sum_{i=j}^k \binom{n}{i} \theta^i (1-\theta)^{n-i}$ teki

kesin güven aralığının uzunluğunu bu asimptotik normal güven aralığı ile birleştirilmesi sonucunda σ_θ^2 'nın tahmini,

$$\hat{\sigma}_\theta^2 = \frac{n(\hat{y}_{n0.11} - y_{n0.11})^2}{4N_{1-\alpha/2}^2} \quad (3.28.)$$

olacaktır.

3.8.2. Bootstrap Tahmin Edicileri

Bootstrap yöntemi, $\hat{\beta}_\theta$ 'nın asimptotik kovaryans matrisinin şekline göre üç farklı yolla hesaplanabilir. Bunlar Design Matris Bootstrap Tahmin edicisi, Hata Bootstrap Tahmin edicisi ve Sigma Tahmin edicisidir (Efron, 1979).

Normal şartlar altında asimptotik matrisin tutarlı tahmin edicisini sağlayan “Design Matris Bootstrap Tahmin edicisi” için bootstrap örnekleri x, y ve F_{nxy} 'nin deneysel bileşik dağılımından çekilir. F_{nxy} dağılımından rasgele olarak çekilmiş örnek (y_i^*, x_i^*) , $i = 1, \dots, n$ olduğunda,

$$y_i = x_i' \beta_\theta + u_{\theta i}$$

için $Quant_\theta(y_i/x_i) = x_i' \beta$ olacaktır.

Burada $Quant_\theta(y_i/x_i)$ y_i 'nin koşullu quantile'dır. Bu ilişkiden yararlanılarak,

$$y^* = x^* \beta_\theta + u_{\theta i}^*, \quad y^* = (y_1^*, \dots, y_n^*)' \text{ ve } X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)'$$

şeklinde yazılabilir.

$\hat{\beta}_\theta^*, y^*$ 'ın x^* üzerindeki quantile regresyonundan belirlenen bootstrap tahmin edicisini gösterir, $\hat{\beta}_{\theta 1}^*, \dots, \hat{\beta}_{\theta B}^*$ bootstrap tahmin edicilerini elde etmek için B kere tekrarlanabilir. Λ_θ 'nın bootstrap tahmin edicisi şu şekilde verilir;

$$\hat{\Lambda}_0 = \frac{n}{B} \sum_{j=1}^B (\hat{\beta}_{\theta j}^* - \bar{\beta}_{\theta}^*)' \quad (3.29.)$$

$\bar{\beta}_{\theta}^* = \frac{1}{B} \sum_{j=1}^B \hat{\beta}_{\theta j}^*$, β_{θ}^* yerine esas değer olarak $\hat{\beta}_{\theta}$ da kullanılabilir. Bu daha önce;
 $\Lambda_{\theta} = \theta(1 - \theta) (E[f_{u_{\theta}}(0/x_i)x_i x_i'])^{-1} E[x_i x_i'] (E[f_{u_{\theta}}(0/x_i)x_i x_i'])^{-1}$ 'de verilen
 $\hat{\beta}_{\theta}$ 'nın asimptotik kovaryansının sürekli tahmin edicisidir. $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{\theta}^* - \beta_{\theta}^*)$ 'nın koşullu dağılımı $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{\theta}^* - \beta_{\theta}^*)$ 'nın koşullu olmayan dağılımına zayıf olarak yaklaşır (Bickel ve Freedman, 1981).

İkinci tahmin edici olan, bağımsızlık varsayımı altında sürekli tahmin ediciyi veren “Hata Bootstrap Tahmin edicisi” için x, F_{nx} ve $u_{\theta}, F_{n\hat{u}_{\theta}}$ 'nın deneysel bileşik dağılımından çekilir.

Bağımsızlık varsayımı altında F_{nx} ve $F_{n\hat{u}_{\theta}}$ marjinal dağılımlarından yeniden örnekleme yaparak bootstrap tahmin yöntemi uygulanabilir. $F_{n\hat{u}_{\theta}}$ dağılımından rasgele olarak seçilen n birimlik örneklem $u_{\theta}^* = (u_{\theta 1}^*, \dots, u_{\theta n}^*)'$ ve F_{nx} dağılımından rasgele olarak seçilen örneklem $X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)'$ olarak belirlendiğinde quantile regresyon modeli,

$$y^* = x^* \hat{\beta}_{\theta} + u_{\theta}^* \quad (3.30.)$$

olacaktır. Bu quantile regresyon bootstrap tahmin edicisi $\hat{\beta}_{\theta}^*$ ile çözmeye olanak sağlar. Design Matris Bootstrap Yöntemi'nde olduğu gibi, B bootstrap tahmin edicilerini elde edebilmek için $\hat{\beta}_{\theta j}^*$ ($j = 1, \dots, B$) B kere tekrarlanır. Λ_{θ} 'nın tahmin edicisi,

$$\hat{\Lambda}_0 = \frac{n}{B} \sum_{j=1}^B (\hat{\beta}_{\theta j}^* - \bar{\beta}_{\theta}^*) (\hat{\beta}_{\theta j}^* - \bar{\beta}_{\theta}^*)' \quad (3.31.)$$

olarak Design matris bootstrap yöntemi ile aynı şekilde belirlenir.

Hata Bootstrap Tahmin edicisi, bağımsızlık varsayımı altında Λ_θ ' nın sürekli tahmin edicisidir. Bağımsızlık varsayımı geçerli olmadığında, yeniden örnekleme u_θ ile x arasında var olabilecek bir ilişkiyi yok etmekte ve bu yöntemi geçersiz hale getirmektedir. Design matris tahmin edicisi yerine, hata bootstrap tahmin edicisi kullanmanın avantajı yoktur, ikisi de bağımsızlık varsayımı altında aynı hesaplama süresiyle elde edilir. Küçük örneklerde bağımsızlık varsayımı sağlanıyorsa hata bootstrap tahmin edicisinin kullanılması daha iyi olabilir.

Üçüncü bootstrap tahmin edicisi de “Sigma Tahmin edicisi” dir. Bu tahmin edicide, kovaryans matrisinin sadece bir kısmı bootstrap tekniğiyle tahmin edilir, $\hat{\sigma}_\theta^2$. Bu tahmin edici de bağımsızlık varsayımına ve daha önce verilen,

$$\Lambda_\theta = \frac{\theta(1-\theta)}{f_{u_\theta}^2(0)} (E[x_i x_i'])^{-1} \quad (3.32.)$$

olarak tanımlanan asimptotik kovaryans matrisinin şekline dayanır. Bu yöntem, bootstrap yöntemi kullanarak, Λ_0 gösterimini σ_0^2 ' nin parametrik olmayan tahminiyle birleştirir. σ_θ^2 ' nin bir tahmin edicisi,

$$\hat{\sigma}_\theta^2 = \frac{n}{B} \sum_{j=1}^B (q_{\theta_j}^* - \hat{q}_\theta^*)^2 \quad (3.33.)$$

olarak belirlenir. Burada $\hat{q}^* = \frac{1}{B} \sum_{j=1}^B \hat{q}_{\theta_j}^*$ olacaktır.

3.9. Quantile Regresyonda Sabit Varyansın İncelenmesi

Sabit varyansın geçerli olup olmadığı, quantile regresyonlar tahmin edilerek analiz edilebilir. Standart sabit varyanslı regresyon modelinde regresyon doğrusu y' nin x' e göre koşullu beklenen değeridir. Hata terimlerinin dağılımı sabit varyanslı ise quantile'ler her zaman medyandan aynı uzaklıkta yani regresyon doğrusuna paralel olacaktır (Saçaklı, 2005).

Quantile regresyonda sabit varyans geçerli olduğunda, açıklayıcı değişkenlerle bulunacak katsayıların eşit; fakat sabit terim farklı olacaktır. Bu durumda Ekk ile bulunacak doğrusal regresyon modeli ile medyan regresyon modeli aynı olacaktır. $f_{u_\theta}(0/x) = f_{u_\theta}(0)$ olduğunda, herhangi iki quantile parametre vektörleri β_{θ_1} ve β_{θ_2} sadece kesim noktalarında farklılık gösterir, eğim katsayıları aynıdır (Buchinsky, 1998).

Sabit varyansın incelenmesi için hesaplanan test istatistiği için kovaryans matrisi kullanılmaktadır. Kovaryans matrisinin non-local alternatif hipotezler altında geçerli olması ve local alternatif hipotezler altında geçerli olmasına göre farklı görüşler bulunmaktadır.

Sabit varyansın incelenmesinde minimum uzaklık yaklaşımı kullanılabilir. İlk olarak sabit varyans kısıtı altında eğim katsayıları, kısıtlı katsayı vektörü, β^R ' ye göre,

$$Q(\beta^R) = (\hat{\beta}_\theta - R\beta^R)' A^{-1} (\hat{\beta}_\theta - R\beta^R) \quad (3.34.)$$

minimizasyonu ile elde edilir. Burada A ağırlık matrisidir ve $A \rightarrow \psi$, pozitif tanımlı matristir. $\hat{\beta}_\theta = (\hat{\beta}'_{\theta_1}, \dots, \hat{\beta}'_{\theta_p})$, p sayıdaki quantile regresyon tahminlerinin kısıtsız vektörüdür. $\psi = \Lambda_\theta$ ise, β_θ^R 'nin tahmini optimal minimum uzaklık tahmin edicisinin tahminidir. $\psi \neq \Lambda_\theta$ ise minimum uzaklık tahmin edicisinin asimptotik kovaryans matrisi,

$$\Lambda_\theta^R = (R'\psi^{-1}R)^{-1}R'\psi^{-1}\Lambda_\theta\psi^{-1}R(R'\psi^{-1}R)^{-1} \quad (3.35.)$$

olacaktır.

β_θ^R kısıtlı parametrelerin $(p+k-1) \times 1$ boyutlu vektörüdür.

Kısıtlama matrisi $R' = (R_1, \dots, R_p)$ olacaktır. Burada,

$$R_j = \begin{pmatrix} e_j & 0_m \\ 0_p & I_{k-1} \end{pmatrix}$$

dir. Burada,

$\mathbf{e}_j$: Bir haricinde sıfırların j.ci değerdeki $p \times 1$ boyutlu vektörüdür.

$\mathbf{0}_v$: Sıfırların $(K - 1) \times 1$ boyutlu vektörüdür,

$\mathbf{0}_{m \times 1}$: Sıfırların $p \times (K - 1)$ boyutlu matrisidir,

$\mathbf{I}_{K-1}$: Birim matristir.

Optimal minimum uzaklık (MD) Tahmin edicisinin $\hat{\beta}_\theta^R$ 'nin asimptotik dağılımı,

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_\theta^R, \beta_\theta^R)' \xrightarrow{L} N(0, \Lambda_\theta^R)$$

olacaktır. Burada,

$\Lambda_\theta^R = (R' \Lambda_\theta^{-1} R)^{-1}$ 'dir. $\Lambda_\theta = \psi$ için, eğim katsayılarının eşit olduğunu varsayan sıfır hipotezi altında;

$$n(\hat{\beta}_\theta - R\hat{\beta}_\theta^R)' A^{-1} (\hat{\beta}_\theta - R\hat{\beta}_\theta^R) \xrightarrow{L} \chi_{(pK - p - K + 1)}^2$$

olacaktır.

3.10. LAD Tahmin Edicileri ile Quantile Regresyon

Lad Tahmin edicisi quantile regresyonun tüm ağırlıkların $\theta=0.5$ 'te olduğu doğrusal bir fonksiyonudur. $\theta=1/2$ olduğunda,

$$\min_{\beta} \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i: y_i \geq x_i' \beta} \theta |y_i - x_i' \beta| + \sum_{i: y_i < x_i' \beta} (1 - \theta) |y_i - x_i' \beta| \right\} \quad (3.36.)$$

denkleminin minimizasyonu $\sum |y_i - x_i' \beta|$ 'nın minimizasyonu haline gelir. Bu $\hat{\beta}^*(0.5)$ tahmin edicisi, $\sum |y_i - x_i' \beta|^p$ 'yi minimize eden Lad Tahmin edicisi olarak

tanımlanır. Aynı zamanda LAD (en küçük mutlak değer) tahmin edicisi, LAR (en küçük mutlak artık) tahmin edicisi, LAE (en küçük mutlak hata) tahmin edicisi ve MAD (en küçük mutlak sapma) tahmin edicisi olarak da adlandırılabilir.

$\hat{\beta}^*(0.5)$ 'in istatistiksel özelliklerine göre hatalar,

$$f(e_t) = (2\lambda)^{-1} \exp\left\{-\frac{|e_t|}{\lambda}\right\} \quad (3.37.)$$

yoğunluk fonksiyonuyla Laplace dağılımına sahipse benzerlik fonksiyonunun maksimizasyonu, $\sum_{t=1}^T |e_t|$ 'nin minimizasyonuna eşittir ve böylelikle $\hat{\beta}^*(0.5)$ maximum likelihood tahmin edicisi olacaktır. Normal dağılıma göre bu yoğunluk daha sivri ve daha geniş kuyruklu; ancak geniş kuyruklu birçok dağılımın aksine sonlu varyansa sahiptir. Bundan dolayı en çok benzerlik tahmin edicisi istenen özellikleri sağlamaktadır. Hatalar yukarıdaki yoğunluk fonksiyonuna sahip olduğunda $\hat{\beta}^*(0.5)$, Ekk' den daha iyi sonuç verir.

e_t herhangi bir dağılımdan geldiğinde, minimizasyon probleminin tek bir çözümü varsa tahmin edici sapmasızdır, birden fazla çözüm söz konusuysa sapmasızlık bir algoritma yardımı ile belirlenebilir.

$\hat{\beta}^*(0.5)$ 'in sınırlayıcı dağılımı,

$$\sqrt{T}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{d} N(0, \Omega \otimes Q^{-1})$$

gösterimindeki δ 'nın alt vektörü ile belirlenir. $w_{ij}, 2[f(0)]^{-2}$ haline gelir ve,

$$\sqrt{T}[\hat{\beta}^*(0.5) - \beta] \xrightarrow{d} N(0, 2[f(0)]^{-2} Q^{-1})$$

olur. $f(0)$ medyadaki yoğunluğun değeridir. $2[f(0)]^{-2}$, F dağılım fonksiyonlu örneklem medyanının asimptotik varyansıdır. Medyan yerleştirme tahmin edicisi olarak ortalamadan daha üstündür. Bu nedenle, Lad Tahmin edicisi Ekk Tahmin

ediciinden çok daha etkin olacaktır. Cauchy, Laplace dağılım ve sapan değerlerin etkili olduğu diğer hata dağılımları bu sınıfa girmektedir.

Parametre(β) ile ilgili hipotezleri test etmek için Wald İstatistiği kullanılır. Bunun formülasyonu,

$$\sqrt{T}[\hat{\beta}^*(0.5) - \beta] \xrightarrow{d} N(0, 2[f'(0)]^{-2} Q^{-1})$$

olacaktır. Bu da $f'(0)$ için sürekli bir tahmin edici bulunmasına olanak sağlar. Bunun gibi bir tahmin edici,

$$\hat{f}(0) = \frac{r - s}{T(\hat{\varepsilon}_{(r)} - \hat{\varepsilon}_{(s)})} \quad (3.38.)$$

dir. Burada,

$$\begin{aligned} r &= [T/2] + v, \\ s &= [T/2] - v \end{aligned}$$

dir. $[.]$ tamsayı kısmını ifade eder, v bir tamsayıdır. $\hat{\varepsilon}_{(1)}, \dots, \hat{\varepsilon}_{(T)}$ rezidüleri sıralı Lad rezidüleridir. En iyi v 'nin seçimi açık değildir. Tahmin edici aslında fonksiyonun düzgünlüğüne(smoothness) ve gözlem sayısına bağlıdır. Bu tahmin edici K/T oranı büyük olduğunda iyi sonuç vermez.

Wald Testi'ne ek olarak Benzerlik Oranı (LR) ve Lagrange Çarpanı Testleri'ne benzeyen, aynı zamanda Lad tahmin yöntemlerine dayanan testler de kullanılmaktadır. β üzerindeki doğrusal kısıtlamaların testi için LR istatistiği,

$$\lambda_{LR} = 2[2F(0)]^{-1}(S_R - S_U) \quad (3.39.)$$

olacaktır. Burada S_R ve S_U , kısıtsız ve kısıtlı modeldeki artıkların mutlak değerlerinin toplamını göstermektedir.

$$y_t = x_{t1}'\beta_1 + x_{t2}'\beta_2 + e_t \quad (3.40.)$$

modelinde $\beta_2 = 0$ hipotezi için LM test istatistiği,

$$\lambda_{LM} = g'\Delta g \quad (3.41.)$$

olarak hesaplanır. Burada, $g = \sum x_{t2} \text{sgn}(y_t - x_{t1}'\beta_1)$ 'dir. $\bar{\beta}_1$, β_1 için kısıtlı Lad tahmin edicisidir. Δ de $(X'X)^{-1}$ in ikinci diyagonal sütunudur. Sıfır hipotezi altında her iki istatistik de kısıtlı $\chi^2_{(j)}$ dağılımına sahiptir, burada j kısıt sayısıdır. LM Testi $f(0)$ ' ın tahminini gerektirmediğinden daha avantajlıdır. Beklenildiği gibi kalın kuyruklu dağılımlar için Lad tahminine dayalı testler Ekk rezidülerine dayalı testlerden çok daha güçlüdür (Koenker ve Bassett, 1982).

4. UYGULAMALAR

Bu bölümde veri setlerine Lineer Regresyon modeli ve alternatif robust yöntemlerden biri olan Quantile Regresyon modeli uygulanarak, bu yöntemlerden hangisinin daha iyi sonuç verdiğinin belirlenmesi ve sonuçların karşılaştırılması için uygulamalar yapılmıştır. Quantile Regresyon analizi için R paket programı (R 2.11.1) kullanılmıştır.

4.1. Diabetes verisi

Bu veri seti diyabet ile şişmanlık arasındaki ilişkiyi incelemektedir. Veri seti R paket programının *Hmisc* paketi (dataset diabetes) ile çalışmaktadır. Veri setinde 19 değişken, 403 gözlem değeri bulunmaktadır (Harrell(2001,p.379)).

Bağımlı değişken: glycosolated hemoglobin (gh[7 değerini geçerse pozitif tanı]),

Açıklayıcı değişkenler: yaş (age), sex (cinsiyet), vücut indeksi ağırlık/uzunluk (bmi), bel/çatı oranı (whip), vücut yapısı (bfmed[orta yapılı için 1, değilse 0], bflar [iri yapılı için 1, değilse 0]), glikoz dengesi (stabg), konum (loc[Buckingham County 0, Louisa County 1]) dir.

Lineer Regresyon modeli,

$$gh_i = \beta_0 + \beta_1 age_i + \beta_2 sex_i + \beta_3 bmi_i + \beta_4 whip_i + \beta_5 bfmed_i + \beta_6 bflar_i + \beta_7 stabg_i + \beta_8 loc_i + \epsilon_i$$

şeklinde ifade edilmektedir.

Bu değişkenlere ait veriler Ek 3' de verilmiştir. Bu modele ilişkin tanımlayıcı istatistikler Çizelge 4.1.'de verilmiştir.

Çizelge 4.1. Diabetes verisi için tanımlayıcı istatistikler

```

age, bmi, frame, gender, glyhb, location, stab.glu, waisthip
> summary(Diabdata)
  glyhb      age      gender      bmi      waisthip
Min.   : 2.680   Min.   :19.00   female:216   Min.   :15.08   Min.   :0.6818
1st Qu.: 4.387   1st Qu.:34.00   male  :156   1st Qu.:23.92   1st Qu.:0.8293
Median : 4.845   Median :45.00                      Median :27.60   Median :0.8788
Mean   : 5.584   Mean   :46.60                      Mean   :28.55   Mean   :0.8813
3rd Qu.: 5.607   3rd Qu.:60.00                      3rd Qu.:31.99   3rd Qu.:0.9268
Max.   :16.110   Max.   :92.00                      Max.   :55.34   Max.   :1.1429

  frame      stab.glu      location
large : 96   Min.   : 48.0   Buckingham:180
medium:176   1st Qu.: 81.0   Louisa      :192
small :100   Median : 90.0
          Mean   :107.0
          3rd Qu.:107.2
          Max.   :385.0

```

Modele ait Lineer Regresyon ve Robust yönteminin R programından elde edilen sonuçları Çizelge 4.2’ de verilmiştir.

