



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**QUASI-KUATERNİYONLARIN İNVLÜSYONLARININ
GEOMETRİSİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mehmet BÖKE

DANIŞMAN

Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN

İKİNCİ DANIŞMAN

Prof. Dr. Murat BEKAR

AKSARAY, 2025

Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 222342426 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi Mehmet BÖKE tarafından hazırlanan “**QUASI-KUATERNİYONLARIN İNVOLÜSYONLARININ GEOMETRİSİ**” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Üye: Doç. Dr. Ayşe YAVUZ

Necmettin Erbakan Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Üye: Doç. Dr. Gülsüm YÜCA

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Tez Savunma Tarihi: 11 / 06 / 2025

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Fazliye KARABÖRK

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinallliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Mehmet BÖKE

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hayata geçirilmesi sürecinde desteğini esirgemeyen, bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım danışman hocam Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN'a (Aksaray Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) ve çalışmalarım esnasında bana vakit ayıran, araştırmanın her bir aşamasında görüşleriyle beni destekleyen ikinci danışman hocam Prof. Dr. Murat BEKAR'a (Gazi Üniversitesi Matematik Eğitimi Anabilim Dalı) teşekkür ve saygılarımı sunarım. Ayrıca, çalışma sürecimde desteklerini hiçbir zaman eksik etmeyen aileme de teşekkür ederim.

Mehmet BÖKE
AKSARAY, 2025

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
SİMGELER VE KISALTMALAR	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1 Reel-Kuaterniyonlar	4
2.2 Reel-Kuaterniyonların İnvölüsyonları ve Anti-İnvölüsyonları	10
2.3 Reel-Kuaterniyonların İnvölüsyonlarının ve Anti-İnvölüsyonlarının Geometrik Yorumu	13
2.4 Reel-Kuaterniyonların İnvölüsyonlarının ve Anti-İnvölüsyonlarının Matris Gösterimleri.....	14
3. QUASI-KUATERNİYONLARIN İNVOLÜSYONLARI VE ANTİ- İNVOLÜSYONLARI.....	17
3.1 Quasi-Kuterniyonlar	17
3.2 Quasi-Kuaterniyonların İnvölüsyonları ve Anti-İnvölüsyonları	22
3.3 Quasi-Kuaterniyonların İnvölüsyonlarının ve Anti-İnvölüsyonlarının Geometrik Yorumu	25
3.4 Quasi-Kuaterniyonların İnvölüsyonlarının ve Anti-İnvölüsyonlarının Matris Gösterimleri	26
4. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	33
KAYNAKLAR	34
ÖZGEÇMİŞ.....	36

YÜKSEK LİSANS TEZİ

QUASI-KUATERNİYONLARIN İNVLÜSYONLARININ GEOMETRİSİ

Mehmet BÖKE

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN
İkinci Danışman: Prof. Dr. Murat BEKAR

ÖZET

Dört bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümünde kuaterniyonların tarihi gelişimine, ikinci bölümünde ise reel ve quasi-kuaterniyonlara ilişkin temel tanım ve cebirsel özelliklerine yer verilmiştir. Üçüncü bölümünde, quasi-kuaterniyonlar kullanılarak involüsyon ve anti-involüsyon aksiyomlarını birlikte sağlayan iki farklı dönüşüm tanımlanmış ve bu dönüşümlerin 3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^3$ teki geometrik yorumlarına yer verilmiştir. Ayrıca bu bölümde bu dönüşümlere karşılık gelen matrisler elde edilmiştir. Son bölümde ise çalışma sonucu elde edilen sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Quasi-kuaterniyonların en ayırt edici özelliği, çarpma işleminin değişmeli (komütatif) olmasıdır. Bu özelliği sayesinde quasi-kuaterniyonlar reel sayılar cismi üzerinde değişmeli yapıya sahip bir cebir oluşturmakta ve tanımladığımız iki dönüşüm involüsyon ve anti-involüsyon aksiyomlarını birlikte sağlamaktadır. Quasi-kuaterniyonlar üzerinde tanımladığımız iki dönüşümün her birinde biri keyfi diğeri ise birim olmak üzere iki quasi-kuaterniyon kullanılmıştır. Her iki dönüşüm sonucunda keyfi quasi-kuaterniyonların skaler kısımları 4-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^4$ te sabit (invariant) kalmakta, ancak vektörel kısımları dönüşümlere göre farklılık göstermektedir. Ele aldığımız birinci dönüşümde vektörel kısım $\mathbb{R}^3$ te orjine göre yansımakta, diğeri ise sabit kalmaktadır. Dolayısıyla, ikinci durumda keyfi olarak seçilen quasi-kuaterniyonun tamamı dönüşüm sonucunda $\mathbb{R}^4$ te sabit kalmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Reel-kuaterniyon, quasi-kuaterniyon, involüsyon, anti-involüsyon

Haziran, 2025; 36 sayfa

M.Sc. THESIS

GEOMETRY OF INVOLUTIONS OF QUASI-QUATERNIONS

Mehmet BÖKE

**Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

**Advisor: Assoc. Prof. Dr. Tunçar ŞAHAN
Co-advisor: Prof. Dr. Murat BEKAR**

ABSTRACT

This study consists of four chapters. In the first chapter, the historical development of quaternions is discussed, while the second chapter presents the fundamental definitions and algebraic properties of real and quasi-quaternions. In the third chapter, two distinct transformations are defined using quasi-quaternions, each satisfying both the involution and anti-involution axioms. The geometric interpretations of these transformations in the 3-dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^3$ are also provided. Additionally, the corresponding matrices of these transformations are derived. The final chapter includes the conclusions and suggestions obtained from the study.

The most distinctive feature of quasi-quaternions is the commutativity of their multiplication operation. Owing to this property, quasi-quaternions form a commutative algebra over the field of real numbers, and the two defined transformations satisfy both the involution and anti-involution axioms simultaneously. In each of the two transformations defined on quasi-quaternions, one of the quasi-quaternions is arbitrary, and the other is a unit element. As a result of both transformations, the scalar parts of the arbitrary quasi-quaternions remain invariant in the 4-dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^4$, whereas the behavior of the vector parts differs depending on the transformation. In the first transformation, the vector part undergoes a reflection through the origin in $\mathbb{R}^3$, while in the second transformation, it remains unchanged. Therefore, in the second case, the entire arbitrary quasi-quaternion remains invariant in $\mathbb{R}^4$.

Keywords: Real-quaternion, quasi-quaternion, involution, anti-involution

June, 2025; 36 pages

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Tesseract (4-küp)	9
Şekil 3.1. Birim quasi-kuaterniyonun $\mathbb{R}^4$ teki karşılığı	21
Şekil 3.2. Örnek 3.1’de verilen $V(\mu)$ ve $-V(\mu)$ pür quasi-kuaterniyonları.....	29
Şekil 3.3. Örnek 3.2’de verilen $V(\mu)$ pür quasi-kuaterniyonu	32



SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}$	Reel sayılar cismi
$\mathbb{R}^n$	n –boyutlu reel vektör uzayı
N	Norm
H	Reel-kuaterniyonların kümesi
$\tilde{H}$	Pür reel-kuaterniyonların kümesi
H_b	Birim reel-kuaterniyonların kümesi
$\tilde{H}_b$	Birim ve pür reel-kuaterniyonların kümesi
H_q	Quasi-kuaterniyonların kümesi
$\tilde{H}_q$	Pür quasi-kuaterniyonların kümesi
$(H_q)_b$	Birim quasi- kuaterniyonların kümesi
$\overline{(\cdot)}$	Eşlenik işlemi
$(\cdot)^{-1}$	İnvers işlemi

1. GİRİŞ

Karmaşık sayılar, 2-boyutlu Öklid düzleminde büyük başarı göstermiş, ancak bu yapının 3 veya daha fazla boyuta genellenme ihtiyacı, hiperkompleks sayıların ve özellikle kuaterniyonların geliştirilmesine neden olmuştur. Bu bağlamda Sir William Rowan Hamilton, 1843 yılında kuaterniyonları tanıtarak 3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^3$ teki rotasyonların kuaterniyon cebiri kullanılarak analitik olarak ifade edilmesinin yolunu açmıştır. Hamilton'un bu katkısı, matematiksel yapıların uzaya uygulanmasında devrim niteliği taşımıştır.

Hamilton, 18. yüzyılda karmaşık sayılarla ilgili elde edilen başarıları 3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^3$ e genellemek istemiş, ancak bu uzayda karmaşık sayılara benzer bir çarpma işlemi tanımlamakta başarılı olamamıştır. İlk başta $\mathbb{R}^3$ uzayındaki sıralı reel sayı üçlülerine bu işlemi uygulamaya çalışmış, ancak sonuç alamamıştır. Daha sonra bu denemeyi 4-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^4$ üzerinde yaparak başarıya ulaşmış ve "dördeyler" olarak da adlandırılan kuaterniyon yapısını tanımlamıştır.

1843 tarihinde Dublin'de, Hamilton bu yapının temel çarpma kuralını formüle etmiş ve bunu

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ijk = -1,$$

şeklinde ifade etmiştir. Hamilton bu kuralı, Broom Köprüsü'nde yürürken taşla kazıyarak sonsuzlaştırmıştır. Bu olay, kuaterniyonların doğumu olarak kabul edilir.

Kinematik, kuvvet ve kütle gibi dinamik kavramları içermeyen ve yalnızca hareketin geometrisini inceleyen bir mekanik dalıdır. Kinematikte, bir noktanın veya katı cisim sisteminin zamanla nasıl yer değiştirdiği incelenir (Müller, 1963). Bu bağlamda kuaterniyonlar, hareketlerin dönme bileşenini ifade etmekte çok etkili bir yapı sunmuş ve kinematikte önemli uygulamalar bulmuştur.

Kuaterniyonlar, zaman içerisinde farklı türevlere genelleştirilmiş (split-kuaterniyonlar, dual-kuaterniyonlar vb.) ve çeşitli uygulama alanlarına uyarlanmıştır. Her biri, çarpma kuralları veya birim elemanların özellikleri açısından farklılıklar göstererek belirli geometri ve fiziksel yapılara model oluştururlar.

Split-kuaterniyonlar, bazı pür ve birim (sanal birim) elemanlarının karelerinin +1 olmasıyla klasik kuaterniyonlardan (reel-kuaterniyonlardan) ayrılırken, dual-kuaterniyonlar diferansiyel hareketleri ve vida hareketlerini modellemede önemli yer tutmuştur. Bu yapılar üzerine çok sayıda çalışma yapılmıştır. Örneğin, Veldkamp (1976), dual birim vektörler yardımıyla dual hareketleri; Bottema ve Roth (1979), dual ve reel-kuaterniyonların uzay kinematiğindeki uygulamalarını ele almışlardır.

Reel-kuaterniyonların matris temsilleri dönme matrislerinin elde edilmesinde etkin bir yöntem sunmuştur (Ward, 1997). Hacısalihoğlu (1983), dual kuaterniyonlarla vida hareketi, kayma ve dönme operatörlerini ayrıntılı olarak incelemiştir. Kula (2003), Minkowski 3-uzayında split kuaterniyonları kullanarak vida hareketi tanımlamış; Inoguchi (1998), bu yapıyla zamansı yüzeylerin geometrik formülasyonunu yapmıştır.

Son yıllarda özellikle quasi-kuaterniyonlar üzerine yapılan çalışmalar artmıştır. Quasi-kuaterniyonlar, sanal birimlerin karelerinin sıfır olduğu bir yapı sunar. Bu özellikleri sayesinde reel-kuaterniyonlardan ayrılırlar. Bu yapı, hem cebirsel hem de geometrik olarak alternatif modelleme imkânı sunar.

