



**T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**QUANTUM İNTEGRALLER İÇİN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ
VE UYGULAMALARI**

NECMETTİN ALP

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. MEHMET ZEKİ SARIKAYA**

DÜZCE, 2020

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

QUANTUM İNTEGRALLER İÇİN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ
VE UYGULAMALARI

Necmettin ALP tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi

Prof. Dr. Muharrem GÖKÇEN
Düzce Üniversitesi

Prof. Dr. Yüksel SOYKAN
Bülent Ecevit Üniversitesi

Doc. Dr. Fuat USTA
Düzce Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Mehmet GÜMÜŞ
Bülent Ecevit Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 31/01/2020

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

31/01/2020

Necmettin ALP

TEŞEKKÜR

Doktora öğrenimim boyunca beni, doğru bilgiyi bulmaya yönlendiren, bilgisi ve çalışma azmiyle bir akademisyenin nasıl olması gerektiğini bana ve tüm öğrencilerine öğreten değerli hocam Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA' ya en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Tez çalışmam boyunca manevi desteklerini esirgemeyen ve güzel bir çalışma ortamı oluşturarak daha verimli çalışmamızı sağlayan tüm çalışma, iş arkadaşlarıma ve okul idarecilerime tek tek teşekkür ederim.

Bütün sıkıntılara rağmen beni okutup bu noktaya getiren merhum annem Emine ALP'a, babam M. Ali ALP'a teşekkürü bir borç bilir ayrıca desteklerini esirgemeyen ALP ve TANGÜR ailelerine en içten duygularıyla teşekkür ederim.

Hayatıma rehber olan ve maddi-manevi desteğini esirgemeyen değerli büyüğüm Şehmuz TÜRKOĞLU ve ailesine en kalbi duygularıyla teşekkür ederim.

Hastalığımda sağlığımda her anımda, her problem karşısında, doktora eğitimim boyunca yanımda olan ve bana destek olan pek kıymetli eşim Tuğba ALP'a ve varlığıyla hayatımıza renk katan kızım Elif Neva ALP'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

31/01/2020

Necmettin ALP

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ŞEKİL LİSTESİ.....	vi
SİMGELER	vii
ÖZET	viii
ABSTRACT	ix
EXTENDED ABSTRACT	x
1. GİRİŞ	1
1.1. q ve (p, q) -NOTASYON VE TANIMLARI	8
1.2. q -TÜREV OPERATORÜ VE JACKSON q -BELİRLİ İNTEGRALI	11
1.3. (p, q) -TÜREV OPERATÖRÜ VE (p, q) -BELİRLİ İNTEGRALI	15
2. q -HERMİTE-HADAMARD EŞİTSİZLİKLERİ İLE KONVEKS VE QUASI-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN ORTA NOKTA TIPLI EŞİTSİZLİKLERİN QUANTUM TAHMİNLERİ	21
2.1. q -HERMİTE-HADAMARD EŞİTSİZLİKLERİ	21
2.2. q -KALKÜLÜS İÇİN ORTA NOKTA TIPLI EŞİTSİZLİKLER.....	27
3. (p, q) -HERMİTE-HADAMARD EŞİTSİZLİKLERİ İLE KONVEKS VE QUASI-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN ORTA NOKTA TIPLI EŞİTSİZLİKLERİN (p, q) -QUANTUM TAHMİNLERİ.....	42
3.1. (p, q) -HERMİTE-HADAMARD EŞİTSİZLİKLERİ.....	42
3.2. (p, q) -KALKÜLÜS İÇİN ORTA NOKTA TIPLI EŞİTSİZLİKLER	49
4. YENİ $\bar{q}$ -İNTEGRAL	62
4.1. YENİ $\bar{q}$ -İNTEGRAL TANIMI VE BU TANIMIN ÖZELLİKLERİ	62
4.2. $\bar{q}$ -HERMİTE-HADAMARD EŞİTSİZLİKLERİ	71
5. $\bar{q}$ -İNTEGRAL İÇİN $\bar{q}$ -EŞİTSİZLİKLER.....	77
5.1. $\bar{q}$ -YOUNG, $\bar{q}$ -HÖLDER VE $\bar{q}$ -MINKOWSKI EŞİTSİZLİKLERİ.....	77
5.2. OSTROWSKI TIPLI $\bar{q}$ -EŞİTSİZLİKLER.....	80
6. $\bar{q}$ -İNTEGRAL İÇİN $\bar{q}$ -GAMA VE $\bar{q}$ -BETA FONKSİYONLARI.....	89
7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	96
8. KAYNAKLAR.....	97
ÖZGEÇMİŞ.....	101

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1. $f(x), k(x), h(x), h_1(x), h_2(x)$ fonksiyonlarının grafikleri.	21
Şekil 3.1. $f(x), h(x)$ ve $k(x)$ fonksiyonlarının grafikleri.	42
Şekil 3.2. $f(x)$ ve $h_1(x)$ fonksiyonlarının grafikleri.	45
Şekil 3.3. $f(x)$ ve $h_2(x)$ fonksiyonlarının grafikleri.	47
Şekil 4.1. $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği	62
Şekil 5.1. $y = x^p$ fonksiyonunun grafiği	77



SİMGELER

$\mathbb{R}$

D_q

${}_aD_{p,q}$

$(x-a)_q^n$

$(x-a)_{p,q}^n$

$[n]_q!$

$[n]_{p,q}!$

Reel Sayılar Kümesi

Jackson q-türev operatörü

(p, q) -türev operatörü

q -binom

(p, q) -binom

q -faktöriyel

(p, q) -faktöriyel



ÖZET

QUANTUM İNTEGRALLER İÇİN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ VE UYGULAMALARI

Necmettin ALP

Düzce Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Danışman: Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA

Ocak 2020, 100 sayfa

Bu tez çalışması beş ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, quantum integraller için q -Hermite-Hadamard eşitsizlikleri ispatlanmış olup konveks ve quasi konveks fonksiyonlar için q -orta nokta tipli eşitsizlikler yardımıyla quantum tahminleri elde edilmiştir. Bunun yanında elde edilen sonuçlarda $q \rightarrow 1^-$ durumunun klasik sonuçları verdiği gösterilmiştir. İkinci bölümde, q -analizin genelleştirilmesi olan (p, q) -analiz için Hermite-Hadamard eşitsizlikleri ispatlandıktan sonra konveks ve quasi konveks fonksiyonlar için (p, q) -orta nokta tipli eşitsizlikler kullanılarak quantum tahminleri elde edilmiştir. Buna ek olarak $q \rightarrow 1^-$ ve $p = 1$ durumunda klasik analizin önceki çalışmaları elde edilmiştir. Üçüncü bölümde, farklı bir bakış açısı ile quantum integral yeniden tanımlanmıştır. Bu yeni tanım $\bar{q}$ -integral notasyonu ile temsil edilmiştir. Bununla birlikte, $\bar{q}$ -integralin özellikleri de ispatlanmıştır. Ayrıca yeni $\bar{q}$ -integral için $\bar{q}$ -Hermite-Hadamard integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Dördüncü bölümde, $\bar{q}$ -integral yardımıyla klasik analiz için vazgeçilmez olan Young, Hölder ve Minkowski tipli quantum eşitsizlikler ispatlanmıştır. Bununla birlikte, Ostrowski tipli eşitsizlikler için quantum tahminleri elde edilmiştir. Son bölümde, $\bar{q}$ -integral kullanılarak $\bar{q}$ -Gama-Beta fonksiyonlar yeniden tanımlanmıştır. Ayrıca, bu $\bar{q}$ -Gama-Beta fonksiyonların özellikleriyle birlikte aralarındaki ilişkiye dair sonuçlar elde edilmiştir.

Anahtar sözcükler: q -Türev, q -İntegral, Konvekslik, Quasi-konveksik, Hermite-Hadamard eşitsizliği, Ostrowski eşitsizliği, Gama fonksiyonu, Beta fonksiyonu.

ABSTRACT

INTEGRAL INEQUALITIES FOR QUANTUM INTEGRALS AND THEIR APPLICATIONS

Necmettin ALP

Düzce University

Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics

Doctoral Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA

January 2020, 100 pages

This thesis consists of five main parts. In the first part, q -Hermite-Hadamard inequality and kinds of this inequality have been proved and quantum predictions for q -midpoint type inequalities for convex and quasi convex functions have been obtained. In addition, it is shown that $q \rightarrow 1^-$ gives the classical results. In the second part, Hermite-Hadamard inequality and the types of this inequality have been proved on (p, q) -calculus. At the same time, quantum estimations for the convex and quasi convex functions (p, q) -midpoint inequalities have been obtained. Also, previous studies of the classical analysis were obtained in the case of $q \rightarrow 1^-$ and $p = 1$. In the third part, a new definition is given to quantum integrals with a new perspective and the properties of the new $\bar{q}$ -integral definition have been proved. Furthermore, $\bar{q}$ -Hermite-Hadamard integral inequalities were obtained with the help of this new $\bar{q}$ -integral. In the fourth part, the inequalities of Young, Hölder and Minkowski have been proven for $\bar{q}$ -integral. Additionally, quantum estimations for Ostrowski type inequalities were obtained. In the last part, $\bar{q}$ -Gamma-Beta functions were redefined using $\bar{q}$ -integral. Also, the properties, results and the relationship between these functions were investigated.

Keywords: q -Derivative, q -Integral, Convexity, Quasi-convexity, Hermite-Hadamard inequality, Ostrowski inequality, Gamma function, Beta function.

EXTENDED ABSTRACT

INTEGRAL INEQUALITIES FOR QUANTUM INTEGRALS AND THEIR APPLICATIONS

Necmettin ALP

Düzce University

Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics

Doctoral Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA

January 2020, 100 pages

1. INTRODUCTION

Although the concepts of classical analysis and q -analysis are not exactly the same, they are not completely disconnected. To understand the q -analysis needs to understand the classical analysis well.

Quantum calculus is the modern name for the investigation of calculus without limits. Recently it arose interest due to high demand of mathematics that models quantum computing. q -calculus appeared as a connection between mathematics and physics. It has a lot of applications in different mathematical areas such as number theory, combinatorics, orthogonal polynomials, basic hyper-geometric functions and other sciences quantum theory, mechanics and the theory of relativity.

Quantum calculus is a subfield of the more general mathematical field of time scales calculus. In studying quantum calculus, we are concerned with a specific time scale, called the q -time scale. The letter q has several meanings:

- the first letter of "quantum,"
- the letter commonly used to denote the number of elements in a finite field,
- the indeterminate of power series expansions.

Since q -calculus is a very wide topic, in this thesis we will focus on q -derivative, q -integral and some q -notations.

q -calculus first started with Euler. By using induction Euler proved the pentagonal number theorem which was the first example of a q -series, and at the same time the first example of a theta-function in 1750.

Furthermore Euler discovered the first two q -exponential functions, a prelude to the q -binomial theorem and at the same time introduced an operator which would over hundred years later lead to the q -difference operator. Yet, another example of a q -series is the result

of Gauss, which was published in 1866, 11 years after his death 1855.

Heine introduced the q -hypergeometric series which was the generalization of hypergeometric series in 1846.

The q -difference operator which was reintroduced by Jackson and may go back to Heine or Euler. The q -difference operator sometimes called Jackson q -difference operator, Euler-Jackson q -difference operator or Euler-Heine-Jackson q -difference operator. Jackson was the first to develop q -calculus in a systematic way.

In 1909, Jackson introduced q -generalization of Taylors formula.

In 1969, Agarwal described the q -fractional derivative for the first time. In 2013, Tariboon introduced ${}_aD_q$ -difference operator.

On the other hand, the history of q -integral dates back to the 17th century. Archimedes calculated the integral of $f(x) = x^2$ as the sum of a finite geometric series. In the 1650s, the famous Frenchman Pierre de Fermat (1608-1665), Pascal and others found a way to generalize Archimedes' results. Fermat introduced the q -integral of the function $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{Q}$ on the interval $[0, 1]$. This was done by introducing the Fermat measure, which puts mass $\alpha(1-q)q^n$ at $x = aq^n$.

Thomae was a pupil of Heine who in 1869 introduced the so-called q -integral on $[0, 1]$ interval. In 1910, Jackson defined the general q -integral on $[a, b]$.

Additionally, there is no unique canonical choice for the improper q -integral on $[0, \infty]$. The improper q -integral has been defined more than once.

In 1966-1967 Al-Salam introduced a q -analogue of the Riemann-Liouville fractional integral operator and q -fractional integral operator. In 2004, Rajkovic gave a definition of the Riemann-type q -integral which was generalized of Jackson q -integral on $[a, b]$.

Many integral inequalities well known in classical analysis have been proved and applied for q -calculus. Many mathematicians have done studies in q -calculus analysis.

In addition to after the definition of Jackson q -derivative and q -integral, many generalizations and studies were done. For example, q -calculus was further expanded to reveal (p, q) -calculus. Tunç and Göv studied the concept of (p, q) -derivatives and (p, q) -integrals over the interval of $[a, b] \subset \mathbb{R}$ and settled a number of (p, q) -analogues of some well-known results like Hölder inequality, Minkowski inequality, Hermite-Hadamard inequality and Ostrowski inequality, Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz, Grüss, Grüss- Cebyshev and other integral inequalities using classical convexity.

The aim of this thesis is to prove Hermite-Hadamard inequality for q -calculus and (p, q) -calculus and to obtain quantum estimates for q -midpoint type inequalities and to redefine it with a new angle of view to q -integration. Finally, it is to prove that Young, Hölder, Minkowski and Ostrowski type integral inequalities with the help of this new q -definition.

2. MATERIAL AND METHODS

First we examine the history of q -calculus. We examine the contribution of mathematicians to q -calculus according to history. We also remember the definitions, notations and studies. Then, with the generalizations about q -derivative and q -integral, we give properties and theorems of these generalizations. At the same time, we remind q and (p, q) -notations and q -generalizations of some specific functions. Then, we investigate the relationship between D_q , ${}_aD_q$ and ${}_aD_{p,q}$ derivatives and their properties. We also examine the integrals of these derivatives in detail. Finally, we look at the Hermite-Hadamard inequalities for the quantum calculus obtained in the previous years but it proved to be inaccurate. We also show why they were wrong.

3. RESULTS AND DISCUSSIONS

In this chapter, we often use the geometric method in our proofs. We first prove exactly correct state q -Hermite-Hadamard and (p, q) -Hermite-Hadamard inequalities which was previously proven incorrect and we obtain kinds of them. Later, we calculate quantum predictions for q -midpoint type inequalities on convex and quasi-convex functions. In the same way, we prove quantum predictions for (p, q) -midpoint type inequalities on convex and quasi-convex functions. We have a different aspect to q -integral and by this aspect we redefine q -integral. Furthermore with the help of new definition we especially prove q -Ostrowski type integral inequalities and some classic inequalities on q -calculus. Finally, we redefine the Gamma and Beta functions on new quantum itegral and we show relationship between them.

4. CONCLUSION AND OUTLOOK

In this study, we establish new definition of quantum integral and we apply this new definition to inequalities which are very important for analysis and Gamma-Beta functions. Moreover, we show relationship between ${}_aD_q$ and new quantum integral definition.

In the further studies, one can establish different integral inequalities. Additionally, quantum estimations for other type integral inequalities can be obtained. q -differential equations also can be proved by this new quantum integral and integral transformations can be defined with applied.

1. GİRİŞ

Klasik analizin ve q -analizin (quantum kalkülüs) kavramları tamamen aynı olmamakla beraber tamamen birbirinden kopuk da değildir. q -analizi anlayabilmek için klasik analizi iyi anlamak gerekiyor.

Quantum kalkülüs, limitsiz kalkülüsün modern adıdır. Son zamanlarda, kuantum hesaplama modellerinin yüksek matematiğe olan ilgisinden dolayı q -kalkülüse ilgi artmıştır. q -kalkülüs, matematik ve fizik arasında bir bağlantı olarak ortaya çıktı. Sayılar teorisi, kombinatorik, ortogonal polinomlar, temel hiper-geometrik fonksiyonlar ve diğer bilimler kuantum teorisi, kuantum mekaniği ve görelilik kuramı gibi farklı matematik ve fizik alanlarında çok sayıda uygulamaya sahiptir [1]-[3].

Analiz, sürekli ve süreksiz (discrete) olmak üzere iki başlık altında incelenebilir. Bu sürekli ve discrete (ayrık) analizi tek çatıda birleştiren skalaya "Zaman Skalası" adı verilir. Zaman skalasında seçilen kümeyle göre özel analiz alanları oluşur. Kuantum analizi, zaman skalasının özel bir durumu olup q -zaman skalası

$$T := q^{\mathbb{N}_0} := \{q^t : t \in \mathbb{N}_0\}, 0 < q < 1$$

olarak tanımlanır [4].

Buradaki q harfinin aşağıdaki gibi bir çok anlamı bulunmaktadır [5]:

- "quantum" kelimesinin ilk harfi,
- sonlu bir alandaki öğelerin sayısını belirtmek için yaygın olarak kullanılan harf,
- kuvvet serisi genişlemelerinin belirsizliği.

q -kalkülüs çok geniş bir konu olduğundan bu tezde q -türev, q -integral ve bazı q -notasyonlarına odaklanılacaktır.

q -kalkülüs, ilk önce Euler ile başladı. Euler, 1750’de bir q -serisinin ilk örneği olan

$$1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(q^{\frac{m(3m-1)}{2}} + q^{\frac{m(3m+1)}{2}} \right) = \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^m), \quad 0 < |q| < 1 \quad (1.1)$$

pentagonal sayı teoremini ispatladı ve bu aynı zamanda theta-fonksiyonunun ilk örneğiydi [1].

Euler’in ölümünden 11 yıl sonra 1866’da Gauss, q -serisinin bir başka örneği olan Denklem (1.2)’yi ispatladı [1].

$$1 + \sum_{m=1}^{\infty} q^{\binom{m+1}{2}} = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1 - q^{2m}}{1 - q^{2m-1}}, \quad |q| < 1. \quad (1.2)$$

Ayrıca, Euler ilk iki q -üstel fonksiyonunu Denklem (1.3) ve Denklem (1.4)’ü keşfetti [1].

$$e_q(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\langle 1; q \rangle_n} = \frac{1}{(z; q)_{\infty}}, \quad |z| < 1, \quad 0 < |q| < 1, \quad (1.3)$$

$$e_{\frac{1}{q}}(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\binom{n}{2}}}{\langle 1; q \rangle_n} z^n = (-z; q)_{\infty}, \quad 0 < |q| < 1. \quad (1.4)$$

Bunun yanında, Euler yüzyıldan fazla bir süre sonra tanımlanacak olan q -türev operatörünü ve q -binom teoreminin ilk halini tanıtmıştır [1].

Heine, 1846’da hipergeometrik serilerin genelleştirmesi olan q -hipergeometrik serisini: q -değişken faktöriyel,

$$(a; q)_n = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ \prod_{m=0}^{n-1} (1 - aq^m), & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

olmak üzere

$${}_2\phi_1(a, b; c; q, z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a; q)_n (b; q)_n}{(q; q)_n (c; q)_n} z^n \quad (1.5)$$

olarak tanıtmıştır [6].

q -türev operatörünü ilk olarak Euler sonra Heine [7] daha sonra da 1908’de F. H. Jackson [8] tarafından nihai hali tanıtılmıştır [2], [9]. Bu türev operatörünü kaynaklarda bazen Euler-Heine-Jackson q -türev operatörü bazen Euler-Jackson q -türev operatörü bazen de

sadece Jackson q -türev operatörü olarak karşımıza çıkmaktadır. Jackson, q -kalkülüsü sistematik olarak geliştiren ilk kişi oldu [1].

$\mu \in \mathbb{R}$ sabit ve $A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $z \in A$ iken eğer $\mu z \in A$ oluyorsa A 'ya μ -geometrik küme denir. A kümesi μ -geometrik ise $\{z\mu^n\}_n^\infty$ olan geometrik dizileri kapsar. μ yerine q alınrsa A 'ya q -geometrik küme denir [2].

Jackson q -türev operatörünü q -geometrik kümesinde tanımlı f fonksiyonu için

$$(D_q f)(x) = \frac{f(x) - f(qx)}{(1-q)x}, q \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \quad (1.6)$$

olarak tanımlamıştır [1].

Bununla birlikte, $0 \in A$ ve $|q| < 1$ ve z den bağımsız limit olması koşulu ile f nin 0'da q -türevi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$D_q f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(xq^n) - f(0)}{xq^n}, \text{ for } x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Ayrıca, $|q| > 1$ için

$$D_q f(0) = D_{q^{-1}} f(0)$$

eşitliği doğrudur [2].

Ayrıca, 1909'de Jackson q -Taylor formülü Denklem (1.26)'i tanımlamıştır [10].

Diğer yandan, 1969'da Agarwal, ilk kez q -kesirli türevi,

$$D_q^\alpha f(x) = I_q^{-\alpha} f(x) = \frac{x^{-\alpha-1}}{\Gamma_q(-\alpha)} \int_0^x (qt/x; q)_{-\alpha-1} f(t) d_q t \quad (1.7)$$

olarak tanımlamıştır [11].

2013 yılında da Tariboon, ${}_a D_q$ -türev operatörünü Eşitlik (1.29) olarak tanımlamıştır [12].

Öte yandan, q -integralinin tarihçesi 17. yüzyıla kadar uzanır. İlk olarak Arşimed, $f(x) = x^2$ integralini sonlu bir geometrik serinin toplamı olarak hesapladı. 1650'lerde ünlü Fransız

Pierre de Fermat (1608-1665), Pascal ve diğeri [13, s.485] Arşimed'in sonuçlarını genelleştirmenin bir yolunu buldu. Fermat, $[0, 1]$ aralığında $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{Q}$ [13, s.485] fonksiyonunun q -integralini tanıtmıştır [14]. Bu $x = aq^n$ 'de $\alpha(1-q)q^n$ yazılmak suretiyle Fermat ölçüsü tanıtılarak yapıldı.

1869 yılında Eduard Heine'nin öğrencisi Thomae $[0, 1]$ aralığı üzerinde q -integralini aşağıdaki şekilde tanıtmıştır [15], [16]:

$$\int_0^1 f(x) d_q x = (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n), \quad 0 < q < 1. \quad (1.8)$$

1910'da H. H. Jackson $[a, b]$ üzerinde genel q -integral tanımını

$$\int_0^a f(x) d_q x = a(1-q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(aq^n), \quad 0 < |q| < 1 \quad (1.9)$$

olmak üzere

$$\int_a^b f(x) d_q x = \int_0^b f(x) d_q x - \int_0^a f(x) d_q x \quad (1.10)$$

şeklinde yapmıştır [15], [17], [18].

$[0, \infty)$ aralığında ise genelleştirilmiş q -integrali için benzersiz tek bir seçim yoktur. Jackson'un yaptığına benzer olarak $\sum_0^\infty q^n f(q^n)$ mutlak yakınsak olmak koşulu ile Hahn, genelleştirilmiş q -integralini

$$\int_0^\infty f(x) d_q x = (1-q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^n f(q^n), \quad 0 < |q| < 1 \quad (1.11)$$

olarak tanımlamıştır [19]. Benzer şekilde, aynı q değeri için iki taraflı genelleştirilmiş q -integrali aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır [20]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) d_q x = (1-q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^n [f(q^n) + f(-q^n)], \quad 0 < |q| < 1. \quad (1.12)$$

Oysa, Matsuo da genelleştirilmiş q -integrali aşağıdaki şekilde tanımlamıştır [21]:

$$\int_0^{\infty/b} f(x) d_q x = \frac{1-q}{b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^n f\left(\frac{q^n}{b}\right), \quad (b > 0). \quad (1.13)$$

Benzer olarak, $\mathbb{R}$ üzerinde genelleştirilmiş q -integrali aşağıdaki şekilde tanımlamıştır [21]:

$$\int_{-\infty/b}^{\infty/b} f(x) d_q x = \frac{1-q}{b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^n [f(q^n/b) + f(-q^n/b)], \quad (b > 0). \quad (1.14)$$

1966-1967'de Al-salam q -analiz için Riemann-Liouville kesirli integral operatörünü,

$$I_q^\alpha f(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)} \int_0^x (qt/x; q)_{\alpha-1} f(t) d_q t \quad (1.15)$$

olarak tanımlamıştır. Ayrıca, Al-salam bir başka q -kesirli integral operatörü $K_q^{-\alpha}$ yı

$$K_q^{-\alpha} \phi(x) = \frac{q^{-\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)} \int_x^\infty t^{\alpha-1} (x/t; q)_{\alpha-1} \phi(tq^{1-\alpha}) d_q t \quad (1.16)$$

şeklinde tanımlamıştır [22]. 2004'de Rajkovic, $[a, b]$ aralığı üzerinde Jakson q -integralin genellemesi olan Riemann-tipli q -integral tanımını Denklem (1.30)'ü

$$\int_a^b f(x) {}_a d_q x = (1-q)(b-a) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(bq^n + (1-q^n)a), \quad 0 < q < 1, \quad a, b \in \mathbb{C}$$

olarak tanımlamıştır [23].

Literatürde, q -kalkülüs ile ilgili birçok çalışma mevcuttur [3], [24]-[30]. Bunun yanında, klasik analizde iyi bilinen birçok integral eşitsizliği q -kalkülüs için kanıtlanmıştır. Jackson q -türevi ve q -integral tanımından sonra birçok genelleme ve çalışma yapılmıştır. Örneğin q -kalkülüs genelleştirilerek (p, q) -kalkülüs tanıtılmıştır. Tunç ve Göv $[a, b] \subset \mathbb{R}$ aralığı üzerinde (p, q) -türev ve (p, q) -integral konseptiyle çalışmışlardır. (p, q) -kalkülüs üzerinde klasik konveksliği kullanarak Hölder, Minkowski, Hermite-Hadamard, Ostrowski, Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz, Grüss, Grüss-Cebysev ve diğer integral eşitsizliklerini ispatlamışlardır [31], [32].

Şimdi, bu çalışma boyunca kullanılacak olan konveks fonksiyon, quasi-konveks fonksiyon ve klasik analizde iyi bilinen Hermite-Hadamard, Young, Hölder, Minkowski, Ostrowski eşitsizliklerinin tanım ve teoremleri sırasıyla aşağıdaki gibidir:

Tanım 1.1 (Konveks Küme). V kümesi $\mathbb{R}$ ya da $\mathbb{C}$ üzerinde bir vektör uzayı ve $I \subset V$ olmak üzere $\forall a, b \in I$ ve $t \in [0, 1]$ için eğer

$$ta + (1 - t)b \in I$$

gerçekleniyor ise I kümesine konveks küme denir [33].

Tanım 1.2 (Konveks, Quasi-konveks Fonksiyon). $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. $\forall a, b \in I$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$f(ta + (1 - t)b) \leq tf(a) + (1 - t)f(b)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon ve

$$f(ta + (1 - t)b) \leq \sup\{f(a), f(b)\}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna quasi-konveks fonksiyon denir. Ayrıca, konveks ve quasi-konveks fonksiyonlar için

$$f(ta + (1 - t)b) \leq tf(a) + (1 - t)f(b) \leq \sup\{f(a), f(b)\}$$

eşitsizliği doğrudur [33].

Bu çalışmada kullanılan analizin iyi bilinen en önemli eşitsizliklerinden Young, Hölder, Minkowski, Ostrowski ve Hermite-Hadamard eşitsizliklerini kısaca hatırlayalım.

Teorem 1.3 (Young Eşitsizliği). $a, b > 0$ ve $p > 1$ olmak üzere $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1$ için

$$a.b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^r}{r}$$

dır [34].

Teorem 1.4 (Hölder Eşitsizliği). $p > 1$ olmak üzere $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1$ için

$$\int_a^b |f(t)g(t)| dt \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(t)|^r dt \right)^{\frac{1}{r}}$$

dr [35].

Teorem 1.5 (Minkowski Eşitsizliği). $p > 1$ için

$$\left(\int_a^b |f(t) + g(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği sağlanır [36].

1938 yılında Ostrowski kendi adıyla anılan aşağıdaki integral eşitsizliğini ispatlamıştır:

Teorem 1.6 (Ostrowski Eşitsizliği). $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\overset{\circ}{I}(I, I$ nın iç kümesi)da diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a, b \in \overset{\circ}{I}$ ile $a < b$ olsun. Her $x \in [a, b]$ için $|f'(x)| \leq M$ ise,

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq (b-a)M \left[\frac{1}{4} + \frac{(x - \frac{a+b}{2})^2}{(b-a)^2} \right] \quad (1.17)$$

eşitsizliği sağlanır. $\frac{1}{4}$ sabiti daha küçük bir sabit ile değiştirilememesi anlamında mümkün olan en iyi değerdir [36], [37].

Teorem 1.7 (Hermite-Hadamard Eşitsizliği). $f, [a, b]$ üzerinde konveks bir fonksiyon olmak üzere

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (1.18)$$

eşitsizliğine Hermite-Hadamard eşitsizliği denir [38].

Bu ön bilgilere ve quantum kalkülüsün tarihçesine kısaca bakıldıktan sonra şimdi quantum kalkülüsün önemli bazı notasyonları, tanımları, türev ve integral formları ile aralarındaki bağıntılar incelenecektir.