Çizelge 4.2. Diabetes verisinin R programından elde edilen Robust yöntem sonuçları

```

> Diabdata.m90 = lmrob(glyhb~age+gendermale+bmi+waisthip+framemedium
+framelarge+stab.glu+locationLouisa,data=Diabdata,control
=lmrob.control(max.it=100,tuning.psi = cc))
> summary(Diabdata.m90)

Call:
lmrob(formula = glyhb ~ age + gendermale + bmi + waisthip + framemedium +
  framelarge + stab.glu + locationLouisa, data = Diabdata,
  control = lmrob.control(max.it = 100, tuning.psi = cc))

Weighted Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-5.77922 -0.37692  0.05501  0.69162 10.10368

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  1.723546   0.517295   3.332 0.000951 ***
age          0.010728   0.003198   3.354 0.000881 ***
gendermale   -0.036539   0.119541  -0.306 0.760036
bmi          0.010569   0.009095   1.162 0.245927
waisthip     0.585875   0.662527   0.884 0.377117
framemedium  0.059666   0.113190   0.527 0.598426
framelarge   0.188552   0.159879   1.179 0.239036
stab.glu     0.020550   0.005285   3.888 0.000120 ***
locationLouisa -0.214991  0.101383  -2.121 0.034634 *
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Robust residual standard error: 0.7627
> R2.rob(Diabdata.m90)
[1] 0.6511154

```

Çizelge 4.3. Diabetes verisi için R programından elde edilen Ekk sonuçları

```

> Diabdata.lm=lm(glyhb~age+gendermale+bmi+waisthip+framemedium
+framelarge+stab.glu+locationLouisa,data=Diabdata)
> summary(Diabdata.lm)

Call:
lm(formula = glyhb ~ age + gendermale + bmi + waisthip + framemedium +
    framelarge + stab.glu + locationLouisa, data = Diabdata)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-8.4655 -0.7139 -0.1257  0.4332  9.5763

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  0.311638   1.022084   0.305 0.760614
age          0.018290   0.005193   3.522 0.000483 ***
gendermale  -0.112208   0.182694  -0.614 0.539477
bmi          0.011088   0.014254   0.778 0.437135
waisthip     1.246198   1.209797   1.030 0.303654
framemedium  0.201389   0.196364   1.026 0.305768
framelarge  -0.084336   0.260482  -0.324 0.746299
stab.glu     0.028833   0.001502  19.202 < 2e-16 ***
locationLouisa -0.209208  0.156547  -1.336 0.182257
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 1.465 on 363 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.5746,    Adjusted R-squared:  0.5653
F-statistic: 61.3 on 8 and 363 DF,  p-value: < 2.2e-16

```

Klasik LS ile Robust kestiricinin p değerleri karşılaştırıldığında; klasik yöntemde sadece *age* ve *stabg* anlamlı iken, robust yöntemde *age*, *stabg* ve *location* 'da anlamlıdır. İki yaklaşımda aynı katsayı tahminleri vermiştir, fakat rezidüleri tamamen farklıdır. Çünkü modelden küçük bir sapma testin anlamlılık düzeyine etki etmektedir.

Çizelge 4.4. Diabetes verisi için R programından $\tau=0.25$ için elde edilen QR sonuçları

```
Call: rq(formula = glyhb ~ age + gender + bmi + waisthip + framemedium +
  framelarge + stab.glu + locationLouisa, tau = 0.25, data = Diabdata)
```

```
tau: [1] 0.25
```

```
Coefficients:
```

	Value	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	1.31803	0.70506	1.86939	0.06237
age	0.01261	0.00362	3.48036	0.00056
gendermale	-0.05922	0.10929	-0.54190	0.58822
bmi	0.00701	0.00880	0.79582	0.42666
waisthip	0.76154	0.84741	0.89866	0.36943
framemedium	0.07470	0.11443	0.65281	0.51429
framelarge	0.18093	0.15279	1.18418	0.23712
stab.glu	0.01817	0.00259	7.01976	0.00000
locationLouisa	-0.01913	0.10777	-0.17754	0.85918

Çizelge 4.5. Diabetes verisi için R programından $\tau=0.50$ için elde edilen QR sonuçları

```
Call: rq(formula = glyhb ~ age + gender + bmi + waisthip + framemedium +
  framelarge + stab.glu + locationLouisa, tau = 0.5, data = Diabdata)
```

```
tau: [1] 0.5
```

```
Coefficients:
```

	Value	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	1.12909	0.57119	1.97673	0.04883
age	0.01297	0.00253	5.12611	0.00000
gendermale	-0.07552	0.08224	-0.91829	0.35908
bmi	0.01135	0.00832	1.36384	0.17346
waisthip	0.28805	0.63930	0.45057	0.65257
framemedium	0.19788	0.10277	1.92539	0.05496
framelarge	0.14831	0.11900	1.24630	0.21346
stab.glu	0.02969	0.00305	9.73555	0.00000
locationLouisa	-0.26408	0.07173	-3.68178	0.00027

Çizelge 4.6. Diabetes verisi için R programından $\tau=0.75$ için elde edilen QR sonuçları

```
Call: rq(formula = glyhb ~ age + gender + bmi + waisthip + framemedium +
  framelarge + stab.glu + locationLouisa, tau = 0.75, data = Diabdata)

tau: [1] 0.75

Coefficients:
                Value      Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   -0.88970    0.87700   -1.01448  0.31103
age            0.02139    0.00441    4.84463  0.00000
gendermale     0.01782    0.13953    0.12775  0.89842
bmi            0.01532    0.01109    1.38076  0.16820
waisthip       2.07734    1.02913    2.01855  0.04427
framemedium    -0.00599    0.17942   -0.03339  0.97338
framelarge     -0.26352    0.20280   -1.29942  0.19462
stab.glu       0.03769    0.00308   12.23967  0.00000
locationLouisa -0.30453    0.12577   -2.42125  0.01596
```

Çizelge 4.7. Diabetes verisi için R programından $\tau=0.95$ için elde edilen QR sonuçları

```
Call: rq(formula = glyhb ~ age + gender + bmi + waisthip + framemedium +
  framelarge + stab.glu + locationLouisa, tau = 0.95, data = Diabdata)

tau: [1] 0.95

Coefficients:
                Value      Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    2.16945    1.76840    1.22679  0.22070
age            0.06430    0.00314   20.47401  0.00000
gendermale     0.38766    0.34380    1.12758  0.26024
bmi            0.02846    0.00501    5.68124  0.00000
waisthip      -3.55810    2.20451   -1.61401  0.10739
framemedium     0.44289    0.51259    0.86403  0.38814
framelarge     -0.22992    0.25589   -0.89849  0.36952
stab.glu       0.04457    0.00603    7.38890  0.00000
locationLouisa -0.11689    0.18763   -0.62301  0.53367
```

Modelin anlamlılığını test etmek için oluşturulan hipotez testleri,

$$H_0: \beta = 0$$

$$H_1: \beta \neq 0$$

dır.

Bu hipotez $\alpha = 0.05$ anlam düzeyinde test edildiğinde, $p < \alpha$ olursa H_0 hipotezi reddedilir. Bu teste göre oluşturduğumuz modellere tek tek bakıldığında,

Çizelge 4.2’de *intercept*, *age*, *stab.glu* ve *locationLouisa* değişkenlerinin modelde bulunması %95 anlam düzeyinde istatistiksel olarak anlamlıdır.

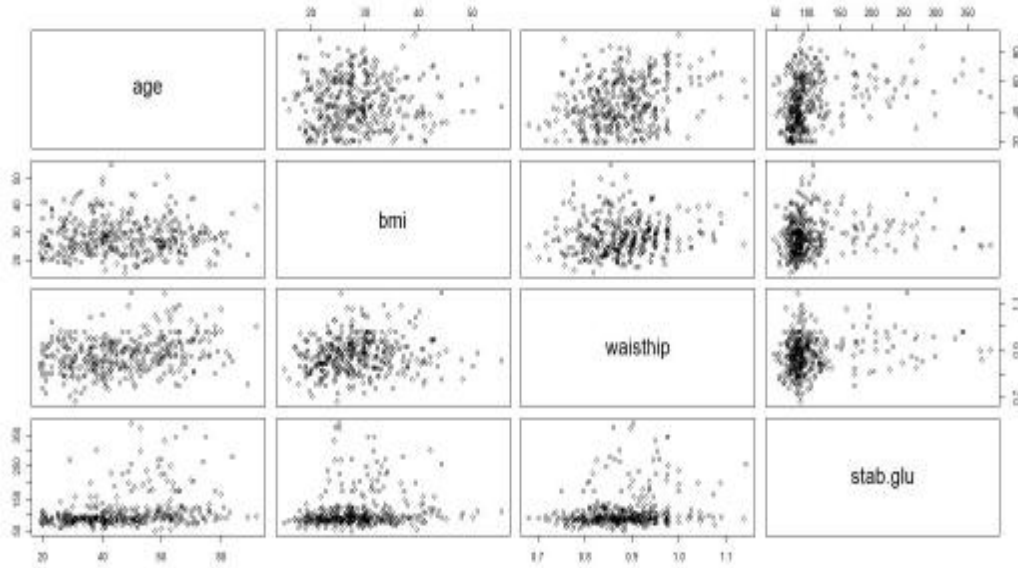
Çizelge 4.3 Ekk yöntemine göre *age* ve *stab.glu* değişkenlerinin modelde bulunması %95 anlam düzeyinde istatistiksel olarak anlamlıdır.

Çizelge 4.4 QR $\tau=0.25$ ’e göre *age* ve *stab.glu* değişkenlerinin modelde bulunması %95 anlam düzeyinde istatistiksel olarak anlamlıdır.

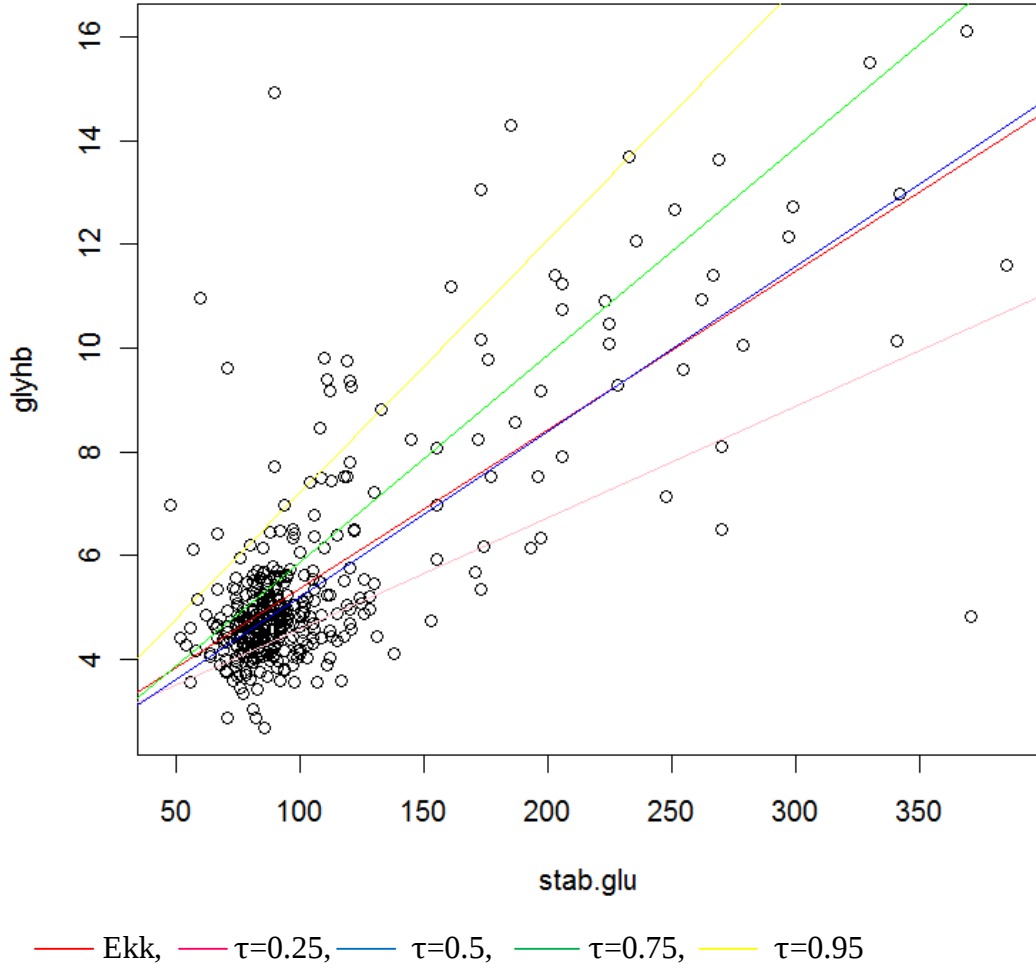
Çizelge 4.5 QR $\tau=0.5$ (LAD)’e göre *intercept*, *age*, *stab.glu* ve *locationLoisa* değişkenlerinin modelde bulunması %95 anlam düzeyinde istatistiksel olarak anlamlıdır.

Çizelge 4.6 QR $\tau=0.75$ ’e göre *age*, *waisthip*, *stab.glu* ve *locationLoisa* değişkenlerinin modelde bulunması %95 anlam düzeyinde istatistiksel olarak anlamlıdır.

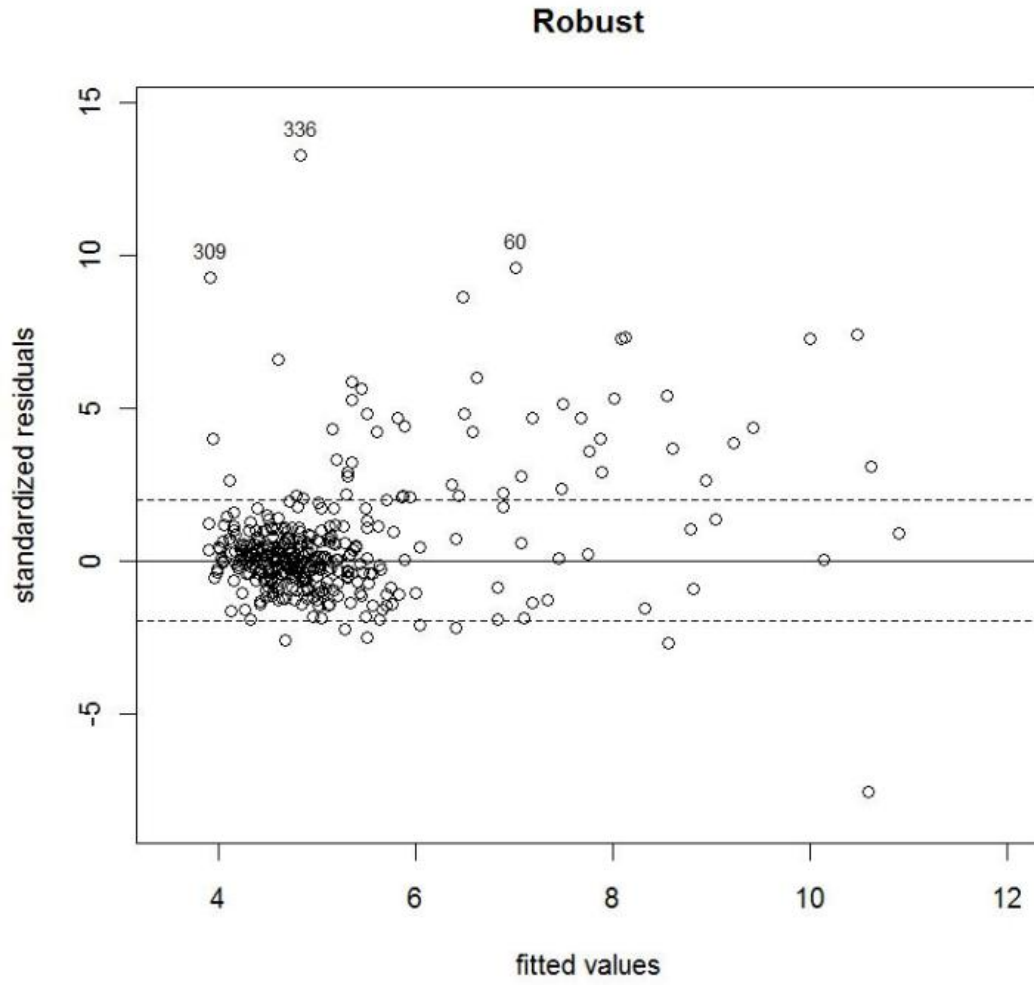
Çizelge 4.7 QR $\tau=0.95$ ’e göre *age*, *bmi*, *stab.glu* değişkenlerinin modelde bulunması %95 anlam düzeyinde istatistiksel olarak anlamlıdır.



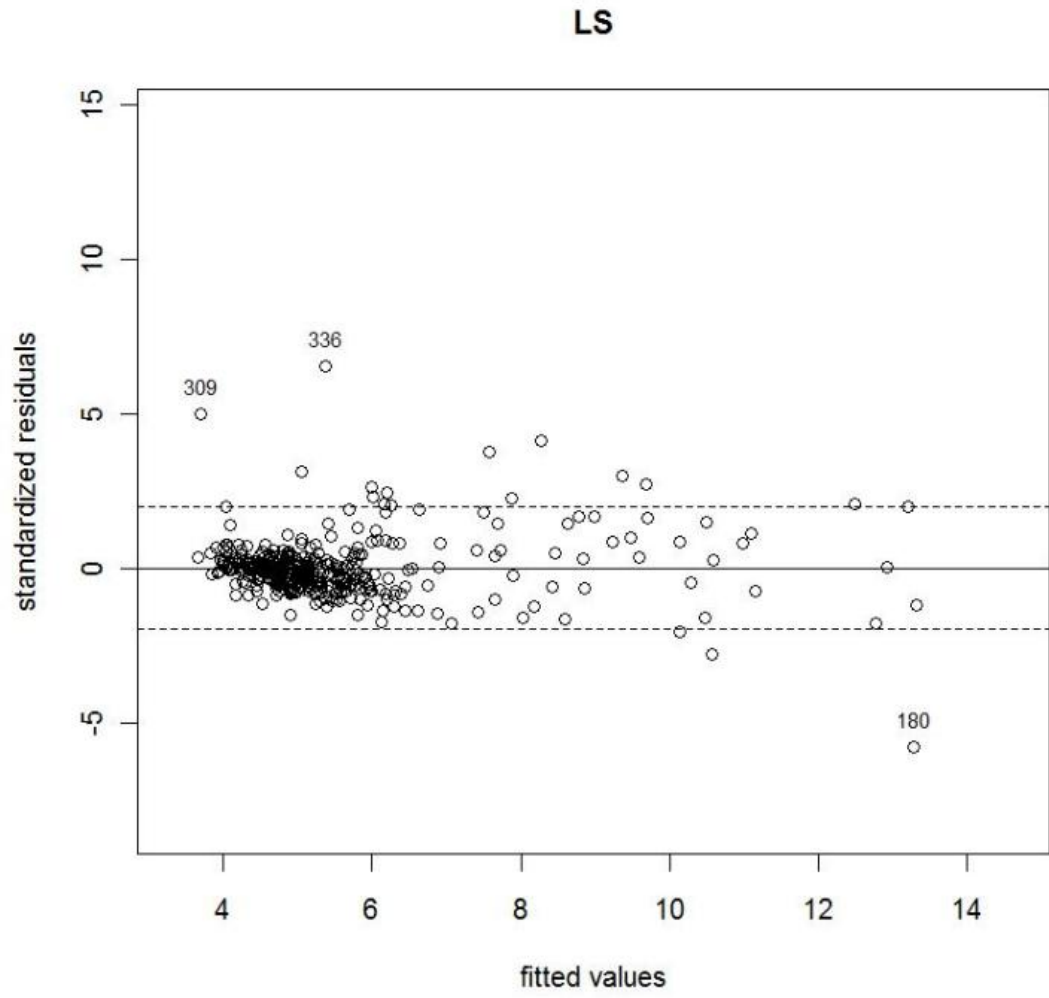
Şekil 4.1. Diabetes verisine ait matrix saçılım grafiği



Şekil 4.2. Diabetes verisindeki glyhb ve stab.glu değişkenleri için Ekk ve QR yönteminden elde edilen regresyon doğruları



Şekil 4.3. Diabetes verisi için Robust standartlaştırılmış rezidü analizi grafiği



Şekil 4.4. Diabetes verisi için LS standartlaştırılmış rezidü analizi grafiği

4.2. Engel Verisi

Engel gıda harcama verisi, Koenker ve Bassett tarafından 1982 yılında kullanıldı. Bu veri seti Belçika işçi sınıfı aileleri için gıda gelir ve harcamalarına ilişkin 235 gözlemden oluşur. (Koenker ve ark. 1982)

Veri seti 2 değişkenli 235 gözlemden oluşmaktadır.

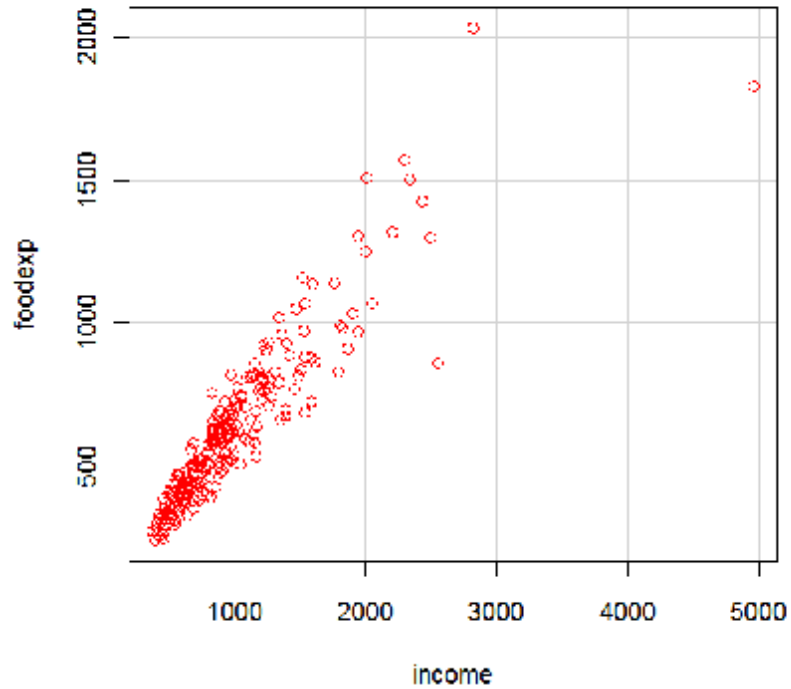
income : Yıllık hane geliri (Belçika Frangı)

foodexp : Yıllık hane halkı gıda harcamaları (Belçika Frangı)

Bu veri setine ilişkin basit doğrusal regresyon modeli,

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon \quad i = 1, 2, \dots, 235$$

olmak üzere, Y : foodexp, X_1 : income şeklinde tanımlanır. Bu değişkenlere ait veriler Ek 5’de verilmiştir. Bu veri setine ait saçılım grafiği Şekil 4.5’de verilmiştir.