Bu tezde amaçlanan, quasi-kuaterniyonlar kullanılarak involüsyon ve anti-involüsyon dönüşümleri tanımlamak ve bu dönüşümlerin $\mathbb{R}^3$ teki geometrik yorumlarını vermektir. Bunun için, ilk olarak reel-kuaterniyonlar ve quasi-kuaterniyonlara ilişkin temel tanım ve cebirsel özelliklere yer verilmiştir. Reel-kuaterniyonların aksine, quasi-kuaterniyonlarda çarpma işleminin değişme özelliğinin olması çalışmayı farklı kılmıştır. Bu özelliği sayesinde quasi-kuaterniyonlar kullanılarak elde ettiğimiz iki dönüşüm hem involüsyon hem de anti-involüsyon aksiyomlarını birlikte sağlamaktadır. Bu durum literatürde reel-kuaterniyonlar, split-kuaterniyonlar, semi-kuaterniyonlar ve dual-kuaterniyonlar gibi kümeler kullanılarak elde edilen involüsyon ve anti-involüsyon dönüşümlerinde görülmemektedir. Çünkü bu kümelerin reel sayılar cismi üzerinde oluşturdukları cebir değişmeli bir yapıya sahip olmadığından dönüşümler involüsyon ya da anti-involüsyon aksiyomlarından sadece birini sağlamaktadır.

Quasi-kuaterniyonlar üzerinde tanımladığımız iki dönüşümün her birinde, biri keyfi diğeri ise birim olmak üzere iki quasi-kuaterniyon kullanılmıştır. Oysa literatürde, diğer kuaterniyon kümeleri kullanılarak tanımlanan involüsyon dönüşümlerinde genel

olarak biri keyfi, diğeri ise hem birim hem de pür (sanal kısmı birim) olan kuaterniyonlar kullanılmıştır.

Reel-kuaterniyonlar üzerinde tanımlanan involüsyon ve anti-involüsyon dönüşümlerinde, kullanılan keyfi reel-kuaterniyonların skaler kısımları $\mathbb{R}^4$ te sabit (invaryant) kalmakta; vektörel kısımları ise $\mathbb{R}^3$ te bir eksen etrafında 180° dönmekte (başka bir ifadeyle, bu eksene göre yansımakta) ya da bu eksene dik bir düzleme göre yansımaktadır.

Benzer şekilde, split-kuaterniyonlar üzerinde tanımlanan involüsyon ve anti-involüsyon dönüşümlerinin geometrik yorumlarında, keyfi split-kuaterniyonların skaler kısımları $\mathbb{R}^4$ te sabit kalmakta; vektörel kısımları ise ya $\mathbb{R}^3$ te bir eksen etrafında belirli bir reel açıyla döndükten sonra orijine göre yansımakta ya da 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında bir eksen etrafında belirli bir hiperbolik açıyla dönmektedir.

Dual-kuaterniyonlar üzerinde tanımlanan involüsyon ve anti-involüsyon dönüşümleri ise geometrik olarak, keyfi dual-kuaterniyonların skaler kısımlarının $\mathbb{R}^4$ te sabit kaldığı; vektörel kısımlarının ise $\mathbb{R}^3$ te bir vida hareketi (yani bir eksen etrafında belirli bir reel açıyla dönme ve aynı eksen boyunca öteleme) gerçekleştirdiği biçiminde ifade edilebilir.

Bu çalışmada quasi-kuaterniyonlar üzerinde tanımladığımız ve involüsyon ile anti-involüsyon aksiyomlarını birlikte sağlayan iki dönüşümün her birinde ise, kullanılan keyfi quasi-kuaterniyonların skaler kısımları $\mathbb{R}^4$ te sabit kalmaktadır. Ancak, vektörel kısımlar dönüşümlerden birinde $\mathbb{R}^3$ te orijine göre yansımakta, diğeri ise sabit kalmaktadır. Dolayısıyla, ikinci dönüşümde $\mathbb{R}^4$ teki keyfi quasi-kuaterniyonun tamamı sabit kalmaktadır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde; reel-kuaterniyonlara ilişkin temel tanım ve cebirsel özelliklere, reel-kuaterniyonlar kullanılarak elde edilen involüsyon ve anti-involüsyon dönüşümlere ve bu dönüşümlerin 3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^3$ teki geometrik yorumlarına matris gösterimleriyle birlikte yer verilmiştir.

2.1. Reel-Kuaterniyonlar

Reel-kuaterniyonlar, bileşenleri reel sayılardan oluşan ve değişmeli (komütatif) olmayan özel çarpım kurallarına göre işlem gören sayılar kümesidir. Bu küme

$$H = \{\mu = \mu_0 + \mu_1 \mathbf{i} + \mu_2 \mathbf{j} + \mu_3 \mathbf{k} : \mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}\} \quad (2.1)$$

şeklinde ifade edilir. Burada, μ_0 skaler bileşeni, μ_1, μ_2, μ_3 ise sanal bileşenleri temsil eder ve tamamı reel sayılardır. $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ sanal birimleri ise 3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^3$ içinde ortogonal bir bazın yönlerini temsil edecek şekilde düşünülebilir. Bu sanal birimler (vektörler) çarpma işlemine göre

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 &= -1, \mathbf{ijk} = -1 \\ \mathbf{ij} &= -\mathbf{ji} = \mathbf{k} \\ \mathbf{jk} &= -\mathbf{kj} = \mathbf{i} \\ \mathbf{ki} &= -\mathbf{ik} = \mathbf{j} \end{aligned} \quad (2.2)$$

eşitliklerini sağlar.

Bir $\mu = \mu_0 + \mu_1 \mathbf{i} + \mu_2 \mathbf{j} + \mu_3 \mathbf{k}$ reel-kuaterniyonu skaler $S(\mu) = \mu_0 \in \mathbb{R}$ ve vektörel $V(\mu) = \mu_1 \mathbf{i} + \mu_2 \mathbf{j} + \mu_3 \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere iki kısımdan oluşur. Dolayısıyla

$$\mu = S(\mu) + V(\mu) \quad (2.3)$$

yazılabilir. Eğer $S(\mu) = 0$ ise μ reel-kuaterniyonu sadece vektörel kısımdan oluşur ve bu tür kuaterniyonların kümesi

$$\tilde{H} = \{\mu = \mu_1 \mathbf{i} + \mu_2 \mathbf{j} + \mu_3 \mathbf{k} : \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}\} \quad (2.4)$$

şeklinde gösterilir. Bu kümenin her bir elemanına pür reel-kuaterniyon denir ve $\mathbb{R}^3$ te birer vektör belirtirler (Hamilton, 1844).

Herhangi iki reel-kuaterniyon $\mu = \mu_0 + \mu_1 \mathbf{i} + \mu_2 \mathbf{j} + \mu_3 \mathbf{k} = S(\mu) + V(\mu)$ ve $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 \mathbf{i} + \varphi_2 \mathbf{j} + \varphi_3 \mathbf{k} = S(\varphi) + V(\varphi)$ olmak üzere, reel kuaterniyonların kümesi üzerinde toplama işlemi

$$\begin{aligned} \oplus : \quad \mathbb{H} \times \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} \\ (\mu, \varphi) &\mapsto \mu \oplus \varphi = \mu + \varphi \end{aligned} \quad (2.5)$$

ile tanımlı olup

$$\begin{aligned} \mu + \varphi &= (S(\mu) + V(\mu)) + (S(\varphi) + V(\varphi)) \\ &= (\mu_0 + \mu_1 \mathbf{i} + \mu_2 \mathbf{j} + \mu_3 \mathbf{k}) + (\varphi_0 + \varphi_1 \mathbf{i} + \varphi_2 \mathbf{j} + \varphi_3 \mathbf{k}) \\ &= (\mu_0 + \varphi_0) + (\mu_1 + \varphi_1) \mathbf{i} + (\mu_2 + \varphi_2) \mathbf{j} + (\mu_3 + \varphi_3) \mathbf{k} \\ &= (S(\mu) + S(\varphi)) + (V(\mu) + V(\varphi)) \\ &= \varphi + \mu \end{aligned} \quad (2.6)$$

şeklindedir (Hamilton, 1844). Reel-kuaterniyonlar kümesi üzerinde tanımlı toplama işlemi için, her hangi iki reel-kuaterniyon μ ve φ ele alındığında $\mu + \varphi = \varphi + \mu$ eşitliği sağlanmaktadır. Bu özellik, toplama işleminin kuaterniyonlar kümesi üzerinde değişmeli bir yapıya sahip olduğunu gösterir. Bu bağlamda $\mathbb{H}$ kümesi, toplama işlemi ile birlikte cebirsel anlamda bir Abel grubu teşkil eder. Yani, $(\mathbb{H}, \oplus)$ yapısı, grupların dört temel özelliği; kapalı olma, birleşme özelliği, birim elemanın varlığı ve ters elemanların varlığını sağlamanın yanı sıra, toplama işleminin değişmeli olması nedeniyle Abel grubu niteliğindedir. Bu grup yapısında, toplama işlemi açısından birim (etkisiz) eleman, tüm bileşenleri sıfır olan

$$\mu = 0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} := (0,0,0,0) := \mathbf{0}_4 \quad (2.7)$$

reel-kuaterniyondur. Bir diğer ifadeyle, herhangi bir $\mu \in \mathbb{H}$ için

$$\mu \oplus \mathbf{0}_4 = \mathbf{0}_4 \oplus \mu = \mu \quad (2.8)$$

eşitliği sağlanır.

Herhangi bir

$$\mu = \mu_0 + \mu_1 \mathbf{i} + \mu_2 \mathbf{j} + \mu_3 \mathbf{k} = S(\mu) + \mathbf{V}(\mu) \quad (2.9)$$

reel-kuaterniyonu ve keyfi bir $c \in \mathbb{R}$ sayısını ele alalım. Bu durumda, bir reel-kuaterniyonun bir skalerle çarpma işlemi

$$\begin{aligned} \odot : \quad \mathbb{R} \times \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} \\ (c, \mu) &\mapsto c \odot \mu = c\mu \end{aligned} \quad (2.10)$$

ile tanımlı olup

$$\begin{aligned} c\mu &= (c\mu_0) + (c\mu_1 \mathbf{i}) + (c\mu_2 \mathbf{j}) + (c\mu_3 \mathbf{k}) \\ &= c\mu_0 + c(\mu_1 \mathbf{i} + \mu_2 \mathbf{j} + \mu_3 \mathbf{k}) \\ &= cS(\mu) + c\mathbf{V}(\mu) \\ &= \mu c \end{aligned} \quad (2.11)$$

şeklindedir (Hamilton, 1844). Reel-kuaterniyonların kümesi, üzerinde tanımlı toplama $\oplus$ ve skalerle çarpma $\odot$ işlemleriyle birlikte, reel sayılar cismi $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı 4-boyutlu bir vektör uzayı yapısı oluşturur. Dolayısıyla $(\mathbb{H}, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot)$ şeklindeki yapı, reel sayılar cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayıdır. Herhangi iki $\mu = \mu_0 + \mu_1 \mathbf{i} + \mu_2 \mathbf{j} + \mu_3 \mathbf{k} = S(\mu) + \mathbf{V}(\mu)$ ve $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 \mathbf{i} + \varphi_2 \mathbf{j} + \varphi_3 \mathbf{k} = S(\varphi) + \mathbf{V}(\varphi)$ reel-kuaterniyonu için çarpma işlemi

$$\begin{aligned} \otimes : \quad \mathbb{H} \times \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} \\ (\mu, \varphi) &\mapsto \mu \otimes \varphi = \mu\varphi \end{aligned} \quad (2.12)$$

ile tanımlı olup

$$\begin{aligned} \mu\varphi &= (\mu_0 + \mu_1 \mathbf{i} + \mu_2 \mathbf{j} + \mu_3 \mathbf{k}).(\varphi_0 + \varphi_1 \mathbf{i} + \varphi_2 \mathbf{j} + \varphi_3 \mathbf{k}) \\ &= (\mu_0\varphi_0 - \mu_1\varphi_1 - \mu_2\varphi_2 - \mu_3\varphi_3) \\ &\quad + (\mu_0\varphi_1 + \mu_1\varphi_0 + \mu_2\varphi_3 - \mu_3\varphi_2)\mathbf{i} \\ &\quad + (\mu_0\varphi_2 - \mu_1\varphi_3 + \mu_2\varphi_0 + \mu_3\varphi_1)\mathbf{j} \\ &\quad + (\mu_0\varphi_3 + \mu_1\varphi_2 - \mu_2\varphi_1 + \mu_3\varphi_0)\mathbf{k} \\ &= S(\mu)S(\varphi) - \langle \mathbf{V}(\mu), \mathbf{V}(\varphi) \rangle + S(\mu)\mathbf{V}(\varphi) \\ &\quad + S(\varphi)\mathbf{V}(\mu) + \mathbf{V}(\mu) \times \mathbf{V}(\varphi) \end{aligned} \quad (2.13)$$

dir. Burada, $\langle, \rangle$ ile $\mathbb{R}^3$ te iki vektörün iç çarpımı, $\times$ ile de vektörel çarpımı gösterilmiştir ve

$$\langle V(\mu), V(\varphi) \rangle = \mu_1 \varphi_1 + \mu_2 \varphi_2 + \mu_3 \varphi_3 \in \mathbb{R} \quad (2.13)$$

$V(\mu) \times V(\varphi) = (\mu_2 \varphi_3 - \varphi_2 \mu_3) \mathbf{i} + (\mu_3 \varphi_1 - \varphi_3 \mu_1) \mathbf{j} + (\mu_1 \varphi_2 - \varphi_1 \mu_2) \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ şeklinde tanımlıdır (Hamilton, 1844). $V(\mu) \times V(\varphi)$ vektörel kısımdan dolayı, reel-kuaterniyonlar kümesi çarpma işlemine göre değişme özelliğine sahip değildir. O halde, her μ ve φ reel-kuaterniyonu için

$$\mu\varphi \neq \varphi\mu \quad (2.14)$$

dır. Dolayısıyla, reel-kuaterniyonlar kümesi, üzerinde tanımladığımız toplama $\oplus$, skalerle çarpma $\odot$ ve çarpım $\otimes$ işlemleriyle birlikte, reel sayılar cismi üzerinde değişmeli olmayan $(\mathbb{H}, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot, \otimes)$ cebirini belirtir.