1.1. q ve (p, q) -NOTASYON VE TANIMLARI

Bu bölümde, $0 < q < p \leq 1$ olmak üzere aşağıdaki bazı tanım ve notasyonlar bu çalışma boyunca kullanılacaktır [5], [32], [39].

$$[z]_q = \frac{1 - q^z}{1 - q} \quad (z \in \mathbb{C}) \quad (1.19)$$

ve

$$[z]_{p,q} = \frac{p^z - q^z}{p - q} \quad (z \in \mathbb{C}) \quad (1.20)$$

dır. Burada, Denklem (1.20) ve Denklem (1.19)'ün pozitif doğal sayılar için özel halleri

$$[n]_q = \frac{1 - q^n}{1 - q} = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}, \quad (1.21)$$

ve

$$[n]_{p,q} = \frac{p^n - q^n}{p - q} = p^{n-1} + p^{n-2}q + \dots + pq^{n-2} + q^{n-1},$$

şeklinde yazılır. Ayrıca q -faktöriyel ve (p, q) -faktöriyel sayıları

$$[n]_q! = \begin{cases} 1 & \text{eğer } n = 0, \\ [1]_q [2]_q \cdots [n]_q = \prod_{k=1}^n [k]_q = \frac{(1-q)_q^n}{(1-q)^n} & \text{eğer } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

benzer olarak,

$$[n]_{p,q}! = \begin{cases} 1 & \text{eğer } n = 0, \\ [1]_{p,q} [2]_{p,q} \cdots [n]_{p,q} = \prod_{k=1}^n [k]_{p,q} = \frac{(p-q)_{p,q}^n}{(p-q)^n} & \text{eğer } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bunun yanında q -binom katsayıları ve (p, q) -binom katsayıları aşağıdaki gibi temsil edilir:

$$\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[n-i]_q! [i]_q!}$$

ve

$$\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_{p,q} = \frac{[n]_{p,q}!}{[n-i]_{p,q}! [i]_{p,q}!}.$$

Bunun yanında bu çalışmada, Gauss q -binom formülü olarak bilinen aşağıdaki önemli

eşitlik kullanılacaktır. Eğer $n \in \mathbb{Z}^+$ ise

$$(x-a)_q^n = \prod_{i=0}^{n-1} (x-q^i a) = (x-a)(x-qa)(x-q^2 a) \dots (x-q^{n-1} a) \quad (1.22)$$

olmak üzere

$$(x-a)_q^n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q q^{\frac{i(i-1)}{2}} x^{n-i} a^i \quad (1.23)$$

açılımına q -binom formülü denir. Ayrıca q -binom aşağıdaki notasyonlarla da temsil edilebilir:

$$(a:q)_0 = 1,$$

$$(1-a)_q^n = (a:q)_n = \prod_{i=0}^{n-1} (1-q^i a),$$

$$(1-a)_q^\infty = (a:q)_\infty = \prod_{i=0}^{\infty} (1-q^i a), \quad (1.24)$$

$$(1-a)_q^n = \frac{(1-a)_q^\infty}{(1-q^n a)_q^\infty} = \frac{(a:q)_\infty}{(q^n a:q)_\infty}, \text{ eğer } n \in \mathbb{C}. \quad (1.25)$$

Burada, q için Denklem (1.24) sonsuz çarpımı yakınsak olarak kabul edilecektir. Ayrıca Denklem (1.22) ve Denklem (1.25) birbiriyle tutarlıdır. Benzer biçimde (p, q) -binom formülü eğer $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$$(x-a)_{p,q}^n = \prod_{i=0}^{n-1} (p^i x - q^i a) = (x-a)(px-qa)(p^2 x - q^2 a) \dots (p^{n-1} x - q^{n-1} a)$$

şeklinde tanımlanır.

Bu tanımlar yardımıyla, Jackson aşağıdaki q -Taylor serisini elde etmiştir:

Tanım 1.8. $D_q^n f(a)$ q -türevleri mevcut olmak üzere q -Taylor formülü

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-q)^n}{(q; q)_n} D_q^n f(a) (x-a)_q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_q^n f(a) (x-a)_q^n}{[n]_q!} \quad (1.26)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada, D_q , q -diferansiyel operatörüdür [10].

E_q^x ve e_q^x üstel fonksiyonlarının q -taylor serisine açılımları ve bunlar arasındaki bağıntılar

$$E_q^x = \sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{x^n}{[n]_q!} = (1 + (1-q)x)_q^\infty = ((q-1)x:q)_\infty$$

ve

$$e_q^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]_q!} = \frac{1}{(1 - (1-q)x)_q^{\infty}} = \frac{1}{((1-q)x : q)_{\infty}}$$

ile verilmiştir. Ayrıca $E_q^{-x} = \frac{1}{e_q^x}$ için

$$\lim_{x \rightarrow \infty} E_q^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e_q^x} = 0$$

ve

$$e_{1/q}^x = E_q^t$$

eşitlikleri geçerlidir [5].

Bunun yanında, q -trigonometrik fonksiyonlar

$$\sin_q x = \frac{e_q^{ix} - e_q^{-ix}}{2i}, \quad \text{Si } n_q x = \frac{E_q^{ix} - E_q^{-ix}}{2i},$$

$$\cos_q x = \frac{e_q^{ix} + e_q^{-ix}}{2}, \quad \text{Cos}_q x = \frac{E_q^{ix} + E_q^{-ix}}{2}$$

olarak tanımlanmıştır. Ayrıca, $\text{Si } n_q x = \sin_{1/q} x$ ve $\text{Cos}_q x = \cos_{1/q} x$ olduğundan

$$\sin_q x \text{Si } n_q x = -\frac{e_q^{ix} E_q^{ix} + e_q^{-ix} E_q^{-ix} - 2}{4}$$

ve

$$\cos_q x \text{Cos}_q x = \frac{e_q^{ix} E_q^{ix} + e_q^{-ix} E_q^{-ix} + 2}{4}$$

olup

$$\cos_q x \text{Cos}_q x + \sin_q x \text{Si } n_q x = 1$$

eşitliği doğrudur [1]. q -trigonometrik fonksiyonların quantum türevi $u(x) = ix$ seçilerek zincir kuralı yardımıyla bulunur. Öyle ki,

$$D_q \sin_q x = \cos_q x,$$

$$D_q \cos_q x = -\sin_q x,$$

$$D_q \text{Si } n_q x = \text{Cos}_q(qx),$$

$$D_q \text{Cos}_q x = -\text{Si } n_q(qx).$$

1.2. q -TÜREV OPERATORÜ VE JACKSON q -BELİRLİ İNTEGRALI

Bu bölümde, ilk olarak Denklem (1.6) Jackson q -türev operatörünün ve Denklem (1.9) Jackson q -belirli integralinin özelliklerine bakılacaktır.

Denklem (1.6) q -türev operatöründe birden fazla değişkenin bulunması durumunda değişkene göre q -türev operatörünün $(D_{q,x}f)(x,y)$ veya $(D_{q,y}f)(x,y)$ olarak belirtilmesi gerekiyor. f 'nin x noktasında türevi var ise bu türev operatörü $q \rightarrow 1$ iken limit durumu türev operatörüne dönüşür yani,

$$\lim_{q \rightarrow 1} (D_q f)(x) = \frac{df(x)}{dx}.$$

Ayrıca, f nin q -diferansiyeli aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

Tanım 1.9. f , bir fonksiyon olmak üzere f nin q -diferansiyeli:

$$d_q f(x) = f(qx) - f(x).$$

Özel olarak, $d_q x = (q - 1)x$ olur [5].

Tanım 1.10. Eğer, $D_q F(x) = f(x)$ oluyor ise $F(x)$ fonksiyonuna $f(x)$ in antitürevi denir ve

$$\int f(x) d_q x$$

ile temsil edilir. $\int D_q f(x) d_q x = f(x)$ olduğu aşikardır [5].

Bundan sonra, Jackson belirli q -integralinin özellikleriyle devam edilecektir. Denklem (1.9) Jackson q -integralinin limiti

$$\lim_{q \rightarrow 1^-} \int_0^b f(x) d_q x = \int_0^b f(x) dx$$

klasik integrali verir [1]. Ayrıca, genelleştirilmiş Jackson q -integral tanımı $b \rightarrow \infty$ limiti

için yapılamıyor. Bunun yerine

$$\begin{aligned}
& \int_{q^{i+1}}^{q^i} f(x) d_q x \\
&= \int_0^{q^i} f(x) d_q x - \int_0^{q^{i+1}} f(x) d_q x \\
&= (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} q^{i+n} f(q^{i+n}) - (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} q^{i+n+1} f(q^{i+n+1}) \\
&= (1-q) q^i f(q^i)
\end{aligned}$$

eşitliği kullanılırsa, genelleştirilmiş Jackson q -integrali aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 1.11. $[0, \infty)$ aralığında f 'nin genelleştirilmiş Jackson q -integrali

$$\int_0^{\infty} f(x) d_q x = \begin{cases} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_{q^{i+1}}^{q^i} f(x) d_q x, & 0 < q < 1 \text{ ise,} \\ \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_{q^i}^{q^{i+1}} f(x) d_q x, & q > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlanmıştır [5].

Önerme 1.12. Eğer, $x^\alpha f(x)$ fonksiyonu $x = 0$ komşuluğunda bazı $\alpha < 1$ değerleri ve yeterince büyük bazı x ile bazı $\alpha > 1$ değerleri için sınırlı ise genelleştirilmiş Jackson q -integrali yakınsaktır [5].

Teorem 1.13 (q -Kalkülüsün Temel Teoremi). $0 \leq a \leq b \leq \infty$ olmak üzere eğer $F(x)$ fonksiyonu $f(x)$ in antitürevi ve $x = 0$ noktasında $F(x)$ sürekli ise

$$\int_a^b f(x) d_q x = F(b) - F(a)$$

eşitliği doğrudur [5].

Cauchy kalan terimli q -Taylor formülünü aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

Teorem 1.14. Herhangi $i \leq n + 1$ için $x = 0$ noktasında $D_q^i f(x)$ sürekli olsun. Bu durumda

$$f(b) = \sum_{i=0}^n (D_q^i f)(a) \frac{(b-a)_q^i}{[i]_q} + \frac{1}{[n]_q} \int_a^b D_q^{n+1} f(x) (b-qx)_q^n d_q x$$

eşitliğine Cauchy kalan terimli q -Taylor formülü denir [5].

Sonuç 1.15. Denklem (1.6) ve Denklem (1.9) ile ilgili aşağıdaki özellikler sağlanır [5]:

1. $D_q(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha D_q f(x) + \beta D_q g(x), \alpha, \beta \in \mathbb{R},$
2. $D_q(fg)(x) = f(qx) D_q g(x) + g(x) D_q f(x)$

veya

$$D_q(fg)(x) = f(x) D_q g(x) + g(qx) D_q f(x),$$

3. $D_q\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{g(x) D_q f(x) - f(x) D_q g(x)}{g(x) g(qx)}$

veya

$$D_q\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{g(qx) D_q f(x) - f(qx) D_q g(x)}{g(x) g(qx)}$$

olup ikisi de doğrudur. Fakat uygulama yaparken daha kullanışlı olanı tercih etmek akıllıca olur.

4. $\int_a^b f(x) D_q g(x) d_q x = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(qx) D_q f(x) d_q x,$
5. $D_q \int_a^x f(t) d_q t = f(x),$
6. $\int_a^x D_q f(t) d_q t = f(x) - f(a),$
7. $D_q x^n = [n]_q x^{n-1},$
8. E_q^{-t} fonksiyonun q -türevi:

$$D_q E_q^{-t} = -E_q^{-qt} \quad (1.27)$$

dır. Fakat, q -türev için genel bir zincir(bileşke fonksiyon) kuralı bulunmamaktadır. Ancak $u(x) = \alpha x^\beta$ olarak seçilmesi halinde

$$\begin{aligned} D_q f(u(x)) &= D_q \left[f(\alpha x^\beta) \right] = \frac{f(\alpha x^\beta) - f(\alpha q^\beta x^\beta)}{(1-q)x} \\ &= \frac{f(\alpha x^\beta) - f(\alpha q^\beta x^\beta)}{\alpha x^\beta - \alpha q^\beta x^\beta} \cdot \frac{\alpha x^\beta - \alpha q^\beta x^\beta}{(1-q)x} \end{aligned}$$

$$= \left(D_{q^\beta} f \right) (u(x)) . D_q u(x)$$

zincir kuralı mevcuttur. Öte yandan örneğin $u(x) = x^2 + x$ veya $u(x) = \cos(x)$ olarak seçersek zincir kuralı çalışmaz [5].

Önerme 1.16. n tamsayısı için q -binom ile ilgili olarak

$$\begin{aligned} D_q(a-x)_q^n &= -[n]_q (a-qx)_q^{n-1}, \\ D_q \frac{1}{(a-x)_q^n} &= \frac{[n]_q}{(a-x)_q^{n+1}}, \\ D_q \frac{1}{(x-a)_q^n} &= [-n]_q (x-q^n a)_q^{-n-1} \end{aligned} \quad (1.28)$$

eşitlikleri doğrudur [5].

Bu tezin bazı bölümlerinde, Rajkovic'in tanımladığı Jackson Belirli q -integralinin genelleştirmesi olan Tanım 1.18 q -integral tanımı ve Tariboon'un tanımladığı ${}_a D_q$ -türev operatörü Tanım 1.17 kullanılacaktır [12], [23]:

Tanım 1.17. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyonu için f nin $x \in [a, b]$ noktasındaki q -türevi

$${}_a D_q f(x) = \frac{f(x) - f(qx + (1-q)a)}{(1-q)(x-a)}, \quad x \neq a. \quad (1.29)$$

ile ifade edilir [12], [40].

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olduğu için, bu yüzden ${}_a D_q f(a) = \lim_{x \rightarrow a} {}_a D_q f(x)$ olarak yazılabilir. Eğer her $x \in [a, b]$ için ${}_a D_q f(x)$ varsa f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında q -diferansiyellenebilir denir. Eğer (1.29)'de $a = 0$ ise o zaman Denklem (1.6) elde edilir [5].

Tanım 1.18. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman $\forall x \in [a, b]$ için f nin $[a, b]$ üzerinde q -belirli integrali,

$$\int_a^b f(x) {}_a d_q x = (1-q)(b-a) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n b + (1-q^n)a) \quad (1.30)$$

olarak tanımlanmıştır [23].

Burada, Denklem (1.30)'de $a = 0$ alınırsa o zaman Jackson q -integrali elde edilir.

Eğer $c \in (a, b)$ ise o zaman $[c, b]$ üzerinde q - belirli integral

$$\int_c^b f(x) {}_a d_q x = \int_a^b f(x) {}_a d_q x - \int_a^c f(x) {}_a d_q x \quad (1.31)$$

şeklinde ifade edilmiştir.

Sonuç 1.19. Denklem (1.29) ve Denklem (1.30) ile ilgili aşağıdaki özellikler sağlanır [12]:

$$1. \quad {}_a D_q(fg)(x) = g(x) {}_a D_q f(x) + f(qx + (1-q)a) {}_a D_q g(x)$$

veya

$${}_a D_q(fg)(x) = f(x) {}_a D_q g(x) + g(qx + (1-q)a) {}_a D_q f(x),$$

$$2. \quad {}_a D_q \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{g(x) {}_a D_q f(x) - f(x) {}_a D_q g(x)}{g(x)g(qx + (1-q)a)},$$

$$3. \quad \int_a^b f(x) {}_a D_q g(x) {}_a d_q x = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(qx + (1-q)a) {}_a D_q f(x) {}_a d_q x,$$

$$4. \quad {}_a D_q \int_a^x f(t) {}_a d_q t = f(x),$$

$$5. \quad \int_a^x {}_a D_q f(t) {}_a d_q t = f(x) - f(a),$$

$$6. \quad {}_a D_q (x-a)^n = [n]_q (x-a)^{n-1}.$$

Teorem 1.20 (q -Hölder Eşitsizliği). $0 < q < 1$ ve $s > 1$ olmak üzere $\frac{1}{s} + \frac{1}{r} = 1$ için

$$\int_a^b |f(t)g(t)| {}_a d_q t \leq \left(\int_a^b |f(t)|^s {}_a d_q t \right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_a^b |g(t)|^r {}_a d_q t \right)^{\frac{1}{r}}$$

eşitsizliği sağlanır [40].

1.3. (p, q) -TÜREV OPERATÖRÜ VE (p, q) -BELİRLİ İNTEGRALI

Bu bölümde, (p, q) -kalkülüs ile ilgili ön bilgileri kısaca hatırlanacaktır. Yine bu tezde $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ve $0 < q < p \leq 1$ olmak üzere aşağıdaki (p, q) -türev ve (p, q) -integral tanımları kullanılmıştır [31]:

Tanım 1.21. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyonu için f nin $x \in [a, b]$ noktasındaki (p, q) -

türevi

$${}_aD_{p,q}f(x) = \frac{f(px + (1-p)a) - f(qx + (1-q)a)}{(p-q)(x-a)}, \quad x \neq a \quad (1.32)$$

ile ifade edilir [31].

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olduğu için, bu yüzden ${}_aD_{p,q}f(a) = \lim_{x \rightarrow a} {}_aD_{p,q}f(x)$ olarak yazarız. Eğer, her $x \in [a, b]$ için ${}_aD_{p,q}f(x)$ varsa f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında (p, q) -diferansiyellenebilir denir. Eğer, Denklem (1.32)'de $a = 0$ ise o zaman ${}_0D_{p,q}f(x) = D_{p,q}f(x)$ olur ki $D_{p,q}f(x)$ ifadesi $x \in [a, b]$ 'deki f nin (p, q) -türevi

$$D_{p,q}f(x) = \frac{f(px) - f(qx)}{(p-q)x}, \quad x \neq 0 \quad (1.33)$$

ile ifade edilir [41]-[42].

Ayrıca, eğer Denklem (1.33)'de $p = 1$ seçilirse, o zaman Jackson q - türevi elde edilir [5].

Tanım 1.22. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman, $\forall x \in [a, b]$ için f nin $[a, b]$ üzerinde (p, q) -belirli integrali

$$\int_a^b f(x) {}_a d_{p,q}x = (p-q)(b-a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{p^{n+1}} f\left(\frac{q^n}{p^{n+1}}b + \left(1 - \frac{q^n}{p^{n+1}}\right)a\right) \quad (1.34)$$

olarak tanımlanmıştır [31]. $t \in [a, b]$ için eğer $c \in (a, t)$ ise o zaman $[c, t]$ aralığında (p, q) -belirli integrali

$$\int_c^t f(x) {}_a d_{p,q}x = \int_a^t f(x) {}_a d_{p,q}x - \int_a^c f(x) {}_a d_{p,q}x \quad (1.35)$$

olarak ifade edilir. Burada, Denklem (1.34)'de eğer $p = 1$ alınırsa (1.30) tanımı elde edilir.

Eğer, Denklem (1.34)'de $a = 0$ alınırsa o zaman aşağıdaki klasik (p, q) -belirli integrali elde edilir [42, Tanım 4]:

$\left| \frac{p}{q} \right| > 1$ ise

$$\int_0^t f(x) {}_0d_{p,q}x = \int_0^t f(x) d_{p,q}x = (p-q)t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{p^{n+1}} f\left(\frac{q^n}{p^{n+1}}t\right), \quad (1.36)$$

$\left| \frac{p}{q} \right| < 1$ ise

$$\int_0^t f(x) {}_0d_{p,q}x = \int_0^t f(x) d_{p,q}x = (q-p)t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n}{q^{n+1}} f\left(\frac{p^n}{q^{n+1}}t\right).$$

Ayrıca Denklem (1.34)'de $a = 0$ ve $p = 1$ seçilirse, o zaman da Jackson q -belirli integrali elde edilir [43, Tanım 2.2].

Sonuç 1.23. Denklem (1.32) ve Denklem (1.34) ile ilgili aşağıdaki özellikler sağlanır [32]:

$$\begin{aligned} 1. \quad & {}_aD_{p,q}(fg)(x) \\ &= g(px + (1-p)a) {}_aD_{p,q}f(x) + f(qx + (1-q)a) {}_aD_{p,q}g(x) \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} & {}_aD_{p,q}(fg)(x) \\ &= f(px + (1-p)a) {}_aD_{p,q}g(x) + g(qx + (1-q)a) {}_aD_{p,q}f(x), \end{aligned}$$

$$2. \quad {}_aD_{p,q}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{g(px + (1-p)a) {}_aD_{p,q}f(x) - f(px + (1-p)a) {}_aD_{p,q}g(x)}{g(px + (1-p)a)g(qx + (1-q)a)},$$

$$\begin{aligned} 3. \quad & \int_a^b f(px + (1-p)a) {}_aD_{p,q}g(x) {}_ad_{p,q}x \\ &= f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(qx + (1-q)a) {}_aD_{p,q}f(x) {}_ad_{p,q}x \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
& \int_a^b f(qx + (1-q)a) {}_aD_{p,q}g(x) {}_ad_{p,q}x \\
& = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b g(px + (1-p)a) {}_aD_{p,q}f(x) {}_ad_{p,q}x, \\
4. \quad & {}_aD_{p,q} \int_a^x f(t) {}_ad_{p,q}t = f(x), \\
5. \quad & \int_a^x {}_aD_{p,q}f(t) {}_ad_{p,q}t = f(x) - f(a), \\
6. \quad & {}_aD_{p,q}(x-a)^n = [n]_{p,q}(x-a)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Teorem 1.24 ((p, q)-Hölder Eşitsizliği). $0 < q < p \leq 1$ ve $s > 1$ olmak üzere $\frac{1}{s} + \frac{1}{r} = 1$ için

$$\int_a^b |f(t)g(t)| {}_ad_{p,q}t \leq \left(\int_a^b |f(t)|^s {}_ad_{p,q}t \right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_a^b |g(t)|^r {}_ad_{p,q}t \right)^{\frac{1}{r}}$$

eşitsizliği sağlanır [32].

2014’de Tariboon [40, Theorem 3.2] q -kalkülüs için Teorem 1.25’de verilen Hermite-Hadamard eşitsizliğini ispatlamıştır. Fakat, bu ispatın doğru olmadığına dair aksine örnek gösterilecektir ve q -Hermite-Hadamard eşitsizliği için doğru teorem bir sonraki bölümde ispatlanacaktır.

Teorem 1.25. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $[a, b]$ aralığında konveks sürekli bir fonksiyon ve $0 < q < 1$ olsun. O zaman aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) {}_ad_{q,t} \leq \frac{qf(a) + f(b)}{1+q}. \quad (1.37)$$

Kunt ve İşcan, Eşitsizlik (1.37)’nin sol tarafının yanlış olduğunu aşağıdaki örneklerle ispatlamışlardır [44]-[46]:

Örnek 1.26. $[a, b] = [0, 1]$ olsun. $f(t) = 1 - t$ fonksiyonu $[0, 1]$ aralığında konvektir. Bu yüzden f fonksiyonu Theorem 1.25’deki şartları sağlar. O zaman, Eşitsizlik (1.37)’dan her $q \in (0, 1)$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanmalıdır:

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{0+1}{2}\right) & \leq \frac{1}{1-0} \int_0^1 f(t) {}_0d_{q,t} \\
1 - \frac{1}{2} & \leq (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n (1-q^n)
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \leq (1-q) \left(\frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q^2} \right)$$

öyle ki

$$\frac{1}{2} \leq \frac{q}{1+q} \quad (1.38)$$

elde edilir. Eğer Eşitsizlik (1.38)'de $q = \frac{1}{2}$ seçilirse aşağıdaki çelişki elde edilir

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{3}.$$

Bu, Eşitsizlik (1.37)'nin sol tarafının doğru olmadığı anlamına gelmektedir. Bundan dolayı, ikinci bölümde q -Hermite-Hadamard eşitsizliğinin doğrusu, bazı yeni q -Hermite-Hadamard eşitsizlikleri ve genelleştirilmiş q -Hermite-Hadamard eşitsizlikleri ispatlanacaktır.

Aynı şekilde 2016'da Tunç, (p, q) - Hermite-Hadamard eşitsizliğini aşağıdaki teoremle elde etmiştir [31]:

Teorem 1.27. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $[a, b]$ aralığında konveks sürekli bir fonksiyon ve $0 < q < p \leq 1$ olsun. O zaman aşağıdaki eşitsizlik sağlanır [31, Theorem 7]:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) {}_a d_{p,q} x \leq \frac{(p+q-1)f(a) + f(b)}{p+q}. \quad (1.39)$$

Latif, Eşitsizlik (1.39)'ün sol tarafının doğru olmadığını aşağıdaki örnekle göstermiştir [47]:

Örnek 1.28. $[a, b] = [0, 1]$ olsun. $f(t) = 1 - t$ fonksiyonu $[0, 1]$ aralığında konvektir. Bu yüzden f fonksiyonu Teorem 1.27'deki şartları sağlar. O zaman, Eşitsizlik (1.39)'den her $q \in (0, 1)$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanmalıdır:

$$f\left(\frac{0+1}{2}\right) \leq \frac{1}{1-0} \int_0^1 f(t) {}_0 d_{p,q} t$$

$$1 - \frac{1}{2} \leq (p-q)(1-0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{p^{n+1}} \left(1 - \frac{q^n}{p^{n+1}}\right)$$

$$\frac{1}{2} \leq (p-q) \left(\frac{1}{p} \frac{1}{1-\frac{q}{p}} - \frac{1}{p^2} \frac{1}{1-\frac{q^2}{p^2}} \right)$$

$$\frac{1}{2} \leq (p-q) \left(\frac{1}{p-q} - \frac{1}{p^2-q^2} \right)$$

öyle ki

$$\frac{1}{2} \leq \frac{p+q-1}{p+q} \quad (1.40)$$

elde edilir. Eğer, Eşitsizlik (1.40)'de $p = 1$, $q = \frac{1}{2}$ seçilirse aşağıdaki çelişki elde edilir

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{3}.$$

Bu, Eşitsizlik (1.39)'ün sol tarafının doğru olmadığı anlamına gelmektedir. Bundan dolayı, üçüncü bölümde (p, q) -Hermite-Hadamard eşitsizliğinin doğrusu, bazı yeni (p, q) -Hermite-Hadamard eşitsizlikleri ve genelleştirilmiş (p, q) -Hermite-Hadamard eşitsizliği ispatlanacaktır.

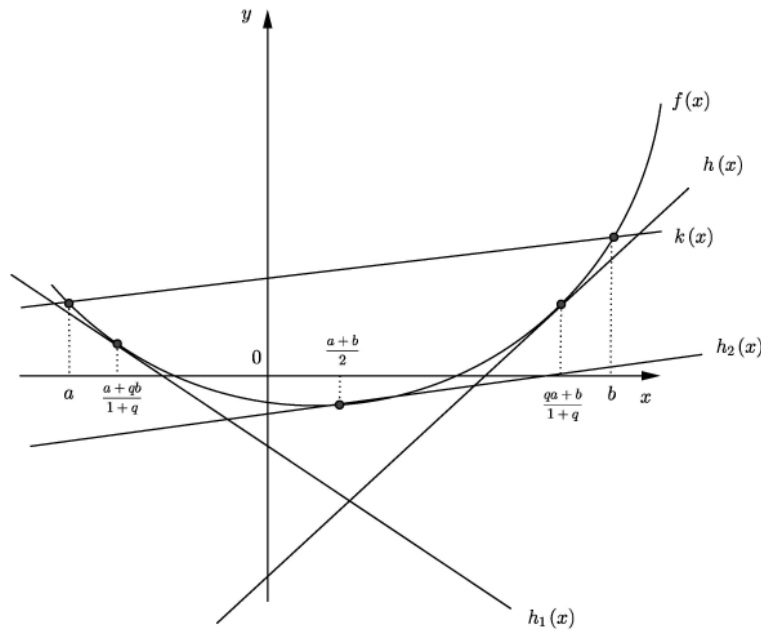
Bu ön bilgiler hatırlandıktan sonra bu çalışmada, q -Hermite-Hadamard eşitsizliği ve bu eşitsizliğin çeşitleri ispatlanıp konveks ve quasi konveks fonksiyonlar için q -orta nokta tipli eşitsizlikleri için quantum tahminleri elde edilecektir. Benzer biçimde, (p, q) -kalkülüs için de benzer sonuçlar ispatlanacaktır. Bir sonraki bölümde, quantum integrallere farklı bir bakış açısı ile yeni bir quantum integral tanımı verilip $\bar{q}$ -integral ile temsil edilen bu yeni tanımının özellikleri ispatlanacaktır. Ayrıca bu yeni $\bar{q}$ -integral yardımı ile $\bar{q}$ -Hermite-Hadamard integral eşitsizlikleri elde edilecektir. Ardından $\bar{q}$ -integral için Young, Hölder ve Minkowski tipli eşitsizlikler, Ostrowski tipli eşitsizlikler için quantum tahminleri hesaplanacaktır. Son bölümde ise $\bar{q}$ -integral kullanılarak $\bar{q}$ -Gama-Beta fonksiyonları yeniden tanımlanıp bu fonksiyonların özellikleri, sonuçları ve aralarındaki ilişki incelenecektir.

2. q -HERMİTE-HADAMARD EŞİTSİZLİKLERİ İLE KONVEKS VE QUASI-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN ORTA NOKTA TİPLİ EŞİTSİZLİKLERİN QUANTUM TAHMİNLERİ

Bu bölüm iki alt bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, q -Hermite-Hadamard eşitsizliği ve bu eşitsizliğin çeşitleri ispatlanacaktır. İkinci bölümde ise q -orta nokta tipli integral eşitsizlikleri elde edilecektir. Bu bölümde elde edilen sonuçlar çalışma [48] ile yayınlanmıştır.

2.1. q -HERMİTE-HADAMARD EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümde, q -Hermite-Hadamard eşitsizliğini ispatlamak için $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinden yararlanılacaktır.



Şekil 2.1. $f(x)$, $k(x)$, $h(x)$, $h_1(x)$, $h_2(x)$ fonksiyonlarının grafikleri.

