

T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
GEOMETRİ BİLİM DALI

R_2^4 MINKOWSKI UZAYINDA TIMELIKE HELİS VE SLANT HELİS
EĞRİLERİNİN KARAKTERİZASYONLARI

Zeliha ERPEHLİVAN

Danışman
Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT

II.Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Tuba AĞIRMAN AYDIN



MANİSA-2022

TEZ ONAYI

Zeliha ERPEHLİVAN tarafından hazırlanan " R_2^4 MINKOWSKI UZAYINDA TIMELIKE HELİS VE SLANT HELİS EĞRİLERİNİN KARAKTERİZASYONLARI" adlı tez çalışması 03/06/2022 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman : **Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT**
Manisa Celal Bayar Üniversitesi

Jüri Üyesi : **Dr. Öğr. Üyesi Burak ŞAHİNER**
Manisa Celal Bayar Üniversitesi

Jüri Üyesi : **Doç. Dr. Erbil ÇETİN**
Ege Üniversitesi

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Zeliha ERPEHLİVAN



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER	I
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	II
TEŞEKKÜR.....	III
ÖZET.....	IV
ABSTRACT.....	V
1. GİRİŞ	1
1.1. Tezin Amacı	2
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Frenet Çatısına Göre Temel Kavramlar	3
2.2. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Temel Kavramlar.....	7
2.3. $\mathbb{R}_2^4$ Minkowski Uzayında Temel Kavramlar	11
3. $\mathbb{R}_2^4$ MINKOWSKI UZAYINDA TIMELIKE HELİS VE SLANT HELİS EĞRİLERİNİN DİFERANSİYEL DENKLEM KARAKTERİZASYONLARI	13
4. $\mathbb{R}_2^4$ MINKOWSKI UZAYINDA TIMELIKE HELİS VE B_2 - SLANT HELİS EĞRİLERİNİN İNTEGRAL KARAKTERİZASYONLARI	33
5. SONUÇ	50
6. KAYNAKLAR	51
7. ÖZGEÇMİŞ	54

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar cümlesi
$\mathbb{R}^n$	n -boyutlu reel vektör uzayı
$\mathbb{R}_2^4$	4-boyutlu 2-indisli Minkowski uzayı
E^n	n -boyutlu Öklid uzayı
E^3	3-boyutlu Öklid uzayı
$\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$	3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısı
$\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}_1, \vec{B}_2\}$	4-boyutlu Minkowski uzayında Frenet çatısı
$\langle u, u \rangle_L$	Lorentz İç Çarpımı
κ	3-boyutlu Öklid uzayında eğrilik fonksiyonu
τ	3-boyutlu Öklid uzayında burulma fonksiyonu
$k_1(s)$	1. Eğrilik Fonksiyonu
$k_2(s)$	2. Eğrilik Fonksiyonu
$k_3(s)$	3. Eğrilik Fonksiyonu

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans danışmanlığımı üstlenip bana değerli bilgilerini aktaran, bilgi ve deneyimleri ile çalışmamın her aşamasında bana destek olan ve yol gösteren danışman hocam Sayın Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT'e saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmamda yardımlarını esirgemeyen II.danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Tuba AĞIRMAN AYDIN'a saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Öğrenimim süresince değerli bilgilerini benimle paylaşan saygıdeğer hocalarım Sayın Prof. Dr. Mustafa KAZAZ'a, Sayın Prof. Dr. Ali MUTLU'ya, Sayın Dr. Öğr. Üyesi Burak ŞAHİNER'e saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Güven, anlayış ve desteğini daima hissettiğim tez yazma sürecinde yanımda olan sevgili eşime ve sabırları için çocuklarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Zeliha ERPEHLİVAN
Manisa, 2022

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

$\mathbb{R}_2^4$ MINKOWSKI UZAYINDA TIMELIKE HELİS VE SLANT HELİS EĞRİLERİNİN KARAKTERİZASYONLARI

Zeliha ERPEHLİVAN

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT
II.Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Tuba AĞIRMAN AYDIN

Bu çalışmada, $\mathbb{R}_2^4$ Minkowski uzayında timelike helis ve slant helis eğrileri için $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}_1, \vec{B}_2\}$ Frenet çatısı kullanılarak, bu eğrilere ait bazı tanımlar, teoremler, integral karakterizasyonlar ve eğrinin eğriliklerine ait diferansiyel denklem karakterizasyonları verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Helis (Eğilim Çizgileri), Slant Helis, B_1 -Slant Helis, B_2 -Slant Helis, $\mathbb{R}_2^4$ Minkowski Uzayı.

2022, 54 sayfa

ABSTRACT

M.Sc.Thesis

CHARACTERIZATIONS FOR TIME-LIKE HELICES (INCLINED CURVES) AND SLANT HELICES IN $\mathbb{R}_2^4$ MINKOWSKI SPACE

Zeliha ERPEHLİVAN

Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT
2. Supervisor: Assist. Prof. Dr. Tuba AĞIRMAN AYDIN

In this study, by using the Frenet frame $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}_1, \vec{B}_2\}$ for timelike helices and slant helices in $\mathbb{R}_2^4$ Minkowski space, it was established some definitions, theorems, integral characterizations and differential equation characterizations in terms of the curvatures of the curve.

Keywords: Helix (inclined curve), Slant Helix, B_1 -Slant Helix, B_2 -Slant Helix, Minkowski Space in $\mathbb{R}_2^4$.

2022, 54 pages

1. GİRİŞ

Diferansiyel geometrinin temel konularından olan eğriler ve bazı özel eğriler, geometrinin en önemli konularından olup, geniş uygulama ve çalışma alanlarıyla matematikçiler tarafından çokça ilgi duyulan ve çalışılan konulardır. Bu özel eğrilerden en önemlisi ise helis eğrileridir [1]. Helis eğrilerine günlük hayattan ağaç gövdesine sarılan sarmaşık ya da minarenin merdivenleri örnek verilebilir. Helis eğrileri, 1802 yılında M.A. Lancret tarafından, teğetleri sabit bir doğrultu ile sabit açı yapan eğriler olarak tanımlanmıştır [2]. Verilen bu tanıma ilişkin tamamlayıcı ispat 1845 yılında Saint Venant tarafından yapılan çalışmada “bir eğrinin genel helis olması için gerek ve yeter şart eğrinin birinci eğriliğinin, ikinci eğriliğe oranının eğri boyunca sabit olması” şeklinde verilmiştir [3]. Daha sonra helisler üzerine farklı uzaylarda birçok çalışma yapılmıştır [4, 5, 6]. Izumiya ve Takeuchi, helislere benzer şekilde, asal normal vektörü sabit bir doğrultuyla sabit açı yapan eğri olarak slant helisleri tanımlamışlardır [6]. Sonrasında slant helisler de helisler gibi gerek Öklid gerekse Minkowski uzaylarında oldukça yaygın olarak çalışılmıştır [7, 8]. Daha sonra 4-boyutlu Öklid uzayında B_2 - slant helisin tanımı verilmiştir [9].

$\mathbb{R}^4$, 4–boyutlu Öklid uzayında A. Magden bir $\alpha(s)$ eğrisinin bir eğilim çizgisi olabilmesi için gerek ve yeter şartın

$$\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right)^2 + \frac{1}{k_3^2(s)} \left\{ \frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) \right\}^2 = \text{sabit}$$

eşitliğinin sağlanması olduğunu göstermiştir. Burada k_1, k_2 ve k_3 değerleri $\alpha(s)$ eğrisinin sırasıyla birinci, ikinci, üçüncü eğrilikleri olup hiçbir yerde sıfır değildir [10]. $\mathbb{R}_1^4$ Minkowski 4-uzayında H. Kocayiğit ve M. Önder tarafından timelike eğilim çizgileri için benzer tanımlar verilmiştir [11]. $\mathbb{R}_1^4$ Minkowski 4–uzayında spacelike ve timelike eğrileri çalışmıştır [12]. A. T. Ali ve R. Lopez Minkowski 4-uzayında timelike eğilim çizgilerini inceleyerek bu eğriler için bazı tanımlar sunmuşlardır [13]. M. Önder, H. Kocayiğit ve M. Kazaz E_1^4 Minkowski 4–uzayında spacelike eğilim çizgileri için diferansiyel denklemler ve integral karakterizasyonlar tanımlamışlardır [14]. Yine M. Önder, H. Kocayiğit ve M. Kazaz, 4-boyutlu Minkowski uzayında B_2 slant helisleri incelemiştir [15].

1.1. Tezin Amacı

Bu tez çalışmasının amacı; T.A. Aydın ve H. Kocayigit'in yarı Öklidyen uzayda timelike helisler üzerine hazırladığı makale temel alınarak, $\mathbb{R}_2^4$ de bir timelike eğrinin helis eğrisi (eğilim çizgisi) olabilmesi için gerek ve yeter şartların verilmesi, bu eğrilerin diferansiyel denklem karakterizasyonlarının detaylı bir şekilde incelenmesi, ayrıca sunulan teoremlerin ispatlarının yapılmasıdır [16]. Bu amaç doğrultusunda $\mathbb{R}_2^4$ de timelike eğrinin diferansiyel denklem karakterizasyonu ispatı ile verilmiştir. Ayrıca, aynı uzayda timelike helis ve B_2 -slant helislere ait integral karakterizasyonlar ispatları ile verilmiştir [17]. M. Aykut Akgün ve A.İ. Sivridağ'ın hazırladığı, "Some Characterizations for Spacelike Inclined Curves" isimli çalışma incelenerek, integral karakterizasyonlar için fikir alınmıştır [18].

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, Öklid 3- uzayı, Öklid iç çarpımı, birim hızlı eğri, eğrilik fonksiyonu, Frenet vektörleri ve çatısı, yarı-Öklidyen uzayda temel kavramlar, 3- boyutlu Minkowski uzayında temel kavramlar ile ilgili temel tanım ve teoremler, 4- boyutlu 2-indisli Minkowski uzayında bazı temel tanımlar ve özellikler verilecektir.

2.1. E^3 Öklid 3- Uzayında Frenet Çatısına Göre Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1: Boş olmayan bir cümle A ve bir F cismi üzerinde bir vektör uzayı V olsun. Aşağıdaki üç önermeye uyan bir $f : A \times A \rightarrow V$ fonksiyonu varsa A ya V ile eşlenen bir afin uzay denir;

- i. $\forall P, Q \in A$ nokta çifti için $f(P, Q) = \alpha$ olacak şekilde bir tek $\alpha \in V$ vektörü vardır,
- ii. A da belli bir nokta seçildiğinde A daki geri kalan her noktaya V deki bir vektör karşılık gelir,
- iii. $\forall P, Q, R \in A$ için $f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$ [19].

$F = \mathbb{R}$ reel sayılar cismi olarak alınması halinde afin uzayı reeldir.

Tanım 2.1.2 (Öklid Uzayı): $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi ve $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$

vektör uzayında iki vektör $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ olmak üzere,

$$\langle, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad (2.1.1)$$

fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ uzayında bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma **Öklid iç çarpımı** denir.

Üzerinde Öklid iç çarpımı tanımlı $\mathbb{R}^n$ afin uzayına **Öklid uzayı** denir ve E^n ile gösterilir [20, 21].

Tanım 2.1.3 (Vektörel Çarpım): $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ ortonormal baz vektörleri olsun. Bu durumda

$$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle = \langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle = \langle \vec{e}_3, \vec{e}_3 \rangle = 1,$$

ve

$$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = \langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle = 0,$$

ya da kısaca,

$$\vec{e}_i \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$

eşitlikleri sağlanır.

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3, \vec{b} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3 \in \mathbb{R}^3$$

olmak üzere $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin **vektörel çarpımı**;

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{e}_3 \quad (2.1.2)$$

eşitliği ile tanımlanır. $\vec{a} \times \vec{b}$ vektörel çarpımı aşağıdaki gibi determinant yardımı ile gösterilebilir:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}.$$

Eğer $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$ ise $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri lineer bağımsız, aksi durumda lineer bağımlıdır [19].

Tanım 2.1.4: $\mathbb{R}^3$ vektör uzayı üzerinde, $x \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \|\cdot\|: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon $\mathbb{R}^3$ de bir normdur [22].

Tanım 2.1.5: 3-boyutlu bir reel iç çarpım uzayı $\mathbb{R}^3$ ile birleşen Öklid uzayı E^3 olsun.

$$\begin{aligned} d: E^3 \times E^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ d(x, y) &= \|\overline{xy}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}, \begin{cases} x = (x_1, x_2, x_3) \\ y = (y_1, y_2, y_3) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

olarak tanımlanan fonksiyona E^3 Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve her $x, y \in E^3$ için $d(x, y)$ değerine de x ile y noktaları arasındaki uzaklık denir [19].

Tanım 2.1.6: $I, \mathbb{R}$ reel sayılar cisminin bir açık aralığı olmak üzere, diferansiyellenebilir bir

$$\begin{aligned} \gamma: I \subset \mathbb{R} &\rightarrow E^3, \\ s &\rightarrow \gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s)) \end{aligned}$$

dönüşümüne E^3 , 3-boyutlu Öklid uzayında diferansiyellenebilir bir parametrik eğri denir. Bu durumda $\gamma(s) \subset E^3$ alt kümesine γ eğrisinin grafiği veya izi denir. $I \subset \mathbb{R}$ açık aralığına, γ eğrisinin parametre aralığı ve $s \in I$ değişkenine de $\gamma(s)$ eğrisinin

parametresi denir [19]. Burada $\gamma_i, 1 \leq i \leq 3, \gamma_i : I \rightarrow \mathbb{R}, t \rightarrow \gamma_i(t), 1 \leq i \leq 3$, şeklinde fonksiyonlar olup, γ nın koordinat fonksiyonları (bileşenleri) olarak isimlendirilirler.

Tanım 2.1.7: $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3, \gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s))$ bir eğri olsun.

$\gamma_i, i=1,2,3$, koordinat fonksiyonlarının t noktasındaki birinci türevleri $\gamma'_i(t)$ ler olmak üzere,

$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), \gamma'_3(t)) \in \mathbb{R}^3$$

vektörüne γ eğrisinin t noktasındaki teğet vektörü veya hız vektörü denir.

Ayrıca,

$$\|\gamma'\| : I \rightarrow \mathbb{R}, s \rightarrow \|\gamma'\|(s) = \|\gamma'(s)\| = \sqrt{(\gamma'_1(s))^2 + (\gamma'_2(s))^2 + (\gamma'_3(s))^2} \quad (2.1.5)$$

şeklinde tanımlı $\|\gamma'\|$ fonksiyonuna γ eğrisinin hız fonksiyonu ve $\|\gamma'(s)\|$ reel sayısına da γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki skaler hızı denir. Eğer $\|\gamma'(s)\| = 1$ ise, γ eğrisine birim hızlı eğri ve $s \in I$ parametresine de eğrinin yay uzunluğu parametresi denir [19].

Tanım 2.1.8: 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisi için

$$\vec{T}(s) = \gamma'(s) \quad (2.1.6)$$

eşitliğiyle belirli $\vec{T}(s)$ vektörüne γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki **birim teğet vektörü** denir [20].

Tanım 2.1.9: 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisi için,

$$\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}, s \rightarrow \kappa(s) = \|\vec{T}'(s)\|, \quad (2.1.7)$$

funksiyonuna, γ eğrisinin **eğrilik fonksiyonu** denir. $\kappa(s)$ sayısına eğrinin $\gamma(s)$ noktasındaki eğriliği denir [20].

Eğrilik, teğet doğrudan sapma miktarını ölçer. Bu anlamda eğrilik değeri küçüldükçe eğri doğruya yaklaşır, büyüdükçe teğet doğrudan uzaklaşır.

$\|\vec{T}(s)\| = 1$ olduğundan $\langle \vec{T}(s), \vec{T}(s) \rangle = 1$ dir. Bu eşitliğin her iki tarafının türevi alınır ve düzenlenirse $\langle \vec{T}'(s), \vec{T}(s) \rangle = 0$ elde edilir. Yani $\vec{T}'(s)$ vektörü $\vec{T}(s)$ vektörüne diktir. $\vec{T}'(s)$ vektörü, normuna bölünürse, $\vec{T}(s)$ vektörüne dik yeni bir birim vektör elde edilir.

Tanım 2.1.10: 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisi için,

$$\vec{N}(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \vec{T}'(s), \quad (2.1.8)$$

eşitliği ile belirli $\vec{N}(s)$ vektörüne, γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki **asli normal vektörü** denir [20].

Tanım 2.1.11: 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisi için,

$$\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \times \vec{N}(s), \quad (2.1.9)$$

eşitliği ile belirli $\vec{B}(s)$ vektörüne, eğrinin $\gamma(s)$ noktasındaki **binormal vektörü** denir [20].

Tanım 2.1.12 (Öklid 3-uzayında Frenet çatısı): $\vec{T}(s), \vec{B}(s), \vec{N}(s)$ vektörlerine, $\gamma: I \rightarrow E^3$ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki **Frenet vektörleri** denir. $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)\}$ kümesine de γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki **Frenet çatısı** denir [20].

Tanım 2.1.13: $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ bir eğri ve $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ Frenet vektör alan sistemi verilsin. $s \in I$ için $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki **oskülatör düzlemi** veya **dokunum düzlemi**, $\{\vec{N}(s), \vec{B}(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki **normal düzlemi** ve $\{\vec{T}(s), \vec{B}(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme ise γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki **rektifiyan düzlemi** veya **doğrultman düzlemi** denir [20].

Tanım 2.1.14: Bir $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet vektörleri $\vec{T}(s), \vec{B}(s), \vec{N}(s)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \tau &= I \rightarrow \mathbb{R}, \\ s &\rightarrow \tau(s) = -\langle \vec{B}'(s), \vec{N}(s) \rangle, \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

fonksiyonuna γ eğrisinin burulma fonksiyonu denir. $\tau(s)$ sayısına, eğrinin $\gamma(s)$ noktasındaki **burulması** denir [20]. Burulma, eğrinin oskülatör düzlemden sapma miktarını ölçer.