Herhangi iki μ ve φ pür reel-kuaterniyonunun çarpımı

$$\mu\varphi = -\langle \mu, \varphi \rangle + \mu \times \varphi \quad (2.15)$$

ile tanımlıdır (Kuipers, 1999; Ward, 1996; Hamilton, 1844).

Herhangi bir $\mu = \mu_0 + \mu_1 \mathbf{i} + \mu_2 \mathbf{j} + \mu_3 \mathbf{k} = S(\mu) + V(\mu)$ reel-kuaterniyonunun eşleniği ise

$$\bar{\mu} = \mu_0 - \mu_1 \mathbf{i} - \mu_2 \mathbf{j} - \mu_3 \mathbf{k} = S(\mu) - V(\mu) \quad (2.16)$$

şeklindedir (Hamilton, 1967; Kelland vd., 1904; Ablamowicz, 2009; Ablamowicz ve Fauser, 2011, 2011a, 2012).

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ve $\mu, \varphi \in \mathbb{H}$ olmak üzere, eşlenik kavramının aşağıdaki temel özellikleri verilebilir:

- (i) $\overline{c_1 \mu \pm c_2 \varphi} = c_1 \bar{\mu} \pm c_2 \bar{\varphi}$
- (ii) $\overline{\mu \varphi} = \bar{\varphi} \bar{\mu}$
- (iii) $\overline{(\bar{\mu})} = \mu$

Bir $\mu = \mu_0 + \mu_1 \mathbf{i} + \mu_2 \mathbf{j} + \mu_3 \mathbf{k}$ reel-kuaterniyonun normu

$$N(\mu) = \mu \bar{\mu} = \bar{\mu} \mu = \mu_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 \in \mathbb{R} \quad (2.17)$$

ile tanımlıdır. Burada dikkat edilmelidir ki $N(\mu) \geq 0$ dir. $c \in \mathbb{R}$ ve $\mu, \varphi \in \mathbb{H}$ olmak üzere, norm kavramı

- (i) $N(\mu\varphi) = N(\mu)N(\varphi) = N(\varphi)N(\mu)$,
- (ii) $N(c\mu) = c^2 N(\mu)$,
- (iii) $N(\mu) = N(\bar{\mu})$

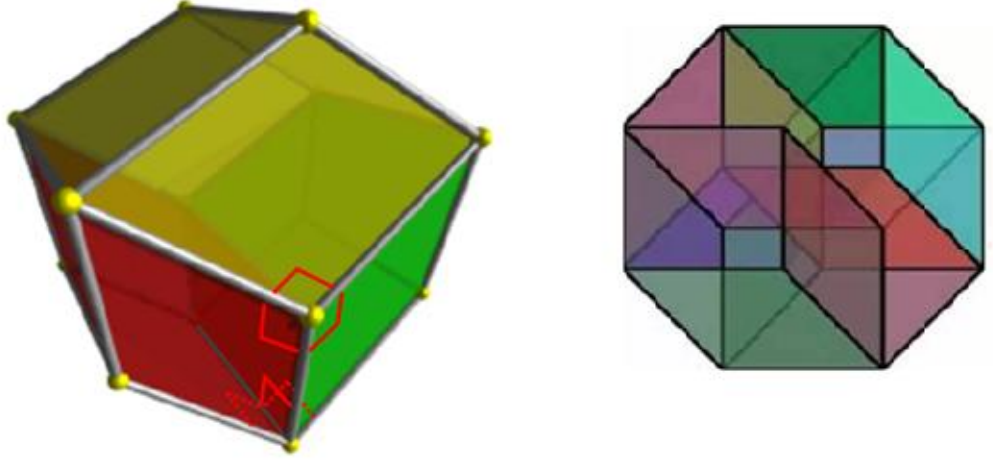
özelliklerini sağlar. Normu 1 olan reel-kuaterniyonlara birim reel-kuaterniyonlar denir ve bu tür kuaterniyonların kümesi

$$\mathbb{H}_b = \{\mu \in \mathbb{H} : N(\mu) = 1\} \quad (2.18)$$

ile ifade edilir. Bir reel-kuaterniyon birim ve pür ise (yani; $\mu \in \tilde{\mathbb{H}}$ ve $N(\mu) = 1$ ise), karesi -1 dir. Buradan, $\mu^2 = -N(\mu) = -(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2) = -1$ yazılabilir (Ell ve Sangwine, 2007). Birim ve pür reel kuaterniyonların kümesi $\tilde{\mathbb{H}}_b$ ile gösterilecektir.

4-boyutlu Öklid-uzayı $\mathbb{R}^4$ te (x, y, z, t) sıralı dördlüsü Kartezyen koordinat sisteminin eksenleri olmak üzere, her bir birim reel-kuaterniyonun $\mathbb{R}^4$ teki karşılığı orjin merkezli ve yarıçapı 1 br. olan 3-küredir (merkezil birim 3-küre) ve topolojik olarak S^3 ile gösterilir, bir diğer ifadeyle herhangi bir $\mu = \mu_0 + \mu_1 \mathbf{i} + \mu_2 \mathbf{j} + \mu_3 \mathbf{k} \in \mathbb{H}_b$ için $x = \mu_0$, $y = \mu_1$, $z = \mu_2$, $t = \mu_3$ olmak üzere $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$.

Geometride tesseract (Şekil 2.1) ya da 4-küp, dört boyutlu bir hiperküptür; iki boyutlu kareye ve üç boyutlu kübe benzer şekilde dört boyutlu uzayda tanımlanır. Nasıl ki bir karenin çevresi dört kenardan ve bir küpün yüzeyi altı kare yüzeyden oluşuyorsa, bir tesseract'ın hiperyüzeyi de birbirine dik sekiz kübik hücreden oluşur.



Şekil 2.1. Tesseract (4-küp).

Birim tesseract denklemi ise

$$-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1, -1 \leq t \leq 1 \quad (2.19)$$

şeklinde verilebilir.

Sıfırdan farklı herhangi bir $\mu = \mu_0 + \mu_1 \mathbf{i} + \mu_2 \mathbf{j} + \mu_3 \mathbf{k}$ reel-kuaterniyonunu

$$\frac{\mu}{\sqrt{N(\mu)}} \quad (2.20)$$

şeklinde birim kuaterniyona dönüştürebiliriz.

Herhangi bir $\mu = \mu_0 + \mu_1 \mathbf{i} + \mu_2 \mathbf{j} + \mu_3 \mathbf{k}$ reel-kuaterniyonunun normu sıfırdan farklı olmak üzere çarpma işlemine göre tersi

$$\mu^{-1} = \frac{\bar{\mu}}{N(\mu)} \quad (2.21)$$

ile ifade edilir. $c \in \mathbb{R}$ ve $\mu, \varphi \in \mathbb{H}$ olmak üzere, reel-kuaterniyonun tersi (inversi) aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- (i) $(\mu\varphi)^{-1} = \varphi^{-1}\mu^{-1}$
- (ii) $(c\mu)^{-1} = (1/c)\mu^{-1}$
- (iii) $(\mu^{-1})^{-1} = \mu$

$$(iv) \quad N(\mu^{-1}) = 1/N(\mu).$$

Vektörel kısmı sıfırdan farklı olan $\mu = \mu_0 + \mu_1 \mathbf{i} + \mu_2 \mathbf{j} + \mu_3 \mathbf{k}$ reel-kuaterniyonu

$$\mu = \sqrt{N(\mu)} (\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha) \quad (2.22)$$

şeklinde kutupsal formda ifade edilebilir. Burada

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\mu_0}{\sqrt{N(\mu)}} \\ \sin \alpha &= \frac{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2}}{\sqrt{N(\mu)}} \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\varepsilon = \frac{\mu_1 \mathbf{i} + \mu_2 \mathbf{j} + \mu_3 \mathbf{k}}{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2}} \in \mathbb{R}^3$$

dir. Ayrıca $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon^2 = -N(\varepsilon) = -1$ olup, μ nün eşleniği

$$\bar{\mu} = \sqrt{N(\mu)} (\cos \alpha - \varepsilon \sin \alpha) \quad (2.24)$$

ile tanımlıdır. $\mu = \mu_0 + \mu_1 \mathbf{i} + \mu_2 \mathbf{j} + \mu_3 \mathbf{k}$ reel-kuaterniyonu

$$\begin{aligned} a &= \mu_0 \\ b &= \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2} \end{aligned} \quad (2.25)$$

olmak üzere,

$$\mu = a + \varepsilon b \quad (2.26)$$

şeklinde kompleks formda da gösterilebilir.

2.2. Reel-Kuaterniyonların İnvölüsyonları ve Anti-İnvölüsyonları

Bu kısımda, biri invölüsyon aksiyomlarını diğeri ise anti-involüsyon aksiyomlarını sağlayan iki dönüşüm tanımlanacaktır.

A bir R -cebiri olsun. Bir invölüsyon $\Phi: A \rightarrow A$ şeklinde tanımlanan bir lineer dönüşüm olup aşağıdaki ilk üç aksiyomu sağlar:

1. $\Phi(1) = 1$,
2. her $c \in A$ için $\Phi(\Phi(c)) = c$,
3. her $c_1, c_2 \in A$ için $\Phi(c_1 c_2) = \Phi(c_2) \Phi(c_1)$, (burada Φ bir anti-otomorfizmadır).

Eğer Φ dönüşümü 1. ve 2. aksiyomları sağlıyor fakat 3. aksiyom yerine

4. her $c_1, c_2 \in A$ için $\Phi(c_1 c_2) = \Phi(c_1) \Phi(c_2)$, (burada Φ bir otomorfizmadır)

aksiyomunu sağlıyorsa Φ dönüşümüne, A üzerinde tanımlı bir anti-involüsyon denir (Hahn, 1994).

Teorem 2.1. μ herhangi bir reel-kuaterniyon ve $\mathbf{r} = r_1 \mathbf{i} + r_2 \mathbf{j} + r_3 \mathbf{k}$ şeklinde birim ve pür reel-kuaterniyon olsun. Bu durumda,

$$\alpha_{\mathbf{r}}: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} \quad (2.27)$$

şeklinde tanımlanan ve

$$\alpha_{\mathbf{r}}(\mu) = -\mathbf{r} \bar{\mu} \mathbf{r} \quad (2.28)$$

biçiminde verilen dönüşüm involüsyon aksiyomlarını sağlar (Ell ve Sangwine, 2007).