Teorem 2.1. (q -Hermite-Hadamard Eşitsizliği) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) aralığında diferan-

siyellenebilir konveks bir fonksiyon ve $0 < q < 1$ olsun. O zaman,

$$f\left(\frac{qa+b}{1+q}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) {}_a d_q x \leq \frac{qf(a) + f(b)}{1+q} \quad (2.1)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Şekil 2.1'deki $h(x)$ ve konveks $f(x)$ fonksiyonlarının grafikleri göz önüne alınırsa, (a, b) aralığında f diferansiyellenebilir olduğundan $\frac{qa+b}{1+q} \in (a, b)$ noktasında fonksiyonun teğet doğrusu vardır. Bu teğet doğrusu $h(x) = f\left(\frac{qa+b}{1+q}\right) + f'\left(\frac{qa+b}{1+q}\right)\left(x - \frac{qa+b}{1+q}\right)$ olarak formülize edilebilir. Şekil 2.1'den $[a, b]$ aralığında $\forall x \in [a, b]$ için f konveks olduğundan,

$$h(x) = f\left(\frac{qa+b}{1+q}\right) + f'\left(\frac{qa+b}{1+q}\right)\left(x - \frac{qa+b}{1+q}\right) \leq f(x) \quad (2.2)$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada, Eşitsizlik (2.2)'nin $[a, b]$ aralığında q -integrali alınır,

$$\begin{aligned} & \int_a^b h(x) {}_a d_q x \\ &= \int_a^b \left[f\left(\frac{qa+b}{1+q}\right) + f'\left(\frac{qa+b}{1+q}\right)\left(x - \frac{qa+b}{1+q}\right) \right] {}_a d_q x \\ &= (b-a) f\left(\frac{qa+b}{1+q}\right) + f'\left(\frac{qa+b}{1+q}\right) \left(\int_a^b x {}_a d_q x - (b-a) \frac{qa+b}{1+q} \right) \\ &= (b-a) f\left(\frac{qa+b}{1+q}\right) + f'\left(\frac{qa+b}{1+q}\right) \\ & \quad \times \left((1-q)(b-a) \sum_{n=0}^{\infty} q^n ((1-q^n)a + q^n b) - (b-a) \frac{qa+b}{1+q} \right) \\ &= (b-a) f\left(\frac{qa+b}{1+q}\right) - (b-a) \frac{qa+b}{1+q} f'\left(\frac{qa+b}{1+q}\right) \\ & \quad + (1-q)(b-a) \left[\left(\frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q^2} \right) a + \frac{1}{1-q^2} b \right] f'\left(\frac{qa+b}{1+q}\right) \\ &= (b-a) f\left(\frac{qa+b}{1+q}\right) \\ & \quad + f'\left(\frac{qa+b}{1+q}\right) \left((b-a) \frac{qa+b}{1+q} - (b-a) \frac{qa+b}{1+q} \right) \\ &= (b-a) f\left(\frac{qa+b}{1+q}\right) \leq \int_a^b f(x) {}_a d_q x \end{aligned} \quad (2.3)$$

eşitsizliği elde edilir. Öte yandan, $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarından geçen doğrunun denklemi $k(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ olarak yazılabilir. Şekil 2.1'den $[a, b]$ aralığında f konveks olduğundan her $x \in [a, b]$ için

$$f(x) \leq k(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \quad (2.4)$$

eşitsizliği yazılabilir. Böylece, Eşitsizlik (2.4)'nin $[a, b]$ aralığında q -integrali alınır,

$$\begin{aligned} & \int_a^b k(x) {}_a d_q x \\ &= \int_a^b \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \right) {}_a d_q x \\ &= (b-a)f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \int_a^b (x-a) {}_a d_q x \\ &= (b-a)f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \left(\int_a^b x {}_a d_q x - a(b-a) \right) \\ &= (b-a)f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \\ & \quad \times \left((1-q)(b-a) \sum_{n=0}^{\infty} q^n ((1-q^n)a + q^n b) - a(b-a) \right) \\ &= (b-a)f(a) - a(b-a) \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \\ & \quad + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} (1-q)(b-a) \left[\left(\frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q^2} \right) a + \frac{1}{1-q^2} b \right] \\ &= (b-a)f(a) + (f(b)-f(a)) \left(\frac{qa+b}{1+q} - a \right) \\ &= (b-a)f(a) + (b-a) \frac{f(b)-f(a)}{1+q} \\ &= (b-a) \frac{qf(a)+f(b)}{1+q} \geq \int_a^b f(x) {}_a d_q x \end{aligned} \quad (2.5)$$

elde edilir. Buradan da Eşitsizlik (2.3) ve Eşitsizlik (2.5)'in kombinasyonu Eşitsizlik (2.1)'i verir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Not 2.2. Teorem 2.1' de $q \rightarrow 1^-$ seçilirse konveks fonksiyonlar için klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir.

Teorem 2.3. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) aralığında diferansiyellenebilir konveks bir fonksiyon ve $0 < q < 1$ olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{a+qb}{1+q}\right) + \frac{(1-q)(b-a)}{1+q} f'\left(\frac{a+qb}{1+q}\right) \\ & \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) {}_a d_q x \leq \frac{qf(a) + f(b)}{1+q} \end{aligned} \quad (2.6)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Şekil 2.1'deki $h_1(x)$ ve konveks $f(x)$ fonksiyonlarının grafikleri göz önüne alınsın. (a, b) aralığında f diferansiyellenebilir olduğundan $\frac{a+qb}{1+q} \in (a, b)$ noktasında fonksiyonun teğet doğrusu vardır. Bu teğet doğrusu, $h_1(x) = f\left(\frac{a+qb}{1+q}\right) + f'\left(\frac{a+qb}{1+q}\right)\left(x - \frac{a+qb}{1+q}\right)$ olarak formülize edilebilir. Şekil 2.1'den $[a, b]$ aralığında $\forall x \in [a, b]$ için f konveks olduğundan

$$h_1(x) = f\left(\frac{a+qb}{1+q}\right) + f'\left(\frac{a+qb}{1+q}\right)\left(x - \frac{a+qb}{1+q}\right) \leq f(x) \quad (2.7)$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan da Eşitsizlik (2.7)'nin $[a, b]$ aralığında q -integrali alınır,

$$\begin{aligned} & \int_a^b h_1(x) {}_a d_q x \\ &= \int_a^b \left[f\left(\frac{a+qb}{1+q}\right) + f'\left(\frac{a+qb}{1+q}\right)\left(x - \frac{a+qb}{1+q}\right) \right] {}_a d_q x \\ &= (b-a) f\left(\frac{a+qb}{1+q}\right) + f'\left(\frac{a+qb}{1+q}\right) \\ & \quad \times \left(\int_a^b x {}_a d_q x - (b-a) \frac{a+qb}{1+q} \right) \\ &= (b-a) f\left(\frac{a+qb}{1+q}\right) + f'\left(\frac{a+qb}{1+q}\right) \\ & \quad \times \left((1-q)(b-a) \sum_{n=0}^{\infty} q^n ((1-q^n)a + q^n b) - (b-a) \frac{a+qb}{1+q} \right) \\ &= (b-a) f\left(\frac{a+qb}{1+q}\right) - (b-a) \frac{a+qb}{1+q} f'\left(\frac{a+qb}{1+q}\right) \\ & \quad + (1-q)(b-a) \left[\left(\frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q^2} \right) a + \frac{1}{1-q^2} b \right] f'\left(\frac{a+qb}{1+q}\right) \\ &= (b-a) f\left(\frac{a+qb}{1+q}\right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}
& +f' \left(\frac{a+qb}{1+q} \right) \left((b-a) \frac{qa+b}{1+q} - (b-a) \frac{a+qb}{1+q} \right) \\
& = (b-a) f \left(\frac{a+qb}{1+q} \right) + \frac{(1-q)(b-a)^2}{1+q} f' \left(\frac{a+qb}{1+q} \right) \\
& \leq \int_a^b f(x) {}_a d_q x
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Son olarak, Eşitsizlik (2.5) ve Eşitsizlik (2.8)'in kombinasyonu Eşitsizlik (2.6)'yı verir. Bu da ispatı tamamlar. $\square$

Teorem 2.4. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) aralığında diferansiyellenebilir konveks bir fonksiyon ve $0 < q < 1$ olsun. O zaman,

$$\begin{aligned}
& f \left(\frac{a+b}{2} \right) + \frac{(1-q)(b-a)}{2(1+q)} f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \\
& \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) {}_a d_q x \leq \frac{qf(a) + f(b)}{1+q}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Şekil 2.1'deki $h_2(x)$ ve konveks $f(x)$ fonksiyonlarının grafikleri göz önüne alınsın. (a, b) aralığında f diferansiyellenebilir olduğundan $\frac{a+b}{2} \in (a, b)$ noktasında fonksiyonun teğet doğrusu vardır. Bu teğet doğrusu, $h_2(x) = f \left(\frac{a+b}{2} \right) + f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \left(x - \frac{a+b}{2} \right)$ olarak formülize edilebilir. Şekil 2.1'den $[a, b]$ aralığında $\forall x \in [a, b]$ için f konveks olduğundan,

$$h_2(x) = f \left(\frac{a+b}{2} \right) + f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \left(x - \frac{a+b}{2} \right) \leq f(x) \tag{2.10}$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada, Eşitsizlik (2.10)'un $[a, b]$ aralığında q -integrali alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \int_a^b h_2(x) {}_a d_q x \\
& = \int_a^b \left[f \left(\frac{a+b}{2} \right) + f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \left(x - \frac{a+b}{2} \right) \right] {}_a d_q x \\
& = (b-a) f \left(\frac{a+b}{2} \right) + f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \\
& \quad \times \left(\int_a^b x {}_a d_q x - (b-a) \frac{a+b}{2} \right)
\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}
&= (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) - (b-a)\frac{a+b}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&\quad + (1-q)(b-a)\sum_{n=0}^{\infty} q^n((1-q^n)a + q^n b)f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&= (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) - (b-a)\frac{a+b}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&\quad + (1-q)(b-a) \\
&\quad \times \left[\left(\frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q^2}\right)a + \frac{1}{1-q^2}b\right]f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&= (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&\quad \times \left((b-a)\frac{qa+b}{1+q} - (b-a)\frac{a+b}{2}\right) \\
&= (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(1-q)(b-a)^2}{2(1+q)}f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&\leq \int_a^b f(x) {}_a d_q x
\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Dolayısıyla, Eşitsizlik (2.5) ve Eşitsizlik (2.11)'in kombinasyonu Eşitsizlik (2.9)'u verir. Bu da ispatı tamamlar. $\square$

Teorem 2.5. (Genelleştirilmiş q -Hermite-Hadamard Eşitsizliği) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) aralığında diferansiyellenebilir konveks bir fonksiyon ve $0 < q < 1$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned}
I_1 &= f\left(\frac{qa+b}{1+q}\right), \\
I_2 &= f\left(\frac{a+qb}{1+q}\right) + \frac{(1-q)(b-a)}{1+q}f'\left(\frac{a+qb}{1+q}\right), \\
I_3 &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(1-q)(b-a)}{2(1+q)}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)
\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\max\{I_1, I_2, I_3\} \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) {}_a d_q x \leq \frac{qf(a) + f(b)}{1+q} \quad (2.12)$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. Eşitsizlik (2.1), Eşitsizlik (2.6) ve Eşitsizlik (2.9)'un sol taraflarının maksimum değeri Eşitsizlik (2.12)'yi verir ve ispatı tamamlar. $\square$

2.2. q -KALKÜLÜS İÇİN ORTA NOKTA TIPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde, orta nokta eşitsizliğinin q -analizi için bir eşitlik ispatlanacaktır. Bu eşitlik kullanılarak q -diferansiyellenebilir konveks ve q -diferansiyellenebilir quasi-konveks fonksiyonlar için q -orta nokta tipli integral eşitsizlikleri elde edilecektir. Bu bölüm için aşağıdaki önemli Lemma kullanılacaktır:

Lemma 2.6. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) aralığında q -diferansiyellenebilen konveks bir fonksiyon olsun. Eğer $[a, b]$ aralığında ${}_aD_q f$ sürekli ve integrallenebilir ise

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{qa+b}{1+q}\right) - \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) {}_a d_q x \\ &= q(b-a) \int_0^{\frac{1}{1+q}} t {}_a D_q f(tb + (1-t)a) {}_0 d_q t \\ &+ q(b-a) \int_{\frac{1}{1+q}}^1 \left(t - \frac{1}{q}\right) {}_a D_q f(tb + (1-t)a) {}_0 d_q t \end{aligned} \quad (2.13)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Denklem (1.29)'deki q -türev tanımı kullanılarak,

$$\begin{aligned} & {}_a D_q f(tb + (1-t)a) \\ &= \frac{f(tb + (1-t)a) - f(q[tb + (1-t)a] + (1-q)a)}{(1-q)[tb + (1-t)a - a]} \\ &= \frac{f(tb + (1-t)a) - f(qtb + (1-qt)a)}{t(1-q)(b-a)} \end{aligned} \quad (2.14)$$

eşitliği elde edilir. Denklem (1.30) ve Denklem (2.14) yardımıyla,

$$\begin{aligned} & q(b-a) \int_0^{\frac{1}{1+q}} t {}_a D_q f(tb + (1-t)a) {}_0 d_q t \\ &+ q(b-a) \int_{\frac{1}{1+q}}^1 \left(t - \frac{1}{q}\right) {}_a D_q f(tb + (1-t)a) {}_0 d_q t \\ &= q(b-a) \int_0^{\frac{1}{1+q}} t {}_a D_q f(tb + (1-t)a) {}_0 d_q t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + q(b-a) \int_{\frac{1}{1+q}}^1 \left(t - \frac{1}{q}\right) {}_aD_q f(tb + (1-t)a) {}_0d_q t \\
& - \frac{q(b-a)}{q} \int_0^{\frac{1}{1+q}} {}_aD_q f(tb + (1-t)a) {}_0d_q t \\
& + \frac{q(b-a)}{q} \int_0^{\frac{1}{1+q}} {}_aD_q f(tb + (1-t)a) {}_0d_q t \\
& = q(b-a) \int_0^1 t {}_aD_q f(tb + (1-t)a) {}_0d_q t \\
& - \frac{q(b-a)}{q} \int_0^1 {}_aD_q f(tb + (1-t)a) {}_0d_q t \\
& + \frac{q(b-a)}{q} \int_0^{\frac{1}{1+q}} {}_aD_q f(tb + (1-t)a) {}_0d_q t \\
& = q(b-a) \int_0^1 t \frac{f(tb + (1-t)a) - f(qtb + (1-qt)a)}{t(1-q)(b-a)} {}_0d_q t \\
& - \frac{q(b-a)}{q} \int_0^1 \frac{f(tb + (1-t)a) - f(qtb + (1-qt)a)}{t(1-q)(b-a)} {}_0d_q t \\
& + \frac{q(b-a)}{q} \int_0^{\frac{1}{1+q}} \frac{f(tb + (1-t)a) - f(qtb + (1-qt)a)}{t(1-q)(b-a)} {}_0d_q t \\
& = \frac{q}{1-q} \int_0^1 f(tb + (1-t)a) - f(qtb + (1-qt)a) {}_0d_q t \\
& - \frac{1}{1-q} \int_0^1 \left(\frac{f(tb + (1-t)a)}{t} - \frac{f(qtb + (1-qt)a)}{t} \right) {}_0d_q t \\
& + \frac{1}{1-q} \int_0^{\frac{1}{1+q}} \left(\frac{f(tb + (1-t)a)}{t} - \frac{f(qtb + (1-qt)a)}{t} \right) {}_0d_q t \\
& = q \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n b + (1-q^n)a) - q \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^{n+1} b + (1-q^{n+1})a) \\
& - \sum_{n=0}^{\infty} f(q^n b + (1-q^n)a) + \sum_{n=0}^{\infty} f(q^{n+1} b + (1-q^{n+1})a) \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} f\left(\frac{q^n}{1+q} b + \left(1 - \frac{q^n}{1+q}\right) a\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{n=0}^{\infty} f \left(\frac{q^{n+1}}{1+q} b + \left(1 - \frac{q^{n+1}}{1+q} \right) a \right) \\
& = q \left(\frac{1}{q} f(b) - \left(\frac{1}{q} - 1 \right) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n b + (1 - q^n) a) \right) \\
& - (f(b) - f(a)) + \left(f \left(\frac{qa+b}{1+q} \right) - f(a) \right) \\
& = f \left(\frac{qa+b}{1+q} \right) - \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) {}_a d_q x
\end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Not 2.7. Lemma 2.6'de $q \rightarrow 1^-$ limiti alınırsa Kirmaci'nin 2004'de elde ettiği Eşitlik (2.15)'e ulaşılır [49]. Öyle ki,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt - f \left(\frac{a+b}{2} \right) \\
& = b-a \left[\int_0^{\frac{1}{2}} t f'(ta + (1-t)b) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (t-1) f'(ta + (1-t)b) dt \right].
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Şimdi, q -türevin mutlak değerinin konveksliği ve quasi-konveksliği kullanılarak q -orta nokta tipli integral eşitsizlikler için bazı quantum tahminleri ispatlanacaktır.

Teorem 2.8. $0 < q < 1$ olmak üzere $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) aralığında q -diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $[a, b]$ aralığında ${}_a D_q f$ sürekli ve integrallenebilir olsun. Eğer $|{}_a D_q f|$ konveks ise

$$\begin{aligned}
& \left| f \left(\frac{qa+b}{1+q} \right) - \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) {}_a d_q x \right| \\
& \leq q(b-a) |{}_a D_q f(b)| \frac{3}{(1+q)^3 (1+q+q^2)} \\
& + q(b-a) |{}_a D_q f(a)| \frac{-1+2q+2q^2}{(1+q)^3 (1+q+q^2)}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

q -orta nokta tipli integral eşitsizliği sağlanır.

İspat. Denklem (2.13)'ün her iki tarafının mutlak değeri alınsın ve $[a, b]$ üzerinde $|{}_a D_q f|$

nin konveksliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| f\left(\frac{qa+b}{1+q}\right) - \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) {}_a d_q x \right| \tag{2.17} \\
& \leq q(b-a) \int_0^{\frac{1}{1+q}} t \left| {}_a D_q f(tb + (1-t)a) \right| {}_0 d_q t \\
& \quad + q(b-a) \int_{\frac{1}{1+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t\right) \left| {}_a D_q f(tb + (1-t)a) \right| {}_0 d_q t \\
& \leq q(b-a) \int_0^{\frac{1}{1+q}} t \left[t \left| {}_a D_q f(b) \right| + (1-t) \left| {}_a D_q f(a) \right| \right] {}_0 d_q t \\
& \quad + q(b-a) \int_{\frac{1}{1+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t\right) \left[t \left| {}_a D_q f(b) \right| + (1-t) \left| {}_a D_q f(a) \right| \right] {}_0 d_q t \\
& = q(b-a) \left| {}_a D_q f(b) \right| \int_0^{\frac{1}{1+q}} t^2 {}_0 d_q t \\
& \quad + q(b-a) \left| {}_a D_q f(a) \right| \int_0^{\frac{1}{1+q}} t(1-t) {}_0 d_q t \\
& \quad + q(b-a) \left| {}_a D_q f(b) \right| \int_{\frac{1}{1+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t\right) t {}_0 d_q t \\
& \quad + q(b-a) \left| {}_a D_q f(a) \right| \int_{\frac{1}{1+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t\right) (1-t) {}_0 d_q t \\
& = q(b-a) \left| {}_a D_q f(b) \right| \left[\int_0^{\frac{1}{1+q}} t^2 {}_0 d_q t + \int_{\frac{1}{1+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t\right) t {}_0 d_q t \right] \\
& \quad + q(b-a) \left| {}_a D_q f(a) \right| \left[\int_0^{\frac{1}{1+q}} t(1-t) {}_0 d_q t + \int_{\frac{1}{1+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t\right) (1-t) {}_0 d_q t \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi, Eşitsizlik (2.17)'deki q -integraller hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{1}{1+q}} t^2 {}_0d_q t \\
&= (1-q) \frac{1}{1+q} \sum_{n=0}^{\infty} q^n \left(\frac{q^n}{1+q} \right)^2 \\
&= (1-q) \frac{1}{(1+q)^3} \frac{1}{1-q^3} = \frac{1}{(1+q)^3 (1+q+q^2)},
\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{1}{1+q}} t(1-t) {}_0d_q t \\
&= \int_0^{\frac{1}{1+q}} t {}_0d_q t - \int_0^{\frac{1}{1+q}} t^2 {}_0d_q t \\
&= (1-q) \frac{1}{1+q} \sum_{n=0}^{\infty} q^n \left(\frac{q^n}{1+q} \right) - \frac{1}{(1+q)^3 (1+q+q^2)} \\
&= \frac{1}{(1+q)^3} - \frac{1}{(1+q)^3 (1+q+q^2)} = \frac{q}{(1+q)^2 (1+q+q^2)},
\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{1}{1+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t \right) t {}_0d_q t \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{q} - t \right) t {}_0d_q t - \int_0^{\frac{1}{1+q}} \left(\frac{1}{q} - t \right) t {}_0d_q t \\
&= \frac{1}{q} \int_0^1 t {}_0d_q t - \int_0^1 t^2 {}_0d_q t - \frac{1}{q} \int_0^{\frac{1}{1+q}} t {}_0d_q t + \int_0^{\frac{1}{1+q}} t^2 {}_0d_q t \\
&= \frac{1-q}{q} \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} - (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} q^{3n} - \frac{1-q}{q(1+q)^2} \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} \\
&\quad + \frac{1-q}{(1+q)^3} \sum_{n=0}^{\infty} q^{3n} \\
&= \frac{1}{q(1+q)} - \frac{1}{1+q+q^2} - \frac{1}{q(1+q)^3} + \frac{1}{(1+q)^3 (1+q+q^2)} \\
&= \frac{2}{(1+q)^3 (1+q+q^2)}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{1}{1+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t \right) (1-t) {}_0d_q t \quad (2.21) \\
&= \int_{\frac{1}{1+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t \right) {}_0d_q t - \int_{\frac{1}{1+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t \right) t {}_0d_q t \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{q} - t \right) {}_0d_q t - \int_0^{\frac{1}{1+q}} \left(\frac{1}{q} - t \right) {}_0d_q t - \frac{2}{(1+q)^3 (1+q+q^2)} \\
&= \frac{-1+q+q^2}{(1+q)^3 (1+q+q^2)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, Denklem (2.17)-Denklem (2.21) birlikte Eşitsizlik (2.16)'yı verir ki bu da ispatı tamamlar. $\square$

Sonuç 2.9. Teorem 2.8' de $q \rightarrow 1^-$ seçilirse konveks fonksiyonlar için

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{(b-a) [|f'(a)| + |f'(b)|]}{8} \quad (2.22)$$

orta nokta tipli integral eşitsizliği elde edilir.

Not 2.10. Eşitsizlik (2.22), [49, Theorem 2.2]'yi verir.

Teorem 2.11. $0 < q < 1$ olmak üzere $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) aralığında q -diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $[a, b]$ aralığında ${}_aD_q f$ sürekli ve integrallenebilir olsun. $r \geq 1$ için eğer $|{}_aD_q f|^r$ konveks ise

$$\begin{aligned}
& \left| f\left(\frac{qa+b}{1+q}\right) - \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) {}_ad_q x \right| \quad (2.23) \\
& \leq \frac{q(b-a)}{(1+q)^{3-\frac{3}{r}}} \left(\frac{|{}_aD_q f(b)|^r}{(1+q)^3 (1+q+q^2)} + \frac{q |{}_aD_q f(a)|^r}{(1+q)^2 (1+q+q^2)} \right)^{\frac{1}{r}} \\
& + \frac{q(b-a)}{(1+q)^{3-\frac{3}{r}}} \left(\frac{2 |{}_aD_q f(b)|^r}{(1+q)^3 (1+q+q^2)} + \frac{(-1+q+q^2) |{}_aD_q f(a)|^r}{(1+q)^3 (1+q+q^2)} \right)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned}$$

q -orta nokta tipli integral eşitsizliği sağlanır.

İspat. Denklem (2.13)'ün her iki tarafının mutlak değerine kuvvet ortalama eşitsizliği uygulansın ve $r \geq 1$ için $[a, b]$ üzerinde $|{}_aD_q f|^r$ nin konveksliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| f\left(\frac{qa+b}{1+q}\right) - \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) {}_0d_q x \right| \\
& \leq q(b-a) \int_0^{\frac{1}{1+q}} t |{}_aD_q f(tb + (1-t)a)| {}_0d_q t \\
& \quad + q(b-a) \int_{\frac{1}{1+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t\right) |{}_aD_q f(tb + (1-t)a)| {}_0d_q t \\
& \leq q(b-a) \left(\int_0^{\frac{1}{1+q}} t {}_0d_q t \right)^{1-\frac{1}{r}} \\
& \quad \times \left(\int_0^{\frac{1}{1+q}} t |{}_aD_q f(tb + (1-t)a)|^r {}_0d_q t \right)^{\frac{1}{r}} \\
& \quad + q(b-a) \left(\int_{\frac{1}{1+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t\right) {}_0d_q t \right)^{1-\frac{1}{r}} \\
& \quad \times \left(\int_{\frac{1}{1+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t\right) |{}_aD_q f(tb + (1-t)a)|^r {}_0d_q t \right)^{\frac{1}{r}} \\
& \leq \frac{q(b-a)}{(1+q)^{3-\frac{3}{r}}} \\
& \quad \times \left(\int_0^{\frac{1}{1+q}} t \left[t |{}_aD_q f(b)|^r + (1-t) |{}_aD_q f(a)|^r \right] {}_0d_q t \right)^{\frac{1}{r}} \\
& \quad + \frac{q(b-a)}{(1+q)^{3-\frac{3}{r}}} \\
& \quad \times \left(\int_{\frac{1}{1+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t\right) \left[t |{}_aD_q f(b)|^r + (1-t) |{}_aD_q f(a)|^r \right] {}_0d_q t \right)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{q(b-a)}{(1+q)^{3-\frac{3}{r}}} \left(|{}_aD_q f(b)|^r \int_0^{\frac{1}{1+q}} t^2 {}_0d_q t \right. \\
&\quad \left. + |{}_aD_q f(a)|^r \int_0^{\frac{1}{1+q}} t(1-t) {}_0d_q t \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\quad + \frac{q(b-a)}{(1+q)^{3-\frac{3}{r}}} \left(|{}_aD_q f(b)|^r \int_{\frac{1}{1+q}}^1 \left(\frac{1}{q}-t\right) t {}_0d_q t \right. \\
&\quad \left. + |{}_aD_q f(a)|^r \int_{\frac{1}{1+q}}^1 \left(\frac{1}{q}-t\right) (1-t) {}_0d_q t \right)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Dolayısıyla, Eşitsizlik (2.24)'de Denklem (2.18) ve Denklem (2.21) birlikte istenen Eşitsizlik (2.23)'ü verir. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

Sonuç 2.12. Teorem 2.11'de $q \rightarrow 1^-$ limiti anılırsa konveks fonksiyonlar için

$$\begin{aligned}
&\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx \right| \\
&\leq \frac{(b-a)}{2^{3-\frac{3}{r}}} \left(|f'(b)|^r \frac{1}{24} + |f'(a)|^r \frac{1}{12} \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\quad + \frac{(b-a)}{2^{3-\frac{3}{r}}} \left(|f'(b)|^r \frac{1}{12} + |f'(a)|^r \frac{1}{24} \right)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

orta nokta tipli integral eşitsizliği elde edilir.

Teorem 2.13. $0 < q < 1$ olmak üzere $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) aralığında q -diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $[a, b]$ aralığında ${}_aD_q f$ sürekli ve integrallenebilir olsun. $r^{-1} + s^{-1} = 1$ olmak üzere $r > 1$ için eğer $|{}_aD_q f|^r$ konveks ise

$$\begin{aligned}
&\left| f\left(\frac{qa+b}{1+q}\right) - \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) {}_ad_q x \right| \\
&\leq q(b-a) \left(\frac{1}{(1+q)^{s+1}} \frac{1-q}{1-q^{s+1}} \right)^{\frac{1}{s}}
\end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\frac{|{}_aD_q f(b)|^r}{(1+q)^3} + \frac{(2q+q^2) |{}_aD_q f(a)|^r}{(1+q)^3} \right)^{\frac{1}{r}} \\
& + q(b-a) \left(\int_{\frac{1}{1+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t \right)^s {}_0d_q t \right)^{\frac{1}{s}} \\
& \times \left(\frac{(2q+q^2) |{}_aD_q f(b)|^r}{(1+q)^3} + \frac{(-q+q^2+q^3) |{}_aD_q f(a)|^r}{(1+q)^3} \right)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned}$$

q -orta nokta tipli integral eşitsizliği sağlanır.