Şekil 4.5. Engel verisine ait saçılım grafiği

Modele ait Ekk ve Quantile Regresyon analizinin sonuçları Çizelgelerde verilmiştir.

Çizelge 4.8. Engel verisine ait R programından elde edilen Ekk regresyon sonuçları

```
> summary(RegModel.1)

Call:
lm(formula = foodexp ~ income, data = engel)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-725.699  -60.239   -4.317   53.411  515.772

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 147.47539    15.95708   9.242  <2e-16 ***
income       0.48518     0.01437  33.772  <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 114.1 on 233 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.8304, Adjusted R-squared:  0.8296
F-statistic: 1141 on 1 and 233 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Çizelge 4.9. Engel verisine ait R programından elde edilen QR sonuçları
(tau=0.15, 0.25, 0.5, 0.75, 0.95, 0.99)

```
> summary(fit1, se="nid")

Call: rq(formula = foodexp ~ income, tau = 0.15, data = engel)

tau: [1] 0.15

Coefficients:
            Value      Std. Error t value  Pr(>|t|)
(Intercept) 111.69367    25.74353   4.33871  0.00002
income       0.42371     0.03514  12.05633  0.00000

> summary(fit2, se="nid")

Call: rq(formula = foodexp ~ income, tau = 0.25, data = engel)

tau: [1] 0.25

Coefficients:
            Value      Std. Error t value  Pr(>|t|)
(Intercept)  95.48354    21.39237   4.46344  0.00001
income       0.47410     0.02906  16.31729  0.00000
```

```

> summary(fit3, se="nid")

Call: rq(formula = foodexp ~ income, tau = 0.5, data = engel)

tau: [1] 0.5

Coefficients:
              Value      Std. Error t value  Pr(>|t|)
(Intercept) 81.48225 19.25066      4.23270 0.00003
income       0.56018  0.02828     19.81032 0.00000

> summary(fit4, se="nid")

Call: rq(formula = foodexp ~ income, tau = 0.75, data = engel)

tau: [1] 0.75

Coefficients:
              Value      Std. Error t value  Pr(>|t|)
(Intercept) 62.39659 16.30538      3.82675 0.00017
income       0.64401  0.02324     27.71244 0.00000

> summary(fit5, se="nid")

Call: rq(formula = foodexp ~ income, tau = 0.95, data = engel)

tau: [1] 0.95

Coefficients:
              Value      Std. Error t value  Pr(>|t|)
(Intercept) 64.10396 16.85367      3.80356 0.00018
income       0.70907  0.01793     39.54830 0.00000

```

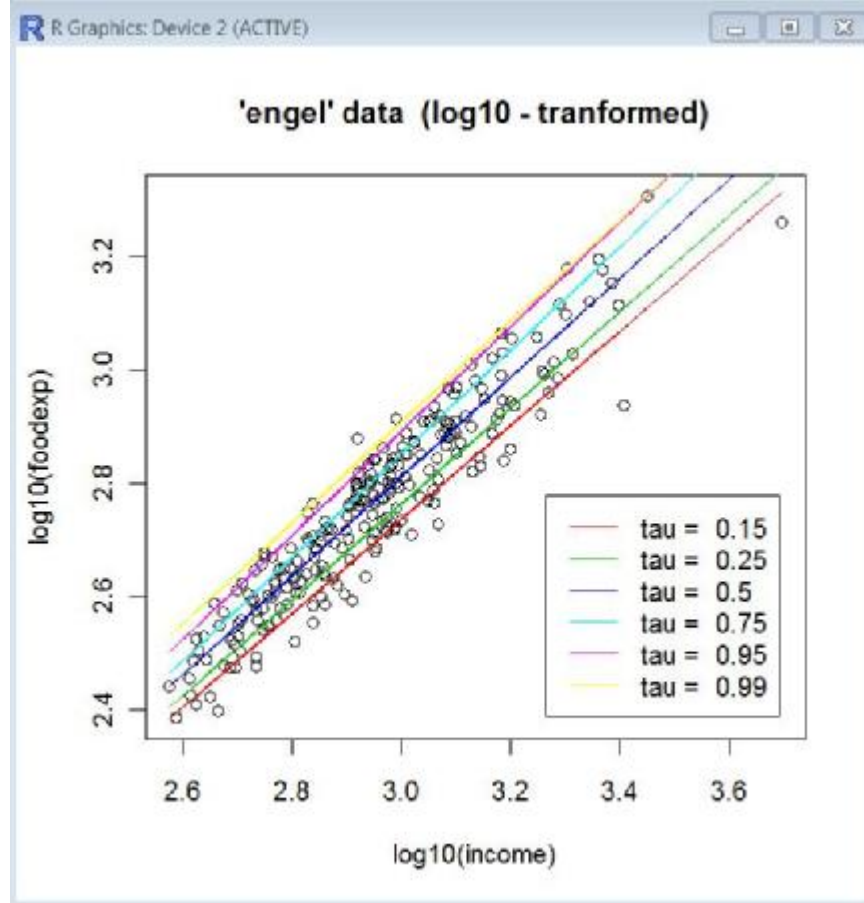
Modelin anlamlılığını test etmek için oluşturulan hipotez testleri,

$$H_0: \beta = 0$$

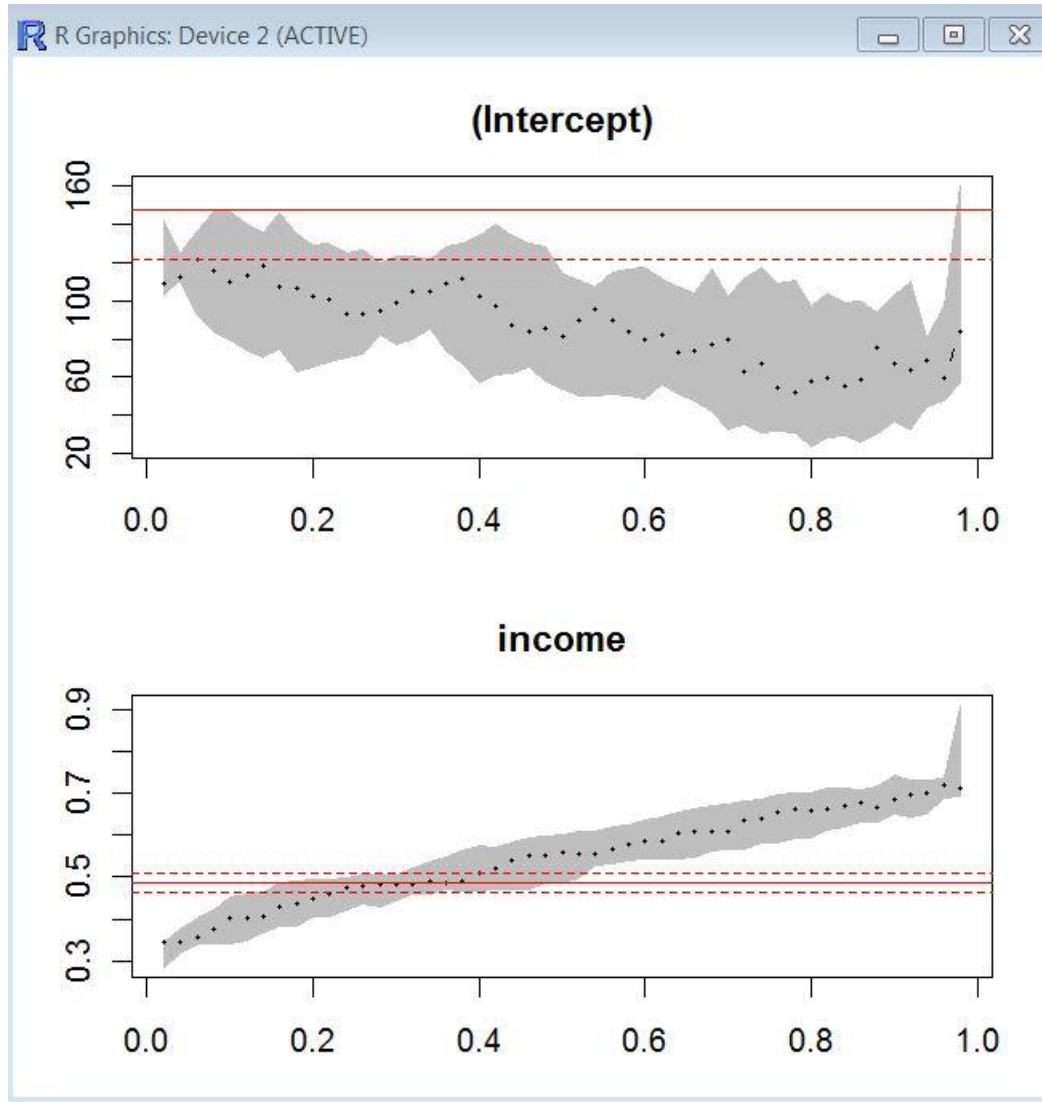
$$H_1: \beta \neq 0$$

dır. Bu hipotez $\alpha = 0.05$ anlam düzeyinde test edildiğinde, $p < \alpha$ olursa H_0 hipotezi reddedilir. Bu teste göre oluşturduğumuz modellere tek tek bakıldığında, değişkenler hem Ekk hem de Quantile Regresyon yönteminde anlamlıdır.

Engel veri setine ait farklı tau değerlerindeki Quantile Regresyon doğruları Şekil 4.6 'da verilmiştir.



Şekil 4.6. Farklı tau değerlerindeki QR doğruları



Şekil 4.7. Sabit ve income değişkeninin katsayı ve güven bandları grafiği

4.3. Barro Verisi

Veri seti panel tahmini için değişkenleri içerir. Koenker ve Machado (1999) tarafından kullanılan Barro büyüme verisi 161 gözlemden ve 13 değişkenden oluşmaktadır.

Lineer Regresyon modeli,

$$y.net_t = \beta_0 + \beta_1 lgdp2_t + \beta_2 mse2_t + \beta_3 fse2_t + \beta_4 fhe2_t + \beta_5 mhe2_t + \beta_6 lexp2_t + \beta_7 lintr2_t + \beta_8 gedy2_t + \beta_9 ly2_t + \beta_{10} gcony2_t + \beta_{11} lblakp2_t + \beta_{12} pol2_t + \beta_{13} ttrad2_t + \varepsilon_t$$

şeklinde ifade edilmektedir.

Bağımlı değişken: y.net

Bağımsız değişkenler: lgdp2, mse2, fse2, fhe2, mhe2, lexp2, lintr2, gedy2, ly2, gcony2, lblakp2, pol2, ttrad2.

Bu değişkenlere ait veriler Ek 7' de verilmiştir. Bu modele ilişkin Ekk Regresyon sonuçları Çizelge 4.10'da verilmiştir.

Çizelge 4.10. Barro verisi için Ekk regresyon yöntemi sonuçları

```
> summary(RegModel.1)

Call:
lm(formula = y.net ~ fhe2 + fse2 + gcony2 + gedy2 + ly2 + lblakp2 +
    lexp2 + lgdp2 + lintr2 + mhe2 + mse2 + pol2 + ttrad2, data = barro)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.037876 -0.009417  0.001339  0.009966  0.038882

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -0.035312   0.052664  -0.671   0.50358
fhe2         -0.023602   0.027751  -0.850   0.39645
fse2         -0.004467   0.006238  -0.716   0.47503
gcony2       -0.100927   0.030302  -3.331   0.00110 **
gedy2        -0.104333   0.118510  -0.880   0.38009
ly2          0.064770   0.022563   2.871   0.00470 ***
lblakp2      -0.031360   0.004933  -6.358 2.44e-09 ***
lexp2        0.067136   0.016310   4.116 6.39e-05 ***
lgdp2       -0.027892   0.003480  -8.014 3.15e-13 ***
lintr2      -0.001695   0.001091  -1.553  0.12247
mhe2         0.022279   0.021992   1.013  0.31271
mse2         0.015117   0.005125   2.950  0.00370 **
pol2        -0.020233   0.006283  -3.220  0.00158 **
ttrad2       0.178385   0.039877   4.473 1.53e-05 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.01651 on 147 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.5924,    Adjusted R-squared:  0.5563
F-statistic: 16.43 on 13 and 147 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Çizelge 4.11. 3 Bağımsız değişkenin yer aldığı ve tau değerinin 0.5 olduğu QR modeli sonuçları

```
> summary(fit0, se="nid")
Call: rq(formula = y.net ~ lgdp2 + fse2 + gedy2, data = barro)
tau: [1] 0.5
Coefficients:
              Value      Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -0.00747    0.02439   -0.30624  0.75983
lgdp2        0.00465    0.00316    1.47487  0.14225
fse2         0.00159    0.00237    0.67029  0.50366
gedy2       -0.36620    0.18418   -1.98825  0.04852
```

Çizelge 4.12. 5 Bağımsız değişkenin yer aldığı ve tau değerinin 0.5 olduğu QR modeli sonuçları

```
> summary(fit1, se="nid")
Call: rq(formula = y.net ~ lgdp2 + fse2 + gedy2 + Iy2 + gcony2,
          data = barro)
tau: [1] 0.5
Coefficients:
              Value      Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  0.12501    0.03073    4.06785  0.00008
lgdp2       -0.01510    0.00412   -3.66322  0.00034
fse2         0.00439    0.00179    2.45299  0.01528
gedy2       -0.19698    0.17888   -1.10115  0.27254
Iy2          0.14906    0.02652    5.62177  0.00000
gcony2      -0.14366    0.05040   -2.85061  0.00496
```

Çizelge 4.13. 5 Bağımsız değişkenin yer aldığı ve tau değerinin 0.75 olduğu QR modeli sonuçları

```
> summary(fit2, se="nid")
Call: rq(formula = y.net ~ lgdp2 + fse2 + gedy2 + Iy2 + gcony2, tau = 0.75,
          data = barro)
tau: [1] 0.75
Coefficients:
              Value      Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  0.13103    0.02741    4.78066  0.00000
lgdp2       -0.01489    0.00356   -4.17598  0.00005
fse2        -0.00026    0.00217   -0.12163  0.90335
gedy2        0.00400    0.16356    0.02446  0.98052
Iy2          0.14527    0.02525    5.75292  0.00000
gcony2      -0.13505    0.05089   -2.65393  0.00879
```

Çizelge 4.14. 5 Bağımsız değişkenin yer aldığı ve tau değerinin 0.25 olduğu QR modeli sonuçları

```
> summary(fit3, se="nid")
Warning in summary.rq(fit3, se = "nid") : 1 non-positive fis

Call: rq(formula = y.net ~ lgdp2 + fse2 + gedy2 + Iy2 + gcony2, tau = 0.25,
  data = barro)

tau: [1] 0.25

Coefficients:
                Value      Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  0.06086    0.03285    1.85269  0.06583
lgdp2       -0.00884    0.00481   -1.83837  0.06792
fse2         0.00246    0.00272    0.90465  0.36705
gedy2       -0.14962    0.22696   -0.65925  0.51072
Iy2          0.15592    0.03475    4.48763  0.00001
gcony2      -0.15862    0.06151   -2.57869  0.01085
>
```