Tanım 2.1.15: Eğriliği sıfır olmayan ve teğet birim vektörleri sabit birim vektör ile sabit açı yapan eğriye silindirik (genel) helis denir [23].

Teorem 2.1.16: Eğriliği sıfır olmayan bir α eğrisinin, silindirik helis olması için gerek ve yeter koşul $\frac{\tau}{\kappa}$ oranının sabit olmasıdır [23].

Tanım 2.1.17: Eğriliği sıfır olmayan ve asal normal birim vektörleri, sabit bir birim vektör ile sabit bir açı yapan bir eğriye slant helis denir [24].

Teorem 2.1.18: Bir α Frenet eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter koşul

$$w = \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)',$$

fonksiyonunun sabit bir fonksiyon olmasıdır [24].

Teorem 2.1.19 (Öklid 3-uzayında Frenet türev formülleri): Birim hızlı bir $\gamma: I \rightarrow E^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ ise

$$\begin{aligned}\vec{T}' &= \kappa \vec{N}, \\ \vec{N}' &= -\kappa \vec{T} + \tau \vec{B}, \\ \vec{B}' &= -\tau \vec{N},\end{aligned}\tag{2.1.11}$$

şeklindedir [20].

2.2. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Temel Kavramlar

Tanım 2.2.1: V bir reel vektör uzayı olsun.

$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ için,

- i) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$
- ii) $\langle a\vec{u} + b\vec{v}, \vec{w} \rangle = a\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + b\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$
- iii) $\langle \vec{u}, a\vec{v} + b\vec{w} \rangle = a\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + b\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$

özelliklerine sahip ise $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde simetrik bilinear form denir [22].

Tanım 2.2.2: V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form $\langle \cdot, \cdot \rangle$ olsun.

- i) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$ ise $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$ simetrik bilinear formuna ‘pozitif tanımlı’,
- ii) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle < 0$ ise $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$ simetrik bilinear formuna ‘negatif tanımlı’,

iii) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0$ ise $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$ simetrik bilineer formuna ‘yarı pozitif tanımlı’,

iv) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \leq 0$ ise $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$ simetrik bilineer formuna ‘yarı negatif tanımlı’,

iv) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$ iken $\vec{v} = 0$ olmak zorunda ise $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$ simetrik bilineer formuna ‘non-dejenere’ aksi halde ‘dejenere’ denir [22].

Tanım 2.2.3: V bir reel vektör uzayı ve $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bir simetrik bilineer form olsun.

$$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle|_W : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekildeki en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$ simetrik bilineer formun ‘indeksi’ denir ve ‘ v ’ ile gösterilir [22].

Teorem 2.2.4: V bir reel vektör uzayı ve V üzerinde simetrik bilineer form $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$ olsun. Bu durumda,

i) $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 0$, $i \neq j$,

ii) $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 1$, $1 \leq i \leq \gamma$,

iii) $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = -1$, $\gamma + 1 \leq i \leq \gamma + \nu$,

iv) $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 0$, $\gamma + \nu \leq i \leq n = \gamma + \nu + \mu$,

olacak şekilde V nin $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ bazı vardır [25].

Teorem 2.2.5: Bir $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$ simetrik bilineer formun non-dejenere olması için gerek ve yeter şart $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$ nin herhangi bir baza göre ters matrisinin olmasıdır [22].

Tanım 2.2.6: Bir V reel vektör uzayı üzerinde non-dejenere simetrik bilineer forma V reel vektör uzayı üzerinde bir skalar çarpma denir. V üzerindeki bir skalar çarpma $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$ ise $(V; \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle)$ ikilisine skalar çarpımlı vektör uzayı denir [22].

Tanım 2.2.7: $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V$ için $\vec{v} \neq 0$ ve $\vec{w} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ ise $\vec{v}$ ve $\vec{w}$ vektörleri diktir denir ve $\vec{v} \perp \vec{w}$ şeklinde gösterilir. V reel vektör uzayının bir altuzayı W ise $W^\perp = \{\vec{v} \in V : \vec{v} \perp W\}$ olsun. $W^\perp$ altuzayına V nin dik altuzayı denir. $W \oplus W^\perp$

genellikle V nin tamamı olmadığından $W^\perp$ altuzayına W nin ortogonal komplemanı denilemez [22].

Teorem 2.2.8: W bir V skalar çarpım uzayının alt uzayı olsun. O zaman

$$\text{i) } \dim W + \dim W^\perp = \dim V$$

$$\text{ii) } (W^\perp)^\perp = W \text{ özellikleri vardır [12].}$$

Tanım 2.2.9: V reel vektör uzayı üzerinde bir skalar çarpma $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$ ve W da V nin bir alt uzayı olsun. Eğer $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$, W üzerinde non-dejenere ise W ya ‘non-dejenere alt uzay’, non-dejenere değil ise ‘dejenere alt uzaydır’ denir [22].

Teorem 2.2.10: V bir skalar çarpım uzayı ve W , V nin bir alt uzayı olsun. W alt uzayının non-dejenere olması için gerek ve yeter şart $V = W \oplus W^\perp$ olmasıdır [22].

Tanım 2.2.11: Bir V reel vektör uzayı üzerindeki skalar çarpma $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$ olsun. Bir $\vec{v} \in V$ vektörünün normu

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{|\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle|}$$

olarak tanımlanır. Normu 1 olan vektöre ‘birim vektör’ ve ortogonal birim vektörlerin cümlesine de ‘ortonormal sistem’ denir [22].

Teorem 2.2.12: V reel vektör uzayı için bir ortonormal baz $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olsun.

$\varepsilon_i = \langle e_i, e_i \rangle$ olmak üzere $\forall \vec{v} \in V$ vektörü

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle \vec{v}, e_i \rangle e_i$$

olacak şekilde tek türlü yazılabilir [22].

Tanım 2.2.13: V bir skalar çarpım uzayı olsun. V nin indeksi ν olmak üzere $\nu = 1$ ve $\dim V \geq 2$ ise V skalar çarpım uzayına bir ‘Lorentz uzayı’ denir [22].

Tanım 2.2.14: V bir Lorentz uzayı olsun. $\vec{v} \in V$ olmak üzere

$$\text{i) } \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0 \text{ veya } \vec{v} = 0 \text{ ise } \vec{v} \text{ vektörüne ‘spacelike vektör’,}$$

$$\text{ii) } \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle < 0 \text{ ise } \vec{v} \text{ vektörüne ‘timelike vektör’,}$$

$$\text{iii) } \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0, \vec{v} \neq 0 \text{ ise } \vec{v} \text{ vektörüne ‘lightlike (null) vektör’ denir [25, 26].}$$

Tanım 2.2.15: $\mathbb{R}^3$ 3-boyutlu Öklid uzayı olmak üzere,

$$\forall u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$$

için Lorentz anlamında iç çarpım,

$$\langle u, v \rangle_L = u_1 v_1 + u_2 v_2 - u_3 v_3$$

ile tanımlanır. Bu durumda $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$ ikilisine 3-boyutlu Minkowski uzayı denir ve $\mathbb{R}_1^3$ ile gösterilir [27].

Tanım 2.2.16: $u \in \mathbb{R}_1^3$ olmak üzere, $\mathbb{R}_1^3$ uzayının tüm lightlike vektörlerinin kümesi,

$$C_1 = \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}_1^3 : u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 = 0\} - \{(0, 0, 0)\}$$

şeklinde ifade edilir [28].

Önerme 2.2.17: $u, v \in \mathbb{R}_1^3$ vektörleri için,

- i) Her ikisi de lightlike vektör ise, bu vektörlerin lineer bağımlı olması için gerek ve yeter şart $\langle u, v \rangle_L = 0$ olmasıdır.
- ii) $u, v \in \mathbb{R}_1^3$ vektörlerinin her ikisi de timelike vektör ise $\langle u, v \rangle_L \neq 0$ dır [28].

Tanım 2.2.18: Bir $u \in \mathbb{R}_1^3$ vektörünün Lorentz anlamında normu,

$$\|u\| = \sqrt{|\langle u, u \rangle_L|}$$

olarak tanımlanır [28].

Tanım 2.2.19: $u, v \in \mathbb{R}_1^3$ vektörleri için Lorentz anlamında vektörel çarpım,

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & -k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

ile verilir [28].

Teorem 2.2.20: $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}_1^3$ iki vektör olsun. Bu vektörlerin arasındaki açılar, vektörlerin karakterlerine bağlı olarak,

i) **Hiperbolik Açı:** $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ timelike ise $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = -\|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cosh \theta$,

ii) **Spacelike Açı:** $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ spacelike ve gerdikleri düzlem spacelike ise $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \theta$,

iii) **Merkez Açı:** $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ spacelike ve gerdikleri düzlem timelike ise $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cosh \theta$,

iv) **Lorentziyen Açı:** $\vec{x}$ spacelike ve $\vec{y}$ timelike ise $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \sinh \theta$

şeklinde tanımlanır [29, 30].

2.3. $\mathbb{R}_2^4$ Minkowski Uzayında Temel Kavramlar

Bu bölümde $\mathbb{R}_v^n$ yarı-Öklidiyen uzayı açıklanarak, $\mathbb{R}_2^4$ Minkowski 4-uzayının bazı temel kavramları ve özellikleri verilecektir.

Tanım 2.3.1: $\mathbb{R}^n$ n-boyutlu standart reel vektör uzayı üzerinde $u, w \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\langle u, w \rangle = \sum_{i=1}^{n-v} u_i w_i - \sum_{i=v-n+1}^n u_i w_i$$

eşitliği ile verilen v indeksli skalar çarpım ile birlikte $\mathbb{R}^n$ uzayına bir yarı Öklidyen uzay denir ve $\mathbb{R}_v^n$ ile gösterilir. Burada, $1 \leq i \leq n$ olmak üzere, sırasıyla u_i ve w_i ler u ve w vektörlerinin bileşenleridir [26].

$\mathbb{R}_2^4$ Minkowski uzayı, aşağıdaki metrik ile verilen

$$\langle , \rangle = -dx_1^2 - dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 \quad (2.3.1)$$

standart vektör uzayıdır. Burada (x_1, x_2, x_3, x_4) , $\mathbb{R}_2^4$ ün koordinat sistemidir. $\mathbb{R}_2^4$ de bir v vektörü için, $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$ şartını sağlıyorsa veya $\vec{v} = 0$ ise $\vec{v}$ vektörü spacelike, $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle < 0$ şartını sağlıyorsa v vektörü timelike, $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$, $\vec{v} \neq \vec{0} = (0, 0, 0, 0)$ şartını sağlıyor ise $\vec{v}$ vektörü null (lightlike) vektördür denir [26].

Tanım 2.3.2: Bir $\vec{v}$ vektörünün normu;

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{|\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle|}$$

ile tanımlanır. Bu yüzden $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \pm 1$ ise $\vec{v}$ vektörü birim vektördür. Keyfi $\vec{v}, \vec{w}$ vektörleri için $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ eşitliği sağlanıyor ise $\vec{v}$ vektörü ile $\vec{w}$ vektörü ortogonaldır (diktir) denir [26].

$\mathbb{R}_2^4$ de $\alpha(s)$ eğrisi boyunca $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}_1(s), \vec{B}_2(s)\}$ Frenet çatısı olsun. Burada $\vec{T}$ teğet vektör alanı, $\vec{N}$ asli normal vektör alanı, $\vec{B}_1$ birinci binormal vektör alanı, $\vec{B}_2$ ikinci binormal vektör alanıdır.

$\mathbb{R}_2^4$ de s parametresine bağlı bir timelike eğri α eğrisi olsun. Bu α timelike eğrisi için aşağıdaki durumlar oluşmaktadır. $\vec{T}$ vektörü timelike ve $\vec{N}$ vektörü

timelike, $\vec{B}_1$ ve $\vec{B}_2$ vektörleri spacelike vektörler seçilerek, $\alpha(s)$ timelike eğrisinin $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}_1, \vec{B}_2\}$ Frenet çatısı olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\begin{aligned}\vec{T}' &= -k_1 \vec{N} \\ \vec{N}' &= k_1 \vec{T} + k_2 \vec{B}_1 \\ \vec{B}_1' &= k_2 \vec{N} + k_3 \vec{B}_2 \\ \vec{B}_2' &= -k_3 \vec{B}_1\end{aligned}, \quad (2.3.2)$$

burada $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}_1$ ve $\vec{B}_2$ vektör alanları,

$$\langle \vec{N}, \vec{N} \rangle = \langle \vec{T}, \vec{T} \rangle = -1, \quad \langle \vec{B}_1, \vec{B}_1 \rangle = \langle \vec{B}_2, \vec{B}_2 \rangle = 1, \quad (2.3.3)$$

karşılıklı olarak ortogonal vektörlerdir ve $\alpha(s)$ eğrisinin sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü eğrilik fonksiyonları $k_1 = k_1(s)$, $k_2 = k_2(s)$ ve $k_3 = k_3(s)$ fonksiyonlarıdır [31, 32].

3. $\mathbb{R}_2^4$ MINKOWSKI UZAYINDA TIMELIKE HELİS VE SLANT HELİS EĞRİLERİNİN DİFERANSİYEL DENKLEM KARAKTERİZASYONLARI

Bu bölümde $\mathbb{R}_2^4$ Minkowski uzayında, N aslı normal vektörü timelike olan, timelike helis eğrileri için, Frenet türev formülleri kullanılarak, vektör alanlarına bağlı diferansiyel denklem karakterizasyonları verilmiştir.

Teorem 3.1: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_2^4$ eğrisi N aslı normal vektörü timelike olan, birim hızlı timelike bir eğri olsun. Bu eğriyi T birim teğet vektör alanına göre karakterize eden diferansiyel denklem,

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= k_1 k_2 k_3 \left[\frac{1}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' \right] + k_1^2 k_3^2, \\ \lambda_1 &= k_1 k_2 k_3 \left[\frac{1}{k_3} \left[\frac{1}{k_2} \left(-\frac{1}{k_1} \right)' \right] + \frac{k_2^2 - k_1^2}{k_1 k_2 k_3} \right] + k_1 k_2 \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' + k_1 k_3^2 \left(\frac{1}{k_1} \right)', \\ \lambda_2 &= k_1 k_2 k_3 \left[\frac{1}{k_3} \left(\frac{1}{k_1 k_2} \right)' + \frac{1}{k_2 k_3} \left(\frac{1}{k_1} \right)' \right] + k_1 k_2 \left[\frac{1}{k_2} \left(\frac{1}{k_1} \right)' \right] + k_1^2 - k_2^2 + k_3, \\ \lambda_3 &= k_1 k_2 k_3 \left(\frac{1}{k_1 k_2 k_3} \right)' + k_1 k_2 \left(\frac{1}{k_1 k_2} \right)' - k_1 \left(\frac{1}{k_1} \right)',\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$T^{(4)} + \lambda_3 T''' + \lambda_2 T'' + \lambda_1 T' + \lambda_0 T = 0$$

şeklindedir [16].