İspat. Denklem (2.13)'ün her iki tarafının mutlak değerine Hölder eşitsizliği uygulansın ve $r > 1$ için $[a, b]$ üzerinde $|{}_aD_q f|^r$ nin konveksliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| f\left(\frac{qa+b}{1+q}\right) - \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) {}_ad_q x \right| \\
& \leq q(b-a) \int_0^{\frac{1}{1+q}} t |{}_aD_q f(tb + (1-t)a)| {}_0d_q t \\
& \quad + q(b-a) \int_{\frac{1}{1+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t \right) |{}_aD_q f(tb + (1-t)a)| {}_0d_q t \\
& \leq q(b-a) \left(\int_0^{\frac{1}{1+q}} t^s {}_0d_q t \right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_0^{\frac{1}{1+q}} |{}_aD_q f(tb + (1-t)a)|^r {}_0d_q t \right)^{\frac{1}{r}} \\
& \quad + q(b-a) \left(\int_{\frac{1}{1+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t \right)^s {}_0d_q t \right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_{\frac{1}{1+q}}^1 |{}_aD_q f(tb + (1-t)a)|^r {}_0d_q t \right)^{\frac{1}{r}} \\
& \leq q(b-a) \left(\int_0^{\frac{1}{1+q}} t^s {}_0d_q t \right)^{\frac{1}{s}} \\
& \quad \times \left(\int_0^{\frac{1}{1+q}} [t |{}_aD_q f(b)|^r + (1-t) |{}_aD_q f(a)|^r] {}_0d_q t \right)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +q(b-a) \left(\int_{\frac{1}{1+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t \right)^s {}_0d_q t \right)^{\frac{1}{s}} \\
& \times \left(\int_{\frac{1}{1+q}}^1 \left[t |{}_aD_q f(b)|^r + (1-t) |{}_aD_q f(a)|^r \right] {}_0d_q t \right)^{\frac{1}{r}} \\
& = q(b-a) \left(\int_0^{\frac{1}{1+q}} t^s {}_0d_q t \right)^{\frac{1}{s}} \\
& \times \left(|{}_aD_q f(b)|^r \int_0^{\frac{1}{1+q}} t {}_0d_q t + |{}_aD_q f(a)|^r \int_0^{\frac{1}{1+q}} (1-t) {}_0d_q t \right)^{\frac{1}{r}} \\
& +q(b-a) \left(\int_{\frac{1}{1+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t \right)^s {}_0d_q t \right)^{\frac{1}{s}} \\
& \times \left(|{}_aD_q f(b)|^r \int_{\frac{1}{1+q}}^1 t {}_0d_q t + |{}_aD_q f(a)|^r \int_{\frac{1}{1+q}}^1 (1-t) {}_0d_q t \right)^{\frac{1}{r}} \\
& = q(b-a) \left(\frac{1}{(1+q)^{s+1}} \frac{1-q}{1-q^{s+1}} \right)^{\frac{1}{s}} \\
& \times \left(\frac{|{}_aD_q f(b)|^r}{(1+q)^3} + \frac{(2q+q^2) |{}_aD_q f(a)|^r}{(1+q)^3} \right)^{\frac{1}{r}} \\
& +q(b-a) \left(\int_{\frac{1}{1+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t \right)^s {}_0d_q t \right)^{\frac{1}{s}} \\
& \times \left(\frac{(2q+q^2) |{}_aD_q f(b)|^r}{(1+q)^3} + \frac{(-q+q^2+q^3) |{}_aD_q f(a)|^r}{(1+q)^3} \right)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 2.14. Teorem 2.13’de $q \rightarrow 1^-$ limiti alınırsa konveks fonksiyonlar için

$$\begin{aligned} & \left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx \right| \\ & \leq \frac{(b-a)}{16} \left(\frac{4}{s+1}\right)^{\frac{1}{s}} \left(|f'(b)|^r + 3 |f'(a)|^r \right)^{\frac{1}{r}} \\ & + \frac{(b-a)}{16} \left(\frac{4}{s+1}\right)^{\frac{1}{s}} \left(3 |f'(b)|^r + |f'(a)|^r \right)^{\frac{1}{r}} \end{aligned} \quad (2.27)$$

orta nokta tipli integral eşitsizliği elde edilir.

Not 2.15. Eşitsizlik (2.27), [49, Theorem 2.3]’ü verir.

Bu bölümün devamında, quasi-konveks fonksiyonlar için orta nokta tipli integral eşitsizlikleri için bazı quantumsal tahminler hesaplanacaktır.

Teorem 2.16. $0 < q < 1$ olmak üzere $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) aralığında q -diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $[a, b]$ aralığında ${}_aD_q f$ sürekli ve integrallenebilir olsun. Eğer $r \geq 1$ için $|{}_aD_q f|^r$ quasi-konveks ise Eşitsizlik (2.28) sağlanır:

$$\begin{aligned} & \left| f\left(\frac{qa+b}{1+q}\right) - \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) {}_a d_q x \right| \\ & \leq (b-a) \frac{2q}{(1+q)^3} \sup \left\{ |{}_aD_q f(a)|, |{}_aD_q f(b)| \right\}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

İspat. Denklem (2.13)’ün her iki tarafının mutlak değerine kuvvet ortalama eşitsizliği uygulansın ve $r > 1$ için $[a, b]$ üzerinde $|{}_aD_q f|^r$ nin quasi-konveksliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \left| f\left(\frac{qa+b}{1+q}\right) - \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) {}_a d_q x \right| \\ & \leq q(b-a) \int_0^{\frac{1}{1+q}} t |{}_aD_q f(tb + (1-t)a)| {}_0 d_q t \\ & + q(b-a) \int_{\frac{1}{1+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t\right) |{}_aD_q f(tb + (1-t)a)| {}_0 d_q t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq q(b-a) \left(\int_0^{\frac{1}{1+q}} t \, {}_0d_q t \right)^{1-\frac{1}{r}} \\
&\quad \times \left(\int_0^{\frac{1}{1+q}} t \, |{}_aD_q f(tb + (1-t)a)|^r \, {}_0d_q t \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\quad + q(b-a) \left(\int_{\frac{1}{1+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t \right) \, {}_0d_q t \right)^{1-\frac{1}{r}} \\
&\quad \times \left(\int_{\frac{1}{1+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t \right) |{}_aD_q f(tb + (1-t)a)|^r \, {}_0d_q t \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq q(b-a) \left(\int_0^{\frac{1}{1+q}} t \, {}_0d_q t \right)^{1-\frac{1}{r}} \\
&\quad \times \left(\int_0^{\frac{1}{1+q}} t \, [\sup \{ |{}_aD_q f(a)|^r, |{}_aD_q f(b)|^r \}] \, {}_0d_q t \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\quad + q(b-a) \left(\int_{\frac{1}{1+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t \right) \, {}_0d_q t \right)^{1-\frac{1}{r}} \\
&\quad \times \left(\int_{\frac{1}{1+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t \right) [\sup \{ |{}_aD_q f(a)|^r, |{}_aD_q f(b)|^r \}] \, {}_0d_q t \right)^{\frac{1}{r}} \\
&= q(b-a) [\sup \{ |{}_aD_q f(a)|^r, |{}_aD_q f(b)|^r \}]^{\frac{1}{r}} \\
&\quad \times \left[\int_0^{\frac{1}{1+q}} t \, {}_0d_q t + \int_{\frac{1}{1+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t \right) \, {}_0d_q t \right] \\
&= (b-a) \frac{2q}{(1+q)^3} \sup \{ |{}_aD_q f(a)|, |{}_aD_q f(b)| \}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bundan dolayı, Eşitsizlik (2.28) sağlanır ve ispat tamamlanmış olur.

□

Sonuç 2.17. Teorem 2.16’de $q \rightarrow 1^-$ alınırsa quasi-konveks fonksiyonlar için

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)}{4} \sup \{ |f'(a)|, |f'(b)| \} \quad (2.29)$$

orta nokta tipli integral eşitsizliği elde edilir.

Teorem 2.18. $0 < q < 1$ olmak üzere $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) aralığında q -diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $[a, b]$ aralığında ${}_aD_qf$ sürekli ve integrallenebilir olsun. $r^{-1} + s^{-1} = 1$ olmak üzere $r > 1$ için eğer $|{}_aD_qf|^r$ quasi-konveks ise

$$\begin{aligned} & \left| f\left(\frac{qa+b}{1+q}\right) - \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) {}_a d_q x \right| \\ & \leq q(b-a) \sup \{ |{}_aD_qf(a)|, |{}_aD_qf(b)| \} \\ & \quad \times \left[\left(\frac{1}{(1+q)^{s+1}} \frac{1-q}{1-q^{s+1}} \right)^{\frac{1}{s}} \left(\frac{1}{1+q} \right)^{\frac{1}{r}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_{\frac{1}{1+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t \right)^s {}_0 d_q t \right)^{\frac{1}{s}} \left(\frac{q}{1+q} \right)^{\frac{1}{r}} \right] \end{aligned} \quad (2.30)$$

q -orta nokta tipli integral eşitsizliği sağlanır.

İspat. Denklem (2.13)’ün her iki tarafının mutlak değerine q -Hölder eşitsizliği uygulansın ve $r > 1$ için $[a, b]$ üzerinde $|{}_aD_qf|^r$ nin quasi-konveksliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \left| f\left(\frac{qa+b}{1+q}\right) - \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) {}_a d_q x \right| \\ & \leq q(b-a) \int_0^{\frac{1}{1+q}} t |{}_aD_qf(tb + (1-t)a)| {}_0 d_q t \\ & \quad + q(b-a) \int_{\frac{1}{1+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t \right) |{}_aD_qf(tb + (1-t)a)| {}_0 d_q t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +q(b-a) \left(\int_0^{\frac{1}{1+q}} t^s \, {}_0d_q t \right)^{\frac{1}{s}} \\
& \times \left(\int_0^{\frac{1}{1+q}} |{}_aD_q f(tb + (1-t)a)|^r \, {}_0d_q t \right)^{\frac{1}{r}} \\
& +q(b-a) \left(\int_{\frac{1}{1+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t \right)^s \, {}_0d_q t \right)^{\frac{1}{s}} \\
& \times \left(\int_{\frac{1}{1+q}}^1 |{}_aD_q f(tb + (1-t)a)|^r \, {}_0d_q t \right)^{\frac{1}{r}} \\
& \leq q(b-a) \left(\frac{1}{(1+q)^{s+1}} \frac{1-q}{1-q^{s+1}} \right)^{\frac{1}{s}} \\
& \times \left(\int_0^{\frac{1}{1+q}} \left[\sup \left\{ |{}_aD_q f(a)|^r, |{}_aD_q f(b)|^r \right\} \right] {}_0d_q t \right)^{\frac{1}{r}} \\
& +q(b-a) \left(\int_{\frac{1}{1+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t \right)^s \, {}_0d_q t \right)^{\frac{1}{s}} \\
& \times \left(\int_{\frac{1}{1+q}}^1 \left[\sup \left\{ |{}_aD_q f(a)|^r, |{}_aD_q f(b)|^r \right\} \right] {}_0d_q t \right)^{\frac{1}{r}} \\
& = q(b-a) \left[\sup \left\{ |{}_aD_q f(a)|^r, |{}_aD_q f(b)|^r \right\} \right]^{\frac{1}{r}} \\
& \times \left[\left(\frac{1}{(1+q)^{s+1}} \frac{1-q}{1-q^{s+1}} \right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_0^{\frac{1}{1+q}} {}_0d_q t \right)^{\frac{1}{r}} \right. \\
& \left. + \left(\int_{\frac{1}{1+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t \right)^s \, {}_0d_q t \right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_{\frac{1}{1+q}}^1 {}_0d_q t \right)^{\frac{1}{r}} \right] \\
& = q(b-a) \sup \left\{ |{}_aD_q f(a)|, |{}_aD_q f(b)| \right\}
\end{aligned}$$

$$\times \left[\left(\frac{1}{(1+q)^{s+1}} \frac{1-q}{1-q^{s+1}} \right)^{\frac{1}{s}} \left(\frac{1}{1+q} \right)^{\frac{1}{r}} \right. \\ \left. + \left(\int_{\frac{1}{1+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t \right)^s {}_0d_q t \right)^{\frac{1}{s}} \left(\frac{q}{1+q} \right)^{\frac{1}{r}} \right]$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. $\square$

Sonuç 2.19. Teorem 2.18’de $q \rightarrow 1^-$ alınırsa quasi-konveks fonksiyonlar için

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx \right| \quad (2.31) \\ \leq \frac{(b-a)}{2} \left(\frac{1}{s+1} \right)^{\frac{1}{s}} \sup \{ |f'(a)|, |f'(b)| \}$$

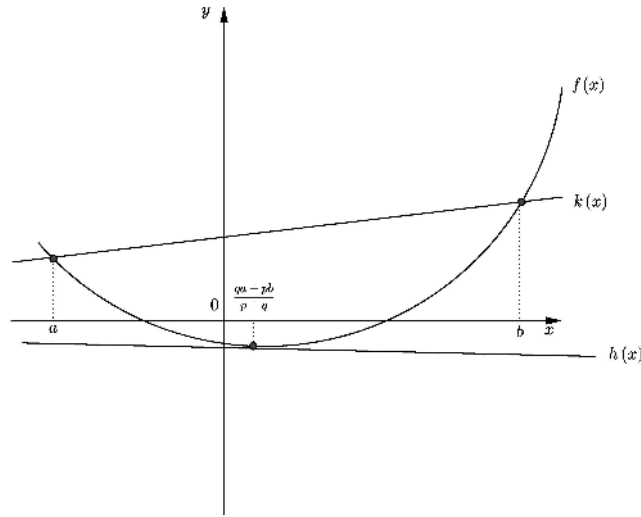
orta nokta tipli integral eşitsizliğine ulaşılır.

3. (p, q) -HERMİTE-HADAMARD EŞİTSİZLİKLERİ İLE KONVEKS VE QUASI-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN ORTA NOKTA TIPLI EŞİTSİZLİKLERİN (p, q) -QUANTUM TAHMİNLERİ

Bu bölümün alt bölümünün ilkinde (p, q) -Hermite-Hadamard eşitsizliği ve bu eşitsizliğin farklı formları ispatlanacaktır. İkinci bölümde ise (p, q) -orta nokta tipli integral eşitsizlikleri elde edilecektir. Bu bölümde elde edilen sonuçlar çalışma [50] ile yayınlanmıştır.

3.1. (p, q) -HERMİTE-HADAMARD EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümde, (p, q) -Hermite-Hadamard eşitsizliğinin doğrusu elde edilip genelleştirilmesi yapılacaktır. Bunun için Şekil 3.1'deki $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinden faydalanacaktır.



Şekil 3.1. $f(x)$, $h(x)$ ve $k(x)$ fonksiyonlarının grafikleri.

Teorem 3.1. $((p, q)$ -Hermite-Hadamard eşitsizliği) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) aralığında diferansiyellenebilir konveks bir fonksiyon ve $0 < q < p \leq 1$ olsun. O zaman,

$$f\left(\frac{qa+pb}{p+q}\right) \leq \frac{1}{p(b-a)} \int_a^{pb+(1-p)a} f(x) {}_a d_{p,q} x \leq \frac{qf(a)+pf(b)}{p+q}. \quad (3.1)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Şekil 3.1’deki $h(x)$ ve konveks $f(x)$ fonksiyonlarının grafikleri göz önüne alınırsa (a, b) aralığında f diferansiyellenebilir olduğundan $\frac{qa+pb}{p+q} \in (a, b)$ noktasında fonksiyonun teğet doğrusu vardır. Bu teğet doğrusu, $h(x) = f\left(\frac{qa+pb}{p+q}\right) + f'\left(\frac{qa+pb}{p+q}\right)\left(x - \frac{qa+pb}{p+q}\right)$ olarak formülize edilebilir. $[a, b]$ aralığında $\forall x \in [a, b]$ için f konveks olduğundan

$$h(x) = f\left(\frac{qa+pb}{p+q}\right) + f'\left(\frac{qa+pb}{p+q}\right)\left(x - \frac{qa+pb}{p+q}\right) \leq f(x) \quad (3.2)$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada, Eşitsizlik (3.2)’nin $[a, pb + (1-p)a]$ aralığında (p, q) -integrali alınır,

$$\begin{aligned} & \int_a^{pb+(1-p)a} h(x) {}_a d_{p,q} x \\ &= \int_a^{pb+(1-p)a} \left[f\left(\frac{qa+pb}{p+q}\right) + f'\left(\frac{qa+pb}{p+q}\right)\left(x - \frac{qa+pb}{p+q}\right) \right] {}_a d_{p,q} x \\ &= p(b-a) f\left(\frac{qa+pb}{p+q}\right) \\ & \quad + f'\left(\frac{qa+pb}{p+q}\right) \left(\int_a^{pb+(1-p)a} x {}_a d_{p,q} x - p(b-a) \frac{qa+pb}{p+q} \right) \\ &= p(b-a) f\left(\frac{qa+pb}{p+q}\right) - p(b-a) \frac{qa+pb}{p+q} f'\left(\frac{qa+pb}{p+q}\right) \\ & \quad + f'\left(\frac{qa+pb}{p+q}\right) (p-q) p(b-a) \\ & \quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{p^{n+1}} \left(\left(1 - \frac{q^n}{p^{n+1}}\right) a + \frac{q^n}{p^{n+1}} (pb + (1-p)a) \right) \\ &= p(b-a) f\left(\frac{qa+pb}{p+q}\right) - p(b-a) \frac{qa+pb}{p+q} f'\left(\frac{qa+pb}{p+q}\right) \\ & \quad + f'\left(\frac{qa+pb}{p+q}\right) (p-q) p(b-a) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{q^n}{p^{n+1}} a + \frac{q^{2n}}{p^{2n+1}} (b-a) \right) \\ &= p(b-a) f\left(\frac{qa+pb}{p+q}\right) + f'\left(\frac{qa+pb}{p+q}\right) \\ & \quad \times \left(p(b-a) \frac{qa+pb}{p+q} - p(b-a) \frac{qa+pb}{p+q} \right) \\ &= p(b-a) f\left(\frac{qa+pb}{p+q}\right) \leq \int_a^{pb+(1-p)a} f(x) {}_a d_{p,q} x \end{aligned} \quad (3.3)$$

elde edilir. Öte yandan, Şekil 3.1'den $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarından geçen doğrunun denklemi $k(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ olarak yazılabilir. $[a, b]$ aralığında f konveks olduğundan her $x \in [a, b]$ için

$$f(x) \leq k(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \quad (3.4)$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada, Eşitsizlik (3.4)'ün $[a, pb + (1-p)a]$ aralığında q -integrali alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \int_a^{pb+(1-p)a} k(x) {}_a d_{p,q}x \quad (3.5) \\
&= \int_a^{pb+(1-p)a} \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \right) {}_a d_{p,q}x \\
&= p(b-a)f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \int_a^{pb+(1-p)a} (x-a) {}_a d_{p,q}x \\
&= p(b-a)f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \left(\int_a^{pb+(1-p)a} x {}_a d_{p,q}x - ap(b-a) \right) \\
&= p(b-a)f(a) - ap(b-a) \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \\
&\quad + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} (p-q)p(b-a) \\
&\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{p^{n+1}} \left(\left(1 - \frac{q^n}{p^{n+1}} \right) a + \frac{q^n}{p^{n+1}} (pb + (1-p)a) \right) \\
&= p(b-a)f(a) - ap(b-a) \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \\
&\quad + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} (p-q)p(b-a) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{q^n}{p^{n+1}} a + \frac{q^{2n}}{p^{2n+1}} (b-a) \right) \\
&= p(b-a)f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \left(p(b-a) \frac{qa + pb}{p+q} - ap(b-a) \right) \\
&= p(b-a)f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \left(\frac{p^2(b-a)^2}{p+q} \right) \\
&= p(b-a)f(a) + (f(b)-f(a)) \left(\frac{p^2(b-a)}{p+q} \right) \\
&= p(b-a) \frac{qf(a) + pf(b)}{p+q} \geq \int_a^{pb+(1-p)a} f(x) {}_a d_{p,q}x
\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak, Eşitsizlik (3.3) ve Eşitsizlik (3.5)'nin kombinasyonu Eşitsizlik (3.1)'i verir ve böylece ispat tamamlanır. $\square$

Not 3.2. Theorem 3.1'de;

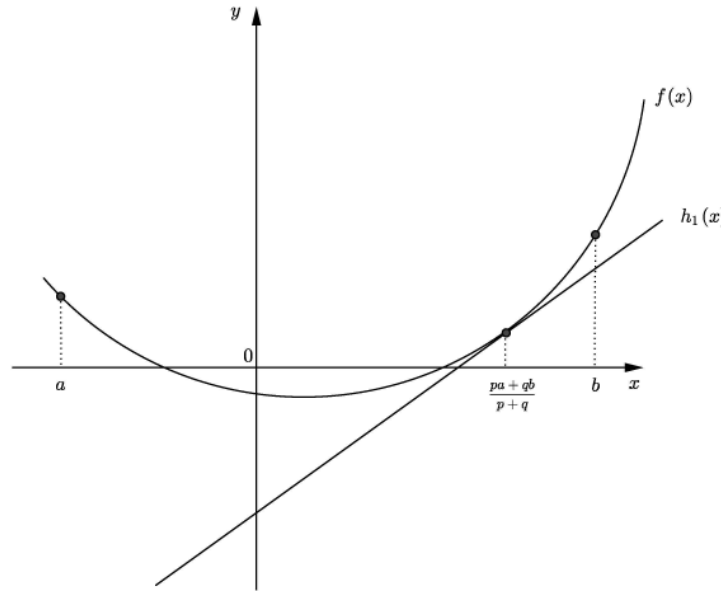
1. Eğer $p = 1$ seçilirse, q -Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir [48, Teorem 6].
2. Eğer $p = 1$ ve $q \rightarrow 1^-$ seçilirse, klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.3. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) aralığında diferansiyellenebilir konveks bir fonksiyon ve $0 < q < p \leq 1$ olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) + \frac{(p-q)(b-a)}{p+q} f'\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) \\ & \leq \frac{1}{p(b-a)} \int_a^{pb+(1-p)a} f(x) {}_a d_{p,q} x \leq \frac{qf(a) + pf(b)}{p+q} \end{aligned} \quad (3.6)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Şekil 3.2'deki $h_1(x)$ ve konveks $f(x)$ fonksiyonlarının grafikleri göz önüne alınsın.



Şekil 3.2. $f(x)$ ve $h_1(x)$ fonksiyonlarının grafikleri.

(a, b) aralığında f diferansiyellenebilir olduğundan $\frac{pa+qb}{p+q} \in (a, b)$ noktasında fonksiyonun teğet doğrusu vardır. Bu teğet doğrusu, $h_1(x) = f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) + f'\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right)\left(x - \frac{pa+qb}{p+q}\right)$

olarak formülüne edilebilir. $[a, b]$ aralığında $\forall x \in [a, b]$ için f konveks olduğundan

$$h_1(x) = f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) + f'\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right)\left(x - \frac{pa+qb}{p+q}\right) \leq f(x) \quad (3.7)$$

eşitsizliği yazılabilir. Dolayısıyla, Eşitsizlik (3.7)'nin $[a, pb + (1-p)a]$ aralığında (p, q) -integrali alınır,

$$\begin{aligned} & \int_a^{pb+(1-p)a} h_1(x) {}_a d_{p,q} x \\ &= \int_a^{pb+(1-p)a} \left[f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) + f'\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right)\left(x - \frac{pa+qb}{p+q}\right) \right] {}_a d_{p,q} x \\ &= p(b-a) f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) - p(b-a) \frac{pa+qb}{p+q} f'\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) \\ & \quad + f'\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) \left(\int_a^{pb+(1-p)a} x {}_a d_{p,q} x \right) \\ &= p(b-a) f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) + -p(b-a) \frac{pa+qb}{p+q} f'\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) \\ & \quad + f'\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) (p-q) p(b-a) \\ & \quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{p^{n+1}} \left(\left(1 - \frac{q^n}{p^{n+1}}\right) a + \frac{q^n}{p^{n+1}} (pb + (1-p)a) \right) \\ &= p(b-a) f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) - p(b-a) \frac{pa+qb}{p+q} f'\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) \\ & \quad + f'\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) \left((p-q) p(b-a) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{q^n}{p^{n+1}} a + \frac{q^{2n}}{p^{2n+1}} (b-a) \right) \right) \\ &= p(b-a) f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) - p(b-a) \frac{pa+qb}{p+q} f'\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) \\ & \quad + f'\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) (p-q) p(b-a) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{q^n}{p^{n+1}} a + \frac{q^{2n}}{p^{2n+1}} (b-a) \right) \\ &= p(b-a) f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) + f'\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) \\ & \quad \times \left(p(b-a) \frac{qa+pb}{p+q} - p(b-a) \frac{pa+qb}{p+q} \right) \\ &= p(b-a) f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) + \frac{p(p-q)(b-a)^2}{p+q} f'\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) \\ &\leq \int_a^{pb+(1-p)a} f(x) {}_a d_{p,q} x \end{aligned} \quad (3.8)$$

eşitsizliği elde edilir. Son olarak, Eşitsizlik (3.5) ve Eşitsizlik (3.8)'in kombinasyonu Eşitsizlik (3.6)'yı verir ve bu da ispat tamamlar. $\square$

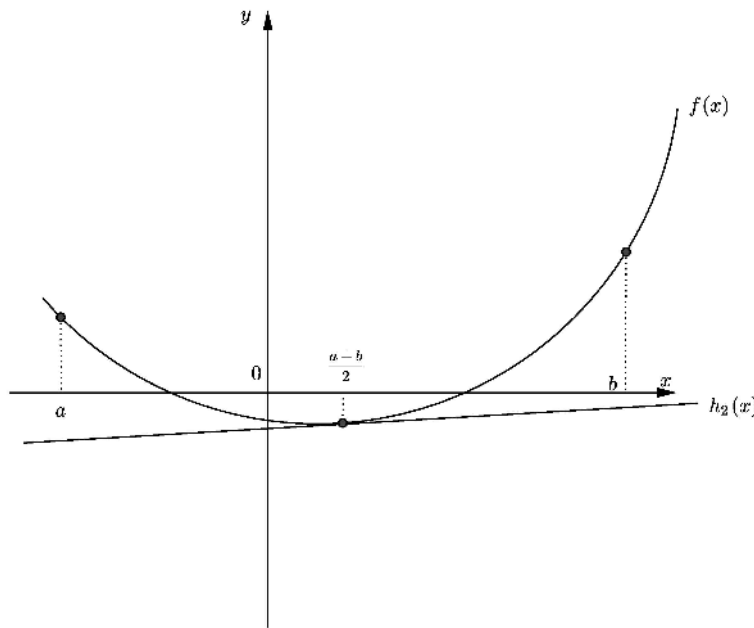
Not 3.4. Theorem 3.3'de $p = 1$ seçilirse Eşitsizlik (2.6) q -Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.5. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) aralığında diferansiyellenebilir konveks bir fonksiyon ve $0 < q < p \leq 1$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(p-q)(b-a)}{2(p+q)} f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ & \leq \frac{1}{p(b-a)} \int_a^{pb+(1-p)a} f(x) {}_a d_{p,q} x \leq \frac{qf(a) + pf(b)}{p+q} \end{aligned} \quad (3.9)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Şekil 3.3'deki $h_2(x)$ ve konveks $f(x)$ fonksiyonlarının grafikleri göz önüne alınsın.



Şekil 3.3. $f(x)$ ve $h_2(x)$ fonksiyonlarının grafikleri.

(a, b) aralığında f diferansiyellenebilir olduğundan $\frac{pa+qb}{p+q} \in (a, b)$ noktasında fonksiyonun teğet doğrusu vardır. Bu teğet doğrusu, $h_2(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$ olarak formülize edilebilir. $[a, b]$ aralığında $\forall x \in [a, b]$ için f konveks olduğundan

$$h_2(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) \leq f(x) \quad (3.10)$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada, Eşitsizlik (3.10)'un $[a, pb + (1-p)a]$ aralığında (p, q) -integrali alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \int_a^{pb+(1-p)a} h_2(x) {}_a d_{p,q}x \\
&= \int_a^{pb+(1-p)a} \left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) \right] {}_a d_{p,q}x \\
&= p(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&\quad \times \left(\int_a^{pb+(1-p)a} x {}_a d_{p,q}x - p(b-a) \frac{a+b}{2} \right) \\
&= p(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) - p(b-a) \frac{a+b}{2} f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&\quad + f'\left(\frac{a+b}{2}\right) (p-q) p(b-a) \\
&\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{p^{n+1}} \left(\left(1 - \frac{q^n}{p^{n+1}}\right) a + \frac{q^n}{p^{n+1}} (pb + (1-p)a) \right) \\
&= p(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&\quad \times \left(p(b-a) \frac{qa + pb}{p+q} - p(b-a) \frac{a+b}{2} \right) \\
&= p(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{p(p-q)(b-a)^2}{2(p+q)} f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&\leq \int_a^{pb+(1-p)a} f(x) {}_a d_{p,q}x
\end{aligned} \tag{3.11}$$

elde edilir. Son olarak, Eşitsizlik (3.5) ve Eşitsizlik (3.11)'in kombinasyonu Eşitsizlik (3.9)'u verir ve ispat tamamlanır. $\square$

Not 3.6. Teorem 3.5'de eğer $p = 1$ yazılırsa Eşitsizlik (2.9) elde edilir [48, Teorem 9].

Teorem 3.7. (Genelleştirilmiş (p, q) -Hermite-Hadamard Eşitsizliği) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) aralığında diferansiyellenebilir konveks bir fonksiyon ve $0 < q < p \leq 1$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned}
I_1 &= f\left(\frac{qa + pb}{p+q}\right), \\
I_2 &= f\left(\frac{pa + qb}{p+q}\right) + \frac{(p-q)(b-a)}{p+q} f'\left(\frac{pa + qb}{p+q}\right),
\end{aligned}$$

$$I_3 = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(p-q)(b-a)}{2(p+q)} f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

olmak üzere

$$\max\{I_1, I_2, I_3\} \leq \frac{1}{p(b-a)} \int_a^{pb+(1-p)a} f(x) {}_a d_{p,q} x \leq \frac{qf(a) + pf(b)}{p+q} \quad (3.12)$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. Eşitsizlik (3.1), Eşitsizlik (3.6) ve Eşitsizlik (3.9)'un sol taraflarının maksimum değeri seçilirse Eşitsizlik (3.12) elde edilir ve ispat tamamlanır. $\square$

Not 3.8. Teorem 3.7'de, eğer $p = 1$ seçilirse Eşitsizlik (2.12) elde edilir [48, Teorem 10].