İspat. Lineerlik aksiyomunun sağlandığı şu şekilde gösterilebilir: $\mu, \varphi \in \mathbb{H}$, $\mathbf{r} \in \tilde{\mathbb{H}}_b$ ve $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathbf{r}}(c\mu) &= -\mathbf{r}(\overline{c\mu})\mathbf{r} \\ &= -\mathbf{r}(c\bar{\mu})\mathbf{r} \\ &= c(-\mathbf{r}\bar{\mu}\mathbf{r}) \\ &= c\alpha_{\mathbf{r}}(\mu) \end{aligned} \quad (2.29)$$

ve

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathbf{r}}(\mu + \varphi) &= -\mathbf{r}(\overline{\mu + \varphi})\mathbf{r} \\ &= -\mathbf{r}(\bar{\mu} + \bar{\varphi})\mathbf{r} \\ &= (-\mathbf{r}\bar{\mu}\mathbf{r}) + (-\mathbf{r}\bar{\varphi}\mathbf{r}) \\ &= \alpha_{\mathbf{r}}(\mu) + \alpha_{\mathbf{r}}(\varphi) \end{aligned} \quad (2.30)$$

dir ve $\alpha_r(1) = -\mathbf{r}\bar{1}\mathbf{r} = -\mathbf{r}\mathbf{r} = -\mathbf{r}^2 = 1$ eşitliği sağlanır. 2. aksiyom ise

$$\begin{aligned}
\alpha_r(\alpha_r(\mu)) &= \alpha_r(-\mathbf{r}\bar{\mu}\mathbf{r}) \\
&= -\mathbf{r}(\overline{-\mathbf{r}\bar{\mu}\mathbf{r}})\mathbf{r} \\
&= -\mathbf{r}(-\mathbf{r})\mu\mathbf{r}\mathbf{r} \\
&= (\mathbf{r})^2\mu(\mathbf{r})^2 \\
&= \mu
\end{aligned} \tag{2.31}$$

şeklinde doğrulanır. Son olarak anti-otomorfizma aksiyomu $\overline{\mu\varphi} = \overline{\varphi}\bar{\mu}$ eşlenik kuralı kullanılarak

$$\begin{aligned}
\alpha_r(\mu\varphi) &= -\mathbf{r}(\overline{\mu\varphi})\mathbf{r} \\
&= -\mathbf{r}(\overline{\varphi}\bar{\mu})\mathbf{r} \\
&= -\mathbf{r}(\overline{\varphi}(-\mathbf{r}\mathbf{r})\bar{\mu})\mathbf{r} \\
&= -\mathbf{r}(\overline{\varphi}(\mathbf{r}(-\mathbf{r}))\bar{\mu})\mathbf{r} \\
&= (-\mathbf{r}\overline{\varphi}\mathbf{r})(-\mathbf{r}\bar{\mu}\mathbf{r}) \\
&= \alpha_r(\varphi)\alpha_r(\mu)
\end{aligned} \tag{2.32}$$

elde edilir. Dolayısıyla, α_r dönüşümü bir involüsyon belirtir.

Teorem 2.2. μ herhangi bir reel-kuaterniyon ve $\mathbf{r} = r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j} + r_3\mathbf{k}$ şeklinde birim ve pür reel-kuaterniyon olsun. Bu durumda,

$$\beta_r : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} \tag{2.33}$$

şeklinde tanımlanan ve

$$\beta_r(\mu) = -\mathbf{r}\mu\mathbf{r} \tag{2.34}$$

biçiminde verilen dönüşüm anti-involüsyon aksiyomlarını sağlar (Ell ve Sangwine, 2007).

İspat. Lineerlik aksiyomunun sağlandığı şu şekilde gösterilebilir: $\mu, \varphi \in \mathbb{H}$ ve $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\beta_r(c\mu) &= -\mathbf{r}(c\mu)\mathbf{r} \\
&= c(-\mathbf{r}\mu\mathbf{r}) \\
&= c\beta_r(\mu)
\end{aligned} \tag{2.35}$$

ve

$$\begin{aligned}
\beta_r(\mu + \varphi) &= -\mathbf{r}(\mu + \varphi)\mathbf{r} \\
&= (-\mathbf{r}\mu\mathbf{r}) + (-\mathbf{r}\varphi\mathbf{r}) \\
&= \beta_r(\mu) + \beta_r(\varphi)
\end{aligned} \tag{2.36}$$

olur ve $\beta_r(1) = -\mathbf{r}1\mathbf{r} = -\mathbf{r}\mathbf{r} = -\mathbf{r}^2 = 1$ eşitliği sağlanır. 2. aksiyom ise

$$\begin{aligned}
\beta_r(\beta_r(\mu)) &= \beta_r(-\mathbf{r}\mu\mathbf{r}) \\
&= -\mathbf{r}(-\mathbf{r}\mu\mathbf{r})\mathbf{r} \\
&= -\mathbf{r}(-\mathbf{r})\mu\mathbf{r}\mathbf{r} \\
&= (\mathbf{r}^2)\mu(\mathbf{r}^2) \\
&= \mu
\end{aligned} \tag{2.37}$$

şeklinde doğrulanır. Son olarak, otomorfizma aksiyomu

$$\beta_r(\mu\varphi) = -\mathbf{r}(\mu\varphi)\mathbf{r} \tag{2.38}$$

eşitliğinde $-\mathbf{r}^2 = 1$ kullanılarak

$$\begin{aligned}
\beta_r(\mu\varphi) &= -\mathbf{r}\mu(-\mathbf{r}\mathbf{r})\varphi\mathbf{r} \\
&= (-\mathbf{r}\mu\mathbf{r})(-\mathbf{r}\varphi\mathbf{r}) \\
&= \beta_r(\mu)\beta_r(\varphi)
\end{aligned} \tag{2.39}$$

elde edilir. Dolayısıyla β_r dönüşümü bir anti-involüsyon belirtir.

2.3. Reel-Kuaterniyonların İnvölüsyonlarının ve Anti-İnvölüsyonlarının Geometrik Yorumu

Teorem 2.3. $\mu = a + \varepsilon b$ kompleks formdaki herhangi bir reel-kuaterniyon ve $\mathbf{r}$ birim pür reel-kuaterniyon olmak üzere $\alpha_r(\mu) = -\mathbf{r}\bar{\mu}\mathbf{r}$ involüsyon dönüşümü, μ nun skaler kısmı olan a yı invaryant bırakırken, vektörel kısmı olan εb yi involüsyon eksenini $\mathbf{r}$ ye dik olan düzleme göre yansıtır (Ell ve Sangwine, 2007).

Teorem 2.4. $\mu = a + \varepsilon b$ kompleks formdaki herhangi bir reel kuaterniyon ve $\mathbf{r}$ birim pür reel-kuaterniyon olmak üzere $\beta_{\mathbf{r}}(\mu) = -\mathbf{r}\mu\mathbf{r}$ anti-involüsyon dönüşümü, μ nun skaler kısmı olan a yı invaryant bırakırken, vektörel kısmı olan εb yi $\mathbf{r}$ ye göre yansıtır. Bir başka ifadeyle, μ nün vektörel kısmı εb yi involüsyon eksenini $\mathbf{r}$ etrafında π radyan kadar döndürür (Ell ve Sangwine, 2007).

2.4. Reel-Kuaterniyonların İnvölüsyonlarının ve Anti-İnvölüsyonlarının Matris Gösterimleri

$\mu = a + \varepsilon b$ kompleks formdaki herhangi bir reel kuaterniyon ve $\mathbf{r} = r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j} + r_3\mathbf{k}$ birim pür reel-kuaterniyon olsun. $\alpha_{\mathbf{r}}(\mu) = -\mathbf{r}\mu\mathbf{r} = a + \mathbf{r}\varepsilon\mathbf{r}b$ involüsyon dönüşümü ve $\mathbb{H}$ vektör uzayının $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ bazı kullanılarak aşağıdaki eşitlikler verilebilir:

$$\begin{aligned}\alpha_{\mathbf{r}}(1) &= -\mathbf{r}\bar{1}\mathbf{r} = -\mathbf{r}^2 = 1, \\ \alpha_{\mathbf{r}}(\mathbf{i}) &= -\mathbf{r}\bar{\mathbf{i}}\mathbf{r} = (1 - 2r_1^2)\mathbf{i} - 2r_1r_2\mathbf{j} - 2r_1r_3\mathbf{k}, \\ \alpha_{\mathbf{r}}(\mathbf{j}) &= -\mathbf{r}\bar{\mathbf{j}}\mathbf{r} = -2r_1r_2\mathbf{i} + (1 - 2r_2^2)\mathbf{j} - 2r_2r_3\mathbf{k}, \\ \alpha_{\mathbf{r}}(\mathbf{k}) &= -\mathbf{r}\bar{\mathbf{k}}\mathbf{r} = -2r_1r_3\mathbf{i} - 2r_2r_3\mathbf{j} + (1 - 2r_3^2)\mathbf{k}.\end{aligned}\tag{2.40}$$

Dolayısıyla, $\alpha_{\mathbf{r}}(\mu) = -\mathbf{r}\mu\mathbf{r}$ involüsyon dönüşümüne karşılık gelen matris

$$\alpha_{\mathbf{r}}(\mu) = M_{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2r_1^2 & -2r_1r_2 & -2r_1r_3 \\ 0 & -2r_1r_2 & 1-2r_2^2 & -2r_2r_3 \\ 0 & -2r_1r_3 & -2r_2r_3 & 1-2r_3^2 \end{pmatrix}_{4 \times 4} \cdot \begin{pmatrix} a \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}_{4 \times 1}\tag{2.41}$$

şeklinde olacaktır. Burada $\varepsilon b = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ ve $\mu = a + \varepsilon b$ dir. 4×4 ve 4×1 tipindeki matrisler ise sırasıyla M ve μ ye karşılık gelmektedir. $MM^T = I_{4 \times 4}$ ve $M = M^T$ olduğundan μ ortogonal ve simetriktir. Ayrıca, $\det(M) = -1$ olduğundan $\alpha_{\mathbf{r}}(\mu) = -\mathbf{r}\mu\mathbf{r}$ involüsyon dönüşümü $\mathbb{R}^4$ te bir yansıma belirtir (Bekar ve Yaylı, 2016).

Sonuç 2.5. $\mu = \mu_1\mathbf{i} + \mu_2\mathbf{j} + \mu_3\mathbf{k} := (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \tilde{\mathbb{H}}$ ve $\mathbf{r} = r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j} + r_3\mathbf{k} := (r_1, r_2, r_3) \in \tilde{\mathbb{H}}$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} 1-2r_1^2 & -2r_1r_2 & -2r_1r_3 \\ -2r_1r_2 & 1-2r_2^2 & -2r_2r_3 \\ -2r_1r_3 & -2r_2r_3 & 1-2r_3^2 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix}_{3 \times 1} \quad (2.42)$$

matris çarpımı sonucu, $\mathbb{R}^3$ te μ pür reel-kuaterniyonu $\mathbf{r}$ birim pür reel-kuaterniyonuna dik olan düzleme göre yansır (Bekar ve Yaylı, 2016).

$\mu = a + \varepsilon b$ kompleks formdaki herhangi bir reel-kuaterniyon ve $\mathbf{r} = r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j} + r_3\mathbf{k}$ birim pür reel-kuaterniyon olsun. $\beta_{\mathbf{r}}(\mu) = -\mathbf{r}\mu\mathbf{r} = a - \mathbf{r}\varepsilon\mathbf{r}b$ anti-involüsyon dönüşümü ve $\mathbb{H}$ vektör uzayının $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ bazı kullanılarak aşağıdaki eşitlikler verilebilir:

$$\begin{aligned} \beta_{\mathbf{r}}(1) &= -\mathbf{r}1\mathbf{r} = -\mathbf{r}^2 = 1, \\ \beta_{\mathbf{r}}(\mathbf{i}) &= -\mathbf{r}\mathbf{i}\mathbf{r} = (2r_1^2 - 1)\mathbf{i} + 2r_1r_2\mathbf{j} + 2r_1r_3\mathbf{k}, \\ \beta_{\mathbf{r}}(\mathbf{j}) &= -\mathbf{r}\mathbf{j}\mathbf{r} = 2r_1r_2\mathbf{i} + (2r_2^2 - 1)\mathbf{j} + 2r_2r_3\mathbf{k}, \\ \beta_{\mathbf{r}}(\mathbf{k}) &= -\mathbf{r}\mathbf{k}\mathbf{r} = 2r_1r_3\mathbf{i} + 2r_2r_3\mathbf{j} + (2r_3^2 - 1)\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Dolayısıyla, $f_{\mathbf{r}}(\mu) = -\mathbf{r}\mu\mathbf{r}$ involüsyon dönüşümüne karşılık gelen matris

$$\beta_{\mathbf{r}}(\mu) = M\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2r_1^2-1 & 2r_1r_2 & 2r_1r_3 \\ 0 & 2r_1r_2 & 2r_2^2-1 & 2r_2r_3 \\ 0 & 2r_1r_3 & 2r_2r_3 & 2r_3^2-1 \end{pmatrix}_{4 \times 4} \cdot \begin{pmatrix} a \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}_{4 \times 1} \quad (2.44)$$

şeklinde olacaktır. Burada $\varepsilon b = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ ve $\mu = a + \varepsilon b$ dir. 4×4 ve 4×1 tipindeki matrisler ise sırasıyla M ve μ ye karşılık gelmektedir. $MM^T = I_{4 \times 4}$ ve $M = M^T$ olduğundan μ ortogonal ve simetriktir. Ayrıca, $\det(M) = +1$ olduğundan $\beta_{\mathbf{r}}(\mu) = -\mathbf{r}\mu\mathbf{r}$ anti-involüsyon dönüşümü $\mathbb{R}^4$ te bir dönme belirtir (Bekar ve Yaylı 2016).