İspat:

(2.3.2) eşitliği kullanılarak,

$$N = -\frac{1}{k_1} T', \quad (3.1.1)$$

$$B_1 = \frac{1}{k_2} N' - \frac{k_1}{k_2} T, \quad (3.1.2)$$

$$B_2 = \frac{1}{k_3} B_1' - \frac{k_2}{k_3} N, \quad (3.1.3)$$

eşitlikleri elde edilir. (3.1.1) eşitliğinin s yay parametresine göre türevi alınır,

$$N' = \left(-\frac{1}{k_1} \right)' T' + \left(-\frac{1}{k_1} \right) T'',$$

elde edilir. Bu eşitlik (3.1.2) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$B_1 = -\frac{1}{k_1 k_2} T'' + \frac{1}{k_2} \left(-\frac{1}{k_1}\right)' T' - \frac{k_1}{k_2} T \quad (3.1.4)$$

elde edilir. (3.1.4) eşitliğinin her iki tarafının s yay parametresine göre türevi alırsa,

$$B_1' = \left(-\frac{1}{k_1 k_2}\right) T''' + \left[\left(-\frac{1}{k_1 k_2}\right)' + \frac{1}{k_2} \left(-\frac{1}{k_1}\right)' \right] T'' + \left[\frac{1}{k_2} \left(-\frac{1}{k_1}\right)'] - \frac{k_1}{k_2} \right] T' - \left(\frac{k_1}{k_2}\right)' T, \quad (3.1.5)$$

elde edilir. (3.1.3) eşitliğinde, (3.1.1) ve (3.1.5) eşitlikleri yerlerine yazılırsa,

$$B_2 = \left(-\frac{1}{k_1 k_2 k_3}\right) T''' + \left[\frac{1}{k_3} \left(-\frac{1}{k_1 k_2}\right)' + \frac{1}{k_2 k_3} \left(-\frac{1}{k_1}\right)' \right] T'' + \left[\frac{1}{k_3} \left[\frac{1}{k_2} \left(-\frac{1}{k_1}\right)'] - \frac{k_1}{k_2 k_3} + \frac{k_2}{k_1 k_3} \right] T' - \frac{1}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2}\right)' T, \quad (3.1.6)$$

elde edilir. (3.1.6) eşitliğinin her iki tarafının s yay parametresine göre türevi alınır,

$$B_2' = \left(-\frac{1}{k_1 k_2 k_3}\right) T^{(4)} + \left[\left(-\frac{1}{k_1 k_2 k_3}\right)' + \frac{1}{k_3} \left(-\frac{1}{k_1 k_2}\right)' + \frac{1}{k_2 k_3} \left(-\frac{1}{k_1}\right)' \right] T''' + \left[\frac{1}{k_3} \left(-\frac{1}{k_1 k_2}\right)' + \frac{1}{k_2 k_3} \left(-\frac{1}{k_1}\right)'] + \frac{1}{k_3} \left[\frac{1}{k_2} \left(-\frac{1}{k_1}\right)'] + \frac{k_2^2 - k_1^2}{k_1 k_2 k_3} \right] T'' + \left[\frac{1}{k_3} \left[\frac{1}{k_2} \left(-\frac{1}{k_1}\right)'] + \frac{k_2^2 - k_1^2}{k_1 k_2 k_3} \right]' - \frac{1}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2}\right)' \right] T' + \left[-\frac{1}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2}\right)' \right]' T, \quad (3.1.7)$$

bulunur. Frenet türev formüllerinden $B_2' = -k_3 B_1$ eşitliğinde (3.1.4) yerine yazılırsa,

$$B_2' = -k_3 \left[-\frac{1}{k_1 k_2} T'' + \frac{1}{k_2} \left(-\frac{1}{k_1}\right)' T' - \frac{k_1}{k_2} T \right] \quad (3.1.8)$$

olup, (3.1.7) ve (3.1.8) ifadeleri birbirine eşitlenirse,

$$\begin{aligned} -k_3 \left[-\frac{1}{k_1 k_2} T'' + \frac{1}{k_2} \left(-\frac{1}{k_1}\right)' T' - \frac{k_1}{k_2} T \right] &= \left(-\frac{1}{k_1 k_2 k_3}\right) T^{(4)} \\ &+ \left[\left(-\frac{1}{k_1 k_2 k_3}\right)' + \frac{1}{k_3} \left(-\frac{1}{k_1 k_2}\right)' + \frac{1}{k_2 k_3} \left(-\frac{1}{k_1}\right)' \right] T''' \\ &+ \left[\frac{1}{k_3} \left(-\frac{1}{k_1 k_2}\right)' + \frac{1}{k_2 k_3} \left(-\frac{1}{k_1}\right)'] + \frac{1}{k_3} \left[\frac{1}{k_2} \left(-\frac{1}{k_1}\right)'] + \frac{k_2^2 - k_1^2}{k_1 k_2 k_3} \right] T'' \\ &+ \left[\frac{1}{k_3} \left[\frac{1}{k_2} \left(-\frac{1}{k_1}\right)'] + \frac{k_2^2 - k_1^2}{k_1 k_2 k_3} \right]' - \frac{1}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2}\right)' \right] T' + \left(-\frac{1}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\right)' T \end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{1}{k_1 k_2 k_3}\right) T^{(4)} + \left[\left(-\frac{1}{k_1 k_2 k_3}\right)' + \frac{1}{k_3} \left(-\frac{1}{k_1 k_2}\right)' + \frac{1}{k_2 k_3} \left(-\frac{1}{k_1}\right)' \right] T''' \\
& + \left[\frac{1}{k_3} \left(-\frac{1}{k_1 k_2}\right)' + \frac{1}{k_2 k_3} \left(-\frac{1}{k_1}\right)' + \frac{1}{k_3} \left[\frac{1}{k_2} \left(-\frac{1}{k_1}\right)'\right] + \frac{k_2^2 - k_1^2}{k_1 k_2 k_3} - \frac{k_3}{k_1 k_2} \right] T'' \\
& + \left[\frac{1}{k_3} \left[\frac{1}{k_2} \left(-\frac{1}{k_1}\right)'\right] + \frac{k_2^2 - k_1^2}{k_1 k_2 k_3} \right]' - \frac{1}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2}\right)' + \frac{k_3}{k_2} \left(-\frac{1}{k_1}\right)' \right] T' \\
& + \left[\left(-\frac{1}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\right)' - \frac{k_1 k_3}{k_2} \right] T = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı $-k_1 k_2 k_3$ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned}
& T^{(4)} + \left[k_1 k_2 k_3 \left(\frac{1}{k_1 k_2 k_3}\right)' + k_1 k_2 \left(\frac{1}{k_1 k_2}\right)' - k_1 \left(\frac{1}{k_1}\right)' \right] T''' \\
& + \left[k_1 k_2 k_3 \left[\frac{1}{k_3} \left(\frac{1}{k_1 k_2}\right)' + \frac{1}{k_2 k_3} \left(\frac{1}{k_1}\right)'\right] + k_1 k_2 \left[\frac{1}{k_2} \left(\frac{1}{k_1}\right)'\right] + k_1^2 - k_2^2 + k_3 \right] T'' \\
& + \left[k_1 k_2 k_3 \left[\frac{1}{k_3} \left[\frac{1}{k_2} \left(-\frac{1}{k_1}\right)'\right] + \frac{k_2^2 - k_1^2}{k_1 k_2 k_3} \right]' + k_1 k_2 \left(\frac{k_1}{k_2}\right)' + k_1 k_3^2 \left(\frac{1}{k_1}\right)' \right] T' \\
& + \left[k_1 k_2 k_3 \left[\frac{1}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\right] + k_1^2 k_3^2 \right] T = 0
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $\mathbb{R}_2^4$ de N asli normal vektörü timelike olan, timelike eğrileri karakterize eden, T ye göre, dördüncü mertebeden değişken katsayılı, lineer, homojen bir diferansiyel denklem elde edilerek ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 3.2: ($\mathbb{R}_2^4$ de Timelike Helis Eğrisinin Diferansiyel Denklem Karakterizasyonları) $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_2^4$ eğrisi s yay parametresiyle verilen, N asli normal vektörü timelike olan, birim hızlı timelike bir eğri olsun. Eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki hareketli Frenet çatısı $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}_1(s), \vec{B}_2(s)\}$ ve sabit birim vektör $\vec{U} = \mu_1(s)\vec{T}(s) + \mu_2(s)\vec{N}(s) + \mu_3(s)\vec{B}_1(s) + \mu_4(s)\vec{B}_2(s)$ olmak üzere, eğer α eğrisi timelike helis ise $\mu_2 = 0$ için $\vec{U}$ vektörü,

$$\vec{U} = c\vec{T}(s) + \frac{k_1}{k_2} c\vec{B}_1(s) + \frac{1}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2}\right)' c\vec{B}_2(s)$$

şeklinde dir.

İspat: $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_2^4$ eğrisi s yay parametresiyle verilen, $\vec{N}$ asli normal vektörü timelike olan, birim hızlı timelike helis ise, $\vec{U}$ sabit birim vektör ise;

$$\langle \vec{T}, \vec{U} \rangle = \text{sabit} \quad (3.2.1)$$

olmalıdır. $\vec{U}$ vektörünün karakteri, (Teorem 2.2.20) gereği, (3.2.1) denkleminde verilen $\langle \vec{T}, \vec{U} \rangle = \text{sabit}$ sonucunu etkilemez.

$$\vec{U} = \mu_1 \vec{T} + \mu_2 \vec{N} + \mu_3 \vec{B}_1 + \mu_4 \vec{B}_2 \quad (3.2.2)$$

yazılabilir. $\vec{U}$ vektörü sırasıyla $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}_1, \vec{B}_2$ ile iç çarpılırsa,

$$\begin{aligned} \langle \vec{T}, \vec{T} \rangle &= \langle \vec{N}, \vec{N} \rangle = -1, \quad \langle \vec{B}_1, \vec{B}_1 \rangle = \langle \vec{B}_2, \vec{B}_2 \rangle = 1 \text{ olduğundan,} \\ \mu_1 &= -\langle \vec{T}, \vec{U} \rangle, \quad \mu_2 = -\langle \vec{N}, \vec{U} \rangle, \quad \mu_3 = \langle \vec{B}_1, \vec{U} \rangle, \quad \mu_4 = \langle \vec{B}_2, \vec{U} \rangle \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

elde edilir. (3.2.2) eşitliğinin her iki tarafının s yay parametresine göre türevi alınıp, Frenet türev formülleri yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \vec{U}' &= \mu_1' \vec{T} + \mu_1 (-k_1 \vec{N}) + \mu_2' \vec{N} + \mu_2 (k_1 \vec{T} + k_2 \vec{B}_1) + \mu_3' \vec{B}_1 \\ &\quad + \mu_3 (k_2 \vec{N} + k_3 \vec{B}_2) + \mu_4' \vec{B}_2 + \mu_4 (-k_3 \vec{B}_1) \end{aligned}$$

olup, $\vec{U}$ timelike sabit birim vektör olduğundan $U' = \vec{0}$ olur ki bu sayede

$$\vec{0} = (\mu_1' + k_1 \mu_2) \vec{T} + (-k_1 \mu_1 + \mu_2' + k_2 \mu_3) \vec{N} + (k_2 \mu_2 + \mu_3' - k_3 \mu_4) \vec{B}_1 + (k_3 \mu_3 + \mu_4') \vec{B}_2 \quad (3.2.4)$$

eşitliği elde edilir. Burada $\vec{T} \neq 0$, $\vec{N} \neq 0$, $\vec{B}_1 \neq 0$, $\vec{B}_2 \neq 0$ olduğundan,

$$\left. \begin{aligned} \mu_1' + k_1 \mu_2 &= 0 \\ -k_1 \mu_1 + \mu_2' + k_2 \mu_3 &= 0 \\ k_2 \mu_2 + \mu_3' - k_3 \mu_4 &= 0 \\ k_3 \mu_3 + \mu_4' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2.5)$$

olmalıdır. Ayrıca (3.2.1) ve (3.2.3) eşitliklerinden $\mu_1 = -\langle T, U \rangle = \text{sabit}$ olup $\mu_1' = 0$ dır. Böylece (3.2.5) eşitlikleri,

$$\left. \begin{aligned} k_1 \mu_2 &= 0 \\ -k_1 \mu_1 + \mu_2' + k_2 \mu_3 &= 0 \\ k_2 \mu_2 + \mu_3' - k_3 \mu_4 &= 0 \\ k_3 \mu_3 + \mu_4' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2.6)$$

şeklinde bulunur.

(3.2.6) eşitlikleri, $\mu_2 = 0$ için düzenlenirse,

$$-k_1\mu_1 + k_2\mu_3 = 0 \quad (3.2.7)$$

$$\mu_3' - k_3\mu_4 = 0 \quad (3.2.8)$$

$$k_3\mu_3 + \mu_4' = 0 \quad (3.2.9)$$

elde edilir. (3.2.3) gereği $\mu_1 = \text{sabit} = c$ olacağından (3.2.7) eşitliği,

$$-k_1c + k_2\mu_3 = 0 \quad (3.2.10)$$

şeklinde yazılabilir. (3.2.10) eşitliğinden,

$$\mu_3 = \frac{k_1}{k_2}c, \quad (3.2.11)$$

(3.2.8) eşitliğinden,

$$\mu_4 = \frac{1}{k_3}\mu_3', \quad (3.2.12)$$

(3.2.11) eşitliği, (3.2.12) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\mu_4 = \frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'c \quad (3.2.13)$$

elde edilir. Böylece $\vec{U} = \mu_1\vec{T} + \mu_2\vec{N} + \mu_3\vec{B}_1 + \mu_4\vec{B}_2$ vektörünün katsayı fonksiyonları,

$$\mu_1 = c, \mu_2 = 0, \mu_3 = \frac{k_1}{k_2}c, \mu_4 = \frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'c \text{ şeklinde bulunmuş ve ispat tamamlanmış}$$

olur. ■

Teorem 3.3: ($\mathbb{R}_2^4$ de Timelike Slant Helis Eğrisinin Diferansiyel Denklem Karakterizasyonları) $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_2^4$ eğrisi s yay parametresiyle verilen, N asli normal vektörü timelike olan, birim hızlı timelike bir eğri olsun. Eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki hareketli Frenet çatısı $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}_1(s), \vec{B}_2(s)\}$ ve timelike sabit birim vektör $\vec{U} = \mu_1(s)\vec{T}(s) + \mu_2(s)\vec{N}(s) + \mu_3(s)\vec{B}_1(s) + \mu_4(s)\vec{B}_2(s)$ olmak üzere, α eğrisi timelike slant helis ise,

$$\left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1 k_2 k_3}\right)\mu_1'' + \left[\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' + \left(\frac{k_1}{k_2 k_3}\right)' - \left(\frac{k_2}{k_1 k_3}\right)'\right]\mu_1' + \left[\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'' + \left(\frac{k_1 k_3}{k_2}\right)'\right]\mu_1 = 0$$

$$\left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{k_3 k_1^2}\right)\mu_3'' + \left[\left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{k_3 k_1^2}\right)' - \frac{k_2}{k_1 k_3}\left(\frac{k_2}{k_1}\right)'\right]\mu_3' + \left[k_3 - \left(\frac{k_2}{k_1 k_3}\left(\frac{k_2}{k_1}\right)'\right)'\right]\mu_3 = 0$$

$$\left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1 k_2 k_3}\right) \mu_4'' + \left[\frac{k_1}{k_2} \left(\frac{1}{k_3}\right)' - \left(\frac{k_2}{k_1 k_3}\right)' \right] \mu_4' + \frac{k_1 k_3}{k_2} \mu_4 = 0$$

diferansiyel denklemleri ile karakterize edilir [16].

İspat: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_2^4$ eğrisi s yay parametresiyle verilen, N asli normal vektörü timelike olan, birim hızlı timelike bir eğri olsun. α eğrisi bir slant helis ise N asli birim vektörü, sabit bir U vektörüyle sabit bir açı yapar. Bu durumda,

$$\langle N, U \rangle = \text{sabit} \quad (3.3.1)$$

olur. U birim vektör,

$$U = \mu_1 T + \mu_2 N + \mu_3 B_1 + \mu_4 B_2 \quad (3.3.2)$$

olsun. (3.3.2) eşitliğinin her iki tarafı sırasıyla T, N, B_1, B_2 vektörleri ile iç çarpılırsa,

$$\begin{aligned} \langle T, T \rangle &= \langle N, N \rangle = -1, \quad \langle B_1, B_1 \rangle = \langle B_2, B_2 \rangle = 1 \text{ olduğundan,} \\ \mu_1 &= -\langle \vec{T}, \vec{U} \rangle, \quad \mu_2 = -\langle \vec{N}, \vec{U} \rangle, \quad \mu_3 = \langle \vec{B}_1, \vec{U} \rangle, \quad \mu_4 = \langle \vec{B}_2, \vec{U} \rangle \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

elde edilir. (3.3.2) eşitliğinin her iki tarafının s yay parametresine göre türevi alınıp Frenet türev formülleri yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} U' &= \mu_1' T + \mu_1(-k_1 N) + \mu_2' N + \mu_2(k_1 T + k_2 B_1) \\ &\quad + \mu_3' B_1 + \mu_3(k_2 N + k_3 B_2) + \mu_4' B_2 + \mu_4(-k_3 B_1) \end{aligned}$$

olacağından ve U sabit birim vektör olduğundan $U' = \vec{0}$ olur. Bu durumda,

$$\vec{0} = (\mu_1' + k_1 \mu_2) T + (-k_1 \mu_1 + \mu_2' + k_2 \mu_3) N + (k_2 \mu_2 + \mu_3' - k_3 \mu_4) B_1 + (k_3 \mu_3 + \mu_4') B_2 \quad (3.3.4)$$

elde edilir. Burada $T \neq 0$, $N \neq 0$, $B_1 \neq 0$, $B_2 \neq 0$ olduğundan,

$$\left. \begin{aligned} \mu_1' + k_1 \mu_2 &= 0 \\ -k_1 \mu_1 + \mu_2' + k_2 \mu_3 &= 0 \\ k_2 \mu_2 + \mu_3' - k_3 \mu_4 &= 0 \\ k_3 \mu_3 + \mu_4' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.3.5)$$

olmalıdır. Ayrıca (3.3.1) ve (3.3.3) eşitliklerinden $\mu_2 = -\langle N, U \rangle = \text{sabit}$ olup $\mu_2' = 0$ dır. Böylece (3.3.5) eşitlikleri,

$$\mu_1' + k_1 \mu_2 = 0 \quad (3.3.6)$$

$$-k_1 \mu_1 + k_2 \mu_3 = 0 \quad (3.3.7)$$

$$k_2 \mu_2 + \mu_3' - k_3 \mu_4 = 0 \quad (3.3.8)$$

$$k_3 \mu_3 + \mu_4' = 0 \quad (3.3.9)$$

şeklinde yazılır. (3.3.8) eşitliğinden,

$$\mu_4 = \frac{k_2}{k_3} \mu_2 + \frac{1}{k_3} \mu_3' \quad (3.3.10)$$

(3.3.6) eşitliğinden,

$$\mu_2 = -\frac{1}{k_1} \mu_1' \quad (3.3.11)$$

(3.3.7) eşitliğinden,

$$\mu_3 = \frac{k_1}{k_2} \mu_1 \quad (3.3.12)$$

(3.3.9) eşitliğinden,

$$\mu_4' = -k_3 \mu_3 \quad (3.3.13)$$

olup (3.3.13) eşitliğinde, (3.3.12) eşitliği yerine yazılırsa,

$$\mu_4' = -k_3 \frac{k_1}{k_2} \mu_1 \quad (3.3.14)$$

(3.3.12) eşitliğinin her iki tarafının s yay parametresine göre türevi alınır,

$$\mu_3' = \left(\frac{k_1}{k_2}\right)' \mu_1 + \left(\frac{k_1}{k_2}\right) \mu_1' \quad (3.3.15)$$

olur. (3.3.10) eşitliğinde, (3.3.11) ve (3.3.15) eşitlikleri yerine yazılırsa,

$$\mu_4 = \frac{k_2}{k_3} \left[\left(-\frac{1}{k_1}\right) \mu_1' \right] + \frac{1}{k_3} \left[\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' \mu_1 + \left(\frac{k_1}{k_2}\right) \mu_1' \right] \quad (3.3.16)$$

elde edilir. (3.3.16) eşitliğinin her iki tarafının s yay parametresine göre türevi alınır,

$$\mu_4' = \left[\left(-\frac{k_2}{k_1 k_3}\right) + \left(\frac{k_1}{k_2 k_3}\right) \right] \mu_1'' + \left[\left(-\frac{k_2}{k_1 k_3}\right)' + \frac{1}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2}\right)' + \left(\frac{k_1}{k_2 k_3}\right)' \right] \mu_1' + \left[\frac{1}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2}\right) \right]' \mu_1 \quad (3.3.17)$$

olur. (3.3.17) eşitliğinde, (3.3.14) eşitliği yerine yazılıp düzenlenirse,

$$\left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1 k_2 k_3}\right) \mu_1'' + \left[\frac{1}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2}\right)' + \left(\frac{k_1}{k_2 k_3}\right)' - \left(\frac{k_2}{k_1 k_3}\right)' \right] \mu_1' + \left[\frac{1}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2}\right) \right]' \mu_1 = 0 \quad (3.3.18)$$

elde edilir. Böylece, slant helisi karakterize eden, μ_1 e bağlı, ikinci mertebeden, değişken katsayılı, homojen diferansiyel denklemi elde edilir.