Çizelge 4.15. Barro verisi için R programından elde edilen Varyans Analizi tablosu

```
> anova(fit1,fit0)
Quantile Regression Analysis of Deviance Table

Model 1: y.net ~ lgdp2 + fse2 + gedy2 + Iy2 + gcony2
Model 2: y.net ~ lgdp2 + fse2 + gedy2
  Df Resid Df F value    Pr(>F)
1  2      155  18.879 4.596e-08 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

> anova(fit1,fit2,fit3)
Warning in summary.rq(x, se = "nid", covariance = TRUE) :
  1 non-positive fis
Quantile Regression Analysis of Deviance Table

Model: y.net ~ lgdp2 + fse2 + gedy2 + Iy2 + gcony2
Joint Test of Equality of Slopes: tau in { 0.5 0.75 0.25 }

  Df Resid Df F value    Pr(>F)
1 10      473  1.8039 0.05751 .
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

> anova(fit1,fit2,fit3, joint=FALSE)
Warning in summary.rq(x, se = "nid", covariance = TRUE) :
  1 non-positive fis
Quantile Regression Analysis of Deviance Table

Model: y.net ~ lgdp2 + fse2 + gedy2 + Iy2 + gcony2
Tests of Equality of Distinct Slopes: tau in { 0.5 0.75 0.25 }

      Df Resid Df F value    Pr(>F)
lgdp2  2      481  1.0656 0.3453
fse2    2      481  2.6399 0.0724 .
gedy2   2      481  0.7862 0.4561
Iy2     2      481  0.0447 0.9563
gcony2  2      481  0.0653 0.9368
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

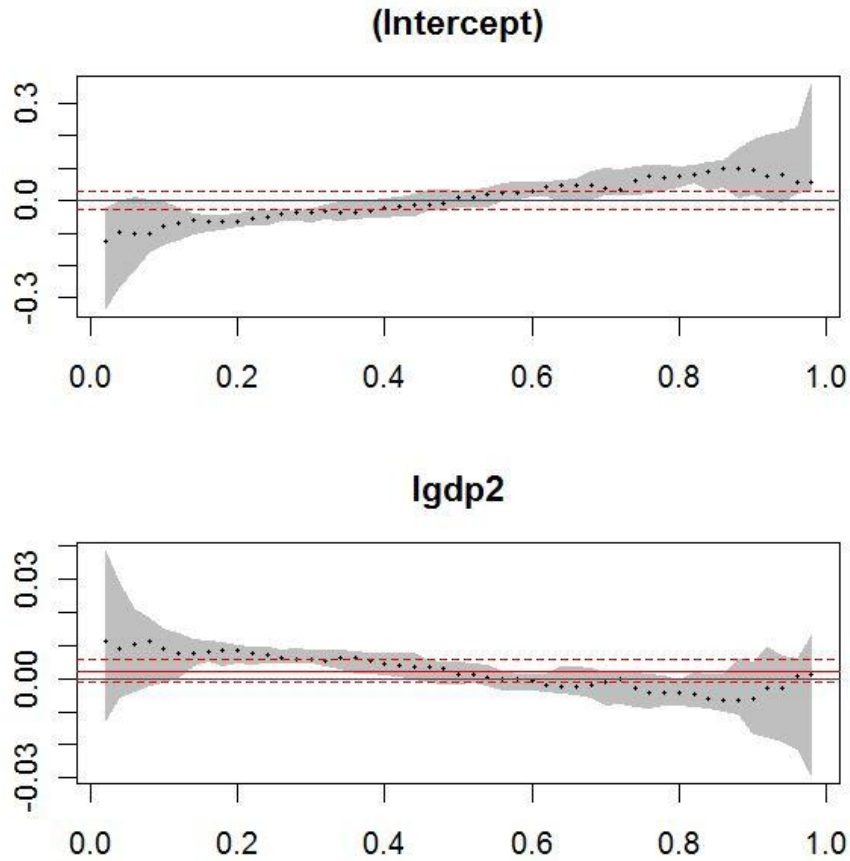
Modelin anlamlılığını test etmek için oluşturulan hipotez testleri,

$$H_0: \beta = 0$$

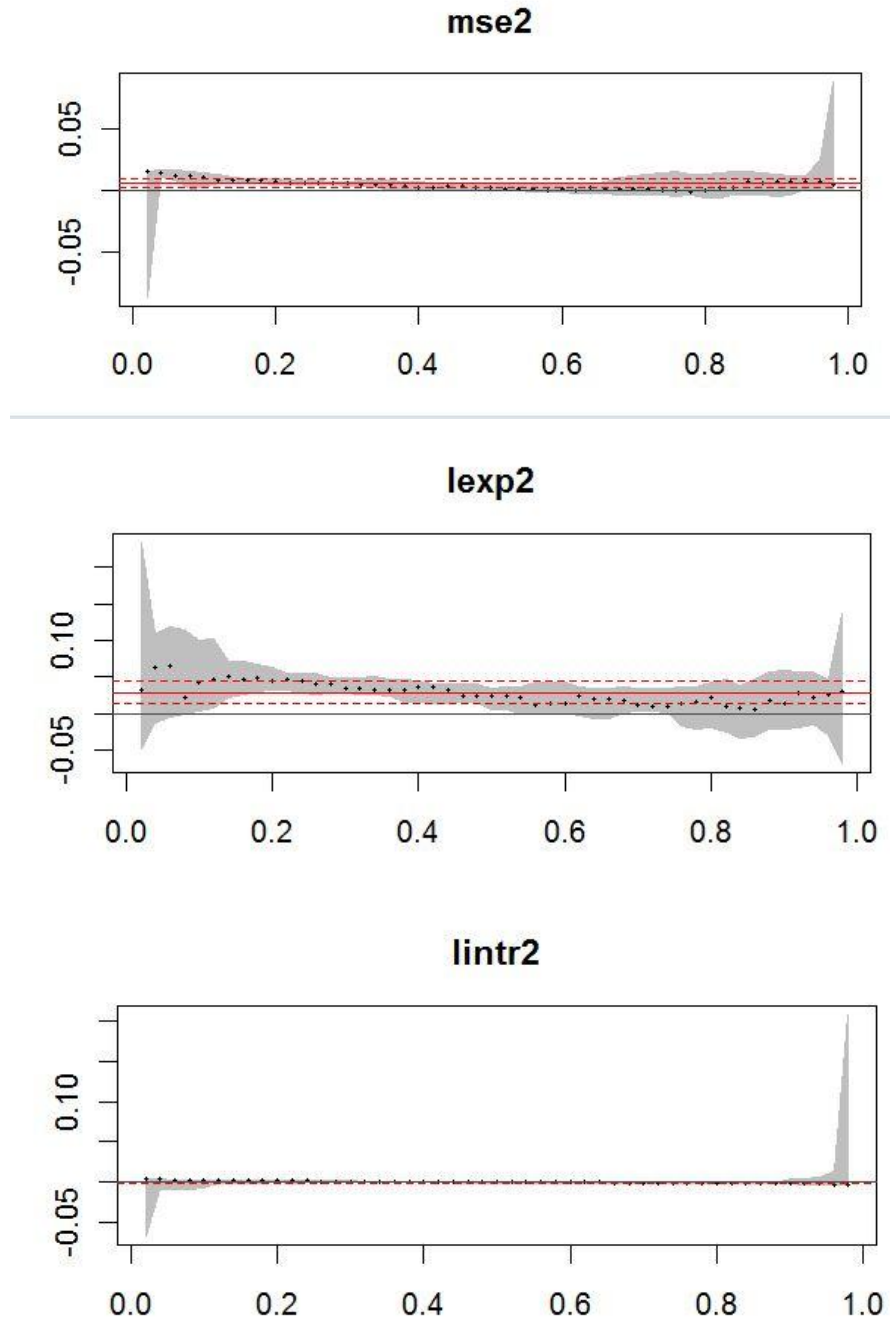
$$H_1: \beta \neq 0$$

dır. Bu hipotez $\alpha = 0.05$ anlam düzeyinde test edildiğinde, $p < \alpha$ olursa H_0 hipotezi reddedilir. Ekk regresyonunda ve QR'nun farklı tau değerlerinde y.net bağımlı değişkeni ile lgdp2, ly2 ve gcony2 değişkenleri arasındaki ilişki %95 anlam düzeyinde istatistiksel olarak anlamlıdır.

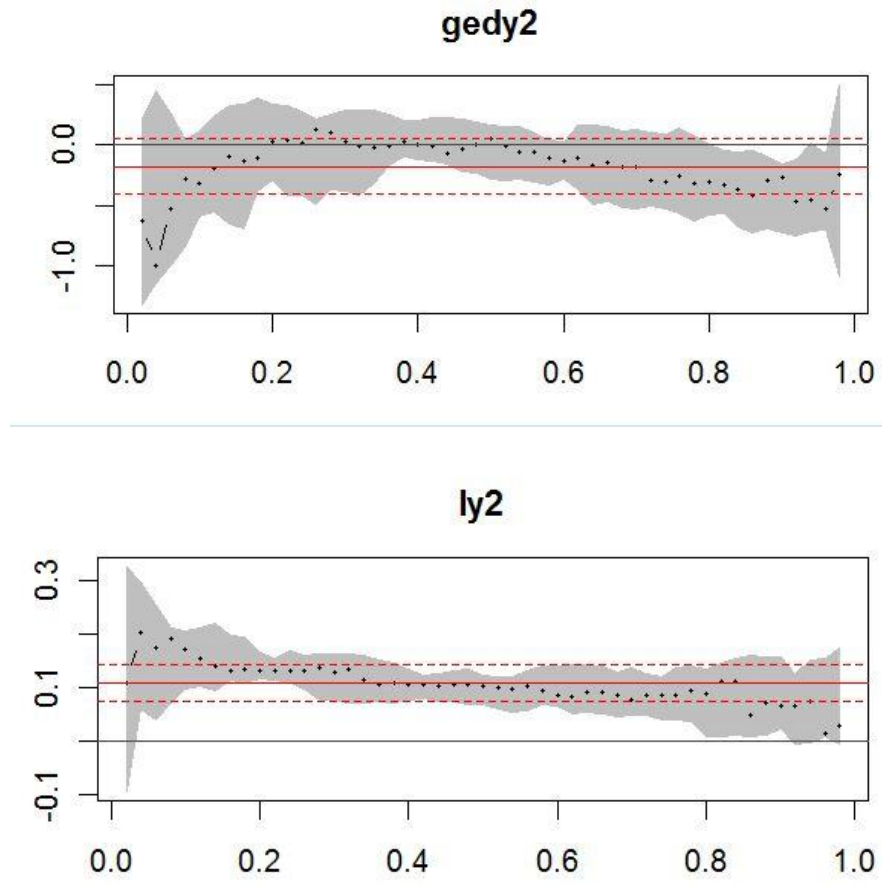
Ekk ve QR'nun $\tau=0.25$, $\tau=0.5$, $\tau=0.75$ değerleri için fhe2, fse2, lintr2, mhe2 ve gedy2 değişkenlerinin katsayısının anlamsız çıktığı görülmektedir.



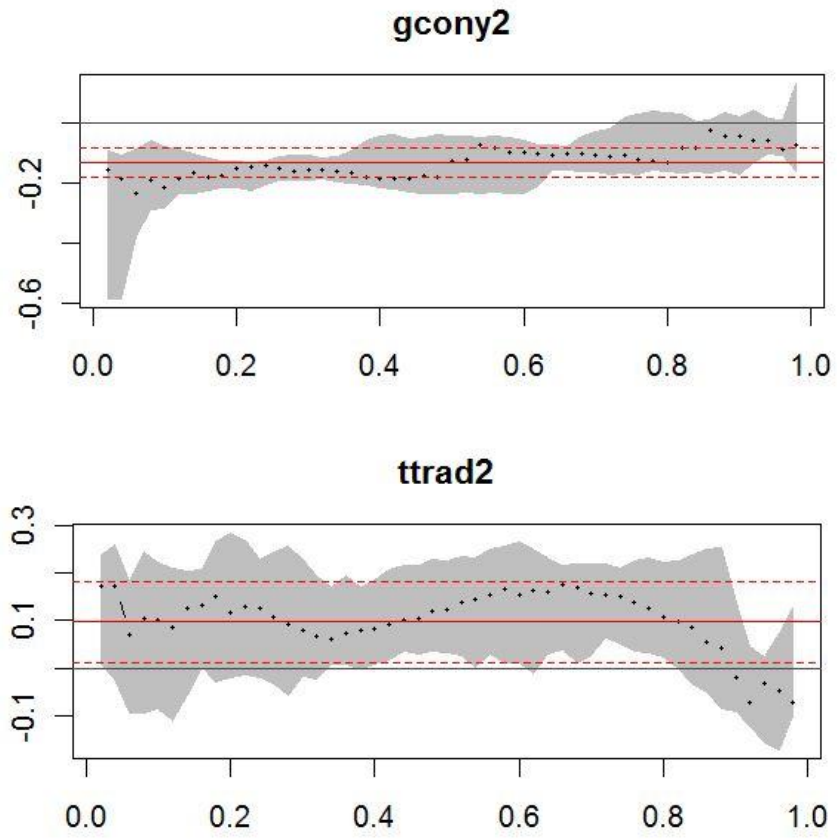
Şekil 4.8. Sabit ve lgdp2 değişkenlerinin katsayı ve güven bandları grafiği



Şekil 4.9. mse2, lexp2 ve lintr2 değişkenlerinin katsayı ve güven bandları grafiği



Şekil 4.10. gedy2 vely2 değişkenlerinin katsayı ve güven bandları grafiği



Şekil 4.11. gcony2 ve ttrad2 değişkenlerinin katsayı ve güven bandları grafiği

5. SONUÇLAR

Regresyon analizi bağımlı değişkenin bir ya da birden fazla bağımsız değişkenle arasındaki ilişkinin matematiksel bir fonksiyon biçiminde yazılmasıdır. Lineer regresyon modellerinde hataların minimum yapılması amaçlanmıştır. Çözüm için literatürde birçok çözüm yöntemi bulunmaktadır.

Bu çalışmada Quantile Regresyon yöntemi ile Quantile regresyonun özel bir hali olan En Küçük Mutlak Sapma (Lad) yöntemi ele alınmış ve bu yöntemlerle elde edilen sonuçlar Ekk regresyon yöntemi ile karşılaştırılmıştır.

Çalışmada ilk olarak Lineer regresyon ve Lad regresyon hakkında genel bilgiler verildi. İkinci bölümde Lineer regresyon analizine ve alternatif yöntemlerden biri olan Lad regresyon analizine giriş yapıldı, Lineer regresyon için Ekk ve MLE parametre tahmin yöntemleri, çoklu belirleyicilik katsayısı verildi. Lad regresyon yönteminin Basit lineer regresyon ve çoklu lineer regresyon için Lad algoritmaları verildi. Üçüncü bölümde, quantile, quantile yoğunluk fonksiyonu, Quantile regresyon, QR'nun özelliklerinden bahsedildi, ayrıca Quantile Regresyonun doğrusal programlama gösterimi, Asimptotik kovaryans matris tahmini, Sıra istatistiği tahmin edicisi, Bootstrap tahmin edicileri ve Quantile Regresyonda sabit varyansın incelenmesi konuları ele alındı. Dördüncü bölümde Quantile Regresyon, Lad ve Ekk yöntemleri için regresyon analizi uygulamaları yapıldı.

Çalışmanın son bölümünde ilk uygulama için, “Robust Methods in Biostatistics (Wiley Series in Probability and Statistics) Heritier, S., Cantoni, E., Copt, S., Maria-Pia Victoria-Feser” kitabından alınan “Diabetes” verileri kullanılmıştır. İkinci uygulamada R programının “*quantreg*” paketi içerisinde yer alan Engel veri seti kullanılmıştır. 3-üncü veri seti yine *quantreg* paketi içerisinde yer alan Barro veri setidir. Bütün uygulamalarda analiz için R paket programı kullanılmıştır.

KAYNAKLAR

- ADOVER, J., MARONNA RICARDO A. and YOHAI, VICTOR J. 2003. Robust Regression Quantiles. *Journal of Statistical Planning and Inference* 122 (2004) 187-202.
- ALPAR,R., 2003, Uygulamalı Çok Değişkenli İstatistiğe Giriş-1, Nobel Yayınevi Ankara.
- BARRODALE, I., 1968. L1 Approximation and the Analyses of Data, *Applied Statistics*, Vol.17, No.1, s.51.
- BARRODALE, I., ve ROBERTS, F.,D.,K. 1973. An Improved Algorithm for Discrete L1 Linear Approximation. *SIAM Journal on numerical Analysis*, Vol.10, No.5.
- BULTER, R.,J.,MCDONALD, J., B., et all (1990). Robust and Partially Adaptive Estimation of Regression Models, *The Review of Economics and Statistics*, Vol.72, Issue 2, 321-327.
- BICKEL, P.,J., & FREEDMAN, D.,A., 1981. Some Asymptotic Theory for the Bootstrap. *The Annals of the Statistics*, Vol.9, No.6, s.1196.
- BIRKES, D. & DODGE, Y. 1993. *Alternative Methods of Regression*. NewYork, NY: John Wiley & Sons, Inc.
- BUCHINSKY, M. 1998. Recent Advances in Quantile Regression Models: A Practical Guideline for Empirical Research, *The Journal of Human Resources*, Vol.33, No.1.
- BUHAI, I.S. 2004. *Quantile Regression: Overview and Selected Applications*. Ad Astra.
- CHAKRABORTY, B. 2001. On multivariate Quantile Regression. *Journal of Statistical Planning and Inference* 110 (2003) 109–132.
- CHEN, C. & WEI, Y. 2005. Computational Issues for Quantile Regression. *Special Issue on Quantile Regression and Related Methods 2005*, Volume 67, Part 2, pp 399-417.
- CRAWLEY, M., J., 2007. *The R Book*. New York, NY: John Wiley & Sons, Ltd.

- EFRON, B., 1979. Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife. The Annals of Statistics, Vol.7, No.1.
- HAO, L., and Naiman, D., Q., 2007. Quantile Regression. Sage Publications, Inc.
- HARRELL, F., E., 2001. Regression Modeling Strategies with Applications to Linear Models, Logistic Regression and Survival Analysis. Springer Series in Statistics.
- [HTTP://www.r-project.org/](http://www.r-project.org/) (Erişim tarihi Eylül 2009).
- JURECKOVA, J., & PICEK, J., 2005. Two-Step Regression Quantiles. Special Issue on Quantile Regression and Related Methods 2005, Volume 67, Part 2, pp 227–252.
- KOENKER, R., 2005. Quantile Regression. NY: Cambridge University Press, USA.
- KOENKER, R., and BASSETT G., 1978. Regression Quantiles. The Econometric Society, Vol. 46, No.1, pp.33-50.
- KOENKER, R., and D'OREY, V., 1987. Algorithm AS 229: Computing Regression Quantiles, Applied Statistics, Vol.36, No.3, s.383.
- KOENKER, R., and HALLOCK K., F., 2001. Quantile Regression an Introduction. Journal of Economic Perspectives—Volume 15, Number 4—Fall 2001 Pages 143–156.
- KOENKER, R., and MACHADO, J., A., F., 1999. Goodness of Fit and Related Inference Processes for Quantile Regression. Journal of the American Statistical Association, Vol. 94, No. 448, pp. 1296-1310.
- KOENKER, R., and Ng, P., 2005. Inequality Constrained Quantile Regression. Special Issue on Quantile Regression and Related Methods 2005, Volume 67, Part 2, pp 418-440.
- KOENKER, R., & BASSETT, G., 1982. Robust Tests for Heteroscedasticity Based on Regression Quantiles. Econometrica, Vol. 50, No. 1.
- KUAN, C., M., 2007. An Introduction to Quantile Regression. Institute of Economics Academia Sinica.

- LI, Y., and ZHU, J., 2008. L1-Norm Quantile Regression. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, Volume 17, Number 1, Pages 163–185.
- MELIGKOTSİDOU, L., VRONTOS, I.,D., and VRONTOS, S.,D., 2009. Quantile Regression Analysis of hedge fund strategies. *Journal of Empirical Finance*.
- MONTGOMERY, D.,C. and PECK, E. A., 2001. *Introduction to Linear Regression Analysis*. John Wiley and Sons, New York.
- OTSU, T., 2007. Conditional Empirical Likelihood Estimation and Inference for Quantile Regression Models. *Journal of Econometrics* 142 (2008) 508-538.
- PENG, L., and HUANG, Y., 2008. Survival Analysis with Quantile Regression Models. *Journal of the American Statistical Association* June 2008, Vol. 103, No. 482.
- RAO, C., R., & TOUTENBURG, H., 1999. *Linear Models: Least Squares and Alternatives*, 2. Basım – Springer – Verlag New York.
- SAÇAKLI, İ., 2005. Kantil Regresyon ve Alternatif Regresyon Modelleri ile Karşılaştırılması, Marmara Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Ekonometri Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul.
- YU, K., LU, Z., STANDER, J., 2003, Quantile Regression: application and current research areas, *The Statistician*, 52, Part 3, pp.331-350.

ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında Adana’da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Adana’da tamamladı. 2004 yılında başladığı Çukurova Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü’nden 2008 yılında üçüncülükle mezun oldu ve aynı yıl bu bölümde yüksek lisans eğitimine başladı.

EKLER

EK-1

Şekil 3.3'ün R Program kodu ve simülasyonla elde edilen veriler

```
> xx<-matrix(runif(60,0,10),ncol=1)
> xx
```

```
      [,1]
[1,] 5.42445503
[2,] 1.47892070
[3,] 1.32147375
[4,] 4.51723963
[5,] 1.61062004
[6,] 7.74165426
[7,] 7.77312393
[8,] 6.30509424
[9,] 0.29826134
[10,] 9.13957010
[11,] 6.35631460
[12,] 6.60434375
[13,] 1.70429506
[14,] 6.54673812
[15,] 8.13832416
[16,] 9.89184679
[17,] 9.68859426
[18,] 5.46495467
[19,] 8.73077024
[20,] 7.60295643
[21,] 1.84544100
[22,] 7.97816803
[23,] 1.40715244
[24,] 3.94015383
[25,] 8.64276729
[26,] 9.47555254
[27,] 6.28529266
[28,] 6.99687044
[29,] 9.55338393
[30,] 6.79881245
[31,] 9.33563258
[32,] 2.39095150
[33,] 0.64234099
[34,] 2.32967697
[35,] 7.12912602
[36,] 8.84742857
[37,] 2.82974546
[38,] 5.32966466
[39,] 1.12192646
[40,] 0.03700406
[41,] 6.65153962
[42,] 4.37804507
[43,] 7.97280399
[44,] 1.71440766
[45,] 1.53134423
[46,] 2.04210564
[47,] 6.13327624
[48,] 9.89289726
[49,] 3.62739627
[50,] 7.53226589
[51,] 2.80999996
[52,] 0.54592008
[53,] 3.67038707
[54,] 1.45735365
[55,] 8.34043422
[56,] 7.38641946
[57,] 4.34080196
[58,] 1.53469314
[59,] 3.69967570
[60,] 7.23188252
```

```
> uu<-matrix(runif(60,0,1),ncol=1)
```

```
> uu
      [,1]
[1,] 0.546285925
[2,] 0.408444670
[3,] 0.967811248
[4,] 0.852592740
[5,] 0.513451759
[6,] 0.455085067
[7,] 0.180568541
[8,] 0.010809470
[9,] 0.885091099
[10,] 0.969539165
[11,] 0.248803426
[12,] 0.730162002
[13,] 0.486448989
[14,] 0.636704683
[15,] 0.026556990
[16,] 0.750580640
[17,] 0.261898571
[18,] 0.537131591
[19,] 0.605303319
[20,] 0.175652015
[21,] 0.955265378
[22,] 0.917843168
[23,] 0.445014086
[24,] 0.523699223
[25,] 0.725760794
[26,] 0.966231746
[27,] 0.842694417
[28,] 0.840168485
[29,] 0.826610896
[30,] 0.859082658
[31,] 0.297866901
[32,] 0.413065303
[33,] 0.523489122
[34,] 0.062136855
[35,] 0.063932420
[36,] 0.993193722
[37,] 0.000633839
[38,] 0.158185179
[39,] 0.137784465
[40,] 0.632634865
[41,] 0.072942640
[42,] 0.676776358
[43,] 0.129698959
[44,] 0.541805471
[45,] 0.276964198
[46,] 0.301283535
[47,] 0.748210443
[48,] 0.460434751
[49,] 0.637678650
[50,] 0.458660100
[51,] 0.737930956
[52,] 0.127109830
[53,] 0.777334239
[54,] 0.754949604
[55,] 0.252269433
[56,] 0.906650564
[57,] 0.276446844
[58,] 0.710020203
[59,] 0.987080904
```

```
[60,] 0.309134099
```

```
> yy<-xx+(xx^2)*uu  
> yy
```

	[,1]	[21,]	5.09874289	[42,]	17.35000611
[1,]	21.49876126	[22,]	66.39995497	[43,]	16.21719657
[2,]	2.37227352	[23,]	2.28831504	[44,]	3.30687885
[3,]	3.01155565	[24,]	12.07048590	[45,]	2.18082946
[4,]	21.91478151	[25,]	62.85523080	[46,]	3.29851688
[5,]	2.94256366	[26,]	96.22972866	[47,]	34.27876642
[6,]	35.01636349	[27,]	39.57585449	[48,]	54.95537756
[7,]	18.68333801	[28,]	48.12832343	[49,]	12.01797433
[8,]	6.73481621	[29,]	84.99580004	[50,]	33.55436012
[9,]	0.37699890	[30,]	46.50892096	[51,]	8.63677644
[10,]	90.12686512	[31,]	35.29593504	[52,]	0.58380246
[11,]	16.40865353	[32,]	4.75230087	[53,]	14.14243277
[12,]	38.45207997	[33,]	0.85833362	[54,]	3.06077576
[13,]	3.11724533	[34,]	2.66691821	[55,]	25.88901314
[14,]	33.83576080	[35,]	10.37845533	[56,]	56.85254202
[15,]	9.89725524	[36,]	86.59164594	[57,]	9.54976867
[16,]	83.33513634	[37,]	2.83482090	[58,]	3.20699169
[17,]	34.27271419	[38,]	9.82296615	[59,]	17.21044458
[18,]	21.50678150	[39,]	1.29535838	[60,]	23.39963447
[19,]	54.87083225	[40,]	0.03787033		
[20,]	17.75651175	[41,]	9.87873931		