Sonuç 2.6. $\mu = \mu_1\mathbf{i} + \mu_2\mathbf{j} + \mu_3\mathbf{k} := (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \tilde{\mathbb{H}}$ ve $\mathbf{r} = r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j} + r_3\mathbf{k} := (r_1, r_2, r_3) \in \tilde{\mathbb{H}}$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} 2r_1^2-1 & 2r_1r_2 & 2r_1r_3 \\ 2r_1r_2 & 2r_2^2-1 & 2r_2r_3 \\ 2r_1r_3 & 2r_2r_3 & 2r_3^2-1 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix}_{3 \times 1} \quad (2.45)$$

matris çarpımı sonucu, $\mathbb{R}^3$ te $\boldsymbol{\mu}$ pür reel-kuaterniyonu $\mathbf{r}$ birim pür reel-kuaterniyona göre yansır. Bir başka ifadeyle, μ involüsyon eksenini $\mathbf{r}$ etrafında π radyan kadar döner.



3. QUASI-KUATERNİYONLARIN İNVLÜSYONLARI VE ANTİ-İNVLÜSYONLARI

Bu bölümde, Bekar ve Yaylı (2017) tarafından gerçekleştirilen çalışma temel alınarak, quasi-kuaterniyonlara ait temel tanımlar ve cebirsel özellikler ele alınmıştır. Ayrıca, quasi-kuaterniyonlar kullanılarak tanımlanan involüsyon ve anti-involüsyon dönüşümleri ile bu dönüşümlerin 3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^3$ teki geometrik yorumlarına yer verilmiştir. Bunlara ek olarak, söz konusu çalışmayı geliştirecek biçimde bazı yeni kavramlar ve sonuçlar sunulmuş, ilgili dönüşümlere karşılık gelen matris temsilleri de tanımlanmıştır.

3.1. Quasi-Kuaterniyonlar

Quasi-kuaterniyonlar, bişenleri reel sayılar olan

$$\mu = \mu_0 + \mu_1 \mathbf{i} + \mu_2 \mathbf{j} + \mu_3 \mathbf{k} \quad (3.1)$$

şeklindeki sayılardır. Reel-kuaterniyonlarda olduğu gibi, $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}$ ve $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ sanal birimleri ise $\mathbb{R}^3$ te baz vektörleri olarak ele alınabilir. Ancak, bu birimler, reel-kuaterniyonlardan farklı olarak, değişmeli (komütatif) çarpan özelliğini sağlayan

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 0, \mathbf{ij} = \mathbf{ji} = \mathbf{jk} = \mathbf{kj} = \mathbf{ki} = \mathbf{ik} = 0 \quad (3.2)$$

eşitliklerini sağlamaktadır. Quasi-kuaterniyonların kümesi H_q ile ifade edilecektir.

Reel-kuaterniyonlarda olduğu gibi, μ quasi-kuaterniyonu bir skaler bileşen $S(\mu) = \mu_0$ ile bir vektörel bileşenin $V(\mu) = \mu_1 \mathbf{i} + \mu_2 \mathbf{j} + \mu_3 \mathbf{k}$ toplamı olarak $\mu = S(\mu) + V(\mu)$ şeklinde yazılabilir. Skaler kısmı sıfır olan quasi-kuaterniyona pür (vektörel) quasi-kuaterniyon denir. Pür quasi-kuaterniyonların oluşturduğu küme

$$\tilde{H}_q = \{\mu = \mu_1 \mathbf{i} + \mu_2 \mathbf{j} + \mu_3 \mathbf{k} : \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}\} \quad (3.3)$$

şeklinde tanımlanır. Herhangi iki quasi-kuaterniyon $\mu = \mu_0 + \mu_1 \mathbf{i} + \mu_2 \mathbf{j} + \mu_3 \mathbf{k} = S(\mu) + V(\mu)$ ve $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 \mathbf{i} + \varphi_2 \mathbf{j} + \varphi_3 \mathbf{k} = S(\varphi) + V(\varphi)$ nin toplamı

$$\begin{aligned}\oplus : H_q \times H_q &\rightarrow H_q \\ (\mu, \varphi) &\mapsto \mu \oplus \varphi = \mu + \varphi\end{aligned}\tag{3.4}$$

ile tanımlı olup

$$\begin{aligned}\mu + \varphi &= (S(\mu) + V(\mu)) + (S(\varphi) + V(\varphi)) \\ &= (\mu_0 + \mu_1 \mathbf{i} + \mu_2 \mathbf{j} + \mu_3 \mathbf{k}) + (\varphi_0 + \varphi_1 \mathbf{i} + \varphi_2 \mathbf{j} + \varphi_3 \mathbf{k}) \\ &= (\mu_0 + \varphi_0) + (\mu_1 + \varphi_1) \mathbf{i} + (\mu_2 + \varphi_2) \mathbf{j} + (\mu_3 + \varphi_3) \mathbf{k} \\ &= (S(\mu) + S(\varphi)) + (V(\mu) + V(\varphi)) \\ &= (S(\varphi) + V(\varphi)) + (S(\mu) + V(\mu)) \\ &= \varphi + \mu\end{aligned}\tag{3.5}$$

şeklindedir. Quasi-kuaterniyonlar kümesi üzerinde tanımlı toplama işlemi için, herhangi iki quasi-kuaterniyon μ ve φ ele alındığında $\mu + \varphi = \varphi + \mu$ eşitliği sağlanmaktadır. Bu özellik, toplama işleminin quasi-kuaterniyonlar kümesi üzerinde değişmeli bir yapıya sahip olduğunu gösterir. Bu bağlamda H_q kümesi, toplama işlemi ile birlikte cebirsel anlamda bir Abel grubu teşkil eder. Yani, $(H_q, \oplus)$ yapısı, grupların dört temel özelliği; kapalı olma, birleşme özelliği, birim elemanın varlığı ve ters elemanların varlığını sağlamanın yanı sıra, toplama işleminin değişmeli olması nedeniyle Abel grubu niteliğindedir. Bu grup yapısında, toplama işlemi açısından birim (etkisiz) eleman tüm bileşenleri sıfır olan

$$\mu = 0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} := (0,0,0,0) := \mathbf{0}_4\tag{3.6}$$

quasi-kuaterniyonudur. Bir diğer ifadeyle, herhangi bir $\mu \in H_q$ için

$$\mu \oplus \mathbf{0}_4 = \mathbf{0}_4 \oplus \mu = \mu\tag{3.7}$$

dir.

Bir quasi-kuaterniyon $\mu = \mu_0 + \mu_1 \mathbf{i} + \mu_2 \mathbf{j} + \mu_3 \mathbf{k} = S(\mu) + V(\mu)$ ile $c \in \mathbb{R}$ skaleri çarpımı

$$\begin{aligned}\odot : \mathbb{R} \times H_q &\rightarrow H_q \\ (c, \mu) &\mapsto c \odot \mu = c\mu\end{aligned}\tag{3.8}$$

ile tanımlı olup

$$\begin{aligned}
c\mu &= (c\mu_0) + (c\mu_1\mathbf{i}) + (c\mu_2\mathbf{j}) + (c\mu_3\mathbf{k}) \\
&= c\mu_0 + c(\mu_1\mathbf{i} + \mu_2\mathbf{j} + \mu_3\mathbf{k}) \\
&= cS(\mu) + cV(\mu) \\
&= \mu c
\end{aligned} \tag{3.9}$$

şeklindedir. Quasi-kuaterniyonların kümesi, üzerinde tanımlı toplama $\oplus$ ve skalerle çarpma $\odot$ işlemleriyle birlikte, reel sayılar cismi üzerinde dört boyutlu vektör uzayı yapısı oluşturur. Bir diğer ifadeyle, $(H_q, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot)$ şeklindeki yapı, $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı bir vektör uzayıdır (Jafari, 2014).

İki quasi-kuaterniyonu $\mu = \mu_0 + \mu_1\mathbf{i} + \mu_2\mathbf{j} + \mu_3\mathbf{k} = S(\mu) + V(\mu)$ ve $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1\mathbf{i} + \varphi_2\mathbf{j} + \varphi_3\mathbf{k} = S(\varphi) + V(\varphi)$ arasındaki çarpma işlemi ise

$$\begin{aligned}
\otimes : H_q \times H_q &\rightarrow H_q \\
(\mu, \varphi) &\mapsto \mu \otimes \varphi = \mu\varphi
\end{aligned} \tag{3.10}$$

ile tanımlı olup

$$\begin{aligned}
\mu\varphi &= (\mu_0 + \mu_1\mathbf{i} + \mu_2\mathbf{j} + \mu_3\mathbf{k})(\varphi_0 + \varphi_1\mathbf{i} + \varphi_2\mathbf{j} + \varphi_3\mathbf{k}) \\
&= (\mu_0\varphi_0) + (\mu_0\varphi_1 + \mu_1\varphi_0)\mathbf{i} + (\mu_0\varphi_2 + \mu_2\varphi_0)\mathbf{j} + (\mu_0\varphi_3 + \mu_3\varphi_0)\mathbf{k} \\
&= S(\mu)S(\varphi) + S(\mu)V(\varphi) + S(\varphi)V(\mu)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

şeklinde yazılır. Quasi-kuaterniyonların çarpma işlemi, reel-kuaterniyonların aksine değişme özelliğine sahiptir. Yani, herhangi iki μ ve φ quasi-kuaterniyonun çarpımı her zaman

$$\mu\varphi = \varphi\mu \tag{3.12}$$

şeklindedir. Dolayısıyla, quasi-kuaterniyonlar kümesi, üzerinde tanımladığımız toplama $\oplus$, skalerle çarpma $\odot$ ve çarpım $\otimes$ işlemleriyle birlikte, reel sayılar cismi üzerinde değişmeli $(H_q, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot, \otimes)$ cebirini belirtir.

Herhangi iki pür quasi-kuaterniyon $\mathbf{r}$ ve $\mathbf{s}$ için

$$\mathbf{rs} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} := (0,0,0) := \mathbf{0}_3 \quad (3.13)$$

dir.

$\mu = \mu_0 + \mu_1\mathbf{i} + \mu_2\mathbf{j} + \mu_3\mathbf{k} = S(\mu) + V(\mu)$ quasi-kuaterniyonun eşleniği

$$\bar{\mu} = \mu_0 - \mu_1\mathbf{i} - \mu_2\mathbf{j} - \mu_3\mathbf{k} = S(\mu) - V(\mu) \quad (3.14)$$

şeklindedir. $\mu, \varphi \in H_q$ ve $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

- (i) $\overline{(\bar{\mu})} = \mu$
- (ii) $\overline{\mu\varphi} = \bar{\mu}\bar{\varphi} = \bar{\varphi}\bar{\mu}$
- (iii) $\overline{c_1\mu \pm c_2\varphi} = c_1\bar{\mu} \pm c_2\bar{\varphi}$

özellikleri sağlanır.