Şimdi, μ_3 e bağlı bir diferansiyel denklem üretilecektir.

(3.3.6) eşitliğinden,

$$\mu_1' = -k_1 \mu_2 \quad (3.3.19)$$

(3.3.9) eşitliğinden,

$$\mu_4' = -k_3 \mu_3 \quad (3.3.20)$$

(3.3.7) eşitliğinden,

$$\mu_1 = \frac{k_2}{k_1} \mu_3 \quad (3.3.21)$$

elde edilir. (3.3.21) eşitliğinin her iki tarafının s yay parametresine göre türevi alınır,

$$\mu_1' = \left(\frac{k_2}{k_1}\right)' \mu_3 + \left(\frac{k_2}{k_1}\right) \mu_3' \quad (3.3.22)$$

(3.3.22) eşitliğinde, (3.3.19) eşitliği yerine yazılırsa,

$$-k_1 \mu_2 = \left(\frac{k_2}{k_1}\right)' \mu_3 + \left(\frac{k_2}{k_1}\right) \mu_3' \text{ eşitliği elde edileceğinden bu eşitliğin her iki tarafı } -\frac{1}{k_1}$$

ile çarpılırsa,

$$\mu_2 = -\frac{1}{k_1} \left(\frac{k_2}{k_1}\right)' \mu_3 - \left(\frac{k_2}{k_1^2}\right) \mu_3' \quad (3.3.23)$$

elde edilir. (3.3.8) eşitliğinden,

$$\mu_4 = \frac{k_2}{k_3} \mu_2 + \frac{1}{k_3} \mu_3' \quad (3.3.24)$$

elde edilir. (3.3.24) eşitliğinde, (3.3.23) eşitliği yerine yazılırsa,

$$\mu_4 = \frac{k_1^2 - k_2^2}{k_3 k_1^2} \mu_3 - \frac{k_2}{k_1 k_3} \left(\frac{k_2}{k_1}\right)' \mu_3 \quad (3.3.25)$$

elde edilir. (3.3.25) eşitliğinin her iki tarafının s yay parametresine göre türevi alınıp, (3.3.20) eşitliği yerine yazılırsa,

$$\left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{k_3 k_1^2}\right) \mu_3'' + \left[\left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{k_3 k_1^2}\right)' - \frac{k_2}{k_1 k_3} \left(\frac{k_2}{k_1}\right)'\right] \mu_3' + \left[k_3 - \left(\frac{k_2}{k_1 k_3} \left(\frac{k_2}{k_1}\right)'\right)'\right] \mu_3 = 0 \quad (3.3.26)$$

elde edilir. Böylece, slant helisi karakterize eden, μ_3 e göre, ikinci mertebeden değişken katsayılı, homojen, lineer diferansiyel denklemi elde edilir.

Şimdi μ_4 e göre bir diferansiyel denklem elde edilecektir.

(3.3.9) eşitliğinden,

$$\mu_3 = -\frac{1}{k_3} \mu_4' \quad (3.3.27)$$

(3.3.27) eşitliğinin her iki tarafının s yay parametresine göre türevi alınır,

$$\mu_3' = \left(-\frac{1}{k_3}\right)' \mu_4' + \left(-\frac{1}{k_3}\right) \mu_4'' \quad (3.3.28)$$

(3.3.8) eşitliğinden, $\mu_2 = -\frac{1}{k_2} \mu_3' + \frac{k_3}{k_2} \mu_4$ elde edilip bu ifadede (3.3.28) eşitliği yerine yazılırsa,

$$\mu_2 = -\frac{1}{k_2} \left[\left(-\frac{1}{k_3}\right)' \mu_4' + \left(-\frac{1}{k_3}\right) \mu_4'' \right] + \frac{k_3}{k_2} \mu_4 = \left(\frac{1}{k_2 k_3}\right) \mu_4'' + \frac{1}{k_2} \left(\frac{1}{k_3}\right)' \mu_4' + \frac{k_3}{k_2} \mu_4 \quad (3.3.29)$$

elde edilir. (3.3.7) eşitliğinden, $\mu_1 = \frac{k_2}{k_1} \mu_3$ elde edilip, bu eşitlikte (3.3.27) eşitliği yerine yazılırsa,

$$\mu_1 = \frac{k_2}{k_1} \left[-\frac{1}{k_3} \mu_4' \right] = -\frac{k_2}{k_1 k_3} \mu_4' \quad (3.3.30)$$

elde edilir. (3.3.30) ifadesinin her iki tarafının s yay parametresine göre türevi alınır,

$$\mu_1' = \left(-\frac{k_2}{k_1 k_3}\right)' \mu_4' + \left(-\frac{k_2}{k_1 k_3}\right) \mu_4'' \quad (3.3.31)$$

elde edilir. (3.3.6) eşitliğinde, (3.3.29) ve (3.3.31) eşitlikleri yerlerine yazılırsa,

$$\left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1 k_2 k_3}\right) \mu_4'' + \left[\frac{k_1}{k_2} \left(\frac{1}{k_3}\right)' - \left(\frac{k_2}{k_1 k_3}\right)'\right] \mu_4' + \frac{k_1 k_3}{k_2} \mu_4 = 0 \quad (3.3.32)$$

elde edilir. Böylece, slant helisi karakterize eden, μ_4 e göre, ikinci mertebeden değişken katsayılı, homojen, lineer diferansiyel denklemi elde edilir. ■

Sonuç 3.4: μ_1, μ_3, μ_4 e göre $\mathbb{R}_2^4$ de slant helisi karakterize eden diferansiyel denklemler elde edilmiştir ayrıca, $\mu_2 = -\langle N, U \rangle = \text{sabit}$ olup $\mu_2' = 0$ olduğundan μ_2 e göre diferansiyel denklem elde edilemez.

Teorem 3.5: ($\mathbb{R}_2^4$ de Timelike B_1 -Slant Helis Eğrisinin Diferansiyel Denklem Karakterizasyonları) $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_2^4$ eğrisi s yay parametresiyle verilen, asli normal vektörü N timelike olan, birim hızlı timelike bir eğri olsun. Eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki hareketli Frenet çatısı $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}_1(s), \vec{B}_2(s)\}$ ve sabit birim vektör $\vec{U} = \mu_1(s)\vec{T}(s) + \mu_2(s)\vec{N}(s) + \mu_3(s)\vec{B}_1(s) + \mu_4(s)\vec{B}_2(s)$ olmak üzere, α eğrisi timelike B_1 - slant helis ise,

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{k_3^2 - k_2^2}{k_1^2 k_3^2} \right] \mu_1'' + \left[\frac{1}{k_1} \left(\frac{1}{k_1} \right)' - \frac{k_2}{k_1 k_3} \left(\frac{k_2}{k_1 k_3} \right)' \right] \mu_1' + \mu_1 = 0 \\
& \left(\frac{k_3^2 - k_2^2}{k_1 k_3^2} \right) \mu_2'' + \left[\left(\frac{k_3^2 - k_2^2}{k_1 k_3^2} \right)' - \frac{k_2}{k_1 k_3} \left(\frac{k_2}{k_3} \right)' \right] \mu_2' + \left[k_1 - \left(\frac{k_2}{k_1 k_3} \left(\frac{k_2}{k_3} \right)' \right)' \right] \mu_2 = 0 \\
& \left(\frac{k_3^2 - k_2^2}{k_1 k_2 k_3} \right) \mu_4'' + \left[\left(\frac{k_3^2 - k_2^2}{k_1 k_2 k_3} \right)' + \frac{1}{k_1} \left(\frac{k_3}{k_2} \right)' \right] \mu_4' + \left[\frac{k_1 k_3}{k_2} + \left(\frac{1}{k_1} \left(\frac{k_3}{k_2} \right)' \right)' \right] \mu_4 = 0
\end{aligned}$$

diferansiyel denklemleri ile karakterize edilir [16].

İspat: $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_2^4$ eğrisi s yay parametresiyle verilen, birim hızlı timelike bir eğri olsun. α eğrisi, N asli normal vektörü timelike olan, bir timelike B_1 -slant helis ise, U sabit birim vektör olmak üzere,

$$\langle B_1, U \rangle = \text{sabit} \quad (3.5.1)$$

olur. Bu durumda U birim vektörü,

$$U = \mu_1 T + \mu_2 N + \mu_3 B_1 + \mu_4 B_2 \quad (3.5.2)$$

olsun. (3.5.2) eşitliğinin her iki tarafı sırasıyla T, N, B_1, B_2 vektörleri ile iç çarpılırsa,

$$\langle T, T \rangle = \langle N, N \rangle = -1, \quad \langle B_1, B_1 \rangle = \langle B_2, B_2 \rangle = 1 \text{ olduğundan,}$$

$$\mu_1 = -\langle \vec{T}, \vec{U} \rangle, \quad \mu_2 = -\langle \vec{N}, \vec{U} \rangle, \quad \mu_3 = \langle \vec{B}_1, \vec{U} \rangle, \quad \mu_4 = \langle \vec{B}_2, \vec{U} \rangle \quad (3.5.3)$$

elde edilir. (3.5.2) eşitliğinin her iki tarafının s yay parametresine göre türevi alınıp Frenet türev formülleri yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
U' &= \mu_1' T + \mu_1 (-\kappa_1 N) + \mu_2' N + \mu_2 (\kappa_1 T + \kappa_2 B_1) \\
&\quad + \mu_3' B_1 + \mu_3 (\kappa_2 N + \kappa_3 B_2) + \mu_4' B_2 + \mu_4 (-\kappa_3 B_1)
\end{aligned}$$

olur. Bu eşitlikte U sabit birim vektör olduğundan $U' = \vec{0}$ olup, ifade düzenlendiğinde,

$$\vec{0} = (\mu_1' + k_1 \mu_2) T + (-k_1 \mu_1 + \mu_2' + k_2 \mu_3) N + (k_2 \mu_2 + \mu_3' - k_3 \mu_4) B_1 + (k_3 \mu_3 + \mu_4') B_2 \quad (3.5.4)$$

elde edilir. Burada $T \neq 0, N \neq 0, B_1 \neq 0, B_2 \neq 0$ olduğundan,

$$\left. \begin{aligned}
\mu_1' + k_1 \mu_2 &= 0 \\
-k_1 \mu_1 + \mu_2' + k_2 \mu_3 &= 0 \\
k_2 \mu_2 + \mu_3' - k_3 \mu_4 &= 0 \\
k_3 \mu_3 + \mu_4' &= 0
\end{aligned} \right\} \quad (3.5.5)$$

olmalıdır. Ayrıca (3.5.1) ve (3.5.3) eşitliklerinden $\mu_3 = \langle B_1, U \rangle = \text{sabit}$ olup $\mu_3' = 0$ dır. Böylece (3.5.5) sisteminin denklemleri,

$$\mu_1' + k_1 \mu_2 = 0 \quad (3.5.6)$$

$$-k_1 \mu_1 + \mu_2' + k_2 \mu_3 = 0 \quad (3.5.7)$$

$$k_2 \mu_2 - k_3 \mu_4 = 0 \quad (3.5.8)$$

$$k_3 \mu_3 + \mu_4' = 0 \quad (3.5.9)$$

şeklinde yazılır. (3.5.7) eşitliğinden,

$$\mu_3 = \frac{k_1}{k_2} \mu_1 - \frac{1}{k_2} \mu_2' \quad (3.5.10)$$

(3.5.6) eşitliğinden,

$$\mu_2 = -\frac{1}{k_1} \mu_1' \quad (3.5.11)$$

yazılıp (3.5.11) eşitliğinin s yay parametresine göre her iki tarafının türevi alınır,

$$\mu_2' = \left(-\frac{1}{k_1}\right)' \mu_1' + \left(-\frac{1}{k_1}\right) \mu_1'' \quad (3.5.12)$$

bulunur. (3.5.12) eşitliği, (3.5.10) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\mu_3 = \frac{k_1}{k_2} \mu_1 - \frac{1}{k_2} \left[\left(-\frac{1}{k_1}\right)' \mu_1' + \left(-\frac{1}{k_1}\right) \mu_1'' \right] = \left(\frac{1}{k_1 k_2}\right) \mu_1'' + \frac{1}{k_2} \left(\frac{1}{k_1}\right)' \mu_1' + \frac{k_1}{k_2} \mu_1 \quad (3.5.13)$$

(3.5.8) eşitliğinden,

$$\mu_4 = \frac{k_2}{k_3} \mu_2 \quad (3.5.14)$$

(3.5.14) eşitliğinde, (3.5.11) eşitliği yerine yazılırsa, $\mu_4 = -\frac{k_2}{k_1 k_3} \mu_1'$ olacağından her

iki tarafın s yay parametresine göre türevi alınır,

$$\mu_4' = \left(-\frac{k_2}{k_1 k_3}\right)' \mu_1' + \left(-\frac{k_2}{k_1 k_3}\right) \mu_1'' \quad (3.5.15)$$

bulunur. (3.5.13) ve (3.5.15) eşitlikleri, (3.5.9) eşitliğinde yerlerine yazılıp $\frac{k_2}{k_1 k_3}$ ile

çarpılırsa,

$$\left[\frac{k_3^2 - k_2^2}{k_1^2 k_3^2} \right] \mu_1'' + \left[\frac{1}{k_1} \left(\frac{1}{k_1}\right)' - \frac{k_2}{k_1 k_3} \left(\frac{k_2}{k_1 k_3}\right)' \right] \mu_1' + \mu_1 = 0 \quad (3.5.16)$$

elde edilir. Böylece (3.5.16) denklemi ile, μ_1 e bağı, B_1 -slant helisi karakterize eden, ikinci mertebeden değışken katsayılı, homojen, lineer diferansiyel denklemi elde edilmiş olur. $\mu_3' = 0$ olduğundan, μ_3 e bağı bir diferansiyel denklem elde edilemez.

Ancak μ_2 ve μ_4 e göre diferansiyel denklemler üretilebilir.

Şimdi μ_2 e bağı bir diferansiyel denklem elde edilecektir.

Daha önce elde edilen (3.5.8) eşitliğinden,

$$\mu_4 = \frac{k_2}{k_3} \mu_2 \quad (3.5.17)$$

bulunur. (3.5.17) eşitliğinin her iki tarafının s yay parametresine göre türevi alınırsa,

$$\mu_4' = \left(\frac{k_2}{k_3}\right)' \mu_2 + \left(\frac{k_2}{k_3}\right) \mu_2' \quad (3.5.18)$$

olur. (3.5.9) eşitliğinden,

$$\mu_3 = -\frac{1}{k_3} \mu_4' \quad (3.5.19)$$

(3.5.6) eşitliğinden,

$$\mu_1' = -k_1 \mu_2 \quad (3.5.20)$$

(3.5.7) eşitliğinden,

$$\mu_1 = \frac{k_2}{k_1} \mu_3 + \frac{1}{k_1} \mu_2' \quad (3.5.21)$$

elde edilip, (3.5.21) eşitliğinde, (3.5.19) eşitliği yerine yazılırsa,

$$\mu_1 = -\frac{k_2}{k_1 k_3} \mu_4' + \frac{1}{k_1} \mu_2' \quad (3.5.22)$$

elde edilir. (3.5.22) eşitliğinde, (3.5.18) eşitliği yerine yazılırsa,

$$\mu_1 = -\frac{k_2}{k_1 k_3} \left[\left(\frac{k_2}{k_3}\right)' \mu_2 + \left(\frac{k_2}{k_3}\right) \mu_2' \right] + \frac{1}{k_1} \mu_2' = \left[\frac{1}{k_1} - \frac{k_2^2}{k_1 k_3^2} \right] \mu_2' - \frac{k_2}{k_1 k_3} \left(\frac{k_2}{k_3}\right)' \mu_2 \quad (3.5.23)$$

elde edilir. (3.5.23) eşitliğinin s yay parametresine göre türevi alınırsa,

$$\mu_1' = \left(\frac{k_3^2 - k_2^2}{k_1 k_3^2}\right)' \mu_2' + \left(\frac{k_3^2 - k_2^2}{k_1 k_3^2}\right) \mu_2'' - \left(\frac{k_2}{k_1 k_3} \left(\frac{k_2}{k_3}\right)'\right)' \mu_2 - \frac{k_2}{k_1 k_3} \left(\frac{k_2}{k_3}\right)' \mu_2' \quad (3.5.24)$$

bulunur. (3.5.24) de (3.5.20) eşitliği yerine yazılırsa,

$$\left(\frac{k_3^2 - k_2^2}{k_1 k_3^2}\right) \mu_2'' + \left[\left(\frac{k_3^2 - k_2^2}{k_1 k_3^2}\right)' - \frac{k_2}{k_1 k_3} \left(\frac{k_2}{k_3}\right)'\right] \mu_2' + \left[k_1 - \left(\frac{k_2}{k_1 k_3} \left(\frac{k_2}{k_3}\right)'\right)'\right] \mu_2 = 0$$

bulunur. Böylece, B_1 -slant helisi, μ_2 ye göre karakterize eden ikinci mertebeden, değişken katsayılı, lineer, homojen diferansiyel denklem elde edilmiş olur.