```
> plot(xx,yy)
```

```
> cbind(xx,yy)
```

	[,1]	[,2]	[12,]	6.60434375	[23,]	1.40715244
[1,]	5.42445503			38.45207997		2.28831504
	21.49876126		[13,]	1.70429506	[24,]	3.94015383
[2,]	1.47892070			3.11724533		12.07048590
	2.37227352		[14,]	6.54673812	[25,]	8.64276729
[3,]	1.32147375			33.83576080		62.85523080
	3.01155565		[15,]	8.13832416	[26,]	9.47555254
[4,]	4.51723963			9.89725524		96.22972866
	21.91478151		[16,]	9.89184679	[27,]	6.28529266
[5,]	1.61062004			83.33513634		39.57585449
	2.94256366		[17,]	9.68859426	[28,]	6.99687044
[6,]	7.74165426			34.27271419		48.12832343
	35.01636349		[18,]	5.46495467	[29,]	9.55338393
[7,]	7.77312393			21.50678150		84.99580004
	18.68333801		[19,]	8.73077024	[30,]	6.79881245
[8,]	6.30509424			54.87083225		46.50892096
	6.73481621		[20,]	7.60295643	[31,]	9.33563258
[9,]	0.29826134			17.75651175		35.29593504
	0.37699890		[21,]	1.84544100	[32,]	2.39095150
[10,]	9.13957010			5.09874289		4.75230087
	90.12686512		[22,]	7.97816803	[33,]	0.64234099
[11,]	6.35631460			66.39995497		0.85833362
	16.40865353					

[34,] 2.32967697	[43,] 7.97280399	[52,] 0.54592008
2.66691821	16.21719657	0.58380246
[35,] 7.12912602	[44,] 1.71440766	[53,] 3.67038707
10.37845533	3.30687885	14.14243277
[36,] 8.84742857	[45,] 1.53134423	[54,] 1.45735365
86.59164594	2.18082946	3.06077576
[37,] 2.82974546	[46,] 2.04210564	[55,] 8.34043422
2.83482090	3.29851688	25.88901314
[38,] 5.32966466	[47,] 6.13327624	[56,] 7.38641946
9.82296615	34.27876642	56.85254202
[39,] 1.12192646	[48,] 9.89289726	[57,] 4.34080196
1.29535838	54.95537756	9.54976867
[40,] 0.03700406	[49,] 3.62739627	[58,] 1.53469314
0.03787033	12.01797433	3.20699169
[41,] 6.65153962	[50,] 7.53226589	[59,] 3.69967570
9.87873931	33.55436012	17.21044458
[42,] 4.37804507	[51,] 2.80999996	[60,] 7.23188252
17.35000611	8.63677644	23.39963447

```
> data01<-as.data.frame(cbind(xx,yy))
> library(Rcmdr)
```

```
> xx2<-(xx^2)
> xx2
```

[,1]	[21,] 3.405652474	[42,] 19.167278643
[1,] 29.424712392	[22,] 63.651165037	[43,] 63.565603409
[2,] 2.187206444	[23,] 1.980077989	[44,] 2.939193631
[3,] 1.746292885	[24,] 15.524812165	[45,] 2.345015139
[4,] 20.405453919	[25,] 74.697426399	[46,] 4.170195465
[5,] 2.594096907	[26,] 89.786095846	[47,] 37.617077441
[6,] 59.933210704	[27,] 39.504903762	[48,] 97.869416269
[7,] 60.421455678	[28,] 48.956195941	[49,] 13.158003735
[8,] 39.754213320	[29,] 91.267144490	[50,] 56.735029394
[9,] 0.088959830	[30,] 46.223850685	[51,] 7.896099801
[10,] 83.531741617	[31,] 87.154035588	[52,] 0.298028736
[11,] 40.402735235	[32,] 5.716649054	[53,] 13.471741211
[12,] 43.617356344	[33,] 0.412601946	[54,] 2.123879664
[13,] 2.904621663	[34,] 5.427394767	[55,] 69.562842942
[14,] 42.859780040	[35,] 50.824437759	[56,] 54.559192421
[15,] 66.232320090	[36,] 78.276992335	[57,] 18.842561663
[16,] 97.848633009	[37,] 8.007459386	[58,] 2.355283044
[17,] 93.868858731	[38,] 28.405325429	[59,] 13.687600307
[18,] 29.865729566	[39,] 1.258718979	[60,] 52.300124810
[19,] 76.226348904	[40,] 0.001369300	
[20,] 57.804946513	[41,] 44.242979267	

```
> cbind(xx,xx2,yy)
```

```
      [,1]      [,2]      [,3]
[1,] 5.42445503 29.424712392 21.49876126
[2,] 1.47892070 2.187206444 2.37227352
[3,] 1.32147375 1.746292885 3.01155565
[4,] 4.51723963 20.405453919 21.91478151
[5,] 1.61062004 2.594096907 2.94256366
[6,] 7.74165426 59.933210704 35.01636349
[7,] 7.77312393 60.421455678 18.68333801
[8,] 6.30509424 39.754213320 6.73481621
[9,] 0.29826134 0.088959830 0.37699890
[10,] 9.13957010 83.531741617 90.12686512
[11,] 6.35631460 40.402735235 16.40865353
[12,] 6.60434375 43.617356344 38.45207997
[13,] 1.70429506 2.904621663 3.11724533
[14,] 6.54673812 42.859780040 33.83576080
[15,] 8.13832416 66.232320090 9.89725524
[16,] 9.89184679 97.848633009 83.33513634
[17,] 9.68859426 93.868858731 34.27271419
[18,] 5.46495467 29.865729566 21.50678150
[19,] 8.73077024 76.226348904 54.87083225
[20,] 7.60295643 57.804946513 17.75651175
[21,] 1.84544100 3.405652474 5.09874289
[22,] 7.97816803 63.651165037 66.39995497
[23,] 1.40715244 1.980077989 2.28831504
[24,] 3.94015383 15.524812165 12.07048590
[25,] 8.64276729 74.697426399 62.85523080
[26,] 9.47555254 89.786095846 96.22972866
[27,] 6.28529266 39.504903762 39.57585449
[28,] 6.99687044 48.956195941 48.12832343
[29,] 9.55338393 91.267144490 84.99580004
[30,] 6.79881245 46.223850685 46.50892096
```

```
[31,] 9.33563258 87.154035588 35.29593504
[32,] 2.39095150 5.716649054 4.75230087
[33,] 0.64234099 0.412601946 0.85833362
[34,] 2.32967697 5.427394767 2.66691821
[35,] 7.12912602 50.824437759 10.37845533
[36,] 8.84742857 78.276992335 86.59164594
[37,] 2.82974546 8.007459386 2.83482090
[38,] 5.32966466 28.405325429 9.82296615
[39,] 1.12192646 1.258718979 1.29535838
[40,] 0.03700406 0.001369300 0.03787033
[41,] 6.65153962 44.242979267 9.87873931
[42,] 4.37804507 19.167278643 17.35000611
[43,] 7.97280399 63.565603409 16.21719657
[44,] 1.71440766 2.939193631 3.30687885
[45,] 1.53134423 2.345015139 2.18082946
[46,] 2.04210564 4.170195465 3.29851688
[47,] 6.13327624 37.617077441 34.27876642
[48,] 9.89289726 97.869416269 54.95537756
[49,] 3.62739627 13.158003735 12.01797433
[50,] 7.53226589 56.735029394 33.55436012
[51,] 2.80999996 7.896099801 8.63677644
[52,] 0.54592008 0.298028736 0.58380246
[53,] 3.67038707 13.471741211 14.14243277
[54,] 1.45735365 2.123879664 3.06077576
[55,] 8.34043422 69.562842942 25.88901314
[56,] 7.38641946 54.559192421 56.85254202
[57,] 4.34080196 18.842561663 9.54976867
[58,] 1.53469314 2.355283044 3.20699169
[59,] 3.69967570 13.687600307 17.21044458
[60,] 7.23188252 52.300124810 23.39963447
```

```

> data02<-as.data.frame(cbind(xx,xx2,yy))
> > plot(xx,yy)
> abline(rq(yy~xx,tau=0.5),col="blue")
> abline(lm(yy~xx),lty=2,col="red")
> taus<-c(0.05,0.1,0.25,0.75,0.9,0.95)
> for(i in 1:length(taus)){abline(rq(yy~xx,tau=taus[i]),col="gray")}
> RegModel.1 <- lm(yy~xx+xx2, data=data02)

```

```

> summary(RegModel.1)

```

Call:

```
lm(formula = yy ~ xx + xx2, data = data02)
```

Residuals:

	Min	1Q	Median	3Q	Max
	-35.0530	-4.5515	0.2522	6.8577	33.3874

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	3.9975	5.8678	0.681	0.4985
xx	-2.1377	2.8240	-0.757	0.4522
xx2	0.8810	0.2734	3.223	0.0021 **

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 15.12 on 57 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.676, Adjusted R-squared: 0.6647

F-statistic: 59.47 on 2 and 57 DF, p-value: 1.121e-14

EK-2

Şekil 3.4'ün R Program kodu

```
> xx<-matrix(runif(60,0,10),ncol=1)
> yy<-xx+(xx^2)*(matrix(runif(60,0,2),ncol=1))
> plot(xx,yy)
> x<-seq(0,10,.1)
> y<-x+(x^2)*qunif(0.05,0,2)
> lines(x,y)
> y<-x+(x^2)*qunif(0.25,0,2)
> lines(x,y)
> y<-x+(x^2)*qunif(0.5,0,2)
> lines(x,y)
> y<-x+(x^2)*qunif(0.75,0,2)
> lines(x,y)
> y<-x+(x^2)*qunif(0.95,0,2)
> lines(x,y)
> library(quantreg)
> xx2<-(xx^2)
> fit<-rq(yy~xx+xx2,tau=0.25)
> fit
```

Call:

```
rq(formula = yy ~ xx + xx2, tau = 0.25)
```

Coefficients:

(Intercept)	xx	xx2
1.091709	-1.195957	1.060888

Degrees of freedom: 60 total; 57 residual

```
> y<-1.092-1.196*x+1.061*(x^2)
> lines(x,y,col="red")
> fit<-rq(yy~xx+xx2,tau=0.05)
> fit
```

Call:

```
rq(formula = yy ~ xx + xx2, tau = 0.05)
```

Coefficients:

(Intercept)	xx	xx2
0.2091221	-0.6989374	0.5139812

Degrees of freedom: 60 total; 57 residual

```
> y<-0.209-0.699*x+0.514*(x^2)
> lines(x,y,col="red")
> fit<-rq(yy~xx+xx2,tau=0.5)
> fit
```

Call:

```
rq(formula = yy ~ xx + xx2, tau = 0.5)
```

Coefficients:

(Intercept)	xx	xx2
-0.02767798	1.10989038	1.26488487

Degrees of freedom: 60 total; 57 residual

```
> y<--0.028+1.110*x+1.265*(x^2)
```

```
> lines(x,y,col="red")
```

```
> fit<-rq(yy~xx+xx2,tau=0.75)
```

```
> fit
```

Call:

```
rq(formula = yy ~ xx + xx2, tau = 0.75)
```

Coefficients:

```
(Intercept)      xx      xx2
```

```
-0.07893424  1.33140981  1.54937366
```

Degrees of freedom: 60 total; 57 residual

```
> y<--0.079+1.331*x+1.549*(x^2)
```

```
> lines(x,y,col="red")
```

```
> fit<-rq(yy~xx+xx2,tau=0.95)
```

```
> fit
```

Call:

```
rq(formula = yy ~ xx + xx2, tau = 0.95)
```

Coefficients:

```
(Intercept)      xx      xx2
```

```
0.1668850  0.6030950  1.9641315
```

Degrees of freedom: 60 total; 57 residual