Bir $\mu = \mu_0 + \mu_1\mathbf{i} + \mu_2\mathbf{j} + \mu_3\mathbf{k}$ quasi-kuaterniyonunun normu

$$N(\mu) = \mu\bar{\mu} = \bar{\mu}\mu = \mu_0^2 \geq 0 \quad (3.15)$$

olup reel sayısıdır. $\mu, \varphi \in H_q$ ve $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere, norm işlemi

- (i) $N(\mu) = N(\bar{\mu})$
- (ii) $N(c\mu) = c^2 N(\mu)$
- (iii) $N(\mu\varphi) = N(\mu)N(\varphi) = N(\varphi)N(\mu)$

özelliklerini sağlar. Normu 1 olan quasi-kuaterniyonlara birim quasi-kuaterniyonlar denir ve bu kuaterniyonlar

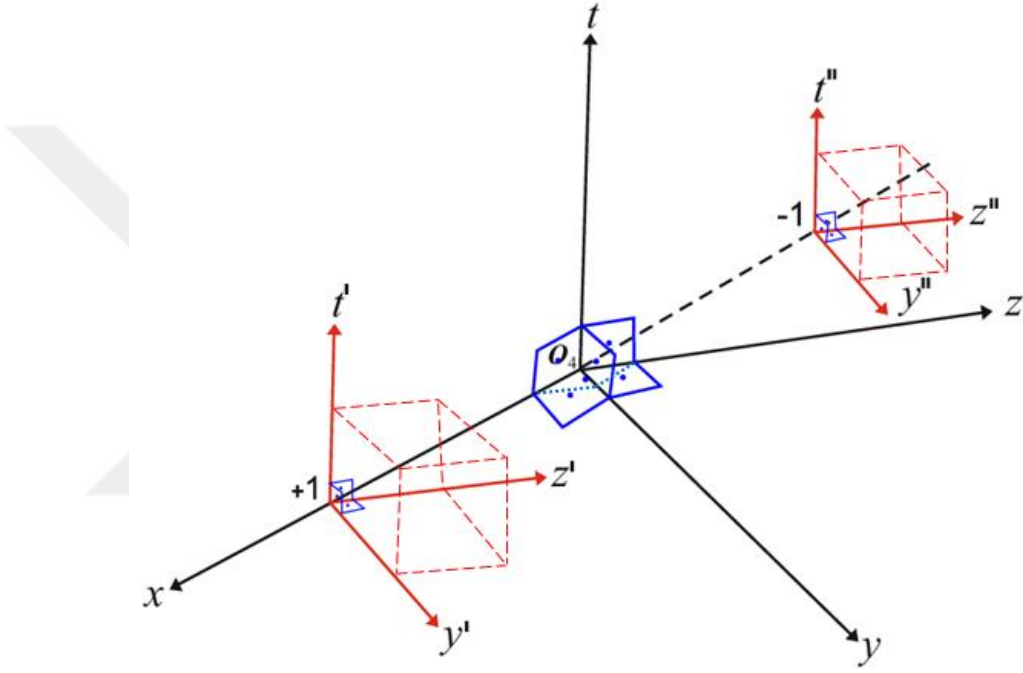
$$\mu = \pm 1 + \mu_1\mathbf{i} + \mu_2\mathbf{j} + \mu_3\mathbf{k} \quad (3.16)$$

şeklindedir. Birim quasi-kuaterniyonların kümesi $(H_q)_b$ ile gösterilecektir.

Hatırlanacağı üzere her pür ve birim reel-kuaterniyonun karesi -1 dir. Ancak, quasi-kuaterniyonlarda, $\mu = 1 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = 1$ birim quasi-kuaterniyonunun tüm reel sayı kuvvetleri 1, $\mu = \pm 1 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \pm 1$ birim quasi-kuaterniyonunun tüm çift

tamsayı kuvvetleri 1 ve $\mu = -1 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = -1$ birim quasi-kuaterniyonunun tüm tek tamsayı kuvvetleri -1 dir.

Şekil 3.1’de verilen (x, y, z, t) sıralı dörtlüsünün $\mathbb{R}^4$ te Kartezyen koordinat sisteminin eksenlerini temsil ettiğini düşünelim. Bu durumda, her bir birim quasi-kuaterniyonun $\mathbb{R}^4$ teki karşılığı, Şekil 3.1’de gösterildiği üzere 3-boyutlu $x = 1$ ve $x = -1$ hiperdüzlemleridir. Bir diğer ifadeyle; herhangi bir $\mu = \mu_0 + \mu_1\mathbf{i} + \mu_2\mathbf{j} + \mu_3\mathbf{k} \in (\mathbb{H}_q)_b$ için $x = \mu_0$, $y = \mu_1$, $z = \mu_2$, $t = \mu_3$ olmak üzere $x^2 = 1$ olup $x = \pm 1$ dir.



Şekil 3.1. Birim quasi-kuaterniyonun $\mathbb{R}^4$ teki karşılığı.

Skaler kısmı sıfır olmayan μ quasi-kuaterniyonun çarpma işlemine göre tersi (inversi)

$$\mu^{-1} = \frac{\bar{\mu}}{N(\mu)} \quad (3.17)$$

ile tanımlıdır. $\mu, \varphi \in \mathbb{H}_q$ ve $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere, quasi-kuaterniyonun tersi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- (i) $(\mu^{-1})^{-1} = \mu$
- (ii) $(\mu\varphi)^{-1} = \mu^{-1}\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\mu^{-1}$
- (iii) $(c\mu)^{-1} = \mu^{-1}/c$

$$(iv) \quad N(\mu^{-1}) = 1/N(\mu).$$

Bir μ quasi-kuaterniyonun pür olmayan bir φ quasi-kuaterniyona bölünmesi, $x\varphi = \mu$ veya $\varphi y = \mu$ denklemlerinden birinin çözülmesi anlamına gelir ve

$$\begin{aligned} x &= \mu\varphi^{-1} = \mu \frac{\bar{\varphi}}{N(\varphi)} \\ y &= \varphi^{-1}\mu = \frac{\bar{\varphi}}{N(\varphi)} \mu \end{aligned} \tag{3.18}$$

çözümüne sahiptir.

3.2. Quasi-Kuaterniyonların İnvölüsyonları ve Anti-İnvölüsyonları

Bu kısımda, hem involüsyon hem de anti-involüsyon aksiyomlarını aynı anda sağlayan iki dönüşüm tanımlanacaktır.

Teorem 3.1. μ herhangi bir quasi-kuaterniyon ve $r = \pm 1 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j} + r_3\mathbf{k}$ şeklinde birim quasi-kuaterniyon olsun. Bu durumda,

$$\Phi_r: H_q \rightarrow H_q \tag{3.19}$$

şeklinde tanımlanan ve

$$\Phi_r(\mu) = r\bar{\mu}r \tag{3.20}$$

biçiminde verilen dönüşüm hem involüsyon hem de anti-involüsyon aksiyomlarını birlikte sağlar.

İspat. Lineerlik aksiyomunun sağlandığı şu şekilde gösterilebilir: $\mu, \varphi \in H_q$ ve $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \Phi_r(c\mu) &= r(\overline{c\mu})\bar{r} \\ &= c(r\bar{\mu}r) \\ &= c\Phi_r(\mu) \end{aligned} \tag{3.21}$$

ve

$$\begin{aligned}
\Phi_r(\mu + \varphi) &= r(\overline{\mu + \varphi})\bar{r} \\
&= r\bar{\mu}\bar{r} + r\bar{\varphi}\bar{r} \\
&= \Phi_r(\mu) + \Phi_r(\varphi)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

dir ve $\Phi_r(1) = r\bar{1}\bar{r} = r\bar{r} = 1$ eşitliği sağlanır. 2. aksiyom ise

$$\begin{aligned}
\Phi_r(\Phi_r(\mu)) &= \Phi_r(r\bar{\mu}\bar{r}) \\
&= r(\overline{r\bar{\mu}\bar{r}})\bar{r} \\
&= r\bar{r}\bar{\mu}r \\
&= \mu
\end{aligned} \tag{3.23}$$

şeklinde doğrulanır. Son olarak, anti-otomorfizma ve otomorfizma aksiyomları $\overline{\mu\varphi} = \bar{\mu}\bar{\varphi} = \bar{\varphi}\bar{\mu}$ eşlenik kuralları kullanılarak

$$\begin{aligned}
\Phi_r(\mu\varphi) &= r(\overline{\mu\varphi})\bar{r} \\
&= r(\bar{\varphi}\bar{\mu})\bar{r} \\
&= r(\bar{\mu}\bar{\varphi})\bar{r}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

şeklinde gösterilebilir ve $r\bar{r} = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\Phi_r(\mu\varphi) &= r\bar{\varphi}(r\bar{r})\bar{\mu}\bar{r} \\
&= (r\bar{\varphi}\bar{r})(r\bar{\mu}\bar{r}) \\
&= \Phi_r(\varphi)\Phi_r(\mu)
\end{aligned} \tag{3.25}$$

sağlanır ve Φ_r bir anti-otomorfizma olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\Phi_r(\mu\varphi) &= r\bar{\mu}(r\bar{r})\bar{\varphi}\bar{r} \\
&= (r\bar{\mu}\bar{r})(r\bar{\varphi}\bar{r}) \\
&= \Phi_r(\mu)\Phi_r(\varphi)
\end{aligned} \tag{3.26}$$

yazılabileceğinden, Φ_r bir otomorfizmadır.

Teorem 3.2. μ herhangi bir quasi-kuaterniyon ve $r = \pm 1 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j} + r_3\mathbf{k}$ şeklinde birim quasi-kuaterniyon olsun. Bu durumda,

$$\Psi_r : H_q \rightarrow H_q \tag{3.27}$$

şeklinde tanımlanan ve

$$\Psi_r(\mu) = r\mu\bar{r} \quad (3.28)$$

biçiminde verilen dönüşüm hem involüsyon hem de anti-involüsyon aksiyomlarını birlikte sağlar.

İspat. Lineerlik aksiyomunun sağlandığı şu şekilde gösterilebilir: $\mu, \varphi \in H_q$ ve $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \Psi_r(c\mu) &= r(c\mu)\bar{r} \\ &= c(r\mu\bar{r}) \\ &= c\Psi_r(\mu) \end{aligned} \quad (3.29)$$

ve

$$\begin{aligned} \Psi_r(\mu + \varphi) &= r(\mu + \varphi)\bar{r} \\ &= r\mu\bar{r} + r\varphi\bar{r} \\ &= \Psi_r(\mu) + \Psi_r(\varphi) \end{aligned} \quad (3.30)$$

dir ve $\Psi_r(1) = r1\bar{r} = r\bar{r} = 1$ eşitliği sağlanır. 2. aksiyom ise

$$\begin{aligned} \Psi_r(\Psi_r(\mu)) &= \Psi_r(r\mu\bar{r}) \\ &= r(r\mu\bar{r})\bar{r} \\ &= r\bar{r}\mu r\bar{r} \\ &= \mu \end{aligned} \quad (3.31)$$

şeklinde doğrulanır. Son olarak, anti-otomorfizma ve otomorfizma aksiyomları

$$\begin{aligned} \Psi_r(\mu\varphi) &= r(\mu\varphi)\bar{r} \\ &= r(\mu\varphi)\bar{r} \end{aligned} \quad (3.32)$$

şeklinde gösterilebilir ve $r\bar{r} = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} \Psi_r(\mu\varphi) &= r\varphi(r\bar{r})\mu\bar{r} \\ &= (r\varphi\bar{r})(r\mu\bar{r}) \\ &= \Psi_r(\varphi)\Psi_r(\mu) \end{aligned} \quad (3.33)$$

eşitliği sağlanır ve Ψ_r bir anti-otomorfizma olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned}\Psi_r(\mu\varphi) &= r\mu(r\bar{r})\varphi\bar{r} \\ &= (r\mu\bar{r})(r\varphi\bar{r}) \\ &= \Psi_r(\mu)\Psi_r(\varphi)\end{aligned}\tag{3.34}$$

yazılabileceğinden, Ψ_r bir otomorfizmadır.

3.3. Quasi-Kuaterniyonların İnvölüsyonlarının ve Anti-İnvölüsyonlarının Geometrik Yorumu

Bu bölümde, Teorem 3.1 ve Teorem 3.2 ile tanımlanan invölüsyon ve anti-involüsyonların $\mathbb{R}^3$ te geometrik yorumları verilmiştir.