Şimdi μ_4 e göre diferansiyel denklem üretilecektir.

Daha önce elde edilen (3.5.8) eşitliğinden,

$$\mu_2 = \frac{k_3}{k_2} \mu_4 \quad (3.5.24)$$

elde edilip, (3.5.24) eşitliğinin her iki tarafının s yay parametresine göre türevi alınır,

$$\mu_2' = \left(\frac{k_3}{k_2}\right)' \mu_4 + \left(\frac{k_3}{k_2}\right) \mu_4' \quad (3.5.25)$$

(3.5.9) eşitliğinden,

$$\mu_3 = -\frac{1}{k_3} \mu_4' \quad (3.5.26)$$

(3.5.7) eşitliğinden,

$$\mu_1 = \frac{1}{k_1} \mu_2' + \frac{k_2}{k_1} \mu_3 \quad (3.5.27)$$

elde edilir. (3.5.25) ve (3.5.26) eşitlikleri, (3.5.27) eşitliğindeki yerlerine yazılırsa,

$$\mu_1 = \left(\frac{k_3^2 - k_2^2}{k_1 k_2 k_3}\right) \mu_4' + \frac{1}{k_1} \left(\frac{k_3}{k_2}\right)' \mu_4 \quad (3.5.28)$$

elde edilir. (3.5.28) eşitliğinin her iki tarafının s yay parametresine göre türevi alınır,

$$\mu_1' = \left(\frac{k_3^2 - k_2^2}{k_1 k_2 k_3}\right)' \mu_4' + \left(\frac{k_3^2 - k_2^2}{k_1 k_2 k_3}\right) \mu_4'' + \left(\frac{1}{k_1} \left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\right)' \mu_4 + \left(\frac{1}{k_1} \left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\right) \mu_4' \quad (3.5.29)$$

olur. (3.5.6) eşitliğinden $\mu_1' = -k_1 \mu_2$ olup bu eşitlikte (3.5.26) eşitliği yerine yazılırsa,

$$\mu_1' = -\frac{k_1 k_3}{k_2} \mu_4 \quad (3.5.30)$$

olur. (3.5.29) eşitliğinde (3.5.30) eşitliği yerine yazılıp düzenlenirse,

$$\left(\frac{k_3^2 - k_2^2}{k_1 k_2 k_3}\right) \mu_4'' + \left[\left(\frac{k_3^2 - k_2^2}{k_1 k_2 k_3}\right)' + \frac{1}{k_1} \left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\right] \mu_4' + \left[\frac{k_1 k_3}{k_2} + \left(\frac{1}{k_1} \left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\right)'\right] \mu_4 = 0$$

elde edilir. Böylece, B_1 -slant helisi, μ_4 e bağlı karakterize eden ikinci mertebeden, değişken katsayılı, lineer, homojen diferansiyel denklem elde edilmiş olur. ■

Teorem 3.6: ($\mathbb{R}_2^4$ de Timelike B_2 -Slant Helis Eğrisinin Diferansiyel Denklem Karakterizasyonları) $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_2^4$ eğrisi s yay parametresiyle verilen, N aslı normal vektörü timelike olan, birim hızlı timelike bir eğri olsun. Eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki hareketli Frenet çatısı $\{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)\}$ ve sabit birim vektör $\vec{U} = \mu_1(s)\vec{T}(s) + \mu_2(s)\vec{N}(s) + \mu_3(s)\vec{B}_1(s) + \mu_4(s)\vec{B}_2(s)$ olmak üzere, α eğrisi timelike B_2 - slant helis ise;

1.Durum: $k_3 = 0$ ve $\mu_3 \neq 0$ için,

$$\begin{aligned} \mu_1''' + \left[k_1 k_2 \left(\frac{1}{k_1 k_2} \right)' + k_1 \left(\frac{1}{k_1} \right)' \right] \mu_1'' + \left[k_1^2 - k_2^2 + k_1 k_2 \left(\frac{1}{k_2} \left(\frac{1}{k_1} \right)' \right)' \right] \mu_1' + k_1 k_2 \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' \mu_1 &= 0 \\ \left(\frac{\frac{1}{k_1}}{\left(\frac{k_2}{k_1} \right)'} \right) \mu_2''' + \left[\left(\frac{\frac{1}{k_1}}{\left(\frac{k_2}{k_1} \right)'} \right)' + \frac{\left(\frac{1}{k_1} \right)'}{\left(\frac{k_2}{k_1} \right)'} \right] \mu_2'' + \left[\left(\frac{\left(\frac{1}{k_1} \right)'}{\left(\frac{k_2}{k_1} \right)'} \right)' + \frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1 \left(\frac{k_2}{k_1} \right)'} \right] \mu_2' + \left[\left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1 \left(\frac{k_2}{k_1} \right)'} \right)' - k_2 \right] \mu_2 &= 0 \\ \mu_3''' + \left[k_1 k_2 \left(\frac{1}{k_1 k_2} \right)' + k_2 \left(\frac{1}{k_2} \right)' \right] \mu_3'' + \left[k_1 k_2 \left(\frac{1}{k_1} \left(\frac{1}{k_2} \right)' \right)' + k_1^2 - k_2^2 \right] \mu_3' - k_1 k_2 \left(\frac{k_2}{k_1} \right)' \mu_3 &= 0 \end{aligned}$$

diferansiyel denklemleri ile karakterize edilir.

2.Durum: $k_3 \neq 0$ ve $\mu_3 = 0$ için,

$$\mu_1 = \frac{1}{k_1} \left(\frac{k_3}{k_2} \right)' c \quad \mu_2 = \frac{k_3}{k_2} c \quad \mu_4 = c$$

olur. Böylece $\vec{U} = c \left(\frac{1}{k_1} \left(\frac{k_3}{k_2} \right)' \vec{T}(s) + \frac{k_3}{k_2} \vec{N}(s) + \vec{B}_2(s) \right)$ elde edilir.

3.Durum: $k_3 = 0$ ve $\mu_3 = 0$ için,

$$\mu_1'' + k_1 \left(\frac{1}{k_1} \right)' \mu_1' + k_1^2 \mu_1 = 0$$

diferansiyel denklemi ile karakterize edilir [16].

İspat: $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_2^4$ eğrisi s yay parametresiyle verilen, N aslı normal vektörü timelike olan, birim hızlı timelike bir eğri olsun. α eğrisi bir timelike B_2 -slant helis ise, U sabit birim vektör olmak üzere,

$$\langle B_2, U \rangle = \text{sabit} \quad (3.6.1)$$

olur. U sabit birim vektörü,

$$U = \mu_1 T + \mu_2 N + \mu_3 B_1 + \mu_4 B_2 \quad (3.6.2)$$

olsun. (3.6.2) eşitliğinin her iki tarafı sırasıyla T, N, B_1, B_2 vektörleri ile iç çarpılırsa,

$$\langle T, T \rangle = \langle N, N \rangle = -1, \quad \langle B_1, B_1 \rangle = \langle B_2, B_2 \rangle = 1 \text{ olduğundan,}$$

$$\mu_1 = -\langle \vec{T}, \vec{U} \rangle, \quad \mu_2 = -\langle \vec{N}, \vec{U} \rangle, \quad \mu_3 = \langle \vec{B}_1, \vec{U} \rangle, \quad \mu_4 = \langle \vec{B}_2, \vec{U} \rangle \quad (3.6.3)$$

elde edilir. (3.6.2) eşitliğinin her iki tarafının s yay parametresine göre türevi alınıp Frenet türev formülleri yerlerine yazılırsa,

$$U' = \mu_1' T + \mu_1(-\kappa_1 N) + \mu_2' N + \mu_2(\kappa_1 T + \kappa_2 B_1) \\ + \mu_3' B_1 + \mu_3(\kappa_2 N + \kappa_3 B_2) + \mu_4' B_2 + \mu_4(-\kappa_3 B_1)$$

elde edilir. $\vec{U}$ sabit birim vektör olduğundan $U' = \vec{0}$ olup, ifade düzenlendiğinde,

$$\vec{0} = (\mu_1' + k_1 \mu_2) T + (-k_1 \mu_1 + \mu_2' + k_2 \mu_3) N + (k_2 \mu_2 + \mu_3' - k_3 \mu_4) B_1 + (k_3 \mu_3 + \mu_4') B_2 \quad (3.6.4)$$

elde edilir. Burada $T \neq 0, N \neq 0, B_1 \neq 0, B_2 \neq 0$ olduğundan,

$$\left. \begin{aligned} \mu_1' + k_1 \mu_2 &= 0 \\ -k_1 \mu_1 + \mu_2' + k_2 \mu_3 &= 0 \\ k_2 \mu_2 + \mu_3' - k_3 \mu_4 &= 0 \\ k_3 \mu_3 + \mu_4' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.6.5)$$

olmalıdır. Ayrıca (3.6.1) ve (3.6.3) eşitliklerinden $\mu_4 = \langle B_2, U \rangle = \text{sabit}$ olup $\mu_4' = 0$ dır. Böylece (3.6.5) eşitlikleri,

$$\mu_1' + k_1 \mu_2 = 0 \quad (3.6.6)$$

$$-k_1 \mu_1 + \mu_2' + k_2 \mu_3 = 0 \quad (3.6.7)$$

$$k_2 \mu_2 + \mu_3' - k_3 \mu_4 = 0 \quad (3.6.8)$$

$$k_3 \mu_3 = 0 \quad (3.6.9)$$

şeklinde yazılır.

1.Durum: $k_3 = 0$ ve $\mu_3 \neq 0$ için (3.6.8) eşitliği düzenlenirse,

$$k_2 \mu_2 + \mu_3' = 0 \quad (3.6.10)$$

elde edilir. (3.6.6) eşitliğinden,

$$\mu_2 = -\frac{1}{k_1} \mu_1' \quad (3.6.11)$$

bulunur. (3.6.11) eşitliğinin her iki tarafının s yay parametresine göre türevi alınırsa,

$$\mu_2' = \left(-\frac{1}{k_1}\right)' \mu_1' + \left(-\frac{1}{k_1}\right) \mu_1'' \quad (3.6.12)$$

elde edilir. (3.6.7) eşitliğinden $\mu_3 = \frac{k_1}{k_2} \mu_1 - \frac{1}{k_2} \mu_2'$ olur. Bu ifadede (3.6.12) eşitliği yerine yazılırsa,

$$\mu_3 = \left(\frac{1}{k_1 k_2}\right) \mu_1'' + \frac{1}{k_2} \left(\frac{1}{k_1}\right)' \mu_1' + \frac{k_1}{k_2} \mu_1 \quad (3.6.13)$$

elde edilir. (3.6.10) eşitliğinden $\mu_3' = -k_2 \mu_2$ olur. Bu ifadede (3.6.11) yerine yazılırsa,

$$\mu_3' = \frac{k_2}{k_1} \mu_1' \quad (3.6.14)$$

elde edilir. (3.6.13) eşitliğinin her iki tarafının s yay parametresine göre türevi alınırsa,

$$\mu_3' = \left(\frac{1}{k_1 k_2}\right)' \mu_1'' + \left(\frac{1}{k_1 k_2}\right) \mu_1''' + \left(\frac{1}{k_2} \left(\frac{1}{k_1}\right)'\right)' \mu_1' + \left(\frac{1}{k_2} \left(\frac{1}{k_1}\right)'\right) \mu_1'' + \left(\frac{k_1}{k_2}\right)' \mu_1 + \frac{k_1}{k_2} \mu_1' \quad (3.6.15)$$

elde edilir. (3.6.14) eşitliği, (3.6.15) eşitliğinde yerine yazılıp düzenlenirse,

$$\left(\frac{1}{k_1 k_2}\right) \mu_1''' + \left[\left(\frac{1}{k_1 k_2}\right)' + \frac{1}{k_2} \left(\frac{1}{k_1}\right)'\right] \mu_1'' + \left[\frac{k_1}{k_2} - \frac{k_2}{k_1} + \left(\frac{1}{k_2} \left(\frac{1}{k_1}\right)'\right)'\right] \mu_1' + \left(\frac{k_1}{k_2}\right)' \mu_1 = 0 \quad (3.6.16)$$

elde edilir. (3.6.16) eşitliğinin her iki tarafı $k_1 k_2$ ile çarpılırsa,

$$\mu_1''' + \left[k_1 k_2 \left(\frac{1}{k_1 k_2}\right)' + k_1 \left(\frac{1}{k_1}\right)'\right] \mu_1'' + \left[k_1^2 - k_2^2 + k_1 k_2 \left(\frac{1}{k_2} \left(\frac{1}{k_1}\right)'\right)'\right] \mu_1' + k_1 k_2 \left(\frac{k_1}{k_2}\right)' \mu_1 = 0$$

elde edilir. Böylece, timelike B_2 -slant helis eğrisini karakterize eden, μ_1 e göre üçüncü mertebeden, değişken katsayılı, lineer, homojen bir diferansiyel denklem elde edilmiş olur.

Diğer taraftan (3.6.7) eşitliğinden,

$$\mu_1 = \frac{1}{k_1} \mu_2' + \frac{k_2}{k_1} \mu_3 \quad (3.6.17)$$

(3.6.10) eşitliğinden,

$$\mu_3' = -k_2 \mu_2 \quad (3.6.18)$$

(3.6.6) eşitliğinden,

$$\mu_1' = -k_1 \mu_2 \quad (3.6.19)$$

elde edilir. (3.7.17) eşitliğinin her iki tarafının s yay parametresine göre türevi alınır,

$$\mu_1' = \left(\frac{1}{k_1}\right)' \mu_2' + \left(\frac{1}{k_1}\right) \mu_2'' + \left(\frac{k_2}{k_1}\right)' \mu_3 + \left(\frac{k_2}{k_1}\right) \mu_3' \quad (3.6.20)$$

elde edilir. (3.6.20) eşitliğinde (3.6.18) ve (3.6.19) eşitlikleri yerlerine yazılırsa,

$$\left(\frac{k_2}{k_1}\right)' \mu_3 + \left(\frac{1}{k_1}\right) \mu_2'' + \left(\frac{1}{k_1}\right)' \mu_2' + \left(k_1 - \frac{k_2^2}{k_1}\right) \mu_2 = 0 \quad (3.6.21)$$

elde edilir. (3.6.21) eşitliği $\left(\frac{k_2}{k_1}\right)'$ ifadesiyle bölünerek,

$$\mu_3 = -\frac{\frac{1}{k_1}}{\left(\frac{k_2}{k_1}\right)'} \mu_2'' - \frac{\left(\frac{1}{k_1}\right)'}{\left(\frac{k_2}{k_1}\right)'} \mu_2' - \frac{\frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1}}{\left(\frac{k_2}{k_1}\right)'} \mu_2 \quad (3.6.22)$$

şeklinde düzenlenir. (3.6.22) eşitliğinin her iki tarafının s yay parametresine göre türevi alınır,

$$\begin{aligned} \mu_3' = & \left(-\frac{\frac{1}{k_1}}{\left(\frac{k_2}{k_1}\right)'} \right)' \mu_2'' + \left(-\frac{\frac{1}{k_1}}{\left(\frac{k_2}{k_1}\right)'} \right) \mu_2''' + \left(-\frac{\left(\frac{1}{k_1}\right)'}{\left(\frac{k_2}{k_1}\right)'} \right)' \mu_2' + \left(-\frac{\left(\frac{1}{k_1}\right)'}{\left(\frac{k_2}{k_1}\right)'} \right) \mu_2'' \\ & + \left(-\frac{\frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1}}{\left(\frac{k_2}{k_1}\right)'} \right)' \mu_2 + \left(-\frac{\frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1}}{\left(\frac{k_2}{k_1}\right)'} \right) \mu_2' \end{aligned} \quad (3.6.23)$$

olur. (3.6.23) ifadesinde, (3.6.18) eşitliği yerine yazılıp düzenlenirse,

$$\left(\frac{\frac{1}{k_1}}{\left(\frac{k_2}{k_1}\right)'} \right) \mu_2''' + \left[\left(\frac{\frac{1}{k_1}}{\left(\frac{k_2}{k_1}\right)'} \right)' + \frac{\left(\frac{1}{k_1}\right)'}{\left(\frac{k_2}{k_1}\right)'} \right] \mu_2'' + \left[\left(\frac{\left(\frac{1}{k_1}\right)'}{\left(\frac{k_2}{k_1}\right)'} \right)' + \frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1 \left(\frac{k_2}{k_1}\right)'} \right] \mu_2' + \left[\left(\frac{\frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1}}{\left(\frac{k_2}{k_1}\right)'} \right)' - k_2 \right] \mu_2 = 0$$

elde edilir. Böylece, timelike B_2 -slant helis eğrisini karakterize eden, μ_2 e göre üçüncü mertebeden, değişken katsayılı, lineer, homojen bir diferansiyel denklem elde edilmiş olur.