3.2. (p, q) -KALKÜLÜS İÇİN ORTA NOKTA TIPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde, (p, q) -diferansiyellenebilir konveks ve quasi-konveks fonksiyonlar için (p, q) -orta nokta tipli integral eşitsizlikleri elde edilecektir. Bunun için önce şu aşağıdaki önemli lemmaya ihtiyaç duyulacaktır:

Lemma 3.9. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) aralığında (p, q) -diferansiyellenebilen konveks bir fonksiyon olsun. Eğer $[a, b]$ aralığında ${}_a D_{p,q} f$ sürekli ve integrallenebilir ise

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{qa+pb}{p+q}\right) - \frac{1}{p(b-a)} \int_a^{pb+(1-p)a} f(x) {}_a d_{p,q} x \\ &= q(b-a) \int_0^{\frac{p}{p+q}} t {}_a D_{p,q} f(tb + (1-t)a) {}_0 d_{p,q} t \\ &+ q(b-a) \int_{\frac{p}{p+q}}^1 \left(t - \frac{1}{q}\right) {}_a D_{p,q} f(tb + (1-t)a) {}_0 d_{p,q} t. \end{aligned} \quad (3.13)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Denklem (1.32) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & {}_a D_{p,q} f(tb + (1-t)a) \\ &= \frac{f(p[tb + (1-t)a] + (1-p)a) - f(q[tb + (1-t)a] + (1-q)a)}{(p-q)[tb + (1-t)a - a]} \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$= \frac{f(ptb + (1-pt)a) - f(qtb + (1-qt)a)}{t(p-q)(b-a)}$$

elde edilir. Denklem (1.33), Denklem (1.34) ve Denklem (3.14) kullanılarak aşağıdaki integral hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} & q(b-a) \int_0^{\frac{p}{p+q}} t {}_aD_{p,q}f(tb + (1-t)a) {}_0d_{p,q}t \\ & + q(b-a) \int_{\frac{p}{p+q}}^1 \left(t - \frac{1}{q}\right) {}_aD_{p,q}f(tb + (1-t)a) {}_0d_{p,q}t \\ & = q(b-a) \int_0^{\frac{p}{p+q}} t {}_aD_{p,q}f(tb + (1-t)a) {}_0d_{p,q}t \\ & + q(b-a) \int_{\frac{p}{p+q}}^1 \left(t - \frac{1}{q}\right) {}_aD_{p,q}f(tb + (1-t)a) {}_0d_{p,q}t \\ & - (b-a) \int_0^{\frac{p}{p+q}} {}_aD_{p,q}f(tb + (1-t)a) {}_0d_{p,q}t \\ & + (b-a) \int_0^{\frac{p}{p+q}} {}_aD_{p,q}f(tb + (1-t)a) {}_0d_{p,q}t \\ & = q(b-a) \int_0^1 t {}_aD_{p,q}f(tb + (1-t)a) {}_0d_{p,q}t \\ & - (b-a) \int_0^1 {}_aD_{p,q}f(tb + (1-t)a) {}_0d_{p,q}t \\ & + (b-a) \int_0^{\frac{p}{p+q}} {}_aD_{p,q}f(tb + (1-t)a) {}_0d_{p,q}t \\ & = q(b-a) \int_0^1 t \frac{f(ptb + (1-pt)a) - f(qtb + (1-qt)a)}{t(p-q)(b-a)} {}_0d_{p,q}t \\ & - q(b-a) \frac{1}{q} \int_0^1 \frac{f(ptb + (1-pt)a) - f(qtb + (1-qt)a)}{t(p-q)(b-a)} {}_0d_{p,q}t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + q(b-a) \frac{1}{q} \int_0^{\frac{p}{p+q}} \frac{f(ptb + (1-pt)a) - f(qtb + (1-qt)a)}{t(p-q)(b-a)} {}_0d_{p,q}t \\
& = \frac{q}{p-q} \int_0^1 f(ptb + (1-pt)a) - f(qtb + (1-qt)a) {}_0d_{p,q}t \\
& \quad - \frac{1}{p-q} \int_0^1 \frac{f(ptb + (1-pt)a)}{t} - \frac{f(qtb + (1-qt)a)}{t} {}_0d_{p,q}t \\
& \quad + \frac{1}{p-q} \int_0^{\frac{p}{p+q}} \frac{f(ptb + (1-pt)a)}{t} - \frac{f(qtb + (1-qt)a)}{t} {}_0d_{p,q}t \\
& = q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{p^{n+1}} f\left(\frac{q^n}{p^n}b + \left(1 - \frac{q^n}{p^n}\right)a\right) \\
& \quad - q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{p^{n+1}} f\left(\frac{q^{n+1}}{p^{n+1}}b + \left(1 - \frac{q^{n+1}}{p^{n+1}}\right)a\right) \\
& \quad - \sum_{n=0}^{\infty} f\left(\frac{q^n}{p^n}b + \left(1 - \frac{q^n}{p^n}\right)a\right) \\
& \quad + \sum_{n=0}^{\infty} f\left(\frac{q^{n+1}}{p^{n+1}}b + \left(1 - \frac{q^{n+1}}{p^{n+1}}\right)a\right) \\
& \quad + \sum_{n=0}^{\infty} f\left(\frac{q^n}{p^n} \frac{p}{(p+q)}b + \left(1 - \frac{q^n}{p^n} \frac{p}{(p+q)}\right)a\right) \\
& \quad - \sum_{n=0}^{\infty} f\left(\frac{q^{n+1}}{p^{n+1}} \frac{p}{(p+q)}b + \left(1 - \frac{q^{n+1}}{p^{n+1}} \frac{p}{(p+q)}\right)a\right) \\
& = q \left(\frac{1}{q} f(b) - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{p^n} f\left(\frac{q^n}{p^n}b + \left(1 - \frac{q^n}{p^n}\right)a\right) \right) \\
& \quad - (f(b) - f(a)) + \left(f\left(\frac{qa+pb}{p+q}\right) - f(a) \right) \\
& = f\left(\frac{qa+pb}{p+q}\right) - \frac{1}{p(b-a)} \int_a^{pb+(1-p)a} f(x) {}_ad_{p,q}x
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. □

Not 3.10. Lemma 3.9’de;

1. Eğer $p = 1$ seçilirse Denklem (2.13) elde edilir.
2. Eğer $p = 1$ ve $q \rightarrow 1^-$ seçilirse Denklem (2.15) elde edilir.

Şimdi, (p, q) -türevin mutlak değerinin konveksliği ve quasi-konveksliği kullanılarak (p, q) -orta nokta tipli integral eşitsizlikleri için bazı quantum tahminleri ispatlanacaktır.

Teorem 3.11. $0 < q < p \leq 1$ olmak üzere $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) aralığında (p, q) -diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $[a, b]$ aralığında ${}_aD_{p,q}f$ sürekli ve integrallenebilir olsun.

$$\begin{aligned} M_1(p, q) &= \frac{p^2}{(p+q)^3(p^2+pq+q^2)}, \\ M_2(p, q) &= \frac{p^2(p^2+pq+q^2)-p^3}{(p+q)^3(p^2+pq+q^2)}, \\ M_3(p, q) &= \frac{2p^3}{(p+q)^3(p^2+pq+q^2)}, \\ M_4(p, q) &= \frac{p^4+p^3q+p^2q^2-2p^3}{(p+q)^3(p^2+pq+q^2)} \end{aligned}$$

olmak üzere eğer $|{}_aD_{p,q}f|$ konveks ise

$$\begin{aligned} & \left| f\left(\frac{qa+pb}{p+q}\right) - \frac{1}{p(b-a)} \int_a^{pb+(1-p)a} f(x) {}_ad_{p,q}x \right| \\ & \leq q(b-a) (|{}_aD_{p,q}f(b)| M_1(p, q) + |{}_aD_{p,q}f(a)| M_2(p, q)) \\ & \quad + q(b-a) (|{}_aD_{p,q}f(b)| M_3(p, q) + |{}_aD_{p,q}f(a)| M_4(p, q)) \end{aligned} \quad (3.15)$$

(p, q) -orta nokta tipli integral eşitsizliği sağlanır.

İspat. Denklem (3.13)'ün her iki tarafının mutlak değeri alınsın ve $|{}_aD_{p,q}f|$ nin konveksliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \left| f\left(\frac{qa+pb}{p+q}\right) - \frac{1}{p(b-a)} \int_a^{pb+(1-p)a} f(x) {}_ad_{p,q}x \right| \\ & \leq q(b-a) \int_0^{\frac{p}{p+q}} t |{}_aD_{p,q}f(tb+(1-t)a)| {}_0d_{p,q}t \\ & \quad + q(b-a) \int_{\frac{p}{p+q}}^1 \left(\frac{1}{q}-t\right) |{}_aD_{p,q}f(tb+(1-t)a)| {}_0d_{p,q}t \\ & \leq q(b-a) \int_0^{\frac{p}{p+q}} t \left[t |{}_aD_{p,q}f(b)| + (1-t) |{}_aD_{p,q}f(a)| \right] {}_0d_{p,q}t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +q(b-a) \int_{\frac{p}{p+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t \right) \left[t |{}_a D_{p,q} f(b)| + (1-t) |{}_a D_{p,q} f(a)| \right] {}_0 d_{p,q} t \\
& = q(b-a) |{}_a D_{p,q} f(b)| \int_0^{\frac{p}{p+q}} t^2 {}_0 d_{p,q} t + |{}_a D_{p,q} f(a)| \int_0^{\frac{p}{p+q}} t(1-t) {}_0 d_{p,q} t \\
& \quad + q(b-a) |{}_a D_{p,q} f(b)| \int_{\frac{p}{p+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t \right) t {}_0 d_{p,q} t \\
& \quad + q(b-a) |{}_a D_{p,q} f(a)| \int_{\frac{p}{p+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t \right) (1-t) {}_0 d_{p,q} t
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca, aşağıdaki (p, q) -belirli integralleri kolaylıkla hesaplanabilir,

$$\int_0^{\frac{p}{p+q}} t^2 {}_0 d_{p,q} t = \frac{p^2}{(p+q)^3 (p^2 + pq + q^2)} = M_1(p, q), \quad (3.16)$$

$$\int_0^{\frac{p}{p+q}} t(1-t) {}_0 d_{p,q} t = \frac{p^2 (p^2 + pq + q^2) - p^3}{(p+q)^3 (p^2 + pq + q^2)} = M_2(p, q), \quad (3.17)$$

$$\int_{\frac{p}{p+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t \right) t {}_0 d_{p,q} t = \frac{2p^3}{(p+q)^3 (p^2 + pq + q^2)} = M_3(p, q), \quad (3.18)$$

$$\int_{\frac{p}{p+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t \right) (1-t) {}_0 d_{p,q} t = \frac{p^4 + p^3 q + p^2 q^2 - 2p^3}{(p+q)^3 (p^2 + pq + q^2)} = M_4(p, q). \quad (3.19)$$

Dolayısıyla, Denklem (3.16)-Denklem (3.19) birlikte Eşitsizlik (3.15)'i verir ki bu da ispatı tamamlar. $\square$

Sonuç 3.12. Teorem 3.11'de,

1. Eğer $p = 1$ seçilirse Eşitsizlik (2.16) elde edilir.
2. Eğer $p = 1$ ve $q \rightarrow 1^-$ seçilirse konveks fonksiyonlar için Eşitsizlik (2.22) elde edilir.

Teorem 3.13. $0 < q < p \leq 1$ olmak üzere $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) aralığında (p, q) -diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $[a, b]$ aralığında ${}_a D_{p,q} f$ sürekli ve integrallenebilir olsun. Teorem 3.11'de tanımlanan $M_1(p, q)$ - $M_4(p, q)$ olmak üzere $r \geq 1$ için eğer

$|{}_aD_{p,q}f|^r$ konveks ise

$$\begin{aligned}
& \left| f\left(\frac{qa+pb}{p+q}\right) - \frac{1}{p(b-a)} \int_a^{pb+(1-p)a} f(x) {}_ad_{p,q}x \right| \\
& \leq q(b-a) \left(\frac{p^2}{(p+q)^3} \right)^{1-\frac{1}{r}} \\
& \times \left[(|{}_aD_{p,q}f(b)|^r M_1(p,q) + |{}_aD_{p,q}f(a)|^r M_2(p,q))^{\frac{1}{r}} \right. \\
& \left. + (|{}_aD_{p,q}f(b)|^r M_3(p,q) + |{}_aD_{p,q}f(a)|^r M_4(p,q))^{\frac{1}{r}} \right].
\end{aligned} \tag{3.20}$$

(p, q) -orta nokta tipli integral eşitsizliği sağlanır.

İspat. Denklem (3.13)'ün her iki tarafının mutlak değerine kuvvet ortalama eşitsizliği uygulandıktan sonra $r \geq 1$ için $[a, b]$ üzerinde $|{}_aD_{p,q}f|^r$ nin konveksliği kullanılırsa Eşitsizlik (3.21) elde edilir. Öyle ki,

$$\begin{aligned}
& \left| f\left(\frac{qa+pb}{p+q}\right) - \frac{1}{p(b-a)} \int_a^{pb+(1-p)a} f(x) {}_ad_{p,q}x \right| \\
& \leq q(b-a) \int_0^{\frac{p}{p+q}} t |{}_aD_{p,q}f(tb+(1-t)a)| {}_0d_{p,q}t \\
& + q(b-a) \int_{\frac{p}{p+q}}^1 \left(\frac{1}{q}-t\right) |{}_aD_{p,q}f(tb+(1-t)a)| {}_0d_{p,q}t \\
& \leq q(b-a) \left(\int_0^{\frac{p}{p+q}} t {}_0d_{p,q}t \right)^{1-\frac{1}{r}} \\
& \times \left(\int_0^{\frac{p}{p+q}} t \left[t |{}_aD_{p,q}f(b)|^r + (1-t) |{}_aD_{p,q}f(a)|^r \right] {}_0d_{p,q}t \right)^{\frac{1}{r}} \\
& + q(b-a) \left(\int_{\frac{p}{p+q}}^1 \left(\frac{1}{q}-t\right) {}_0d_{p,q}t \right)^{1-\frac{1}{r}} \\
& \times \left(\int_{\frac{p}{p+q}}^1 \left(\frac{1}{q}-t\right) \left[t |{}_aD_{p,q}f(b)|^r + (1-t) |{}_aD_{p,q}f(a)|^r \right] {}_0d_{p,q}t \right)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
&= q(b-a) \left(\frac{p^2}{(p+q)^3} \right)^{1-\frac{1}{r}} \\
&\quad \times \left\{ \left(\left| {}_a D_{p,q} f(b) \right|^r \int_0^{\frac{p}{p+q}} t^2 {}_0 d_{p,q} t + \left| {}_a D_{p,q} f(a) \right|^r \int_0^{\frac{p}{p+q}} t(1-t) {}_0 d_{p,q} t \right)^{\frac{1}{r}} \right. \\
&\quad + \left(\left| {}_a D_{p,q} f(b) \right|^r \int_{\frac{p}{p+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t \right) t {}_0 d_{p,q} t \right. \\
&\quad \left. \left. + \left| {}_a D_{p,q} f(a) \right|^r \int_{\frac{p}{p+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t \right) (1-t) {}_0 d_{p,q} t \right)^{\frac{1}{r}} \right\}.
\end{aligned}$$

Buradan da Eşitsizlik (3.21)'de Denklem (3.16)-Denklem (3.19) birlikte kullanılırsa istenen Eşitsizlik (3.20) elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. $\square$

Sonuç 3.14. Teorem 3.13'de,

1. Eğer $p = 1$ seçilirse Eşitsizlik (2.23) elde edilir.
2. Eğer $p = 1$ ve $q \rightarrow 1^-$ seçilirse konveks fonksiyonlar için Eşitsizlik (2.25) elde edilir.

Teorem 3.15. $0 < q < p \leq 1$ olmak üzere $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) aralığında (p, q) -diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $[a, b]$ aralığında ${}_a D_{p,q} f$ sürekli ve integrallenebilir olsun. $r^{-1} + s^{-1} = 1$ olmak üzere $r > 1$ için eğer $|{}_a D_{p,q} f|^r$ konveks ise

$$\begin{aligned}
&\left| f\left(\frac{qa+pb}{p+q}\right) - \frac{1}{p(b-a)} \int_a^{pb+(1-p)a} f(x) {}_a d_{p,q} x \right| \\
&\leq q(b-a) \left(\left(\frac{p}{p+q} \right)^{s+1} \left(\frac{p-q}{p^{s+1}-q^{s+1}} \right) \right)^{\frac{1}{s}} \\
&\quad \times \left(\frac{p^2 |{}_a D_{p,q} f(b)|^r}{(p+q)^3} + \frac{(p^3 + 2p^2 q + pq^2 - p^2) |{}_a D_{p,q} f(a)|^r}{(p+q)^3} \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\quad + q(b-a) + \left(\int_{\frac{p}{p+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t \right)^s {}_0 d_{p,q} t \right)^{\frac{1}{s}} \\
&\quad \times \left(\frac{(2pq + q^2) |{}_a D_{p,q} f(b)|^r}{(p+q)^3} \right.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$+ \frac{(p^2q + 2pq^2 - 2pq - q^2 + q^3) |{}_aD_{p,q}f(a)|^r}{(p+q)^3} \Big)^{\frac{1}{r}}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Denklem (3.13)'ün her iki tarafının mutlak değerine (p, q) -Hölder eğıtsizliğı uygulanıktan sonra $r > 1$ için $[a, b]$ üzerinde $|{}_aD_{p,q}f|^r$ nin konveksliğı kullanılırsa Eğıtsizlik (3.22) elde edilir. Öyle ki,

$$\begin{aligned} & \left| f\left(\frac{qa+pb}{p+q}\right) - \frac{1}{p(b-a)} \int_a^{pb+(1-p)a} f(x) {}_ad_{p,q}x \right| \\ & \leq q(b-a) \int_0^{\frac{p}{p+q}} t |{}_aD_{p,q}f(tb+(1-t)a)| {}_ad_{p,q}t \\ & \quad + q(b-a) \int_{\frac{p}{p+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t\right) |{}_aD_{p,q}f(tb+(1-t)a)| {}_ad_{p,q}t \\ & \leq q(b-a) \left(\int_0^{\frac{p}{p+q}} t^s {}_ad_{p,q}t \right)^{\frac{1}{s}} \\ & \quad \times \left(\int_0^{\frac{p}{p+q}} |{}_aD_{p,q}f(tb+(1-t)a)|^r {}_ad_{p,q}t \right)^{\frac{1}{r}} \\ & \quad + q(b-a) \left(\int_{\frac{p}{p+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t\right)^s {}_ad_{p,q}t \right)^{\frac{1}{s}} \\ & \quad \times \left(\int_{\frac{p}{p+q}}^1 |{}_aD_{p,q}f(tb+(1-t)a)|^r {}_ad_{p,q}t \right)^{\frac{1}{r}} \\ & \leq q(b-a) \left(\int_0^{\frac{p}{p+q}} t^s {}_ad_{p,q}t \right)^{\frac{1}{s}} \\ & \quad \times \left(|{}_aD_{p,q}f(b)|^r \int_0^{\frac{p}{p+q}} t {}_ad_{p,q}t + |{}_aD_{p,q}f(a)|^r \int_0^{\frac{p}{p+q}} (1-t) {}_ad_{p,q}t \right)^{\frac{1}{r}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +q(b-a) \left(\int_{\frac{p}{p+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t \right)^s {}_0d_{p,q}t \right)^{\frac{1}{s}} \\
& \times \left(|{}_aD_{p,q}f(b)|^r \int_{\frac{p}{p+q}}^1 t {}_0d_{p,q}t + |{}_aD_{p,q}f(a)|^r \int_{\frac{p}{p+q}}^1 (1-t) {}_0d_{p,q}t \right)^{\frac{1}{r}} \\
& = q(b-a) \left(\left(\frac{p}{p+q} \right)^{s+1} \left(\frac{p-q}{p^{s+1}-q^{s+1}} \right) \right)^{\frac{1}{s}} \\
& \times \left(\frac{p^2 |{}_aD_{p,q}f(b)|^r}{(p+q)^3} + |{}_aD_{p,q}f(a)|^r \left(\frac{p^3 + 2p^2q + pq^2 - p^2}{(p+q)^3} \right) \right)^{\frac{1}{r}} \\
& +q(b-a) \left(\int_{\frac{p}{p+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t \right)^s {}_0d_{p,q}t \right)^{\frac{1}{s}} \left(\frac{(2pq+q^2) |{}_aD_{p,q}f(b)|^r}{(p+q)^3} \right. \\
& \left. + |{}_aD_{p,q}f(a)|^r \frac{p^2q + 2pq^2 - 2pq - q^2 + q^3}{(p+q)^3} \right)^{\frac{1}{r}}.
\end{aligned}$$

Böylece ispat tamamlanır. □

Sonuç 3.16. Teorem 3.15’de,

1. Eğer $p = 1$ seçilirse Eşitsizlik (2.26)’ya ulaşılır.
2. Eğer $p = 1$ ve $q \rightarrow 1^-$ seçilirse konveks fonksiyonlar için Eşitsizlik (2.27) elde edilir.

Şimdi, quasi-konveks fonksiyonlar için bazı (p, q) -orta nokta tipli integral eşitsizlikleri elde edilecektir.

Teorem 3.17. $0 < q < p \leq 1$ olmak üzere $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) aralığında (p, q) -diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $[a, b]$ aralığında ${}_aD_{p,q}f$ sürekli ve integrallenebilir olsun. $r \geq 1$ için eğer $|{}_aD_{p,q}f|^r$ quasi-konveks ise

$$\begin{aligned}
& \left| f\left(\frac{qa+pb}{p+q}\right) - \frac{1}{p(b-a)} \int_a^{pb+(1-p)a} f(x) {}_ad_{p,q}x \right| \\
& \leq q(b-a) \frac{2p^2}{(p+q)^3} \sup \left\{ \left| {}_aD_{p,q}f(a) \right|, \left| {}_aD_{p,q}f(b) \right| \right\}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

(p, q) -orta nokta tipli integral eşitsizliği sağlanır.

İspat. Denklem (3.13)'ün her iki tarafının mutlak değerine kuvvet ortalama eşitsizliği uygulandıktan sonra $r \geq 1$ için $[a, b]$ üzerinde $|{}_aD_{p,q}f|^r$ nin quasi-konveksliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{p(b-a)} \int_a^{pb+(1-p)a} f(x) {}_a d_{p,q}x - \frac{pf(b)+qf(a)}{p+q} \right| \\
& \leq q(b-a) \int_0^{\frac{p}{p+q}} t |{}_aD_{p,q}f(tb+(1-t)a)| {}_0d_{p,q}t \\
& \quad + q(b-a) \int_{\frac{p}{p+q}}^1 \left(\frac{1}{q}-t\right) |{}_aD_{p,q}f(tb+(1-t)a)| {}_0d_{p,q}t \\
& \leq q(b-a) \left(\int_0^{\frac{p}{p+q}} t {}_0d_{p,q}t \right)^{1-\frac{1}{r}} \\
& \quad \times \left(\int_0^{\frac{p}{p+q}} t |{}_aD_{p,q}f(tb+(1-t)a)|^r {}_0d_{p,q}t \right)^{\frac{1}{r}} \\
& \quad + q(b-a) \left(\int_{\frac{p}{p+q}}^1 \left(\frac{1}{q}-t\right) {}_0d_{p,q}t \right)^{1-\frac{1}{r}} \\
& \quad \times \left(\int_{\frac{p}{p+q}}^1 \left(\frac{1}{q}-t\right) |{}_aD_{p,q}f(tb+(1-t)a)|^r {}_0d_{p,q}t \right)^{\frac{1}{r}} \\
& \leq q(b-a) \left(\int_0^{\frac{p}{p+q}} t {}_0d_{p,q}t \right)^{1-\frac{1}{r}} \\
& \quad \times \left(\sup \left\{ |{}_aD_{p,q}f(a)|^r, |{}_aD_{p,q}f(b)|^r \right\} \int_0^{\frac{p}{p+q}} t {}_0d_{p,q}t \right)^{\frac{1}{r}} \\
& \quad + q(b-a) \left(\int_{\frac{p}{p+q}}^1 \left(\frac{1}{q}-t\right) {}_0d_{p,q}t \right)^{1-\frac{1}{r}} \\
& \quad \times \left(\sup \left\{ |{}_aD_{p,q}f(a)|^r, |{}_aD_{p,q}f(b)|^r \right\} \int_{\frac{p}{p+q}}^1 \left(\frac{1}{q}-t\right) {}_0d_{p,q}t \right)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= q(b-a) \sup \left\{ \left| {}_a D_{p,q} f(a) \right|, \left| {}_a D_{p,q} f(b) \right| \right\} \\
&\quad \times \left[\int_0^{\frac{p}{p+q}} t {}_0 d_{p,q} t + \int_{\frac{p}{p+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t \right) {}_0 d_{p,q} t \right] \\
&= q(b-a) \frac{2p^2}{(p+q)^3} \sup \left\{ \left| {}_a D_{p,q} f(a) \right|, \left| {}_a D_{p,q} f(b) \right| \right\}.
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu yüzden, Eşitsizlik (3.23) sağlanır ve ispat tamamlanmış olur. $\square$

Sonuç 3.18. Teorem 3.17’de,

1. Eğer $p = 1$ seçilirse Eşitsizlik (2.28)’e ulaşılır.
2. Eğer $p = 1$ ve $q \rightarrow 1^-$ seçersek quasi-konveks fonksiyonlar için Eşitsizlik (2.29) elde edilir.

Teorem 3.19. $0 < q < p \leq 1$ olmak üzere $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) aralığında q -diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $[a, b]$ aralığında ${}_a D_{p,q} f$ sürekli ve integrallenebilir olsun. $r^{-1} + s^{-1} = 1$ olmak üzere $r > 1$ için Eğer $|{}_a D_{p,q} f|^r$ quasi-konveks ise,

$$\begin{aligned}
&\left| f\left(\frac{qa+pb}{p+q}\right) - \frac{1}{p(b-a)} \int_a^{pb+(1-p)a} f(x) {}_a d_{p,q} x \right| \\
&\leq q(b-a) \sup \left\{ \left| {}_a D_{p,q} f(a) \right|, \left| {}_a D_{p,q} f(b) \right| \right\} \\
&\quad \left\{ \left(\left(\frac{p}{p+q} \right)^{s+1} \left(\frac{p-q}{p^{s+1}-q^{s+1}} \right) \right)^{\frac{1}{s}} \left(\frac{p}{p+q} \right)^{\frac{1}{r}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_{\frac{p}{p+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t \right)^s {}_0 d_{p,q} t \right)^{\frac{1}{s}} \left(\frac{q}{p+q} \right)^{\frac{1}{r}} \right\}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

(p, q) -orta nokta tipli integral eşitsizliği sağlanır.

İspat. Denklem (3.13)’ün her iki tarafının mutlak değerine (p, q) -Hölder eşitsizliği uygulanırsın ve $r > 1$ için $[a, b]$ üzerinde $|{}_a D_{p,q} f|^r$ nin quasi-konveksliği kullanılırsa,

$$\left| \frac{1}{p(b-a)} \int_a^{pb+(1-p)a} f(x) {}_a d_{p,q} x - \frac{pf(b)+qf(a)}{p+q} \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq q(b-a) \int_0^{\frac{p}{p+q}} t \left| {}_aD_{p,q}f(tb+(1-t)a) \right| {}_0d_{p,q}t \\
&\quad + q(b-a) \int_{\frac{p}{p+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t \right) \left| {}_aD_{p,q}f(tb+(1-t)a) \right| {}_0d_{p,q}t \\
&\leq q(b-a) \left(\int_0^{\frac{p}{p+q}} t^s {}_0d_{p,q}t \right)^{\frac{1}{s}} \\
&\quad \times \left(\int_0^{\frac{p}{p+q}} \left| {}_aD_{p,q}f(tb+(1-t)a) \right|^r {}_0d_{p,q}t \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\quad + q(b-a) \left(\int_{\frac{p}{p+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t \right)^s {}_0d_{p,q}t \right)^{\frac{1}{s}} \\
&\quad \times \left(\int_{\frac{p}{p+q}}^1 \left| {}_aD_{p,q}f(tb+(1-t)a) \right|^r {}_0d_{p,q}t \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq q(b-a) \left(\left(\frac{p}{p+q} \right)^{s+1} \left(\frac{p-q}{p^{s+1}-q^{s+1}} \right) \right)^{\frac{1}{s}} \\
&\quad \times \left(\sup \left\{ \left| {}_aD_{p,q}f(a) \right|^r, \left| {}_aD_{p,q}f(b) \right|^r \right\} \frac{p}{p+q} \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\quad + q(b-a) \left(\int_{\frac{p}{p+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t \right)^s {}_0d_{p,q}t \right)^{\frac{1}{s}} \\
&\quad \times \left(\sup \left\{ \left| {}_aD_{p,q}f(a) \right|^r, \left| {}_aD_{p,q}f(b) \right|^r \right\} \frac{q}{p+q} \right)^{\frac{1}{r}} \\
&= q(b-a) \sup \left\{ \left| {}_aD_{p,q}f(a) \right|, \left| {}_aD_{p,q}f(b) \right| \right\} \\
&\quad \times \left\{ \left(\left(\frac{p}{p+q} \right)^{s+1} \left(\frac{p-q}{p^{s+1}-q^{s+1}} \right) \right)^{\frac{1}{s}} \left(\frac{p}{p+q} \right)^{\frac{1}{r}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_{\frac{p}{p+q}}^1 \left(\frac{1}{q} - t \right)^s {}_0d_{p,q}t \right)^{\frac{1}{s}} \left(\frac{q}{p+q} \right)^{\frac{1}{r}} \right\}.
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir: Böylece, Eşitsizlik (3.24) ispatlanır. $\square$

Sonuç 3.20. Teorem 3.19’de,

1. Eğer $p = 1$ seçilirse Eşitsizlik (2.30)’e ulaşılır.
2. Eğer $p = 1$ ve $q \rightarrow 1^-$ limiti alınırsa quasi-konveks fonksiyonlar için Eşitsizlik (2.31) elde edilir.