Önerme 3.3. $\mu = \mu_0 + \mu_1\mathbf{i} + \mu_2\mathbf{j} + \mu_3\mathbf{k}$ herhangi bir quasi-kuaterniyon ve r birim quasi-kuaterniyon olsun. Bu durumda, Teorem 3.1 ile tanımlanan ve invölüsyon ile anti-involüsyon aksiyomlarının her ikisini de sağlayan $\Phi_r(\mu) = r\bar{\mu}\bar{r}$ dönüşümü, μ nün $\mu_0 \in \mathbb{R}$ skaler bileşenini sabit bırakır ve vektörel bileşeni $\mu_1\mathbf{i} + \mu_2\mathbf{j} + \mu_3\mathbf{k} := (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^3$ olan vektörü orjine göre yansıtır.

İspat. $\mu = \mu_0 + \mu_1\mathbf{i} + \mu_2\mathbf{j} + \mu_3\mathbf{k} = S(\mu) + V(\mu) \in H_q$ ve $r \in (H_q)_b$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\Phi_r(\mu) &= r\bar{\mu}\bar{r} \\ &= r\overline{(S(\mu) + V(\mu))}\bar{r} \\ &= r(S(\mu) - V(\mu))\bar{r} \\ &= rS(\mu)\bar{r} - rV(\mu)\bar{r} \\ &= r\bar{r}S(\mu) - r\bar{r}V(\mu)\end{aligned}\tag{3.35}$$

yazılabilir ve r birim olduğundan $r\bar{r} = 1$ dir. Dolayısıyla,

$$\Phi_r(\mu) = S(\mu) - V(\mu)\tag{3.36}$$

olur. Ayrıca,

$$f(\mu) = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^4; \mu = \mu_0 + \mu_1\mathbf{i} + \mu_2\mathbf{j} + \mu_3\mathbf{k} \in H_q\tag{3.37}$$

şeklinde tanımlanan

$$f: H_q \rightarrow \mathbb{R}^4 \quad (3.38)$$

dönüşümü bire-bir ve örten bir fonksiyondur. Bu da H_q nun $\mathbb{R}^4$ ile izomorf olduğunu gösterir, yani $H_q \cong \mathbb{R}^4$ (bir diğer ifadeyle $\mu_0 + \mu_1 \mathbf{i} + \mu_2 \mathbf{j} + \mu_3 \mathbf{k} \cong (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$). Başka bir izomorfizma $\tilde{H}_q \cong \mathbb{R}^3$ (bir diğer ifadeyle $\mu_1 \mathbf{i} + \mu_2 \mathbf{j} + \mu_3 \mathbf{k} \cong (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$). Sonuç olarak Φ_r dönüşümü $S(\mu) := \mu_0 \in \mathbb{R}$ skalerini sabit tutar ve $V(\mu) := (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^3$ vektörünü orjine göre yansıtır.

Önerme 3.4. $\mu = \mu_0 + \mu_1 \mathbf{i} + \mu_2 \mathbf{j} + \mu_3 \mathbf{k}$ herhangi bir quasi-quaterniyon ve r birim quasi-kuaterniyon olsun. Bu durumda, Teorem 3.2 ile tanımlanan ve involüsyon ile anti-involüsyon aksiyomlarının her ikisini de sağlayan $\Psi_r(\mu) = r\mu\bar{r}$ dönüşümü, μ nün $\mu_0 \in \mathbb{R}$ skaler ve $\mu_1 \mathbf{i} + \mu_2 \mathbf{j} + \mu_3 \mathbf{k} := (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^3$ vektörel kısmını sabit (invariant) bırakır. Dolayısıyla, dönüşüm sonucunda μ değişmeden sabit kalmış olur.

İspat. $\mu = \mu_0 + \mu_1 \mathbf{i} + \mu_2 \mathbf{j} + \mu_3 \mathbf{k} = S(\mu) + V(\mu) \in H_q$ ve $r \in (H_q)_b$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \Psi_r(\mu) &= r\mu\bar{r} \\ &= r(S(\mu) + V(\mu))\bar{r} \\ &= rS(\mu)\bar{r} + rV(\mu)\bar{r} \\ &= r\bar{r}S(\mu) + r\bar{r}V(\mu) \end{aligned} \quad (3.39)$$

yazılabilir ve r birim olduğundan $r\bar{r} = 1$ dir. Dolayısıyla,

$$\Psi_r(\mu) = S(\mu) + V(\mu) \quad (3.40)$$

olur. $H_q \cong \mathbb{R}^4$ ve $\tilde{H}_q \cong \mathbb{R}^3$ izomorfizmalarına göre, Ψ_r dönüşümü, μ nün skaler bileşeni $S(\mu) := \mu_0 \in \mathbb{R}$ yi ve vektörel bileşeni $V(\mu) := (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^3$ ü sabit bırakır.

3.4. Quasi-Kuaterniyonların İnvölüsyonlarının ve Anti-İnvölüsyonlarının Matris Gösterimleri

Herhangi iki $\mu = \mu_0 + \mu_1 \mathbf{i} + \mu_2 \mathbf{j} + \mu_3 \mathbf{k}$ ve $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 \mathbf{i} + \varphi_2 \mathbf{j} + \varphi_3 \mathbf{k}$ quasi-kuaterniyonlarını ele alalım. Bu durumda

$$\mu\varphi = (\mu_0\varphi_0) + (\mu_0\varphi_1 + \mu_1\varphi_0)\mathbf{i} + (\mu_0\varphi_2 + \mu_2\varphi_0)\mathbf{j} + (\mu_0\varphi_3 + \mu_3\varphi_0)\mathbf{k} \quad (3.41)$$

ve

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & \mu_0 & 0 & 0 \\ \mu_2 & 0 & \mu_0 & 0 \\ \mu_3 & 0 & 0 & \mu_0 \end{pmatrix}_{4 \times 4} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}_{4 \times 1} = \begin{pmatrix} \mu_0\varphi_0 \\ \mu_0\varphi_1 + \mu_1\varphi_0 \\ \mu_0\varphi_2 + \mu_2\varphi_0 \\ \mu_0\varphi_3 + \mu_3\varphi_0 \end{pmatrix}_{4 \times 1} \quad (3.42)$$

eşitliklerinden, herhangi bir $\eta = \eta_0 + \eta_1\mathbf{i} + \eta_2\mathbf{j} + \eta_3\mathbf{k}$ quasi-kuaterniyonunun matris karşılığının

$$\begin{pmatrix} \eta_0 & 0 & 0 & 0 \\ \eta_1 & \eta_0 & 0 & 0 \\ \eta_2 & 0 & \eta_0 & 0 \\ \eta_3 & 0 & 0 & \eta_0 \end{pmatrix}_{4 \times 4} \quad (3.43)$$

şeklinde verilebileceği görülmektedir. $\mu = \mu_0 + \mu_1\mathbf{i} + \mu_2\mathbf{j} + \mu_3\mathbf{k}$ herhangi bir quasi-kuaterniyon ve $r = \pm 1 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j} + r_3\mathbf{k}$ birim quasi-kuaterniyon olsun. Bu durumda, $\Phi_r(\mu) = r\bar{\mu}r$ involüsyon ve anti involüsyon dönüşümü için;

$$\begin{aligned} \Phi_r(1) &= r\bar{1}r \\ &= (\pm 1 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j} + r_3\mathbf{k}). 1. (\pm 1 - r_1\mathbf{i} - r_2\mathbf{j} - r_3\mathbf{k}) \\ &= 1 \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \Phi_r(\mathbf{i}) &= r\bar{\mathbf{i}}r \\ &= (\pm 1 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j} + r_3\mathbf{k}). (-\mathbf{i}). (\pm 1 - r_1\mathbf{i} - r_2\mathbf{j} - r_3\mathbf{k}) \\ &= -\mathbf{i} \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \Phi_r(\mathbf{j}) &= r\bar{\mathbf{j}}r \\ &= (\pm 1 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j} + r_3\mathbf{k}). (-\mathbf{j}). (\pm 1 - r_1\mathbf{i} - r_2\mathbf{j} - r_3\mathbf{k}) \\ &= -\mathbf{j} \end{aligned} \quad (3.46)$$

ve

$$\begin{aligned} \Phi_r(\mathbf{k}) &= r\bar{\mathbf{k}}r \\ &= (\pm 1 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j} + r_3\mathbf{k}). (-\mathbf{k}). (\pm 1 - r_1\mathbf{i} - r_2\mathbf{j} - r_3\mathbf{k}) \\ &= -\mathbf{k} \end{aligned} \quad (3.47)$$

eşitlikleri elde edilir. Dolayısıyla, Φ_r involüsyon ve anti-involüsyon dönüşümüne karşılık gelen matris

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{4 \times 4} \quad (3.48)$$

şeklinde verilebilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \Phi_r(\mu) &= r\bar{\mu}r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{4 \times 4} \cdot \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix}_{4 \times 1} \\ &= \begin{pmatrix} \mu_0 \\ -\mu_1 \\ -\mu_2 \\ -\mu_3 \end{pmatrix}_{4 \times 1} \\ &:= \mu_0 - \mu_1 \mathbf{i} - \mu_2 \mathbf{j} - \mu_3 \mathbf{k} \\ &= S(\mu) - V(\mu) \end{aligned} \quad (3.49)$$

eşitliğinden görüleceği üzere μ nün skaler kısmı $S(\mu) = \mu_0 \in \mathbb{R}$ invaryant kalırken, vektörel kısmı $V(\mu) = \mu_1 \mathbf{i} + \mu_2 \mathbf{j} + \mu_3 \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ orjine göre yansır.

Örnek 3.1. $\mu = 2 + \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ quasi-kuaterniyonunu ve $r = 1 + \sqrt{2}\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ birim quasi-kuaterniyonunu ele alalım. μ ve r quasi-kuaterniyonlara karşılık gelen matrisler

$$\mu := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 4}, \quad r := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{4 \times 4} \quad (3.50)$$

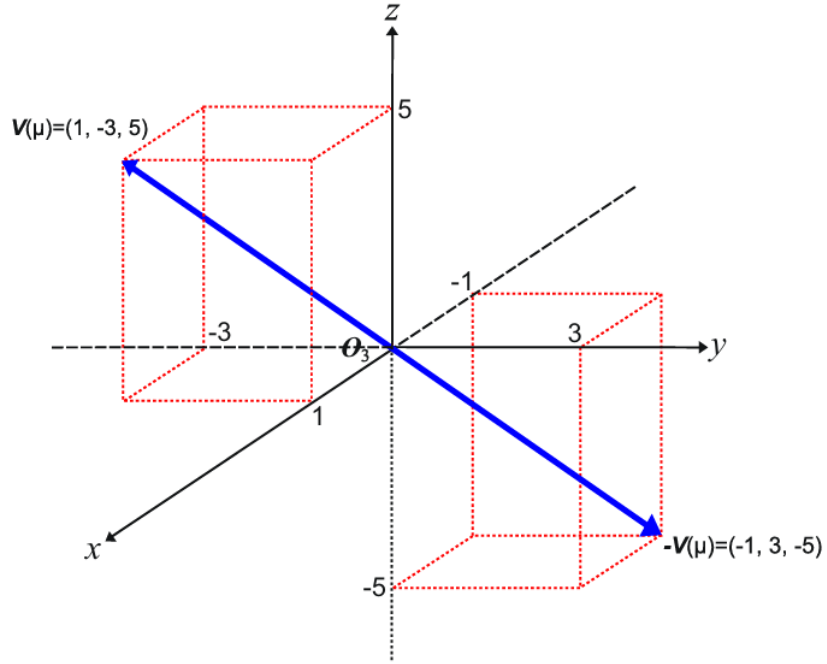
dir. Buradan,

$$\begin{aligned} \Phi_r(\mu) &= r\bar{\mu}r = (1 + \sqrt{2}\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})(2 - \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k})(1 - \sqrt{2}\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) \\ &= (2 - \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k} + 2\sqrt{2}\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k})(1 - \sqrt{2}\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) \\ &= (2 - \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}) \\ &= S(\mu) - V(\mu) \end{aligned} \quad (3.51)$$

elde edilir. Bu eşitliği

$$\begin{aligned}
\Phi_r(\mu) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{4 \times 4} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}_{4 \times 1} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}_{4 \times 1} \\
&:= (2, -1, 3, -5) \\
&:= 2 - \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k} \\
&= S(\mu) - \mathbf{V}(\mu)
\end{aligned} \tag{3.52}$$

matris gösterimini kullanarak da elde edebiliriz. Görüleceği üzere involüsyon ve anti-involüsyon dönüşümü $\Phi_r(\mu)$, μ nün skaler kısmı $S(\mu) = 2 \in \mathbb{R}$ yi sabit bırakırken vektörel kısmı $\mathbf{V}(\mu) = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ ü orjine göre yansıtır. Şekil 3.2’de μ quasi-kuaterniyonuna Φ_r dönüşümü uygulandıktan sonra elde edilen vektörel kısım $-\mathbf{V}(\mu)$ gösterilmiştir.