Ayrıca (3.6.10) eşitliğinden,

$$\mu_2 = -\frac{1}{k_2} \mu_3' \quad (3.6.23)$$

ve (3.6.6) eşitliğinden $\mu_1' = -k_1\mu_2$ olur. Bu ifadede (3.6.23) eşitliği yerine yazılırsa,

$$\mu_1' = \frac{k_1}{k_2} \mu_3' \quad (3.6.24)$$

bulunur. (3.6.23) eşitliğinin her iki tarafının s yay parametresine göre türevi alınır,

$$\mu_2' = \left(-\frac{1}{k_2}\right)' \mu_3' + \left(-\frac{1}{k_2}\right) \mu_3'' \quad (3.6.25)$$

olur. (3.6.7) eşitliğinden $\mu_1 = \frac{k_2}{k_1} \mu_3 + \frac{1}{k_1} \mu_2'$ olur. Bu ifadede (3.6.25) eşitliği yerine yazılırsa,

$$\mu_1 = -\frac{1}{k_1 k_2} \mu_3'' - \frac{1}{k_1} \left(\frac{1}{k_2}\right)' \mu_3' + \frac{k_2}{k_1} \mu_3 \quad (3.6.26)$$

elde edilir. (3.6.26) eşitliğinin her iki tarafının s yay parametresine göre türevi alınır,

$$\mu_1' = \left(-\frac{1}{k_1 k_2}\right)' \mu_3'' + \left(-\frac{1}{k_1 k_2}\right) \mu_3''' + \left(-\frac{1}{k_1} \left(\frac{1}{k_2}\right)'\right)' \mu_3' + \left(-\frac{1}{k_1} \left(\frac{1}{k_2}\right)'\right) \mu_3'' + \left(\frac{k_2}{k_1}\right)' \mu_3 + \left(\frac{k_2}{k_1}\right) \mu_3' \quad (3.6.27)$$

elde edilir. (3.6.27) eşitliğinde, bulunan (3.6.24) eşitliği yerine yazılıp düzenlenirse,

$$\left(-\frac{1}{k_1 k_2}\right) \mu_3''' + \left[\left(-\frac{1}{k_1 k_2}\right)' - \frac{1}{k_1} \left(\frac{1}{k_2}\right)' \right] \mu_3'' + \left[\left(-\frac{1}{k_1} \left(\frac{1}{k_2}\right)'\right)' + \frac{k_2}{k_1} - \frac{k_1}{k_2} \right] \mu_3' + \left(\frac{k_2}{k_1}\right) \mu_3 = 0 \quad (3.6.28)$$

olur. (3.6.28) eşitliğinin her iki tarafı $-k_1 k_2$ ile çarpılırsa,

$$\mu_3''' + \left[k_1 k_2 \left(\frac{1}{k_1 k_2}\right)' + k_2 \left(\frac{1}{k_2}\right)' \right] \mu_3'' + \left[k_1 k_2 \left(\frac{1}{k_1} \left(\frac{1}{k_2}\right)'\right)' + k_1^2 - k_2^2 \right] \mu_3' - k_1 k_2 \left(\frac{k_2}{k_1}\right)' \mu_3 = 0$$

elde edilir. Böylece, timelike B_2 -slant helis eğrisini karakterize eden, μ_3 e göre üçüncü mertebe, değişken katsayılı, lineer, homojen bir diferansiyel denklem elde edilmiş olur.

2.Durum: $k_3 \neq 0$ ve $\mu_3 = 0$ için (3.6.7) ve (3.6.8) eşitlikleri düzenlenirse,

$$-k_1 \mu_1 + \mu_2' = 0 \quad (3.6.28)$$

$$k_2 \mu_2 - k_3 \mu_4 = 0 \quad (3.6.29)$$

elde edilir. $\mu_4 = \text{sabit} = c$ olduğundan (3.6.29) eşitliğinden,

$$\mu_2 = \frac{k_3}{k_2} \mu_4 = \frac{k_3}{k_2} c \quad (3.6.30)$$

elde edilir. (3.6.30) eşitliğinin her iki tarafının s yay parametresine göre türevi alınır,

$$\mu_2' = \left(\frac{k_3}{k_2}\right)' c \quad (3.6.31)$$

elde edilir. (3.6.28) eşitliğinden $\mu_1 = \frac{1}{k_1} \mu_2'$ olur. Bu eşitlikte (3.6.31) eşitliği yerine yazılırsa,

$$\mu_1 = \frac{1}{k_1} \left(\frac{k_3}{k_2}\right)' c \quad (3.6.32)$$

elde edilir. Böylece, $U = \mu_1 T + \mu_2 N + \mu_3 B_1 + \mu_4 B_2$ vektörünün katsayı fonksiyonları

$$\mu_1 = \frac{1}{k_1} \left(\frac{k_3}{k_2}\right)' c, \mu_2 = \frac{k_3}{k_2} c, \mu_3 = 0, \mu_4 = c$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla $\vec{U} = c \left(\frac{1}{k_1} \left(\frac{k_3}{k_2}\right)' \vec{T}(s) + \frac{k_3}{k_2} \vec{N}(s) + \vec{B}_2(s)\right)$ olur.

3.Durum: $k_3 = 0$ ve $\mu_3 = 0$ için (3.6.8) eşitliği düzenlenirse,

$$k_2 \mu_2 = 0 \quad (3.6.33)$$

elde edilir. $\mu_2 = 0$ olması durumunda denklem elde edilemeyeceği açık olduğundan,

$k_2 = 0$ ve $\mu_2 \neq 0$ alınır (3.6.6) eşitliğinden,

$$\mu_2 = -\frac{1}{k_1} \mu_1' \quad (3.6.34)$$

elde edilir. (3.6.34) eşitliğinin her iki tarafının s yay parametresine göre türevi alınır,

$$\mu_2' = \left(-\frac{1}{k_1}\right)' \mu_1' + \left(-\frac{1}{k_1}\right) \mu_1'' \quad (3.6.35)$$

ve (3.6.28) den,

$$\mu_2' = k_1 \mu_1 \quad (3.6.36)$$

eşitlikleri elde edilir. (3.6.36) eşitliği, (3.6.35) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\left(\frac{1}{k_1}\right) \mu_1'' + \left(\frac{1}{k_1}\right)' \mu_1' + k_1 \mu_1 = 0 \quad (3.6.37)$$

elde edilir. (3.6.37) eşitliğinin her iki tarafı k_1 ile çarpılırsa,

$$\mu_1'' + k_1 \left(\frac{1}{k_1} \right)' \mu_1' + k_1^2 \mu_1 = 0$$

elde edilir. Böylece, timelike B_2 -slant helisi karakterize eden, μ_1 e göre ikinci mertebeden, değişken katsayılı, lineer, homojen bir diferansiyel denklem elde edilmiş olur. ■



4. $\mathbb{R}_2^4$ MINKOWSKI UZAYINDA TIMELIKE HELİS VE B_2 - SLANT HELİS EĞRİLERİNİN İNTEGRAL KARAKTERİZASYONLARI

Bu bölümde timelike helis ve B_2 -slant helis için integral dönüşümleri yardımıyla bulunan karakterizasyonlar ve bunlara bağlı sonuçlar ispatlarıyla verilmiştir.

Teorem 4.1: ($\mathbb{R}_2^4$ de Timelike Helislerin İntegral Karakterizasyonları)

$\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_2^4$ eğrisi s yay parametreli, N asli normal vektörü timelike olan, timelike bir eğri olsun. α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki hareketli Frenet çatısı $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}_1(s), \vec{B}_2(s)\}$ ve $k_1(s), k_2(s), k_3(s)$ eğrilikleri sıfırdan farklı, $\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \neq \text{sabit}$ olmak üzere; α eğrisinin bir timelike helis eğrisi olması için gerek ve yeter şart;

$$\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right)^2 + \frac{1}{k_3^2(s)} \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) \right]^2 = \text{sabit}.$$

eşitliğinin sağlanmasıdır [17].

İspat: $\Rightarrow$: $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_2^4$ eğrisi s yay parametresiyle verilen, $\vec{N}$ asli normal vektörü timelike olan, birim hızlı timelike bir eğri olsun. Bu durumda, α eğrisinin $\vec{T}$ teğet vektörü, bir spacelike sabit birim vektör $\vec{U}$ (veya timelike) ile sabit açı yapar. O halde;

$$\langle \vec{T}, \vec{U} \rangle = \|\vec{T}\| \|\vec{U}\| \sinh \theta = \text{sabit} \quad (\text{veya } \vec{U} \text{ timelike ise } \langle \vec{T}, \vec{U} \rangle = -\|\vec{T}\| \|\vec{U}\| \cosh \theta = \text{sabit}) \quad (4.1.1)$$

olur. (4.1.1) eşitliğinin her iki tarafının s yay parametresine göre türevi alınırsa;

$$\langle \vec{N}, \vec{U} \rangle = 0 \quad (4.1.2)$$

elde edilir. (4.1.2) eşitliğinden $\vec{N} \perp \vec{U}$ elde edilir. Burada $\vec{U}$ vektörü;

$$\vec{U} = u_1 \vec{T} + u_2 \vec{B}_1 + u_3 \vec{B}_2 \quad (4.1.3)$$

olsun. (4.1.3) eşitliğinin her iki tarafının s yay parametresine göre türevi alınırsa;

$$\vec{0} = u_1' \vec{T} + (-u_1 k_1(s) + u_2 k_2(s)) \vec{N} + (u_2' - u_3 k_3(s)) \vec{B}_1 + (u_2 k_3(s) + u_3') \vec{B}_2 \quad (4.1.4)$$

elde edilir. (4.1.4) eşitliğinde $\vec{T} \neq \vec{0}$, $\vec{N} \neq \vec{0}$, $\vec{B}_1 \neq \vec{0}$, $\vec{B}_2 \neq \vec{0}$ olduğundan,

$$\left. \begin{aligned} u_1' &= 0 \\ -u_1 k_1(s) + u_2 k_2(s) &= 0 \\ u_2' - u_3 k_3(s) &= 0 \\ u_2 k_3(s) + u_3' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.1.5)$$

sistemi elde edilir. (4.1.5) sisteminin 1. denkleminde,

$$u_1' = 0 \Rightarrow u_1 = c = \text{sabit} \quad (4.1.6)$$

ve (4.1.5) sisteminin 2.denkleminde ve (4.1.6) eşitliğinden,

$$u_2 = \frac{k_1(s)}{k_2(s)} \cdot u_1 = c \cdot \frac{k_1(s)}{k_2(s)} \quad (4.1.7)$$

elde edilir. (4.1.5) sisteminin 4.denkleminde,

$$u_2 = -\frac{1}{k_3(s)} \cdot u_3' = -\frac{1}{k_3(s)} \cdot \frac{du_3}{ds} \quad (4.1.8)$$

elde edilir. (4.1.7) ve (4.1.8) eşitliklerinden,

$$u_2 = \frac{k_1(s)}{k_2(s)} \cdot c = -\frac{1}{k_3(s)} \cdot \frac{du_3}{ds} \quad (4.1.9)$$

yazılabilir. (4.1.5) sisteminin 3.denkleminde ve (4.1.7) eşitliğinden,

$$u_3 = \frac{1}{k_3(s)} \cdot u_2' = \frac{c}{k_3(s)} \cdot \frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) \quad (4.1.10)$$

elde edilir. Ayrıca (4.1.5) sisteminin 3. denkleminde,

$$u_2' = u_3 k_3(s) \text{ olup,}$$

$$\frac{du_2}{ds} = u_3 k_3(s) \quad (4.1.11)$$

elde edilir. (4.1.9) eşitliği, (4.1.11) eşitliğinde yerine yazılıp düzenlenirse,

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{k_3(s)} \cdot \frac{du_3}{ds} \right) + u_3 k_3(s) = 0 \quad (4.1.12)$$

şeklinde ikinci mertebeden, değişken katsayılı, lineer, homojen denklem elde edilir.

Burada $t = \int_0^s k_3(s) ds$ dönüşümü uygulanırsa; $dt = k_3(s) ds \Rightarrow k_3(s) = \frac{dt}{ds}$ ve

$\frac{1}{k_3(s)} = \frac{ds}{dt}$ eşitlikleri elde edilir. Elde edilen bu eşitlikler (4.1.12) denkleminde yerine

yazılıp düzenlenirse,

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{du_3}{dt} \right) + \frac{dt}{ds} \cdot u_3 = 0 \quad (4.1.13)$$

elde edilir. (4.1.13) denkleminin her iki tarafı $\frac{ds}{dt}$ ile çarpılırsa,

$$\frac{d^2 u_3}{dt^2} + u_3 = 0 \quad (4.1.14)$$

şeklinde ikinci merteben, sabit katsayılı, lineer, homojen diferansiyel denklem elde edilir. (4.1.14) diferansiyel denkleminin çözümünden,

$$u_3 = \mu_1 \cos t + \mu_2 \sin t, \quad \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \quad (4.1.15)$$

elde edilir. Bu eşitlikte $t = \int_0^s k_3(s) ds$ dönüşümü yerine yazılırsa,

$$u_3 = \mu_1 \cos \left(\int_0^s k_3(s) ds \right) + \mu_2 \sin \left(\int_0^s k_3(s) ds \right) \quad (4.1.16)$$

bulunur. (4.1.10) ve (4.1.16) eşitliklerinden,

$$u_3 = \frac{c}{k_3(s)} \cdot \frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) = \mu_1 \cos \left(\int_0^s k_3(s) ds \right) + \mu_2 \sin \left(\int_0^s k_3(s) ds \right) \quad (4.1.17)$$

elde edilir. (4.1.16) eşitliğinin her iki tarafının s yay parametresine göre türevi alınır;

$$\frac{du_3}{ds} = -\mu_1 \sin \left(\int_0^s k_3(s) ds \right) \cdot k_3(s) + \mu_2 \cos \left(\int_0^s k_3(s) ds \right) \cdot k_3(s) \text{ elde edilir. Bu eşitlik}$$

(4.1.9) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$u_2 = \frac{-1}{k_3(s)} \left\{ -\mu_1 \sin \left(\int_0^s k_3(s) ds \right) \cdot k_3(s) + \mu_2 \cos \left(\int_0^s k_3(s) ds \right) \cdot k_3(s) \right\}$$

$$u_2 = -c \cdot \frac{k_1(s)}{k_2(s)} = \mu_1 \sin \left(\int_0^s k_3(s) ds \right) - \mu_2 \cos \left(\int_0^s k_3(s) ds \right) \quad (4.1.18)$$

bulunur. Şimdi elde edilen (4.1.17) ve (4.1.18) denklemlerini göz önüne alıp bu denklemler yardımıyla $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ sayılarını bulalım.

(4.1.17) eşitliği $\cos \left(\int_0^s k_3(s) ds \right)$ ve (4.1.18) eşitliği $\sin \left(\int_0^s k_3(s) ds \right)$ ile çarpılıp, taraf

tarafa toplanırsa,

$$\mu_1 = \frac{c}{k_3(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) \cos \left(\int_0^s k_3(s) ds \right) + c \frac{k_1(s)}{k_2(s)} \cdot \sin \left(\int_0^s k_3(s) ds \right) \quad (4.1.19)$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.1.17) eşitliği $\sin\left(\int_0^s k_3(s) ds\right)$ ve (4.1.18) eşitliği

$-\cos\left(\int_0^s k_3(s) ds\right)$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa,

$$\mu_2 = -c \frac{k_1(s)}{k_2(s)} \cdot \cos\left(\int_0^s k_3(s) ds\right) + \frac{c}{k_3(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) \sin\left(\int_0^s k_3(s) ds\right) \quad (4.1.20)$$

elde edilir. $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ olduğundan $\mu_1^2 + \mu_2^2 \in \mathbb{R}$ olur. Bulunan (4.1.19) ve (4.1.20) eşitliklerinin her iki tarafının karesi alınırsa,

$$\begin{aligned} \mu_1^2 = & \left[\frac{c}{k_3(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) \right]^2 \cos^2\left(\int_0^s k_3(s) ds\right) + \left[c \frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right]^2 \sin^2\left(\int_0^s k_3(s) ds\right) \\ & + 2 \cdot \frac{c^2}{k_3(s)} \frac{k_1(s)}{k_2(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) \cos\left(\int_0^s k_3(s) ds\right) \sin\left(\int_0^s k_3(s) ds\right) \end{aligned} \quad (4.1.21)$$

$$\begin{aligned} \mu_2^2 = & \left[\frac{c}{k_3(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) \right]^2 \sin^2\left(\int_0^s k_3(s) ds\right) + \left[c \frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right]^2 \cos^2\left(\int_0^s k_3(s) ds\right) \\ & - 2 \cdot \frac{c^2}{k_3(s)} \frac{k_1(s)}{k_2(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) \cos\left(\int_0^s k_3(s) ds\right) \sin\left(\int_0^s k_3(s) ds\right) \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

elde edilir. (4.1.21) ve (4.1.22) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 = c^2 \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right)^2 + \frac{c^2}{k_3^2(s)} \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) \right]^2 = \text{sabit} \quad (4.1.23)$$

elde edilir. Ayrıca c^2 sabit olduğundan,

$$\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right)^2 + \frac{1}{k_3^2(s)} \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) \right]^2 = \text{sabit} \quad (4.1.24)$$

bulunur.

$$\Leftarrow : \text{Tersine} \quad \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right)^2 + \frac{1}{k_3^2(s)} \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) \right]^2 = \text{sabit olsun.}$$

$$\text{Şimdi } \vec{U} = \left[-\vec{T} - \frac{k_1(s)}{k_2(s)} \vec{B}_1 - \frac{1}{k_3(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) \vec{B}_2 \right] \text{Sinh } \theta \quad (4.1.25)$$

biçiminde bir vektör olarak alınırsa, bu vektör için $\langle \vec{U}, \vec{T} \rangle = \text{Sinh } \theta = -u_1$ sabittir.

$$\frac{d\vec{U}}{ds} = \vec{0} \quad (4.1.26)$$

olduğu gösterilirse ispat tamamlanmış olur. (4.1.25) eşitliğinin her iki tarafının s yay parametresine göre türevi alınıp Frenet türev formülleri yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{U}}{ds} = & \underbrace{\left[k_1(s) - \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) k_2(s) \right]}_0 \vec{N} + \underbrace{\left[-\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right)' + \left(\frac{1}{k_3(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) \right) (k_3(s)) \right]}_0 \vec{B}_1 \\ & + \left[-\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) k_3(s) - \left[\frac{1}{k_3(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) \right]' \right] \vec{B}_2 \end{aligned} \quad (4.1.27)$$

elde edilir. Ayrıca, (4.1.24) eşitliğinin her iki tarafının s yay parametresine göre türevi alınır,

$$\left[\frac{1}{k_3(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) \right]' = -\frac{k_1(s)k_3(s)}{k_2(s)} \quad (4.1.28)$$

bulunur. (4.1.28) eşitliği, (4.1.27) eşitliğinde yerine yazıldığında $\frac{d\vec{U}}{ds} = \vec{0}$ elde edilir.