```
> y<-0.167+0.603*x+1.964*(x^2)
```

```
> lines(x,y,col="red")
```

EK-3

```
> > diabetes
glyhb age gender bmi waisthip frame stab.glu location
1 4.31 46 female 21.95563 0.7631579 medium 82 Buckingham
2 4.44 29 female 37.12288 0.9583333 large 97 Buckingham
3 4.64 58 female 47.98720 0.8596491 large 92 Buckingham
4 4.63 67 male 18.49024 0.8684211 large 93 Buckingham
5 7.72 64 male 27.60440 1.0731707 medium 90 Buckingham
6 4.81 34 male 26.28948 0.8571429 large 94 Buckingham
7 4.84 30 male 27.98210 0.9387755 medium 92 Buckingham
8 3.94 37 male 34.06356 0.8717949 medium 75 Buckingham
9 4.84 45 male 24.31852 0.8500000 large 87 Buckingham
10 5.78 55 female 35.49894 0.9000000 small 89 Buckingham
11 4.77 60 female 25.75390 0.8666667 medium 82 Louisa
12 4.97 38 female 40.43186 0.8400000 medium 129 Louisa
13 4.47 27 female 32.93757 0.8536585 medium 75 Louisa
14 4.59 40 female 33.06169 0.8604651 medium 79 Louisa
15 4.67 36 male 26.31007 0.9000000 medium 76 Louisa
16 3.41 33 female 25.91899 0.9024390 medium 83 Louisa
17 4.33 50 female 30.21130 0.8604651 medium 78 Louisa
18 4.53 20 male 24.70544 0.7948718 medium 112 Louisa
19 5.28 36 male 21.45634 0.8823529 medium 81 Louisa
20 11.24 62 female 32.35746 0.9019608 large 206 Buckingham
21 6.49 70 male 27.65766 1.0243902 large 97 Buckingham
22 4.67 47 male 35.73743 0.9782608 large 65 Buckingham
23 12.74 38 female 42.19290 0.8727273 large 299 Buckingham
24 5.56 66 female 33.56862 1.0909091 large 92 Buckingham
25 4.61 24 female 21.18185 0.8684211 medium 66 Buckingham
26 4.18 41 female 15.87677 0.7777778 small 80 Buckingham
27 5.10 37 male 38.01262 0.9148936 large 87 Buckingham
28 4.28 48 male 15.08437 0.8181818 small 74 Buckingham
29 4.52 43 female 26.31054 0.8157895 medium 84 Buckingham
30 4.37 40 male 26.90363 0.9487179 medium 72 Louisa
31 5.11 42 female 28.72550 0.9250000 medium 101 Buckingham
32 4.47 52 male 20.96728 0.8285711 large 85 Buckingham
33 15.52 61 male 24.32848 0.9512195 medium 330 Buckingham
34 5.66 61 female 25.49154 1.1395349 medium 85 Buckingham
35 3.67 25 male 18.89467 0.9411765 medium 87 Buckingham
36 4.03 47 female 29.78312 0.8863636 medium 81 Buckingham
37 2.68 35 male 25.45976 0.8857143 medium 86 Buckingham
38 3.56 46 male 27.58252 0.9367755 medium 107 Buckingham
39 6.21 57 male 20.06302 0.8611111 medium 80 Buckingham
40 7.91 70 male 31.35167 0.9375000 large 206 Buckingham
41 4.58 22 female 25.61989 0.8750000 large 81 Buckingham
42 3.89 52 female 30.84684 0.9302326 medium 68 Buckingham
43 4.38 36 male 29.83298 0.9523810 large 83 Buckingham
44 5.96 72 female 27.45122 1.0000000 large 76 Buckingham
45 4.41 37 female 39.67720 0.8596491 medium 52 Buckingham
46 6.14 54 female 25.83772 1.0000000 medium 193 Buckingham
47 10.90 60 male 30.45451 0.9767442 medium 223 Buckingham
48 6.14 40 female 29.71604 0.9090909 medium 85 Buckingham
49 5.57 55 female 35.06722 0.8269231 medium 74 Buckingham
50 5.35 43 female 30.82221 0.7826087 medium 67 Buckingham
51 6.33 65 female 35.05315 0.9148936 large 97 Buckingham
52 4.56 45 female 28.43817 0.8863636 large 92 Buckingham
53 9.39 70 female 42.62509 0.9444444 medium 111 Buckingham
54 6.35 20 female 41.33118 0.8448276 small 106 Buckingham
55 5.20 62 male 27.15187 0.9268293 large 129 Buckingham
56 4.98 92 female 39.37508 1.0000000 large 94 Buckingham
57 13.70 49 female 34.29442 0.9148936 large 233 Buckingham
58 10.93 74 female 32.15993 0.8750000 large 262 Buckingham
59 5.23 36 male 22.91790 0.8500000 medium 78 Buckingham
60 14.31 51 female 33.45160 0.8958333 medium 185 Buckingham
61 4.27 28 female 21.45634 0.8750000 small 77 Buckingham
62 4.25 22 female 24.85892 0.8000000 medium 75 Buckingham
63 11.47 71 female 28.99666 0.8095238 medium 203 Buckingham
64 4.44 76 female 19.11990 0.9393939 medium 131 Buckingham
65 4.59 40 male 29.61026 1.0512821 medium 92 Buckingham
66 5.23 23 female 35.89327 0.9361702 large 86 Buckingham
67 4.39 20 female 27.41644 0.9250000 medium 69 Buckingham
68 5.20 40 female 39.82274 0.7962963 medium 84 Buckingham
69 6.11 52 male 17.60804 0.8857143 small 57 Buckingham
70 7.44 76 female 27.70631 0.8750000 large 113 Buckingham
71 5.47 46 female 33.20571 0.8222222 medium 108 Buckingham
72 4.29 48 male 24.62607 0.9000000 large 105 Buckingham
```

73	3.93	22	female	30.85555	0.9200000	medium	81	Buckingham
74	6.96	58	female	27.06355	0.9268293	large	94	Buckingham
75	4.84	34	male	28.66444	0.9761905	medium	88	Buckingham
76	5.18	61	female	26.25924	0.9090909	small	103	Louisa
77	5.52	40	male	26.17757	0.9268293	small	87	Louisa
78	4.38	28	female	34.05769	0.8444444	medium	96	Louisa
79	5.28	53	female	27.18025	0.9250000	medium	84	Louisa
80	4.82	67	male	27.65766	0.9024390	large	85	Louisa
81	4.86	49	female	37.19766	0.8163265	medium	75	Louisa
82	4.86	65	female	27.39925	0.8809524	medium	95	Louisa
83	4.11	54	male	27.22113	0.8780488	large	76	Louisa
84	5.02	38	male	25.49259	0.8500000	large	88	Louisa
85	9.17	64	female	27.94223	0.8048780	medium	197	Louisa
86	5.11	41	female	20.61950	0.9666667	small	106	Louisa
87	5.07	67	male	29.06706	0.8372093	large	125	Louisa
88	4.84	27	female	28.74532	0.7954545	medium	62	Louisa
89	4.10	21	female	24.95470	0.7179487	medium	84	Louisa
90	4.79	41	female	27.85197	0.7435897	medium	86	Louisa
91	7.79	47	female	27.41502	0.8974359	medium	120	Louisa
92	5.15	61	female	36.31960	0.8000000	large	91	Louisa
93	10.15	65	male	30.60989	0.9767442	medium	341	Louisa
94	4.17	28	female	35.14746	0.9130435	large	69	Louisa
95	4.05	41	male	22.56148	0.8717949	large	79	Louisa
96	5.44	37	female	38.05235	0.8235294	large	130	Louisa
97	4.31	50	male	24.90582	0.9000000	medium	91	Louisa
98	9.77	57	female	28.11750	0.9230769	small	176	Louisa
99	3.89	28	male	30.77212	0.9756098	medium	111	Louisa
100	5.17	31	female	31.07603	0.9761905	medium	85	Louisa
101	5.71	83	female	25.04673	0.8750000	medium	105	Louisa
102	4.22	26	male	30.54260	0.9318182	large	83	Louisa
103	5.17	36	male	21.97547	0.8157095	small	74	Louisa
104	3.76	53	female	29.63019	0.7906977	medium	94	Louisa
105	4.31	19	female	22.30655	0.8421053	small	77	Louisa
106	4.61	63	male	22.90538	0.8717949	medium	80	Buckingham
107	5.35	50	male	37.43732	0.7968750	large	173	Buckingham
108	4.36	41	male	21.58505	0.7750000	small	84	Buckingham
109	4.41	48	male	17.08167	0.9142857	small	85	Louisa
110	8.45	59	female	26.72538	0.8837209	small	108	Louisa
111	3.98	34	male	22.87331	0.7948718	medium	70	Louisa
112	9.76	63	female	27.76650	0.8095238	medium	119	Louisa
113	4.83	23	male	19.80440	0.8000000	small	76	Buckingham
114	4.01	21	female	27.90006	0.9069767	large	99	Buckingham
115	3.84	23	female	38.79594	0.8800000	medium	91	Louisa
116	4.95	36	female	21.96716	0.9166667	medium	81	Buckingham
117	6.39	71	female	42.87990	0.9411765	large	115	Buckingham
118	7.53	64	male	31.13228	0.9361702	large	177	Buckingham
119	4.62	43	female	23.84038	0.9250000	small	100	Louisa
120	4.79	31	female	35.27129	0.8867925	medium	77	Louisa
121	5.09	44	female	27.24615	0.9302326	small	101	Louisa
122	6.51	60	female	27.56988	0.8636364	medium	270	Louisa
123	4.86	43	female	55.34374	0.8548387	large	109	Buckingham
124	4.41	48	female	21.26421	0.8421053	small	87	Buckingham
125	6.13	56	male	19.23351	0.8947368	small	110	Buckingham
126	6.49	55	female	34.64977	0.8958333	medium	122	Buckingham
127	7.51	49	male	36.80527	1.0888889	large	196	Buckingham
128	6.97	58	male	27.50228	0.8837209	medium	48	Louisa
129	4.90	33	female	29.87534	0.7173913	medium	93	Louisa
130	4.81	48	female	22.02318	0.7804878	small	81	Buckingham
131	4.58	66	female	19.37504	0.9393939	small	82	Buckingham
132	9.18	59	male	27.22113	0.9250000	medium	112	Buckingham
133	5.46	45	female	23.46240	0.8684211	small	83	Buckingham
134	4.04	52	male	22.00014	0.8461538	small	97	Buckingham
135	5.23	76	male	17.88028	0.8787879	medium	112	Buckingham
136	6.34	36	male	39.43018	1.0408163	large	197	Buckingham
137	5.37	41	female	29.03232	0.9512195	medium	73	Buckingham
138	4.51	20	male	19.50959	0.8055556	small	71	Buckingham
139	9.58	50	male	44.27702	1.1428571	large	255	Buckingham
140	5.55	43	female	29.57667	0.8888889	large	84	Buckingham
141	4.87	35	male	24.75903	0.9512195	medium	126	Louisa
142	5.60	47	female	38.30067	0.8518519	large	90	Buckingham
143	12.97	75	male	31.67718	0.9777778	large	342	Buckingham
144	5.63	62	male	19.32137	0.8974359	large	102	Buckingham
145	4.50	31	female	26.31054	0.8571429	small	92	Buckingham
146	5.56	50	male	30.60465	0.8888889	large	91	Louisa

147	4.03	39	female	40.83163	0.8518519	medium	83	Louisa
148	4.38	33	male	45.12296	0.8965517	large	85	Louisa
149	4.57	81	female	26.90557	0.8372093	medium	121	Louisa
150	4.66	27	female	34.66871	0.8297872	medium	92	Louisa
151	4.71	47	female	20.94548	0.8333333	small	95	Louisa
152	4.40	33	female	18.89467	0.8285714	small	82	Buckingham
153	9.25	67	male	25.19090	0.9230769	large	121	Buckingham
154	4.74	42	female	23.06405	0.8043478	medium	77	Buckingham
155	4.40	21	female	27.76650	0.9069767	small	84	Buckingham
156	5.49	51	female	23.93792	0.9047619	small	79	Buckingham
157	3.44	27	female	20.91274	0.7567568	small	76	Buckingham
158	9.82	51	female	43.81720	0.8813559	medium	110	Louisa
159	4.96	71	male	23.05203	0.9500000	large	85	Louisa
160	11.59	50	male	25.19854	0.9024390	large	385	Louisa
161	4.41	54	female	22.78229	0.8461538	small	79	Louisa
162	4.44	59	male	24.47603	1.0270270	medium	113	Buckingham
163	7.14	59	female	30.26349	0.8444444	medium	248	Buckingham
164	8.81	40	female	40.87627	0.8510638	small	133	Louisa
165	5.35	58	male	34.42672	1.0454545	large	106	Louisa
166	4.69	72	male	27.56988	0.9782609	large	120	Louisa
167	7.40	66	female	30.26349	0.9782609	medium	104	Louisa
168	4.73	23	male	24.21880	0.8292683	small	91	Louisa
169	4.52	42	female	27.23970	0.7333333	small	101	Louisa
170	4.95	43	male	24.76746	0.8409091	medium	120	Louisa
171	4.21	75	male	29.88664	1.0476190	large	79	Louisa
172	4.56	65	female	40.94679	0.7547170	large	106	Louisa
173	5.35	34	male	29.05679	0.8604651	medium	90	Louisa
174	4.04	37	male	26.98131	0.8372093	medium	89	Louisa
175	5.49	61	female	34.97173	0.8723404	medium	94	Louisa
176	4.64	36	female	31.50336	0.8666667	medium	71	Louisa
177	4.40	45	female	22.84088	0.8421053	medium	109	Louisa
178	5.24	68	female	22.30655	0.7837838	small	111	Louisa
179	4.03	41	female	33.38716	0.8863636	small	112	Louisa
180	4.81	68	male	24.55006	0.8604651	small	371	Louisa
181	5.23	79	female	22.12194	0.8947368	small	91	Buckingham
182	5.22	62	male	40.19120	1.0638298	large	95	Buckingham
183	8.25	63	female	37.49000	0.9166667	medium	145	Buckingham
184	4.95	55	male	19.92861	0.9696970	medium	93	Buckingham
185	4.01	55	female	20.03405	0.9108108	small	103	Buckingham
186	4.67	27	female	32.47445	0.7906977	medium	94	Buckingham
187	6.17	66	male	31.67718	0.9375000	large	174	Louisa
188	4.76	63	female	30.48163	1.0444444	medium	87	Louisa
189	4.66	78	male	17.99471	0.9705882	small	80	Louisa
190	4.82	68	male	29.97527	0.8787879	small	77	Buckingham
191	4.97	31	male	23.21802	0.8684211	medium	77	Buckingham
192	5.50	64	female	30.30248	0.9361702	medium	81	Buckingham
193	3.55	40	female	27.00103	0.8604651	small	98	Buckingham
194	10.09	61	female	25.30617	0.9523810	medium	225	Buckingham
195	4.01	28	male	19.04541	0.8285714	small	74	Buckingham
196	5.10	34	female	28.82092	0.7906977	medium	85	Buckingham
197	12.67	63	female	33.18291	0.9782609	medium	251	Buckingham
198	12.07	55	male	23.06405	1.0000000	medium	236	Buckingham
199	4.17	26	male	22.77449	0.8571429	small	58	Buckingham
200	4.75	36	female	23.15923	0.8648649	small	92	Buckingham
201	3.55	40	female	19.05246	0.7878788	small	56	Buckingham
202	4.44	68	female	21.79143	0.8421053	medium	118	Buckingham
203	4.92	82	female	29.87534	0.8913043	medium	88	Buckingham
204	4.59	60	female	24.31456	0.7750000	small	56	Buckingham
205	4.73	30	female	27.23970	0.7857143	small	84	Buckingham
206	5.14	41	male	29.67760	0.9268293	large	59	Buckingham
207	5.74	54	female	28.09059	0.8604651	medium	96	Buckingham
208	5.41	47	male	21.41981	0.8974359	medium	82	Buckingham
209	5.13	30	female	27.55515	0.8292683	large	88	Buckingham
210	4.64	51	female	17.61367	0.7567568	small	82	Buckingham
211	6.96	45	male	29.88664	0.9302326	large	155	Buckingham
212	5.36	38	female	31.80845	0.8260870	medium	90	Buckingham
213	5.53	20	male	26.61893	0.9024390	medium	105	Buckingham
214	4.26	63	male	25.76485	0.8809524	large	54	Louisa
215	4.34	50	male	21.75322	0.9459459	medium	115	Louisa
216	8.57	44	female	31.23141	0.9387755	large	187	Louisa
217	5.02	48	male	29.56537	0.9047619	medium	89	Louisa
218	4.36	41	female	26.88781	0.8000000	medium	84	Louisa
219	3.33	29	male	25.64343	0.9743590	small	77	Buckingham
220	4.18	76	male	30.10337	0.9756098	large	100	Buckingham

221	4.78	69	female	35.86692	0.9375000	large	68	Buckingham
222	4.74	26	male	34.84816	0.9795918	large	79	Buckingham
223	3.97	70	female	32.02486	0.8723404	medium	74	Buckingham
224	6.42	25	male	22.41524	0.8974359	medium	98	Buckingham
225	6.48	42	female	25.58473	0.8250000	large	122	Buckingham
226	5.60	56	male	27.60440	0.9230769	medium	95	Buckingham
227	4.85	31	female	24.86082	0.6818182	medium	89	Buckingham
228	4.61	31	female	19.81069	0.7250000	small	83	Buckingham
229	4.10	27	female	23.93792	0.9142857	small	100	Buckingham
230	7.51	73	female	29.63019	0.8636364	large	118	Buckingham
231	4.24	32	female	44.28580	0.7758621	medium	90	Buckingham
232	4.76	19	female	26.15630	0.8250000	medium	79	Buckingham
233	3.75	71	female	27.23928	0.8048780	small	70	Buckingham
234	5.04	27	female	31.45698	0.9523810	medium	92	Buckingham
235	5.34	31	male	29.19516	0.8888889	large	91	Buckingham
236	4.50	20	female	20.86698	0.8378378	small	77	Buckingham
237	4.37	31	female	30.42361	0.8723404	medium	69	Buckingham
238	7.48	62	female	50.96382	0.8870968	large	109	Buckingham
239	4.36	44	male	23.24543	0.9230769	medium	101	Buckingham
240	4.74	36	female	40.83169	0.9038462	large	153	Buckingham
241	5.26	36	male	30.03314	0.9024390	medium	85	Buckingham
242	10.47	47	male	34.03084	0.8936170	medium	225	Buckingham
243	5.17	30	male	33.63722	0.8431373	medium	124	Buckingham
244	5.70	63	male	24.31952	1.0263158	large	91	Buckingham
245	3.59	48	female	29.87534	0.8333333	medium	117	Buckingham
246	6.42	65	male	26.66357	1.0769231	large	67	Buckingham
247	5.03	59	female	30.92977	0.7727273	large	97	Buckingham
248	4.41	37	female	24.69182	0.8095238	medium	67	Buckingham
249	5.68	78	male	27.54138	1.0000000	large	171	Buckingham
250	4.39	23	male	38.32729	1.0204082	large	86	Buckingham
251	4.07	38	female	24.46602	0.7659574	medium	90	Buckingham
252	4.62	38	male	30.03314	0.9512195	small	86	Buckingham
253	3.70	41	male	28.43456	0.9500000	medium	78	Buckingham
254	3.96	29	female	20.30596	0.7027027	small	88	Buckingham
255	4.75	23	female	30.21130	0.9555556	medium	75	Buckingham
256	4.31	29	female	17.96375	0.8333333	small	69	Buckingham
257	5.35	40	male	36.32820	0.9183673	large	74	Louisa
258	4.80	38	female	26.73755	0.7948718	small	95	Louisa
259	4.81	40	female	50.08513	0.8333333	large	92	Louisa
260	4.88	29	male	27.15187	0.9047619	medium	101	Louisa
261	5.05	78	female	28.11797	0.8000000	large	98	Louisa
262	4.87	50	male	23.52217	0.8717949	medium	115	Buckingham
263	4.43	60	male	23.20260	0.9000000	medium	92	Louisa
264	4.27	40	female	48.23697	0.7755102	medium	103	Louisa
265	5.03	60	female	23.99360	0.8461538	small	119	Louisa
266	4.40	40	female	27.76215	0.8181818	small	105	Louisa
267	4.67	30	female	22.68150	0.7948718	medium	74	Louisa
268	4.21	21	male	22.70798	0.7948718	small	88	Louisa
269	5.24	63	female	37.97432	0.8333333	medium	88	Louisa
270	4.61	63	male	22.91790	0.9250000	medium	82	Louisa
271	4.40	43	male	33.56211	0.9318182	large	76	Louisa
272	5.01	46	female	31.45698	0.8260870	medium	102	Louisa
273	6.06	64	male	34.24153	0.9361702	medium	100	Louisa
274	10.75	56	male	23.29400	0.9743590	medium	206	Louisa
275	4.69	35	male	21.65362	0.8421053	small	97	Louisa
276	5.63	59	female	22.09715	0.8421053	small	95	Louisa
277	3.69	22	female	20.03405	0.8000000	small	76	Louisa
278	3.85	43	female	40.69893	0.9056604	medium	74	Louisa
279	4.09	26	female	31.57264	0.8260870	medium	138	Louisa
280	4.10	41	female	31.03675	0.7608696	small	64	Louisa
281	9.28	43	female	32.68764	0.8163265	small	228	Louisa
282	3.88	20	female	19.41288	0.7948718	small	97	Louisa
283	5.70	28	female	33.93984	0.7884615	medium	83	Louisa
284	2.85	30	female	25.13044	0.8250000	medium	82	Louisa
285	13.06	66	male	22.68550	0.7500000	medium	173	Louisa
286	3.97	20	female	20.07096	0.8205128	small	91	Louisa
287	3.03	32	female	24.92845	0.8250000	small	81	Louisa
288	5.51	38	female	42.23153	0.8448276	medium	118	Louisa
289	5.68	61	male	19.36089	0.8684211	small	86	Louisa
290	4.20	26	female	25.18755	0.8000000	small	90	Louisa
291	6.44	74	female	29.93958	0.8913043	medium	88	Louisa
292	9.62	72	male	25.62250	0.9750000	medium	71	Louisa
293	4.54	21	male	22.55361	0.8717949	medium	89	Louisa
294	7.51	36	male	28.66225	0.8809524	large	119	Louisa

295	5.63	42	female	29.24220	C.8571429	medium	81	Louisa
296	5.77	66	female	22.13750	C.8157895	small	120	Louisa
297	4.40	43	female	30.76566	C.9361702	medium	85	Buckingham
298	4.70	57	male	21.46561	C.8378378	small	81	Buckingham
299	2.85	45	male	18.41429	C.8823529	small	71	Louisa
300	5.34	44	female	28.85086	C.8372093	small	67	Louisa
301	4.95	27	male	18.97139	C.8684211	small	77	Louisa
302	3.59	63	male	24.75903	C.8974359	small	92	Buckingham
303	8.23	65	male	25.76485	C.8775510	large	172	Buckingham
304	5.06	30	male	24.21880	C.8536585	small	75	Buckingham
305	8.06	31	female	43.00412	C.9464286	large	155	Buckingham
306	4.90	33	male	23.88001	C.9210526	small	84	Buckingham
307	4.71	66	male	23.56424	C.9756098	medium	76	Buckingham
308	3.80	28	female	27.96842	C.9069767	small	94	Buckingham
309	10.97	26	male	21.35208	C.8461538	small	60	Buckingham
310	4.43	40	female	24.86211	C.8604651	medium	76	Louisa
311	5.91	38	male	21.87234	C.9189189	medium	155	Louisa
312	5.12	52	female	33.71711	C.8571429	medium	101	Louisa
313	3.78	22	female	25.20269	C.9210526	small	70	Louisa
314	5.12	51	female	33.01782	C.9347826	medium	81	Louisa
315	3.62	45	male	27.83559	C.8863636	large	80	Louisa
316	4.66	53	female	31.98419	C.8260870	large	74	Louisa
317	5.01	21	female	41.23900	C.7692308	small	75	Louisa
318	3.75	53	female	30.48163	C.8297872	medium	78	Louisa
319	4.55	37	female	32.94059	C.9411765	small	86	Louisa
320	4.92	34	female	31.96881	C.7391304	medium	71	Louisa
321	4.09	30	female	41.15194	C.8545455	medium	77	Louisa
322	5.58	74	male	26.95658	C.9512195	large	92	Louisa
323	7.22	45	male	33.87287	C.9111111	large	130	Louisa
324	3.97	35	male	23.42893	C.8648649	medium	80	Louisa
325	4.65	50	female	38.82576	C.7777778	medium	67	Louisa
326	4.83	27	male	42.33940	C.9411765	large	100	Louisa
327	4.88	52	male	22.41498	C.9000000	small	83	Louisa
328	4.93	42	female	36.51433	C.9038462	large	81	Louisa
329	5.16	39	male	27.90006	C.7857143	medium	85	Louisa
330	6.78	73	male	30.21130	C.9347826	large	106	Louisa
331	4.16	28	male	23.92854	C.9210526	small	99	Louisa
332	12.16	53	male	31.64458	C.9555556	large	297	Louisa
333	4.28	49	male	28.12380	C.9761905	small	87	Louisa
334	4.16	55	female	32.34511	C.9148936	small	94	Louisa
335	5.22	37	female	27.24615	C.8222222	small	88	Louisa
336	14.94	60	female	24.64598	C.8780488	medium	90	Louisa
337	10.16	56	female	32.52255	C.8200000	small	173	Louisa
338	10.07	84	female	37.20007	C.8541667	small	279	Louisa
339	3.66	20	female	29.05608	C.8888889	medium	75	Louisa
340	6.48	80	male	29.33352	C.9791667	medium	92	Louisa
341	4.90	60	male	27.24958	C.9523810	medium	102	Louisa
342	11.18	80	female	29.39522	1.0731707	small	161	Louisa
343	4.33	29	female	20.43461	C.8684211	small	71	Louisa
344	3.75	43	female	24.33809	C.9024390	small	84	Louisa
345	4.97	63	female	43.54200	C.8301887	medium	95	Louisa
346	4.04	37	female	29.65533	C.7619048	medium	64	Louisa
347	4.68	20	female	35.24829	C.7391304	medium	105	Louisa
348	4.17	44	male	23.68247	C.8918919	small	84	Louisa
349	4.14	54	male	18.89890	C.8108108	small	87	Louisa
350	4.98	58	male	30.03526	C.8837209	large	85	Louisa
351	4.66	35	male	25.42974	C.8181818	medium	85	Louisa
352	4.29	52	male	17.08167	C.9090909	medium	83	Louisa
353	5.56	60	female	21.26421	C.9411765	medium	90	Louisa
354	11.41	59	male	25.49259	C.9473684	large	267	Louisa
355	4.07	33	female	33.75007	C.9130435	small	87	Louisa
356	5.01	37	male	37.29497	C.8750000	medium	91	Louisa
357	4.48	40	male	29.86985	C.9090909	medium	77	Louisa
358	4.65	38	female	34.49439	C.8039216	medium	81	Louisa
359	4.05	32	female	32.47990	C.7872340	medium	85	Louisa
360	8.11	60	female	33.78899	C.9600000	large	270	Louisa
361	4.13	30	male	22.20057	C.8157895	small	81	Louisa
362	3.58	42	male	29.62299	C.9512195	large	73	Louisa
363	9.37	52	female	26.67344	C.8095238	medium	120	Louisa
364	5.53	59	female	32.11700	C.8666667	medium	126	Louisa
365	4.96	78	male	23.21802	C.9743590	large	81	Louisa
366	4.82	25	female	29.83756	C.9523810	medium	104	Louisa
367	4.99	37	male	21.77690	C.8461538	medium	85	Louisa
368	4.28	89	female	21.55675	C.7560976	medium	90	Louisa

369	16.11	53	male	25.34504	0.8974359	medium	369	Louisa
370	4.39	51	female	27.06355	0.7441860	medium	89	Louisa
371	13.63	29	female	24.46602	0.8250000	small	269	Louisa
372	4.49	41	female	34.62025	0.8541667	medium	76	Louisa

>

EK-4

Diabetes verisinin R kodları

```
> library(robustbase)
> library(MASS)
> filepath="C:/temp/"
> source(paste(filepath,"Chapter3_functions.r",sep=""))
> load(paste(filepath,"Chapter3.rdata",sep=""))
> # Diabetes data
> library(quantreg)
Loading required package: SparseM
Package SparseM (0.85) loaded.
  To cite, see citation("SparseM")
Attaching package: 'SparseM'
The following object(s) are masked from 'package:base':
  backsolve
Package quantreg (4.53) loaded.
  To cite, see citation("quantreg")

> # Summary statistics
> attach(Diabdata)
> summary(Diabdata)
> # Creating dataframes (with chosen contrasts)
> framemedium=ifelse(frame=="medium",1,0)
> framelarge=ifelse(frame=="large",1,0)
> gendermale=ifelse(gender=="male",1,0)
> locationLouisa=ifelse(location=="Louisa",1,0)
>
Diabdata=data.frame(glyhb=glyhb,age=age,gendermale=gendermale,bmi=bmi,waisthip=waisthip,
framemedium=framemedium,framelarge=framelarge,stab.glu=stab.glu,locationLouisa=locationLo
uisa)
> x11()
> pairs(Diabdata[,c(2,4,5,8)])
> cc=lmrob.c(0.9)
> Diabdata.m90 = lmrob(glyhb~age+gendermale+bmi+waisthip+framemedium
+ +framelarge+stab.glu+locationLouisa,data=Diabdata,control
+ =lmrob.control(max.it=100,tuning.psi = cc))
> call
function (name, ...) .Primitive("call")
> Diabdata.lm=lm(glyhb~age+gendermale+bmi+waisthip+framemedium
+ +framelarge+stab.glu+locationLouisa,data=Diabdata)
> summary(Diabdata.lm)
> fit025<-rq(glyhb ~ age + gendermale + bmi + waisthip + framemedium
+framelarge+stab.glu+locationLouisa,tau=0.25,data=Diabdata)
> summary(fit025)
> summary(fit025, se="nid")
> fit05<-rq(glyhb ~ age + gendermale + bmi + waisthip + framemedium
+framelarge+stab.glu+locationLouisa,tau=0.5,data=Diabdata)
> summary(fit05, se="nid")
> fit75<-rq(glyhb ~ age + gendermale + bmi + waisthip + framemedium
+framelarge+stab.glu+locationLouisa,tau=0.75,data=Diabdata)
> summary(fit75, se="nid")
```

```
> fit95<-rq(glyhb ~ age + gendermale + bmi + waisthip + framemedium
+framelarge+stab.glu+locationLouisa,tau=0.95,data=Diabdata)
> summary(fit95, se="nid")