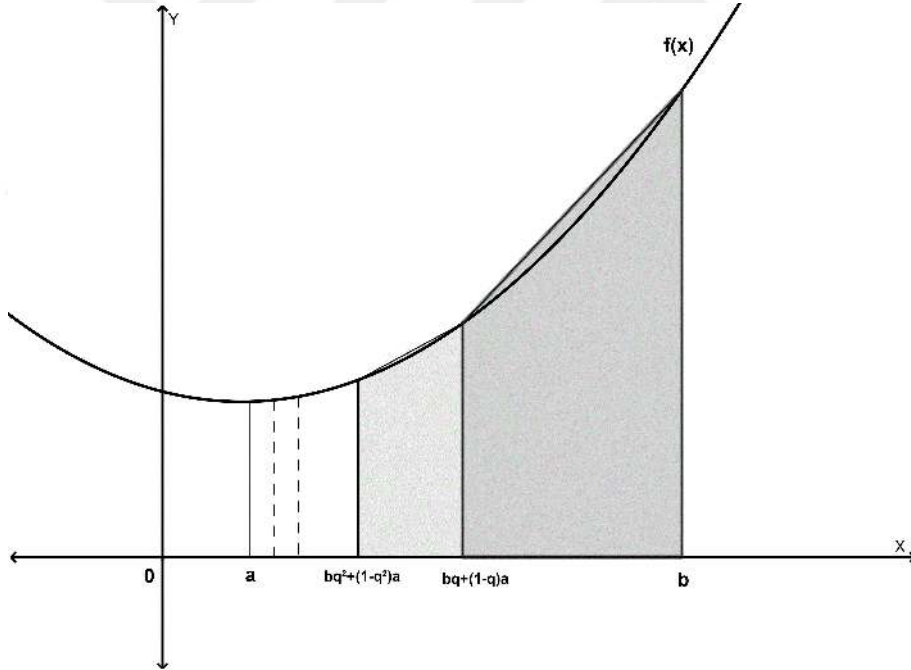


4. YENİ $\bar{q}$ -İNTEGRAL

Bu bölümde, yeni bir quantum integral tanımı yapılacaktır. Ayrıca Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikleri bu tanımla ispatlanacaktır. Bu bölümde elde edilen sonuçlar çalışma [51] ile yayınlanmıştır.

4.1. YENİ $\bar{q}$ -İNTEGRAL TANIMI VE BU TANIMIN ÖZELLİKLERİ

F. H. Jackson, integral tanımını verirken dikdörtgenleri kullanmıştır. Burada yamuklar kullanılarak yeni bir quantum inetgral tanımı verilecektir ve $\bar{q}$ -integral şeklinde gösterilecektir.



Şekil 4.1. $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği

$J := [a, b] \subset \mathbb{R}$, $J^\circ := (a, b)$ aralık ve $0 < q < 1$ reel sayısı olsun. Bir integralin tanımının tanım kümesinin alt aralıklarının genişliklerin toplamı cinsinden ifade edilebileceği hatırlanırsa Şekil 4.1'de h uzunluğu $x = q^{n+1}b + (1 - q^{n+1})a$ ve $x = q^n b + (1 - q^n)a$ şeritleri arasındaki uzunluğu olarak alınsın, bu da şeritlerin daha da incelmeleri ve giderek $x \rightarrow a$ olması anlamına gelir. Yeni tanım için Şekil 4.1'deki fonksiyonun grafiği göz önüne

alınsın.

Buna göre, n . yamuğun alanı,

$$A_n = (1-q)q^n(b-a) \frac{f(q^{n+1}b + (1-q^{n+1})a) + f(q^n b + (1-q^n)a)}{2}$$

olarak yazılabilir. İntegral basitçe, yamuk parçaların her birinin toplamıdır. Yani bu yamukların alanları toplanarak yeni integral tanımı elde edilir. Öyle ki,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} A_n \\ &= \frac{(1-q)(b-a)}{2} \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^{n+1}b + (1-q^{n+1})a) \\ & \quad + \frac{(1-q)(b-a)}{2} \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n b + (1-q^n)a) \\ &= \frac{(1-q)(b-a)}{2} \frac{1}{q} \sum_{n=0}^{\infty} q^{n+1} f(q^{n+1}b + (1-q^{n+1})a) \\ & \quad + \frac{(1-q)(b-a)}{2} \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n b + (1-q^n)a) \\ &= \frac{(1-q)(b-a)}{2} \frac{1}{q} \sum_{n=1}^{\infty} q^n f(q^n b + (1-q^n)a) \\ & \quad + \frac{(1-q)(b-a)}{2} \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n b + (1-q^n)a) \\ &= \frac{(1-q)(b-a)}{2} \frac{1}{q} \left\{ f(b) - f(b) + \sum_{n=1}^{\infty} q^n f(q^n b + (1-q^n)a) \right\} \\ & \quad + \frac{(1-q)(b-a)}{2} \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n b + (1-q^n)a) \\ &= \frac{(1-q)(b-a)}{2} \frac{1}{q} \left\{ -f(b) + \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n b + (1-q^n)a) \right\} \\ & \quad + \frac{(1-q)(b-a)}{2} \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n b + (1-q^n)a) \\ &= \frac{(1-q)(b-a)}{2q} \left[(1+q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n b + (1-q^n)a) - f(b) \right] \\ &= \int_a^b f(s) {}_a d_{\bar{q}} s \end{aligned}$$

bulunur. Artık bu son ifade kullanılarak yeni quantum integral tanımı verilebilir:

Tanım 4.1. $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. $0 < q < 1$ için f nin $\bar{q}$ -integrali:

$$\int_a^b f(s) {}_a d_{\bar{q}} s = \frac{(1-q)(b-a)}{2q} \left[(1+q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n b + (1-q^n)a) - f(b) \right] \quad (4.1)$$

olarak tanımlanır. Ayrıca, $x \in J$ için Eğer $c \in (a, x)$ ise o zaman J üzerinde f nin $\bar{q}$ -integrali

$$\begin{aligned} & \int_c^x f(s) {}_a d_{\bar{q}} s \\ &= \int_a^x f(s) {}_a d_{\bar{q}} s - \int_a^c f(s) {}_a d_{\bar{q}} s \\ &= \frac{(1-q)(x-a)}{2q} \left[(1+q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n x + (1-q^n)a) - f(x) \right] \\ & \quad - \frac{(1-q)(c-a)}{2q} \left[(1+q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n c + (1-q^n)a) - f(c) \right] \end{aligned} \quad (4.2)$$

şeklindedir. Genelleştirilmiş $\bar{q}$ -integral için $b \rightarrow \infty$ limit hali alınamaz. Çünkü,

$$\int_0^{\infty} f(s) {}_a d_{\bar{q}} s = \frac{(1-q)\infty}{2q} \left[(1+q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n \infty) - f(\infty) \right]$$

toplamı $(1+q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n \infty) - f(\infty) \neq 0$ için yakınsak olamaz. Bunun yerine

$$\begin{aligned} & \int_{q^{i+1}}^{q^i} f(s) {}_a d_{\bar{q}} s \\ &= \int_0^{q^i} f(s) {}_a d_{\bar{q}} s - \int_0^{q^{i+1}} f(s) {}_a d_{\bar{q}} s \\ &= \frac{(1+q)(1-q)}{2q} \left[\sum_{n=0}^{\infty} q^{n+i} f(q^{n+i}) - \sum_{n=0}^{\infty} q^{n+i+1} f(q^{n+i+1}) \right] \\ & \quad - \frac{(1-q)q^i}{2q} f(q^i) + \frac{(1-q)q^{i+1}}{2q} f(q^{i+1}) \\ &= \frac{(1+q)(1-q)}{2q} q^i f(q^i) - \frac{(1-q)q^i}{2q} f(q^i) + \frac{(1-q)q^{i+1}}{2q} f(q^{i+1}) \\ &= \frac{(1-q)}{2} q^i f(q^i) + \frac{(1-q)}{2q} q^{i+1} f(q^{i+1}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

elde edilir. Denklem (4.3) yardımıyla,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f(s) {}_a d_{\bar{q}} s &= \sum_{i=-\infty}^\infty \int_{q^{i+1}}^{q^i} f(s) {}_a d_{\bar{q}} s \\
&= \sum_{i=-\infty}^\infty \left(\frac{(1-q)}{2} q^i f(q^i) + \frac{(1-q)}{2q} q^{i+1} f(q^{i+1}) \right) \\
&= \frac{(1-q)}{2} \sum_{i=-\infty}^\infty q^i f(q^i) + \frac{(1-q)}{2q} \sum_{i=-\infty}^\infty q^{i+1} f(q^{i+1}) \\
&= \frac{1-q^2}{2q} \sum_{i=-\infty}^\infty q^i f(q^i)
\end{aligned}$$

integrali elde edilir. Dolayısıyla genelleştirilmiş $\bar{q}$ -integral aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 4.2. $0 < q < 1$ için $[0, \infty)$ aralığında f nin genelleştirilmiş $\bar{q}$ -integrali

$$\int_0^\infty f(s) {}_a d_{\bar{q}} s = \sum_{i=-\infty}^\infty \int_{q^{i+1}}^{q^i} f(s) {}_a d_{\bar{q}} s = \frac{1-q^2}{2q} \sum_{i=-\infty}^\infty q^i f(q^i)$$

ile tanımlanır.

Teorem 4.3. $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman, $\bar{q}$ -integralin q -türevi

$${}_a D_q \int_a^x f(s) {}_a d_{\bar{q}} s = \frac{f(x) + f(qx + (1-q)a)}{2} \quad (4.4)$$

eşitliği ile verilir.

İspat. İlk olarak,

$$\begin{aligned}
&\int_a^x f(s) {}_a d_{\bar{q}} s \\
&= \frac{(1-q)(x-a)}{2q} \left[(1+q) \sum_{n=0}^\infty q^n f(q^n x + (1-q^n)a) - f(x) \right]
\end{aligned}$$

yazılır. Burada, $\bar{q}$ -integral tanımından yukarıdaki toplamın q -türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}
&{}_a D_q \int_a^x f(s) {}_a d_{\bar{q}} s \\
&= {}_a D_q \frac{(1-q)(x-a)}{2q}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[(1+q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n x + (1-q^n)a) - f(x) \right] \\
& = \frac{1}{(1-q)(x-a)} \\
& \times \left\{ \frac{(1-q)(x-a)}{2q} \left[(1+q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n x + (1-q^n)a) - f(x) \right] \right. \\
& \quad \left. - \frac{(1-q)(x-a)q}{2q} \right. \\
& \quad \times \left[(1+q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^{n+1}x + (1-q^{n+1})a) - f(qx + (1-q)a) \right] \left. \right\} \\
& = \frac{(1+q)}{2q} \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n x + (1-q^n)a) \\
& \quad - \frac{(1+q)}{2q} \sum_{n=0}^{\infty} q^{n+1} f(q^{n+1}x + (1-q^{n+1})a) \\
& \quad + \frac{qf(qx + (1-q)a) - f(x)}{2q} \\
& = \frac{qf(x) + qf(qx + (1-q)a)}{2q} \\
& = \frac{f(x) + f(qx + (1-q)a)}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. □

Teorem 4.4. (Değişken Değiştirme Özelliği) $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $0 < q < 1$ olsun.

O zaman,

$$\int_0^1 f(sb + (1-s)a) {}_0d_{\bar{q}}s = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) {}_ad_{\bar{q}}t \quad (4.5)$$

eşitliği doğrudur.

İspat. $\bar{q}$ -integral tanımından,

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 f(sb + (1-s)a) {}_0d_{\bar{q}}s \\
& = \frac{(1-q)(1-0)}{2q} \\
& \times \left[(1+q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f([q^n 1 + (1-q^n)0]b + (1 - [q^n 1 + (1-q^n)0])a) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -f(1b + (1-1)a)] \\
= & \frac{(1-q)}{2q} \left[(1+q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n b + (1-q^n)a) - f(b) \right]
\end{aligned}$$

eşitliği yazılır. Bu son ifade $\frac{b-a}{b-a}$ ile çarpılırsa,

$$\int_0^1 f(sb + (1-s)a) {}_0d_{\bar{q}}s = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) {}_ad_{\bar{q}}t$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 4.5. $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. $c \in (a, x)$ için

$$\begin{aligned}
& \int_c^x {}_aD_q f(s) {}_ad_{\bar{q}}s \\
= & \frac{qf(x) + f(qx + (1-q)a) - qf(c) - f(qc + (1-q)a)}{2q}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

eşitliği doğrudur.

İspat. $\bar{q}$ -integral tanımı, q -türevi ve değişken değiştirme özelliği kullanılırsa, o zaman,

$$\begin{aligned}
& \int_c^x {}_aD_q f(s) {}_ad_{\bar{q}}s \\
= & \int_c^x \frac{f(s) - f(qs + (1-q)a)}{(1-q)(s-a)} {}_ad_{\bar{q}}s \\
= & \int_a^x \frac{f(s) - f(qs + (1-q)a)}{(1-q)(s-a)} {}_ad_{\bar{q}}s - \int_a^c \frac{f(s) - f(qs + (1-q)a)}{(1-q)(s-a)} {}_ad_{\bar{q}}s \\
= & \int_a^x \frac{f(s)}{(1-q)(s-a)} {}_ad_{\bar{q}}s - \int_a^{qx+(1-q)a} \frac{f(s)}{(1-q)(s-a)} {}_ad_{\bar{q}}s \\
& - \int_a^c \frac{f(s)}{(1-q)(s-a)} {}_ad_{\bar{q}}s + \int_a^{qc+(1-q)a} \frac{f(s)}{(1-q)(s-a)} {}_ad_{\bar{q}}s \\
= & \frac{(1-q)(x-a)}{2q} \\
& \times \left[(1+q) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n f(q^n x + (1-q^n)a)}{(1-q)q^n(x-a)} - \frac{f(x)}{(1-q)(x-a)} \right] \\
& - \frac{(1-q)q(x-a)}{2q}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[(1+q) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n f(q^{n+1}x + (1-q^{n+1})a)}{(1-q)q^{n+1}(x-a)} - \frac{f(qx + (1-q)a)}{(1-q)q(x-a)} \right] \\
& - \frac{(1-q)(c-a)}{2q} \\
& \times \left[(1+q) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n f(q^n c + (1-q^n)a)}{(1-q)q^n(c-a)} - \frac{f(c)}{(1-q)(c-a)} \right] \\
& + \frac{(1-q)q(c-a)}{2q} \\
& \times \left[(1+q) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n f(q^{n+1}c + (1-q^{n+1})a)}{(1-q)q^{n+1}(c-a)} - \frac{f(qc + (1-q)a)}{(1-q)q(c-a)} \right] \\
& = \frac{1+q}{2q} \sum_{n=0}^{\infty} [f(q^n x + (1-q^n)a) - f(q^{n+1}x + (1-q^{n+1})a) \\
& \quad - f(q^n c + (1-q^n)a) + f(q^{n+1}c + (1-q^{n+1})a)] \\
& \quad + \frac{1}{2q} [-f(x) + f(qx + (1-q)a) + f(c) - f(qc + (1-q)a)] \\
& = \frac{f(x) - f(c)}{2} + \frac{f(qx + (1-q)a) - f(qc + (1-q)a)}{2q}
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da istenendir. □

Teorem 4.6. $f, g : J \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar olsun. O zaman $x \in J$ için

$$\int_a^x [f(s) + g(s)] {}_a d_{\bar{q}} s = \int_a^x f(s) {}_a d_{\bar{q}} s + \int_a^x g(s) {}_a d_{\bar{q}} s \quad (4.7)$$

$\bar{q}$ -integral özelliği sağlanır.

İspat. $\bar{q}$ -integral tanımı kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \int_a^x [f(s) + g(s)] {}_a d_{\bar{q}} s \\
& = \frac{(1-q)(x-a)}{2q} \\
& \quad \times \left\{ (1+q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n [f(q^n x + (1-q^n)a) + g(q^n x + (1-q^n)a)] \right. \\
& \quad \left. - f(x) - g(x) \right\} \\
& = \frac{(1-q)(x-a)}{2q} \left[(1+q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n x + (1-q^n)a) - f(x) \right] \\
& \quad + \frac{(1-q)(x-a)}{2q} \left[(1+q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n g(q^n x + (1-q^n)a) - g(x) \right]
\end{aligned}$$

$$= \int_a^x f(s) {}_a d_{\bar{q}} s + \int_a^x g(s) {}_a d_{\bar{q}} s$$

eşitliğine ulaşılır ve böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 4.7. $f, g : J \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar olsun. O zaman $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $x \in J$ için

$$\int_a^x (\alpha f)(s) {}_a d_{\bar{q}} s = \alpha \int_a^x f(s) {}_a d_{\bar{q}} s \quad (4.8)$$

eşitliği doğrudur.

İspat. $\bar{q}$ -integral tanımı kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \int_a^x (\alpha f)(s) {}_a d_{\bar{q}} s \\ &= \frac{(1-q)(x-a)}{2q} \left[(1+q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n (\alpha f)(q^n x + (1-q^n)a) - (\alpha f)(x) \right] \\ &= \alpha \frac{(1-q)(x-a)}{2q} \left[(1+q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n x + (1-q^n)a) - f(x) \right] \\ &= \alpha \int_a^x f(s) {}_a d_{\bar{q}} s \end{aligned}$$

Denklem (4.8) elde edilir. $\square$

Teorem 4.8. $f, g : J \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar olsun. O zaman $x \in J$ için $\bar{q}$ -kısmi integrasyon özelliği,

$$\begin{aligned} & \int_c^x f(s) {}_a D_q g(s) {}_a d_{\bar{q}} s \\ &= \frac{qf(s)g(s) + f(qs + (1-q)a)g(qs + (1-q)a)}{2q} \Big|_c^x \\ & \quad - \int_c^x g(qs + (1-q)a) {}_a D_q f(s) {}_a d_{\bar{q}} s \end{aligned} \quad (4.9)$$

olarak ifade edilir.

İspat. q -türev kullanılırsa,

$${}_a D_q f(s) g(s)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{f(s)g(s) - f(qs + (1-q)a)g(qs + (1-q)a)}{(1-q)(s-a)} \\
&= \frac{f(s)g(s) - f(qs + (1-q)a)g(qs + (1-q)a)}{(1-q)(s-a)} \\
&\quad - \frac{f(s)g(qs + (1-q)a)}{(1-q)(s-a)} + \frac{f(s)g(qs + (1-q)a)}{(1-q)(s-a)} \\
&= f(s) \frac{g(s) - g(qs + (1-q)a)}{(1-q)(s-a)} \\
&\quad + g(qs + (1-q)a) \frac{f(s) - f(qs + (1-q)a)}{(1-q)(s-a)} \\
&= f(s) {}_aD_q g(s) + g(qs + (1-q)a) {}_aD_q f(s)
\end{aligned}$$

bulunur ve $\bar{q}$ -integral alınır,

$$\begin{aligned}
&\int_c^x {}_aD_q f(s) g(s) {}_ad_{\bar{q}}s \\
&= \int_c^x f(s) {}_aD_q g(s) {}_ad_{\bar{q}}s + \int_c^x g(qs + (1-q)a) {}_aD_q f(s) {}_ad_{\bar{q}}s
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Ardından Denklem (4.6) uygulansın,

$$\begin{aligned}
&\left. \frac{qf(s)g(s) + f(qs + (1-q)a)g(qs + (1-q)a)}{2q} \right|_c^x \\
&= \int_c^x f(s) {}_aD_q g(s) {}_ad_{\bar{q}}s + \int_c^x g(qs + (1-q)a) {}_aD_q f(s) {}_ad_{\bar{q}}s
\end{aligned}$$

ve gerekli düzenleme yapılırsa,

$$\begin{aligned}
&\int_c^x f(s) {}_aD_q g(s) {}_ad_{\bar{q}}s \\
&= \left. \frac{qf(s)g(s) + f(qs + (1-q)a)g(qs + (1-q)a)}{2q} \right|_c^x \\
&\quad - \int_c^x g(qs + (1-q)a) {}_aD_q f(s) {}_ad_{\bar{q}}s
\end{aligned}$$

istenen sonuç elde edilir. □

Teorem 4.9. $[\alpha]_q = \frac{1-q^\alpha}{1-q}$ olmak üzere $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ için polinom fonksiyonların $\bar{q}$ -

integrali,

$$\int_a^x (s-a)^\alpha {}_a d_{\bar{q}} s = \frac{1+q^\alpha}{2[\alpha+1]_q} (x-a)^{\alpha+1} \quad (4.10)$$

dir.

İspat. Polinom fonksiyonların $\bar{q}$ -integrali hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} & \int_a^x (s-a)^\alpha {}_a d_{\bar{q}} s \\ &= \frac{(1-q)(x-a)}{2q} \\ & \quad \times \left[(1+q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n (q^n x + (1-q^n)a - a)^\alpha - (x-a)^\alpha \right] \\ &= \frac{(1-q)(x-a)}{2q} \left[(1+q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n (q^n (x-a))^\alpha - (x-a)^\alpha \right] \\ &= \frac{(1-q)(x-a)}{2q} \left[(1+q)(x-a)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} (q^{\alpha+1})^n - (x-a)^\alpha \right] \\ &= \frac{(1-q)(x-a)^{\alpha+1}}{2q} \left[\frac{(1+q)}{1-q^{\alpha+1}} - 1 \right] \\ &= \left(\frac{1-q}{1-q^{\alpha+1}} \right) \left(\frac{1+q^\alpha}{2} \right) (x-a)^{\alpha+1} = \frac{1+q^\alpha}{2[\alpha+1]_q} (x-a)^{\alpha+1} \end{aligned}$$

bulunur ve Notasyon (1.19) ile birlikte ispat tamamlanır. $\square$

4.2. $\bar{q}$ -HERMİTE-HADAMARD EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümde, konvex fonksiyonlar için $\bar{q}$ -Hermite-Hadamard tipli inetgral eşitsizlikleri elde edilecektir. $0 < q \leq 1$ için ispatlarda Şekil 2.1'deki grafikten yararlanılacaktır.

Teorem 4.10 ($\bar{q}$ -Hermite-Hadamard Eşitsizliği). $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ bir konveks fonksiyon ve $0 < q < 1$ olmak üzere

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) {}_a d_{\bar{q}} x \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \quad (4.11)$$

eşitsizliğine $\bar{q}$ -Hermite-Hadamard integral eşitsizliği denir.

İspat. $f, (a, b)$ üzerinde differansiyellenebilir olduğundan, f nin $\frac{a+b}{2} \in (a, b)$ noktasında bir teğet doğrusu vardır. Bu teğet doğrusunun denklemi, $h_2(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(x - \frac{a+b}{2})$

olarak yazılabilir. $\forall x \in [a, b]$ için f , $[a, b]$ üzerinde konveks bir fonksiyon olduğundan Eşitsizlik (4.12) yazılabilir (Şekil 2.1). Öyle ki,

$$h_2(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) \leq f(x). \quad (4.12)$$

Burada, $[a, b]$ üzerinde Eşitsizlik (4.12)'nin $\bar{q}$ -integrali alınır,

$$\begin{aligned} & \int_a^b h_2(x) {}_a d_{\bar{q}} x \\ &= \int_a^b \left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) \right] {}_a d_{\bar{q}} x \\ &= (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b \left(x - a + \frac{a-b}{2}\right) {}_a d_{\bar{q}} x \\ &= (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ & \quad \times \left[\left(\frac{1-q}{1-q^2}\right) \left(\frac{1+q}{2}\right) (x-a)^2 \Big|_a^b + \frac{a-b}{2} (b-a) \right] \\ &= (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \left[\frac{(b-a)^2}{2} - \frac{(b-a)^2}{2} \right] \\ &= (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(x) {}_a d_{\bar{q}} x \end{aligned} \quad (4.13)$$

elde edilir. Öte yandan $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarından geçen $k(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ doğrusu f yi bu noktalarda keser. $\forall x \in [a, b]$ için f , $[a, b]$ üzerinde konveks bir fonksiyon olduğundan Eşitsizlik (4.14) yazılabilir (Şekil 2.1). Yani,

$$f(x) \leq k(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a). \quad (4.14)$$

$[a, b]$ üzerinde Eşitsizlik (4.14)'e $\bar{q}$ -integral tanımı uygulanırsa,

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x) {}_a d_{\bar{q}} x \\ & \leq \int_a^b k(x) {}_a d_{\bar{q}} x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \right) {}_a d_{\bar{q}} x \\
&= (b - a) f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \int_a^b (x - a) {}_a d_{\bar{q}} x \\
&= (b - a) f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \left(\frac{1 - q}{1 - q^2} \right) \left(\frac{1 + q}{2} \right) (x - a)^2 \Big|_a^b \\
&= (b - a) f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \frac{(b - a)^2}{2}
\end{aligned}$$

bulunur ve gerekli düzenlemelerle birlikte,

$$(b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2} \geq \int_a^b f(x) {}_a d_{\bar{q}} x \quad (4.15)$$

elde edilir. Böylece, Eşitsizlik (4.13) ve Eşitsizlik (4.15) birlikte Eşitsizlik (4.11)'i verir ve ispat tamamlanır. $\square$

Not 4.11. Teorem 4.11'de $q \rightarrow 1^-$ alınırsa konveks fonksiyonlar için klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.12. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $[a, b]$ üzerinde differansiyellenebilir konveks bir fonksiyon ve $0 < q < 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&f\left(\frac{qa + b}{1 + q}\right) + \frac{q - 1}{1 + q} \frac{(b - a)}{2} f'\left(\frac{qa + b}{1 + q}\right) \\
&\leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) {}_a d_{\bar{q}} x \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}
\end{aligned} \quad (4.16)$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. f , (a, b) üzerinde differansiyellenebilir olduğundan, f nin $\frac{qa + b}{1 + q} \in (a, b)$ noktasında bir teğet doğrusu vardır. Bu teğet doğrusunun denklemi, $h(x) = f\left(\frac{qa + b}{1 + q}\right) + f'\left(\frac{qa + b}{1 + q}\right) \left(x - \frac{qa + b}{1 + q}\right)$ olarak yazılabilir. f , $[a, b]$ üzerinde konveks bir fonksiyon olduğundan $\forall x \in [a, b]$ için Eşitsizlik (4.17) yazılabilir (Bakınız Şekil 2.1):

$$h(x) = f\left(\frac{qa + b}{1 + q}\right) + f'\left(\frac{qa + b}{1 + q}\right) \left(x - \frac{qa + b}{1 + q}\right) \leq f(x). \quad (4.17)$$

Burada, $[a, b]$ üzerinde Eşitsizlik (4.17)'nin $\bar{q}$ -integrali alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \int_a^b f(x) {}_a d_{\bar{q}} x \\
& \geq \int_a^b h(x) {}_a d_{\bar{q}} x \\
& = \int_a^b \left[f\left(\frac{qa+b}{1+q}\right) + f'\left(\frac{qa+b}{1+q}\right) \left(x - \frac{qa+b}{1+q}\right) \right] {}_a d_{\bar{q}} x \\
& = (b-a) f\left(\frac{qa+b}{1+q}\right) + f'\left(\frac{qa+b}{1+q}\right) \left[\int_a^b \left(x - a + \frac{a-b}{1+q}\right) {}_a d_{\bar{q}} x \right] \\
& = (b-a) f\left(\frac{qa+b}{1+q}\right) + f'\left(\frac{qa+b}{1+q}\right) \\
& \quad \times \left[\left(\frac{1-q}{1-q^2}\right) \left(\frac{1+q}{2}\right) (x-a)^2 \Big|_a^b + \frac{a-b}{1+q} (b-a) \right] \\
& = (b-a) f\left(\frac{qa+b}{1+q}\right) + f'\left(\frac{qa+b}{1+q}\right) \left[\frac{(b-a)^2}{2} - \frac{(b-a)^2}{1+q} \right]
\end{aligned}$$

ve gerekli düzenleme yapılırsa,

$$(b-a) f\left(\frac{qa+b}{1+q}\right) + \frac{q-1}{1+q} \frac{(b-a)^2}{2} f'\left(\frac{qa+b}{1+q}\right) \leq \int_a^b f(x) {}_a d_{\bar{q}} x \quad (4.18)$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla, Eşitsizlik (4.18) ve Eşitsizlik (4.15) birlikte Eşitsizlik (4.16)'yı verir böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

Teorem 4.13. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $[a, b]$ üzerinde differansiyellenebilir konveks bir fonksiyon ve $0 < q < 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{a+qb}{1+q}\right) + \frac{1-q}{1+q} \frac{b-a}{2} f'\left(\frac{a+qb}{1+q}\right) \\
& \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) {}_a d_{\bar{q}} x \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}
\end{aligned} \quad (4.19)$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. f , (a, b) üzerinde differansiyellenebilir olduğundan, f nin $\frac{a+qb}{1+q} \in (a, b)$ noktasında bir teğet doğrusu vardır. Bu teğet doğrusunun denklemi, $h_1(x) = f\left(\frac{a+qb}{1+q}\right) +$

$f' \left(\frac{a+qb}{1+q} \right) \left(x - \frac{a+qb}{1+q} \right)$ olarak yazılabilir. $f, [a, b]$ üzerinde konveks bir fonksiyon olduğundan $\forall x \in [a, b]$ için Eşitsizlik (4.20) yazılabilir (Bakınız Şekil 2.1):

$$h_1(x) = f \left(\frac{a+qb}{1+q} \right) + f' \left(\frac{a+qb}{1+q} \right) \left(x - \frac{a+qb}{1+q} \right) \leq f(x). \quad (4.20)$$

$[a, b]$ üzerinde Eşitsizlik (4.20)'ye $\bar{q}$ -integral uygulanırsa,

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x) {}_a d_{\bar{q}} x \\ & \geq \int_a^b h_1(x) {}_a d_{\bar{q}} x \\ & = \int_a^b \left[f \left(\frac{a+qb}{1+q} \right) + f' \left(\frac{a+qb}{1+q} \right) \left(x - \frac{a+qb}{1+q} \right) \right] {}_a d_{\bar{q}} x \\ & = (b-a) f \left(\frac{a+qb}{1+q} \right) + f' \left(\frac{a+qb}{1+q} \right) \int_a^b \left(x - a + q \frac{a-b}{1+q} \right) {}_a d_{\bar{q}} x \\ & = (b-a) f \left(\frac{a+qb}{1+q} \right) + f' \left(\frac{a+qb}{1+q} \right) \left[\frac{(b-a)^2}{2} - q \frac{(b-a)^2}{1+q} \right] \end{aligned}$$

bulunur ve gerekli düzenleme yapılırsa,

$$(b-a) f \left(\frac{a+qb}{1+q} \right) + \frac{1-q}{1+q} \frac{(b-a)^2}{2} f' \left(\frac{a+qb}{1+q} \right) \leq \int_a^b f(x) {}_a d_{\bar{q}} x \quad (4.21)$$

eşitsizliği elde edilir. Eşitsizlik (4.15) ve Eşitsizlik (4.21) birlikte Eşitsizlik (4.19)'ü ispatlar. $\square$

Teorem 4.14 (Genelleştirilmiş $\bar{q}$ -Hermite-Hadamard Eşitsizliği). $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) üzerinde differansiyellenebilir konveks bir fonksiyon olsun. $0 < q < 1$ ve

$$\begin{aligned} I_1 &= f \left(\frac{a+b}{2} \right), \\ I_2 &= f \left(\frac{qa+b}{1+q} \right) + \frac{q-1}{1+q} \frac{(b-a)}{2} f' \left(\frac{qa+b}{1+q} \right), \\ I_3 &= f \left(\frac{a+qb}{1+q} \right) + \frac{1-q}{1+q} \frac{b-a}{2} f' \left(\frac{a+qb}{1+q} \right) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\max \{I_1, I_2, I_3\} \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) {}_a d_{\bar{q}} x \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (4.22)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Eşitsizlik (4.11), Eşitsizlik (4.16), ve Eşitsizlik (4.19)'un sol taraflarının maksimum değeri seçilirse Eşitsizlik (4.22) elde edilir ve ispat tamamlanmış olur. $\square$



5. $\bar{q}$ -İNTEGRAL İÇİN $\bar{q}$ -EŞİTSİZLİKLER

B bölümde, klasik integral eşitsizliklerinin $\bar{q}$ -integral için versiyonları ispatlanacaktır. $\bar{q}$ -Young, $\bar{q}$ -Hölder, $\bar{q}$ -Minkowski eşitsizlikleri verildikten sonra bu eşitsizlikler yardımıyla $\bar{q}$ -Ostrowski tipli integral eşitsizlikleri elde edilecektir. Bu bölümde elde edilen sonuçlar çalışma [52]'de yer almıştır.