Buradan $\vec{U}$ vektörünün sabit vektör olduğu sonucuna varılır. Dolayısıyla α eğrisi timelike bir helis eğrisidir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Sonuç 4.2: $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_2^4$ eğrisi s yay parametrelili timelike eğri ve $\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \neq \text{sabit}$

olsun. $\alpha(s)$ eğrisinin timelike bir helis eğrisi olması için;

$$k_3(s) \frac{k_1(s)}{k_2(s)} + \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{k_3(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) \right] = 0 \quad (4.2.1)$$

eşitliğinin sağlanması gerekir. Bu denklem, $\frac{k_1(s)}{k_2(s)}$ 'e bağlı ikinci mertebeden,

değişken katsayılı, lineer, homojen diferansiyel denklemdir [17].

İspat: $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_2^4$ eğrisi timelike bir helis eğrisi olsun. O halde (Teorem 4.1) de verilen eşitliğin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınır;

$$\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right) \frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right) + \left(\frac{1}{k_3(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\right) \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{k_3(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\right) = 0 \quad (4.2.2)$$

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right) \left\{ \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right) + \frac{1}{k_3(s)} \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{k_3(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\right] \right\} = 0 \quad (4.2.3)$$

olur. $\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \neq \text{sabit}$ olduğundan bu durumda $\frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right) \neq 0$ olacağından

$$\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right) + \frac{1}{k_3(s)} \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{k_3(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\right] = 0 \quad (4.2.4)$$

elde edilir. (4.2.4) eşitliğinin her iki tarafı $k_3(s)$ ile çarpılırsa, (4.2.1) elde edilir.

Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 4.3: $\alpha = \alpha(s): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_2^4$ birim hızlı timelike bir eğri, $\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \neq \text{sabit}$

olsun. $\alpha(s)$ timelike bir helis eğrisidir ancak ve ancak,

$$f(s) = -\frac{1}{k_3(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right) = m_1 \sin\left(\int_0^s k_3(s) ds\right) - m_2 \cos\left(\int_0^s k_3(s) ds\right),$$

$$f'(s) = \frac{k_1(s)k_3(s)}{k_2(s)}$$

biçiminde diferansiyellenebilir bir $f(s)$ fonksiyonu vardır [17].

İspat:

$\Rightarrow : \alpha = \alpha(s): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_2^4$ eğrisi birim hızlı, bir timelike helis eğrisi, $\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \neq \text{sabit}$

olsun. (4.2.1) denklemi $\frac{k_1(s)}{k_2(s)}$ 'e bağlı ikinci mertebeden, değişken katsayılı, lineer,

homojen diferansiyel denklemdir. (4.2.1) diferansiyel denkleminde $t = \int_0^s k_3(s) ds$

değişken değiştirme uygulanırsa,

$$dt = k_3(s) ds \Rightarrow \frac{dt}{ds} = k_3(s) \text{ ve } \frac{1}{k_3(s)} = \frac{ds}{dt} \quad (4.3.1)$$

elde edilir. (4.3.1) eşitlikleri, (4.2.1) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$\frac{dt}{ds} \frac{k_1(s)}{k_2(s)} + \frac{d}{ds} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) \right] = 0 \quad (4.3.2)$$

elde edilir. (4.3.2) eşitliğinin her iki tarafı $\frac{ds}{dt}$ ile çarpılırsa,

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) + \frac{k_1(s)}{k_2(s)} = 0 \quad (4.3.3)$$

şeklinde $\frac{k_1(s)}{k_2(s)}$ ye bağlı ikinci mertebeden, sabit katsayılı, lineer, homojen

diferansiyel denklem elde edilir. Bu (4.3.3) denklemi çözülürse,

$$\frac{k_1(s)}{k_2(s)} = m_1 \cos t + m_2 \sin t = m_1 \cos \left(\int_0^s k_3(s) ds \right) + m_2 \sin \left(\int_0^s k_3(s) ds \right) \quad (4.3.4)$$

bulunur, burada $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ dir. (4.2.2) eşitliğinden,

$$\frac{1}{k_3(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) = - \frac{\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) \frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right)}{\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{k_3(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) \right)} \quad (4.3.5)$$

elde edilir. Burada,

$$f(s) = - \frac{1}{k_3(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) = \frac{\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) \frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right)}{\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{k_3(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) \right)} \quad (4.3.6)$$

tanımlayalım. (4.3.4) ve (4.3.6) denklemlerinden;

$$\begin{aligned} f(s) &= - \frac{1}{k_3(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) = - \frac{1}{k_3(s)} \frac{d}{ds} \left[m_1 \cos \left(\int_0^s k_3(s) ds \right) + m_2 \sin \left(\int_0^s k_3(s) ds \right) \right] \\ f(s) &= m_1 \sin \left(\int_0^s k_3(s) ds \right) - m_2 \cos \left(\int_0^s k_3(s) ds \right) \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

(4.2.2) ve (4.3.6) eşitliklerinden;

$$\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) \frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) + \underbrace{\left(\frac{1}{k_3(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) \right) \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{k_3(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) \right)}_{-f(s)} = 0$$

$$f'(s) = \frac{k_1(s)k_3(s)}{k_2(s)} \quad (4.3.8)$$

elde edilir.

$\Leftarrow$: Tersine;

$$f(s) = -\frac{1}{k_3(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) = -\frac{1}{k_3(s)} \frac{d}{ds} \left[m_1 \cos \left(\int_0^s k_3(s) ds \right) + m_2 \sin \left(\int_0^s k_3(s) ds \right) \right]$$

ve $f'(s) = \frac{k_1(s)k_3(s)}{k_2(s)}$ eşitliklerinden,

$$\varphi(s) = \frac{d}{ds} \left[\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right)^2 + \frac{1}{k_3^2(s)} \left\{ \frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) \right\}^2 \right] = \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{k_3^2(s)} (f'(s))^2 + (f(s))^2 \right] \quad (4.3.9)$$

$$\varphi(s) = 2f'(s)f''(s) \frac{1}{k_3^2(s)} - \frac{2k_3'(s)}{k_3^3(s)} (f'(s))^2 + 2f(s)f'(s) \quad (4.3.10)$$

olacak şekilde bir $\varphi(s)$ fonksiyonu tanımlansın. (4.3.8) eşitliğinin her iki tarafının s yay parametresine göre türevi alınır,

$$f''(s) = \frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) k_3(s) + \frac{k_1(s)}{k_2(s)} \frac{d}{ds} (k_3(s)) \quad (4.3.11)$$

elde edilir. (4.3.8) ve (4.3.11) denklemlerinden,

$$f'(s)f''(s) = k_3^2(s) \frac{k_1(s)}{k_2(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) + \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right)^2 k_3(s) \frac{d}{ds} (k_3(s)) \quad (4.3.12)$$

(4.3.6) ve (4.3.8) denklemlerinden;

$$f(s)f'(s) = -\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) \quad (4.3.13)$$

bulunur. (4.3.6), (4.3.12) ve (4.3.13) eşitlikleri (4.3.10) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \varphi(s) = & \frac{2}{k_3^2(s)} \left[k_3^2(s) \frac{k_1(s)}{k_2(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) + \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right)^2 k_3(s) \frac{d}{ds} (k_3(s)) \right] \\ & - \frac{2}{k_3^3(s)} \frac{d}{ds} (k_3(s)) \left[\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right)^2 k_3^2(s) \right] - 2 \frac{k_1(s)}{k_2(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) \end{aligned}$$

olur. Buradan $\varphi(s) = 0$ bulunur. Dolayısıyla

$$\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)^2 + \frac{1}{k_3^2(s)} \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) \right]^2 = \text{sabit}$$

olduğu bir kez daha ispatlanmış olur. ■

Teorem 4.4: $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_2^4$ eğrisi s parametrelili, N asli birim vektörü timelike olan, timelike bir eğri olsun. α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki hareketli Frenet çatısı $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}_1(s), \vec{B}_2(s)\}$ ve k_1, k_2, k_3 ve eğrilikleri sıfırdan farklı, $\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \neq \text{sabit}$

olmak üzere, α eğrisinin bir timelike B_2 – slant helis olması için gerek ve yeter şart;

$$\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)^2 + \frac{1}{k_1^2(s)} \left\{ \frac{d}{ds} \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) \right\}^2 = \text{sabit},$$

eşitliğinin sağlanmasıdır [17].

İspat:

$\Rightarrow: \alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_2^4$ eğrisi s parametrelili, N asli birim vektörü timelike olan, timelike B_2 – slant helis eğrisi olsun. Bu durumda α eğrisinin spacelike ikinci binormal vektörü B_2 , spacelike sabit birim vektör U (veya timelike) ile sabit açı yapar. B_2 ile U vektörlerinin gerdiği düzlem spacelike ise,

$$\langle \vec{B}_2, \vec{U} \rangle = \|\vec{B}_2\| \cdot \|\vec{U}\| \cdot \cos \theta = \text{sabit} \quad (4.4.1)$$

$$(\text{veya } \vec{U} \text{ timelike ise } \langle \vec{B}_2, \vec{U} \rangle = \|\vec{B}_2\| \|\vec{U}\| \sinh \theta = \text{sabit})$$

B_2 ile U vektörlerinin gerdiği düzlem timelike ise (Teorem 2.2.20) gereği $\langle \vec{B}_2, \vec{U} \rangle =$ sabit eşitliği bozulmaz.

(4.4.1) eşitliğinin her iki tarafının s yay parametresine göre türevi alınıp Frenet türev formüllerinden faydalanılırsa,

$$\langle \vec{B}_1, \vec{U} \rangle = 0, \quad (4.4.2)$$

elde edilir. (4.4.2) eşitliğinden $\vec{B}_1 \perp \vec{U}$ olur. Burada $\vec{U}$ vektörü;

$$\vec{U} = u_1 \vec{T} + u_2 \vec{N} + u_3 \vec{B}_2, \quad (4.4.3)$$

olsun. (4.4.3) eşitliğinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınır,

$$\vec{0} = u'_1 \vec{T} + u_1 \vec{T}' + u'_2 \vec{N} + u_2 \vec{N}' + u'_3 \vec{B}_2 + u_3 \vec{B}_2', \quad (4.4.4)$$

$$\vec{0} = u'_1 \vec{T} + u_1 \left(-k_1(s) \vec{N} \right) + u'_2 \vec{N} + u_2 \left(k_1(s) \vec{T} + k_2(s) \vec{B}_1 \right) + u'_3 \vec{B}_2 + u_3 \left(-k_3(s) \vec{B}_1 \right), \quad (4.4.5)$$

$$\vec{0} = \vec{T} \left(u'_1 + u_2 k_1(s) \right) + \vec{N} \left(-u_1 k_1(s) + u'_2 \right) + \vec{B}_1 \left(u_2 k_2(s) - u_3 k_3(s) \right) + \vec{B}_2 u'_3. \quad (4.4.6)$$

elde edilir. (4.4.6) eşitliğinde $\vec{T} \neq \vec{0}$, $\vec{N} \neq \vec{0}$, $\vec{B}_1 \neq \vec{0}$, $\vec{B}_2 \neq \vec{0}$ olduğundan;

$$\left. \begin{aligned} u'_1 + u_2 k_1(s) &= 0, \\ -u_1 k_1(s) + u'_2 &= 0, \\ u_2 k_2(s) - u_3 k_3(s) &= 0, \\ u'_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.4.7)$$

sistemi bulunur. (4.4.7) sisteminin 4. denkleminde, $u'_3 = 0 \Rightarrow u_3 = c = \text{sabit}$ bulunur. (4.4.7) sisteminin 3. denkleminde;

$$\begin{aligned} u_2 k_2(s) - u_3 k_3(s) &= 0 \Rightarrow u_2 = \frac{k_3(s)}{k_2(s)} u_3, \\ &\Rightarrow u_2 = \frac{k_3(s)}{k_2(s)} c, \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

bulunur. (4.4.7) sisteminin 1. denkleminde;

$$\begin{aligned} u'_1 + u_2 k_1(s) &= 0 \Rightarrow u_2 = -\frac{1}{k_1(s)} u'_1, \\ &\Rightarrow u_2 = -\frac{1}{k_1(s)} \frac{du_1}{ds}, \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

elde edilir. (4.4.8) ve (4.4.9) eşitliklerinden;

$$u_2 = \frac{k_3(s)}{k_2(s)} c = -\frac{1}{k_1(s)} \frac{du_1}{ds}, \quad (4.4.10)$$

elde edilir. (4.4.7) sisteminin 2. denkleminde;

$$\begin{aligned} -u_1 k_1(s) + u'_2 &= 0 \Rightarrow u_1 = \frac{1}{k_1(s)} u'_2, \\ &\Rightarrow u_1 = \frac{1}{k_1(s)} \frac{du_2}{ds}, \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

elde edilir. (4.4.8) eşitliği, (4.4.11)'de yazılırsa;

$$u_1 = \frac{1}{k_1(s)} \frac{du_2}{ds} = \frac{1}{k_1(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} c \right) = \frac{c}{k_1(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right), \quad (4.4.12)$$

bulunur. (4.4.7) sisteminin 1. denkleminde;

$$u_1' + u_2 k_1(s) = 0 \Rightarrow u_1' = -u_2 k_1(s) \Rightarrow \frac{du_1}{ds} = -u_2 k_1(s)$$

elde edilir. (4.4.11) eşitliği burada yazılırsa;

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{k_1(s)} \frac{du_2}{ds} \right) = -u_2 k_1(s) \quad (4.4.13)$$

ve (4.4.13) denklemi düzenlendiğinde,

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{k_1(s)} \frac{du_2}{ds} \right) + u_2 k_1(s) = 0, \quad (4.4.14)$$

biçiminde u_2 'ye bağlı ikinci mertebeden, değişken katsayılı, lineer homojen

diferansiyel denklem elde edilir. Şimdi $t = \int_0^s k_1(s) ds$ alınarak değişken değişimi

uygulanırsa $dt = k_1(s) ds$, $k_1(s) = \frac{dt}{ds}$ ve $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{k_1(s)}$ eşitlikleri elde edilir. Elde edilen

bu eşitlikler (4.4.14) denkleminde yazılırsa; $\frac{d}{ds} \left(\frac{ds}{dt} \frac{du_2}{ds} \right) + u_2 \frac{dt}{ds} = 0$ elde edilir. Her

iki taraf $\frac{ds}{dt}$ ile çarpılırsa;

$$\frac{d^2 u_2}{dt^2} + u_2 = 0 \quad (4.4.15)$$

olur. Bu u_2 'ye bağlı ikinci mertebeden, sabit katsayılı, lineer, homojen diferansiyel denklemdir. (4.4.15) denkleminin çözümünden $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$u_2 = \omega_1 \cos t + \omega_2 \sin t \quad (4.4.16)$$

elde edilir. $t = \int_0^s k_1(s) ds$ ve $u_2 = \frac{k_3(s)}{k_2(s)} c$ eşitlikleri (4.4.16)'da yerine yazılırsa,

$$u_2 = \left(c \frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) = \omega_1 \cos \left(\int_0^s k_1(s) ds \right) + \omega_2 \sin \left(\int_0^s k_1(s) ds \right) \quad (4.4.17)$$

elde edilir. (4.4.17) eşitliği (4.4.11) de yerine yazılırsa;

$$u_1 = -\omega_1 \sin \left(\int_0^s k_1(s) ds \right) + \omega_2 \cos \left(\int_0^s k_1(s) ds \right) \quad (4.4.18)$$

olur. (4.4.12) ve (4.4.18) eşitliklerinden,

$$u_1 = \frac{c}{k_1(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) = -\omega_1 \sin \left(\int_0^s k_1(s) ds \right) + \omega_2 \cos \left(\int_0^s k_1(s) ds \right) \quad (4.4.19)$$

yazılır. Şimdi (4.4.17) ve (4.4.19) denklemlerinden faydalanarak $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$ sayılarını

elde edelim. Bunun için (4.4.17) denkleminin her iki tarafı $\cos\left(\int_0^s k_1(s) ds\right)$, (4.4.19)

denkleminin her iki tarafı $-\sin\left(\int_0^s k_1(s) ds\right)$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa,

$$\omega_1 = c \frac{k_3(s)}{k_2(s)} \cos\left(\int_0^s k_1(s) ds\right) - \frac{c}{k_1(s)} \frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right) \sin\left(\int_0^s k_1(s) ds\right) \quad (4.4.20)$$

elde edilir. Benzer biçimde; (4.4.17) denkleminin her iki tarafı $\sin\left(\int_0^s k_1(s) ds\right)$,

(4.4.19) denkleminin her iki tarafı $\cos\left(\int_0^s k_1(s) ds\right)$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa,

$$\omega_2 = \frac{c}{k_1(s)} \frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right) \cos\left(\int_0^s k_1(s) ds\right) + c \frac{k_3(s)}{k_2(s)} \sin\left(\int_0^s k_1(s) ds\right) \quad (4.4.21)$$

bulunur. $A = \omega_1 + \omega_2$, $B = \omega_1 - \omega_2$ olsun. $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$ olduğundan $A, B \in \mathbb{R}$ dir.