> plot(glyhb~stab.glu)
> abline(lm(glyhb~stab.glu),col="red")
> abline(rq(glyhb~stab.glu,tau=0.25),col="pink")
> abline(rq(glyhb~stab.glu,tau=0.5),col="blue")
> abline(rq(glyhb~stab.glu,tau=0.75),col="green")
> abline(rq(glyhb~stab.glu,tau=0.95),col="yellow")
```

EK-5

Engel verileri

	income	foodexp		income	foodexp		income	foodexp
1	420.1577	255.8394	31	800.7990	503.3572	61	2293.1920	1570.3911
2	541.4117	310.9587	32	502.4369	354.6389	62	627.4726	483.4800
3	901.1575	485.6800	33	713.5197	497.3182	63	889.9809	600.4804
4	639.0802	402.9974	34	906.0006	588.5195	64	1162.2000	696.2021
5	750.8756	495.5608	35	880.5969	654.5971	65	1197.0794	774.7962
6	945.7989	633.7978	36	796.8289	550.7274	66	530.7972	390.5984
7	829.3979	630.7566	37	854.8791	528.3770	67	1142.1526	612.5619
8	979.1648	700.4409	38	1167.3716	640.4813	68	1088.0039	708.7622
9	1309.8789	830.9586	39	523.8000	401.3204	69	484.6612	296.9192
10	1492.3987	815.3602	40	670.7792	435.9990	70	1536.0201	1071.4627
11	502.8390	338.0014	41	377.0584	276.5606	71	678.8974	496.5976
12	616.7168	412.3613	42	851.5430	588.3488	72	671.8802	503.3974
13	790.9225	520.0006	43	1121.0937	664.1978	73	690.4683	357.6411
14	555.8786	452.4015	44	625.5179	444.8602	74	860.6948	430.3376
15	713.4412	512.7201	45	805.5377	462.8995	75	873.3095	624.6990
16	838.7561	658.8395	46	558.5812	377.7792	76	894.4598	582.5413
17	535.0766	392.5995	47	884.4005	553.1504	77	1148.6470	580.2215
18	596.4408	443.5586	48	1257.4989	810.8962	78	926.8762	543.8807
19	924.5619	640.1164	49	2051.1789	1067.9541	79	839.0414	588.6372
20	487.7583	333.8394	50	1466.3330	1049.8788	80	829.4974	627.9999
21	692.6397	466.9583	51	730.0989	522.7012	81	1264.0043	712.1012
22	997.8770	543.3969	52	800.7990	572.0807	82	1937.9771	968.3949
23	506.9995	317.7198	53	1245.6964	907.3969	83	698.8317	482.5816
24	654.1587	424.3209	54	1201.0002	811.5776	84	920.4199	593.1694
25	933.9193	518.9617	55	634.4002	427.7975	85	1897.5711	1033.5658
26	433.6813	338.0014	56	956.2315	649.9985	86	891.6824	693.6795
27	587.5962	419.6412	57	1148.6010	860.6002	87	889.6784	693.6795
28	896.4746	476.3200	58	1768.8236	1143.4211	88	1221.4818	761.2791
29	454.4782	386.3602	59	2822.5330	2032.6792	89	544.5991	361.3981
30	584.9989	423.2783	60	922.3548	590.6183	90	1031.4491	628.4522

	income	foodexp		income	foodexp		income	foodexp
91	1462.9497	771.4486	121	1540.9741	692.1689	151	1125.0356	810.6772
92	830.4353	757.1187	122	1115.8481	588.1371	152	1827.4010	983.0009
93	975.0415	821.5970	123	1044.6843	511.2609	153	1014.1540	708.8968
94	1337.9983	1022.3202	124	1389.7929	700.5600	154	880.3944	633.1200
95	867.6427	679.4407	125	2497.7860	1301.1451	155	2432.3910	1424.8047
96	725.7459	538.7491	126	1585.3809	879.0660	156	1177.8547	830.9586
97	989.0056	679.9981	127	1862.0438	912.8851	157	1222.5939	925.5795
98	1525.0005	977.0033	128	2008.8546	1509.7812	158	1519.5811	1162.0024
99	672.1960	561.2015	129	697.3099	484.0605	159	687.6638	383.4580
100	923.3977	728.3997	130	571.2517	399.6703	160	953.1192	621.1173
101	472.3215	372.3186	131	598.3465	444.1001	161	953.1192	621.1173
102	590.7601	361.5210	132	461.0977	248.8101	162	953.1192	621.1173
103	940.9218	517.9196	133	977.1107	527.8014	163	939.0418	548.6002
104	643.3571	459.8177	134	883.9849	500.6313	164	1283.4025	745.2353
105	2551.6615	863.9199	135	718.3594	436.8107	165	1511.5789	837.8005
106	1795.3226	831.4407	136	543.8971	374.7990	166	1342.5821	795.3402
107	1165.7734	534.7610	137	1587.3480	726.3921	167	511.7980	418.5976
108	815.6212	392.0502	138	4957.8130	1827.2000	168	689.7988	508.7974
109	1264.2066	934.9752	139	969.6838	523.4911	169	1532.3074	883.2780
110	1095.4056	813.3081	140	419.9980	334.9998	170	1056.0808	742.5276
111	447.4479	263.7100	141	561.9990	473.2009	171	387.3195	242.3202
112	1178.9742	769.0838	142	689.5988	581.2029	172	387.3195	242.3202
113	975.8023	630.5863	143	1398.5203	929.7540	173	410.9987	266.0010
114	1017.8522	645.9874	144	820.8168	591.1974	174	832.7554	614.7588
115	423.8798	319.5584	145	875.1716	637.5483	175	614.9986	385.3184
116	558.7767	348.4518	146	1392.4499	674.9509	176	887.4658	515.6200
117	943.2487	614.5068	147	1256.3174	776.7589	177	1024.8177	708.4787
118	1348.3002	662.0096	148	1362.8590	959.5170	178	1006.4353	734.2356
119	2340.6174	1504.3708	149	1999.2552	1250.9643	179	726.0000	433.0010
120	587.1792	406.2180	150	1209.4730	737.8201	180	494.4174	327.4188

	income	foodexp			
181	748.6413	429.0399			
182	987.6417	619.6408			
183	788.0961	400.7990			
184	831.7983	620.8006			
185	1139.4945	819.9964	211	1212.9613	807.3603
186	507.5169	360.8780	212	958.8743	696.8011
187	576.1972	395.7608	213	1129.4431	811.1962
188	696.5991	442.0001	214	1943.0419	1305.7201
189	650.8180	404.0384	215	539.6388	442.0001
190	949.5802	670.7993	216	463.5990	353.6013
191	497.1193	297.5702	217	562.6400	468.0008
192	570.1674	353.4882	218	736.7584	526.7573
193	724.7306	383.9376	219	1415.4461	890.2390
194	408.3399	284.8008	220	2208.7897	1318.8033
195	638.6713	431.1000	221	636.0009	331.0005
196	1225.7890	801.3518	222	759.4010	416.4015
197	715.3701	448.4513	223	1078.8382	596.8406
198	800.4708	577.9111	224	499.7510	408.4992
199	975.5974	570.5210	225	1020.0225	775.0209
200	1613.7565	865.3205	226	1595.1611	1138.1620
201	608.5019	444.5578	227	776.5958	485.5198
202	958.6634	680.4198	228	1230.9235	772.7611
203	835.9426	576.2779	229	1807.9520	993.9630
204	873.7375	631.7982	230	415.4407	305.4390
205	951.4432	608.6419	231	440.5174	306.5191
206	473.0022	300.9999	232	541.2006	299.1993
207	601.0030	377.9984	233	581.3599	468.0008
208	713.9979	397.0015	234	743.0772	522.6019
209	829.2984	588.5195	235	1057.6767	750.3202
210	959.7953	681.7616			

EK-6

Engel verisi R kodları