Şekil 3.2. Örnek 3.1’de verilen $\mathbf{V}(\mu)$ ve $-\mathbf{V}(\mu)$ pür quasi-kuaterniyonları.

$\mu = \mu_0 + \mu_1\mathbf{i} + \mu_2\mathbf{j} + \mu_3\mathbf{k}$ herhangi bir quasi-kuaterniyon ve $r = \pm 1 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j} + r_3\mathbf{k}$ birim quasi-kuaterniyon olsun. Bu durumda; $\Psi_r(\mu) = r\mu\bar{r}$ involüsyon ve anti involüsyon dönüşümü için;

$$\begin{aligned}
\Psi_r(1) &= r1\bar{r} \\
&= (\pm 1 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j} + r_3\mathbf{k}) \cdot 1 \cdot (\pm 1 - r_1\mathbf{i} - r_2\mathbf{j} - r_3\mathbf{k}) \\
&= 1
\end{aligned} \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_r(\mathbf{i}) &= r\mathbf{i}\bar{r} \\
&= (\pm 1 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j} + r_3\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i}) \cdot (\pm 1 - r_1\mathbf{i} - r_2\mathbf{j} - r_3\mathbf{k}) \\
&= \mathbf{i}
\end{aligned} \tag{3.54}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_r(\mathbf{j}) &= r\mathbf{j}\bar{r} \\
&= (\pm 1 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j} + r_3\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{j}) \cdot (\pm 1 - r_1\mathbf{i} - r_2\mathbf{j} - r_3\mathbf{k}) \\
&= \mathbf{j}
\end{aligned} \tag{3.55}$$

ve

$$\begin{aligned}
\Psi_r(\mathbf{k}) &= r\mathbf{k}\bar{r} \\
&= (\pm 1 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j} + r_3\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{k}) \cdot (\pm 1 - r_1\mathbf{i} - r_2\mathbf{j} - r_3\mathbf{k}) \\
&= \mathbf{k}
\end{aligned} \tag{3.56}$$

eşitlikleri elde edilir. Dolayısıyla, Ψ_r involüsyon ve anti-involüsyon dönüşümüne karşılık gelen matris

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{4 \times 4} \tag{3.57}$$

şeklinde verilebilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\Psi_r(\mu) &= r\mu\bar{r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{4 \times 4} \cdot \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix}_{4 \times 1} \\
&= \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix}_{4 \times 1} \\
&:= \mu_0 + \mu_1\mathbf{i} + \mu_2\mathbf{j} + \mu_3\mathbf{k} \\
&= S(\mu) + \mathbf{V}(\mu)
\end{aligned} \tag{3.58}$$

eşitliğinden görüleceği üzere μ nün skaler kısmı $S(\mu) = \mu_0 \in \mathbb{R}$ ve vektörel kısmı $V(\mu) = \mu_1 \mathbf{i} + \mu_2 \mathbf{j} + \mu_3 \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ sabit kalır.

Örnek 3.2. $\mu = 4 - 7\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ quasi-kuaterniyonunu ve $r = -1 + \mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ birim quasi-kuaterniyonunu ele alalım. μ ve r quasi-kuaterniyonlara karşılık gelen matrisler

$$\mu = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}_{4 \times 4}, r = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{4 \times 4} \quad (3.59)$$

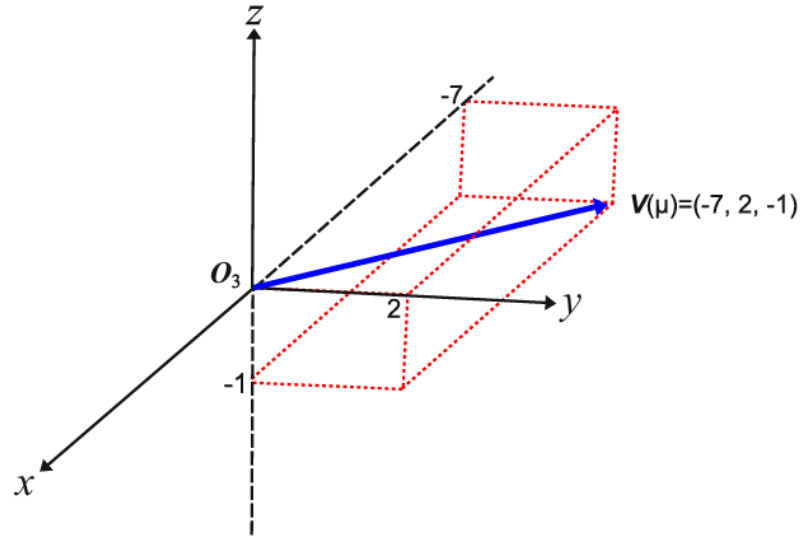
dir. Buradan,

$$\begin{aligned} \Psi_r(\mu) &= r\mu\bar{r} = (-1 + \mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k})(4 - 7\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})(-1 - \mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k}) \\ &= 4 - 7\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k} \\ &= S(\mu) + V(\mu) \end{aligned} \quad (3.60)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliği

$$\begin{aligned} \Psi_r(\mu) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{4 \times 4} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{4 \times 1} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{4 \times 1} \\ &:= (4, -7, 2, -1) \\ &:= 4 - 7\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k} \\ &= S(\mu) + V(\mu) \end{aligned} \quad (3.61)$$

matris gösterimini kullanarak da elde edebiliriz. Görüleceği üzere involüsyon ve anti-involüsyon dönüşümü $\Psi_r(\mu)$ μ nün hem skaler kısmı $S(\mu) = 4 \in \mathbb{R}$ hem de vektörel kısmı $V(\mu) = -7\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ ü sabit bırakır. Şekil 3.3'te μ quasi-kuaterniyonuna Ψ_r dönüşümü uygulandıktan sonra elde edilen vektörel kısım $V(\mu)$ gösterilmiştir.



Şekil 3.3. Örnek 3.2’de verilen $V(\mu)$ pür quasi-kuaterniyonu.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde ele aldığımız quasi-kuaterniyonlar kümesi üzerinde involüsyon ve/veya anti-involüsyon aksiyomlarını sağlayacak şekilde dönüşüm/dönüşümler tanımlanmak istenmiştir. Daha önceki çalışmalarda bu düşünce reel-kuaterniyonlar, semi-kuaterniyonlar, dual-kuaterniyonlar kümeleri ve bu kümelerin split formları gibi kümelerde ele alınmıştır. Bu kümelerde tanımlı çarpma işleminin değişme özelliği olmamasından dolayı tanımlanan dönüşümler involüsyon ya da anti-involüsyon aksiyomlarından sadece birini sağlamaktadır. Bu çalışmada ise quasi-kuaterniyonlar kümesi üzerinde tanımlanan çarpma işleminin değişme özelliğinden dolayı, tanımlanan iki dönüşüm hem involüsyon hem de anti-involüsyon aksiyomlarını birlikte sağlamaktadır. Ayrıca, bu dönüşümlerin 3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^3$ teki geometrik yorumları ifade edilmiştir. Bu dönüşümlerden ilkinin geometrik yorumu, bir quasi-kuaterniyonun skaler kısmı sabit kalırken, vektörel kısmının $\mathbb{R}^3$ te orijine göre yansması şeklindedir. İkinci dönüşümde ise hem skaler hem de vektörel kısımlar sabit kalmakta, yani kuaterniyon bütünüyle değişmeden korunmaktadır.

Bu tezde ele aldığımız quasi-kuaterniyonlar kümesi yerine split quasi-kuaterniyonlar ya da dual quasi-kuaterniyonlar kümeleri ele alınarak involüsyon ve/veya anti-involüsyon aksiyomlarını sağlayacak şekilde dönüşümler tanımlanmaya çalışılabilir. Çünkü; bu kümeler üzerinde tanımlanan çarpma işlemi de değişme özelliğine sahip olacağından önceki çalışmalardan farklı sonuçlar elde edilecektir.

KAYNAKLAR

- Ablamowicz, R., 2009. Computations with Clifford and Grassmann Algebras, *Advances in Applied Clifford Algebras*, 19, 499–545.
- Ablamowicz, R. ve Fauser, B., 2011. On the transposition anti-involution in real Clifford algebras I: The transposition map, *Linear Multilinear Algebra*, 59, 12, 1331–1358.
- Ablamowicz, R. ve Fauser, B., 2011a. On the transposition anti-involution in real Clifford algebras II: Stabilizer groups of primitive idempotents, *Linear Multilinear Algebra*, 59, 12, 1359–1381.
- Ablamowicz, R. ve Fauser, B., 2012. On the transposition anti-involution in real Clifford algebras III: The automorphism group of the transposition scalar product on spinor spaces, *Linear Multilinear Algebra*, 60, 6, 621–644.
- Bekar, M. ve Yaylı, Y., 2016. Involution Matrices of Real Quaternions, *Caspian Journal of Mathematical Sciences*, 5, 1, 7–16.
- Bekar, M. ve Yaylı, Y., 2017. Involutions in Quasi-Quaternions, *Journal of Advanced Physics*, 6, 1–5.
- Bottema, O. ve Roth, B., 1979. *Theoretical Kinematics*, North-Holland Pub. Co., 558, New York.
- Ell, T.A. ve Sangwine, S.J., 2007. Quaternion Involutions and Anti-Involutions, *Computers and Mathematics with Applications*, 53, 1, 137–143.
- Hacısalıhoğlu, H.H. 1983., *Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi*, Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları Mat. No. 2., 334, Ankara.
- Hahn, A.J., 1994. *Quadratic Algebras, Clifford Algebras, and Arithmetic Witt Groups*, Universitext, Springer-Verlag, New York.
- Hamilton, W.R., 1844. On a New Species of Imaginary Quantities Connected with a Theory of Quaternions, *Proceedings of the Royal Irish Academy*, 2, 424–434.
- Hamilton, W.R., 1967. *On Quaternions; or on a new System of Imaginaries in Algebra*, The Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton, 3, (Algebra), Cambridge University Press, 672, Cambridge.
- Inoguchi, J., 1998. Timelike Surfaces of Constant Mean Curvature in Minkowski 3-Space, *Tokyo Journal of Mathematics*, 21, 140–152.
- Jafari, M., 2014. On the Properties of Quasi-Quaternion Algebra, *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 63, 1–10.

- Kelland, P., Gilston, K.C. ve Guthrie, T.P., 1904. Introduction to Quaternions, Macmillan and Co., 208, London.
- Kuipers, J.B., 1999. Quaternions and Rotation Sequences, Princeton University Press, New Jersey.
- Kula, L., 2003. Bölünmüş Kuaterniyonlar ve Geometrik Uygulamaları, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 116, Ankara.
- Müller, H.R., 1963. Kinematik Dersleri, Ankara Üniversitesi Basımevi, Ankara.
- Veldkamp, G.R., 1976. On the Use of Dual Numbers, Vectors and Matrices in Instantaneous, Spatial Kinematics, Mechanism and Machine Theory, 11, 2, 141–156.
- Ward, J.P., 1996. Quaternions and Cayley Algebras and Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Ward, J.P., 1997. Quaternions and Cayley Numbers, Kluwer Academic Publishers, 242, London.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Mehmet BÖKE

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Kırıkkale Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 2002 - 2009

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 2022 - 2025

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Kongrelerde Sunulan Bildiriler:

1. Mehmet Böke, Murat Bekar, Tunçar Şahan (2024). Quasi-Kuaterniyonlar ve İnvolüsyonları, 15. Ankara Matematik Günleri, Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi 23-24 Mayıs 2024, Ankara, Türkiye.