Buradan $A^2 + B^2 \in \mathbb{R}$ olduğunu gösterelim.

$$A^2 + B^2 = (\omega_1 + \omega_2)^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2 = 2\omega_1^2 + 2\omega_2^2$$

olup (4.4.20) ve (4.4.21) eşitlikleri yerine yazılırsa,

$$A^2 + B^2 = 2c^2 \left[\left(\frac{1}{k_1(s)} \frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right) \right)^2 + \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right)^2 \right] = \text{sabit} \quad (4.4.22)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right)^2 + \frac{1}{k_1^2(s)} \left(\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right) \right)^2 = \text{sabit} \quad (4.4.23)$$

olur.

$\Leftarrow$: Tersine; $\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right)^2 + \frac{1}{k_1^2(s)} \left(\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right) \right)^2 = \text{sabit}$ olsun. $\alpha = \alpha(s)$ timelike birim

hızlı eğrisinin $\overrightarrow{B_2}$ ikinci binormal vektörü, sabit doğrultulu, sabit bir spacelike $\overrightarrow{U}$ vektör ile sabit açı yaparsa, $\alpha = \alpha(s)$ timelike eğrisi B_2 -slant helis olur. Şimdi,

$$\overrightarrow{U} = \left\{ \frac{1}{k_1(s)} \frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right) \overrightarrow{T} + \frac{k_3(s)}{k_2(s)} \overrightarrow{N} + \overrightarrow{B_2} \right\} \cos \theta, \quad (4.4.24)$$

biçiminde bir vektör alalım. $\langle \vec{U}, \vec{B}_2 \rangle = \cos \theta = \text{sabittir.}$ $\frac{d\vec{U}}{ds} = \vec{0}$ olduğu gösterilirse

ispat tamamlanır. (4.4.24) eşitliğinin s yay parametresine göre türevi alınır;

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{U}}{ds} = & \left\{ \left(\frac{1}{k_1(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) \right)' \vec{T} + \left(\frac{1}{k_1(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) \right) \vec{T}' \right\} \cos \theta \\ & + \left\{ \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right)' \vec{N} + \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) \vec{N}' + \vec{B}_2' \right\} \cos \theta \end{aligned}$$

bulunur. Frenet türev formüllerinden faydalanılarak,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{U}}{ds} = & \left\{ \left(\frac{1}{k_1(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) \right)' \vec{T} + \left(\frac{1}{k_1(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) \right) (-k_1(s) \vec{N}) + \frac{d}{ds} \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) \vec{N} \right. \\ & \left. + \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) (k_1(s) \vec{T} + k_2(s) \vec{B}_1) + (-k_3(s) \vec{B}_1) \right\} \cos \theta \end{aligned}$$

elde edilir ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\frac{d\vec{U}}{ds} = \vec{T} \left\{ \left(\frac{1}{k_1(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) \right)' + \frac{k_3(s)k_1(s)}{k_2(s)} \right\} \cos \theta, \quad (4.4.25)$$

bulunur. $\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right)^2 + \frac{1}{k_1^2(s)} \left(\frac{d}{ds} \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) \right)^2 = \text{sabit}$ olduğunu kabul ettiğimiz eşitliğin

iki tarafının s yay parametresine göre türevi alınır,

$$\left[\frac{1}{k_1(s)} \left(\frac{d}{ds} \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) \right) \right]' = - \frac{\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) \frac{d}{ds} \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right)}{\frac{1}{k_1(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right)} = - \frac{k_1(s)k_3(s)}{k_2(s)} \quad (4.4.26)$$

elde edilir. (4.4.26) eşitliği (4.4.25) eşitliğinde yazılırsa,

$$\frac{d\vec{U}}{ds} = \vec{0} \quad (4.4.27)$$

bulunur. Dolayısıyla $\alpha = \alpha(s)$ timelike eğrisi B_2 – slant helis olur. ■

Sonuç 4.5 : $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_2^4$ eğrisi s yay parametreli timelike eğri, $\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \neq \text{sabit}$

olsun. $\alpha = \alpha(s)$ timelike eğrisinin B_2 -slant helis olması için gerek ve yeter şart;

$$k_1(s) \frac{k_3(s)}{k_2(s)} + \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{k_1(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) \right] = 0, \quad (4.5.1)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır [17].

İspat : $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_2^4$ timelike B_2 -slant helis eğrisi, $\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \neq \text{sabit}$ olsun. O halde

(Teorem 4.3) gereği,

$$\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right)^2 + \frac{1}{k_1^2(s)} \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) \right]^2 = \text{sabit},$$

eşitliği vardır. Bu eşitliğin her iki tarafının s yay parametresine göre türevi alındığında

$$\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) \frac{d}{ds} \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) + \left(\frac{1}{k_1(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) \right) \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{k_1(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) \right) = 0, \quad (4.5.2)$$

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) \left\{ \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) + \frac{1}{k_1(s)} \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{k_1(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) \right] \right\} = 0 \quad (4.5.3)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. $\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \neq \text{sabit}$ olup, $\frac{d}{ds} \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) \neq 0$ olacağından

$$\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) + \frac{1}{k_1(s)} \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{k_1(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) \right] = 0 \quad (4.5.4)$$

elde edilir. (4.5.4) eşitliği $k_1(s)$ ile çarpılırsa;

$$\frac{k_1(s)k_3(s)}{k_2(s)} + \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{k_1(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) \right] = 0 \quad (4.5.5)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 4.6: $\alpha = \alpha(s): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_2^4$ eğrisi birim hızlı timelike bir eğri,

$\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \neq \text{sabit}$ olsun. $\alpha(s)$ eğrisinin timelike B_2 -slant helis eğrisi olması için gerek

ve yeter şart;

$$f(s) = -\frac{1}{k_1(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) = \ell_1 \sin \left(\int_0^s k_1(s) ds \right) - \ell_2 \cos \left(\int_0^s k_1(s) ds \right),$$

$$f'(s) = \frac{k_1(s)k_3(s)}{k_2(s)},$$

biçiminde diferansiyellenebilir bir $f(s)$ fonksiyonunun olmasıdır [17].

İspat :

$\Rightarrow$: $\alpha = \alpha(s) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ eğrisi birim hızlı, bir timelike B_2 -slant helis eğrisi olsun. O halde (Sonuç 4.5) gereğince

$$\frac{k_1(s)k_3(s)}{k_2(s)} + \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{k_1(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) \right] = 0,$$

eşitliği vardır. Bu denklem $\frac{k_3(s)}{k_2(s)}$ 'e bağlı ikinci mertebeden, değişken katsayılı, lineer,

homojen diferansiyel denklemdir. Burada $t = \int_0^s k_1(s) ds$ değişken değiştirme uygulanırsa,

$$dt = k_1(s) ds \Rightarrow \frac{dt}{ds} = k_1(s), \quad \frac{1}{k_1(s)} = \frac{ds}{dt}, \quad (4.6.1)$$

elde edilir. (4.6.1) eşitlikleri (4.5.5) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\frac{dt}{ds} \frac{k_3(s)}{k_2(s)} + \frac{d}{ds} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) \right] = 0 \quad (4.6.2)$$

bulunur. (4.6.2) eşitliğinin her iki tarafı $\frac{ds}{dt}$ ile çarpılırsa,

$$\frac{k_3(s)}{k_2(s)} + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) = 0 \quad (4.6.3)$$

biçiminde $\frac{k_3(s)}{k_2(s)}$ 'ye bağlı ikinci mertebeden, sabit katsayılı, lineer, homojen

diferansiyel denklem elde edilir. Bu diferansiyel denklem çözülmüşse,

$$\frac{k_3(s)}{k_2(s)} = \ell_1 \cos t + \ell_2 \sin t = \ell_1 \cos \left(\int_0^s k_1(s) ds \right) + \ell_2 \sin \left(\int_0^s k_1(s) ds \right), \quad (4.6.4)$$

bulunur. Burada $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ dir. (4.5.2) denklemden;

$$\frac{1}{k_1(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) = - \frac{\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) \frac{d}{ds} \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right)}{\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{k_1(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) \right)} \quad (4.6.5)$$

elde edilir. Bu (4.6.5) eşitliğinde,

$$f(s) = - \frac{1}{k_1(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) = \frac{\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) \frac{d}{ds} \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right)}{\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{k_1(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) \right)} \quad (4.6.6)$$

olacak şekilde $f(s)$ fonksiyonu tanımlansın. (4.6.4) eşitliği (4.6.6) denkleminde yerine yazılırsa,

$$f(s) = \ell_1 \sin \left(\int_0^s k_1(s) ds \right) - \ell_2 \cos \left(\int_0^s k_1(s) ds \right), \quad (4.6.7)$$

olur. (4.6.6) eşitliği (4.5.2) eşitliğinde yazılırsa;

$$\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) \frac{d}{ds} \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) + \left(\frac{1}{k_1(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) \right) \underbrace{\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{k_1(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) \right)}_{-f(s)} = 0,$$

$$f'(s) = \frac{k_1(s)k_3(s)}{k_2(s)}, \quad (4.6.8)$$

elde edilir.

$\Leftarrow$: Tersine;

$$f(s) = - \frac{1}{k_1(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) = - \frac{1}{k_1(s)} \frac{d}{ds} \left[\ell_1 \cos \left(\int_0^s k_1(s) ds \right) + \ell_2 \sin \left(\int_0^s k_1(s) ds \right) \right]$$

ve $f'(s) = \frac{k_1(s)k_3(s)}{k_2(s)}$ olsun.

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= \frac{d}{ds} \left[\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right)^2 + \frac{1}{k_1^2(s)} \left\{ \frac{d}{ds} \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) \right\}^2 \right] \\ &= \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{k_1^2(s)} (f'(s))^2 + (f(s))^2 \right] \end{aligned} \quad (4.6.9)$$

biçiminde bir $\varphi(s)$ fonksiyonu tanımlayalım. Buradan,

$$\varphi(s) = 2f'(s)f''(s)\frac{1}{k_1^2(s)} - \frac{2k_1'(s)}{k_1^3(s)}(f'(s))^2 + 2f(s)f'(s) \quad (4.6.10)$$

olur. (4.6.8) eşitliğinin her iki tarafının s yay parametresine göre türevi alınır,

$$f''(s) = \frac{d}{ds} \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) k_1(s) + \frac{k_3(s)}{k_2(s)} \frac{d}{ds} (k_1(s)) \quad (4.6.11)$$

elde edilir. (4.6.8) ve (4.6.11) denklemlerinden;

$$f'(s)f''(s) = k_1^2(s) \frac{k_3(s)}{k_2(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) + \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right)^2 k_1(s) \frac{d}{ds} (k_1(s)) \quad (4.6.12)$$

bulunur. (4.6.5) ve (4.6.8) denklemlerinden,

$$f(s)f'(s) = -\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) \quad (4.6.13)$$

bulunur. (4.6.8), (4.6.12) ve (4.6.13) eşitlikleri (4.6.10) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \varphi(s) = & \frac{2}{k_1^2(s)} \left[k_1^2(s) \frac{k_3(s)}{k_2(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) + \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right)^2 k_1(s) \frac{d}{ds} (k_1(s)) \right] \\ & - \frac{2}{k_1^3(s)} \frac{d}{ds} (k_1(s)) \left[\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right)^2 k_1^2(s) \right] - 2 \frac{k_3(s)}{k_2(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right) \end{aligned}$$

olur. Buradan $\varphi(s) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla

$$\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right)^2 + \frac{1}{k_3^2(s)} \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) \right]^2 = \text{sabit}$$

olduğu bir kez daha ispatlanmış olur. ■

SONUÇ

Bu tez çalışmasında $\mathbb{R}_2^4$ Minkowski uzayında, Frenet çatısına göre timelike helis, slant helis, B_1 -slant helis, B_2 -slant helis eğrileri detaylı bir şekilde incelenip, bu eğrilerle ilgili temel teoremler ispatlarıyla beraber verilmiştir. Ayrıca $\mathbb{R}_2^4$ de timelike slant helis eğrisinin, N timelike asli normal birim vektörünün sabit açı yaptığı $\vec{U}$ sabit birim vektörünü belirleyen katsayı fonksiyonları eğriliklere bağlı hesaplanarak $\vec{U}$ vektörü elde edilmiştir. Daha sonra $\mathbb{R}_2^4$ Minkowski uzayında timelike helis eğrileri ve B_2 -slant helis eğrileri için integral karakterizasyonları elde edilmiş ve ispatlarıyla birlikte verilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Kaya, O. Minkowski 3-Uzayında slant regle yüzeylerin geometrileri ve karakterizasyonları. Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Manisa, 2020, 163 s. (Doktora Tezi)
- [2] Barros, M. General helices and a theorem of lancret. Proceedings of American Mathematical Society. 1997, 125, 1503-1509.
- [3] Struik, D.J. Lectures on classical differential geometry, second edition, Addison-Wesley Press, inc., Massachusetts, 1961.
- [4] Ali, A.T. Position vectors of general helices in Euclidean 3-space. Bulletin of Mathematical Analysis and Applications. 2010, 3(2), 198-205.
- [5] Ali, A.T. Position vectors of spacelike general helices in Minkowski 3-space. Non-linear Analysis: Theory, Methods & Applications. 2010, 73(4), 1118-1126.
- [6] Izumiya, S., Takeuchi, N. New special curves and developable surfaces. Turk. J. Math., 2004, 28, 153-163.
- [7] Kula, L., Yaylı, Y. On slant helix and its spherical indicatrix. Applied Mathematics and Computatiton .2005,169,600-607.
- [8] Ali, A.T. Position vectors of slant helices in Euclidean 3-space. Journal of The Egyptian Mathematical Society. 2012, 20(1), 1-6.
- [9] Önder, M., Kazaz, M., Kocayiğit, H., Kılıç, O. (2008). B2 -Slant helix in Euclidean 4-space. Int. J. Contemp. Math. Sciences. 3. 1433-1440.
- [10] Magden, A. On the curves of constant slope. YTU Fen Bilimleri Dergisi, 4, 1993, 103-109.
- [11] Kocayigit, H. Önder, M. Timelike curves of constant slope in Minkowski space E_1^4 . BU/JST, 1, 2007, 311-318.
- [12] Kocayiğit, H., Yaz, N., Camci, Ç., Hacısalıhoğlu, H.H. On the explicit characterization of spherical curves in 3-dimensional Euclidean space. Journal of InverseandIII-posed Problems, 2003.
- [13] Ali, T.A., Lopez R. Slant helices in Euclidean 4-space E^4 . arXiv: 0901.3324, 2009.
- [14] Kocayiğit, H., Önder, M., Kazaz, M. Spacelike helices in Minkowski 4-space E_1^4 . Anna Del Università Di Ferrara. 2010, Vol.56 IS 2 pp 335-343.

- [15] Önder, M., Kocayigit, H., Kazaz, M. Spacelike B_2 -slant helix in Minkowski 4-Space. 2010, arXiv: 1003.2045v1[Math.DG].
- [16] Aydın T.A., Kocayigit H. Timelike Helices in the Semi-Euclidean space E_2^4 . Reseach Article (approved).
- [17] Erpehlivan, Z., Kocayigit, H., Aydın, T.A. Some integral characterizations of timelike helices in $\mathbb{R}_2^4$. Reseach Article (Approved), 2022.
- [18] Akgün, M. A., Sivridağ A.İ. Some characterizations for spacelike inclined curves. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat., 2019, 68(2), 1576-1585.
- [19] Hacısalihoğlu, H.H. Diferensiyel geometri. Ankara Üniversitesi, 1998.
- [20] Sabuncuoğlu, A. Diferensiyel geometri. Ankara, 2004.
- [21] Kreyszig, E. Differential geometry. Univ.of Toronto Press, Toronto, 1959.
- [22] O’neill, B. Elementary differential geometry. Academic Press, Revised 2nd Edition, Newyork, 1996.
- [23] Milliman, W., Parker, G.D. Elements of differential geometry. Prentice Hall, Korea, 2007.
- [24] Izumiya, S., Takeuchi, N. New special curves and developable surfaces. Turk. J. Math., 2004, 28, 531-537.
- [25] Duggal, K.L. Space time manifolds and cotact structures. Internat. J. Math. Math. Sci. 13; 1990, 545-554.
- [26] O’neill, B. Semi-Riemannian geometry with applications to relativity. Akademic Press, London, 1983.
- [27] Lopez, R. Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski Space. International Electronic Journal of Geometry. 2014, 7(1), 44-107.
- [28] Lopez, R. Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski Space, 2008, arXiv:0810.3351v1 [math.DG].
- [29] Uğurlu, H.H., Çalışkan, A. Darboux ani dönme vektörleri ile spacelike ve timelike yüzeyler geometrisi. Celal Bayar Üniversitesi Yayınları, Manisa, 2012.
- [30] Ratcliffe, J. G., Foundations of Hyperbolic manifolds. Springer, Newyork, 2006.
- [31] Çöken A. C., Görgülü A. On the joachimsthal's theorems in semi Euclidean spaces. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 70, 2009, 3932- 3942.

[32] Ersoy, S., Tosun, M. Timelike Bertrand curves in semi-Euclidean space. arXiv:1003.1220v1[math.DG].



ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Zeliha ERPEHLİVAN

Doğum Yeri ve Tarihi:

Medeni Hali

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta

Eğitim Durumu

Lise : Mehmet Akif Anadolu Lisesi, 1996

Lisans : Pamukkale Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2000

Mesleki Deneyim

BİLECİK- Bozüyük : Dodurga Atatürk Çok Programlı Lisesi 2000\2001

KIRKLARELİ-Pınarhisar : Cevizköy İlköğretim Okulu 2001\2004

KIRKLARELİ -Pınarhisar : Pınarhisar Anadolu Lisesi 2004\2010

KIRKLARELİ-Lüleburgaz : Düvenciler Anadolu Lisesi 2010\2014

MANİSA-Salihli : Şehit Erdoğan Kayar Anadolu Lisesi 2014\2019

MANİSA-Turgutlu : Niyazi Üzmez Anadolu Lisesi 2019 \