```
> data(engel)
> fit1<-rq(foodexp~income,tau=0.15,data=engel)
> fit2<-rq(foodexp~income,tau=0.25,data=engel)
> fit3<-rq(foodexp~income,tau=0.5,data=engel)
> fit4<-rq(foodexp~income,tau=0.75,data=engel)
> fit5<-rq(foodexp~income,tau=0.95,data=engel)
> plot(engel, log = "xy",
+   main = "'engel' data (log - log scale)")
> plot(log10(foodexp) ~ log10(income), data = engel,
+   main = "'engel' data (log10 - tranformed)")
> taus <- c(.15, .25, .50, .75, .95, .99)
> rqs <- as.list(taus)
> for(i in seq(along = taus)) {
+   rqs[[i]] <- rq(log10(foodexp) ~ log10(income), tau = taus[i], data = engel)
+   lines(log10(engel$income), fitted(rqs[[i]]), col = i+1)
+ }
> legend("bottomright", paste("tau = ", taus), inset = .04,
+   col = 2:(length(taus)+1), lty=1)
> data(engel)
> attach(engel)
> plot(income,foodexp,xlab="Household Income",ylab="Food Expenditure",type = "n", cex=.5)
> points(income,foodexp,cex=.5,col="blue")
> taus <- c(.05,.1,.25,.75,.9,.95)
> xx <- seq(min(income),max(income),100)
> f <- coef(rq((foodexp)~(income),tau=taus))
> yy <- cbind(1,xx)%*%f
> for(i in 1:length(taus)){
+   lines(xx,yy[,i],col = "gray")
+ }
> abline(lm(foodexp ~ income),col="red",lty = 2)
> abline(rq(foodexp ~ income), col="green")
> legend(3000,500,c("mean (LSE) fit", "median (LAE) fit"),
+ col = c("red","blue"),lty = c(2,1))
> > plot(summary(rq(foodexp~income,tau = 1:49/50,data=engel)))
> n <- 100
> p <- 5
> X <- matrix(rnorm(n*p),n,p)
> y <- .95*apply(X,1,sum)+rnorm(n)
> R <- cbind(0,rbind(diag(p),-diag(p)))
> r <- c(rep(0,p),-rep(1,p))
> rq(y~X,R=R,r=r,method="fnc")
Call:
rq(formula = y ~ X, method = "fnc", R = R, r = r)
Coefficients:
(Intercept)      X1      X2      X3      X4      X5
-0.2114690  0.9262106  1.0000000  0.9890742  0.7989133  0.9012154
Degrees of freedom: 100 total; 94 residual
>
```

EK-7

Barro verileri

	y.net	lgdp2	msz	fse2	fse2	msz	lemp2	linmr2	gedy2	ly2	gerry2	iblakp2	pol2	ttred2
Algeria75	4.150334e-02	7.330405	0.132	0.067	0.035	0.022	3.879500	0.113760337	0.03815	0.18982	0.16014	0.38225	0.0832500	0.1001450
Cameroon75	2.424350e-02	6.591674	0.439	0.089	0.034	0.013	3.788725	0.817124096	0.02675	0.06633	0.12550	0.04355	0.0030000	0.0139760
Central_African_Rep.75	7.134808e-03	6.432940	0.176	0.017	0.035	0.015	3.683867	1.406028812	0.03850	0.10182	0.27716	0.04355	0.1030000	-0.0020620
Congo75	4.641670e-02	6.938284	0.708	0.324	0.052	0.140	3.875359	0.085349712	0.04880	0.13103	0.24286	0.04355	0.3325000	0.0161270
Ghana75	1.259310e-03	6.766192	0.551	0.135	0.030	0.034	3.032900	0.496294036	0.04095	0.00459	0.00226	0.50310	0.1530000	0.0295465
Ghana75	3.141737e-02	6.390241	0.136	0.061	0.038	0.011	3.824284	1.313252433	0.04235	0.20465	0.13513	0.23375	0.0075000	-0.0195745
Liberia75	1.714554e-02	6.687109	0.278	0.087	0.019	0.055	3.742420	0.835788981	0.01815	0.11925	0.15651	0.04585	0.0030000	0.0349675
Malawi75	2.236447e-02	5.988961	0.024	0.003	0.030	0.000	3.648027	2.354018383	0.02235	0.12758	0.14070	0.20060	0.0030000	0.0042560
Niger75	-0.622541e-04	6.300880	0.292	0.041	0.030	0.012	3.583519	1.614292044	0.00890	0.07842	0.15305	0.04355	0.0030000	-0.0117785
Rwanda75	5.900920e-02	5.020003	0.145	0.072	0.035	0.024	3.067026	1.923204451	0.02010	0.03112	0.12026	0.35700	0.0530000	-0.0303190
Senegal75	-1.282069e-03	7.002156	0.132	0.114	0.019	0.024	3.693867	0.562517660	0.02630	0.06551	0.15416	0.04355	0.0743000	0.0350200
Senegal75	3.338408e-02	5.916202	0.344	0.114	0.054	0.155	3.728100	1.387317002	0.02975	0.17079	0.19249	0.38430	0.0034500	0.0000200
Seyo75	2.116962e-02	6.198479	0.065	0.013	0.030	0.007	3.703768	1.871033039	0.02450	0.17156	0.13814	0.04355	0.1270000	-0.0093145
Tunisia75	4.994026e-02	7.102499	0.274	0.067	0.038	0.045	3.908015	0.326120324	0.04615	0.19216	0.10473	0.24020	0.0030000	0.0430785
Uganda75	-4.619436e-03	6.594413	0.153	0.023	0.030	0.003	3.784190	1.122001236	0.02650	0.12416	0.15505	0.50245	0.1738500	-0.0041675
Zambia75	1.197269e-02	6.989335	0.376	0.119	0.013	0.042	3.756538	0.439775440	0.03390	0.36883	0.25134	0.39450	0.0030000	-0.0318455
Zimbabwe75	3.204550e-02	6.859615	0.145	0.017	0.038	0.045	3.832960	0.715629210	0.03365	0.22758	0.32460	0.19965	0.0030000	0.0399500
Canada75	1.455505e-02	9.075780	2.478	2.667	0.375	0.473	4.268298	8.168019637	0.06115	0.25421	0.33498	0.00000	0.0047000	0.0146395
Costa Rica75	2.932479e-02	7.772332	0.453	0.424	0.095	0.114	4.143135	-0.029837876	0.05020	0.16881	0.12395	0.25065	0.0030000	-0.0270975
Dominican Rep.75	4.754897e-02	7.104144	0.287	0.195	0.024	0.054	3.981549	0.247725865	0.02590	0.14669	0.07305	0.20295	0.1612500	0.0652325
El Salvador75	1.536403e-02	7.426549	0.287	0.229	0.012	0.033	3.958907	-0.001654393	0.02640	0.09045	0.11034	0.14830	0.0530000	-0.0105360
Guatemala75	2.301564e-02	7.474205	0.174	0.146	0.010	0.037	3.850148	0.054599076	0.01675	0.10492	0.34801	0.00000	0.2337500	0.0214410
Honduras75	1.271695e-02	6.988413	0.223	0.164	0.039	0.040	3.871201	0.440288289	0.02775	0.15012	0.39190	0.00000	0.0530000	-0.0287680
Jamaica75	3.190515e-02	7.658228	0.336	0.389	0.017	0.037	4.155753	-0.083397584	0.03595	0.31232	0.33512	0.15615	0.0030000	0.0241160
Mexico75	0.354010e-02	0.107419	0.404	0.207	0.022	0.097	4.067316	-0.293005400	0.01935	0.10240	0.30669	0.00000	0.0030575	0.0000300
Nicaragua75	1.270835e-02	7.640604	0.219	0.152	0.033	0.038	3.883624	-0.223304109	0.02195	0.13926	0.32692	0.17310	0.0030000	-0.0170625
Panama75	3.727099e-02	7.562162	0.392	0.506	0.130	0.116	4.123903	0.113320960	0.04465	0.27608	0.15727	0.00000	0.2172500	0.0280305
United States75	1.549310e-02	9.352621	3.154	3.253	0.517	0.723	4.248495	12.689375007	0.05155	0.25086	0.30505	0.00000	0.0014990	-0.0191660
Argentina75	1.871130e-02	8.219595	0.785	0.620	0.074	0.166	4.180522	0.406002264	0.02210	0.15050	0.35959	0.19240	0.3574750	-0.0105360
Bolivia75	0.090404e-02	7.170950	1.603	0.969	0.101	0.149	3.770459	-0.343079540	0.03170	0.24094	0.11630	0.22005	0.6972750	0.0157630
Brazil75	6.367270e-02	7.513164	0.674	0.515	0.027	0.085	4.021774	0.001584498	0.01710	0.22168	0.36464	0.08785	0.0010700	-0.0165380
Chile75	-1.192339e-02	8.091015	1.126	1.138	0.080	0.127	4.063865	0.799840328	0.03700	0.15381	0.12693	1.03480	0.1755000	-0.0318455
Colombia75	3.140030e-02	7.484930	0.695	0.450	0.014	0.069	3.996364	-0.005474565	0.01495	0.17409	0.36211	0.19340	0.0030000	0.0020620
Ecuador75	5.231051e-02	7.348588	0.512	0.369	0.026	0.099	4.000034	0.023037644	0.02945	0.24363	0.38655	0.12680	0.2030000	0.0302280
Paraguay75	2.627171e-02	7.176255	0.548	0.299	0.029	0.085	4.145114	0.016861666	0.01720	0.10497	0.39661	0.17910	0.0030000	-0.0287680
Peru75	2.100802e-02	7.784889	0.695	0.427	0.066	0.155	3.895894	-0.025956012	0.03530	0.20070	0.36266	0.28065	0.0530000	0.0022475
Uruguay75	1.429874e-02	8.167919	0.765	0.680	0.051	0.057	4.210645	0.333613074	0.03025	0.14756	0.36218	0.19410	0.0891000	-0.0340325
Venezuela75	9.553054e-05	8.899867	0.462	0.281	0.031	0.106	4.110874	0.479081739	0.03470	0.17235	0.32962	0.00150	0.0530000	0.1119235
India75	1.044299e-02	6.469250	0.223	0.055	0.037	0.030	3.779034	1.165628910	0.02435	0.17202	0.38699	0.39140	0.1357705	-0.0198455

	y.net	lqp2	ns1	rs1	rs2	ns2	lqp2	lnt2	jed2	lq2	qcom2	lslsq2	p2	tred2
Indonesia75	4.631792e-02	6.371426	0.232	0.365	0.002	0.317	3.351054	1.304471920	0.01913	0.11650	0.14990	0.21175	0.2004425	0.0735735
Iran75	5.381302e-02	7.987524	0.318	0.102	0.006	0.054	3.328641	-0.506585634	0.02535	0.16120	0.01000	0.03035	0.0071525	0.1320675
Iran75	2.162208e-02	8.355197	0.180	0.344	0.013	0.047	3.328641	-1.122592850	0.04603	0.06345	0.03996	0.13515	0.3603500	0.1406910
Israel75	4.501701e-02	0.904636	1.476	1.154	0.244	0.427	3.276666	2.210117675	0.05535	0.31497	0.03559	0.16280	0.0151750	-0.0156617
Japan75	6.364298e-02	0.419360	1.910	1.560	0.355	0.366	4.234107	2.79541917	0.03123	0.35379	0.04793	0.00000	0.0004725	-0.0193520
Jordan75	-4.549192e-03	7.361375	0.675	0.238	0.020	0.086	3.379500	0.026272385	0.03453	0.14697	0.04616	0.03510	0.3367500	0.0247635
Korea75	0.111660e-02	6.942157	1.526	0.470	0.331	0.220	4.010993	-0.450703951	0.02525	0.22326	0.04009	0.10375	0.1514450	-0.0067440
Malaysia75	4.710388e-02	7.395174	0.843	0.286	0.332	0.375	4.118183	0.001596734	0.03663	0.23499	0.06265	0.00592	0.0003000	-0.0231630
Malaysia75	3.529108e-03	6.763415	0.512	0.185	0.026	0.367	3.338725	0.48865884	0.01373	0.11447	0.08735	0.61036	0.1540450	-0.0022690
Philippines75	2.782731e-02	7.113152	0.759	0.547	0.239	0.273	3.996394	-0.135193239	0.02203	0.14296	0.10317	0.08200	0.0391500	-0.0298265
Sri Lanka75	1.083636e-02	7.097545	1.537	0.910	0.311	0.328	4.146304	-0.430681731	0.03365	0.12343	0.15601	0.72125	0.0503000	-0.0300305
Syria75	6.013221e-02	7.573017	0.303	0.385	0.009	0.555	3.335740	-0.117730317	0.03233	0.14173	0.06627	0.11300	0.2503000	0.0205465
Taiwan75	6.135571e-02	7.979300	1.380	0.423	0.335	0.215	3.130532	0.049217510	0.02453	0.24257	0.14652	0.00005	0.0531000	-0.0210615
Thailand75	3.973696e-02	7.021084	0.382	0.137	0.020	0.349	3.395273	0.099164155	0.02165	0.20337	0.06787	0.00050	0.1003000	-0.0115065
Turkey75	3.781203e-02	8.724858	1.087	0.510	0.329	0.162	4.137001	0.021395470	0.03553	0.26671	0.07906	0.00000	0.0003000	0.0015205
Belgium75	3.540351e-02	8.832879	1.721	1.398	0.395	0.238	3.257030	2.379132138	0.04445	0.25522	0.03721	0.00000	0.0003000	-0.0004625
Cyprus75	1.472346e-02	7.913887	1.281	0.743	0.353	0.126	4.237001	0.550640728	0.02953	0.32389	0.06855	0.04020	0.3273000	0.0021655
Turkey75	1.858194e-02	9.043841	1.280	1.286	0.455	0.468	4.139206	3.976432122	0.05333	0.32587	0.07744	0.00000	0.0003000	-0.0053735
Finland75	3.903240e-02	8.795907	0.382	0.397	0.126	0.162	3.238293	-0.024962185	0.03133	0.40422	0.04659	0.00000	0.0003000	0.0024555
France75	3.303954e-02	8.925188	0.749	0.655	0.341	0.124	4.359859	0.771294631	0.02935	0.33366	0.05143	0.00000	0.0023100	0.0003630
Germany West75	2.974022e-02	8.901064	0.670	0.451	0.348	0.107	4.145634	0.023154007	0.02905	0.32742	0.06329	0.00000	0.0003625	0.0020730
Greece75	5.277329e-02	8.027177	0.779	0.437	0.356	0.187	3.242785	0.030276937	0.01495	0.32170	0.03963	0.03080	0.1303000	-0.0205620
Ireland75	2.997434e-02	8.257386	1.301	1.533	0.103	0.180	4.251348	1.710345359	0.03995	0.30260	0.07051	0.00000	0.0163000	0.0024635
Italy75	3.717911e-02	0.657045	1.104	0.756	0.337	0.122	4.145634	1.270653919	0.02005	0.32540	0.05140	0.00000	0.0003000	-0.0200540
Netherlands75	3.276239e-02	8.910721	0.884	0.570	0.333	0.140	4.230439	0.895341561	0.02905	0.32203	0.02573	0.00000	0.0003000	-0.0088475
Norway75	3.453534e-02	8.863073	1.026	0.310	0.321	0.118	4.235924	1.272459582	0.04873	0.36181	0.04619	0.00000	0.0003000	0.0071560
Spain75	4.571141e-02	0.457121	0.590	0.299	0.326	0.383	4.142785	-0.057687407	0.01273	0.31002	0.04796	0.00000	0.0014375	-0.0256785
Sweden75	2.404724e-02	9.140454	2.629	2.228	0.210	0.270	4.236645	7.414322553	0.06173	0.25345	0.07688	0.00000	0.0003000	0.0033725
Switzerland75	1.462574e-02	9.343909	1.818	1.297	0.184	0.396	4.271095	5.088794973	0.03393	0.32766	0.01384	0.00000	0.0003000	0.0061335
United Kingdom75	2.024612e-02	0.903400	1.036	1.151	0.341	0.123	4.262800	1.820102007	0.04025	0.22599	0.00175	0.00000	0.0517775	-0.0136230
Australia75	2.593651e-02	9.101418	2.541	2.353	0.388	0.207	4.262680	6.937156774	0.03475	0.32721	0.02567	0.00000	0.0075500	-0.0161260
New Zealand75	1.467590e-02	9.111514	2.250	2.132	0.379	0.194	4.162003	5.908193137	0.03703	0.28656	0.06351	0.00000	0.0003000	-0.0423450
Nigeria75	2.444630e-02	7.745436	0.276	0.374	0.307	0.337	3.377011	-0.107101257	0.04365	0.30574	0.00490	0.93055	0.0003000	0.0058670
Senegal75	1.036279e-03	6.962243	0.119	0.342	0.303	0.010	3.377734	1.549567293	0.04555	0.06230	0.15155	0.01645	0.0503000	-0.0209720
Botswana75	5.117141e-02	7.207860	0.193	0.398	0.311	0.329	3.323952	0.887646957	0.05245	0.27498	0.16360	0.28260	0.0003000	-0.0175000
Cameroon75	4.321106e-02	6.034109	0.393	0.305	0.303	0.017	3.319931	1.445643257	0.02285	0.10752	0.12370	0.01045	0.0003000	0.0047930
Central African Rep.75	-1.145475e-02	6.504288	0.159	0.322	0.303	0.011	3.365840	2.545940019	0.03853	0.05128	0.18311	0.01045	0.1003000	0.0238665
Congo75	4.374678e-02	7.461452	0.694	0.285	0.337	0.127	3.355082	0.287485844	0.06295	0.12185	0.14262	0.01045	0.1183000	0.0592635
Seychelles75	4.209121e-02	7.107852	0.707	0.214	0.307	0.210	3.355082	0.57492912	0.03043	0.07039	0.09796	0.41500	0.5503000	0.0001695

	y_hat	logp2	rs2	fs2	the2	ns2	lexp2	litr2	gedy2	ly2	gcom2	lhlhxp2	pol2	tread2
Benin85	-1.076307e-02	0.530878	0.314	0.119	0.003	0.311	3.610918	2.176008966	0.03345	0.09472	0.14512	0.06065	0.0000300	-0.0139440
Bhutan85	-1.467831e-02	6.778785	1.139	0.344	0.004	0.031	3.908015	0.531860887	0.02425	0.05671	0.16523	2.11645	0.0500300	-0.0310830
Burkina85	-5.542980e-03	6.704414	0.155	0.079	0.010	0.318	3.927896	1.839684520	0.05480	0.15713	0.14696	0.14960	0.0036500	0.0606060
Burundi85	-1.677228e-02	6.858565	0.668	0.198	0.023	0.076	3.854394	1.068516544	0.04130	0.08111	0.14109	0.17330	0.5000300	-0.0219630
Malawi85	0.003000e+00	6.212606	0.164	0.037	0.004	0.312	3.713572	3.219893273	0.02380	0.13980	0.15223	0.56860	0.0000300	-0.0237855
Mauritius85	1.407416e-02	8.186743	0.764	0.442	0.024	0.095	4.145135	-0.326901179	0.04250	0.11404	0.11039	0.04920	0.0000300	-0.0643645
Niger85	-1.217360e-02	6.400237	0.034	0.029	0.002	0.307	3.605562	2.998027838	0.02100	0.08908	0.15353	0.01045	0.0500300	-0.0443365
Rwanda85	1.842386e-02	6.410175	0.137	0.060	0.004	0.319	3.837399	2.626140435	0.02580	0.04804	0.16506	0.36805	0.0000300	0.0205675
Senegal85	2.187872e-03	6.989335	0.242	0.113	0.017	0.340	3.770459	1.345291511	0.04360	0.05466	0.14231	0.01045	0.0000300	-0.0418765
Sierra Leone85	-2.362034e-02	6.983790	0.550	0.258	0.010	0.326	3.595348	1.204133624	0.03290	0.01666	0.28044	0.20330	0.0000300	-0.0082115
Sierra85	6.833044e-04	6.927538	0.163	0.034	0.003	0.328	3.796538	1.414449165	0.04030	0.03508	0.17439	0.54090	0.7000300	-0.0224060
Tanzania85	-1.343607e-02	6.248043	0.257	0.088	0.034	0.398	3.826641	2.632721748	0.04130	0.16518	0.21439	0.98900	0.5000300	-0.0130360
Togo85	1.643386e-04	6.410175	0.311	0.086	0.006	0.330	3.813097	2.338109322	0.05495	0.24922	0.10033	0.01045	0.0000300	-0.0921100
Tunisia85	3.005859e-02	7.601902	0.540	0.177	0.020	0.371	4.010963	0.106871137	0.04695	0.17169	0.08664	0.06105	0.0000300	0.0191735
Uganda85	-4.061817e-02	6.948219	0.037	0.027	0.001	0.312	3.890148	2.432619327	0.01390	0.06460	0.17934	1.85945	0.5629500	0.0216095
Zaire85	-3.535806e-02	6.398595	0.128	0.022	0.001	0.314	3.826641	2.731845932	0.03115	0.06535	0.12235	0.03925	0.7022325	-0.0074715
Zambia85	-4.671903e-02	7.109062	0.420	0.271	0.011	0.327	3.854394	0.831181719	0.04765	0.14615	0.26087	0.69600	0.0000300	-0.0333630
Zimbabwe85	-1.084969e-02	7.160070	0.220	0.065	0.006	0.340	3.943522	0.929576440	0.05200	0.15589	0.05131	0.78620	0.7160500	-0.0240900
Barbados85	1.143009e-03	8.592301	2.833	3.697	0.039	0.100	4.205887	4.350313112	0.05325	0.14434	0.06683	0.08120	0.0000300	-0.1181765
Canada85	2.397671e-02	9.421330	3.363	3.386	0.693	0.381	4.290459	11.232700093	0.06795	0.25993	0.03145	0.00000	0.0000300	0.0132535
Costa Rica85	2.323936e-03	8.086679	0.758	0.690	0.183	0.207	4.219508	-0.023346833	0.05320	0.18041	0.13842	0.20930	0.0000300	-0.0089320
Dominican rep.85	6.056441e-03	7.577634	0.534	0.463	0.073	0.115	4.001006	0.039741999	0.01310	0.19401	0.05200	0.34635	0.6000300	-0.1134575
El Salvador85	-1.263983e-02	7.560189	0.430	0.381	0.036	0.356	4.066885	0.119712407	0.03230	0.09765	0.13698	0.46240	0.7385300	-0.0276255
Guatemala85	-7.584354e-03	7.704361	0.261	0.210	0.017	0.363	3.981549	-0.032095723	0.01635	0.11276	0.05056	0.07505	0.6700300	-0.0240535
Honduras85	-5.681293e-03	7.115582	0.319	0.252	0.011	0.359	3.996998	0.817545173	0.03990	0.14691	0.10050	0.05035	0.6000300	0.0308690
Jamaica85	-3.143441e-02	7.977282	0.646	0.817	0.046	0.366	4.213608	-0.006772057	0.05705	0.17735	0.07239	0.44470	0.5725300	-0.0777030
Mexico85	1.301839e-02	8.942901	0.795	0.293	0.037	0.192	4.139965	-0.302134633	0.02110	0.19659	0.09839	0.11665	0.0007150	0.0228415
Nicaragua85	-3.830769e-02	7.767687	0.324	0.247	0.034	0.100	3.996364	-0.118434951	0.03515	0.11932	0.08846	0.84710	0.6952500	-0.0220340
Panama85	1.880931e-03	7.934871	1.137	1.272	0.180	0.199	4.196703	0.230182067	0.04710	0.23397	0.18639	0.00000	0.0000300	-0.0203990
Paraguay85	1.964849e-02	8.977399	1.220	0.998	0.037	0.387	4.195697	0.541860998	0.03645	0.16711	0.02899	0.28720	0.0000300	0.0171020
United States85	2.071831e-03	9.307552	4.327	4.198	0.712	0.960	4.271093	15.012134503	0.03780	0.22908	0.00847	0.00000	0.5004925	-0.0070040
Argentina85	-1.413155e-02	8.406708	0.936	0.902	0.132	0.203	4.210645	0.10435352	0.02430	0.14665	0.03140	0.30845	0.7010300	-0.0519010
Bolivia85	-5.250701e-03	7.463807	1.473	0.862	0.112	0.228	3.841601	-0.079704760	0.03130	0.18573	0.13690	0.43340	0.1500300	0.0259630
Brazil85	1.313334e-02	8.149891	0.645	0.548	0.105	0.184	4.091006	-0.254170796	0.02000	0.22120	0.05850	0.26700	0.0000300	-0.0433865
Chile85	1.103950e-02	7.971776	1.222	1.445	0.130	0.225	4.152613	0.303729611	0.03800	0.12618	0.11591	0.12340	0.5642300	-0.0496120
Colombia85	1.711160e-02	7.798933	1.143	1.013	0.061	0.164	4.091006	0.040560489	0.02195	0.17579	0.06331	0.04065	0.5062250	0.0129855
Costa Rica85	9.393751e-03	7.871693	0.745	0.630	0.053	0.158	4.074142	-0.035074609	0.03615	0.26468	0.10835	0.24120	0.1000300	0.0477480
Guyana85	-5.612405e-02	7.678010	0.676	0.523	0.010	0.360	4.183576	0.035280554	0.06400	0.20604	0.24157	0.75735	0.1327500	-0.0666320

	γ_{rel}	γ_{plp2}	μ_{rel}	Γ_{rel}	Γ_{plp2}	σ_{rel}	σ_{plp2}	$\Gamma_{int-rel}$	μ_{plp2}	Γ_{plp2}	$\mu_{int-rel}$	Γ_{plp2}	$\mu_{int-rel}$	Γ_{plp2}	$\mu_{int-rel}$
Paraguay85	2.832832e-02	7.438972	0.766	0.575	0.065	0.127	1.163576	0.098095492	0.01290	0.18571	0.08355	0.37780	0.0000000	-0.0185840	
Peru85	-1.785525e-02	7.094970	1.129	0.772	0.161	0.239	4.014580	0.076736887	0.02695	0.21434	0.06570	0.13915	0.6000000	-0.0483430	
Uruguay85	-6.674324e-03	6.313907	1.134	1.214	0.231	0.132	4.234107	0.555574265	0.02305	0.22899	0.08972	0.04790	0.0000000	-0.0180125	
Venezuela85	-1.932494e-02	0.093912	0.050	0.752	0.109	0.206	4.152600	-0.010972231	0.04655	0.23192	0.04434	0.13260	0.0030000	0.0532105	
Bangladesh85	1.330195e-02	6.884487	0.486	0.351	0.003	0.055	3.811097	1.367876161	0.01355	0.03744	0.27633	0.64045	0.6506525	0.0168505	
Hong Kong85	0.491649e-02	6.024432	2.369	1.301	0.059	0.178	4.254193	1.920353884	0.02360	0.23435	0.02942	0.03000	0.0000000	-0.0206880	
India85	2.276029e-02	6.573683	0.715	0.163	0.032	0.113	3.879500	1.363864318	0.02970	0.18291	0.09502	0.14450	0.5002375	-0.0370960	
Indonesia85	5.522629e-02	6.841615	0.456	0.201	0.010	0.034	3.863624	1.258766379	0.01320	0.23163	0.07673	0.03925	0.5500000	0.0333945	
Iran85	-2.278641e-02	6.525955	0.811	0.223	0.018	0.091	1.023584	-0.809963724	0.03195	0.26146	0.03047	0.83635	0.6624250	0.0579510	
Iran85	-2.940806e-02	8.574513	0.723	0.172	0.036	0.120	3.970292	-1.977134592	0.03410	0.19027	0.07495	0.45500	0.6540750	0.0610305	
Israel85	1.111437e-02	6.863474	1.837	1.531	0.431	0.610	4.271095	3.020761054	0.06355	0.25463	0.01000	0.15820	0.5000000	0.0065280	
Japan85	0.072056e-02	9.055790	2.121	1.320	0.067	0.420	4.250459	0.501065370	0.04325	0.36366	0.03467	0.03000	0.0004425	-0.0100535	
Jordan85	5.025037e-02	7.315884	1.205	0.413	0.016	0.060	4.036009	0.142032635	0.04390	0.24393	0.08116	0.02080	0.5000000	-0.0661490	
Korea85	0.030427e-02	7.753624	2.369	1.060	0.090	0.397	4.137410	0.133066073	0.02310	0.30235	0.01312	0.07510	0.1513325	-0.0223350	
Malaysia85	4.423512e-02	7.869784	1.255	0.517	0.037	0.072	4.159955	-0.018149441	0.04995	0.29440	0.03972	0.03300	0.0540750	0.0146695	
Malaysia85	3.117197e-02	6.795705	1.039	0.271	0.048	0.137	3.841601	0.650423509	0.01560	0.10852	0.06656	0.26205	0.5507050	0.0373105	
Philippines85	-0.423194e-03	7.391415	1.049	0.837	0.389	0.401	1.060943	-0.179352976	0.01185	0.20392	0.11488	0.03635	0.8022800	-0.0609670	
Singapore85	4.861521e-02	8.510989	1.427	0.317	0.052	0.136	4.238293	0.450666504	0.02480	0.08843	0.00559	0.09150	0.0000000	0.0074210	
Sri Lanka85	4.685177e-02	7.205635	2.022	1.438	0.024	0.047	4.149464	-0.747264155	0.02465	0.21702	0.09976	0.24305	0.5000000	-0.0005235	
Syria85	1.381867e-02	6.174139	0.761	0.200	0.033	0.150	4.043051	-0.156526202	0.02320	0.19102	0.01000	0.20810	0.5795000	0.0466620	
Taiwan85	5.700399e-02	6.093157	1.629	0.738	0.075	0.255	4.242765	0.335835126	0.02360	0.29343	0.11968	0.03905	0.0000000	-0.0331690	
Thailand85	3.741691e-02	7.413181	0.451	0.219	0.053	0.092	4.064294	0.324298896	0.02003	0.19545	0.07688	0.03200	0.6511475	-0.0371355	
Yemen85	0.043007e-02	6.039476	0.062	0.000	0.000	0.000	3.660677	2.010297171	0.03650	0.14752	0.04190	0.11465	0.0700250	0.0016000	
Austria85	2.181881e-02	9.102973	3.521	1.775	0.040	0.131	4.257030	5.214729663	0.04835	0.27855	0.06697	0.03000	0.0000000	0.0105775	
Belgium85	1.458651e-02	9.189015	2.161	1.794	0.172	0.359	4.265493	3.982059812	0.05785	0.24159	0.02693	0.03000	0.0000000	-0.0101175	
Cyprus85	7.094231e-03	8.061171	2.345	1.870	0.202	0.315	4.268298	1.096487292	0.03445	0.28703	0.08169	0.06955	0.6000000	-0.0512245	
Denmark85	2.344813e-02	9.223260	1.732	1.348	0.431	0.516	4.255924	3.435801506	0.05950	0.25617	0.11058	0.03000	0.0000000	-0.0109200	
Finland85	2.131100e-02	9.189831	0.996	0.919	0.195	0.267	1.257030	0.715802023	0.05220	0.35993	0.06645	0.03000	0.0000000	-0.0135370	
France85	1.513692e-02	9.256174	1.210	1.128	0.090	0.217	4.262206	1.270960288	0.04220	0.28519	0.04654	0.03000	0.0009450	-0.0026775	
Germany West85	2.144515e-02	9.222467	0.776	0.575	0.088	0.272	4.259859	-0.227449268	0.04375	0.27763	0.06348	0.03000	0.0000000	-0.0163650	
Greece85	1.744612e-02	0.555259	1.220	0.021	0.125	0.311	4.204965	0.580350262	0.02205	0.26671	0.03000	0.06560	0.5554500	-0.0093710	
Ireland85	2.267884e-02	6.657123	1.567	1.585	0.127	0.234	4.265493	1.614970497	0.05380	0.30055	0.06395	0.03000	0.0152750	0.0045100	
Italy85	2.453217e-02	9.030137	1.579	1.062	0.081	0.192	4.216066	1.442860253	0.02770	0.27294	0.03624	0.03000	0.0741000	-0.0075940	
Netherlands85	5.368419e-03	8.022569	1.014	0.610	0.055	0.170	4.257050	-0.002600164	0.03725	0.28526	0.19082	0.04410	0.0000000	-0.0132310	
Netherlands85	1.173263e-02	9.233345	2.494	1.371	0.167	0.437	4.304065	5.011347315	0.06690	0.23837	0.01424	0.03000	0.0000000	0.0008605	
Norway85	3.577709e-02	9.205127	0.151	0.361	0.169	0.132	1.309956	1.138791982	0.05920	0.34330	0.05419	0.03000	0.0000000	0.0301360	
Portugal85	1.393614e-02	6.382519	0.694	0.362	0.035	0.096	4.219508	-0.497398222	0.03670	0.25216	0.09210	0.13005	0.1000000	-0.0241535	
Spain85	1.967013e-03	6.909235	1.147	0.011	0.073	0.206	4.267710	0.252376427	0.02325	0.26745	0.04348	0.03000	0.0352500	-0.0142320	
Sweden85	1.155696e-02	9.380927	2.684	2.788	0.260	0.382	4.314818	7.245315832	0.07205	0.23665	0.10192	0.05000	0.0000000	-0.0094305	
Switzerland85	1.094760e-02	9.490167	1.450	1.202	0.030	0.209	4.250645	2.000154606	0.04600	0.29017	0.01436	0.05000	0.0000000	0.0009370	
Turkey85	7.493849e-03	7.850855	0.609	0.228	0.018	0.094	4.050044	-0.208647474	0.03120	0.26035	0.02351	0.16125	0.5562000	-0.0352745	
United Kingdom85	2.131594e-02	9.104809	1.920	1.360	0.235	0.488	4.276666	3.752114456	0.05305	0.19048	0.07215	0.03000	0.1517775	0.0140210	
Australia85	1.613905e-02	9.360400	0.061	2.720	0.299	1.011	4.273004	0.794455075	0.04300	0.29621	0.03279	0.03000	0.0000000	-0.0317105	
New Zealand85	7.643662e-03	9.253273	3.235	2.375	0.449	0.670	4.276666	3.479854767	0.04705	0.25005	0.06585	0.03000	0.0000000	0.0033710	
Papua New Guinea85	-1.289124e-02	7.454720	0.136	0.048	0.004	0.015	3.867026	0.469961956	0.07193	0.17171	0.22611	0.17600	0.0000000	-0.0012750	

EK-8

Barro verisi R kodları

```
> library(quantreg)
> data(barro)
> library(Rcmdr)
> RegModel.1 <-
+ lm(y.net~fhe2+fse2+gcony2+gedy2+ly2+lblkp2+lexp2+lgdp2+lintr2+mhe2+mse2+pol2+ttrad2,
+ data=barro)
> summary(RegModel.1)

> fit0 <- rq(y.net ~ lgdp2 + fse2 + gedy2 , data = barro)
> fit1 <- rq(y.net ~ lgdp2 + fse2 + gedy2 + ly2 + gcony2, data = barro)
> fit2 <- rq(y.net ~ lgdp2 + fse2 + gedy2 + ly2 + gcony2, data = barro,tau=.75)
> fit3 <- rq(y.net ~ lgdp2 + fse2 + gedy2 + ly2 + gcony2, data = barro,tau=.25)
>
> summary(fit0, se="nid")
> summary(fit1, se="nid")
> summary(fit2, se="nid")
> summary(fit3, se="nid")

> anova(fit1,fit0)
> anova(fit1,fit2,fit3)
> anova(fit1,fit2,fit3,join=FALSE)

> plot(summary(rq(y.net~lgdp2,tau = 1:49/50,data=barro)))
> plot(summary(rq(y.net~mse2,tau = 1:49/50,data=barro)))
> plot(summary(rq(y.net~lexp2,tau = 1:49/50,data=barro)))
> plot(summary(rq(y.net~lintr2,tau = 1:49/50,data=barro)))
> plot(summary(rq(y.net~gedy2,tau = 1:49/50,data=barro)))
> plot(summary(rq(y.net~ly2,tau = 1:49/50,data=barro)))
> plot(summary(rq(y.net~gcony2,tau = 1:49/50,data=barro)))
> plot(summary(rq(y.net~ttrad2,tau = 1:49/50,data=barro)))
```