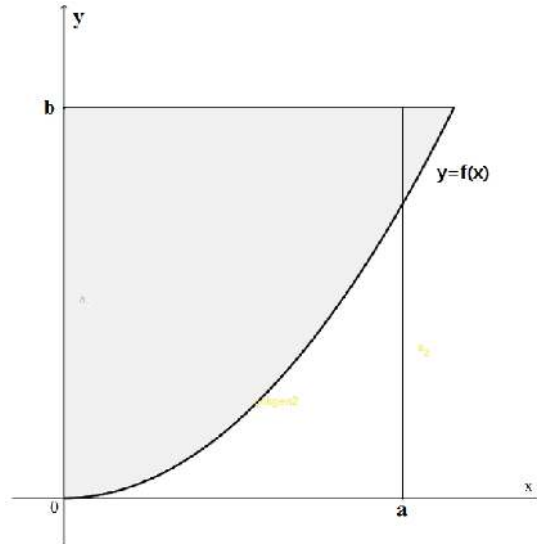
5.1. $\bar{q}$ -YOUNG, $\bar{q}$ -HÖLDER VE $\bar{q}$ -MINKOWSKI EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümde, $\bar{q}$ -integral üzerinde $\bar{q}$ -Young, $\bar{q}$ -Hölder ve $\bar{q}$ -Minkowski eşitsizlikleri elde edilecektir.

Teorem 5.1 ($\bar{q}$ -Young Eşitsizliği). $a > 0, b > 0$ ve $p > 1$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1$ olmak üzere

$$a.b \leq \frac{1+q^{p-1}}{2[p]_q} a^p + \frac{1+q^{r-1}}{2[r]_q} b^r \quad (5.1)$$

eşitsizliği sağlanır.



Şekil 5.1. $y = x^p$ fonksiyonunun grafiği

İspat. $a, b > 0$ ve $p > 1$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1$ olmak üzere $y = x^{p-1}$ fonksiyonu seçilsin ve $y = x^{p-1}$ fonksiyonunun grafiği Şekil 5.1 göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
s_1 &= \int_0^a x^{p-1} {}_a d_{\bar{q}} x = \frac{1-q}{1-q^p} \frac{1+q^{p-1}}{2} a^p \\
s_2 &= \int_0^b y^{\frac{1}{p-1}} {}_a d_{\bar{q}} y = \frac{1-q}{1-q^{\frac{p}{p-1}}} \frac{1+q^{\frac{1}{p-1}}}{2} b^{\frac{p}{p-1}} = \frac{1-q}{1-q^r} \frac{1+q^{r-1}}{2} b^r
\end{aligned}$$

yazılabilir. $y = x^{p-1}$ fonksiyonunun grafiğinden,

$$a.b \leq s_1 + s_2 = \frac{1-q}{2} \left[\frac{1+q^{p-1}}{1-q^p} a^p + \frac{1+q^{r-1}}{1-q^r} b^r \right]$$

$$a.b \leq \frac{1+q^{p-1}}{2[p]_q} a^p + \frac{1+q^{r-1}}{2[r]_q} b^r$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanmış olur. □

Not 5.2. Eşitsizlik (5.1)'de $q \rightarrow 1^-$ seçilirse klasik Young eşitsizliği elde edilir [34].

Teorem 5.3 ($\bar{q}$ -Hölder Eşitsizliği). $p > 1$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1$ ve

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p {}_a d_{\bar{q}} t \right)^{\frac{1}{p}}$$

olmak üzere,

$$\int_a^b |f(t)g(t)| {}_a d_{\bar{q}} t \leq \left[\frac{1+q^{p-1}}{2[p]_q} + \frac{1+q^{r-1}}{2[r]_q} \right] \|f\|_p \|g\|_r \quad (5.2)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $a = \frac{|f(t)|}{\|f\|_p}$, $b = \frac{|g(t)|}{\|g\|_r}$ seçilir ve $\bar{q}$ -Young eşitsizliği kullanılırsa,

$$\frac{|f(t)|}{\|f\|_p} \frac{|g(t)|}{\|g\|_r} \leq \frac{1+q^{p-1}}{2[p]_q} \frac{|f(t)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1+q^{r-1}}{2[r]_q} \frac{|g(t)|^r}{\|g\|_r^r} \quad (5.3)$$

eşitliği elde edilir. Şimdi $[a, b]$ üzerinde Eşitsizlik (5.3)'e $\bar{q}$ -integral uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\|f\|_p \|g\|_r} \int_a^b |f(t)g(t)| {}_a d_{\bar{q}} t \\
& \leq \frac{1+q^{p-1}}{2[p]_q} \frac{1}{\|f\|_p^p} \int_a^b |f(t)|^p {}_a d_{\bar{q}} t + \frac{1+q^{r-1}}{2[r]_q} \frac{1}{\|g\|_r^r} \int_a^b |g(t)|^r {}_a d_{\bar{q}} t \\
& \leq \frac{1+q^{p-1}}{2[p]_q} + \frac{1+q^{r-1}}{2[r]_q}
\end{aligned}$$

bulunur ve buradan,

$$\int_a^b |f(t)g(t)| {}_a d_{\bar{q}} t \leq \left[\frac{1+q^{p-1}}{2[p]_q} + \frac{1+q^{r-1}}{2[r]_q} \right] \|f\|_p \|g\|_r$$

elde edilerek ispat tamamlanmış olur. $\square$

Not 5.4. Eşitsizlik (5.2)'de $q \rightarrow 1^-$ alınırsa klasik Hölder eşitsizliği elde edilir.

Teorem 5.5 ($\bar{q}$ -Minkowski Eşitsizliği). $p > 1$ olmak üzere

$$\|f + g\|_p \leq \left[\frac{1+q^{p-1}}{2[p]_q} + \frac{1+q^{r-1}}{2[r]_q} \right] (\|f\|_p + \|g\|_p) \quad (5.4)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $\bar{q}$ -Hölder eşitsizliği yardımıyla,

$$\begin{aligned}
& \|f + g\|_p^p \\
& \leq \int_a^b |f(t)| |f(t) + g(t)|^{p-1} {}_a d_{\bar{q}} t + \int_a^b |g(t)| |f(t) + g(t)|^{p-1} {}_a d_{\bar{q}} t \\
& \leq \left[\frac{1+q^{p-1}}{2[p]_q} + \frac{1+q^{r-1}}{2[r]_q} \right] \left(\int_a^b |f(t) + g(t)|^{r(p-1)} {}_a d_{\bar{q}} t \right)^{\frac{1}{r}} \\
& \quad \times \left(\left[\int_a^b |f(t)|^p {}_a d_{\bar{q}} t \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_a^b |g(t)|^p {}_a d_{\bar{q}} t \right]^{\frac{1}{p}} \right)
\end{aligned}$$

yazılabilir. $r(p-1) = p$ kullanılırsa,

$$\|f + g\|_p \leq \left[\frac{1 + q^{p-1}}{2[p]_q} + \frac{1 + q^{r-1}}{2[r]_q} \right] (\|f\|_p + \|g\|_p)$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanmış olur. $\square$

Not 5.6. Eşitsizlik (5.4)'de $q \rightarrow 1^-$ alınırsa klasik Minkowski eşitsizliği elde edilir.

5.2. OSTROWSKI TIPLİ $\bar{q}$ -EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde, $\bar{q}$ -Ostrowski tipli integral eşitsizleri ispatlanacaktır. Bunun için önce aşağıdaki lemma ispatlanacaktır. Son olarak elde edilen lemma kullanılarak, $\bar{q}$ -integral için Ostrowski tipli integral eşitsizlikleri elde edilecektir.

Lemma 5.7. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) üzerinde q -diferansiyellenebilir bir konveks fonksiyon ve $0 < q < 1$ olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b-a} \left[\int_a^x (t-a) {}_aD_q f(t) {}_a d_{\bar{q}} t + \int_x^b (t-b) {}_aD_q f(t) {}_a d_{\bar{q}} t \right] \\ &= \frac{1}{2q} [qf(x) + f(qx + (1-q)a) - (1-q)f(qb + (1-q)a)] \\ & \quad - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(qt + (1-q)a) {}_a d_{\bar{q}} t. \end{aligned} \quad (5.5)$$

eşitliği doğrudur.

İspat. Denklem (4.9) yardımıyla,

$$\begin{aligned} & \int_a^x (t-a) {}_aD_q f(t) {}_a d_{\bar{q}} t + \int_x^b (t-b) {}_aD_q f(t) {}_a d_{\bar{q}} t \\ &= \frac{q(t-a)f(t) + (qt + (1-q)a - a)f(qt + (1-q)a)}{2q} \Big|_a^x \\ & \quad - \int_a^x f(qt + (1-q)a) {}_aD_q (t-a) {}_a d_{\bar{q}} t \\ & \quad + \frac{q(t-b)f(t) + (qt + (1-q)a - b)f(qt + (1-q)a)}{2q} \Big|_x^b \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned}
& - \int_x^b f(qt + (1-q)a) {}_aD_q(t-b) {}_ad_{\bar{q}}t \\
&= \frac{q(b-a)f(x) + (b-a)f(qx + (1-q)a) - (1-q)(b-a)f(qb + (1-q)a)}{2q} \\
& - \int_a^b f(qt + (1-q)a) {}_ad_{\bar{q}}t \\
&= \frac{b-a}{2q} [qf(x) + f(qx + (1-q)a) - (1-q)f(qb + (1-q)a)] \\
& - \int_a^b f(qt + (1-q)a) {}_ad_{\bar{q}}t
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ve Denklem (5.6), $(b-a)$ ile bölünürse ispat tamamlanır. $\square$

Not 5.8. Lemma 5.7’de $q \rightarrow 1^-$ alınırsa konveks fonksiyonlar için

$$\frac{1}{b-a} \left[\int_a^x (t-a) f'(t) dt + \int_x^b (t-b) f'(t) dt \right] = f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

eşitliği elde edilir [37].

Lemma 5.9. $p > 1$ ve $(a-t)_q^p$ bir q -binom olmak üzere,

$$\int_0^x (a-t)_q^p {}_0d_{\bar{q}}t = \frac{1}{2[p+1]_q} \left(1 + q - q \left(a - \frac{x}{q} \right)_q^{p+1} - (a-x)_q^{p+1} \right) \quad (5.7)$$

eşitliği doğrudur.

İspat. q -binom formülü ve Denklem (4.10) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \int_0^x (a-t)_q^p {}_ad_{\bar{q}}t \\
&= \int_0^x \sum_{n=0}^p (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} pn_q a^{p-n} t^n {}_0d_{\bar{q}}t \\
&= \sum_{n=0}^p (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} pn_q a^{p-n} \int_0^x t^n {}_0d_{\bar{q}}t \\
&= \sum_{n=0}^p (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} pn_q a^{p-n} \frac{1+q^n}{2[n+1]_q} x^{n+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^p (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{[p]_q!}{[p-n]_q! [n+1]_q!} a^{p-n} x^{n+1} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^p (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{[p]_q!}{[p-n]_q! [n+1]_q!} q^n a^{p-n} x^{n+1} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{p+1} (-1)^{n-1} q^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \frac{[p]_q!}{[p-n+1]_q! [n]_q!} a^{p-n+1} x^n \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{p+1} (-1)^{n-1} q^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \frac{[p]_q!}{[p-n+1]_q! [n]_q!} q^{n-1} a^{p-n+1} x^n \\
&= -\frac{q}{2[p+1]_q} \sum_{n=1}^{p+1} (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} p+1 n_q a^{p+1-n} \left(\frac{x}{q}\right)^n \\
&\quad - \frac{1}{2[p+1]_q} \sum_{n=1}^{p+1} (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}]p+1 n_q a^{p+1-n} x^n \\
&= -\frac{q}{2[p+1]_q} \left[\left(a - \frac{x}{q}\right)_q^{p+1} - 1 \right] - \frac{1}{2[p+1]_q} \left[(a-x)_q^{p+1} - 1 \right] \\
&= \frac{1+q}{2[p+1]_q} - \frac{1}{2[p+1]_q} \left[q \left(a - \frac{x}{q}\right)_q^{p+1} + (a-x)_q^{p+1} \right] \\
&= \frac{1}{2[p+1]_q} \left(1+q - q \left(a - \frac{x}{q}\right)_q^{p+1} - (a-x)_q^{p+1} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

Örnek 5.10. $p > 1$ ve $(a-t)_q^p$ q -binom olsun. Bu durumda,

$$\int_0^1 (1-t)_q^p {}_0d_{\bar{q}}t = \frac{1+q}{2[p+1]_q} \quad (5.8)$$

eşitliği doğrudur.

İspat. Denklem (5.7)'de $a = 1$ ve $x = 1$ seçilirse,

$$\int_0^1 (1-t)_q^p {}_0d_{\bar{q}}t = \frac{1}{2[p+1]_q} \left(1+q - q \left(1 - \frac{1}{q}\right)_q^{p+1} - (1-1)_q^{p+1} \right)$$

bulunur. Burada, $\left(1 - \frac{1}{q}\right)_q^{p+1} = \left(1 - \frac{1}{q}\right) \left(1 - \frac{q}{q}\right) \left(1 - \frac{q^2}{q}\right) \dots = 0$ olduğundan

$$\int_0^1 (1-t)_q^p {}_0d_{\bar{q}}t = \frac{1+q}{2[p+1]_q}$$

eşitliğine ulaşılır ve ispat tamamlanır. $\square$

Şimdi yukarıdaki yardımcı sonuçlar yardımıyla, $\bar{q}$ -Ostrowski tipli integral eşitsizleri elde edilecektir.

Teorem 5.11. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) üzerinde q -diferansiyellenebilir konveks bir fonksiyon ve $\forall x \in [a, b]$ için $\left| {}_a D_q f(x) \right| \leq M$ olsun. $\forall x \in [a, b]$ ve $0 < q < 1$ için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2q} [qf(x) + f(qx + (1-q)a) - (1-q)f(qb + (1-q)a)] \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(qt + (1-q)a) {}_a d_{\bar{q}} t \right| \\ & \leq (b-a) M \left[\frac{1}{4} + \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2} \right] \end{aligned} \quad (5.9)$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. Denklem (5.5)'de mutlak değer kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(b-a)}{2q} [qf(x) + f(qx + (1-q)a) - (1-q)f(qb + (1-q)a)] \right. \\ & \quad \left. - \int_a^b f(qt + (1-q)a) {}_a d_{\bar{q}} t \right| \\ & \leq \int_a^x |t-a| \left| {}_a D_q f(t) \right| {}_a d_{\bar{q}} t + \int_x^b |t-b| \left| {}_a D_q f(t) \right| {}_a d_{\bar{q}} t \\ & \leq M \int_a^x (t-a) {}_a d_{\bar{q}} t + M \int_x^b (b-t) {}_a d_{\bar{q}} t \\ & = M \frac{(1+q)(t-a)^2}{2[2]_q} \Big|_a^x \\ & \quad - M \left[\frac{(1+q)(t-a)^2}{2[2]_q} + (a-b)(t-a) \right] \Big|_x^b \\ & = M \left[(x-a)^2 + (b-a) \left(\frac{a+b}{2} - x \right) \right] \\ & = (b-a)^2 M \left[\frac{1}{4} + \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2} \right] \end{aligned} \quad (5.10)$$

elde edilir ve Eşitsizlik (5.10), $(b-a)$ ile bölünürse ispat tamamlanmış olur. $\square$

Not 5.12. Eşitsizlik (5.9)'de $q \rightarrow 1^-$ alınırsa Eşitsizlik (1.17) elde edilir.

Teorem 5.13. $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde q -diferansiyellenebilir konveks bir fonksiyon ve $\forall x \in I^\circ$ için $|{}_a D_q f(x)|$ konveks ve $a, b \in I$ olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2q} [qf(x) + f(qx + (1-q)a) - (1-q)f(qb + (1-q)a)] \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(qt + (1-q)a) {}_a d_{\bar{q}} t \right| \\ & \leq \frac{q}{2[3]_q} \left(\frac{(x-a)^2 |{}_a D_q f(a)| + (b-x)^2 |{}_a D_q f(b)|}{b-a} \right) \\ & \quad + \frac{1+q^2}{2[3]_q} \frac{(x-a)^2 + (b-x)^2}{b-a} |{}_a D_q f(x)|. \end{aligned} \quad (5.11)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Lemma 5.7'de değişken değiştirme yöntemi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \int_a^x (t-a) {}_a D_q f(t) {}_a d_{\bar{q}} t + \int_x^b (t-b) {}_a D_q f(t) {}_a d_{\bar{q}} t \\ & = (x-a)^2 \int_0^1 t {}_a D_q f(xt + (1-t)a) {}_0 d_{\bar{q}} t \\ & \quad + (b-x)^2 \int_0^1 (t-1) {}_a D_q f(bt + (1-t)x) {}_0 d_{\bar{q}} t. \end{aligned} \quad (5.12)$$

elde edilir. Burada, Denklem (5.5), Denklem (5.12) ve $\frac{1}{2} - \frac{1+q^2}{2[3]_q} = \frac{q}{2[3]_q}$ eşitliği ile birlikte $|{}_a D_q f(x)|$ nin konveksliği dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2q} [qf(x) + f(qx + (1-q)a) - (1-q)f(qb + (1-q)a)] \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(qt + (1-q)a) {}_a d_{\bar{q}} t \right| \\ & = \frac{1}{b-a} \left| \int_a^x (t-a) {}_a D_q f(t) {}_a d_{\bar{q}} t + \int_x^b (t-b) {}_a D_q f(t) {}_a d_{\bar{q}} t \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{(x-a)^2}{b-a} \int_0^1 t {}_aD_q f(xt + (1-t)a) {}_0d_{\bar{q}}t \right. \\
&\quad \left. + \frac{(b-x)^2}{b-a} \int_0^1 (t-1) {}_aD_q f(bt + (1-t)x) {}_0d_{\bar{q}}t \right| \\
&\leq \frac{(x-a)^2}{b-a} \int_0^1 t \left(t \left| {}_aD_q f(x) \right| + (1-t) \left| {}_aD_q f(a) \right| \right) {}_0d_{\bar{q}}t \\
&\quad + \frac{(b-x)^2}{b-a} \int_0^1 (1-t) \left(t \left| {}_aD_q f(b) \right| + (1-t) \left| {}_aD_q f(x) \right| \right) {}_0d_{\bar{q}}t \\
&= \frac{(x-a)^2}{b-a} \left[\frac{1+q^2}{2[3]_q} \left| {}_aD_q f(x) \right| + \left(\frac{1}{2} - \frac{1+q^2}{2[3]_q} \right) \left| {}_aD_q f(a) \right| \right] \\
&\quad + \frac{(b-x)^2}{b-a} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1+q^2}{2[3]_q} \right) \left| {}_aD_q f(b) \right| + \frac{1+q^2}{2[3]_q} \left| {}_aD_q f(x) \right| \right] \\
&= \frac{q}{2[3]_q} \frac{(x-a)^2 \left| {}_aD_q f(a) \right| + (b-x)^2 \left| {}_aD_q f(b) \right|}{b-a} \\
&\quad + \frac{1+q^2}{2[3]_q} \frac{(x-a)^2 + (b-x)^2}{b-a} \left| {}_aD_q f(x) \right|
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 5.14. $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilir konveks bir fonksiyon ve $\forall x \in I^\circ$ için $|f'(x)|$ konveks ve $a, b \in I$ olsun. O zaman,

$$\begin{aligned}
&\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| \\
&\leq \frac{(x-a)^2 |f'(a)| + (b-x)^2 |f'(b)|}{6(b-a)} + \frac{(x-a)^2 + (b-x)^2}{3(b-a)} |f'(x)|
\end{aligned} \tag{5.13}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Eşitsizlik (5.11)'de $q \rightarrow 1^-$ alınırsa istenen Eşitsizlik (5.13) elde edilir. $\square$

Teorem 5.15. $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $|{}_aD_q f(x)|^r$, I° üzerinde $p > 1$ olmak üzere $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1$ ve $a, b \in I$ için q -diferansiyellenebilir konveks fonksiyonlar olsun. O zaman,

$$\left| \frac{1}{2q} [qf(x) + f(qx + (1-q)a) - (1-q)f(qb + (1-q)a)] \right| \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{1}{b-a} \int_a^b f(qt + (1-q)a) {}_a d_{\bar{q}} t \right| \\
& \leq \left[\frac{1+q^{p-1}}{4[p]_q} + \frac{1+q^{r-1}}{4[r]_q} \right] \\
& \quad \times \left\{ \frac{(x-a)^2}{b-a} \left(\frac{1+q^p}{[p+1]_q} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\left| {}_a D_q f(x) \right|^r + \left| {}_a D_q f(a) \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right. \\
& \quad \left. + \frac{(b-x)^2}{b-a} \left(\frac{1+q}{[p+1]_q} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\left| {}_a D_q f(b) \right|^r + \left| {}_a D_q f(x) \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Denklem (5.5) ve Denklem (5.12) yardımıyla,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(b-a)}{2q} [qf(x) + f(qx + (1-q)a) - (1-q)f(qb + (1-q)a)] \right. \\
& \quad \left. - \int_a^b f(qt + (1-q)a) {}_a d_{\bar{q}} t \right| \\
& \leq (x-a)^2 \int_0^1 t \left| {}_a D_q f(xt + (1-t)a) \right| {}_0 d_{\bar{q}} t \\
& \quad + (b-x)^2 \int_0^1 (1-t) \left| {}_a D_q f(bt + (1-t)x) \right| {}_0 d_{\bar{q}} t
\end{aligned}$$

bulunur ve $\bar{q}$ -Hölder eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(b-a)}{2q} [qf(x) + f(qx + (1-q)a) - (1-q)f(qb + (1-q)a)] \right. \\
& \quad \left. - \int_a^b f(qt + (1-q)a) {}_a d_{\bar{q}} t \right| \\
& \leq \left[\frac{1+q^{p-1}}{2[p]_q} + \frac{1+q^{r-1}}{2[r]_q} \right] \left\{ (x-a)^2 \left(\int_0^1 t^p \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \left\{ t \left| {}_a D_q f(x) \right|^r + (1-t) \left| {}_a D_q f(a) \right|^r \right\} {}_0 d_{\bar{q}} t \right)^{\frac{1}{r}} \\
& \quad \left. + (b-x)^2 \left(\int_0^1 (1-t)^p {}_0 d_{\bar{q}} t \right)^{\frac{1}{p}} \right\}
\end{aligned}$$

$$\times \left(\int_0^1 \left\{ t \left| {}_a D_q f(b) \right|^r + (1-t) \left| {}_a D_q f(x) \right|^r \right\} {}_0 d_{\bar{q}} t \right)^{\frac{1}{r}} \Bigg\}$$

elde edilir. Şimdi, Eşitsizlik (4.6)'dan

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(b-a)}{2q} [qf(x) + f(qx + (1-q)a) - (1-q)f(qb + (1-q)a)] \right. \\ & \quad \left. - \int_a^b f(qt + (1-q)a) {}_a d_{\bar{q}} t \right| \\ & \leq \left[\frac{1+q^{p-1}}{2[p]_q} + \frac{1+q^{r-1}}{2[r]_q} \right] \\ & \quad \times \left\{ (x-a)^2 \left(\frac{1+q^p}{2[p+1]_q} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\left| {}_a D_q f(x) \right|^r}{2} + \frac{\left| {}_a D_q f(a) \right|^r}{2} \right)^{\frac{1}{r}} \right. \\ & \quad \left. + (b-x)^2 \left(\frac{1+q}{2[p+1]_q} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\left| {}_a D_q f(b) \right|^r}{2} + \frac{\left| {}_a D_q f(x) \right|^r}{2} \right)^{\frac{1}{r}} \right\} \\ & = \left[\frac{1+q^{p-1}}{4[p]_q} + \frac{1+q^{r-1}}{4[r]_q} \right] \\ & \quad \times \left\{ (x-a)^2 \left(\frac{1+q^p}{[p+1]_q} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\left| {}_a D_q f(x) \right|^r + \left| {}_a D_q f(a) \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right. \\ & \quad \left. + (b-x)^2 \left(\frac{1+q}{[p+1]_q} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\left| {}_a D_q f(b) \right|^r + \left| {}_a D_q f(x) \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\} \end{aligned} \quad (5.15)$$

sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla, Eşitsizlik (5.15), $(b-a)$ ile bölünürse ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 5.16. $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $|f'(x)|^r, I^\circ$ üzerinde $p > 1$ olmak üzere $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1$ ve $a, b \in I$ için diferansiyellenebilir konveks fonksiyonlar olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} & \left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| \\ & \leq \frac{1}{2^{\frac{1}{r}} (p+1)^{\frac{1}{p}}} \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\times \left[\frac{(x-a)^2}{b-a} (|f'(x)|^r + |f'(a)|^r)^{\frac{1}{r}} + \frac{(b-x)^2}{b-a} (|f'(b)|^r + |f'(x)|^r)^{\frac{1}{r}} \right]$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. Eşitsizlik (5.14)'de $q \rightarrow 1^-$ alınırsa Eşitsizlik (5.13) elde edilir ve ispat tamamlanır.

□



6. $\bar{q}$ -İNTEGRAL İÇİN $\bar{q}$ -GAMA VE $\bar{q}$ -BETA FONKSİYONLARI

Bu bölümde, $\bar{q}$ -integral için $\bar{q}$ -Gama ve $\bar{q}$ -Beta fonksiyonlarının tanımları, özellikleri ile bazı sonuçları elde edilecektir. Bu bölümde elde edilen sonuçlar çalışma [53] ile yayınlanmıştır.

Burada ilk olarak klasik analizde önemli bir yere sahip Gama ve Beta fonksiyonlarının tanımları aşağıdaki gibidir:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0 \quad (6.1)$$

fonksiyonuna Gama fonksiyonu [54] ve

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad \operatorname{Re}(x) > 0, \operatorname{Re}(y) > 0.$$

fonksiyonuna ise Beta fonksiyonu denir [55].

Şimdi bu konudaki çalışmaya Gama fonksiyonunun yeni tanımı ile başlanacaktır.

Tanım 6.1. $\operatorname{Re}(x) > 0$ olmak üzere $0 < q < 1$ için

$$\Gamma_{\bar{q}}(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} E_q^{-qt} {}_0d_{\bar{q}}t \quad (6.2)$$

olarak tanımlanan fonksiyona $\bar{q}$ -Gama fonksiyonu denir.

Burada, Tanım 6.1’de $q \rightarrow 1^-$ seçilirse, $\lim_{q \rightarrow 1^-} \Gamma_{\bar{q}}(x) = \Gamma(x)$ klasik Gama fonksiyonu elde edilir.

Teorem 6.2. $0 < q < 1$ için

$$\Gamma_{\bar{q}}(1) = \frac{1+q}{2q} \quad (6.3)$$

eşitliği doğrudur.

İspat. Denklem (1.27),

$$D_q E_q^{-t} = -E_q^{-qt}$$

ve Denklem (4.6) kullanılarak,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\bar{q}}(1) &= \int_0^{\infty} E_q^{-qt} d_{\bar{q}}t \\ &= - \int_0^{\infty} D_q E_q^{-qt} d_{\bar{q}}t \\ &= - \frac{q \lim_{x \rightarrow \infty} E_q^{-qx} + \lim_{x \rightarrow \infty} E_q^{-qx} - q E_q^{-q0} - E_q^{-q0+(1-q)0}}{2q} \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Ayrıca, $\lim_{x \rightarrow \infty} E_q^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e_q^x} = 0$ ve $E_q^0 = 1$ olduğu açıktır. Böylece istenen sonuc elde edilir, öyle ki

$$\Gamma_{\bar{q}}(1) = \frac{1+q}{2q}.$$

□

Sonuç 6.3. Denklem (6.3)'de $q \rightarrow 1^-$ seçilirse $\Gamma(1) = 1$ elde edilir.

Teorem 6.4. Her $\text{Re}(x) > 0$ için

$$\Gamma_{\bar{q}}(x+1) = [x]_q \Gamma_{\bar{q}}(x) \quad (6.4)$$

eşitliği doğrudur.

İspat. Tanım 6.1 kullanılarak ve $\lim_{t \rightarrow \infty} (t^x E_q^{-qt}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t^x}{e_q^{qt}} \right) = 0$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} &\Gamma_{\bar{q}}(x+1) \\ &= \int_0^{\infty} t^x E_q^{-qt} d_{\bar{q}}t \\ &= - \int_0^{\infty} t^x D_q E_q^{-t} d_{\bar{q}}t \\ &= - \left. \frac{qt^x E_q^{-qt} + (qt)^x E_q^{-q^2 t}}{2q} \right|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} E_q^{-qt} D_q t^x d_{\bar{q}}t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \frac{q \lim_{t \rightarrow \infty} (t^x E_q^{-qt}) + \lim_{t \rightarrow \infty} ((qt)^x E_q^{-q^2 t})}{2q} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty E_q^{-qt} D_q t^x {}_0 d_{\bar{q}} t \\
&= \int_0^\infty [x]_q t^{x-1} E_q^{-qt} {}_0 d_{\bar{q}} t = [x]_q \int_0^\infty t^{x-1} E_q^{-qt} {}_0 d_{\bar{q}} t \\
&= [x]_q \Gamma_{\bar{q}}(x)
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da istenendir. $\square$

Sonuç 6.5. Her n pozitif tamsayısı için

$$\Gamma_{\bar{q}}(n) = \frac{1+q}{2q} [n-1]_q! \quad (6.5)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Eşitlik (6.4) ve $\Gamma_{\bar{q}}(1) = \frac{1+q}{2q}$ 'i kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\bar{q}}(n) &= [n]_q \Gamma_{\bar{q}}(n-1) \\
&= [n-1]_q [n-2]_q \dots \Gamma_{\bar{q}}(1) \\
&= \frac{1+q}{2q} [n-1]_q!
\end{aligned}$$

olur. Öyle ki, bu da istenen sonuctur. $\square$

Sonuç 6.6. n pozitif tamsayı olmak üzere

$$\Gamma_{\bar{q}}(n) = \frac{1+q}{2q(1-q)^{n-1}} \frac{(1-q)_q^\infty}{(1-q^n)_q^\infty}$$

eşitliği doğrudur.

İspat. n pozitif tamsayısı için Notasyon (1.25) yani, $(1-q)_q^{n-1} = \frac{(1-q)_q^\infty}{(1-q^n)_q^\infty}$ eşitliği ve Eşitlik (6.5) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\bar{q}}(n) &= \frac{1+q}{2q} [n-1]_q! \\
&= \frac{1+q}{2q} \frac{(1-q)_q^{n-1}}{(1-q)^{n-1}} \\
&= \frac{1+q}{2q(1-q)^{n-1}} \frac{(1-q)_q^\infty}{(1-q^n)_q^\infty}
\end{aligned}$$

bulunur ve bu da ispatı tamamlar. □

Tanım 6.7. Her $\text{Re}(x) > 0$, $\text{Re}(y) > 0$ ve $0 < q < 1$ için

$$B_{\bar{q}}(x, y) = \int_0^{1/q} t^{x-1} (1 - qt)_q^{y-1} {}_0d_{\bar{q}}t$$

olarak tanımlanan fonksiyona $\bar{q}$ -Beta fonksiyonu denir.

Ayrıca, Tanım 6.7’de $q \rightarrow 1^-$ seçilirse, $\lim_{q \rightarrow 1^-} B_{\bar{q}}(x, y) = B(x, y)$ klasik Beta fonksiyonu elde edilir.

Teorem 6.8. Her $\text{Re}(x) > 0$ için

$$\Gamma_{\bar{q}}(x) = \frac{B_{\bar{q}}(x, \infty)}{(1 - q)^x} \quad (6.6)$$

eşitliği doğrudur.

İspat. $\bar{q}$ -integral ve $\bar{q}$ -Beta fonksiyon tanımları yardımıyla,

$$\begin{aligned} B_{\bar{q}}(x, \infty) &= \int_0^{1/q} t^{x-1} (1 - qt)_q^{\infty} {}_0d_{\bar{q}}t \\ &= \frac{(1 - q)}{2q^2} (1 + q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n (q^{n-1})^{x-1} (1 - q^n)_q^{\infty} \\ &\quad - \frac{(1 - q)}{2q^2} \left(\frac{1}{q}\right)^{x-1} \left(1 - q\frac{1}{q}\right)_q^{\infty} \\ &= \frac{(1 - q)(1 + q)}{2q^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^n (q^{n-1})^{x-1} (1 - q^{n+1})_q^{\infty} \\ &= \int_0^{\infty} t^{x-1} (1 - qt)_q^{\infty} {}_0d_{\bar{q}}t \end{aligned}$$

elde edilir. Her n negatif tamsayısı için $(1 - q^{n+1})_q^{\infty} = 0$ ve $\left(1 - q\frac{1}{q}\right)_q^{\infty} = 0$ olur. Şimdi $E_q^t = (1 + (1 - q)t)_q^{\infty}$ fonksiyonu kullanılarak,

$$B_{\bar{q}}(x, \infty) = \int_0^{\infty} t^{x-1} (1 - qt)_q^{\infty} {}_0d_{\bar{q}}t = \int_0^{\infty} t^{x-1} E_q^{\frac{-qt}{1-q}} {}_0d_{\bar{q}}t$$

elde edilir ve $t = (1 - q)u$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$B_{\bar{q}}(x, \infty) = (1 - q)^x \int_0^{\infty} u^{x-1} E_q^{-qu} {}_0d_{\bar{q}}u$$

sonucuna ulaşılır. Öyle ki $\bar{q}$ -Gama tanımından istenen

$$B_{\bar{q}}(x, \infty) = (1 - q)^x \Gamma_{\bar{q}}(x)$$

sonucu elde edilir. □

Teorem 6.9. $\text{Re}(x) > 0$ ve n pozitif tamsayısı için

$$B_{\bar{q}}(x, n) = \frac{1 + q^{x-1}}{2q^x} \frac{(1 - q)(1 - q)_q^{n-1}}{(1 - q^x)_q^n}. \quad (6.7)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. İlk olarak $\text{Re}(x) > 0$, $\text{Re}(y) > 0$ olmak üzere $\bar{q}$ -Beta fonksiyonuna Denklem (1.28) ve Denklem (4.9) $\bar{q}$ -kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa,

$$\begin{aligned} & B_{\bar{q}}(x + 1, y) \quad (6.8) \\ &= \int_0^{1/q} t^x (1 - qt)_q^{y-1} {}_0d_{\bar{q}}t \\ &= -\frac{1}{[y]_q} \int_0^{1/q} t^x D_q (1 - t)_q^y {}_0d_{\bar{q}}t \\ &= -\frac{qt^{x-1} (1 - t)_q^y + (qt)^x (1 - qt)_q^y}{2q[y]_q} \Big|_0^{1/q} \\ &\quad + \frac{1}{[y]_q} \int_0^{1/q} (1 - qt)_q^y D_q t^x {}_0d_{\bar{q}}t \\ &= \frac{[x]_q}{[y]_q} \int_0^{1/q} t^{x-1} (1 - qt)_q^y {}_0d_{\bar{q}}t = \frac{[x]_q}{[y]_q} B_{\bar{q}}(x, y + 1) \end{aligned}$$

elde edilir. Öte yandan,

$$B_{\bar{q}}(x, y + 1) \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{1/q} t^{x-1} (1-qt)_q^y {}_0d_{\bar{q}}t \\
&= \int_0^{1/q} t^{x-1} (1-qt)_q^{y-1} (1-q^y t) {}_0d_{\bar{q}}t \\
&= \int_0^{1/q} t^{x-1} (1-qt)_q^{y-1} {}_0d_{\bar{q}}t - q^y \int_0^{1/q} t^x (1-qt)_q^{y-1} {}_0d_{\bar{q}}t \\
&= B_{\bar{q}}(x, y) - q^y B_{\bar{q}}(x+1, y)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Denklem (6.8) ve Denklem (6.9) yardımıyla,

$$\begin{aligned}
B_{\bar{q}}(x, y+1) &= B_{\bar{q}}(x, y) - \frac{q^y [x]_q}{[y]_q} B_{\bar{q}}(x, y+1). \\
&= \frac{[y]_q}{[x+y]_q} B_{\bar{q}}(x, y)
\end{aligned} \tag{6.10}$$

elde edilir. Ayrıca, $\bar{q}$ -Beta tanımından,

$$B_{\bar{q}}(x, 1) = \int_0^{1/q} t^{x-1} {}_0d_{\bar{q}}t = \frac{1+q^{x-1}}{2[x]_q} t^x \Big|_0^{1/q} = \frac{1+q^{x-1}}{2[x]_q q^x}. \tag{6.11}$$

bulunur. Her $\text{Re}(x) > 0$ ve pozitif n tamsayısı için Eşitlik (6.10) ve Eşitlik (6.11)'den

$$\begin{aligned}
&B_{\bar{q}}(x, n) \\
&= \frac{[n-1]_q}{[x+n-1]_q} B_{\bar{q}}(x, n-1) \\
&= \frac{[n-1]_q}{[x+n-1]_q} \frac{[n-2]_q}{[x+n-2]_q} B_{\bar{q}}(x, n-2) \\
&= \dots \\
&= \frac{[n-1]_q [n-2]_q \dots [1]_q}{[x+n-1]_q [x+n-2]_q \dots [x+1]_q} B_{\bar{q}}(x, 1) \\
&= \frac{1+q^{x-1}}{2q^x} \frac{[n-1]_q [n-2]_q \dots [1]_q}{[x+n-1]_q [x+n-2]_q \dots [x+1]_q [x]_q} \\
&= \frac{1+q^{x-1}}{2q^x} \frac{(1-q)^{n-1}}{(1-q)^n} \\
&\quad \times \frac{(1-q^{n-1})(1-q^{n-2}) \dots (1-q)}{(1-q^{x+n-1})(1-q^{x+n-2}) \dots (1-q^{x+1})(1-q^x)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1 + q^{x-1}}{2q^x} \frac{(1-q)(1-q)_q^{n-1}}{(1-q^x)_q^n}$$

yazılır ve böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 6.10. Her $Re(x) > 0, Re(y) > 0$ için

$$B_{\bar{q}}(x, y) = \frac{(1 + q^{x-1}) \Gamma_{\bar{q}}(x) \Gamma_{\bar{q}}(y)}{(q^x + q^{x-1}) \Gamma_{\bar{q}}(x+y)} \quad (6.12)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $Re(x) > 0$ ve pozitif n tamsayısı için Eşitlik (6.7) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & B_{\bar{q}}(x, n) \\ = & \frac{1 + q^{x-1}}{2q^x} \frac{(1-q)(1-q)_q^{n-1}}{(1-q^x)_q^n} \\ = & (1-q) \frac{1 + q^{x-1}}{2q^x} \frac{(1-q)(1-q^2) \cdots (1-q^{n-1})}{(1-q^x)(1-q^{x+1}) \cdots (1-q^{x+n-1})} \\ = & (1-q) \frac{1 + q^{x-1}}{2q^x} \\ & \times \frac{(1-q)^{n-1} [n-1]_q! (1-q)(1-q^2) \cdots (1-q^{x-1})}{(1-q)(1-q^2) \cdots (1-q^{x-1})(1-q^x)(1-q^{x+1}) \cdots (1-q^{x+n-1})} \\ = & (1-q) \frac{1 + q^{x-1}}{2q^x} \frac{(1-q)^{n-1} [n-1]_q! (1-q)^{x-1} [x-1]_q!}{(1-q)^{x+n-1} [x+n-1]_q!} \\ = & \frac{1 + q^{x-1}}{2q^x} \frac{[n-1]_q! [x-1]_q!}{[x+n-1]_q!}. \end{aligned}$$

yazılır. Şimdi, Eşitlik (6.5) yardımıyla,

$$B_{\bar{q}}(x, n) = \frac{(1 + q^{x-1}) \Gamma_{\bar{q}}(x) \Gamma_{\bar{q}}(n)}{(q^x + q^{x-1}) \Gamma_{\bar{q}}(x+n)}$$

eşitliğine ulaşılır ve son eşitlikte $n = y$ yazılırsa istenen sonuç bulunur. $\square$

Ayrıca, Eşitlik (6.12)'den $\bar{q}$ -Beta fonksiyonu simetrik değildir. Fakat $B_{\bar{q}}(x, y)$ ile $B_{\bar{q}}(y, x)$ arasında

$$B_{\bar{q}}(x, y) = \frac{1 + q^{1-x}}{1 + q^{1-y}} B_{\bar{q}}(y, x)$$

bağıntısı kolaylıkla görülebilir.

7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezin esasını oluşturan ikinci,üçüncü, dördüncü, beşinci ve altıncı bölümlerde elde edilen sonuçlar aşağıda sıralanmıştır.

1. İlk olarak, q -Hermite-Hadamard eşitsizliğinin doğrusu ve bu eşitsizliğin farklı formları ispatlanıp q -diferansiyellenebilir konveks ve quasi konveks fonksiyonlar için q -orta nokta tipli eşitsizlikleri için quantum tahminleri elde edilmiştir. Bunun yanında, elde edilen sonuçların $q \rightarrow 1^-$ limit durumu literatürdeki sonuçları verdiği gösterilmiştir.
2. Benzer olarak, (p, q) -Hermite-Hadamard eşitsizliğinin doğrusu ve bu eşitsizliğin çeşitleri ispatlanmıştır. (p, q) -diferansiyellenebilir konveks ve quasi konveks fonksiyonlar için (p, q) -orta nokta tipli eşitsizlikleri için quantum tahminleri elde edilmiştir. Bununla birlikte, elde edilen sonuçların $q \rightarrow 1^-$ ve $p = 1$ olması halinde önceki sonuçları verdiği saptanmıştır.
3. Quantum integrallere farklı bir bakış açısı ile yeni bir tanım verilip $\bar{q}$ -integral ile temsil edilmiştir. Bununla birlikte yeni $\bar{q}$ -integral tanımının özellikleri ispatlanmıştır. Ayrıca, bu yeni $\bar{q}$ -integral yardımı ile $\bar{q}$ -Hermite-Hadamard integral eşitsizlikleri elde edilmiştir.
4. Dördüncü bölümde, tanımlanan $\bar{q}$ -integral için Young, Hölder ve Minkowski tipli eşitsizlikler ispatlanmıştır. Bununla birlikte Ostrowski tipli integral eşitsizlikleri için quantum tahminleri elde edilmiştir.
5. $\bar{q}$ -integral kullanılarak $\bar{q}$ -Gama-Beta fonksiyonları yeniden tanımlanmıştır. Ayrıca, bu fonksiyonlarla ilgili özellikler, sonuçlar ve aralarındaki bağıntılar elde edilmiştir.

Sonraki çalışmalarda, bu yeni $\bar{q}$ -integral için farklı integral eşitsizlikleri elde edilebilir. Ayrıca, integral eşitsizlikleri için quantumsal tahminlerde bulunulabilir. Bunların yanında, integral dönüşümleri tanımlanıp q -diferansiyel denklemler $\bar{q}$ -integraller yardımıyla çözülebilir.

8. KAYNAKLAR

- [1] T. Ernst, *The History Of Q-Calculus And New Method*. Sweden: Department of Mathematics, Uppsala University, 2000.
- [2] M. H. Annaby and M. S. Zeinab, *Q-fractional Calculus And Equations*. Springer, 2012.
- [3] H. Gauchman, "Integral inequalities in q-calculus," *Computers Mathematics with Applications*, vol. 47, no. 2-3, pp. 281–300, 2004.
- [4] S. Hilger, "Analysis on measure chains-a uni ed approach to continuous and discrete calculus," *Results in Mathematics*, vol. 35, no. 1, pp. 18–56, 1990.
- [5] V. Kac and P. Cheung, *Quantum Calculus*. New York: Springer, 2002.
- [6] E. Heine, "Über die reihe," *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 151, no. 32, pp. 2010–2012, 1846.
- [7] E. Heine, *Handbuch Der Kugelfunctionen, Theorie Und Anwendungen*. G. Reimer, 1878.
- [8] F. H. Jackson, "On q-functions and a certain difference operator," *Earth and Environmental Science Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, vol. 46, no. 2, pp. 253–281, 1909.
- [9] J. Goldman and G. C. Rota, *The number of subspaces of a vector space*. Harvard University, 1969.
- [10] F. Jackson, "q-form of taylor's theorem," *Messenger of Mathematics*, vol. 39, pp. 62–64, 1909.
- [11] R. Agarwal, "A propos d'une note de m. pierre humbert," *Comptes rendus de l'Academie des Sciences*, vol. 236, no. 21, pp. 2031–2032, 1953.
- [12] J. Tariboon and S. K. Ntouyas, "Quantum calculus on finite intervals and applications to impulsive difference equations," *Advances in Difference Equations*, vol. 282, pp. 1–19, 2013.
- [13] G. E. Andrews, R. Askey, and R. Roy, *Special Functions*. Cambridge: Cambridge university press, 2000.
- [14] R. Askey, "The world of q," *CWI Quarterly*, vol. 5, no. 4, pp. 251–270, 1992.
- [15] J. Thomae, "Beitrage zur theorie der durch die heinische reihe." *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 70, pp. 258–281, 1869.

- [16] J. Thomaae, “Über die höheren hypergeometrischen reihen insbesondere reihe,” *Mathematische Annalen*, vol. 2, pp. 427–444, 1870.
- [17] G. Gasper and M. Rahman, *Basic Hypergeometric Series*. Cambridge: Cambridge university press, 2004.
- [18] M. E. Ismail and D. Stanton, “On q -definite integrals,” *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 41, pp. 193–203, 1910.
- [19] W. Hahn, “Beiträge zur theorie der heineschen reihen (german),” *Mathematische Nachrichten*, vol. 2, pp. 340–379, 1949.
- [20] I. M. Gelfand, M. I. Graev, and V. S. Retakh, “Difference analogues and q -analogues of general hypergeometric systems of differential equations,” *Doklady Mathematics*, vol. 46, no. 1, pp. 30–35, 1993.
- [21] A. Matsuo, “Jackson integrals of jordan-pochhammer type and quantum knizhnik-zamolodchikov equations,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 151, no. 2, pp. 263–273, 1993.
- [22] W. Al-Salam, “Some fractional q -integrals and q -derivatives,” *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, vol. 15, no. 2, pp. 135–140, 1966/1967.
- [23] P. M. Rajkovic, M. S. Stankovic, and S. D. Marinkovic, “The zeros of polynomials orthogonal with respect to q -integral on several intervals in the complex plane,” *Proceedings of The Fifth International Conference on Geometry, Integrability and Quantization*, pp. 178–188, 2003.
- [24] M. A. Noor, K. I. Noor, and M. U. Awan, “Some quantum integral inequalities via preinvex functions,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 269, pp. 242–251, 2015.
- [25] M. Noor, K. Noor, and M. Awan, “Quantum ostrowski inequalities for q -differentiable convex functions,” *Journal of Mathematical Inequalities*, 2016.
- [26] H. Ogunmez and U. Ozkan, “Fractional quantum integral inequalities,” *Journal of Inequalities and Applications*, p. Article ID 787939, 2011.
- [27] H. Exton, *Q-Hypergeometric Functions And Applications*. Horwood, 1983.
- [28] W. Al-Salam, “ q -bernoulli numbers and polynomials,” *Mathematische Nachrichten*, vol. 17, no. 3-6, pp. 239–260, 1958.
- [29] W. Al-Salam and A. Verma, “A fractional leibniz q -formula,” *Pacific Journal of Mathematics*, vol. 60, no. 2, pp. 1–9, 1975.
- [30] M. S. Stankoyic, P. Rajkoyic, and S. Marinkoyic, “Inequalities which include q -integrals,” *Serbian Academy of Sciences and Arts*, vol. 31, pp. 137–146, 2006.
- [31] M. Tunç and E. Göv, “ (p,q) -integral inequalities,” *Research Group in Mathematical Inequalities and Applications*, vol. 19, pp. 1–13, 2016.

- [32] M. Tunc and E. Gov, "Some integral inequalities via (p,q) -calculus on finite intervals," *Research Group in Mathematical Inequalities and Applications*, vol. 19, pp. 1–12, 2016.
- [33] C. Persson and L. E. Niculescu, *Convex Functions and Their Applications. A Contemporary Approach*. Springer Science, 2006.
- [34] W. H. Young, "On classes of summable functions and their fourier series," *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, vol. 87, pp. 225–229, 1912.
- [35] E. F. Beckenbach and R. Bellman, *Inequalities*. Berlin, 1961.
- [36] D. S. Mitrinovic, J. Pecaric, and A. M. Fink, *Classical And New Inequalities In Analysis*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [37] A. Ostrowski, "Über die absolutabweichung einer differentiebaren funktion von ihrem integralmittelwert," *Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. 10, no. 1, pp. 226–227, 1938.
- [38] J. Hadamard, "Etude sur les proprietes des fonctions entieres et en particulier dune fonction consideree par riemann," *Journal de mathematiques pures et appliquees*, pp. 171–216, 1893.
- [39] H. M. Srivastava and J. Choi, *Zeta And Q-Zeta Functions And Associated Series And Integrals*. London: Elsevier, 2012.
- [40] J. Tariboon and S. K. Ntouyas, "Quantum integral inequalities on finite intervals," *Journal of Inequalities and Applications*, vol. 121, pp. 1–13, 2014.
- [41] J. Bukweli-Kyemba and M. Hounkonnou, "Quantum deformed algebras: coherent states and special functions," *Preprint*, 2013.
- [42] P. Sadjang, "On the fundamental theorem of (p,q) -calculus and some (p,q) -taylor formulas," *Preprint*, 2013.
- [43] W. Sudsutad, S. K. Ntouyas, and J. Tariboon, "Quantum integral inequalities for convex functions," *Journal of Mathematical Inequalities*, vol. 9, no. 3, pp. 781–793, 2015.
- [44] M. Kunt and . İşcan, "Erratum: Quantum integral inequalities for convex functions," *Preprint*, 2016.
- [45] M. Kunt and . İşcan, "Erratum: Quantum integral inequalities on finite intervals," *Preprint*, 2016.
- [46] M. Kunt and . İşcan, "Erratum: Some quantum estimates for hermite-hadamard inequalities," *Preprint*, 2016.
- [47] M. A. Latif, M. Kunt, S. S. Dragomir, and . İşcan, "Some (p,q) estimates for hermite-hadamard inequalities via convex and quasi-convex functions," *Preprint*, 2016.

- [48] N. Alp, M. Z. Sarıkaya, M. Kunt, and . İşcan, “q-hermite hadamard inequalities and quantum estimates for midpoint type inequalities via convex and quasi-convex functions,” *Journal of King Saud University-Science*, vol. 30, no. 2, pp. 193–203, 2018.
- [49] U. Kırmacı, “Inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 147, no. 1, pp. 137–146, 2004.
- [50] M. Kunt, . İşcan, N. Alp, and M. Z. Sarıkaya, “(p,q)-hermite-hadamard inequalities and (p,q)-estimates for midpoint type inequalities via convex and quasi-convex functions,” *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas Fisicasy Naturales. Serie A. Matematicas*, vol. 112, no. 4, pp. 969–992, 2018.
- [51] N. Alp and M. Z. Sarıkaya, “A new definition and properties of quantum integral which calls q-integral,” *Konuralp Journal of Mathematics*, vol. 5, no. 2, pp. 146–159, 2017.
- [52] N. Alp and M. Z. Sarıkaya, “q-inequalities on quantum integral,” 2020, submitted for publication.
- [53] N. Alp and M. Z. Sarıkaya, “q-gamma and q-beta functions on quantum integral,” *Dynamics of Continuous, Discrete-Impulsive Systems (DCDIS) Series A, Mathematical Analysis*, 2020, to be published.
- [54] S. M. Jung, “On the stability of the gamma functional equation,” *Results in Mathematics*, vol. 33, pp. 306–309, 1998.
- [55] G. H. Kim and Y. Lee, “The stability of the beta functional equation,” *Studia Universitatis Babes-Bolyai Mathematica*, vol. XLV, no. 1, pp. 89–96, 2000.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Necmettin ALP
Doğum Tarihi ve Yeri : 1985 Gerger
Yabancı Dili : İngilizce
Eposta : placenn@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Doktora	Matematik	Düzce Üniversitesi	2020
Y. Lisans	Matematik	Düzce Üniversitesi	2013
Lisans	Matematik Öğretmenliği	Selçuk Üniversitesi	2009
Lise		Plevne Lisesi	2004

A. Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler :

- A1. M. Z. Sarıkaya, N. Alp and H. Bozkurt, On Hermite-Hadamard type integral inequalities for preinvex and log-preinvex functions, *Contemporary Analysis and Applied Mathematics* Vol.1, No.2, 237-252, 2013.
- A2. M. Z. Sarıkaya, H. Bozkurt and N. Alp, On Hadamard Type Integral Inequalities for nonconvex Functions, *Mathematical Sciences And Applications E-Notes*, Volume 1 No. 2 pp. 217-229, 2013.
- A3. M. Kunt, I. Iscan, N. Alp and M. Z. Sarıkaya, (p,q)-Hermite-Hadamard inequalities and (p,q) estimates for midpoint type inequalities via convex and quasi-convex functions, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, DOI 10.1007/s13398-017-0402-y, 2017.(SCI-E)

- A4. N. Alp, M. Z. Sarıkaya, A new definition and properties of quantum integral which calls $\bar{q}$ -Integral, *Konuralp Journal of Mathematics* Volume 5 No. 2 pp.146-159, 2017.
- A5. N. Alp, M. Z. Sarıkaya, M. Kunt and I. Iscan, q-Hermite Hadamard inequalities and quantum estimates for midpoint type inequalities via convex and quasi-convex functions, *Journal of King Saud University-Science* 30, 193-203, 2018.(SCI-E)
- A6. M. Z. Sarıkaya and N. Alp, On Hermite-Hadamard-Fejér type integral inequalities for generalized convex functions via local fractional integrals, *Open Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 3 (2019), Issue 1, pp. 273 – 284.
- A7. N. Alp, C. C. Bilişik, M. Z. Sarıkaya, On q-Opial type inequality for quantum integral, *Filomat*, 33:13 (2019), 41754184.(SCI-E)
- A8. N. Alp and M. Z. Sarıkaya, q-Gamma-q-Beta functions on quantum integral, *Dynamics of Continuous, Discrete-Impulsive Systems (DCDIS) Series A, Math. Anal.*, 2020, to be published.
- A9. N. Alp and M. Z. Sarıkaya, Quantum hermite-hadamard's type inequalities for co-ordinated convex functions, *Applied Mathematics E-Notes (AMEN)*., in press, 2019.(E-SCI)
- A10. N. Alp, M. Z. Sarıkaya, On (p,q)-Opial type Inequalities for (p,q)-Calculus, *Stud. Univ. Babes-Bolyai Math.*,in press, 2020.(E-SCI)

B. Uluslararası konferanslarda sunulan bildiriler:

- B1. M. Z. Sarıkaya, N. Alp ve H. Bozkurt, On Hermite-Hadamard type integral inequalities for preinvex and log-preinvex functions, *ICAAM First International Conference on Analysis and Applied Mathematics*, Gumushane/Turkey, 2012.
- B2. M. Z. Sarıkaya, H. Bozkurt ve N. Alp, On Hadamard type integral inequalities for nonconvex functions, *ICAAM First International Conference on Analysis and Applied Mathematics*, Gumushane/Turkey, 2012.

- B3. N. Alp and M. Z. Sarıkaya, q -Inequalities on Quantum Integral, 1st International Conference on Mathematical and Related Sciences (ICMRS 2018), Antalya, Turkey, 30 April-4 May 2018.
- B4. N. Alp and M. Z. Sarıkaya, $\bar{q}$ -Laplace Transform on Quantum Integral, 1st International Conference on Mathematical and Related Sciences (ICMRS 2018), Antalya, Turkey, 30 April-4 May, 2018.
- B5. N. Alp and M. Z. Sarıkaya, Refinement of Wirtinger Inequality, 2nd International Conference on Mathematical and Related Sciences (ICMRS 2019), Antalya, Turkey, 27-30 April, 2019.

